Signale & Systeme
Analyse eines IT_1-Systems

Name: Philipp Rall & Duc Vo Ngoc
Matrikelnummer: 5844601 & 6184337
Studiengangsleiter: Prof. Dr. Heinrich Braun
Kurs: TINF18B2

9. Dezember 2019

Die folgenden Beschreibungsformen des $IT_1 - Gliedes$ wurden nach ihrer Aussagekraft geordnet.

1 Explizite Lösung

Durch die inverse Laplacetransformation lässt sich die explizite Lösung des Systems für die Impulsfunktion als Eingangssignal ermitteln:

$$
\begin{aligned}
g(t) &= L^{-1}\{G(s)\} \\
&= L^{-1}\{\frac{4}{7s^2+s}\} \\
&= 4 - 4 * e^{-\frac{t}{7}}
\end{aligned}
$$

Durch die Integration der expliziten Lösung kommen wir auf h(t):

$$
\begin{aligned}
h(t) &= \int_0^t g(\tau) d\tau \\
&= 4 * t + 28 * e^{-\frac{t}{7}}
\end{aligned}
$$

Die explizite Lösung des Zustandsraum lässt sich mit der Systemmatrix A, der Eingangsmatrix b, der Ausgangsmatrix c sowie der Durchgangsmatrix D des Zustandsraumes über folgende Formeln berechnen:

$$
\begin{aligned}
\underline{x}(t) &= e^{A(t-t_0)}\underline{x}(t_0) + \int_{t_0}^t e^{A(t-\tau)}\underline{b}u(\tau)d\tau \\
y &= c\underline{x}(t) + Du(t)
\end{aligned}
$$

Für die homogene Lösung, die dem Eigenvorgang des Systems entspricht, ergibt sich folglich für $t_0 = 0$:

$$
\begin{aligned}
\underline{x}(t) &= e^{At}\underline{x}(0) \\
\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & 7 - 7e^{-\frac{1}{7}t} \\ 0 & e^{-\frac{1}{7}t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
x_1(t) &= x_1(0) + 7x_2(0) - 7e^{-\frac{1}{7}t}x_2(0) \\
x_2(t) &= e^{-\frac{1}{7}t}x_2(0)
\end{aligned}
$$

Die erste Zeile zeigt die explizite Lösung von $x_1 = y$, die zweite Zeile die explizite Lösung von $x_2 = \dot{y} = \dot{x_1}$.

2 Zustandsraumdarstellung

Die allgemeine Form der Zustandsraumdarstellung ist in den folgenden zwei Zeilen zu sehen.

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx + Du \end{aligned}$$

Das behandelte $IT_1 - Glied$ besitzt mit den Anfangswerten

$$x_1(0) = y(0), x_2(0) = \dot{y}(0)$$

folgende Zustandsraumdarstellung:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -\frac{1}{7} \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{4}{7} \end{bmatrix} u \\ y &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x \end{aligned}$$

3 Eingangs-Ausgang Differentialgleichung

$$\begin{aligned} G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} &= \frac{4}{7s^2 + s} \\ Y(s)(7s^2 + s) &= U(s) * 4 \\ 7\ddot{y} + \dot{y} &= 4u \end{aligned}$$

Anfangswerte: $y(0) = y_0, \dot{y}(0) = \dot{y}_0, u(0) = u_0$

4 Übertragungsfunktion

Formel **??** zeigt die allgemeine Übertragungsfunktion $G(s)$ eines $IT_1 - Gliedes$. In Formel **??** wird ein konkretes $IT_1 - Glied$ dargestellt, das in diesem Skript analysiert wird.
Formel **??** zeigt dessen ausmultiplizierte Form.

$$\begin{aligned} G(s) &= \frac{Y(s)}{U(s)} && (1) \\ &= \frac{K}{(T_I + T_1 s) * s} && (2) \\ &= \frac{4}{(1 + 7s)s} && (3) \\ &= \frac{4}{7s^2 + s} && (4) \end{aligned}$$

