Signale & Systeme
Analyse eines IT_1-Systems

Name: Philipp Rall & Duc Vo Ngoc
Matrikelnummer: 5844601 & XXXXX
Studiengangsleiter: Prof. Dr. Heinrich Braun
Kurs: TINF18B2

6. Dezember 2019

Die folgenden Beschreibungsformen des $IT_1 - Gliedes$ wurden nach ihrer Aussagekraft geordnet.

1 Explizite Lösung

Durch die inverse Laplacetransformation lässt sich die explizite Lösung des Systems für die Impulsfunktion als Eingangssignal ermitteln:

$$
\begin{aligned}
g(t) &= L^{-1}\{G(s)\} \\
&= L^{-1}\{\frac{4}{7s^2+s}\} \\
&= 4 - 4 * e^{-\frac{t}{7}}
\end{aligned}
$$

Durch die Integration der expliziten Lösung kommen wir auf h(t):

$$
\begin{aligned}
h(t) &= \int_0^t g(\tau) d\tau \\
&= 4 * t + 28 * e^{-\frac{t}{7}}
\end{aligned}
$$

2 Zustandsraumdarstellung

Die allgemeine Form der Zustandsraumdarstellung ist in den folgenden zwei Zeilen zu sehen.

$$
\begin{aligned}
\dot{x} &= Ax + Bu \\
y &= Cx + Du
\end{aligned}
$$

Das behandelte $IT_1 - Glied$ besitzt mit den Anfangswerten

$$x_1(0) = y(0), x_2(0) = \dot{y}(0)$$

folgende Zustandsraumdarstellung:

$$
\begin{aligned}
\dot{x} &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -\frac{1}{7} \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{4}{7} \end{pmatrix} u \\
y &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} x
\end{aligned}
$$

3 Eingangs-Ausgang Differentialgleichung

$$
\begin{aligned}
G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} &= \frac{4}{7s^2+s} \\
Y(s)(7s^2+s) &= U(s) * 4 \\
7\ddot{y} + \dot{y} &= 4u
\end{aligned}
$$

Anfangswerte: $y(0) = y_0, \dot{y}(0) = \dot{y}_0, u(0) = u_0$

4 Übertragungsfunktion

Formel 2 zeigt die allgemeine Übertragungsfunktion $G(s)$ eines $IT_1 - Gliedes$. In Formel 3 wird ein konkretes $IT_1 - Glied$ dargestellt, das in diesem Skript analysiert wird.
Formel 4 zeigt dessen ausmultiplizierte Form.

$$\begin{aligned} G(s) &= \frac{Y(s)}{U(s)} && (1) \\ &= \frac{K}{(T_I + T_1 s) * s} && (2) \\ &= \frac{4}{(1+7s)s} && (3) \\ &= \frac{4}{7s^2 + s} && (4) \end{aligned}$$

5 Übergangsfunktion

Die Übergangsfunktion $h(t)$, auch Sprungantwort genannt, ist die Antwort im Zeitbereich auf die Heaviside-Funktion $\sigma(t)$:

$$\sigma(t) = \begin{cases} 0 & \text{für t} < 0 \\ 1 & \text{für t} > 0 \end{cases}$$

In Abbildung 1 ist der Aufbau zu sehen. Abbildungen 2 und 3 zeigen die Sprungantwort sowohl in Simulink simuliert, als auch in Matlab berechnet.
Die Steigung der Asymptoten der Sprungantwort entspricht $K = 4$.

