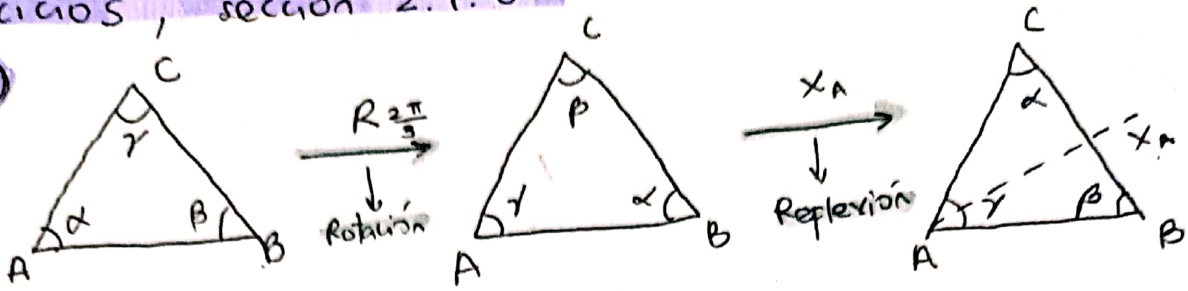
[redacted] Jhonatan stiven blanco Helo.
Angie Yuliana Sandoval Reyes.

Taller de problemas.

Ejercicios, sección 2.1.6

③



que puede escribirse como:

$$(A\alpha, B\beta, C\gamma) \xrightarrow[R_{\frac{2\pi}{3}}]{} (A\gamma, B\alpha, C\beta) \xrightarrow[X_A]{} (A\gamma, B\beta, C\alpha)$$

⑨ construya la tabla de multiplicación para G_Δ

$G_\Delta = \{I, \{R_i\}, \{\bar{R}_j\}, \{X_k\}\}$ (R_i = Rot. sent. horario $-$ $\bar{R}_j$ = Rot. sent. antihorario)

$R_i = \{R_1, R_2\}$ $\qquad$ $\bar{R}_j = \{\bar{R}_1, \bar{R}_2\}$

$I = R_0 = (\alpha, \beta, \gamma)\ {}_\alpha\overset{\gamma}{\Delta}{}_\beta = \bar{R}_0 = (\alpha, \beta, \gamma)\ {}_\alpha\overset{\gamma}{\Delta}{}_\beta = \Delta$

$R_1 = (\beta, \gamma, \alpha)\ {}_\beta\overset{\alpha}{\Delta}{}_\gamma$ $\qquad$ $\bar{R}_2 = (\beta, \gamma, \alpha)\ {}_\beta\overset{\alpha}{\Delta}{}_\gamma \longrightarrow R_1 = \bar{R}_2 \Rightarrow \Delta = \Delta$

$R_2 = (\gamma, \alpha, \beta)\ {}_\gamma\overset{\beta}{\Delta}{}_\alpha$ $\qquad$ $\bar{R}_1 = (\gamma, \alpha, \beta)\ {}_\gamma\overset{\beta}{\Delta}{}_\alpha \longrightarrow R_2 = \bar{R}_1 \Rightarrow \Delta - \Delta$

$X_A = (\alpha, \gamma, \beta)\ {}_\alpha\overset{\beta}{\Delta}{}_\gamma$

$X_B = (\gamma, \beta, \alpha)\ {}_\gamma\overset{\alpha}{\Delta}{}_\beta$

$X_C = (\beta, \alpha, \gamma)\ {}_\beta\overset{\gamma}{\Delta}{}_\alpha$

⊙	I	R_1	R_2	$\bar{R}_1$	$\bar{R}_2$	X_A	X_B	X_C
I	I	R_1	R_2	$\bar{R}_1$	$\bar{R}_2$	X_A	X_B	X_C
R_1	R_1	$\bar{R}_1$	I	I	R_2	X_C	X_A	X_B
R_2	R_2	I	$\bar{R}_2$	R_1	I	X_B	X_C	X_A
$\bar{R}_1$	$\bar{R}_1$	I	R_1	R_1	I	X_B	X_C	X_A
$\bar{R}_2$	$\bar{R}_2$	R_2	I	I	R_2	X_C	X_A	X_B
X_A	X_A	X_B	X_C	X_C	X_B	I	R_1	R_2
X_B	X_B	X_C	X_A	X_A	X_C	$\bar{R}_1$	I	R_1
X_C	X_C	X_A	X_B	X_B	X_A	$\bar{R}_2$	$\bar{R}_1$	I

Sabiendo que las operacions de rotación horaria y antihoraria se pueden escribir una en terminos de la otra, $R_1 = \bar{R}_2$ y $R_2 = \bar{R}_1$, rehaciendo la tabla de multiplicación obtenemos:

⊙	I	R_1	R_2	X_A	X_B	X_C
I	I	R_1	R_2	X_A	X_B	X_C
R_1	R_1	R_2	I	X_C	X_A	X_B
R_2	R_2	I	R_1	X_B	X_C	X_A
X_A	X_A	X_B	X_C	I	R_1	R_2
X_B	X_B	X_C	X_A	R_2	I	R_1
X_C	X_C	X_A	X_B	R_1	R_2	I

b) Muestre que el conjunto de estas operaciones forman el grupo: G_Δ

• Cerradura bajo $\odot$:

Tal y como se mostro en la tabla anterior, concatenar dos operaciones del conjunto G_Δ es equivalente a realizar otra de las operaciones que tambien pertenece al conjunto, por tanto el grupo es cerrado bajo $\odot$.

• Asociativa respecto a $\odot$:

$$(X_A \odot R_1) \odot \overline{R}_2 = X_A \odot (R_1 \odot \overline{R}_2)$$
$$X_C \odot \overline{R}_2 = X_A \odot R_2$$
$$X_B = X_B$$

$$(X_A \odot X_C) \odot \overline{R}_1 = X_A \odot (X_C \odot \overline{R}_1)$$
$$R_2 \odot \overline{R}_1 = X_A \odot X_B$$
$$R_1 = R_1$$

• Unico elemento neutro:

Entendido como el elemento que al operar mantiene el triangulo en el estado en que se encuentre, este elemento es la operación identidad.

