

# Signale & Systeme

## Analyse eines IT<sub>1</sub>-Systems

**Name:** Philipp Rall & Duc Vo Ngoc  
**Matrikelnummer:** 5844601 & XXXXX  
**Studiengangsleiter:** Prof. Dr. Heinrich Braun  
**Kurs:** TINF18B2

6. Dezember 2019

Die folgenden Beschreibungsformen des  $IT_1 - \text{Glieder}$  wurden nach ihrer Aussagekraft geordnet.

## 1 Explizite Lösung

Durch die inverse Laplacetransformation lässt sich die explizite Lösung des Systems für die Impulsfunktion als Eingangssignal ermitteln:

$$\begin{aligned} g(t) &= L^{-1}\{G(s)\} \\ &= L^{-1}\left\{\frac{4}{7s^2 + s}\right\} \\ &= 4 - 4 * e^{-\frac{t}{7}} \end{aligned}$$

Durch die Integration der expliziten Lösung kommen wir auf  $h(t)$ :

$$\begin{aligned} h(t) &= \int_0^t g(\tau) d\tau \\ &= 4 * t + 28 * e^{-\frac{t}{7}} \end{aligned}$$

Die explizite Lösung des Zustandsraum lässt sich mit der Systemmatrix  $A$ , der Eingangsmatrix  $b$ , der Ausgangsmatrix  $c$  sowie der Durchgangsmatrix  $D$  des Zustandsraumes über folgende Formeln berechnen:

$$\begin{aligned} \underline{x}(t) &= e^{A(t-t_0)} \underline{x}(t_0) + \int_{t_0}^t e^{A(t-\tau)} \underline{b} u(\tau) d\tau \\ y &= c \underline{x}(t) + D u(t) \end{aligned}$$

Für die homogene Lösung, die dem Eigenvorgang des Systems entspricht, ergibt sich folglich für  $t_0 = 0$ :

$$\begin{aligned} \underline{x}(t) &= e^{At} \underline{x}(0) \\ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & 7 - 7e^{-\frac{1}{7}t} \\ 0 & e^{-\frac{1}{7}t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix} \\ x_1(t) &= x_1(0) + 7x_2(0) - 7e^{-\frac{1}{7}t} x_2(0) \\ x_2(t) &= e^{-\frac{1}{7}t} x_2(0) \end{aligned}$$

Die erste Zeile zeigt die explizite Lösung von  $x_1 = y$ , die zweite Zeile die explizite Lösung von  $x_2 = \dot{y} = \dot{x}_1$ .

## 2 Zustandsraumdarstellung

Die allgemeine Form der Zustandsraumdarstellung ist in den folgenden zwei Zeilen zu sehen.

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx + Du\end{aligned}$$

Das behandelte  $IT_1 - \text{Glieder}$  besitzt mit den Anfangswerten

$$x_1(0) = y(0), x_2(0) = \dot{y}(0)$$

folgende Zustandsraumdarstellung:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -\frac{1}{7} \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{4}{7} \end{bmatrix} u \\ y &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x\end{aligned}$$

## 3 Eingangs-Ausgang Differentialgleichung

$$\begin{aligned}G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} &= \frac{4}{7s^2 + s} \\ Y(s)(7s^2 + s) &= U(s) * 4 \\ 7\ddot{y} + \dot{y} &= 4u\end{aligned}$$

Anfangswerte:  $y(0) = y_0, \dot{y}(0) = \dot{y}_0, u(0) = u_0$

## 4 Übertragungsfunktion

Formel 2 zeigt die allgemeine Übertragungsfunktion  $G(s)$  eines  $IT_1 - \text{Glieder}$ . In Formel 3 wird ein konkretes  $IT_1 - \text{Glieder}$  dargestellt, das in diesem Skript analysiert wird.

Formel 4 zeigt dessen ausmultiplizierte Form.

