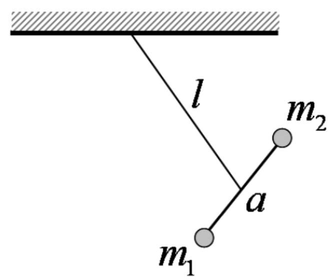
Los problemas de los viernes

Angie Yuliana Sandoval Reyes

Sharith Dayanna Pinzón Quintero

1. Un péndulo compuesto está formado por una varilla de masa despreciable y longitud l, con un extremo fijo y el otro conectado al punto medio de una segunda varilla sin masa de longitud a, $(a < l)$, en cuyos extremos hay dos masas m_1 y m_2. Las varillas pueden rotar sin fricción en un mismo plano vertical. Encuentre las ecuaciones de movimiento de este sistema.



Primero, hay que determinar los grados de libertad del sistema, para ello se realiza un análisis de las ligaduras. La primera ligadura que encontramos se debe a la longitud de la primera varilla, l,

$$x_0^2 + y_0^2 = l^2, \tag{1}$$

donde la coordenada (x_0, y_0) esta ubicada en el cetro de la segunda barra, donde se unen ambas barras. La siguiente ligadura viene dada por la segunda barra, también con longitud constante,

$$(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 = a^2, \tag{2}$$

las coordenadas (x_1, y_1) y (x_2, y_2) se refieren a las posiciones de las masas m_1 y m_2, respectivamente. Teniendo esto en cuenta, nuestro sistema se compone dedos coordenadas, dos partículas y dos ligaduras, de modo que mi sistema tiene dos grados de libertad $((2)(2) - 2 = 2)$, lo cual se traduce a dos coordenadas generalizadas. Las coordenadas generalizadas de este sistema son los ángulos con los que rotan las varillas, $q_1 = \theta$ y $q_2 = \alpha$.

El sistema se puede dividir en dos, la primera parte contiene la barra de longitud l, la cual se puede ver como un péndulo simple, para hallar la energía cinética (T_0) se describe la posición en términos de las coordenadas generalizadas, en este caso, la posición (x_0, y_0) se describe como

$$x_0 = lsin(\theta), \tag{3}$$
$$y_0 = lcos(\theta). \tag{4}$$

Derivando, obtenemos las componentes de la velocidad , de modo que

$$\dot{x}_0 = lcos(\theta)\dot{\theta}, \tag{5}$$
$$\dot{y}_0 = -lsin(\theta)\dot{\theta}, \tag{6}$$

con esta información ya podemos hallar la energía cinética y potencial para construir el lagrangiano de la primera parte del sistema:

$$T_0 = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)(\dot{x}_0^2 + \dot{y}_0^2), \tag{7}$$
$$T_0 = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)[(lcos(\theta)\dot{\theta})^2 + (-lsin(\theta)\dot{\theta})^2], \tag{8}$$
$$T_0 = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)l^2\dot{\theta}^2. \tag{9}$$

$$V_0 = (m_1 + m_2)gy_0, \tag{10}$$
$$V_0 = (m_1 + m_2)glcos(\theta). \tag{11}$$

Para la segunda parte del sistema se establecen dos posiciones, para la masa m_1 con (x_1, y_1) y la masa m_2 con (x_2, y_2). Como en la primera parte, se derivan estas posiciones.

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= lsin(\theta) - \frac{a}{2}cos(\alpha), \\ y_1 &= lcos(\theta) + \frac{a}{2}sin(\alpha), \end{aligned}\right\} \begin{aligned} \dot{x}_1 &= lcos(\theta)\dot{\theta} + \frac{a}{2}sin(\alpha)\dot{\alpha}, \\ \dot{y}_1 &= -lsin(\theta)\theta + \frac{a}{2}cos(\alpha)\dot{\alpha}, \end{aligned} \tag{12}$$

$$\left.\begin{aligned} x_2 &= lsin(\theta) + \frac{a}{2}cos(\alpha), \\ y_2 &= lcos(\theta) - \frac{a}{2}sin(\alpha), \end{aligned}\right\} \begin{aligned} \dot{x}_2 &= lcos(\theta)\dot{\theta} - \frac{a}{2}sin(\alpha)\dot{\alpha}, \\ \dot{y}_2 &= -lsin(\theta)\theta - \frac{a}{2}cos(\alpha)\dot{\alpha}, \end{aligned} \tag{13}$$