• Elemento inverso:

El inverso se refiere a la operación que al efectuarse devuelve el triangulo al estado original, se tiene que:

Para las rotaciones se tiene que:

$$R_i \odot \overline{R}_j = I \ (R_0)$$

Para que esto se cumpla $i = j$ ya que son rotaciones opuestas:

Ej: $R_1 = R_{-\frac{2\pi}{3}}$ y $\overline{R}_1 = R_{\frac{2\pi}{3}}$

$$R_1 \odot \overline{R}_1 = I$$
$$R_{-\frac{2\pi}{3}} \odot R_{\frac{2\pi}{3}} = I$$
$$R_{\left(\frac{2\pi}{3} - \frac{2\pi}{3}\right)} = I \ (R_0)$$
$$R_0 = R_0$$

Cuando una rotación (ya sea en sentido horario o antihorario) cumpla un ciclo, la operación tambien generará la identidad. De forma general:

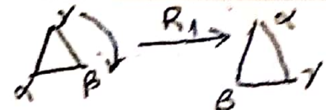
$$R_i \odot R_m = I \qquad i \neq m \qquad i = \{1, 2\} \quad m = \{1, 2\}$$
$$\overline{R}_j \odot \overline{R}_n = I \qquad j \neq n \qquad j = \{1, 2\} \quad n = \{1, 2\}$$

Ej: $R_1 \odot R_2 = R_{(1+2)} = R_3 = R_0 (I)$

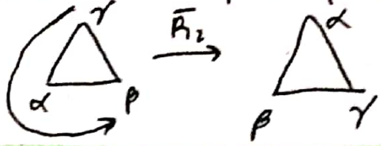
$\overline{R}_1 \odot \overline{R}_2 = \overline{R}_{(1+2)} = R_3 = R_0 (I)$

Partiendo de estos resultados, el conjunto G_Δ tendria 2 elementos inversos para sus operaciones, sin embargo

Tenemos que la rotación horaria $R_1 = \bar{R}_2$,



y



, además $R_2 = \bar{R}_1$, por tanto, si asumimos que son iguales y descartamos alguna de las dos operaciones G_Δ sí es grupo ya que sus elementos tienen únicamente un inverso.

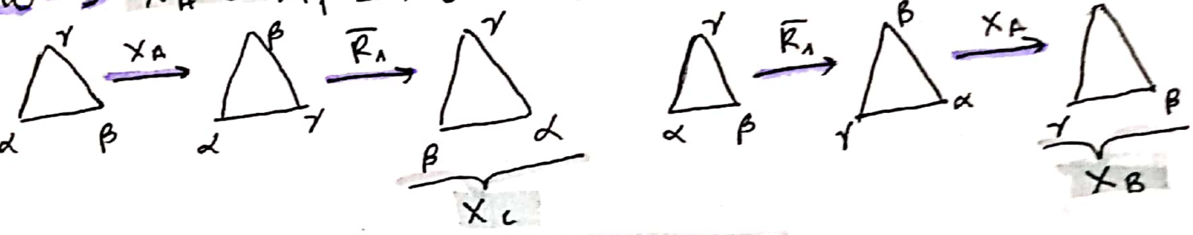
Para las reflexiones, podemos observar en la tabla de multiplicación que:

$$\left.\begin{aligned} X_A \odot X_A &= I \\ X_B \odot X_B &= I \\ X_C \odot X_C &= I \end{aligned}\right\}$$

por tanto, $X_i \odot X_i = I$, las reflexiones tienen un único elemento inverso.

- Conmutatividad.

contraejemplo $\rightarrow$ $X_A \odot \bar{R}_1 = X_C \neq \bar{R}_1 \odot X_A = X_B$



$G_\Delta \rightarrow$ Grupo no abeliano bajo $\odot$

ⓒ Identifique cada una de las R_i y $\bar{R}_j$, y muestre además, que forman subgrupo cíclico de orden 3.
De igual modo identifique las reflexiones y muestre que, cada una de las reflexiones y la identidad, $\{I, x_i\}$, forman un subgrupo cíclico, pero de orden 2.

$R_i = \{R_1, R_2, R_3\}$, sin embargo R_3 deja el triangulo en el estado original, por lo tanto $R_3 = I(R_0)$.

$R_1 = R_{-\frac{2\pi}{3}}$, $R_2 = R_{-\frac{4\pi}{3}}$

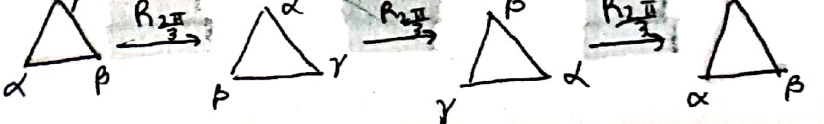
$\bar{R}_1 = R_{\frac{2\pi}{3}}$, $\bar{R}_2 = R_{\frac{4\pi}{3}}$

$R_i = \{R_1, R_2, I\}$

$\bar{R}_j = \{\bar{R}_1, \bar{R}_2, I\}$

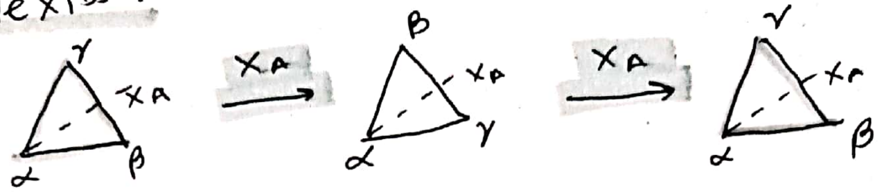
Al realizar operaciones como $R_1 \odot R_2$ podemos observar que el triangulo vuelve a su estado original, por tanto cumple un ciclo cada 3 rotaciones de $\frac{2\pi}{3}$.

$R_1 \odot R_2 = R_3 = I(R_0)$



$X_i = \{ X_A, X_B, X_C, I \}$

cuando operamos $X_i \circ X_i = I$ el triangulo vuelve a su estado original, por tanto las reflexiones cumplen un ciclo cada dos reflexiones en el mismo plano de reflexión.



(d) Considere las siguientes matrices:

$$\mathbb{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbb{A} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}, \quad \mathbb{B} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$\mathbb{C} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbb{D} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}, \quad \mathbb{E} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Muestre que forman un grupo bajo la multiplicación de matrices y que ese grupo es isomorfo a G_Δ

- Cerradura bajo la multiplicación.

$\mathbb{A} \cdot \mathbb{I} = \mathbb{A}$, $\mathbb{B} \cdot \mathbb{I} = \mathbb{B}$, $\mathbb{C} \cdot \mathbb{I} = \mathbb{C}$, $\mathbb{D} \cdot \mathbb{I} = \mathbb{D}$, $\mathbb{E} \cdot \mathbb{I} = \mathbb{E}$, $\mathbb{I} \cdot \mathbb{I} = \mathbb{I}$

$$\mathbb{A} \cdot \mathbb{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathbb{I}, \quad \mathbb{A} \cdot \mathbb{C} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} = \mathbb{E}$$

$$\mathbb{A} \cdot \mathbb{D} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathbb{C}, \quad \mathbb{A} \cdot \mathbb{E} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} = \mathbb{D}$$

$$\mathbb{B} \cdot \mathbb{C} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} = \mathbb{D}, \quad \mathbb{B} \cdot \mathbb{D} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} = \mathbb{E}$$

$$\mathbb{B} \cdot \mathbb{E} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathbb{C}, \quad \mathbb{C} \cdot \mathbb{D} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} = \mathbb{A}$$

$$\mathbb{C} \cdot \mathbb{E} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} = \mathbb{B}, \quad \mathbb{D} \cdot \mathbb{E} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} = \mathbb{D}.$$

$\mathbb{A} \cdot \mathbb{A} = \mathbb{B}$

·	I	A	B	C	D	E
I	I	A	B	C	D	E
A	A	B	I	E	C	D
B	B	I	A	D	E	C
C	C	D	E	I	A	B
D	D	E	C	B	I	A
E	E	C	D	A	B	I

Tabla de multiplicacion de matrices.

