

Signale & Systeme

Analyse eines IT₁-Systems

Name: Philipp Rall & Duc Vo Ngoc

Matrikelnr.: XXXX

Studiengangsleiter: Prof. Dr. Heinrich Braun

Kurs: TINF18B2

24. November 2019

1 Das System

1.1 Die Übertragungsfunktion

Formel 2 zeigt die allgemeine Übertragungsfunktion $G(s)$ eines IT_1 - *Gliedes*. In Formel 3 wird ein konkretes IT_1 - *Glied* dargestellt, das in diesem Skript analysiert wird.

Formel 4 zeigt dessen ausmultiplizierte Form.

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} \quad (1)$$

$$= \frac{K}{(T_I + T_1 s) * s} \quad (2)$$

$$= \frac{4}{(1 + 7s)s} \quad (3)$$

$$= \frac{4}{7s^2 + s} \quad (4)$$

1.2 Eigenschaften des Systems

Im folgenden ist eine Liste angeführt an Eigenschaften, die sich aus der Übertragungsfunktion $G(s)$ ergeben:

- Differenzengrad , also Nennergrad - Zählergrad, mit Wert 2, dadurch ist das System nicht sprungfähig, antwortet aber sofort mit einer Steigung größer 0
- Ein IT_1 - *Glied*
- Integrierendes Verhalten (I-Verhalten) mit einer Zeitkonstanten T_1
- Keine Nullstellen, deshalb positiver Anfang
- Es gibt zwei reelle Polstellen, die kleiner gleich 0 sind \rightarrow das System ist stabil

2 Darstellungsformen des Systems

2.1 Eingangs-Ausgang Differentialgleichung

$$\begin{aligned} G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} &= \frac{4}{7s^2 + s} \\ Y(s)(7s^2 + s) &= U(s) * 4 \\ 7\ddot{y} + \dot{y} &= 4u \end{aligned}$$

Anfangswerte: $y(0) = y_0, \dot{y}(0) = \dot{y}_0, u(0) = u_0$

2.2 Zustandsraumdarstellung

Die allgemeine Form der Zustandsraumdarstellung ist in den folgenden zwei Zeilen zu sehen.

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx + Du\end{aligned}$$

Das behandelte IT_1 – *Glied* besitzt mit den Anfangswerten

$$x_1(0) = y(0), x_2(0) = \dot{y}(0)$$

folgende Zustandsraumdarstellung:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -\frac{1}{7} \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{4}{7} \end{pmatrix} u \\ y &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} x\end{aligned}$$

UNTERSCHIEDLICH ZU MATLAB LÖSUNG??? Matlab:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \begin{pmatrix} -\frac{1}{7} & 0 \\ \frac{1}{4} & 0 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} u \\ y &= \begin{pmatrix} 0 & \frac{8}{7} \end{pmatrix} x\end{aligned}$$

3 Simulation des Systems

3.1 Die Übergangsfunktion

Die Übergangsfunktion $h(t)$, auch Sprungantwort genannt, ist die Antwort im Zeitbereich auf die Heaviside-Funktion $\sigma(t)$:

$$\sigma(t) = \begin{cases} 0 & \text{für } t < 0 \\ 1 & \text{für } t > 0 \end{cases}$$

In Abbildung 1 ist der Aufbau zu sehen. Abbildungen 2 und 3 zeigen die Sprungantwort sowohl in Simulink simuliert, als auch in Matlab berechnete.

i Die Steigung der Asymptoten der Sprungantwort entspricht dem statischen Verstärkungsfaktor $K = 4$.