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} \tag{1}$$

$$= \frac{K}{(T_I + T_1 s) * s} \tag{2}$$

$$= \frac{4}{(1 + 7s)s} \tag{3}$$

$$= \frac{4}{7s^2 + s} \tag{4}$$

## 5 Übergangsfunktion

Die Übergangsfunktion  $h(t)$ , auch Sprungantwort genannt, ist die Antwort im Zeitbereich auf die Heaviside-Funktion  $\sigma(t)$ :

$$\sigma(t) = \begin{cases} 0 & \text{für } t < 0 \\ 1 & \text{für } t > 0 \end{cases}$$

In Abbildung 1 ist der Aufbau zu sehen. Abbildungen 2 und 3 zeigen die Sprungantwort sowohl in Simulink simuliert, als auch in Matlab berechnet. Die Steigung der Asymptoten der Sprungantwort entspricht  $K = 4$ .

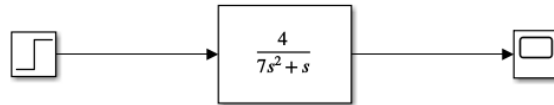


Abbildung 1: Aufbau in Simulink

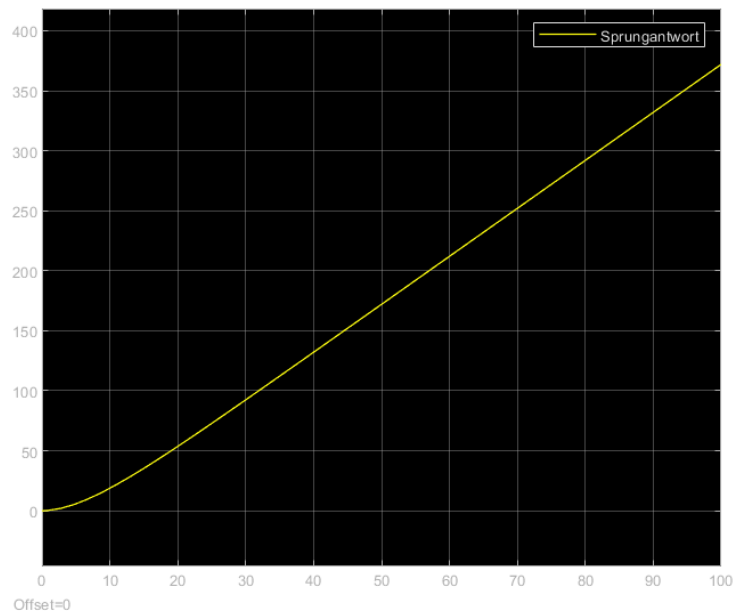


Abbildung 2: Oszilloskop - Sprungantwort im Intervall 0 bis 100

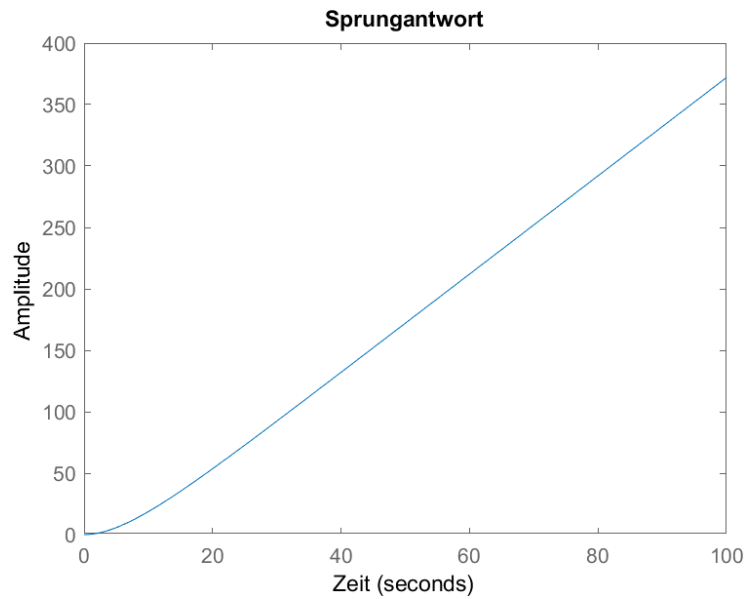


Abbildung 3: Matlab - Sprungantwort im Intervall 0 bis 100

## 6 Gewichtsfunktion

In Abbildung 4 ist die Gewichtsfunktion  $g(t)$ , auch Impulsantwort genannt, zu sehen. Diese Funktion ist die Ableitung der Übergangsfunktion  $h(t)$ , auch Sprungantwort genannt.