=

·	I	A	B	C	D	E
I	I	A	B	C	D	E
A	A	B	I	E	C	D
B	B	I	A	D	E	C
C	C	D	E	I	A	B
D	D	E	C	B	I	A
E	E	C	D	A	B	I

Tabla de multiplicacion de G_Δ

$I = I$
$R_1 = A$
$R_2 = B$
$X_A = C$
$X_B = D$
$X_C = E$

Son grupos isomorfos.

- Asociativo respecto a · :

$$(A \cdot E) \cdot B = A \cdot (E \cdot B) \qquad (A \cdot C) \cdot D = A \cdot (C \cdot D)$$
$$D \cdot B = A \cdot D \qquad E \cdot D = A \cdot A$$
$$C = C \qquad B = B$$

- Unico elemento neutro:

$I \cdot A = A \cdot I = A$, $I \cdot B = B \cdot I = B$, $I \cdot C = C I = C$
$I \cdot D = D \cdot I = D$, $I \cdot E = E \cdot I = E$

El elemento neutro en la multiplicacion de matrices es la matriz identidad

- Elemento inverso:

$A \cdot B = I$, $B \cdot A = I$, $C \cdot C = I$, $D \cdot D = I$, $E \cdot E = I$.

- Conmutatividad:

contraejemplo $\rightarrow$ $A \cdot C = E \neq C \cdot A = D$

e) Considere el conjunto de permutaciones de 3 objetos y la operación composición de permutaciones:

$$P_0 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}; \quad P_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}; \quad P_2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$P_3 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}; \quad P_4 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}; \quad P_5 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

operacion de composición de permutaciones:

$$P_1 \circ P_3 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix} = P_4$$

Tabla de multiplicación

$\odot$	P_0	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5
P_0	P_0	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5
P_1	P_1	P_0	P_5	P_4	P_3	P_2
P_2	P_2	P_4	P_0	P_5	P_1	P_3
P_3	P_3	P_5	P_4	P_0	P_2	P_1
P_4	P_4	P_2	P_3	P_1	P_5	P_0
P_5	P_5	P_3	P_1	P_2	P_0	P_4

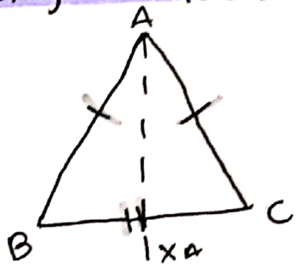
Tabla mult. Grupo G_Δ

	$\odot$	I	A	B	C	D	E
$P_0 =$	I	I	A	B	C	D	E
$P_4 =$	A	A	B	I	E	C	D
$P_5 =$	B	B	I	A	D	E	C
$P_1 =$	C	C	D	E	I	A	B
$P_2 =$	D	D	E	C	B	I	A
$P_3 =$	E	E	C	D	A	B	I

Las tablas de multiplicación al reorganizarlas tenemos que son equivalentes porque tienen las mismas propiedades.
Por lo tanto este grupo es isomorfo a G_Δ

F ¿Que puede decir de las operaciones de simetria que dejan invariante al triangulo isósceles? ¿forman un grupo? ¿y si el triangulo es escaleno, cuales son las operaciones de simetria que lo dejan invariante?

Triángulo isósceles



Tiene dos lados iguales, por lo tanto se puede aplicar simetria respecto al plano que los divide.

$G_I = \{I, x_A\}$ $x_A \Rightarrow$ Reflexion desde el punto A.
(Grupo cíclico de orden 2)

Triángulo Escaleno

No existen operaciones de simetria que lo dejen invariante ya que todos sus lados son diferentes.

$G_E = \{I\}$

10 Sea P_n el conjunto de todos los polinomios de grado n, en x, con coeficientes reales:

$$|P_n\rangle \rightleftharpoons P(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_{n-1} x^{n-1}$$
$$= \sum_{i=0}^{n-1} a_i x^i.$$

ⓐ Demostrar que P_n es un espacio vectorial respecto a la suma de polinomios y a la multiplicación por escalar.

1.- Ceradura bajo la suma.

Si $|p\rangle, |q\rangle \in \mathbb{P}_n$, $|p\rangle + |q\rangle \in P_n$

$p(x) = \sum_{i=0}^{b-1} a_i x^i$; $q(x) = \sum_{i=0}^{m-1} c_i x^i = \sum_{i=0}^{b-1} c_i x_i + \sum_{i=b}^{m-1} c_i x^i$

$b \leq m < n$

$$\to |p\rangle + |q\rangle = p(x) + q(x)$$
$$= (p+q)(x)$$
$$= |p+q\rangle$$

2.- Ceradura bajo la multiplicación.

Si $\alpha \in \mathbb{R}$ y $|p\rangle \in P_n$

$$\to \alpha|p\rangle = (\alpha p)(x) = \alpha p(x) = |\alpha p\rangle \in P_n$$

3.- Conmutatividad

Si $|p\rangle, |q\rangle \in \mathbb{P}_n$

$p(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_{b-1} x^{b-1}$

$q(x) = b_0 + b_1 x + \cdots + b_{m-1} x^{m-1}$

$b \leq m < n$

$$p(x) + q(x) =$$

$$a_0 + a_1 x + \cdots + a_{b-1} x^{b-1} + b_0 + b_1 x + \cdots + b_{m-1} x^{m-1} = b_0 + b_1 x + \cdots + b_{m-1} x^{m-1} + a_0 + \cdots + a_{b-1} x^{b}$$
$$= q(x) + p(x)$$

$$|p\rangle + |q\rangle = |q\rangle + |p\rangle$$

4.- Asociatividad

Si $|p\rangle, |q\rangle, |u\rangle \in P_n$

$$|p\rangle + (|q\rangle + |u\rangle) = p(x) + (q(x) + u(x))$$

$p(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_{b-1} x^{b-1}$

$q(x) = b_0 + b_1 x + \cdots + b_{m-1} x^{m-1}$

$u(x) = c_0 + c_1 x + \cdots + c_{d-1} x^{d-1}$

$b \leq m \leq d < n$

$$p(x) + (q(x) + v(x)) =$$

$$a_0 + a_1x + \cdots + a_{b-1}x^{b-1} + (b_0 + b_1x + \cdots + b_{m-1}x^{m-1} + c_0 + c_1x + \cdots + c_{d-1}x^{d-1}) =$$

$$(a_0 + a_1x + \cdots + b_0 + b_1x + \cdots + b_{m-1}x^{m-1}) + c_0 + c_1x + \cdots + c_{d-1}x^{d-1} =$$

$$(p(x) + q(x)) + v(x) = (|p\rangle + |q\rangle) + |v\rangle_{//}$$

5.- Único elemento neutro. (suma)

