Signale & Systeme
Analyse eines Systems

Name: Philipp Rall & Duc Vo Ngoc
Matrikelnr.: XXXX
Studiengangsleiter: Prof. Dr. Heinrich Braun
Kurs: TINF18B2

24. November 2019

1 Das System

1.1 Die Übertragungsfunktion

Formel 2 zeigt die allgemeine Übertragungsfunktion $G(s)$ eines $IT_1 - Gliedes$. In Formel 3 wird ein konkretes $IT_1 - Glied$ dargestellt, das in diesem Skript analysiert wird.
Formel 4 zeigt dessen ausmultiplizierte Form.

$$\begin{aligned} G(s) &= \frac{Y(s)}{U(s)} && (1) \\ &= \frac{K}{(T_I + T_1 s) * s} && (2) \\ &= \frac{4}{(1+7s)s} && (3) \\ &= \frac{4}{7s^2 + s} && (4) \end{aligned}$$

1.2 Eigenschaften des Systems

Im folgenden ist eine Liste angeführt an Eigenschaften, die sich aus der Übertragungsfunktion $G(s)$ ergeben:

- Differenzengrad , also Nennergrad - Zählergrad, mit Wert 2, dadurch ist das System nicht sprungfähig, antwortet aber sofort mit einer Steigung größer 0
- Ein $IT_1 - Glied$
- Integrierendes Verhalten (I-Verhalten) mit einer Zeitkonstanten T_1
- Keine Nullstellen, deshalb positiver Anfang
- Es gibt zwei reelle Polstellen, die kleiner gleich 0 sind $\rightarrow$ das System ist stabil

2 Darstellungsformen des Systems

2.1 Eingangs-Ausgang Differentialgleichung

$$\begin{aligned} G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} &= \frac{4}{7s^2 + s} \\ Y(s)(7s^2 + s) &= U(s) * 4 \\ 7\ddot{y} + y &= 4u \end{aligned}$$

Anfangswerte: $y(0) = y_0, \dot{y}(0) = \dot{y}_0, u(0) = u_0$

2.2 Zustandsraumdarstellung

Die allgemeine Form der Zustandsraumdarstellung ist in den folgenden zwei Zeilen zu sehen.

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx + Du \end{aligned}$$

Das behandelte $IT_1 - Glied$ besitzt mit den Anfangswerten

$$x_1(0) = y(0), x_2(0) = \dot{y}(0)$$

folgende Zustandsraumdarstellung:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{7} & 0 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{4}{7} \end{pmatrix} u \\ y &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} x \end{aligned}$$

UNTERSCHIEDLICH ZU MATLAB LÖSUNG??? Matlab:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \begin{pmatrix} -\frac{1}{7} & 0 \\ \frac{1}{4} & 0 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} u \\ y &= \begin{pmatrix} 0 & \frac{8}{7} \end{pmatrix} x \end{aligned}$$

3 Simulation des Systems

3.1 Die Übergangsfunktion

Die Übergangsfunktion $h(t)$, auch Sprungantwort genannt, ist die Antwort im Zeitbereich auf die Heaviside-Funktion $\sigma(t)$:

$$\sigma(t) = \begin{cases} 0 & \text{für t} < 0 \\ 1 & \text{für t} > 0 \end{cases}$$

In Abbildung 1 ist der Aufbau zu sehen. Das Oszilloskop in Abbildung 2 zeigt die Sprungantwort im Simulationsintervall 0 - 100 an.
In Abbildung 3 ist die Übergangsfunktion in Matlab vom Intervall 0 bis 3500 zu sehen, während Abbildung 4 die Sprungantwort im Intervall 0 bis 100 zeigt. Die Steigung der Asymptoten der Sprungantwort entspricht dem statischen Verstärkungsfaktor $K = 4$.