$$h(t) \xrightarrow{\frac{d}{dt}} g(t)$$

$$H(s) = \frac{1}{s} * G(s) \xrightarrow{*s} G(s)$$

Die Impulsantwort konvergiert gegen den statischen Verstärkungsfaktor  $K = 4$ :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} g(t) = K$$

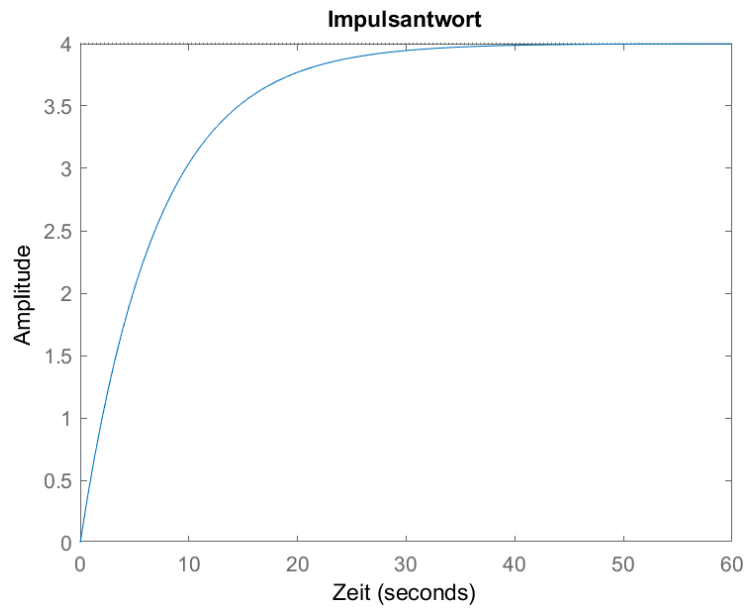


Abbildung 4: Impulsantwort

## 7 Bode-Diagramm

In Abbildung 5 ist die Amplitude und die Phase des Systemausgangs in Abhängigkeit zur Frequenz (logarithmisch skaliert) dargestellt.

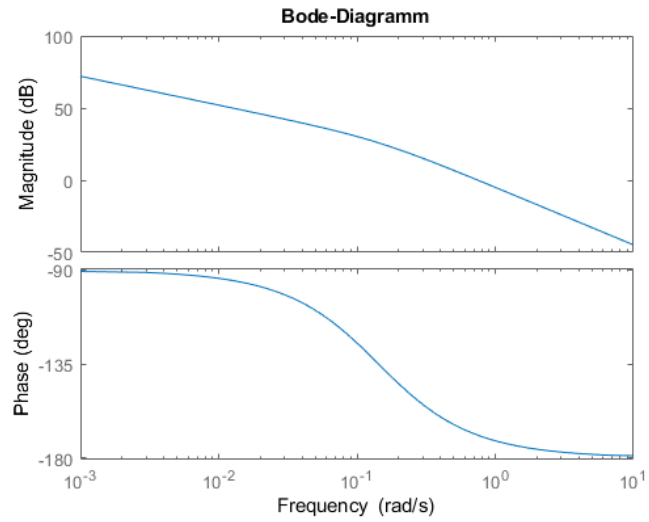


Abbildung 5: Bode-Diagramm

## 8 Nyquist-Plot

Die Ortskurve oder auch Nyquist-Plot in Abbildung 6 stellt Betrag und Phase des Systems als Kurve in der komplexen Zahlenebene dar.