$|p\rangle \in P_n$

$$p(x) = a_0 + a_1x^1 + \cdots + a_{i-1}x^{i-1} = \sum_{i=0}^{n-1} a_ix^i$$

$$p(0) = a_0 \quad , \quad \text{con } a_0 = 0$$

$$p(0) = 0_{//}$$

6.- $\alpha(\beta|p\rangle) = (\alpha\beta)|p\rangle$, $|p\rangle \in P_n$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

$$\alpha(\beta(a_0 + a_1x + \cdots + a_{n-1}x^{n-1})) = \alpha(\beta a_0 + \beta a_1x + \cdots + \beta a_{n-1}x^{n-1})$$

$$= \alpha\beta a_0 + \alpha\beta a_1x + \cdots + \alpha\beta a_{n-1}x^{n-1} = \alpha\beta(a_0 + a_1x + \cdots + a_{n-1}x^{n-1})$$

$$= (\alpha\beta)|p\rangle_{//}$$

7.- $(\alpha + \beta)|p\rangle = \alpha|p\rangle + \beta|p\rangle$, $|p\rangle \in P_n$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

$$(\alpha + \beta)p(x) = (\alpha p(x)) + (\beta p(x)) = \alpha|p\rangle + \beta|p\rangle_{//}$$

8.- $\alpha(|p\rangle + |q\rangle) = \alpha|p\rangle + \alpha|q\rangle$, $|p\rangle, |q\rangle \in P_n$, $\alpha \in \mathbb{R}$

$$\alpha(p(x) + q(x)) = \alpha(a_0 + a_1x + \cdots + a_{b-1}x^{n-1} + b_0 + b_1x + \cdots + b_{m-1}x^{m-1})$$

$$= (\alpha a_0 + \alpha a_1x + \cdots + \alpha a_{b-1}x^{n-1}) + (\alpha b_0 + \alpha b_1x + \alpha b_{m-1}x^{m-1})$$

$$= \alpha p(x) + \alpha q(x) = \alpha|p\rangle + \alpha|q\rangle_{//}$$

9.- Único elemento neutro (multiplicación)

$\alpha \in \mathbb{R}$, $|p\rangle \in P_n$

$$\alpha|p\rangle = |p\rangle \quad , \quad \alpha = 1$$

$$1|p\rangle = |p\rangle$$

10.- Elemento inverso. (único) $|p\rangle, |q\rangle \in P_n$

$$|p\rangle + |q\rangle = |0\rangle$$

$$a_0 + a_1x + \cdots + a_{n-1}x^{n-1} + b_0 + b_1x + \cdots + b_{m-1}x^{m-1} = 0$$

Para que se cumpla: $b_0 + b_1x + \cdots + b_{m-1}x^{m-1} = -a_0 - a_1x - a_{n-1}x^{n-1} = -p(x)$

$|p\rangle - |p\rangle = |0\rangle$

(b) si los coeficientes a_i son enteros ¿P_n será un espacio vectorial? ¿por qué?

No, ya que los polinomios estarian sobre el campo $\mathbb{Z}$ (enteros) y este conjunto no es cerrado bajo la multiplicación. y en el campo que trabajamos es $\mathbb{R}$.

contraejemplo:

Si $\alpha = \sqrt{2}$ y $|p\rangle \in P_n$

$$\rightarrow \sqrt{2}\,|p\rangle = \sqrt{2}\,p(x)$$

$$= \sqrt{2} \sum_{i=0}^{n-1} a_i x^i = \sum_{i=0}^{n-1} (\sqrt{2}\, a_i)\, x_i$$

siendo que $\sqrt{2}\, a_i \notin \mathbb{Z}$

(c) ¿cuál de los siguientes subconjuntos de P_n es un subespacio vectorial?

I. El polinomio cero y todos los polinomios de grado $n-1$

$A = \{ 0(x), \{P_{n-1}\} \}$

1. A no vacio

$0(x) \in A \longrightarrow A \neq \phi$

2. A cerrado bajo la suma.

si $|A_1\rangle, |A_2\rangle \in A$, entonces $|A_1\rangle + |A_2\rangle \in A$

$$|A_1\rangle = \sum_{i=0}^{b-2} a_i x^i \quad ; \quad |A_2\rangle = \sum_{i=0}^{b-2} c_i x_i + \sum_{i=b-1}^{m-2} c_i x^i$$

$$|A_1\rangle + |A_2\rangle = \sum_{i=0}^{b-2} a_i x^i + \sum_{i=0}^{b-2} c_i x^i + \sum_{i=b-1}^{m-2} c_i x^i$$

$$= \sum_{i=0}^{b-2} (a_i + c_i)\, x^i + \sum_{i=b-1}^{m-2} c_i x^i$$

$$= (A_1 + A_2)(x)$$

$$= |A_1 + A_2\rangle \rightarrow |A_1 + A_2\rangle \in A.$$

3.- Cerrado bajo la multiplicación

Si $\alpha \in \mathbb{R}$ y $|A_1\rangle \in A$.

$$\alpha |A_1\rangle = \alpha A(x) = \alpha \sum_{i=0}^{n-2} a_i x^i = \sum_{i=0}^{n-2} \alpha a_i x^i$$

$$= (\alpha A)(x)$$

$$= |\alpha A\rangle \in A.$$

$\therefore$ A es subespacio vectorial de P_n

II. El polinomio cero y todos los polinomios de grado par.

$$B = \{0(x), \{B(x) = \sum_{i=0}^{b-1} a_i x^{2i}\}\}$$

1.- B no vacío

$$0(x) \in B \longrightarrow B \neq \phi$$

2.- B cerrado bajo la suma.

