федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования

«Национальный исследовательский университет ИТМО»

Факультет систем управление и информатики

Практическая работа №1

Выполнил:

Нагорный Л.А.

Группа:

R4135c

Преподаватель:

Ракшин Е.А.

Санкт-Петербург

2025

1. Уравнение варианта

Рассматриваем ОДУ

$a\ddot{x} + b\dot{x} + cx = d,$

с параметрами:

a=2.26, b=2.09, c=1.99, d=6.46,d=6.46.

2. Частное решение (точка равновесия)

Частное решение x_* — постоянное, такое что $cx_* = d$, поэтому

$x_* = d/c \approx 3.25$

3. Характеристическое уравнение — корни

Для однородной части имеем характеристическое уравнение

$a\ddot{\lambda} + b\dot{\lambda} + c\lambda = 0,$

Дискриминант:

$\Delta = b^2 - 4ac \approx -13.622 < 0,$

Значит корни комплексно-сопряжённые:

$\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta,\ \alpha \approx -0.462,\ \beta \approx 0.816.$

4. Общее аналитическое решение

Поскольку $\Delta < 0$, решение имеет вид

$x(t) = x_* + e^{\alpha t}(Acos(\beta t) + Bsin(\beta t)),$

$v(t) = \dot{x}(t) = e^{\alpha t}((\alpha A + \beta B)cos\beta t + (\alpha B - \beta A)sin\beta t).$

Коэффициенты A,B находятся из начальных условий $x(0) = x_0,\ v(0) = v_0$

Для наших начальных условий $x_0 = 0.1,\ v_0 = 0$ этот аналитический вариант вычислен численно.

5. Приведение к системе 1-го порядка

Обозначим $x_1 = x,\ x_2 = v = \dot{x}$. Тогда

$$\dot{x} = Ax + g,\ A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -c/a & -b/a \end{bmatrix},\ g = \begin{pmatrix} 0 \\ d/a \end{pmatrix}.$$

Численно:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -0.88 & -0.92 \end{bmatrix},\ g = \begin{pmatrix} 0 \\ 2.86 \end{pmatrix}.$$

6. Численные методы параметры

Шаг интегрирования $h = 0.01$, конечное время $T_f = 5$. Использованы:

1) явный (Forward) Euler,
2) неявный (Backward) Euler,
3) RK4 (классический 4 порядка).

Начальные условия: $x_0 = 0.1,\ v_0 = 0$.

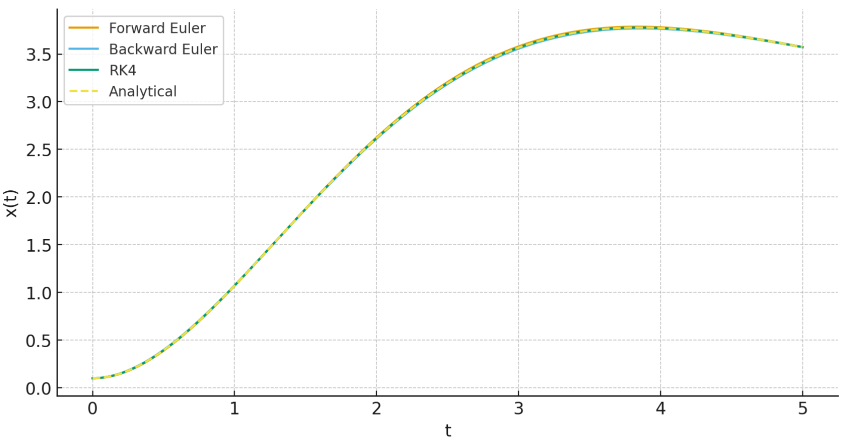
7. Результаты ошибок(сравнение с аналитическими)