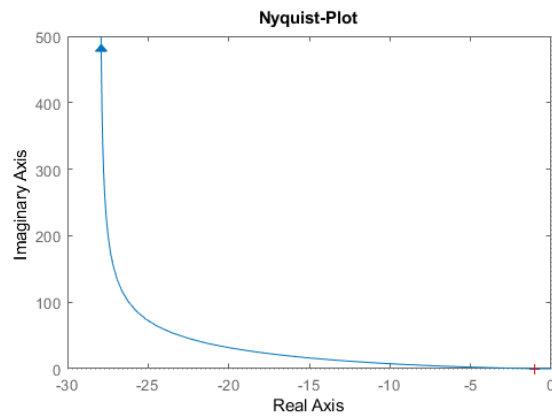


Abbildung 6: Nyquist-Plot

## 9 Pol-Nullstellenplot

In Abbildung 7 ist der Pol-Nullstellenplot des Systems zu sehen.

Die mit x markierten Stellen zeigen die Polstellen an. Dieses System hat keine Nullstellen.

Die Polstellen des Systems befinden sich im negativen (0 inkludiert) Teil der reell-wertigen Achse und liegen somit in der linken Halbebene.

Die Polstellen entsprechen den Eigenwerte der *Systemmatrix*  $A$ :

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -\frac{1}{7} \end{bmatrix}$$

$$\lambda_1 = 0 \quad \Re(\lambda_1) = 0$$

$$\lambda_2 = -\frac{1}{7} \quad \Re(\lambda_2) = 0$$

⇒ Das System ist stabil.

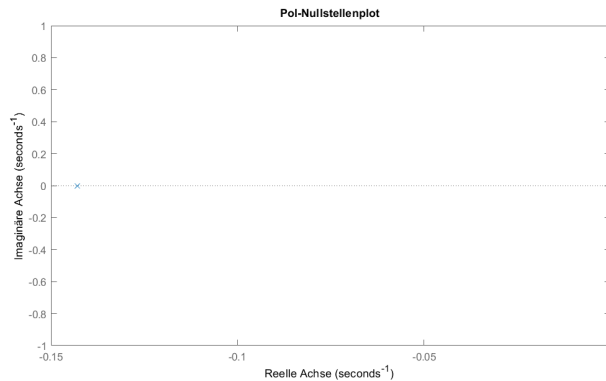


Abbildung 7: Pol-Nullstellenplot

## 10 Statischer Verstärkungsfaktor

Der statische Verstärkungsfaktor des behandelten  $IT_1$  – *Gliedes* ist  $\infty$ , da ein integrierendes Verhalten vorliegt. Der Graph der Übergangsfunktion strebt gegen unendlich.

Nichtsdestotrotz lässt sich feststellen, dass die Übergangsfunktion die Asymptote

$$y = 4x$$

besitzt bzw. dass die Gewichtsfunktion gegen den Wert 4 konvergiert.

Der Graph dieser Gerade ist in Abbildung 8 zu sehen. Dabei sind auf der  $x$  –



*Achse* die konstanten Eingänge und auf der *y*–*Achse* die Ausgänge des Systems für  $t \rightarrow \infty$  aufgetragen.

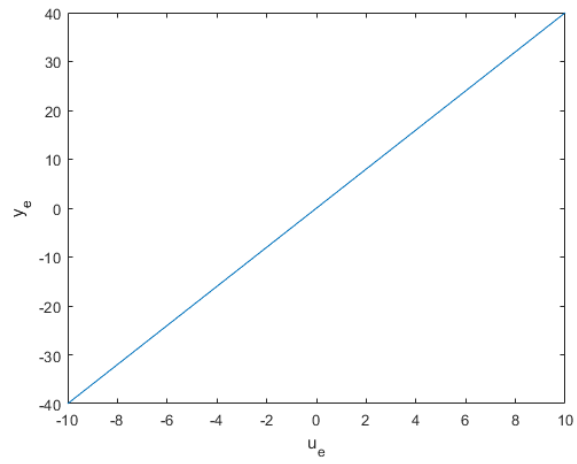


Abbildung 8: Asymptote der Übergangsfunktion