Si $|B_1\rangle, |B_2\rangle \in B$, entonces $|B_1\rangle + |B_2\rangle \in B$

$$|B_1\rangle = \sum_{i=0}^{b-1} a_i x^{2i} \quad , \quad |B_2\rangle = \sum_{i=0}^{c-1} d_i x^{2i}$$

$$= \sum_{i=0}^{b-1} d_i x^{2i} + \sum_{i=0}^{c-1} d_i x^{2i}$$

$$|B_1\rangle + |B_2\rangle = B_1(x) + B_2(x)$$

$$= \sum_{i=0}^{b-1} a_i x^{2i} + \sum_{i=0}^{b-1} d_i x^{2i} + \sum_{i=0}^{c-1} d_i x^{2i}$$

$$= \sum_{i=0}^{b-1} (a_i + d_i) x^{2i} + \sum_{i=0}^{c-1} d_i x^{2i}$$

$$= (B_1 + B_2)(x)$$

$$= |B_1 + B_2\rangle \in B \,_{\text{"}}$$

3.- Cerradura bajo la multiplicación.

Si $\alpha \in \mathbb{R}$ y $|B_1\rangle \in B$.

$$\alpha |B_1\rangle = \alpha B_1(x) = \alpha \sum_{i=0}^{b-1} a_i x^{2i}$$

$$= \sum_{i=0}^{b-1} \alpha a_i x^{2i}$$

$$= (\alpha B_1)(x)$$

$$= |\alpha B_1\rangle \in B \,_{\text{"}}$$

$\therefore$ si $\frac{b}{2} \leq n-1$, B es un subespacio vectorial de P_n.

III Todos los polinomios que tienen a x como un factor (grado $n>1$)

$C = \{ c(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i x^i \}$

2. Cerradura bajo la suma.

si $|c_1\rangle, |c_2\rangle \in C$ entonces $|c_1\rangle + |c_2\rangle \in C$

$|c_1\rangle = \sum_{i=1}^{b} a_i x^i$; $|c_2\rangle = \sum_{i=1}^{b} -a_i x^i$

$$|c_1\rangle + |c_2\rangle = \sum_{i=1}^{b} a_i x_i + \sum_{i=1}^{b} -a_i x^i$$
$$= \sum_{i=1}^{b} (a_i - a_i) x_i$$
$$= 0(x)$$
$$= |0\rangle \notin C.$$

$\therefore$ C no es subespacio de P_n

IV Todos los polinomios que tienen a $x-1$ como un factor.

$D = \{ d(x) = \sum_{i=0}^{n-1} a_i (x-1) x^i \}$

2. Cerradura bajo la suma

si $|d_1\rangle, |d_2\rangle \in D$, entonces $|c_1\rangle + |c_2\rangle \in D$

$|d_1\rangle = \sum_{i=0}^{n-1} a_i (x-1) x^i$; $|d_2\rangle = \sum_{i=0}^{n-1} -a_i (x-1) x^i$

$$|d_1\rangle + |d_2\rangle = \sum_{i=0}^{n-1} a_i (x-1) x^i + \sum_{i=1}^{n-1} -a_i (x-1) x^i$$
$$= \sum_{i=0}^{n-1} a_i (x-1) x^i - a_i (x-1) x^i$$
$$= 0(x)$$
$$= |0\rangle \notin D$$

$\therefore$ por lo tanto, D no es subespacio vect. de P_n.

Ejercicios 6, sección 2.2.4.

(6). $\mathbb{R}^3$ $a = a^i |e_i\rangle = a_x \hat{\imath} + a_y \hat{\jmath} + a_z \hat{k}$ $\quad |0\rangle \neq a^0 |q_0\rangle$

(a) $\langle e^i | e_j \rangle = \delta^i_j$

$\langle e^i \| e_j \rangle$	$\hat{\imath}$	$\hat{\jmath}$	$\hat{k}$
$\hat{\imath}$	1	0	0
$\hat{\jmath}$	0	1	0
$\hat{k}$	0	0	1

Cuaternión*

$|a\rangle = a^\alpha |q_\alpha\rangle = a^0 + a^i |q_i\rangle$

$\downarrow$

forman un e.v. respecto a la suma y multip.

Cerradura bajo la suma:

$$\left.\begin{aligned} |a\rangle &= a^\alpha |q_\alpha\rangle \\ |b\rangle &= b^\alpha |q_\alpha\rangle \end{aligned}\right\} |c\rangle = c^\alpha |q_\alpha\rangle$$

$$= |a\rangle + |b\rangle = (a^\alpha + b^\alpha)|q_\alpha\rangle \Rightarrow c^\alpha = a^\alpha + b^\alpha$$

Conmutativa.

$$|a\rangle + |b\rangle = a^\alpha |q_\alpha\rangle + b^\alpha |q_\alpha\rangle$$
$$= (a^\alpha + b^\alpha)|q_\alpha\rangle$$
$$= (b^\alpha + a^\alpha)|q_\alpha\rangle$$
$$= b^\alpha |q_\alpha\rangle + a^\alpha |q_\alpha\rangle$$

asociativa

$$(|a\rangle + |b\rangle)|c\rangle = (a^\alpha + b^\alpha)|q_\alpha\rangle + c^\alpha |q_\alpha\rangle$$
$$= (a^\alpha + b^\alpha + c^\alpha)|q_\alpha\rangle$$
$$= a^\alpha |q_\alpha\rangle + (b^\alpha + c^\alpha)|q_\alpha\rangle$$
$$= |a\rangle + (|b\rangle + |c\rangle)$$

Elemento neutro:

$$|0\rangle + |a\rangle =$$
$$= 0|q_\alpha\rangle + a^\alpha |q_\alpha\rangle = |a\rangle$$

Elemento simétrico - inverso:

$$|a\rangle + |b\rangle = (a^\alpha + b^\alpha)|q_\alpha\rangle$$
$$a^\alpha + b^\alpha = 0$$
$$\downarrow$$
$$b^\alpha = -a^\alpha$$

$$|q_\alpha\rangle(a^\alpha - a^\alpha) = 0|q_\alpha\rangle$$
$$|a\rangle - |a\rangle = |0\rangle$$

cerradura bajo el producto.

- $\alpha|a\rangle = \alpha(a^\alpha|q_\alpha\rangle = (\alpha a^\alpha)|q_\alpha\rangle$

  $\underset{\text{sea}}{\downarrow}$ — $\alpha a^\alpha = b^\alpha \rightarrow \alpha|a\rangle = |b\rangle$

- $\alpha(\beta|a\rangle) = \alpha(\beta a^\alpha|q_\alpha\rangle)$
  $= (\alpha\beta)a^\alpha|q_\alpha\rangle$
  $= \alpha\beta|a\rangle$

- $(\alpha+\beta)|a\rangle = (\alpha+\beta)a^\alpha|q_\alpha\rangle$
  $= \alpha a^\alpha|q_\alpha\rangle + \beta a^\alpha|q_\alpha\rangle$
  $= \alpha|a\rangle + \beta|a\rangle$

- $\alpha(|a\rangle + |b\rangle) = \alpha(a^\alpha|q_\alpha\rangle + b^\alpha|q_\alpha\rangle)$
  $= \alpha a^\alpha|q_\alpha\rangle + \alpha b^\alpha|q_\alpha\rangle$
  $= \alpha|a\rangle + \alpha|b\rangle$

- $\beta|a\rangle = \beta a^\alpha|q_\alpha\rangle$

  $(\beta a^\alpha) = a^\alpha$.

