

Laboratorio 1

Computación Científica I

I) Representación Punto Flotante
II) Pérdida de significancia

INTEGRANTES:

Oscar Rencoret oscar.rencoret@alumnos.usm.cl 2011735352-8

Ximena Rojas ximena.rojas@alumnos.usm.cl 201173568-4

1 Introducción

Este informe tiene como objetivo resolver y analizar los ejercicios propuestos que ponen en evidencia las limitaciones de realizar cálculos aritméticos en un computador y que se deben tener en cuenta al realizar operaciones aritméticas.

2 Pequeña descripción de los experimentos

- Se pone a prueba la precisión del ordenador, realizando operaciones aritméticas en ordenes de magnitud alrededor del ϵ_{match}
- Se representan gráficamente los números decimales en notación de punto flotante con la finalidad de evidenciar la pérdida de precisión.

3 Parte I: Representación Punto Flotante

3.1 Pregunta 1

- a) Calcule las distancias aritméticamente.
Aritméticamente las sumas dan como resultado:

(i)

$$\begin{aligned}((1 + 2^{-52}) - 1) + 2^{-54} + 1 &= 2^{-52} + 2^{-54} + 1 \\ 2^{-52} + 2^{-54} + 1 &= 2^2 * 2^{-54} + 2^{-54} + 1 \\ 2^2 * 2^{-54} + 2^{-54} + 1 &= 2^{-54}(2^2 + 1) + 1 \\ 2^{-54}(2^2 + 1) + 1 &= 2^{-54} * 5 + 1 \\ 5 * 2^{-54} + 1 &= 1.000000000000000277555756\end{aligned}\tag{1}$$

$$\begin{aligned}((1 + 2^{-54}) - 1) + 2^{-52} + 1 &= 2^{-54} + 2^{-52} + 1 \\ 2^{-54} + 2^{-52} + 1 &= 2^{-54} + 2^2 * 2^{-54} + 1 \\ 2^{-54} + 2^2 * 2^{-54} + 1 &= 2^{-54}(1 + 2^2) + 1 \\ 2^{-54}(1 + 2^2) + 1 &= 2^{-54} * 5 + 1 \\ 5 * 2^{-54} + 1 &= 1.000000000000000277555756\end{aligned}\tag{2}$$

(ii)

$$\begin{aligned}(5 - 4) + 2^{-52} &= 1 + 2^{-52} \\ 1 + 2^{-52} &= 1.000000000000000222044605\end{aligned}\tag{3}$$

$$\begin{aligned}5 - (4 - 2^{-52}) &= 5 - 4 - 2^{-52} \\ 5 - 4 - 2^{-52} &= 1 - 2^{-52} \\ 1 - 2^{-52} &= 0.999999999999999777955395\end{aligned}\tag{4}$$

(iii)

$$(2^{53} + (-2^{53})) + (1 + 0.5 + 0.25) = (2^{53} - 2^{53}) + 1.75 \quad (5)$$

$$(2^{53} - 2^{53}) + 1.75 = 1.75$$

$$(2^{53} + (1 + 0.5 + 0.25)) - 2^{53} = 2^{53} + 1.75 - 2^{53} \quad (6)$$

$$2^{53} + 1.75 - 2^{53} = 1.75$$

- b) Con la ayuda de *Python* o *Matlab*, calcule nuevamente las distancias, esta vez computacionalmente, analizando cada caso del cálculo (desarrollo de los paréntesis) y como influyen en el resultado
Lo resultados son:

```
i.1
((1 + 2**(-52)) - 1) + 2**(-54) + 1
((1.00000000000000002) - 1) + 2**(-54) + 1
(2.220446049250313e-16) + 2**(-54) + 1
2.7755575615628914e-16 + 1
1.00000000000000002
i.2
((1 + 2**(-54)) - 1) + 2**(-52) + 1
((1.0) - 1) + 2**(-52) + 1
(0.0) + 2**(-52) + 1
2.220446049250313e-16 + 1
1.00000000000000002
```

En el caso 1 se observa como todas las sumas se logran representar. Pero pierden precisión al momento de sumar los enteros (1) con los números cercanos a ϵ_{mach} debido a que la representación de 52 bits de mantisa no permite guardar los demás bits de precisión de los números cercanos a ϵ_{mach}

```
ii.1
(5 - 4) + 2**(-52)
1 + 2**(-52)
1.00000000000000002
ii.2
5 - (4 - 2**(-52))
5 - 4.0
1.0
```

En el caso 2 se observa que la resta $4 - 2^{-52}$ tiene como resultado 4.0 debido a que la representación binaria de 4 no deja espacio para representar ningún número de 2^{-52} por tanto la resta se reduce a $4 - 0$. Una pérdida de precisión.

```
iii.1
(2**(53) + (-2**(53))) + (1 + .5 + .25)
0 + 1.75
```

```
1.75
iii.2
(2**(53) + (1 + .5 + .25)) - 2**(53)
9007199254740994.0 - 2**(53)
2.0
```

En el caso 3 se puede observar que la representación de 2^{53} no permite representar cifras menores a 1 por lo tanto $(1 + 0.5 + 0.25) = 1.75$ El código utilizado para resolver las sumas se encuentra en el Anexo.

