Los problemas de los viernes

Angie Yuliana Sandoval Reyes

Sharith Dayanna Pinzón Quintero

1. Las fosas para competencias de clavados, desde plataforma de 10 m de altura, tienen 5 m de profundidad
   - Justifique (cuantitativamente) por qué esa debe ser la profundidad que garantice la seguridad de los atletas.

Cálculo de la profundidad a partir del balance de energías

Para realizar el balance de energía, se considerarán dos momentos clave: el primero, justo antes de que el atleta entre en contacto con el agua, y el segundo, cuando la densidad del atleta se iguala a la densidad del agua. La referencia para este análisis se establece en la superficie del agua.

En el primer momento, se tiene energía potencial asociada a la altura sobre la piscina (h') y energía cinética correspondiente al movimiento de caída.

$$U + K = m_o g h' + \frac{1}{2} m_o v^2, v = \sqrt{2hg}, \tag{1}$$

$$= m_o g h' + m_o g h. \tag{2}$$

aquí h se refiere a la altura de la caída y m_o a la masa del atleta.

Ahora, el segundo instante se tomo de esta manera debido al principio de Arquímedes, cuando la densidad del objeto es igual a la densidad del agu, el objeto no se gunda ni flota, se suspende en el agua. Como consecunecia de esto, se tiene que la energia potencial es proporcional a la fuerza de empuje (U), como se presenta en la siguiente ecuación, donde m_a es la masa del agua desplazada.

$$-U = -m_a g h'. \tag{3}$$

Igualando las ecuaciones 2 y 3 se tiene:

$$-m_a g h' = m_o g h' + m_o g h. \tag{4}$$

Las masas las podemos escribir como la densidad por el volumen. Cuando el objeto se queda suspendido en el agua, el volumen de agua desplazada es igual al voluumen del objeto, de modo que

$$-\rho_a v_a g h' = \rho_o v_o g(h' + h), \rho_a = \rho_o y v_a = v_o, \tag{5}$$

$$h' = h' + h, \tag{6}$$

$$h' = \frac{h}{2}. \tag{7}$$

Por lo que, en el modelo ideal en el cual no se considera la resistencia del agua, la altura a la que cualquier objeto se queda suspendido en el agua es la mitad de la altura de la caída inicial. Este cálculo evidencia que la profundidad de 5 metros es suficiente para garantizar que el atleta pueda detenerse de manera segura sin riesgo de impacto con el fondo de la fosa, proporcionando así la seguridad necesaria en las competencias de clavados.

Cálculo de la profundidad a partir de otros factores

Ahora, considerando otros factores como la resistencia del agua, se puede obtener que:

Un atleta que se lanza desde una plataforma de 10 metros cae libremente bajo la influencia de la gravedad. La velocidad al impactar el agua, v_0, se puede calcular usando la ecuación:

$$v_0 = \sqrt{2gh} \tag{8}$$

donde $g = 9{,}81\,\mathrm{m/s^2}$ es la aceleración debida a la gravedad y $h = 10\,\mathrm{m}$ es la altura de la plataforma.

Sustituyendo los valores:

$$v_0 = \sqrt{2 \times 9{,}81\,\mathrm{m/s^2} \times 10\,\mathrm{m}} \approx 14\,\mathrm{m/s}. \tag{9}$$

Cuando el atleta entra en el agua, experimenta una fuerza de resistencia F_r que generalmente se modela como proporcional al cuadrado de la velocidad v:

$$F_r = \frac{1}{2} C_d \rho A v^2, \tag{10}$$

donde C_d es el coeficiente de arrastre, que depende de la forma del cuerpo del atleta y su orientación, $\rho = 1000\,\mathrm{kg/m^3}$ es la densidad del agua, A es el área de la sección transversal del cuerpo del atleta en la dirección del movimiento, y v es la velocidad del atleta en el agua.

El movimiento del atleta bajo el agua es desacelerado por la fuerza resistiva. Aplicando la segunda ley de Newton, la ecuación del movimiento es:

$$m\frac{dv}{dt} = -\frac{1}{2}C_d\rho A v^2, \tag{11}$$

donde m es la masa del atleta.

Se puede reescribir esto como:

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{1}{2}\frac{C_d\rho A}{m}v^2. \tag{12}$$

Esta ecuación puede integrarse para obtener la velocidad en función del tiempo o la profundidad.