$$T_1 = \frac{1}{2}m_1\left[\left(lcos(\theta)\dot{\theta} + \frac{a}{2}sin(\alpha)\dot{\alpha}\right)^2 + \left(-lsin(\theta)\theta + \frac{a}{2}cos(\alpha)\dot{\alpha}\right)^2\right], \tag{14}$$
$$T_1 = \frac{1}{2}m_1\left[l^2\dot{\theta}^2 + \frac{a^2}{4}\dot{\alpha}^2 + al\dot{\theta}\dot{\alpha}(cos(\theta)sin(\theta) - sin(\theta)cos(\alpha))\right] \tag{15}$$

$$T_2 = \frac{1}{2}m_2\left[\left(lcos(\theta)\dot{\theta} - \frac{a}{2}sin(\alpha)\dot{\alpha}\right)^2 + \left(-lsin(\theta)\theta - \frac{a}{2}cos(\alpha)\dot{\alpha}\right)^2\right], \tag{16}$$
$$T_2 = \frac{1}{2}m_2\left[l^2\dot{\theta}^2 + \frac{a^2}{4}\dot{\alpha}^2 + al\dot{\theta}\dot{\alpha}(-cos(\theta)sin(\theta) + sin(\theta)cos(\alpha))\right] \tag{17}$$

$$T = T_0 + T_1 + T_2, \tag{18}$$

$$T = \frac{1}{2}(m_1+m_2)l^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}l^2\dot{\theta}^2(m_1+m_2) + \frac{1}{2}\frac{a^2}{4}\dot{\alpha}^2(m_1+m_2) \tag{19}$$

$$V_1 = m_1 g\left(lcos(\theta) + \frac{a}{2}sin(\alpha)\right), \tag{20}$$

$$V_2 = m_2 g\left(lcos(\theta) - \frac{a}{2}sin(\alpha)\right). \tag{21}$$

$$V = V_0 + V_1 + V_2, \tag{22}$$

$$V = (m_1+m_2)glcos(\theta) + m_1 g\left(lcos(\theta) + \frac{a}{2}sin(\alpha) + m_2 g\left(lcos(\theta) - \frac{a}{2}sin(\alpha)\right),\right. \tag{23}$$

$$V = 2lgcos(\theta)(m_1+m_2) + \frac{a}{2}sin(\alpha)(m_1-m_2). \tag{24}$$

Dado el Lagrangiano:

$$\mathcal{L} = (m_1+m_2)l^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}\frac{a^2}{4}\dot{\alpha}^2(m_1+m_2) - 2lg\cos(\theta)(m_1+m_2) - \frac{a}{2}\sin(\alpha)(m_1-m_2), \tag{25}$$

aplicamos la ecuación de Lagrange:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{q}_i}\right) - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial q_i} = 0, \tag{26}$$

donde las coordenadas generalizadas son θ y α.

Ecuación de Lagrange para θ

1. Calcular $\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\theta}}$:

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\theta}} = 2(m_1+m_2)l^2\dot{\theta}. \tag{27}$$

2. Calcular $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\theta}}\right)$:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\theta}}\right) = 2(m_1+m_2)l^2\ddot{\theta}. \tag{28}$$

3. Calcular $\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\theta}$:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} = -2lg(m_1 + m_2)\sin(\theta). \tag{29}$$

4. Ecuación de Lagrange para θ:

$$2(m_1 + m_2)l^2\ddot{\theta} + 2lg(m_1 + m_2)\sin(\theta) = 0. \tag{30}$$

Simplificando:

$$\boxed{\ddot{\theta} + \frac{g}{l}\sin(\theta) = 0.} \tag{31}$$

Ecuación de Lagrange para α

1. Calcular $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\alpha}}$:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\alpha}} = \frac{a^2}{4}\dot{\alpha}(m_1 + m_2). \tag{32}$$

2. Calcular $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\alpha}}\right)$:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\alpha}}\right) = \frac{a^2}{4}(m_1 + m_2)\ddot{\alpha}. \tag{33}$$

3. Calcular $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \alpha}$:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \alpha} = -\frac{a}{2}(m_1 - m_2)\cos(\alpha). \tag{34}$$

4. Ecuación de Lagrange para α:

$$\frac{a^2}{4}(m_1 + m_2)\ddot{\alpha} + \frac{a}{2}(m_1 - m_2)\cos(\alpha) = 0. \tag{35}$$

Simplificando:

$$\boxed{\ddot{\alpha} + \frac{2(m_1 - m_2)}{a(m_1 + m_2)}\cos(\alpha) = 0.} \tag{36}$$

2. Dos masas, m_1 y m_2, están conectadas por una cuerda de longitud l a través de un agujero en el vértice de un cono vertical con ángulo de vértice α. La masa m_1 se mueve sobre la superficie interior del cono y m_2 cuelga verticalmente. Desprecie la fricción.

a) Determine las ecuaciones de movimiento del sistema.