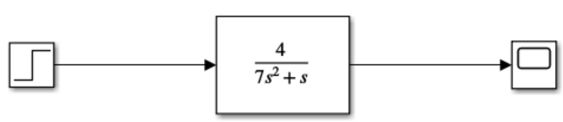

Abbildung 1: Aufbau in Simulink

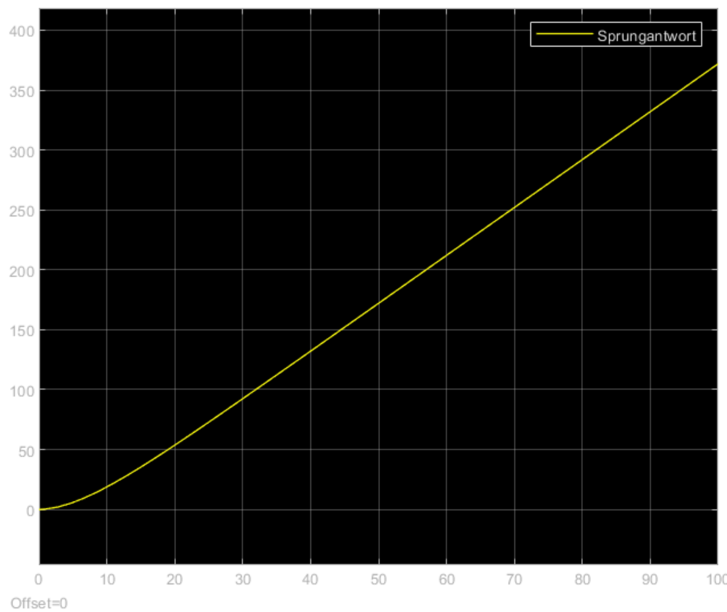

Abbildung 2: Oszilloskop - Sprungantwort im Intervall 0 bis 100

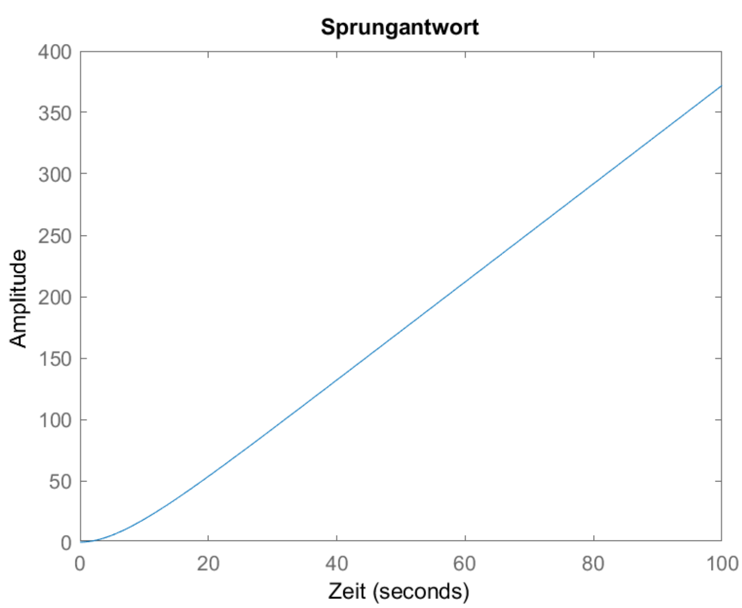

Abbildung 3: Matlab - Sprungantwort im Intervall 0 bis 100

6 Gewichtsfunktion

In Abbildung 4 ist die Gewichtsfunktion $g(t)$, auch Impulsantwort genannt, zu sehen. Diese Funktion ist die Ableitung der Übergangsfunktion $h(t)$, auch Sprungantwort genannt.

$$h(t) \xrightarrow{\frac{d}{dt}} g(t)$$

$$H(s) = \frac{1}{s} * G(s) \xrightarrow{*s} G(s)$$

Die Impulsantwort konvergiert gegen den statischen Verstärkungsfaktor $K = 4$:

$$lim_{t\rightarrow\infty} g(t) = K$$

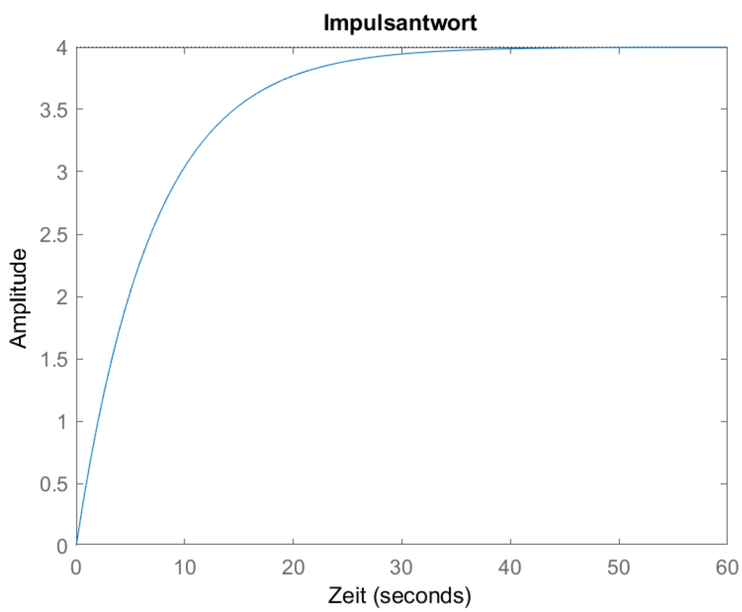

Abbildung 4: Impulsantwort

7 Bode-Diagramm

In Abbildung 5 ist die Amplitude und die Phase des Systemausgangs in Abhängigkeit zur Frequenz (logarithmisch skaliert) dargestellt.