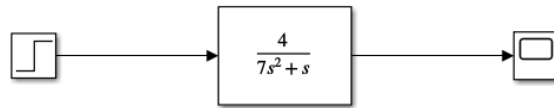


Abbildung 1: Aufbau in Simulink

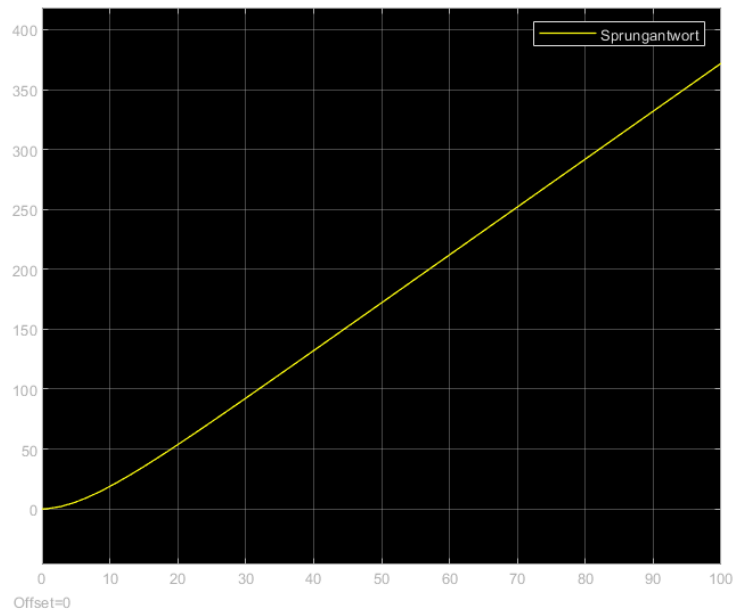


Abbildung 2: Oszilloskop - Sprungantwort im Intervall 0 bis 100

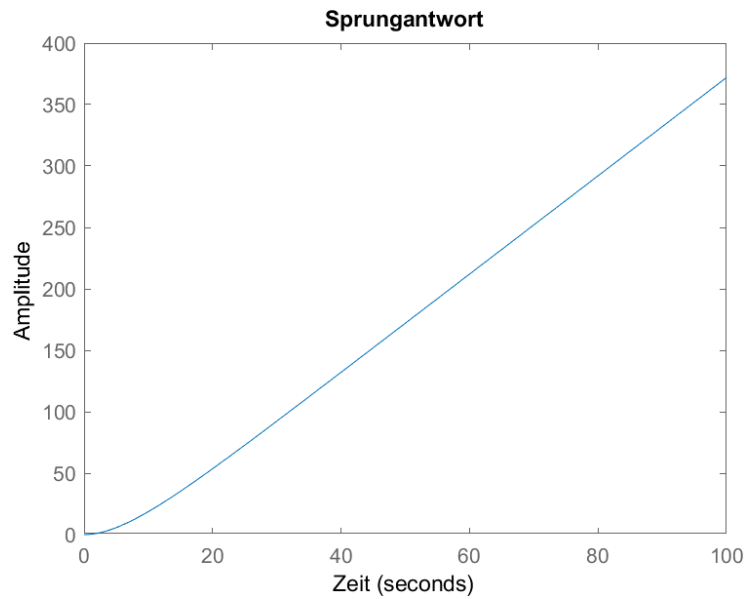


Abbildung 3: Matlab - Sprungantwort im Intervall 0 bis 100

3.2 Die Gewichtsfunktion

In Abbildung 4 ist die Gewichtsfunktion $g(t)$, auch Impulsantwort genannt, zu sehen. Diese Funktion ist die Ableitung der Übergangsfunktion $h(t)$, auch Sprungantwort genannt.

$$h(t) \xrightarrow{\frac{d}{dt}} g(t)$$

$$H(s) = \frac{1}{s} * G(s) \xrightarrow{*s} G(s)$$

Die Impulsantwort konvergiert gegen den statischen Verstärkungsfaktor $K = 4$:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} h(t) = K$$

