Signale & Systeme
Analyse eines Systems

Name: Dein Name
Matrikelnr.: 123456789
Studiengangsleiter: Professor
Kurs: Ein Kurs

4. Dezember 2018

1 Das System

1.1 Die Übertragungsfunktion

Formel 1 zeigt die Übertragungsfunktion die in diesem Skript analysiert wird. Formel 3 zeigt dann die ausmultiplizierte Formel, sodass die Eigenschaften des Systems leichter zu lesen sind.

$$
\begin{aligned}
G(s) &= \frac{Y(s)}{U(s)} && (1)\\
&= \frac{(1-2s)(1-3s)}{(1+4s)(1+5s)(1+6s)} && (2)\\
&= \frac{6s^2-5s+1}{120s^3+74s^2+15s+1} && (3)
\end{aligned}
$$

1.2 Eigenschaften des Systems

Folgend eine Liste der Eigenschaften des Systems, die sich aus der Übertragungsfunktion $G(s)$ ergibt:

- Nennergrad - Zählergrad $= 1$, dadruch ist das System nicht sprungfähig, antwortet aber sofort mit einer Steigung. Außerdem ist die $D - Matrix$ (welche einem Sprung am Anfang ensprechen würde) 0.
- Ein PT_3-Glieder
- P-Verhalten mit positiver Verstärkung
- gerade Anzahl nicht-minimalphasige rechtsseitiger Nullstellen: Dadurch antwortet das System erst falsch
- es gibt 3 reelle negative Polstellen, somit ist das System stabil

2 Andere Darstellungsformen des Systems

2.1 Eingangs-Ausgang Differentialgleichung

$$
\begin{aligned}
G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} &= \frac{6s^2-5s+1}{120s^3+74s^2+15s+1}\\
Y(s)(120s^3+74s^2+15s+1) &= U(s)(6s^2-5s+1)\\
120\dddot{y}+74\ddot{y}+15\dot{y} &= 6\ddot{u}+5\dot{u}+u
\end{aligned}
$$

2.2 Zustandsraumdarstellung

Die allgemeine Form der Zustandsraumdarstellung ist in den folgenden zwei Zeilen zu sehen.

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx \end{aligned}$$

2.2.1 originale Zustandsraumdarstellung

Dabei ist eine Möglichkeit Variante in der Zustandsraumdarstellung das zu behandelnde System zu beschreiben die Folgende:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \begin{pmatrix} -0.6167 & -0.25 & -0.1333 \\ 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0.125 & 0 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0.5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} u \\ y &= \begin{pmatrix} 0.1 & -0.1667 & 0.2667 \end{pmatrix} x \end{aligned}$$

2.2.2 Ähnlichkeitstransformation

Durch eine Ähnlichkeitstransformation können mit der Hilfmatrix T in 2.2.2 folgenden Matrizen in der Zustandsraumdarstellung erzeugt werden.

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 3 \\ 9 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \begin{pmatrix} 0.1771 & -0.2292 & 0.02292 \\ 0.3795 & -0.3839 & 0.01339 \\ -1.862 & 1.598 & -0.4098 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0.5 \\ 0 \\ 4.5 \end{pmatrix} u \\ y &= \begin{pmatrix} -0.2429 & 0.319 & 0.0381 \end{pmatrix} x \end{aligned}$$

3 Simulation des Systems

3.1 Sprungantwort

In Abbildung 3.1 ist die Reaktion des Systems auf den Heaviside-Funktion zu sehen. Diese ist wie folgt definiert:

$$\sigma(t) = \begin{cases} 0 & \text{für t} < 0 \\ 1 & \text{für t} > 0 \end{cases}$$