5 Übergangsfunktion

Die Übergangsfunktion $h(t)$, auch Sprungantwort genannt, ist die Antwort im Zeitbereich auf die Heaviside-Funktion $\sigma(t)$:

$$\sigma(t) = \begin{cases} 0 & \text{für t} < 0 \\ 1 & \text{für t} > 0 \end{cases}$$

In Abbildung **??** ist der Aufbau zu sehen. Abbildungen **??** und **??** zeigen die Sprungantwort sowohl in Simulink simuliert, als auch in Matlab berechnet.
Die Steigung der Asymptoten der Sprungantwort entspricht $K = 4$.

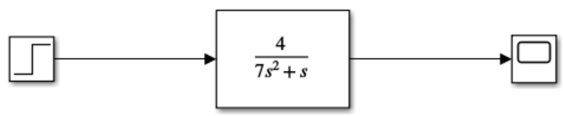

Abbildung 1: Aufbau in Simulink

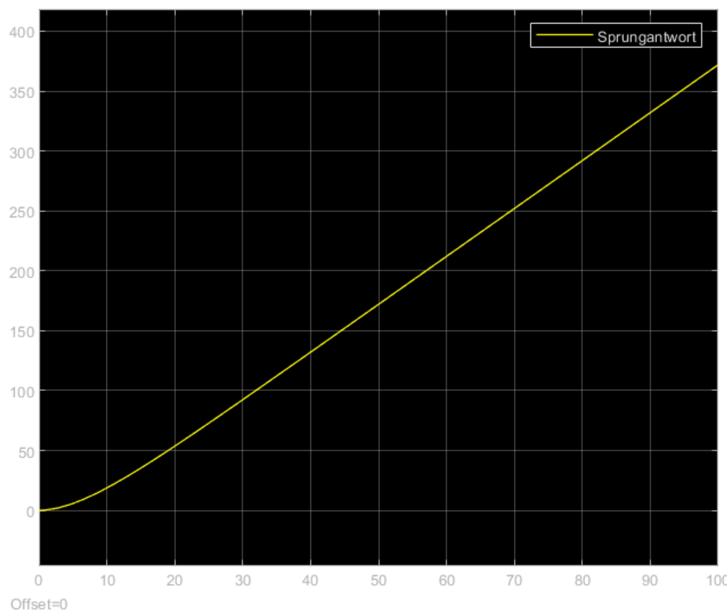

Abbildung 2: Oszilloskop - Sprungantwort im Intervall 0 bis 100

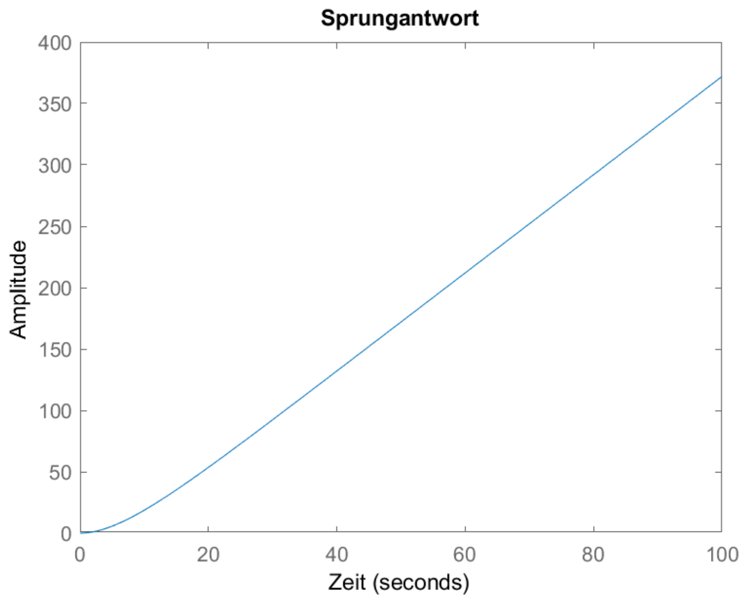

Abbildung 3: Matlab - Sprungantwort im Intervall 0 bis 100

6 Gewichtsfunktion

In Abbildung **??** ist die Gewichtsfunktion $g(t)$, auch Impulsantwort genannt, zu sehen. Diese Funktion ist die Ableitung der Übergangsfunktion $h(t)$, auch Sprungantwort genannt.

