

Signale & Systeme

Analyse eines IT₁-Systems

Name: Philipp Rall & Duc Vo Ngoc
Matrikelnummer: 5844601 & 6184337

Studiengangsleiter: Prof. Dr. Heinrich Braun
Dozent: Dr. Lutz Gröll
Kurs: TINF18B2

9. Dezember 2019

Die folgenden Beschreibungsformen des $IT_1 - \text{Gliedes}$ wurden nach ihrer Aussagekraft geordnet.

1 Explizite Lösung

Durch die inverse Laplacetransformation lässt sich die explizite Lösung des Systems für die Impulsfunktion als Eingangssignal ermitteln:

$$\begin{aligned} g(t) &= L^{-1}\{G(s)\} \\ &= L^{-1}\left\{\frac{4}{7s^2 + s}\right\} \\ &= 4 - 4 * e^{-\frac{t}{7}} \end{aligned}$$

Durch die Integration der expliziten Lösung kommen wir auf $h(t)$:

$$\begin{aligned} h(t) &= \int_0^t g(\tau) d\tau \\ &= 4 * t + 28 * e^{-\frac{t}{7}} \end{aligned}$$

Die explizite Lösung des Zustandsraum lässt sich mit der Systemmatrix A , der Eingangsmatrix b , der Ausgangsmatrix c sowie der Durchgangsmatrix D des Zustandsraumes über folgende Formeln berechnen:

$$\begin{aligned} \underline{x}(t) &= e^{A(t-t_0)} \underline{x}(t_0) + \int_{t_0}^t e^{A(t-\tau)} \underline{b} u(\tau) d\tau \\ y &= c \underline{x}(t) + D u(t) \end{aligned}$$

Für die homogene Lösung, die dem Eigenvorgang des Systems entspricht, ergibt sich folglich für $t_0 = 0$:

$$\begin{aligned} \underline{x}(t) &= e^{At} \underline{x}(0) \\ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & 7 - 7e^{-\frac{1}{7}t} \\ 0 & e^{-\frac{1}{7}t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix} \\ x_1(t) &= x_1(0) + 7x_2(0) - 7e^{-\frac{1}{7}t} x_2(0) \\ x_2(t) &= e^{-\frac{1}{7}t} x_2(0) \end{aligned}$$

Die erste Zeile zeigt die explizite Lösung von $x_1 = y$, die zweite Zeile die explizite Lösung von $x_2 = \dot{y} = \dot{x}_1$.

2 Zustandsraumdarstellung

Die allgemeine Form der Zustandsraumdarstellung ist in den folgenden zwei Zeilen zu sehen.

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx + Du\end{aligned}$$

Das behandelte $IT_1 - \text{Glieder}$ besitzt mit den Anfangswerten

$$x_1(0) = y(0), x_2(0) = \dot{y}(0)$$

folgende Zustandsraumdarstellung:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -\frac{1}{7} \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{4}{7} \end{bmatrix} u \\ y &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x\end{aligned}$$

3 Eingangs-Ausgang Differentialgleichung

$$\begin{aligned}G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} &= \frac{4}{7s^2 + s} \\ Y(s)(7s^2 + s) &= U(s) * 4 \\ 7\ddot{y} + \dot{y} &= 4u\end{aligned}$$

Anfangswerte: $y(0) = y_0, \dot{y}(0) = \dot{y}_0, u(0) = u_0$

4 Übertragungsfunktion

Formel 2 zeigt die allgemeine Übertragungsfunktion $G(s)$ eines $IT_1 - \text{Glieder}$. In Formel 3 wird ein konkretes $IT_1 - \text{Glieder}$ dargestellt, das in diesem Skript analysiert wird.

Formel 4 zeigt dessen ausmultiplizierte Form.