Las ligaduras son:

$$l=\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}+z_2^2 \tag{37}$$

$$x_2=0, \tag{38}$$
$$y_2=0. \tag{39}$$

$$tan(\theta)=\frac{r}{z} \tag{40}$$

(2)(3)-4=2, dos grados de libertad, dos coordenadas generalizadas
primera partícula m_1 coordenadas (x_1, y_1, z_1)

$$\left.\begin{aligned} x_1&=rcos(\alpha),\\ y_1&=rsin(\alpha),\\ z_1&=rcot(\theta),\end{aligned}\right\} \begin{aligned}\dot{x}_1&=\dot{r}cos(\alpha)-rsin(\alpha)\dot{\alpha},\\ \dot{y}_1&=\dot{r}sin(\alpha)+rcos(\alpha)\dot{\alpha},\\ \dot{z}_1&=\dot{r}cot(\theta).\end{aligned} \tag{41}$$

segunda partícula m_2 coordenadas (x_2, y_2, z_2)

$$l=\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}+z_2^2, \tag{42}$$
$$z_2^2=l-\sqrt{(rcos(\alpha))^2+(rsin(\alpha))^2+(rcot(\theta))^2}, \tag{43}$$
$$z_2^2=l-\sqrt{r^2+r^2cot^2(\theta)}, \tag{44}$$
$$z_2^2=l-\sqrt{r^2(1+cot^2(\theta))}, \tag{45}$$
$$z_2=\sqrt{l-rtan(\theta)}, \tag{46}$$

$$\left.\begin{aligned} x_2&=0,\\ y_2&=0,\\ z_2&=z_2=\sqrt{l-rtan(\theta)},\end{aligned}\right\} \begin{aligned}\dot{x}_2&=0,\\ \dot{y}_2&=0,\\ \dot{z}_2&=-\frac{\dot{r}}{2\sqrt{l-rtan(\theta)}}.\end{aligned} \tag{47}$$

energía cinética

$$T_1=\frac{1}{2}m_1[(\dot{r}cos(\alpha)-rsin(\alpha)\dot{\alpha})^2+(\dot{r}sin(\alpha)+rcos(\alpha)\dot{\alpha})^2+(\dot{r}cot(\theta))^2], \tag{48}$$
$$T_1=\frac{1}{2}m_1(\dot{r}^2csc(\theta)+r^2\dot{\alpha}^2). \tag{49}$$

$$T_2=\frac{m_2\dot{r}^2}{8(l-rtan(\theta))}. \tag{50}$$

$$T = T_1 + T_2, \tag{51}$$
$$T = \frac{1}{2}m_1(\dot{r}^2 csc(\theta) + r^2\dot{\alpha}^2) + \frac{m_2\dot{r}^2}{8(l - rtan(\theta))}. \tag{52}$$

$$V_1 = m_1 grcot(\theta), \tag{53}$$
$$V_2 = m_2 g\sqrt{l - rtan(\theta)}. \tag{54}$$

$$V = V_1 + V_2, \tag{55}$$
$$V = m_1 grcot(\theta) + m_2 g\sqrt{l - rtan(\theta)}. \tag{56}$$

Para este sistema, el Lagrangiano dado es:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}m_1\left(\dot{r}^2\csc(\theta) + r^2\dot{\alpha}^2\right) + \frac{m_2\dot{r}^2}{8(l - r\tan(\theta))} - m_1 gr\cot(\theta) - m_2 g\sqrt{l - r\tan(\theta)} \tag{57}$$

Ecuación de Lagrange para r:

1. Calcula $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{r}}$:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{r}} = m_1\dot{r}\csc(\theta) + \frac{m_2\dot{r}}{4(l - r\tan(\theta))} \tag{58}$$

2. Deriva con respecto al tiempo t:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{r}}\right) = m_1\ddot{r}\csc(\theta) + \frac{m_2}{4(l - r\tan(\theta))}\left(\ddot{r} - \dot{r}^2\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{l - r\tan(\theta)}\right)\right) \tag{59}$$