  $\beta = 1$

(b) cuaterniones cualesquiera $|b\rangle = (b^0, \mathbf{b})$ y $|r\rangle = (r^0, \mathbf{r})$.
Muestre que el producto entre los cuaterniones $|d\rangle = |b\rangle \odot |r\rangle$ podría expresarse como.

$$|d\rangle = |b\rangle \odot |r\rangle \longleftrightarrow (d^0, \mathbf{d}) = (\underbrace{b^0 r^0 - \mathbf{b}\cdot\mathbf{r}}, \underbrace{r^0\mathbf{b} + b^0\mathbf{r} + \mathbf{b}\times\mathbf{r}})$$

$b^i|q_i\rangle \odot r^j|q_j\rangle$

$$= b^i|q_i\rangle \cdot r^i|q_i\rangle + \varepsilon_{kij}\, b^j r^i\, |q_k\rangle$$

$$* \quad |b\rangle \odot |r\rangle = (b^0 + b^i|q_i\rangle) \odot (r^0 + r^j|q_j\rangle)$$

$$= b^0 r^0 + b^0\, r^j|q_j\rangle + b^i|q_i\rangle\, r^0 + b^i|q_i\rangle \odot r^j|q_j\rangle$$

$$= b^0 r^0 + b^0 r^j|q_j\rangle + b^i|q_i\rangle r^0 + b^i|q_i\rangle \odot r^i|q_i\rangle + \varepsilon_{kij} b^j r^i |q_k\rangle$$

$$= b^0 r^0 + b^0 \mathbf{r} + r^0 \mathbf{b} - \mathbf{b}\cdot\mathbf{r} + \mathbf{b}\times\mathbf{r}$$

$$= (b^0 r^0 - \mathbf{b}\cdot\mathbf{r},\ b^0\mathbf{r} + r^0\mathbf{b} + \mathbf{b}\times\mathbf{r})$$

$\lvert b\rangle \odot \lvert r\rangle$	r_0	$r_1\lvert q_1\rangle$	$r_2\lvert q_2\rangle$	$r_3\lvert q_3\rangle$
b_0	b_0r_0	$b_0r_1\lvert q_1\rangle$	$b_0r_2\lvert q_2\rangle$	$b_0r_3\lvert q_3\rangle$
$b_1\lvert q_1\rangle$	$b_1r_0\lvert q_1\rangle$	$-b_1r_1$	$b_1r_2\lvert q_3\rangle$	$b_1r_3\lvert q_3\rangle$
$b_2\lvert q_2\rangle$	$b_2r_0\lvert q_2\rangle$	$-b_2r_1\lvert q_3\rangle$	$-b_2r_2$	$b_2r_3\lvert q_1\rangle$
$b_3\lvert q_3\rangle$	$b_3r_0\lvert q_3\rangle$	$b_3r_1\lvert q_2\rangle$	$-b_3r_2\lvert q_1\rangle$	$-b_3r_3$

d) α: representa la diagonal.

$S^{(ij)}$: representa la primera columna y la primera fila.

$A^{(jk)i}$: representa lo demas

- es un pseudo vector ya que tiene una parte antisimetrica, o ~~es el~~ tambien se puede ver como que es pseudovector porque ~~tiene~~ un producto cruz.

e). $\sigma_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

$\sigma = \sigma_i \,, i = 1,2,3.$

$Q = (a_0, a) \,, \quad a_0\sigma_0 + a_1\sigma_1 + \dots + a_3\sigma_3$

$a_0\sigma_0 + a_i\sigma_i = (a_0, a) \rightarrow$ se puede escribir como cuaternion.

$\lvert b\rangle \Leftrightarrow \begin{pmatrix} z & w \\ -w^* & z^* \end{pmatrix}, \quad \begin{matrix} z = x + iy \\ w = a + ib \end{matrix}$

$$\lvert b\rangle = x\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\sigma_0} + a\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + yi\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + bi\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = i \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

$$|b\rangle = \overset{\text{Real.}}{x\sigma_0} + i\,\overbrace{\left(b\sigma_1 + a\sigma_2 + y\sigma_3 \right)}^{\text{Compleja}}$$

es un cuaternion porque puede ser representado mediante las matrices de pauli

f) $(ai + bj + c\hat{k} + d)\begin{bmatrix} 1 \\ i \\ j \\ k \end{bmatrix}$

$$\begin{array}{ccc} & i & \\ k & & \\ & & j \end{array}$$

$$= \begin{bmatrix} ai + bj + c\hat{k} + d \\ -a - b\hat{k} + c\hat{j} + d\hat{i} \\ ak - b - c\hat{i} + d\hat{j} \\ -a\hat{j} + b\hat{i} - c + dk \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b & c & d \\ d & c & -b & -a \\ -c & d & a & -b \\ b & -a & d & -c \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ \hat{i} \\ \hat{j} \\ k \end{bmatrix} =$$

$$a\Big[\quad = \begin{bmatrix} d & a & b & c \\ -a & d & c & -b \\ -b & -c & d & a \\ -c & b & -a & d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ i \\ j \\ k \end{bmatrix}$$

$$\underbrace{d\begin{bmatrix} I \end{bmatrix}}_{I} + \underbrace{a\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}}_{|q_1\rangle} + \underbrace{(-b)\begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{|q_3\rangle} + \underbrace{(-c)\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{|q_2\rangle}$$

g)

g) Si $|a\rangle = a^0 + a^i|q_i\rangle$, $|b\rangle = b^0 + b^i|q_i\rangle$ $i = 1,2,3$

$|a^*\rangle = a^0 - a^i|q_i\rangle$ + $b = b^i$ ∧ $a = a^i$

$\widetilde{\langle a|b\rangle} = |a^*\rangle \odot |b\rangle = (a_0 b_0 + a\cdot b,\ a_0 b - b^0 a - a\times b)$

esto es un cuaternion, por tanto no es producto interno.

h) $\langle a|b\rangle = \frac{1}{2}[\widetilde{\langle a|b\rangle} - |q_1\rangle \odot \widetilde{\langle a|b\rangle} \odot |q_1\rangle]$

$\widetilde{\langle a|b\rangle} = c$

- $|q_1\rangle \odot \widetilde{\langle a|b\rangle} = |q_1\rangle \odot |c\rangle$, Usando la def de $\odot$.