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} \tag{1}$$

$$= \frac{K}{(T_I + T_1 s) * s} \tag{2}$$

$$= \frac{4}{(1 + 7s)s} \tag{3}$$

$$= \frac{4}{7s^2 + s} \tag{4}$$

5 Übergangsfunktion

Die Übergangsfunktion $h(t)$, auch Sprungantwort genannt, ist die Antwort im Zeitbereich auf die Heaviside-Funktion $\sigma(t)$:

$$\sigma(t) = \begin{cases} 0 & \text{für } t < 0 \\ 1 & \text{für } t > 0 \end{cases}$$

In Abbildung 1 ist der Aufbau zu sehen. Abbildungen 2 und 3 zeigen die Sprungantwort sowohl in Simulink simuliert, als auch in Matlab berechnet. Die Steigung der Asymptoten der Sprungantwort entspricht $K = 4$.

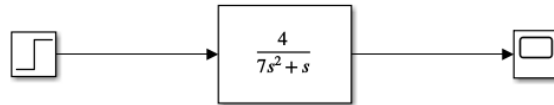


Abbildung 1: Aufbau in Simulink

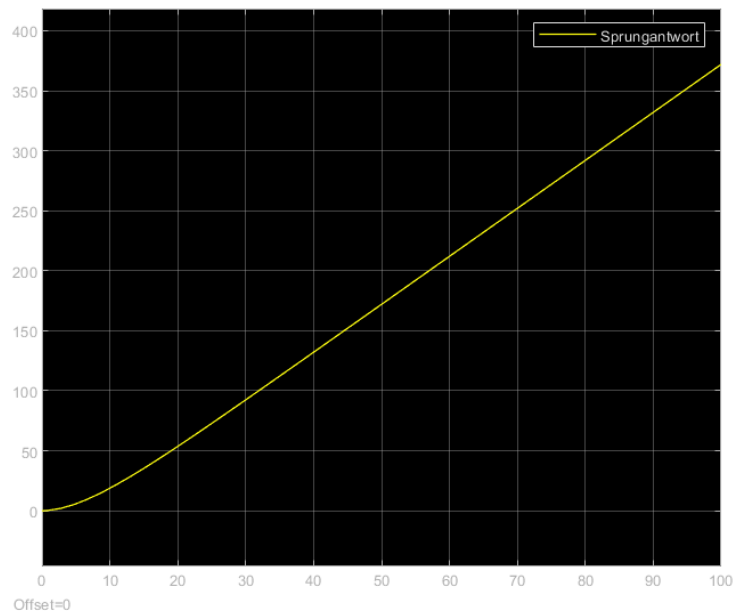


Abbildung 2: Oszilloskop - Sprungantwort im Intervall 0 bis 100

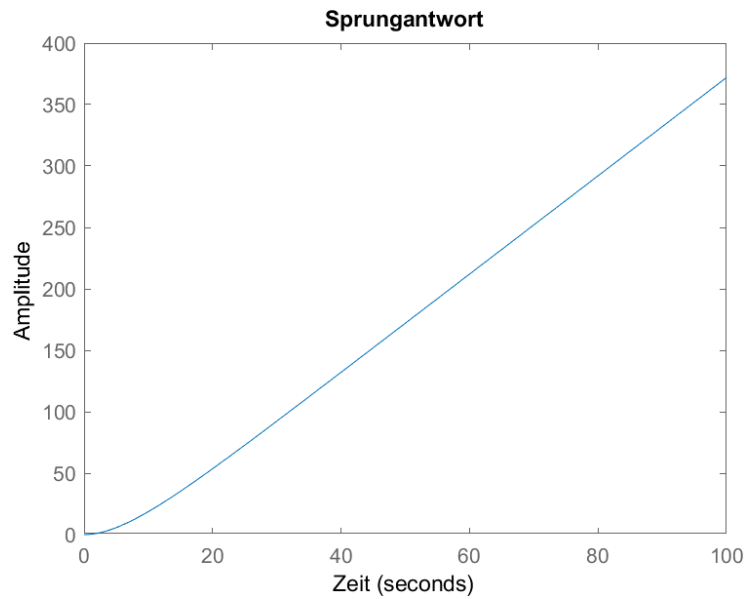


Abbildung 3: Matlab - Sprungantwort im Intervall 0 bis 100

6 Gewichtsfunktion

In Abbildung 4 ist die Gewichtsfunktion $g(t)$, auch Impulsantwort genannt, zu sehen. Diese Funktion ist die Ableitung der Übergangsfunktion $h(t)$, auch Sprungantwort genannt.