Se puede encontrar la profundidad necesaria integrando la ecuación del movimiento para obtener la relación entre la velocidad y la profundidad.; sin embargo, para simplificar el problema, se puede usar una aproximación considerando que el atleta desacelera desde v_0 hasta detenerse a $v = 0$.

Para la integración, suponiendo una resistencia cuadrática (donde $v(t)$ es la velocidad en función del tiempo):

$$\frac{dv}{v^2} = -\frac{1}{2}\frac{C_d\rho A}{m}dt. \tag{13}$$

Integrando desde v_0 a 0, y desde 0 hasta la profundidad d:

$$\int_{v_0}^{0}\frac{dv}{v^2} = -\frac{1}{2}\frac{C_d\rho A}{m}\int_{0}^{d}dz. \tag{14}$$

Esto lleva a:

$$\left[-\frac{1}{v}\right]_{v_0}^{0} = \frac{C_d\rho A}{2m}d. \tag{15}$$

Dado que v tiende a 0 en la profundidad d, la expresión se simplifica a:

$$\frac{1}{v_0} = \frac{C_d\rho A}{2m}d. \tag{16}$$

Despejando d:

$$d = \frac{2m}{C_d \rho A v_0}. \tag{17}$$

Ahora, se puede estimar los valores típicos para un atleta:

- Masa del atleta $m \approx 70\,\mathrm{kg}$
- Área transversal $A \approx 0{,}3\,\mathrm{m}^2$ (dependiendo de la postura al entrar al agua)
- Coeficiente de arrastre $C_d \approx 1{,}0$ (puede variar según la postura)

Sustituyendo estos valores:

$$d = \frac{2 \times 70\,\mathrm{kg}}{1{,}0 \times 1000\,\mathrm{kg/m^3} \times 0{,}3\,\mathrm{m}^2 \times 14\,\mathrm{m/s}} \tag{18}$$

$$d \approx 3{,}33\,\mathrm{m}. \tag{19}$$

Aunque el cálculo simplificado sugiere que 3.33 m podrían ser suficientes para desacelerar al atleta, una profundidad de 5 metros proporciona un margen de seguridad adicional para variaciones en los parámetros como el coeficiente de arrastre, la postura al entrar al agua, y otros factores que pueden aumentar la desaceleración necesaria. Este margen garantiza que incluso en condiciones menos ideales, el atleta no golpeará el fondo de la fosa con suficiente energía como para causar daño; por lo tanto, la profundidad de 5 metros es adecuada para garantizar la seguridad de los atletas.

- Suponga que un corcho esférico de 5 cm de diámetro está en el fondo de fosa. Calcule la velocidad con la que llega a la superficie.

Al considerar un cuerpo esférico sumergido en un fluido, las principales fuerzas que actúan sobre él son:

Fuerza de empuje (F_b): Dada por el principio de Arquímedes, esta fuerza es igual al peso del volumen de fluido desplazado por el cuerpo.

Peso del cuerpo (W_c): La fuerza de gravedad que actúa sobre el cuerpo.

Fuerza de arrastre (F_d): Una fuerza resistiva que actúa en dirección opuesta al movimiento del cuerpo a través del fluido. En el régimen de velocidad terminal, esta fuerza iguala la fuerza neta que impulsa al cuerpo hacia arriba.

La fuerza de empuje se puede expresar como:

$$F_b = \rho_{\text{fluido}} \cdot V \cdot g, \tag{20}$$

donde ρ_{fluido} es la densidad del fluido (en este caso, agua), V es el volumen del cuerpo sumergido, y g es la aceleración debido a la gravedad.

Para un cuerpo esférico, el volumen V es:

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3. \tag{21}$$

Sustituyendo:

$$F_b = \rho_{\text{agua}} \cdot \frac{4}{3}\pi r^3 \cdot g. \tag{22}$$

El peso del cuerpo es:

$$W_c = \rho_c \cdot V \cdot g = \rho_c \cdot \frac{4}{3}\pi r^3 \cdot g \tag{23}$$

donde ρ_c es la densidad del corcho.