3. Calcula $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial r}$:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial r} = m_1\left(\dot{\alpha}^2 r - g\cot(\theta)\right) - \frac{m_2\dot{r}^2\tan(\theta)}{8(l - r\tan(\theta))^2} + \frac{m_2 g\tan(\theta)}{2\sqrt{l - r\tan(\theta)}} \tag{60}$$

4. Aplica la ecuación de Lagrange:

$$\boxed{m_1\ddot{r}\csc(\theta) + \frac{m_2}{4(l - r\tan(\theta))}\left(\ddot{r} - \frac{\dot{r}^2\tan(\theta)}{(l - r\tan(\theta))}\right) - \frac{m_2 g\tan(\theta)}{2\sqrt{l - r\tan(\theta)}} - m_1\left(\dot{\alpha}^2 r - g\cot(\theta)\right) = 0.} \tag{61}$$

1. Ecuación de Lagrange para α:

1. Calcula $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\alpha}}$:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\alpha}} = m_1 r^2 \dot{\alpha} \tag{62}$$

2. Deriva con respecto al tiempo t:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\alpha}}\right) = m_1 r^2 \ddot{\alpha} + 2m_1 r\dot{r}\dot{\alpha} \tag{63}$$

3. Calcula $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \alpha}$:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \alpha} = 0 \tag{64}$$

4. Aplica la ecuación de Lagrange:

$$m_1 r^2 \ddot{\alpha} + 2m_1 r\dot{r}\dot{\alpha} = 0 \tag{65}$$

Entonces, las ecuaciones de movimiento para las coordenadas generalizadas r y α son:
1. Para r:

$$m_1 \ddot{r}\csc(\theta) + \frac{m_2}{4(l - r\tan(\theta))}\left(\ddot{r} - \frac{\dot{r}^2 \tan(\theta)}{(l - r\tan(\theta))}\right) - \frac{m_2 g \tan(\theta)}{2\sqrt{l - r\tan(\theta)}} - m_1\left(\dot{\alpha}^2 r - g\cot(\theta)\right) = 0 \tag{66}$$

2. Para α:

$$\boxed{m_1 r^2 \ddot{\alpha} + 2m_1 r\dot{r}\dot{\alpha} = 0.} \tag{67}$$

b) Calcule el radio de equilibrio de m_1.

Para calcular el radio de equilibrio r_{eq} de la masa m_1, necesitamos encontrar el valor de r en el cual la fuerza neta sobre m_1 es cero. Esto ocurre cuando la aceleración $\ddot{r}$ es cero.

Para encontrar r_{eq}, partimos de la ecuación de Lagrange para r obtenida anteriormente y establecemos $\ddot{r} = 0$ y $\dot{\alpha} = 0$ (ya que estamos buscando el equilibrio, donde no hay movimiento radial ni angular):

$$m_1(-g\cot(\theta)) - \frac{m_2 g \tan(\theta)}{2\sqrt{l - r_{\text{eq}}\tan(\theta)}} = 0 \tag{68}$$

Ahora, despejamos r_{eq} de esta ecuación.
Primero, simplificamos:

$$m_1 g\cot(\theta) = \frac{m_2 g \tan(\theta)}{2\sqrt{l - r_{\text{eq}}\tan(\theta)}} \tag{69}$$

Dividimos ambos lados por g para eliminar la gravedad:

$$m_1 \cot(\theta) = \frac{m_2 \tan(\theta)}{2\sqrt{l - r_{\text{eq}} \tan(\theta)}} \tag{70}$$

Multiplicamos ambos lados por $2\sqrt{l - r_{\text{eq}} \tan(\theta)}$ para despejar r_{eq}:

$$2m_1 \cot(\theta)\sqrt{l - r_{\text{eq}} \tan(\theta)} = m_2 \tan(\theta) \tag{71}$$

Elevamos al cuadrado ambos lados para eliminar la raíz:

$$4m_1^2 \cot^2(\theta)(l - r_{\text{eq}} \tan(\theta)) = m_2^2 \tan^2(\theta) \tag{72}$$

Ahora, distribuimos $4m_1^2 \cot^2(\theta)$ en el lado izquierdo:

$$4m_1^2 \cot^2(\theta) l - 4m_1^2 \cot^2(\theta) r_{\text{eq}} \tan(\theta) = m_2^2 \tan^2(\theta) \tag{73}$$