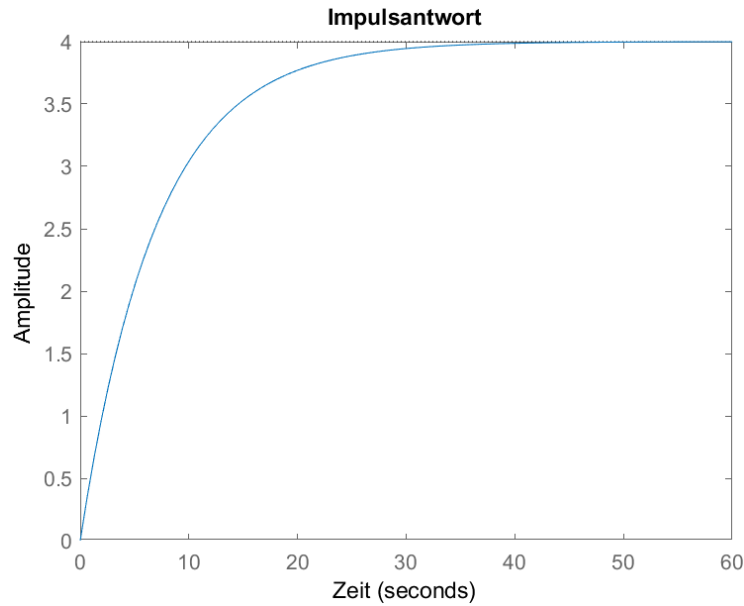


Abbildung 4: Impulsantwort

3.3 Die explizite Lösung

Durch die inverse Laplacetransformation lässt sich die explizite Lösung des Systems für die Impulsfunktion als Eingangssignal ermitteln:

$$\begin{aligned}
 g(t) &= L^{-1}\{G(s)\} \\
 &= L^{-1}\left\{\frac{4}{7s^2 + s}\right\} \\
 &= 4 - 4 * e^{-\frac{t}{7}}
 \end{aligned}$$

Durch die Integration der expliziten Lösung kommen wir auf $h(t)$:

$$\begin{aligned}
 h(t) &= \int_0^t g(\tau) d\tau \\
 &= 4 * t + 28 * e^{-\frac{t}{7}}
 \end{aligned}$$

3.4 Statischer Verstärkungsfaktor

Der statische Verstärkungsfaktor des behandelten $IT_1 - \text{Gliedes}$ beträgt:

$$K = 4$$

Ein Graph des Verstärkungsfaktor, wobei auf der x -Achse die konstanten Eingänge und auf der y -Achse die Ausgänge des Systems für $t \rightarrow \infty$ aufgetragen sind, ist in Abbildung 5 zu sehen.

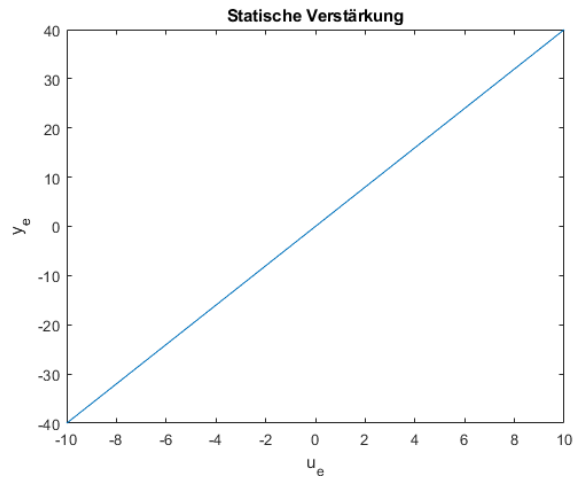


Abbildung 5: Statische Verstärkung

4 Verhalten bei Schwingungseingängen

4.1 Das Pol-Nullstellenplot

In Abbildung 6 ist der Pol-Nullstellenplot des Systems zu sehen.

Die mit x markierten Stellen zeigen die Polstellen an. Dieses System hat keine Nullstellen.