La fuerza de arrastre F_d para un cuerpo esférico en un fluido puede expresarse usando la ley de Stokes para el régimen laminar, o más generalmente usando la siguiente expresión:

$$F_d = \frac{1}{2}C_d \cdot \rho_{\text{fluido}} \cdot A \cdot v^2, \tag{24}$$

donde C_d es el coeficiente de arrastre, dependiente de la forma del cuerpo y el régimen del flujo, A es el área de la sección transversal del cuerpo ($A = \pi r^2$), y v es la velocidad del cuerpo.

La ecuación general del movimiento ascendente en términos de fuerzas es:

$$m \cdot \frac{dv}{dt} = F_b - W_c - F_d. \tag{25}$$

Sin embargo, para la velocidad terminal (v_t), la aceleración $\frac{dv}{dt} = 0$, por lo que:

$$0 = F_b - W_c - F_d. \tag{26}$$

Sustituyendo F_b, W_c y F_d:

$$\rho_{\text{agua}} \cdot \frac{4}{3}\pi r^3 \cdot g - \rho_c \cdot \frac{4}{3}\pi r^3 \cdot g = \frac{1}{2}C_d \cdot \rho_{\text{agua}} \cdot \pi r^2 \cdot v_t^2. \tag{27}$$

Simplificando:

$$\frac{4}{3}\pi r^3(\rho_{\text{agua}} - \rho_c) \cdot g = \frac{1}{2}C_d \cdot \rho_{\text{agua}} \cdot \pi r^2 \cdot v_t^2. \tag{28}$$

Se puede simplificar aún más para resolver v_t:

$$v_t^2 = \frac{8r(\rho_{\text{agua}} - \rho_c) \cdot g}{3C_d \cdot \rho_{\text{agua}}}. \tag{29}$$

Y finalmente:

$$v_t = \sqrt{\frac{8r(\rho_{\text{agua}} - \rho_c) \cdot g}{3C_d \cdot \rho_{\text{agua}}}}. \tag{30}$$

Ahora, se pueden sustituir los valores:

- $r = 0{,}025\,\text{m}$.
- $\rho_{\text{agua}} = 1000\,\text{kg/m}^3$.
- $\rho_c = 240\,\text{kg/m}^3$.
- $g = 9{,}81\,\text{m/s}^2$.
- $C_d \approx 0{,}5$ (valor típico para esferas en flujo laminar).

$$v_t = \sqrt{\frac{8 \times 0{,}025 \times (1000 - 240) \times 9{,}81}{3 \times 0{,}5 \times 1000}}. \tag{31}$$

$$v_t = \sqrt{\frac{1491{,}24}{1500}} \approx 0{,}99416 \approx 0{,}997\,\text{m/s}. \tag{32}$$

En ese sentido, la velocidad terminal con la que el corcho esférico asciende a la superficie es aproximadamente $0{,}997\,\text{m/s}$.

Cálculo de la velocidad a partir de la segunda ley de Newton

La Segunda Ley de Newton establece que la suma de las fuerzas sobre un cuerpo es igual a la masa del cuerpo multiplicada por su aceleración:

$$\sum \vec{F} = m \cdot \vec{a}. \tag{33}$$

Para este caso, la dirección positiva será hacia arriba. Entonces, se puede escribir la ecuación de movimiento como:

$$F_b - W_c - F_d = m \cdot a, \tag{34}$$

donde a es la aceleración del corcho hacia arriba, F_b es la fuerza de empuje, W_c es el peso del corcho, y F_d es la fuerza de arrastre, que depende de la velocidad del corcho.

Fuerza de empuje (F_b):

$$F_b = \rho_{\text{agua}} \cdot V \cdot g, \tag{35}$$

donde V es el volumen del corcho, que para una esfera es:

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3. \tag{36}$$

Peso del corcho (W_c):

$$W_c = \rho_c \cdot V \cdot g. \tag{37}$$

Fuerza de arrastre (F_d):

En el régimen de baja velocidad (donde no se alcanza la velocidad terminal de inmediato), la fuerza de arrastre se expresa como:

$$F_d = \frac{1}{2} C_d \cdot \rho_{\text{agua}} \cdot A \cdot v^2, \tag{38}$$

donde $A = \pi r^2$ es el área de la sección transversal del corcho y v es la velocidad del corcho. Sustituyendo las expresiones de las fuerzas en la Segunda Ley de Newton:

$$\rho_{\text{agua}} \cdot \frac{4}{3}\pi r^3 \cdot g - \rho_c \cdot \frac{4}{3}\pi r^3 \cdot g - \frac{1}{2} C_d \cdot \rho_{\text{agua}} \cdot \pi r^2 \cdot v^2 = m \cdot \frac{dv}{dt}. \tag{39}$$