Despejamos r_{eq}:

$$4m_1^2 \cot^2(\theta) r_{\text{eq}} \tan(\theta) = 4m_1^2 \cot^2(\theta) l - m_2^2 \tan^2(\theta) \tag{74}$$

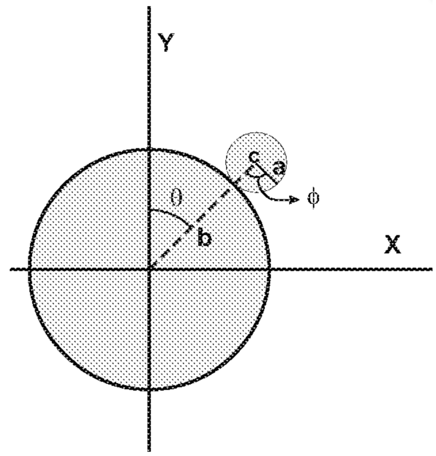
$$r_{\text{eq}} = \frac{4m_1^2 \cot^2(\theta) l - m_2^2 \tan^2(\theta)}{4m_1^2 \cot^2(\theta) \tan(\theta)} \tag{75}$$

Simplificamos la expresión:

$$\boxed{r_{\text{eq}} = l \cot(\theta) - \frac{m_2^2 \tan^3(\theta)}{4m_1^2}.} \tag{76}$$

Esta es la expresión para el radio de equilibrio r_{eq} de m_1.

3. Un cilindro sólido A de radio a y masa m_A está en reposo sobre un cilindro fijo B de radio b. Los ejes de ambos son paralelos y horizontales. El cilindro A se desplaza de su posición de equilibrio y rueda sin deslizarse por encima del cilindro B. Usando las ecuaciones de Lagrange determinar las fuerzas de ligadura y encontrar la posición en la que ambos cilindros se separan.



Consideremos dos cilindros, uno móvil A con radio a y masa m_A, y otro fijo B con radio b. Los ejes de ambos cilindros son paralelos y horizontales. El cilindro A se encuentra inicialmente en reposo sobre el cilindro B y luego se desplaza de su posición de equilibrio rodando sin deslizarse sobre la superficie de B. Queremos determinar las fuerzas de ligadura usando las ecuaciones de Lagrange y encontrar la posición en la que ambos cilindros se separan.

2. Coordenadas Generalizadas y Condiciones

2.1. Coordenada generalizada

Sea θ el ángulo que describe la posición del centro de masa de A respecto al eje vertical que pasa por el centro de B. Sea ϕ el ángulo de rotación del cilindro A alrededor de su propio eje.

Para que el cilindro A ruede sin deslizarse sobre B, se debe cumplir la siguiente relación:

$$a\,d\phi = (a+b)\,d\theta. \tag{77}$$

Esto implica:

$$\frac{d\phi}{d\theta} = \frac{a+b}{a}. \tag{78}$$

Integrando respecto a θ:

$$\phi = \frac{a+b}{a}\theta. \tag{79}$$

El centro de masa C del cilindro A se puede describir en coordenadas cartesianas como:

$$x = (a+b)\sin\theta, \quad y = (a+b)\cos\theta \tag{80}$$

3. Energías Cinética y Potencial

3.1. Energía Cinética T

La energía cinética total del sistema incluye tanto la energía cinética traslacional del centro de masa de A como la energía cinética rotacional del cilindro A.

$$T = \frac{1}{2}m_A \left[\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 \right] + \frac{1}{2}I_A \left(\frac{d\phi}{dt}\right)^2, \tag{81}$$

donde $I_A = \frac{1}{2}m_A a^2$ es el momento de inercia del cilindro A respecto a su eje.
Sustituyendo las expresiones para x, y, y ϕ:

$$\frac{dx}{dt} = (a+b)\cos\theta\,\frac{d\theta}{dt}, \quad \frac{dy}{dt} = -(a+b)\sin\theta\,\frac{d\theta}{dt}. \tag{82}$$

$$T = \frac{1}{2}m_A(a+b)^2\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}m_A a^2\left(\frac{a+b}{a}\frac{d\theta}{dt}\right)^2. \tag{83}$$

Simplificando:

$$T = \frac{1}{2}m_A(a+b)^2\left[1 + \frac{a^2}{2(a+b)^2}\right]\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2. \tag{84}$$