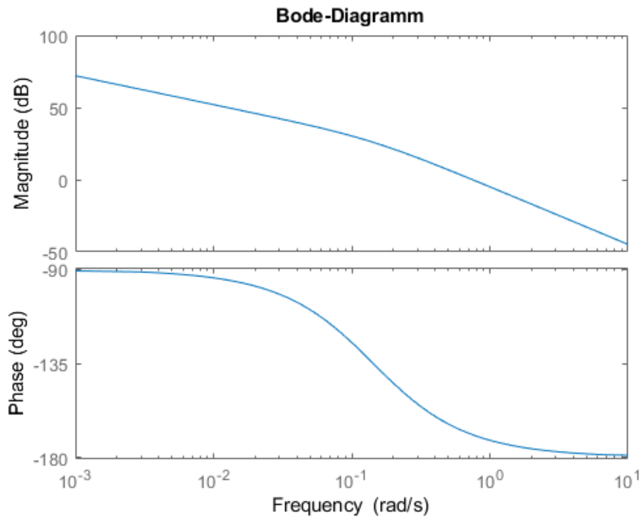

Abbildung 5: Bode-Diagramm

8 Nyquist-Plot

Die Ortskurve oder auch Nyquist-Plot in Abbildung 6 stellt Betrag und Phase des Systems als Kurve in der komplexen Zahlenebene dar.

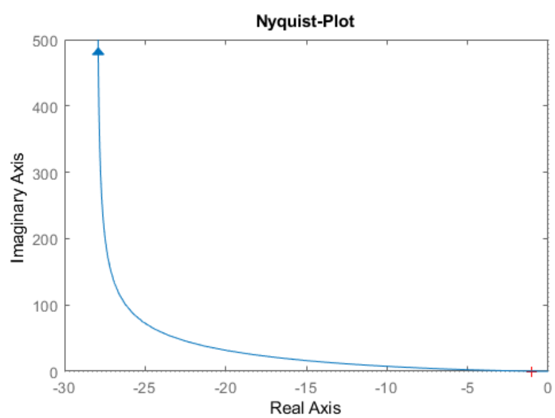

Abbildung 6: Nyquist-Plot

9 Pol-Nullstellenplot

In Abbildung 7 ist der Pol-Nullstellenplot des Systems zu sehen.
Die mit x markierten Stellen zeigen die Polstellen an. Dieses System hat keine Nullstellen.
Die Polstellen des Systems befinden sich im negativen (0 inkludiert) Teil der reell-wertigen Achse und liegen somit in der linken Halbebene.

Die Polstellen entsprechen den Eigenwerte der $SystemmatrixA$:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -\frac{1}{7} \end{bmatrix}$$
$$\lambda_1 = 0 \qquad \Re(\lambda_1) = 0$$
$$\lambda_2 = -\frac{1}{7} \qquad \Re(\lambda_2) = 0$$

$\Rightarrow$Das System ist stabil.

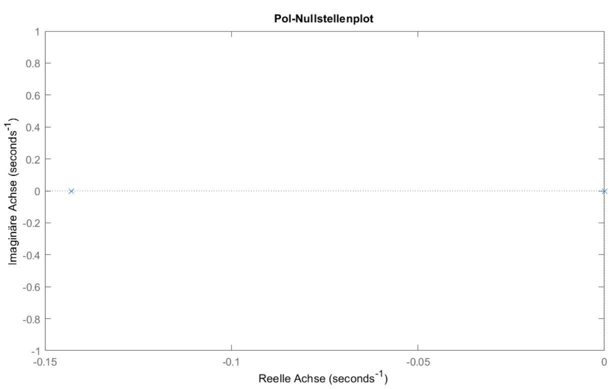

Abbildung 7: Pol-Nullstellenplot

10 Statischer Verstärkungsfaktor

Der statischer Verstärkungsfaktor des behandelten $IT_1 - Gliedes$ ist ∞, da ein integrierendes Verhalten vorliegt. Der Graph der Übergangsfunktion strebt gegen unendlich.

Nichtsdestotrotz lässt sich feststellen, dass die Übergangsfunktion die Asymptote

$$y = 4x$$

besitzt bzw. dass die Gewichtsfunktion gegen den Wert 4 konvergiert.
Der Graph dieser Gerade ist in Abbildung 8 zu sehen. Dabei sind auf der $x-$

Achse die konstanten Eingänge und auf der $y-Achse$ die Ausgänge des Systems für $t \to \infty$ aufgetragen.

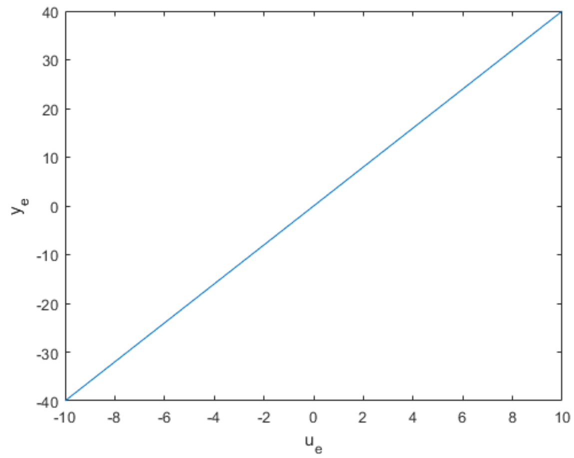

Abbildung 8: Asymptote der Übergangsfunktion