Donde $m = \rho_c \cdot V$, y simplificando:

$$\frac{4}{3}\pi r^3 (\rho_{\text{agua}} - \rho_c) \cdot g - \frac{1}{2} C_d \cdot \rho_{\text{agua}} \cdot \pi r^2 \cdot v^2 = \frac{4}{3}\pi r^3 \cdot \rho_c \cdot \frac{dv}{dt}. \tag{40}$$

Se puede simplificar aún más:

$$(\rho_{\text{agua}} - \rho_c) \cdot g - \frac{3C_d \cdot \rho_{\text{agua}} \cdot v^2}{8r} = \rho_c \cdot \frac{dv}{dt}. \tag{41}$$

Esta es una ecuación diferencial no lineal que describe cómo la velocidad $v(t)$ cambia con el tiempo.

Cuando el corcho alcanza la velocidad terminal v_t, la aceleración $\frac{dv}{dt} = 0$, lo que nos lleva a:

$$(\rho_{\text{agua}} - \rho_c) \cdot g = \frac{3C_d \cdot \rho_{\text{agua}} \cdot v_t^2}{8r}. \tag{42}$$

Resolviendo para v_t:

$$v_t^2 = \frac{8r(\rho_{\text{agua}} - \rho_c) \cdot g}{3C_d \cdot \rho_{\text{agua}}}. \tag{43}$$

$$v_t = \sqrt{\frac{8r(\rho_{\text{agua}} - \rho_c) \cdot g}{3C_d \cdot \rho_{\text{agua}}}}. \tag{44}$$

Sustituyendo los valores:

$$r = 0{,}025\,\text{m},$$
$$\rho_{\text{agua}} = 1000\,\text{kg/m}^3,$$
$$\rho_c = 240\,\text{kg/m}^3,$$
$$g = 9{,}81\,\text{m/s}^2,$$
$$C_d \approx 0{,}5.$$

Se obtiene que:

$$v_t = \sqrt{\frac{8 \times 0{,}025 \times (1000 - 240) \times 9{,}81}{3 \times 0{,}5 \times 1000}}, \tag{45}$$

$$v_t \approx 0{,}997\,\text{m/s}. \tag{46}$$

Aplicando la Segunda Ley de Newton, se determina que la velocidad terminal del corcho, es decir, la velocidad con la que llega a la superficie del agua, es aproximadamente $0{,}997\,\text{m/s}$. Este valor se alcanza debido al balance entre las fuerzas de empuje, el peso y la resistencia del agua, lo que lleva a un movimiento uniforme (velocidad constante) una vez alcanzada la velocidad terminal.

Ahora, para abordar el problema considerando efectos transitorios y posibles variaciones en la resistencia de arrastre, se necesita resolver la ecuación de movimiento del corcho de manera que tenga en cuenta cómo la velocidad cambia con el tiempo hasta que se alcanza la velocidad terminal. Esto implica resolver una ecuación diferencial que describa el comportamiento dinámico del corcho a medida que se mueve hacia la superficie.

Cuando el corcho se mueve hacia arriba en el agua, las fuerzas actuantes son:

- **Fuerza de flotación** (F_b): Es constante y actúa hacia arriba.

- **Peso del corcho** (W_c): Es constante y actúa hacia abajo.
- **Fuerza de arrastre** (F_d): Depende de la velocidad $v(t)$ y actúa en la dirección opuesta al movimiento.

Usando la Segunda Ley de Newton, la ecuación de movimiento es:

$$m\frac{dv(t)}{dt} = F_b - W_c - F_d(v), \tag{47}$$

donde $m = \rho_c V$ es la masa del corcho, y $F_d(v)$ es la fuerza de arrastre, que depende de la velocidad $v(t)$.