3.2. Energía Potencial V

La energía potencial está dada por la altura del centro de masa del cilindro A:

$$V = m_A g y = m_A g(a+b)\cos\theta. \tag{85}$$

4. Ecuación de Lagrange

Usamos la ecuación de Lagrange:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot\theta}\right) - \frac{\partial L}{\partial\theta} = 0, \tag{86}$$

donde el Lagrangiano L es $L = T - V$.
Sustituyendo T y V:

$$L = \frac{1}{2}m_A(a+b)^2\left[1 + \frac{a^2}{2(a+b)^2}\right]\dot\theta^2 - m_A g(a+b)\cos\theta. \tag{87}$$

Derivando con respecto a $\dot\theta$ y θ:

$$\frac{\partial L}{\partial\dot\theta} = m_A(a+b)^2\left[1 + \frac{a^2}{2(a+b)^2}\right]\dot\theta. \tag{88}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) = m_A(a+b)^2\left[1+\frac{a^2}{2(a+b)^2}\right]\ddot{\theta}. \tag{89}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = m_A g(a+b)\sin\theta. \tag{90}$$

Sustituyendo en la ecuación de Lagrange:

$$m_A(a+b)^2\left[1+\frac{a^2}{2(a+b)^2}\right]\ddot{\theta} + m_A g(a+b)\sin\theta = 0. \tag{91}$$

Simplificando:

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{(a+b)\left[1+\frac{a^2}{2(a+b)^2}\right]}\sin\theta = 0. \tag{92}$$

5. Condición de Separación

Para que los cilindros se separen, la fuerza normal N entre ellos debe hacerse cero. La fuerza normal es proporcional a la aceleración radial del cilindro A:

$$N = m_A\left[(a+b)\dot{\theta}^2 - g\cos\theta\right]. \tag{93}$$

La condición de separación es $N = 0$, por lo tanto:

$$(a+b)\dot{\theta}^2 = g\cos\theta. \tag{94}$$

6. Conservación de la Energía

Para encontrar $\dot{\theta}^2$, usamos la conservación de la energía:

$$E = T + V = \text{constante}. \tag{95}$$

En la posición inicial $\theta = 0$, la energía es únicamente potencial:

$$E_0 = m_A g(a+b). \tag{96}$$

En un ángulo θ arbitrario:

$$E = \frac{1}{2}m_A(a+b)^2\left[1+\frac{a^2}{2(a+b)^2}\right]\dot{\theta}^2 + m_A g(a+b)(1-\cos\theta). \tag{97}$$

Igualando las energías:

$$m_A g(a+b) = \frac{1}{2}m_A(a+b)^2\left[1+\frac{a^2}{2(a+b)^2}\right]\dot{\theta}^2 + m_A g(a+b)(1-\cos\theta). \tag{98}$$

Simplificando para $\dot{\theta}^2$:

$$\dot{\theta}^2 = \frac{2g(1-\cos\theta)}{(a+b)\left[1+\frac{a^2}{2(a+b)^2}\right]}. \tag{99}$$

Sustituimos $\dot{\theta}^2$ en la ecuación de la fuerza normal:

$$(a+b)\frac{2g(1-\cos\theta)}{(a+b)\left[1+\frac{a^2}{2(a+b)^2}\right]} = g\cos\theta. \tag{100}$$

Simplificando:

$$\frac{2(1-\cos\theta)}{1+\frac{a^2}{2(a+b)^2}} = \cos\theta. \tag{101}$$

Resolviendo para $\cos\theta_c$:

$$2(1-\cos\theta_c) = \cos\theta_c\left(1+\frac{a^2}{2(a+b)^2}\right). \tag{102}$$

Finalmente obtenemos:

$$2-2\cos\theta_c = \cos\theta_c + \cos\theta_c\frac{a^2}{\cdot}2(a+b)^2. \tag{103}$$

$$2 = \cos\theta_c\left(2+1+\frac{a^2}{2(a+b)^2}\right). \tag{104}$$

$$\cos\theta_c = \frac{2}{3+\frac{a^2}{2(a+b)^2}}. \tag{105}$$

El ángulo de separación es:

$$\theta_c = \cos^{-1}\left(\frac{2}{3+\frac{a^2}{2(a+b)^2}}\right). \tag{106}$$

7. Posición de Separación

Para encontrar la posición en la que los cilindros se separan, usamos las coordenadas del centro de masa del cilindro A:

7.1. Coordenada x

$$x_c = (a+b)\sin\theta_c. \tag{107}$$

7.2. Coordenada y

$$y_c = (a+b)\cos\theta_c - \tag{108}$$

Donde θ_c es el ángulo de separación que hemos calculado:

$$\theta_c = \cos^{-1}\left(\frac{2}{3+\frac{a^2}{2(a+b)^2}}\right). \tag{109}$$

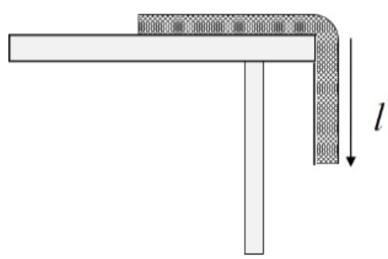
La posición en la que el cilindro A se separa del cilindro B está dada por las coordenadas (x_c, y_c):

$$x_c = (a+b)\sin\left[\cos^{-1}\left(\frac{2}{3+\frac{a^2}{2(a+b)^2}}\right)\right]. \tag{110}$$

$$y_c = (a+b)\cos\left[\cos^{-1}\left(\frac{2}{3+\frac{a^2}{2(a+b)^2}}\right)\right]. \tag{111}$$

Estas coordenadas representan la posición del centro de masa del cilindro A en el punto donde se separa del cilindro B.

4. Una cuerda uniforme de masa M y longitud L se encuentre sobre una mesa sin fricción. La cuerda se suelta desde el reposo cuando una sección de longitud l está colgando. Encuentre la trayectoria de la cuerda en función del tiempo.



Primero, determinamos la densidad lineal de masa de la cuerda, que es la masa por unidad de longitud:

$$\mu = \frac{M}{L}. \tag{112}$$

Cuando una longitud $x(t)$ de la cuerda ha pasado por el borde, la masa de la porción colgante es:

$$m_{\text{colgante}}(t) = \mu \cdot x(t). \tag{113}$$

La fuerza gravitacional que actúa sobre esta porción colgante es:

$$F_g(t) = m_{\text{colgante}}(t) \cdot g = \mu \cdot x(t) \cdot g. \tag{114}$$

Esta es la fuerza que causa que la cuerda se acelere hacia abajo.

Usamos el principio de conservación de la energía para derivar la ecuación del movimiento.

En el instante inicial, cuando una longitud l de la cuerda está colgando, la energía potencial del sistema se puede calcular. La energía potencial gravitatoria de una masa m a una altura h es:

$$U = m \cdot g \cdot h. \tag{115}$$

Para la cuerda colgante, la masa colgante es $m = \mu \cdot l$, y el centro de masa de esta parte de la cuerda está a una altura $\frac{l}{2}$ sobre el punto más bajo (ya que la masa está uniformemente distribuida a lo largo de la cuerda). Por lo tanto, la energía potencial inicial es:

$$U_i = \mu \cdot g \cdot l \cdot \frac{l}{2} = \frac{\mu \cdot g \cdot l^2}{2}. \tag{116}$$

En un instante genérico t, una longitud $x(t)$ de la cuerda ha pasado por el borde y está colgando. La energía total del sistema en este instante consiste en dos partes:

1. **Energía Cinética**: Dado que la cuerda está en movimiento, la porción colgante tiene energía cinética. La velocidad de la porción colgante es $v(t)$, y su energía cinética es:

$$K(t) = \frac{1}{2} \cdot m_{\text{colgante}}(t) \cdot v^2(t) = \frac{1}{2} \cdot \mu \cdot x(t) \cdot \left(\frac{dx(t)}{dt}\right)^2. \tag{117}$$

2. **Energía Potencial**: La energía potencial gravitatoria de la porción colgante ahora es:

$$U(t) = \mu \cdot g \cdot \int_0^{x(t)} y \, dy = \frac{\mu \cdot g \cdot x(t)^2}{2}. \tag{118}$$

De acuerdo con el principio de conservación de la energía, la energía total del sistema en el instante inicial es igual a la energía total en cualquier instante t. Esto nos lleva a la ecuación:

$$\frac{\mu \cdot g \cdot l^2}{2} = \frac{1}{2} \cdot \mu \cdot x(t) \cdot \left(\frac{dx(t)}{dt}\right)^2 + \frac{\mu \cdot g \cdot x(t)^2}{2}. \tag{119}$$

Para simplificar la ecuación, eliminamos μ de todos los términos (ya que aparece en cada uno de ellos) y multiplicamos toda la ecuación por 2:

$$g \cdot l^2 = x(t) \cdot \left(\frac{dx(t)}{dt}\right)^2 + g \cdot x(t)^2. \tag{120}$$