Die Polstellen des Systems befinden sich im negativen (0 inkludiert) Teil der reell-wertigen Achse und liegen somit in der linken Halbebene.

Die Polstellen entsprechen den Eigenwerte der *Systemmatrix* A :

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -\frac{1}{7} \end{bmatrix}$$

$$\lambda_1 = 0 \quad \Re(\lambda_1) = 0$$

$$\lambda_2 = -\frac{1}{7} \quad \Re(\lambda_2) = 0$$

\Rightarrow Das System ist stabil.

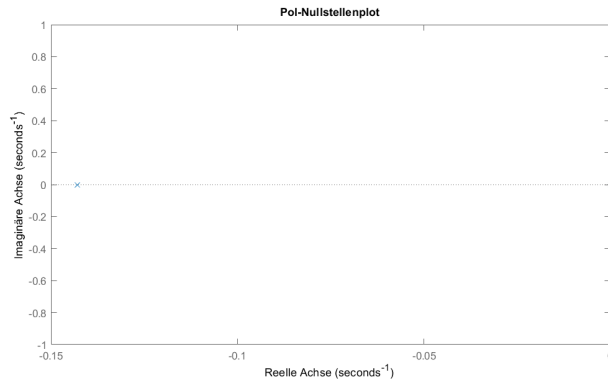


Abbildung 6: Pol-Nullstellenplot

4.2 Bode-Diagramm

In Abbildung 7 ist die Amplitude und die Phase des Systemausgangs in Abhängigkeit zur Frequenz (logarithmisch skaliert) dargestellt.

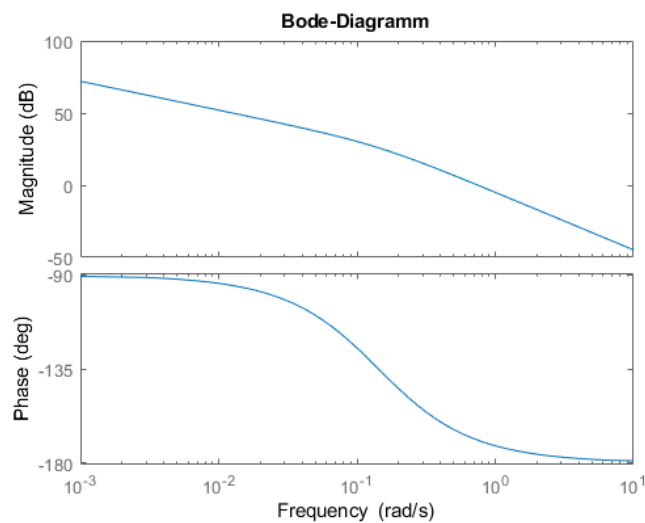


Abbildung 7: Bode-Diagramm

4.3 Nyquist-Plot

Die Ortskurve oder auch Nyquist-Plot in Abbildung 8 ist ein Graph, der die Amplitude und Phase des Systems für Schwingungen mit allen Frequenzen dar-

stellt.

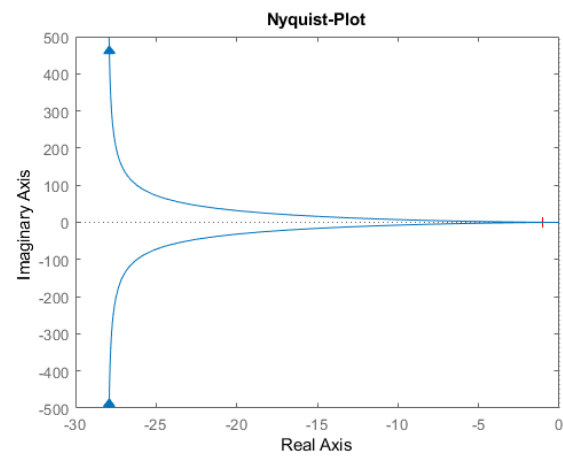


Abbildung 8: Nyquist-Plot