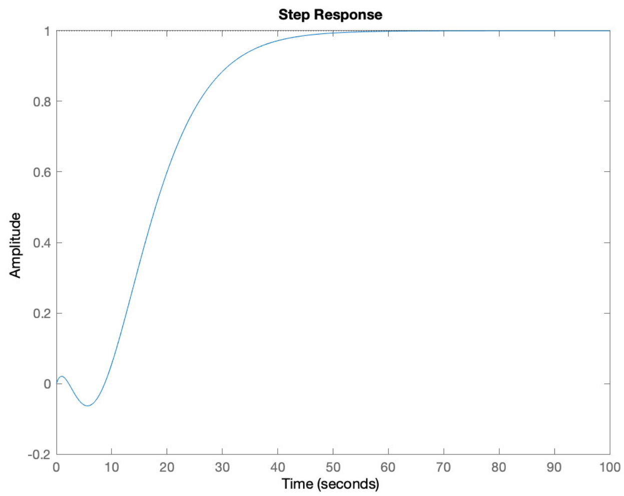

Abbildung 1: Sprungantwort

3.2 Impulsantwort

In Abbildung 3.2 ist die Reaktion des Systems auf den Dirac-Funktion zu sehen. Die Dirac-Funktion ist die Ableitung der Heaviside-Funktion und definiert durch:

$$\delta(t) \overset{D'}{=} \frac{d}{dt}\sigma(t)$$

Die wichtigste Eigenschaft der Dirac-Funktion ist, dass die Fläche unter dem Impuls exakt 1 ist. Daraus folgt:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dx = 1$$

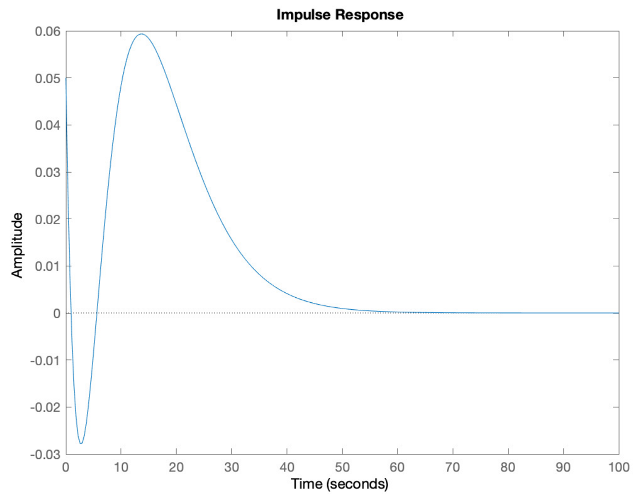

Abbildung 2: Impulsantwort

3.3 explizite Lösung

Durch die inverse Laplacetransformation lässt sich die explizite Lösung des Systems für die Impulsfunktion als Eingangssignal ermitteln.

$$L^{-1}\{\frac{6s^2 - 5s + 1}{120s^3 + 74s^2 + 15s + 1}\} = \frac{21\,e^{-\frac{t}{4}}}{4} - \frac{56\,e^{-\frac{t}{5}}}{5} + 6\,e^{-\frac{t}{6}}$$

3.4 statischer Verstärkungsfaktor

Wie in Abbildung 3.1 zu sehen pendelt sich der Ausgang des System bei 1 ein. Das passiert, weil $k = 1$ ist. Ein Graph des Verstärkungsfaktor, wobei auf der $x - Achse$ die konstanten Eingänge und auf der $y - Achse$ die Ausgänge des Systems für $t \to \infty$.

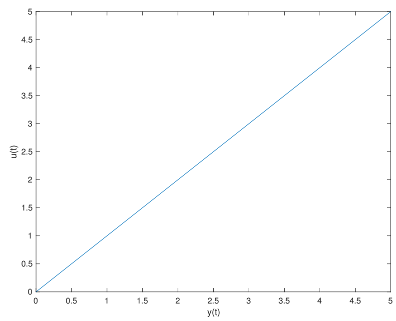

Abbildung 3: statischer Verstärkungsfaktor

4 Verhalten bei Schwingungseingängen

4.1 Nullstellen und Pole

Abbildung 4.1 zeigt einen Pole-Zero-Plot zu dem System, welcher als **x** markiert die Nullstellen des Systems und mit **o** markiert die Polstellen des System zeigt.