- **Fuerza de flotación** (F_b):

$$F_b = \rho_{\text{agua}} \cdot V \cdot g. \tag{48}$$

- **Peso del corcho** (W_c):

$$W_c = \rho_c \cdot V \cdot g. \tag{49}$$

- **Fuerza de arrastre** ($F_d(v)$): Para velocidades bajas a moderadas, la fuerza de arrastre se puede modelar como proporcional al cuadrado de la velocidad:

$$F_d(v) = \frac{1}{2}C_d \cdot \rho_{\text{agua}} \cdot A \cdot v^2, \tag{50}$$

donde $A = \pi r^2$ es el área de la sección transversal del corcho.

Sustituyendo las fuerzas en la ecuación de movimiento:

$$m\frac{dv(t)}{dt} = \rho_{\text{agua}} \cdot V \cdot g - \rho_c \cdot V \cdot g - \frac{1}{2}C_d \cdot \rho_{\text{agua}} \cdot A \cdot v(t)^2. \tag{51}$$

Simplificando:

$$\rho_c \cdot V\frac{dv(t)}{dt} = (\rho_{\text{agua}} - \rho_c) \cdot V \cdot g - \frac{1}{2}C_d \cdot \rho_{\text{agua}} \cdot A \cdot v(t)^2. \tag{52}$$

Dividiendo ambos lados por $\rho_c \cdot V$:

$$\frac{dv(t)}{dt} = \left(\frac{\rho_{\text{agua}} - \rho_c}{\rho_c}\right) \cdot g - \frac{C_d \cdot \rho_{\text{agua}} \cdot A \cdot v(t)^2}{2\rho_c \cdot V}, \tag{53}$$

$$\frac{dv(t)}{dt} = g\left(\frac{\rho_{\text{agua}} - \rho_c}{\rho_c}\right) - \frac{3C_d \cdot \rho_{\text{agua}} \cdot v(t)^2}{8r \cdot \rho_c}. \tag{54}$$

Esta es una ecuación diferencial no lineal de primer orden que describe cómo la velocidad del corcho cambia con el tiempo.

Para resolver esta ecuación diferencial, se puede hacer una sustitución de variables o utilizar un método numérico; sin embargo, para obtener una idea cualitativa del comportamiento, podemos intentar una integración directa para ver cómo la velocidad se aproxima a la velocidad terminal.

La ecuación se puede reescribir en la forma:

$$\frac{dv(t)}{dt} = A - Bv(t)^2, \tag{55}$$

donde:

$$A = g\left(\frac{\rho_{\text{agua}} - \rho_c}{\rho_c}\right). \tag{56}$$

$$B = \frac{3C_d \cdot \rho_{\text{agua}}}{8r \cdot \rho_c}. \tag{57}$$

Esta es una ecuación diferencial de variables separables.

$$\frac{dv(t)}{A - Bv(t)^2} = dt. \tag{58}$$

Integrando ambos lados, tenemos:

$$\int \frac{dv(t)}{A - Bv(t)^2} = \int dt. \tag{59}$$

La solución de la integral es conocida:

$$\frac{1}{\sqrt{AB}} \tanh^{-1}\left(\sqrt{\frac{B}{A}}v(t)\right) = t + C, \tag{60}$$

donde C es la constante de integración que se determina por la condición inicial $v(0) = 0$.

Al resolver para $v(t)$:

$$v(t) = \sqrt{\frac{A}{B}} \tanh\left(\sqrt{\frac{A}{B}}(t + C)\right). \tag{61}$$

La velocidad terminal v_t se obtiene cuando $t \to \infty$:

$$v_t = \sqrt{\frac{A}{B}} = \sqrt{\frac{8r(\rho_{\text{agua}} - \rho_c) \cdot g}{3C_d \cdot \rho_{\text{agua}}}}. \tag{62}$$

Al inicio ($t = 0$): La velocidad del corcho es cero, pero la aceleración es máxima debido a que la fuerza de flotación supera el peso y la fuerza de arrastre todavía es pequeña.

Durante el ascenso: La velocidad aumenta y la fuerza de arrastre también, lo que disminuye la aceleración. Conforme la velocidad se acerca a v_t, la aceleración se reduce hasta casi cero, y el corcho se mueve con velocidad constante (velocidad terminal).

