

Signale & Systeme

Analyse eines IT₁-Systems

Name: Philipp Rall & Duc Vo Ngoc

Matrikelnr.: XXXX

Studiengangsleiter: Prof. Dr. Heinrich Braun

Kurs: TINF18B2

25. November 2019

Die folgenden Beschreibungsformen des $IT_1 - \text{Glieder}$ wurden nach ihrer Aussagekraft geordnet.

1 Explizite Lösung

Durch die inverse Laplacetransformation lässt sich die explizite Lösung des Systems für die Impulsfunktion als Eingangssignal ermitteln:

$$\begin{aligned} g(t) &= L^{-1}\{G(s)\} \\ &= L^{-1}\left\{\frac{4}{7s^2 + s}\right\} \\ &= 4 - 4 * e^{-\frac{t}{7}} \end{aligned}$$

Durch die Integration der expliziten Lösung kommen wir auf $h(t)$:

$$\begin{aligned} h(t) &= \int_0^t g(\tau) d\tau \\ &= 4 * t + 28 * e^{-\frac{t}{7}} \end{aligned}$$

2 Zustandsraumdarstellung

Die allgemeine Form der Zustandsraumdarstellung ist in den folgenden zwei Zeilen zu sehen.

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx + Du \end{aligned}$$

Das behandelte $IT_1 - \text{Glieder}$ besitzt mit den Anfangswerten

$$x_1(0) = y(0), x_2(0) = \dot{y}(0)$$

folgende Zustandsraumdarstellung:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -\frac{1}{7} \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{4}{7} \end{pmatrix} u \\ y &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} x \end{aligned}$$

UNTERSCHIEDLICH ZU MATLAB LÖSUNG??? Matlab:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \begin{pmatrix} -\frac{1}{7} & 0 \\ \frac{1}{4} & 0 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} u \\ y &= \begin{pmatrix} 0 & \frac{8}{7} \end{pmatrix} x \end{aligned}$$

3 Eingangs-Ausgang Differentialgleichung

$$\begin{aligned}G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} &= \frac{4}{7s^2 + s} \\Y(s)(7s^2 + s) &= U(s) * 4 \\7\ddot{y} + \dot{y} &= 4u\end{aligned}$$

Anfangswerte: $y(0) = y_0, \dot{y}(0) = \dot{y}_0, u(0) = u_0$

4 Übertragungsfunktion

Formel 2 zeigt die allgemeine Übertragungsfunktion $G(s)$ eines $IT_1 - Gliedes$. In Formel 3 wird ein konkretes $IT_1 - Glied$ dargestellt, das in diesem Skript analysiert wird.

Formel 4 zeigt dessen ausmultiplizierte Form.

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} \tag{1}$$

$$= \frac{K}{(T_I + T_1 s) * s} \tag{2}$$

$$= \frac{4}{(1 + 7s)s} \tag{3}$$

$$= \frac{4}{7s^2 + s} \tag{4}$$

5 Übergangsfunktion

Die Übergangsfunktion $h(t)$, auch Sprungantwort genannt, ist die Antwort im Zeitbereich auf die Heaviside-Funktion $\sigma(t)$:

$$\sigma(t) = \begin{cases} 0 & \text{für } t < 0 \\ 1 & \text{für } t > 0 \end{cases}$$

In Abbildung 1 ist der Aufbau zu sehen. Abbildungen 2 und 3 zeigen die Sprungantwort sowohl in Simulink simuliert, als auch in Matlab berechnete.

Die Steigung der Asymptoten der Sprungantwort entspricht dem statischen Verstärkungsfaktor $K = 4$.