- c) Defina que es ϵ_{mach}
 ϵ_{mach} es la distancia que existe entre el número 1 y el menor número siguiente en representación punto flotante que es mayor a 1. En representación con doble precisión de punto flotante, corresponde a $1 + 2^{-52}$, por lo que la distancia corresponde a $\epsilon_{mach} = 2^{-52}$.
- d) Analice y concluya: ¿Existen diferencias entre los resultados aritméticos y computacionales?. De ser así, explique porque ocurren estas diferencias
 Si existen diferencias, ya que los resultados expresados computacionalmente pierden precisión, en el siguiente ejemplo los valores que están dentro de la primera columna son los 52 bit que realmente se almacenan (mantisa) y se aprecia que existen bits significativos fuera (segunda columna), esos bits no son almacenados en el computador y son los causantes de la pérdida de precisión en el resultado.

$1 + 2^{-54}$

1.	00	000	$\times 1$
+	0.	010	$\times 1$
=	1.	010	$\times 1$

- e) ¿Qué distancias son representables en el sistema?
Solo la distancia (i) es representable en el sistema debido a que las otras dos muestran resultados distintos en ambas mediciones y el sistema fallará en la reconstrucción de la medición. Sin embargo, mediante operaciones aritméticas manuales sólo la distancia (ii) debería fallar, puesto que sus distancias son distintas.
La razón de que la distancia (iii) fallara es la pérdida de precisión en la operación $2^{53} + (1 + 0.5 + 0.25)$ en la cuál al no poder representar el número 1.75 lo redondea a 2.0 y se trunca el resultado.

3.2 Pregunta 2

- a) Argumente porqué no está de acuerdo con *Van Simpson*
De acuerdo con las representaciones computacionales que utilizan los números flotantes de 64 bits, éstos contienen 52 bits de mantisa que en conjunto con su exponente solo pueden representar operaciones aritméticas entre números

b) Desarrolle un código para determinar/estimar el flotante $fl(x)$ positivo de menor magnitud, tal que $fl(x) + \epsilon_{mach}$ no sea representable. De acuerdo con el análisis teórico, el valor debería rondar el número 2 ya que es el primer entero cuya suma con ϵ_{mach} no es representable. Por lo tanto se decidió utilizar un *approach* de bisección para buscar una raíz de la función: $(x + \epsilon_{mach}) - x = 0; x \in [0, 2]$ la cuál entregará el menor número en el cual en la resta solicitada ϵ_{mach} no es representable.

Por lo tanto se estima que 2 es el menor numero positivo tal que la suma no es representable debido a que:

1.	000	000	$\times 2$
+ 0.	000	100	$\times 2$
= 1.	000	100	$\times 2$

c) Desarrolle un código para determinar/estimar el flotante $fl(x)$ positivo de mayor magnitud, tal que $fl(x) + \frac{\epsilon_{mach}}{2}$ sea representable. De acuerdo con el análisis teórico, el valor debería rondar el número 1 ya que es el primer entero cuya suma con ϵ_{mach} no es representable. Por lo tanto se decidió utilizar un *approach* de bisección para buscar una raíz de la función: $(x + \epsilon_{mach}) - x = 0; x \in [0, 2]$ la cuál entregará el mayor número en el cual en la resta solicitada ϵ_{mach} no es representable.

Por lo tanto se estima que 0.999999999999999 es el mayor numero positivo tal que la suma no es representable debido a que:

- c) Indique la relación del gráfico anterior con la propiedad
 $|fl(x) - x| \leq 0,5\epsilon_{mach} |x|$

4 Parte II: Pérdida de Significancia

4.1 Pregunta 1

- a) Con la ayuda de Python o Matlab, evalúe la función en $x = 10^{-t}$, donde $t \in \{1, 2, 3, \dots, 20\}$
 Evaluando la función con la ayuda de Python (Código en Anexo) se presenta un extracto de la tabla de resultados para los distintos valores de t :

p	$x = 10^{-t}$	$y(x)$
1	0.10000000000000000000	-0.49874791371143462
2	0.01000000000000000000	-0.49998749979095553
3	0.00100000000000000000	-0.49999987501428939
4	0.00010000000000000000	-0.49999999362793118
5	0.00001000000000000000	-0.50000004133685227
6	0.00000100000000000000	-0.50004445029083722
7	0.00000010000000000000	-0.51070259132756868
8	0.00000001000000000000	0.0
9	0.00000000100000000000	0.0
19	0.00000000000000000010	0.0
20	0.00000000000000000001	0.0

Se aprecia que a partir de $t = 8$ existe una falta de precisión del computador, específicamente cuando se calcula la $\sec(x)$ en la función, dando como resultado siempre 1.0, es decir, cuando se calcula el numerador de la función $(1 - \sec(x))$ queda como resultado 0.0.