Considerando los efectos transitorios, la velocidad del corcho no es constante al principio, pero se aproxima a una velocidad terminal dada por:

$$v_t = \sqrt{\frac{8r(\rho_{\text{agua}} - \rho_c) \cdot g}{3C_d \cdot \rho_{\text{agua}}}}. \tag{63}$$

Esta velocidad terminal v_t depende de los parámetros físicos del sistema, como las densidades del corcho y del agua, el radio del corcho, y el coeficiente de arrastre.

- Suponga ahora que una burbuja de un gas ideal se encuentra en el fondo de la fosa de clavados y calcule la velocidad con la cual arriba a la superfie.

Para resolver este problema, se utilizan varios conceptos fundamentales de la física de fluidos y gases ideales. La velocidad de ascenso de una burbuja desde el fondo de la fosa hasta la superficie depende de las fuerzas que actúan sobre ella, principalmente la fuerza de empuje y la fuerza de arrastre.

Suposiciones y consideraciones:

Principio de Arquímedes: La burbuja experimenta una fuerza de empuje debido a la diferencia de densidad entre el gas dentro de la burbuja y el agua circundante. Esta fuerza es la que impulsa la burbuja hacia arriba.

Ecuación de Bernoulli (simplificada): Si consideramos que la burbuja se mueve a velocidad terminal, es decir sin aceleración adicional significativa, la fuerza de empuje se iguala con la resistencia viscosa o fuerza de arrastre. Esta fuerza de arrastre depende de la velocidad de la burbuja y las características del fluido.

Ley de Boyle (para gases ideales): A medida que la burbuja asciende, la presión disminuye. Según la ley de Boyle, si la temperatura permanece constante, la presión y el volumen de un gas están inversamente relacionados; por lo tanto, la burbuja se expande a medida que asciende, lo que afecta su volumen y densidad.

La fuerza de empuje F_b es igual al peso del volumen de agua desplazado por la burbuja:

$$F_b = \rho_{\text{agua}} \cdot V_b \cdot g,$$

donde $\rho_{\text{agua}} = 1000\,\text{kg/m}^3$ es la densidad del agua, V_b es el volumen de la burbuja, calculado como $V_b = \frac{4}{3}\pi r^3$ para una burbuja esférica, y $g = 9{,}8\,\text{m/s}^2$ es la aceleración debida a la gravedad.

Se asume que la burbuja es esférica, con un radio de $r = 0{,}025$ m.

$$V_b = \frac{4}{3}\pi(0{,}025)^3 \approx 6{,}54 \times 10^{-5}\,\text{m}^3.$$

Entonces, la fuerza de empuje es:

$$F_b = 1000 \cdot 6{,}54 \times 10^{-5} \cdot 9{,}8 \approx 0{,}641\,\text{N}.$$

Esta fuerza es la que impulsa la burbuja hacia la superficie.

La fuerza de arrastre F_D que actúa sobre la burbuja debido a la resistencia del agua se calcula utilizando la ecuación:

$$F_D = \frac{1}{2} C_D \cdot \rho_{\text{agua}} \cdot A \cdot v_t^2,$$

donde $C_D \approx 0{,}47$ es el coeficiente de arrastre, que para una burbuja esférica es un valor típico, $\rho_{\text{agua}} = 1000\,\text{kg/m}^3$ es la densidad del agua, y $A = \pi r^2$ es el área proyectada de la burbuja, calculada como el área de un círculo.

El área proyectada es:

$$A = \pi(0{,}025)^2 \approx 1{,}96 \times 10^{-3}\,\text{m}^2.$$

Por lo tanto, la fuerza de arrastre es:

$$F_D = \frac{1}{2} \cdot 0{,}47 \cdot 1000 \cdot 1{,}96 \times 10^{-3} \cdot v_t^2 \approx 0{,}461 \cdot v_t^2\,\text{N}.$$

En la situación de velocidad terminal, la fuerza de empuje F_b se iguala a la fuerza de arrastre F_D:

$$F_b = F_D$$

Sustituyendo los valores:

$$0{,}641\,\mathrm{N} = 0{,}461 \cdot v_t^2\,\mathrm{N}$$

Despejamos v_t^2:

$$v_t^2 = \frac{0{,}641}{0{,}461} \approx 1{,}39$$

Tomamos la raíz cuadrada para encontrar v_t:

$$v_t \approx \sqrt{1{,}39} \approx 1{,}18\,\mathrm{m/s}$$

Esto significa que, bajo las condiciones dadas, la burbuja alcanzará una velocidad terminal de aproximadamente 1.18 m/s mientras asciende.