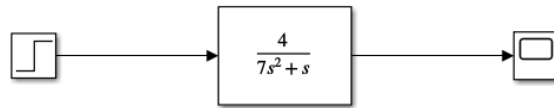


Abbildung 1: Aufbau in Simulink

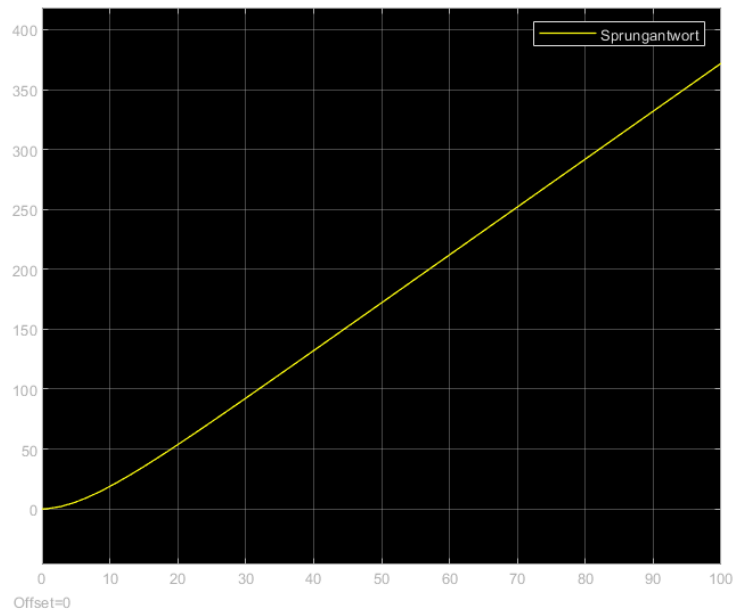


Abbildung 2: Oszilloskop - Sprungantwort im Intervall 0 bis 100

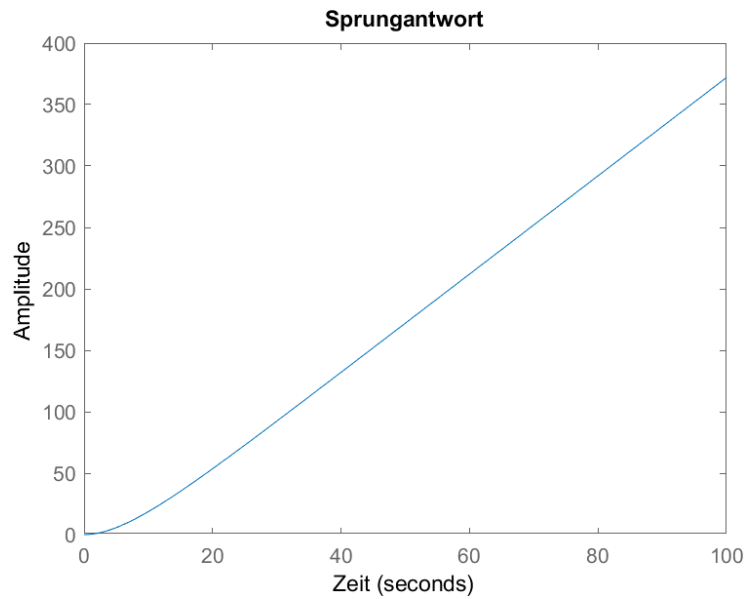


Abbildung 3: Matlab - Sprungantwort im Intervall 0 bis 100

6 Gewichtsfunktion

In Abbildung 4 ist die Gewichtsfunktion $g(t)$, auch Impulsantwort genannt, zu sehen. Diese Funktion ist die Ableitung der Übergangsfunktion $h(t)$, auch Sprungantwort genannt.

$$h(t) \xrightarrow{\frac{d}{dt}} g(t)$$

$$H(s) = \frac{1}{s} * G(s) \xrightarrow{*s} G(s)$$

Die Impulsantwort konvergiert gegen den statischen Verstärkungsfaktor $K = 4$:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} h(t) = K$$

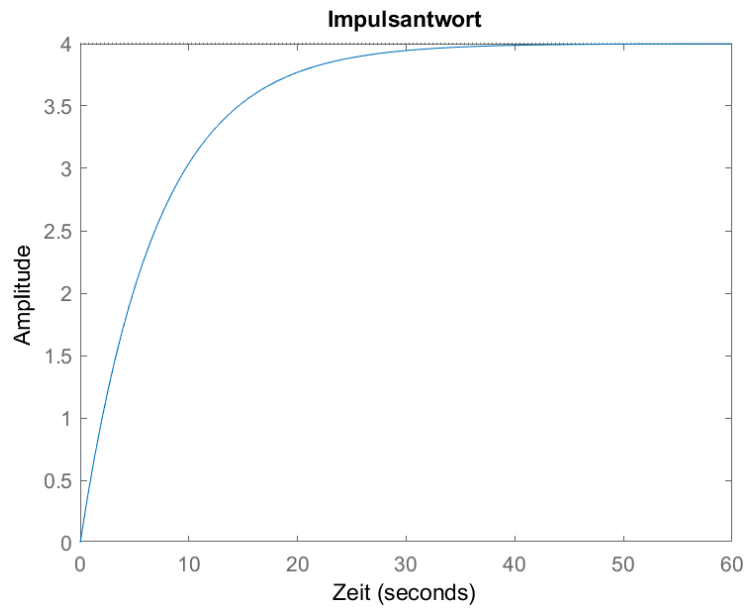


Abbildung 4: Impulsantwort

7 Bode-Diagramm

In Abbildung 5 ist die Amplitude und die Phase des Systemausgangs in Abhängigkeit zur Frequenz (logarithmisch skaliert) dargestellt.

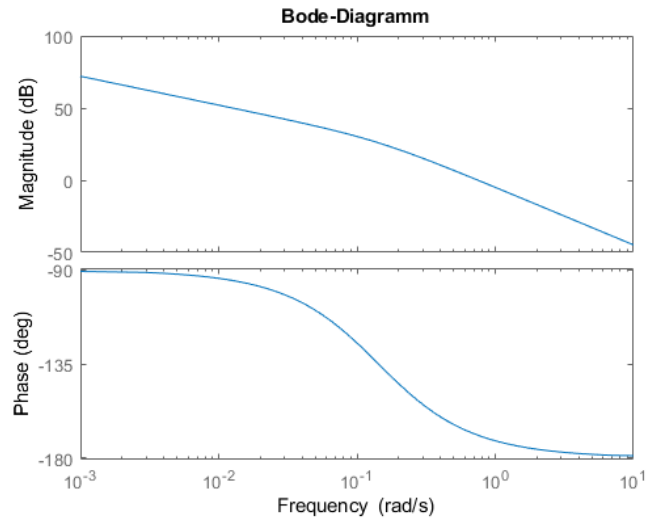


Abbildung 5: Bode-Diagramm

8 Nyquist-Plot

Die Ortskurve oder auch Nyquist-Plot in Abbildung 6 ist ein Graph, der die Amplitude und Phase des Systems für Schwingungen mit allen Frequenzen darstellt.