$$h(t) \xrightarrow{\frac{d}{dt}} g(t)$$

$$H(s) = \frac{1}{s} * G(s) \xrightarrow{*s} G(s)$$

Die Impulsantwort konvergiert gegen den statischen Verstärkungsfaktor $K = 4$:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} g(t) = K$$

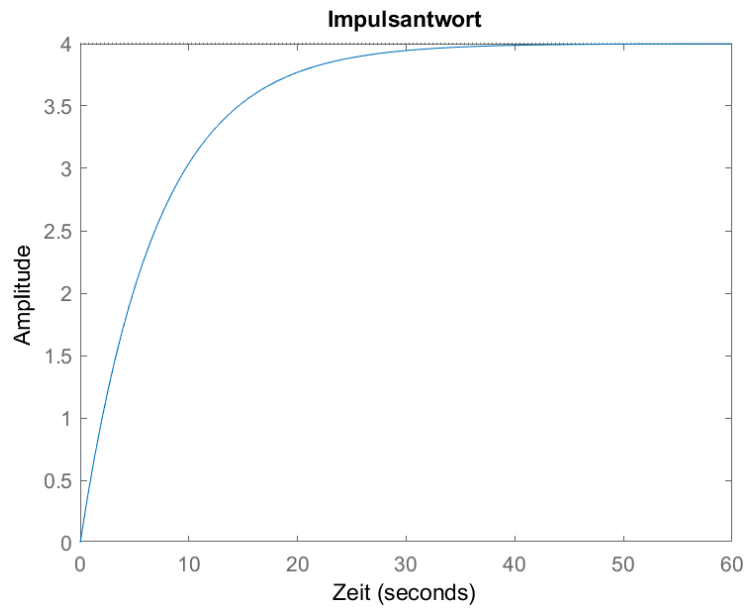


Abbildung 4: Impulsantwort

7 Bode-Diagramm

In Abbildung 5 ist die Amplitude und die Phase des Systemausgangs in Abhängigkeit zur Frequenz (logarithmisch skaliert) dargestellt.

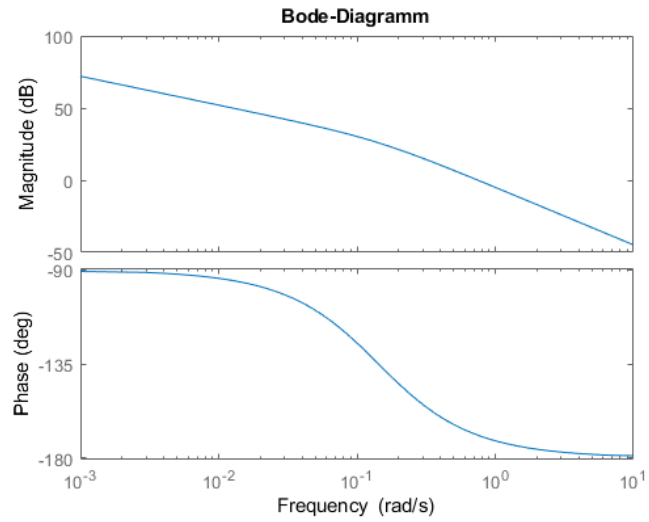


Abbildung 5: Bode-Diagramm

8 Nyquist-Plot

Die Ortskurve oder auch Nyquist-Plot in Abbildung 6 stellt Betrag und Phase des Systems als Kurve in der komplexen Zahlenebene dar.