Conforme la burbuja asciende, la presión a la que está sometida disminuye. Según la ley de Boyle, para un gas ideal, la presión P y el volumen V están relacionados de la siguiente manera:

$$P_0 V_0 = P_f V_f,$$

donde P_0 es la presión en el fondo de la fosa, V_0 es el volumen de la burbuja en el fondo, P_f es la presión en la superficie, y V_f es el volumen de la burbuja en la superficie.

La presión en el fondo de la fosa es mayor que en la superficie debido a la columna de agua de 5 m. Si la presión atmosférica a nivel del agua es $P_{\mathrm{atm}} \approx 101325\,\mathrm{Pa}$, entonces la presión a 5 metros de profundidad es:

$$P_0 = P_{\mathrm{atm}} + \rho_{\mathrm{agua}} \cdot g \cdot h = 101325 + 1000 \cdot 9{,}8 \cdot 5 \approx 150325\,\mathrm{Pa}.$$

En la superficie, la presión es simplemente la presión atmosférica:

$$P_f \approx 101325\,\mathrm{Pa}.$$

El volumen final V_f será mayor que el volumen inicial V_0 debido a la expansión:

$$V_f = V_0 \cdot \frac{P_0}{P_f} \approx 6{,}54 \times 10^{-5} \cdot \frac{150325}{101325} \approx 9{,}69 \times 10^{-5}\,\mathrm{m}^3.$$

Este aumento en el volumen reduce la densidad de la burbuja, lo que podría afectar la velocidad terminal. Sin embargo, la velocidad terminal calculada de 1.18 m/s es un valor promedio que considera este cambio gradual en el volumen durante el ascenso.

En ese orden de ideas y cálculos, la velocidad terminal aproximada con la cual una burbuja de gas ideal asciende desde el fondo de la fosa de clavados de 5 metros de profundidad hasta la superficie es de 1.18 m/s. Este resultado se basa en la igualación de la fuerza de empuje y la fuerza de arrastre, considerando los parámetros del problema y la expansión de la burbuja según la ley de Boyle a medida que asciende hacia la superficie. Este análisis considera varios aspectos físicos, incluyendo la resistencia del agua, la densidad del gas, y los cambios de presión, para proporcionar una estimación precisa de la velocidad de ascenso.

2. El siguiente enlace [1] utiliza los resultados de un artículo [2] que describen el movimiento de una partícula sobre una superficie sin fricción.

   - Calcule la trayectoria que da la distancia mas corta entre dos puntos sobre la superficie del cono invertido cuyo ángulo de vértice es α.

   Para determinar la trayectoria geodésica, es decir, la ruta que minimiza la distancia entre dos puntos sobre una superficie específica, se recurre a la ecuación de Euler-Lagrange. Este enfoque permite derivar las ecuaciones de movimiento en sistemas donde se busca minimizar o maximizar una cantidad determinada, como la acción en física clásica. Sin embargo, en el caso de las geodésicas, no se considera la energía potencial o cinética de una partícula, sino exclusivamente el diferencial de longitud, que define la distancia recorrida a lo largo de la superficie.

   En la superficie de un cono invertido, cuyo ángulo de vértice es α, la ecuación de Euler-Lagrange se emplea para encontrar la curva que representa la distancia más corta entre dos puntos dados sobre dicha superficie. El código que se presentará a continuación calculará esta trayectoria geodésica sobre la superficie del cono invertido, considerando las condiciones iniciales[3].

   - Reproduzca las trayectorias que se muestran en el enlace.

   Para reproducir las trayectorias que se muestran en el enlace, se implementará un código en Python graficará las trayectorias geodésicas correspondientes. El cálculo de estas trayectorias se basa en la resolución de las ecuaciones de Euler-Lagrange, que son fundamentales en el cálculo variacional y en la física para derivar las ecuaciones de movimiento en sistemas donde se desea optimizar una cierta cantidad[4].

3. Los cables de los tendidos eléctricos tienen una forma de catenaria. Muestre que esa forma minimiza su energía potencial.