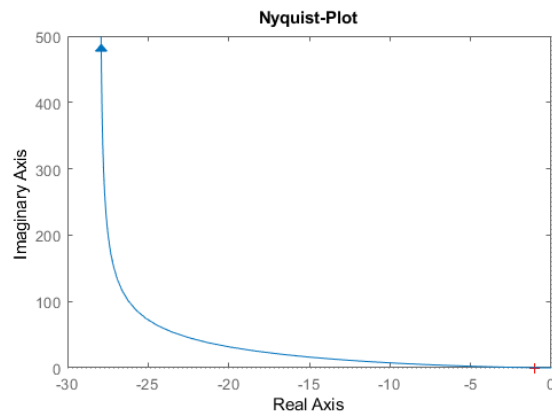


Abbildung 6: Nyquist-Plot

9 Pol-Nullstellenplot

In Abbildung 7 ist der Pol-Nullstellenplot des Systems zu sehen.

Die mit x markierten Stellen zeigen die Polstellen an. Dieses System hat keine Nullstellen.

Die Polstellen des Systems befinden sich im negativen (0 inkludiert) Teil der reell-wertigen Achse und liegen somit in der linken Halbebene.

Die Polstellen entsprechen den Eigenwerte der *Systemmatrix* A :

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -\frac{1}{7} \end{bmatrix}$$

$$\lambda_1 = 0 \quad \Re(\lambda_1) = 0$$

$$\lambda_2 = -\frac{1}{7} \quad \Re(\lambda_2) = 0$$

⇒ Das System ist stabil.

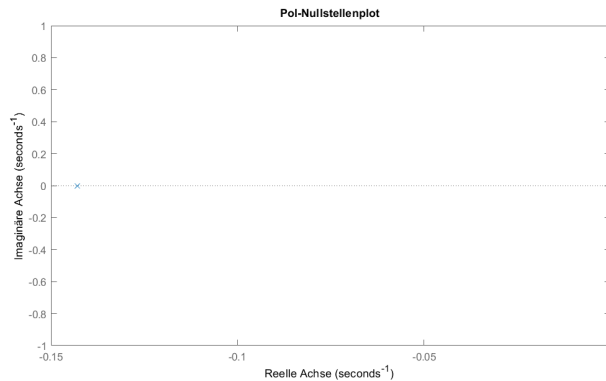


Abbildung 7: Pol-Nullstellenplot

10 Statischer Verstärkungsfaktor

Der statische Verstärkungsfaktor des behandelten IT_1 – Gliedes beträgt:

$$K = 4$$

Ein Graph des Verstärkungsfaktor, wobei auf der x – Achse die konstanten Eingänge und auf der y – Achse die Ausgänge des Systems für $t \rightarrow \infty$ aufgetragen sind, ist in Abbildung 8 zu sehen.

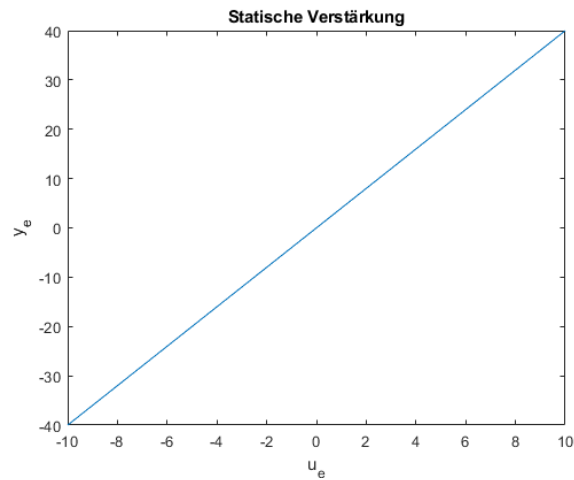


Abbildung 8: Statische Verstärkung

11 Eigenschaften des Systems

Im folgenden ist eine Liste angeführt an Eigenschaften, die sich aus der Übertragungsfunktion $G(s)$ ergeben:

- Differenzengrad , also Nennergrad - Zählergrad, mit Wert 2, dadurch ist das System nicht sprungfähig, antwortet aber sofort mit einer Steigung größer 0
- Ein IT_1 – Glied
- Integrierendes Verhalten (I-Verhalten) mit einer Zeitkonstanten T_1
- Keine Nullstellen, deshalb positiver Anfang
- Es gibt zwei reelle Polstellen, die kleiner gleich 0 sind \rightarrow das System ist stabil