$$h(t) \xrightarrow{\frac{d}{dt}} g(t)$$

$$H(s) = \frac{1}{s} * G(s) \xrightarrow{*s} G(s)$$

Die Impulsantwort konvergiert gegen den statischen Verstärkungsfaktor $K = 4$:

$$lim_{t \to \infty} g(t) = K$$

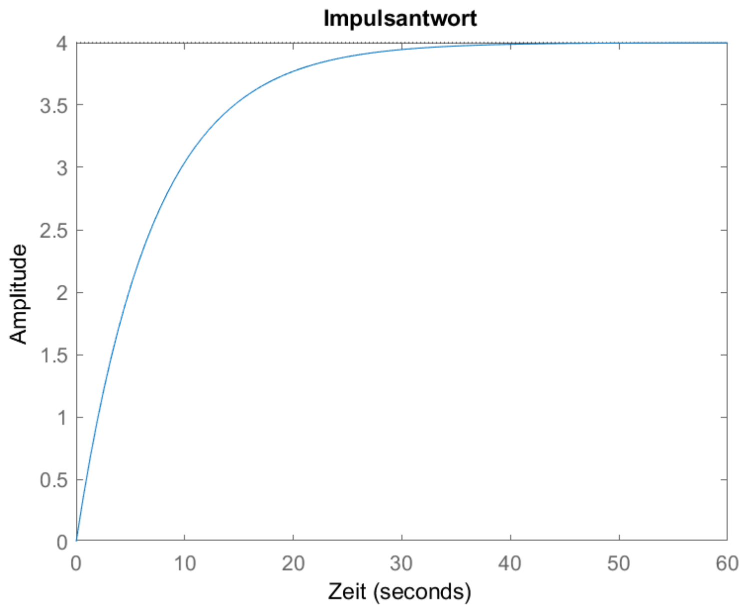

Abbildung 4: Impulsantwort

7 Bode-Diagramm

In Abbildung **??** ist die Amplitude und die Phase des Systemausgangs in Abhängigkeit zur Frequenz (logarithmisch skaliert) dargestellt.

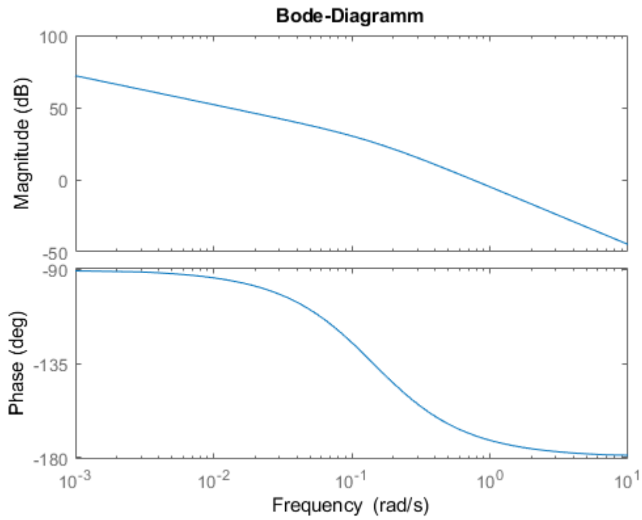

Abbildung 5: Bode-Diagramm

8 Nyquist-Plot

Die Ortskurve oder auch Nyquist-Plot in Abbildung **??** stellt Betrag und Phase des Systems als Kurve in der komplexen Zahlenebene dar.