$= -c_1|q_0\rangle + c^0|q_1\rangle - c_3|q_2\rangle + c^2|q_3\rangle$

$= (c_1, c^0, -c^3, c^2)$ → equivalente a $\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix}$.

$= |d\rangle$

- $|d\rangle \odot |q_1\rangle = -d_1 + d_0|q_1\rangle + \varepsilon^{ij1} d_j |q_i\rangle$

$= -d_1 + d_0|q_1\rangle + d_3|q_2\rangle - d_2|q_3\rangle$

Remplazando... $|d\rangle$ por (c_1, c^0, c^3, c^2).

$= -c_0 - c_1|q_1\rangle + c_2|q_2\rangle + c_3|q_3\rangle$..

los reorganiza y les cambia el signo

los organiza.

ahora

$\langle a|b\rangle = \frac{1}{2}(|c\rangle - |d\rangle) = c_0|q_0\rangle + c_1|q_1\rangle$

Como $c = \widetilde{\langle a|b\rangle}$

$\langle a|b\rangle = (a_a b_a)|q_0\rangle + (a_0 b_1 - a_1 b^0 - a_2 b_3 + a_3 b_2)|q_1\rangle$.

3). $\alpha = 0,1,2,3$.

entonces el campo son los complejos, para poder considerarlo un producto interno.

$K = \{ a^0 + a^1 |q_1\rangle \mid a^0, a^1 \in \mathbb{R} \}$.

¿Cumple las propiedades?

1. $\langle a|a\rangle = a_\alpha^2 + a_0 a_1 - a_0 a_1 - a_2 a_3 + a_2 a_3$

$= a_\alpha^2 \geq 0 \quad \forall \in K.$

2. $\langle a|b\rangle = a_\alpha b_\alpha + (a_0 b_1 - a_1 b_0 + b_2 a_3 - b_3 a_2)|q_1\rangle$

$\langle b|a\rangle = a_\alpha b_\alpha + \underbrace{(b_0 a_1 - b_1 a_0 + a_2 b_3 - a_3 b_2)}_{\text{antisimetrico.}}|q_1\rangle.$

el simetrico.

$\langle a|b\rangle = \langle b|a\rangle^*$

3. $\langle a|\alpha b + \beta c\rangle = a^\alpha (\alpha b^\alpha + \beta c^\alpha) + [(\alpha b^\alpha + \beta c^\alpha)_1 a_0 - a_1 (\alpha b^\alpha + \beta c^\alpha)_0$
$+ a_3 (\alpha b^\alpha + \beta c^\alpha)_2 - a_2 (\alpha b^\alpha + \beta c^\alpha)_3] |q$

$= \alpha [a^\alpha b^\alpha + (a_0 b_1 - a_1 b_0 + a_3 b_2 - a_2 b_3)]$

$+ \beta [a^\alpha c^\alpha + (a_0 c_1 - a_1 c_0 + a_3 c_2 - a_2 c_3)]$

$= \alpha \langle a|b\rangle + \beta \langle a|c\rangle$

4. ~~$\langle a|\alpha b + \beta c\rangle^* = \langle \alpha b + \beta c|a\rangle^* \to$ prop 2.~~

$\langle \alpha a + \beta b|c\rangle = (\langle c|\alpha a + \beta b\rangle)^* \to$ prop 2.

$= (\alpha \langle c|a\rangle + \beta \langle c|b\rangle)^* = \alpha^* \langle c|a\rangle^* + \beta^* \langle c|b\rangle^*$

$= \alpha^* \langle a|c\rangle + \beta^* \langle b|a\rangle.$

5) $\langle a|0\rangle = 0$, ya que $|0\rangle = (0,0,0,0)$.

$\langle 0|a\rangle = 0$, conjugado de 0 es 0.

$\langle a|0\rangle = \langle 0|a\rangle = 0$.

i) $n(|a\rangle) = \||a\rangle\| = \sqrt{|a\rangle^* \odot |a\rangle}$

$|a\rangle^* \odot |a\rangle = a_\alpha^2$

$\||a\rangle\| = \sqrt{a_\alpha^2}$ → buena def de norma, equivalente a la norma euclidea.

j) $\overline{|a\rangle} = \dfrac{|a\rangle^*}{\||a\rangle\|^2} = \dfrac{1}{a_\alpha^2}|a\rangle^*$

$|b\rangle = |a\rangle^*$

$\langle a|\odot|\bar{a}\rangle = \dfrac{|a\rangle \odot |a\rangle^*}{a_\alpha^2} = \dfrac{|b\rangle^* \odot |b\rangle}{a_\alpha^2} = \dfrac{b_\alpha^2}{a_\alpha^2} = 1$

→ Identidad.

k).

1. $|a\rangle \odot |b\rangle = |d\rangle$

$\longmapsto (d^0, d_i) \rightarrow \in V$, cerrado

2. $(|a\rangle \odot |b\rangle) \odot |c\rangle = |p\rangle \odot |c\rangle$

$= p_0c_0 - p_ic_i + (p_0c_i + c_0p_i + \epsilon^{ijk} p_jc_k)|q_i\rangle$

• $|a\rangle \odot (|b\rangle \odot |c\rangle) = |a\rangle \odot |s\rangle$

$= a_0s_0 - a_is_i + (a_0s_i + s_0a_i + \epsilon^{ijk} a_js_k)|q_i\rangle$

$$|p\rangle = (|a\rangle \odot |b\rangle) = \overbrace{a_0 b_0 - a_i b_i}^{p_0} + (\overbrace{a_0 b_i + b_0 a_i}^{p_i} + \varepsilon^{ijk} a_j b_k)|q_i\rangle$$

$$|S\rangle = (|b\rangle \odot |c\rangle) = \underbrace{b_0 c_0 - b_i c_i}_{s_0} + (\underbrace{b_0 c_i + c_0 b_i + \varepsilon^{ijk} b_j c_k}_{s_i})|q_i\rangle$$

$|Pro_1\rangle =$

$$(|a\rangle \odot |b\rangle) \odot |c\rangle = (a_0 b_0 c_0 - a_i b_i c_0 - a_0 b_i c_i - a_i b_0 c_i - \varepsilon^{ijk} a_j b_k c_i$$

$$+ [a_0 b_0 c_i - a_i b_i c_i + a_0 b_i c_0 + a_i b_0 c_0 + (\varepsilon^{ijk} a_j b_k) c_0$$

$$+ \varepsilon^{ijk}(a_0 b_j c_k + a_j b_0 c_k + \varepsilon^{jlm} a_l b_m]\,|q_i\rangle.$$