La longitud del cable se define como $s = \sqrt{dx^2 + dy^2}$, la cual se puede reescribir como:

$$s = \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1 + y'^2} dx. \tag{64}$$

[1] http://www.sc.ehu.es/sbweb/fisica3/dinamica/cono/cono.html

[2] Lopez-Ruiz, R., and Pacheco, A. F. (2002). Sliding on the inside of a conical surface. European journal of physics, 23(5), 579.

[3] https://drive.google.com/drive/folders/1-o4JGaPqPMzw2yojJOj1mrdRYYq0ibT6?usp=drive_link

[4] https://drive.google.com/drive/folders/1-o4JGaPqPMzw2yojJOj1mrdRYYq0ibT6?usp=drive_link

A partir de las fuerzas de cohesión, podemos observar que, en cualquier punto del cable, actúan dos tensiones opuestas a lo largo de una línea tangente al diferencial de longitud de arco ds, de acuerdo con la tercera ley de Newton. La tensión $\vec{T}(s)$ es positiva en la dirección ascendente del arco y negativa en la dirección descendente. De esto, podemos concluir que la tensión positiva corresponde a la fuerza que sostiene el cable, mientras que la tensión negativa es la fuerza que estira o tira del cable.

Otra fuerza que actúa sobre la cuerda es su peso. Sin embargo, al considerar un punto individual, no podemos hablar del peso de manera significativa. Para tener en cuenta el peso, consideramos un arco de cuerda, abarcando el intervalo $[s, s + \Delta s]$.

El peso solo tiene componente en la dirección y, y se expresa como $P(0, mg) = P(0, \rho\Delta s\, g)$. Las dependencias de las tensiones a lo largo de la longitud de arco se presentan como $T(s + \Delta s)$ y $-T(s)$.

La estabilidad del cable se determina utilizando la segunda ley de Newton, como se muestra a continuación:

$$\vec{T}(s + \Delta s) - \vec{T}(s) + \vec{P} = 0. \tag{65}$$

Escrbiendo esta ecuacióna en sus componentes se obtienen dos ecuaciones

$$T(s + \Delta s)cos\alpha(s + \Delta s) - T(s)cos\alpha(s) = 0, \tag{66}$$
$$T(s + \Delta s)sen\alpha(s + \Delta s) - T(s)sen\alpha(s) = \rho\Delta sg. \tag{67}$$

Estableciendo que $\Delta s \to 0$ y tenindo en cuenta la definicion de derivada, se obtienen las siguientes relaciones:

$$\frac{d(T(s)cos\alpha(s)}{ds} = 0, \tag{68}$$
$$\frac{d(T(s)cos\alpha(s)}{ds} = \rho g. \tag{69}$$

A partir de la ecuación 68, se deduce que la componente horizontal de la tensión es constante. A partir de esta ecuación, es posible despejar la tensión.

$$Tcos\alpha = c > 0, \tag{70}$$
$$t = \frac{c}{cos\alpha}, \tag{71}$$

sustituyendo la expresión de la ecuación 71 en la ecuación 69 se obtiene:

$$\frac{d(tan\alpha)}{ds} = c_1, \tag{72}$$

donde $c_1 = \frac{\rho g}{c}$.
Aplicacion regla de la cadena se tiene que:

$$\frac{d(tan\alpha)}{dx}\frac{dx}{ds} = c_1, \tag{73}$$

$$\frac{y'(x)}{dx}\frac{dx}{ds} = c_1. \tag{74}$$

La función que define la longitud de arco del cable (ec.64) se puede escribir como:

$$\frac{ds}{dx} = \sqrt{1+y'^2}, \tag{75}$$

esta expresión se puede reemplazar en la ecuación 74.

$$\frac{y'(x)}{dx}\frac{1}{\sqrt{1+y'^2}} = c_1, \tag{76}$$

$$\frac{y''(x)}{\sqrt{1+y'^2}} = c_1, \tag{77}$$

al resolver esta ecuación diferencial se obtiene la siguiente ecuación:

$$y(x) = \frac{cosh(c_1x + c2)}{c_1} + c_3, \tag{78}$$

la cual es la ecuación geenral de la catenaria que da una familia de curvas dependiente de los parámetros c_1, c_2 y c_3, de los cuales c_2 y c_3 se determinan a partir de las condiciones iniciales del problema, mientras que $c_1 = \frac{\rho g}{c}$.