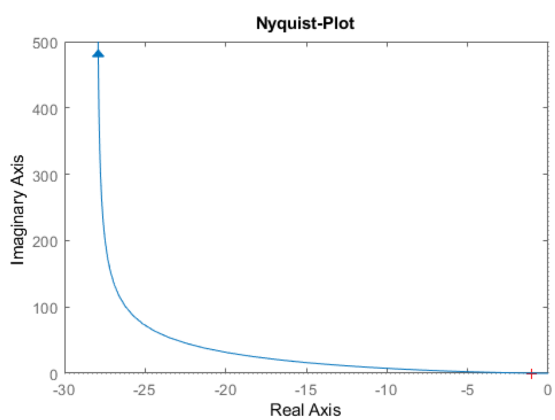

Abbildung 6: Nyquist-Plot

9 Pol-Nullstellenplot

In Abbildung **??** ist der Pol-Nullstellenplot des Systems zu sehen.
Die mit x markierten Stellen zeigen die Polstellen an. Dieses System hat keine Nullstellen.
Die Polstellen des Systems befinden sich im negativen (0 inkludiert) Teil der reell-wertigen Achse und liegen somit in der linken Halbebene.

Die Polstellen entsprechen den Eigenwerte der $SystemmatrixA$:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -\frac{1}{7} \end{bmatrix}$$
$$\lambda_1 = 0 \qquad \Re(\lambda_1) = 0$$
$$\lambda_2 = -\frac{1}{7} \qquad \Re(\lambda_2) = 0$$

$\Rightarrow$Das System ist stabil.

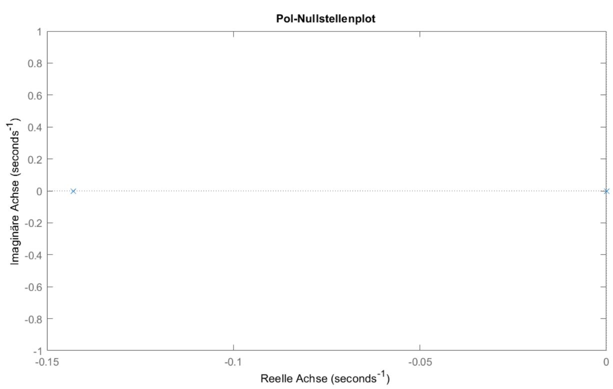

Abbildung 7: Pol-Nullstellenplot

10 Statischer Verstärkungsfaktor

Der statischer Verstärkungsfaktor des behandelten $IT_1 - Gliedes$ ist ∞, da ein integrierendes Verhalten vorliegt. Der Graph der Übergangsfunktion strebt gegen unendlich.

Nichtsdestotrotz lässt sich feststellen, dass die Übergangsfunktion die Asymptote

$$y = 4x$$

besitzt bzw. dass die Gewichtsfunktion gegen den Wert 4 konvergiert.
Der Graph dieser Gerade ist in Abbildung **??** zu sehen. Dabei sind auf der

$x - Achse$ die konstanten Eingänge und auf der $y - Achse$ die Ausgänge des Systems für $t \to \infty$ aufgetragen.

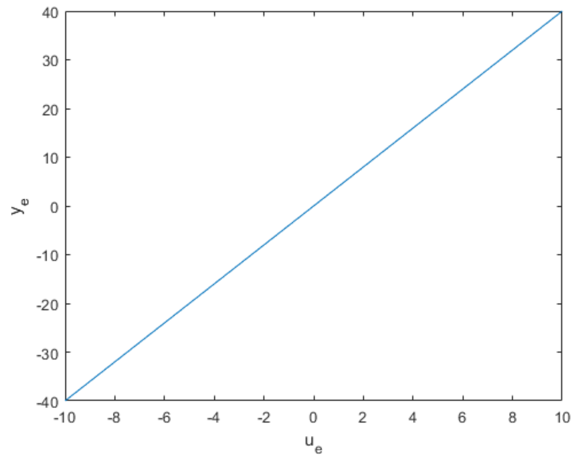

Abbildung 8: Asymptote der Übergangsfunktion