$|Pro_2\rangle =$

$$|a\rangle \odot (|b\rangle \odot |c\rangle) = a_0 b_0 c_0 - a_0 b_i c_i - a_i b_0 c_i - a_i b_i c_0 - \varepsilon^{ijk} a_i b_j c_k$$

$$+ [a_0 b_0 c_i + a_0 b_i c_0 + a_0 \varepsilon^{ijk} b_j c_k]\,|q_i\rangle$$

$$+ [a_i b_0 c_0 - a_i b_i c_i + \varepsilon^{ijk}(a_j b_0 c_k + a_j b_k c_0 + \varepsilon_{klm} b_l c_m a_j]\,|q_i\rangle$$

$$|Pro_1\rangle_0 = Pro_{2_0} \text{ ya que } \varepsilon^{ijk} a_j b_k c_i = \varepsilon^{ijk} a_i b_j c_k$$
$$= \varepsilon^{jki} a_j b_k c_i.$$

ahora vamos a ver si sus partes complejas son iguales.

$$a_0 \cancel{b_0} c_i \overset{2}{-} a_i \cancel{b_i} c_i + a_0 \overset{3}{\cancel{b_i}} c_0 + a_i \overset{4}{\cancel{b_0}} c_0 + \varepsilon^{ijk} \underset{7}{\cancel{a_j}} b_k c_0$$
$$+ \varepsilon^{ijk} a_0 \overset{5}{\cancel{b_j}} c_k + \varepsilon^{ijk} \overset{6}{\cancel{a_j}} b_0 c_k + [a_k \underset{8}{\cancel{b_i}} c_k - a_i \underset{9}{\cancel{b_k}} c_k]$$
$$= a_0 \overset{1}{\cancel{b_0}} c_i + a_0 \overset{3}{\cancel{b_i}} c_0 + a_0 \varepsilon^{ijk} \overset{5}{\cancel{b_j}} c_k + a_i \overset{4}{\cancel{b_0}} c_0 - a_i \overset{2}{\cancel{b_i}} c_i + \varepsilon^{ijk} a_j \overset{6}{\cancel{b_0}} c_k$$
$$+ \varepsilon^{ijk} \underset{7}{\cancel{a_j}} b_k c_0 + \{ b_i \underset{8}{\cancel{c_j}} a_j - b_j \underset{9}{\cancel{c_i}} a_j \}$$

Por tanto $\overset{0=0}{}$ $(|a\rangle \odot |b\rangle) \odot |c\rangle = |a\rangle \odot (|b\rangle \odot |c\rangle)$

3. $\langle a | \odot | I \rangle = a_0 I_0 - a_i I_i + (a_0 I_i + I_0 a_i + \varepsilon^{ijk} a_j I_k) | q_i \rangle$

$= a_0 + a_i | q_i \rangle$

entonces $I = [1, 0, 0, 0] = 1$

además

$\langle a | \odot | I \rangle = \langle I | \odot \langle a |$, ✓

4. el simétrico de $| a \rangle$ es $|\bar{a}\rangle$

$|\bar{a}\rangle = \frac{|a\rangle^*}{\| |a\rangle \|^2}$, vease punto (j)

i) $(|a\rangle \odot |b\rangle)^* = |b\rangle^* \odot |a\rangle^*$

$|v'\rangle = |\bar{a}\rangle \odot |v\rangle \odot |a\rangle$

$\| |v'\rangle \|^2 = |v'^*\rangle \odot |v'\rangle = (|\bar{a}\rangle \odot |v\rangle \odot |a\rangle)^* \odot (|\bar{a}\rangle \odot |v\rangle \odot |a\rangle)$

$= |a^*\rangle \odot (|\bar{a}\rangle \odot |v\rangle)^* \odot |\bar{a}\rangle \odot |v\rangle \odot |a\rangle$

$= |a^*\rangle \odot |v^*\rangle \odot |\bar{a}^*\rangle \odot |\bar{a}\rangle \odot |v\rangle \odot |a\rangle$

$= \|a\|^2 \|\bar{a}\|^2 \|v\|^2$

$= \|v\|^2 \rightarrow$ Conserve la norme.

Ejercicios 5 y 6, sección 2.3.6

(5) $A \leftrightarrow \begin{pmatrix} z_1 & z_2 \\ z_3 & z_4 \end{pmatrix} = A^{+} = \begin{pmatrix} z_1^* & z_3^* \\ z_2^* & z_4^* \end{pmatrix}$ es decir $\begin{cases} z_1^* = z_1 \text{ real} \\ z_4^* = z_4 \text{ real} \\ z_2^* = z_3 \text{ comp.} \end{cases}$

$(A^{+})^i_j \rightarrow (A^*)^j_i \equiv A^j_i$

Entonces:

(a) Muestre que las matrices de Pauli $\{\sigma_0, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\}$ presentadas en los ejercicios de la sección 2.2.4 forman una base para ese espacio vectorial.

$$A = \begin{bmatrix} a_1 + a_2 i & b_1 + b_2 i \\ c_1 + c_2 i & d_1 + d_2 i \end{bmatrix}$$ Matriz compleja.

la transpuesta es

$$\begin{bmatrix} a_1 - a_2 i & c_1 - c_2 i \\ b_1 - b_2 i & d_1 - d_2 i \end{bmatrix}$$

como es hermitiana, entonces

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Matrices de pauli

(b) Base ortogonal?

$\langle a | b \rangle = T_r(A^{+}B)$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}}_{= A}, \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix}}_{= B}, \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}}_{= C}, \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}_{= I}$$

la base es ortogonal si los vectores son perpendiculares entre sí.

$A \cdot B = 0 \qquad T_r(A^{+}B) = 0$

$T_r(A^{+}B) = 0 + 0 + 0i + 0 = 0$

$T_r(A^{+}C) = 0 + 0 + 1 - 1 = 0$

$T_r(BC) = 0 + 0 + 1 - 1 = 0$

las matrices son ortogonales.

(c) subespacios de matrices reales.

Si existe ya que cualquier matriz donde sus componentes sean $\mathbb{R}$ cumplen con las características de un subespacio vectorial.

subespacio matrices complejas

$A, B \in \mathbb{C}$ y $\alpha \in \mathbb{R}$

1.- 0 está en las matrices complejas

2.- $A \oplus B \in \mathbb{C}$

$$A \oplus B = \begin{pmatrix} (a+e)i & (f+b)i \\ (c+g)i & (d+h)i \end{pmatrix} \in \mathbb{M}(\mathbb{C})_{2\times 2}$$

3.- $\alpha A \in \mathbb{C}$

$$\alpha A = \alpha \begin{pmatrix} ai & bi \\ ci & di \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha ai & \alpha bi \\ \alpha ci & \alpha di \end{pmatrix} \in \mathbb{C}$$

$\longrightarrow$ es un subespacio de los complejos puros.