Reorganizamos los términos para obtener la ecuación del movimiento:

$$x(t) \cdot \left(\frac{dx(t)}{dt}\right)^2 = g \cdot (l^2 - x(t)^2). \tag{121}$$

Aislamos $\left(\frac{dx(t)}{dt}\right)^2$:

$$\left(\frac{dx(t)}{dt}\right)^2 = g \cdot \frac{l^2 - x(t)^2}{x(t)}. \tag{122}$$

Y tomamos la raíz cuadrada para obtener una ecuación diferencial de primer orden:

$$\frac{dx(t)}{dt} = \sqrt{g \cdot \left(\frac{l^2}{x(t)} - x(t)\right)}. \tag{123}$$

Para resolver la ecuación diferencial, separamos las variables:

$$\frac{dx(t)}{\sqrt{g \cdot \left(\frac{l^2}{x(t)} - x(t)\right)}} = dt. \tag{124}$$

Esta ecuación puede escribirse como:

$$\int \frac{dx(t)}{\sqrt{g \cdot \left(\frac{l^2}{x(t)} - x(t)\right)}} = \int dt. \tag{125}$$

El lado derecho de la ecuación es simplemente:

$$t + C. \tag{126}$$

Ahora, nos enfocamos en resolver la integral en el lado izquierdo.

Realizamos una sustitución trigonométrica para simplificar la integral. Sea $x(t) = l\sin(\theta)$. Entonces, $dx(t) = l\cos(\theta)d\theta$. La integral se transforma en:

$$\int \frac{l\cos(\theta)\, d\theta}{\sqrt{g \cdot \left(\frac{l^2}{l\sin(\theta)} - l\sin(\theta)\right)}} = \frac{1}{\sqrt{g}} \int \frac{l\cos(\theta) \cdot \sqrt{l\sin(\theta)}\, d\theta}{\sqrt{l\cos^2(\theta)}}. \tag{127}$$

Esto se simplifica a:

$$\frac{l^{3/2}}{\sqrt{g}} \int \sqrt{\sin(\theta)}\, d\theta. \tag{128}$$

La integral $\int \sqrt{\sin(\theta)}\, d\theta$ se puede resolver en términos de funciones elementales como sigue:

$$\int \sqrt{\sin(\theta)}\, d\theta = -\frac{2}{3} \sin^{3/2}(\theta) \cdot \frac{l^{3/2}}{\sqrt{g}}. \tag{129}$$

Por lo tanto:

$$t + C = \frac{2}{3}\frac{l^{3/2}}{\sqrt{g}}\sin^{3/2}.(\theta) \tag{130}$$

Dado que $\sin(\theta) = \frac{x(t)}{l}$, tenemos:

$$t + C = \frac{2}{3}\frac{l^{1/2}}{\sqrt{g}}\left(\frac{x(t)}{l}\right)^{3/2}. \tag{131}$$

Simplificamos:

$$t + C = \frac{2}{3}\frac{l^{1/2}}{\sqrt{g}}x^{3/2}(t). \tag{132}$$

Para encontrar C, usamos la condición inicial. Sabemos que en $t = 0$, $x(0) = l$. Así que:

$$0 + C = \frac{2}{3}\frac{l^{1/2}}{\sqrt{g}}\cdot l^{3/2}. \tag{133}$$

Por lo tanto, la constante C es:

$$C = -\frac{2}{3}\frac{l^2}{\sqrt{g}}. \tag{134}$$

Sustituyendo C de nuevo en la ecuación, la solución completa es:

$$t(x) = \frac{2}{3}\frac{l^{1/2}}{\sqrt{g}}\left(x^{3/2}(t) - l^{3/2}\right). \tag{135}$$

Teniendo que:

- **Distribución de la masa**: $\mu = \frac{M}{L}$.
- **Fuerza gravitacional**: $F_g = \mu x(t) g$.
- **Energía inicial**: $U_i = \frac{\mu g l^2}{2}$.
- **Ecuación del movimiento**: $\frac{dx(t)}{dt} = \sqrt{g\left(\frac{l^2}{x(t)} - x(t)\right)}$.
- **Solución general**:

$$t(x) = \frac{2}{3}\frac{l^{1/2}}{\sqrt{g}}\left(x^{3/2}(t) - l^{3/2}\right). \tag{136}$$

Esta es la solución matemática detallada y completa para la trayectoria de la cuerda en función del tiempo.