Das System hat 3 Polstellen auf der reellen Achse in der linken Halbebene, was ebenfalls die Stabilität des Systems zeigt, und 2 nicht-minimalphasige Nullstellen auf der reellen Achse, also in der rechten Halbebene.

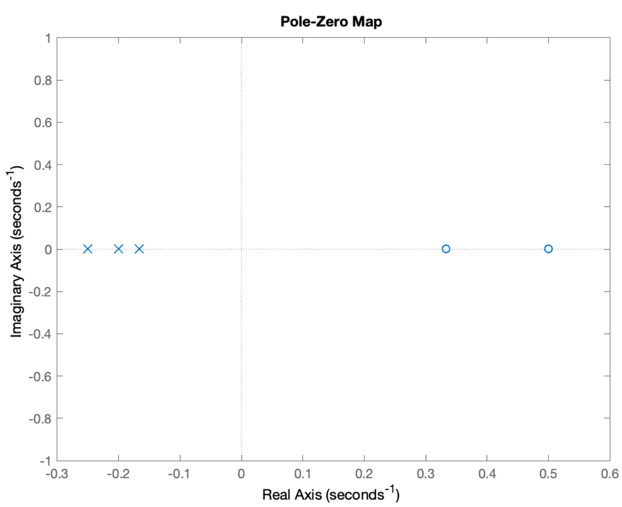

Abbildung 4: Pole-Zero-Plot

4.2 Bode-Plot

In Abbildung 4.2 ist die Amplitude und die Phase des Systemausgangs in Abhängigkeit zur Frequenz (logarithmisch skaliert).

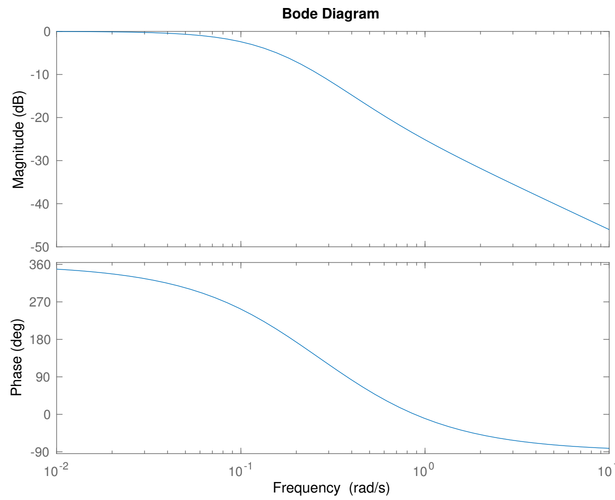

Abbildung 5: Bode-Plot

4.3 Nyquist-Plot

Die Ortskurve oder auch Nyquist-Plot in 4.3 ist ein Graph der die Amplitude und Phase des Systems für Schwingungen mit allen Frequenzen darstellt.

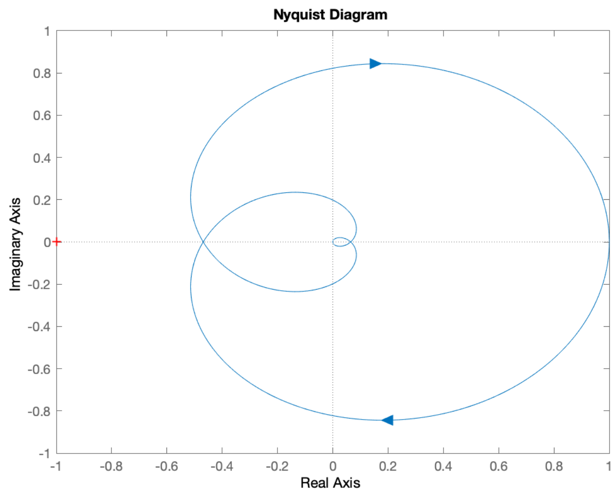

Abbildung 6: Ortskurve / Nyquist-Plot