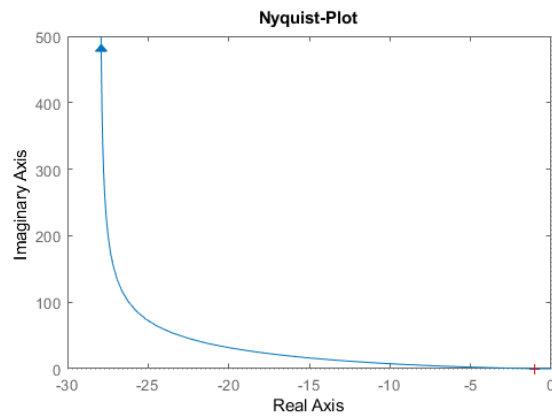


Abbildung 6: Nyquist-Plot

9 Pol-Nullstellenplot

In Abbildung 7 ist der Pol-Nullstellenplot des Systems zu sehen.

Die mit x markierten Stellen zeigen die beiden Polstellen an. Dieses System hat keine Nullstellen und ist somit kausal, da es mindestens so viele Polstellen wie Nullstellen besitzt.

Die Polstellen des Systems befinden sich im negativen (0 inkludiert) Teil der reell-wertigen Achse und liegen somit in der linken Halbebene.

Die Polstellen entsprechen den Eigenwerte der Systemmatrix A :

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -\frac{1}{7} \end{bmatrix}$$

$$\lambda_1 = 0 \quad \Re(\lambda_1) = 0$$

$$\lambda_2 = -\frac{1}{7} \quad \Re(\lambda_2) = -\frac{1}{7} < 0$$

⇒ Das System ist stabil.

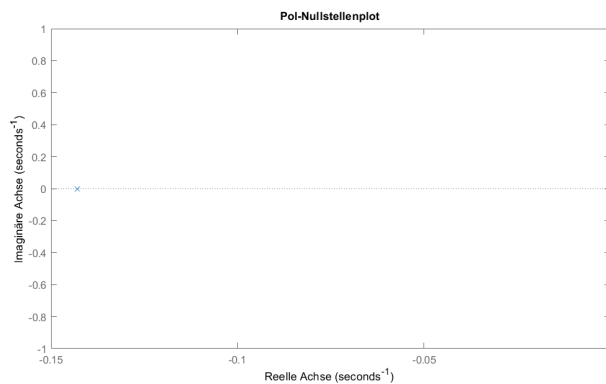


Abbildung 7: Pol-Nullstellenplot

10 Statischer Verstärkungsfaktor

Der statische Verstärkungsfaktor des behandelten IT_1 – *Gliedes* ist ∞ , da ein integrierendes Verhalten vorliegt. Der Graph der Übergangsfunktion strebt gegen unendlich.

Nichtsdestotrotz lässt sich feststellen, dass die Übergangsfunktion die Asymptote

$$y = 4x$$

besitzt bzw. dass die Gewichtsfunktion gegen den Wert 4 konvergiert.

Der Graph dieser Gerade ist in Abbildung 8 zu sehen. Dabei sind auf der x – Achse die konstanten Eingänge und auf der y – Achse die Ausgänge des Systems für $t \rightarrow \infty$ aufgetragen.

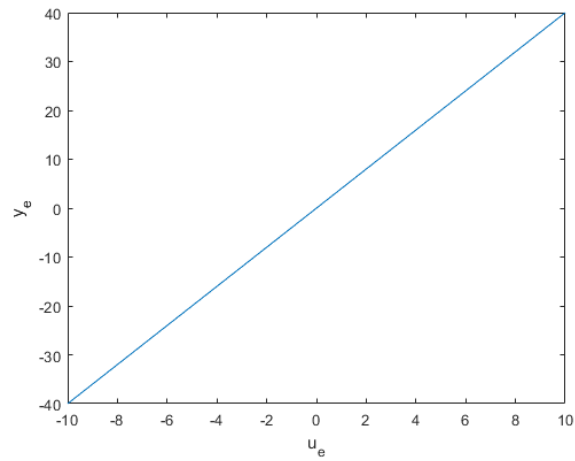


Abbildung 8: Asymptote der Übergangsfunktion