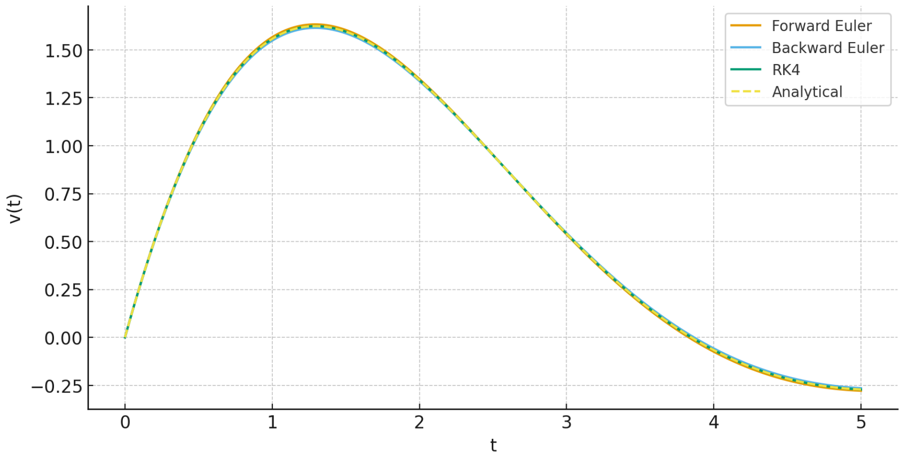
Таблица ошибок (значения округлённо показаны в DataFrame, точные — в выводе):

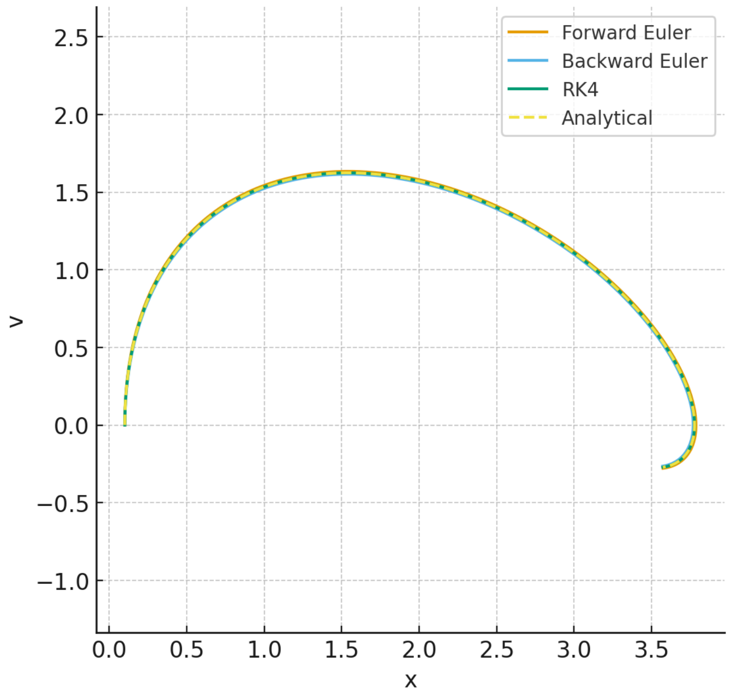
Сравнение ошибок численных методов (a=2.26, b=2.09, c=1.99, d=6.46)

Метод	max|x-x*|	max|v-v*|	L2(x)	L2(v)
Forward Euler	0.01182213	0.00936893	0.00724614	0.00679292
Backward Euler	0.01166841	0.00925899	0.00716182	0.00669743
RK4	1.615e-10	1.306e-10	9.937e-11	9.344e-11

8. Графики







По графикам видно: все методы аппроксимируют аналитическое решение хорошо; RK4 дает хорошую точность, явный и неявный Эйлер — хуже, но остаются стабильными и близкими к аналитике (система затухающая за счёт α<0).

9. Вывод

Система при выбранных параметрах является **затухающей** (реальная часть собственных чисел отрицательная), поэтому решение стремится к точке равновесия $x_* \approx 3.246$ с осциллирующим затуханием.

Метод RK4 показывает хорошую точность при шаге $h = 0.01$.
Методы явного и неявного Эйлера дают сравнимые по величине ошибки, Backward Euler немного точнее. При желании можно уменьшить шаг h для Эйлера, чтобы добиться точности, сравнимой с RK4.