- b) Encuentre **dos** representaciones alternativas para eliminar los errores de cancelación del Factor Mavillano.
 Primera representación:

$$y(x) = \left(\frac{\cos(x)}{\sin(x)} \right)^2 - \frac{\cos(x)}{\sin(x)^2}$$

Segunda Representación:

$$y(x) =$$

- c) Calcule los errores relativos entre el valor aritmético y sus representaciones alternativas para cada evaluación realizada. Concluya al respecto.
 d) Analice como afecta ϵ_{mach} en lo realizado anteriormente ¿Cómo reacciona el error en cálculos de arrastre?

5 Conclusión

6 Referencias

1. Timothy Sauer; Numerical Analysis, 2012, 2nd ed., p. 5-14

7 Anexo

Para la resolución de los problemas de utilizaron los siguientes códigos de *Python*:

- Parte I, Pregunta 1, b)

```
# Item 1
print("i.1")
print("((1 + 2**(-52)) - 1) + 2**(-54) + 1")
r1 = 1 + 2**(-52)
print("(" + str(r1) + ") - 1) + 2**(-54) + 1")
r1 -= 1
print("(" + str(r1) + ") + 2**(-54) + 1")
r1 += 2**(-54)
print(str(r1) + " + 1")
r1 += 1
print(str(r1))
print("i.2")
print("((1 + 2**(-54)) - 1) + 2**(-52) + 1")
r1 = 1 + 2**(-54)
print("(" + str(r1) + ") - 1) + 2**(-52) + 1")
r1 -= 1
print("(" + str(r1) + ") + 2**(-52) + 1")
r1 += 2**(-52)
print(str(r1) + " + 1")
r1 += 1
print(str(r1))
print("")
# Item 2
print("ii.1")
print("(5 - 4) + 2**(-52)")
r1 = 5 - 4
print(str(r1) + " + 2**(-52)")
r1 += 2**(-52)
print(r1)
print("ii.2")
print("5 - (4 - 2**(-52))")
r1 = 4 - 2**(-52)
print("5 - " + str(r1))
```



```

r1 = 5 - r1
print(r1)
print("")
#Item 3
print("iii.1")
print("(2**(53) + (-2**(53)) + (1 + .5 + .25)")
r1 = 2**(53) + (-2**(53))
r2 = 1 + .5 + .25
print(str(r1) + " + " + str(r2))
print(str(r1 + r2))
print("iii.2")
print("(2**(53) + (1 + .5 + .25)) - 2**(53)")
r1 = 2**(53) + (1 + .5 + .25)
print(str(r1) + " - 2**(53)")
r1 = r1 - 2**(53)
print(r1)

```

- Parte I, Pregunta 2, b)

```

e_mach = 2**(-52)
x = 1.9999999999999999
while((x + e_mach) - x != 0):
    x += e_mach
print(x)
print("El menor numero en el cual la suma no es representables es: " + str(x))

```

- Parte I, Pregunta 2, c)

```

e_mach = 2**(-52)
x_1 = 0.9999999999999999
x_2 = x_1
while(((x_2 + e_mach/2) - x_2) != 0):
    x_1 = x_2
    x_2 += e_mach/2
print(x_2)
print("El mayor numero en el cual la suma es representables es: " + str(x_1))

```

- Parte I, Pregunta 3, a)

```

def epsilon(fl):
    if(fl >= 1):
        exp = 0
        while(fl >= 2 ** (exp + 1)):
            exp += 1
        else:

```

```

exp = -1
while(fl <= 2 ** (exp - 1)):
    exp -= 1
exp -= 52
return 2**exp

```

- Parte I, Pregunta 3, b)

```

from parte1_pregunta3_a import epsilon

print("| i | e |")
for i in range (-50, 51):
    print("| " + str(i) + " | " + str(epsilon(2**(i))) + " |")

```

- Parte II, Pregunta 1, a)

```

from math import *
def Mavillan ():
    for i in range(1,21):
        a = 10**(-i)
        b = (1-(1/cos(a)))/((tan(a)**2))
        print(b)
    print ("\n")
Mavillan()

```

- Parte II, Pregunta 1, b)

```

from math import *
def Mavillan2():
    for i in range(1,21):
        a = 10**(-i)
        b = ((cos(a)/sin(a))**2)-(cos(a)/(sin(a))**2)
        print(b)
    print ("\n")
Mavillan2()

```