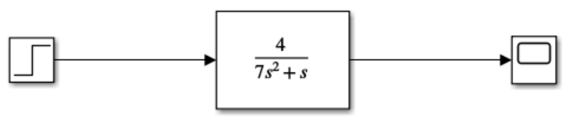

Abbildung 1: Aufbau in Simulink

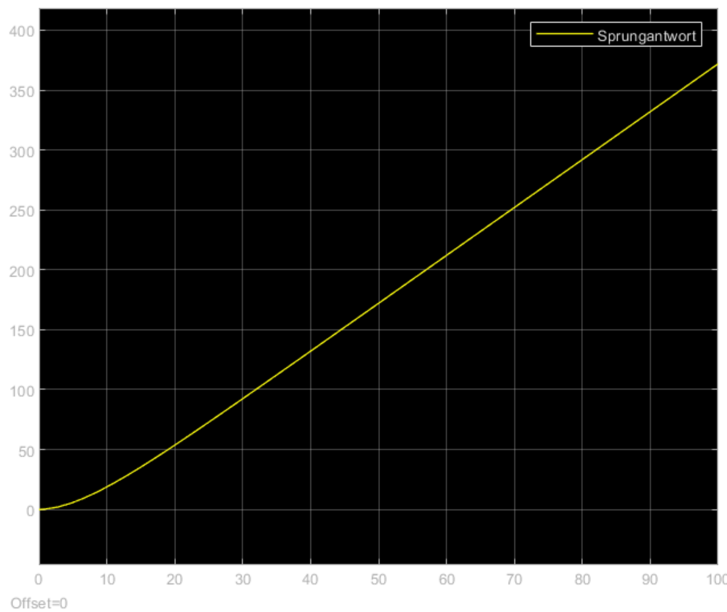

Abbildung 2: Oszilloskop - Sprungantwort im Intervall 0 bis 100

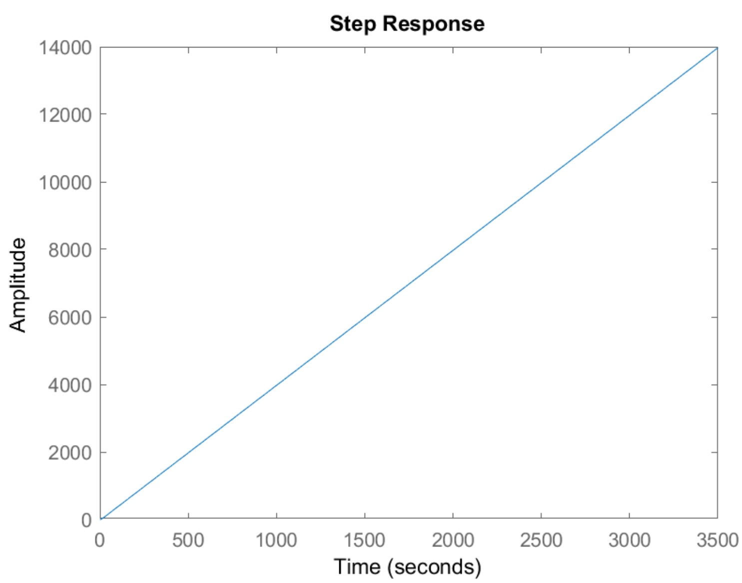

Abbildung 3: Matlab - Sprungantwort

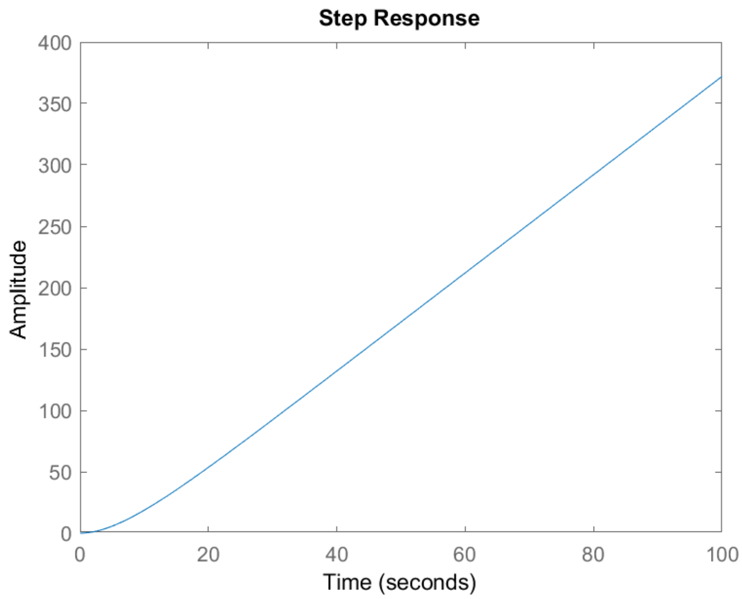

Abbildung 4: Matlab - Sprungantwort im Intervall 0 bis 100

3.2 Die Gewichtsfunktion

In Abbildung 5 ist die Gewichtsfunktion $g(t)$, auch Impulsantwort genannt, zu sehen. Diese Funktion ist die Ableitung der Übergangsfunktion $h(t)$, auch Sprungantwort genannt.

$$h(t) \xrightarrow{\frac{d}{dt}} g(t)$$

Die Impulsantwort konvergiert gegen den statischen Verstärkungsfaktor $K = 4$:

$$lim_{t \to \infty} h(t) = K$$

$$H(s) = \frac{1}{s} * G(s) \xrightarrow{*s} G(s)$$

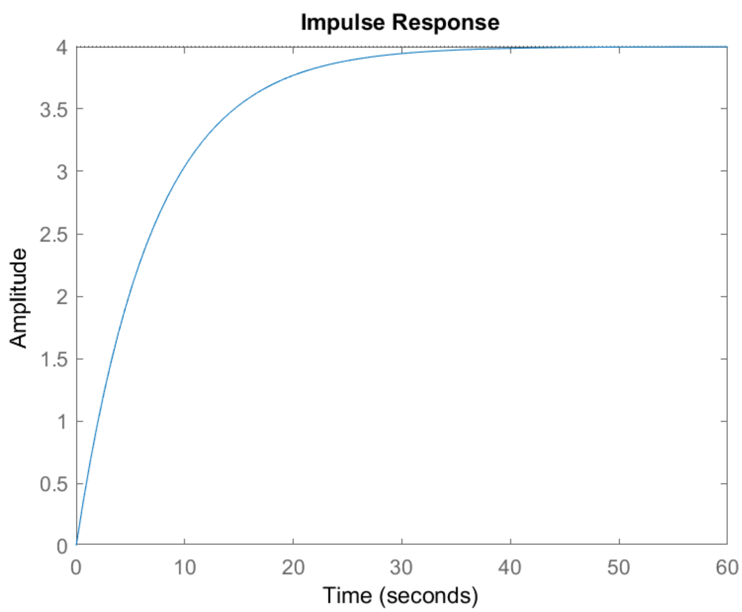

Abbildung 5: Impulsantwort

3.3 Die explizite Lösung

Durch die inverse Laplacetransformation lässt sich die explizite Lösung des Systems für die Impulsfunktion als Eingangssignal ermitteln:

$$\begin{aligned} g(t) &= L^{-1}\{G(s)\} \\ &= L^{-1}\{\frac{4}{7s^2+s}\} \\ &= 4 - 4 * e^{-\frac{t}{7}} \end{aligned}$$

Durch die Integration der expliziten Lösung kommen wir auf h(t):

$$\begin{aligned} h(t) &= \int_0^t g(\tau) d\tau \\ &= 4 * t + 28 * e^{-\frac{t}{7}} \end{aligned}$$

3.4 Statischer Verstärkungsfaktor

Der statischer Verstärkungsfaktor des behandelten $IT_1 - Gliedes$ beträgt:

$$K = 4$$

Ein Graph des Verstärkungsfaktor, wobei auf der $x - Achse$ die konstanten Eingänge und auf der $y - Achse$ die Ausgänge des Systems für $t \rightarrow \infty$ aufgetragen sind, ist in Abbildung 6 zu sehen.

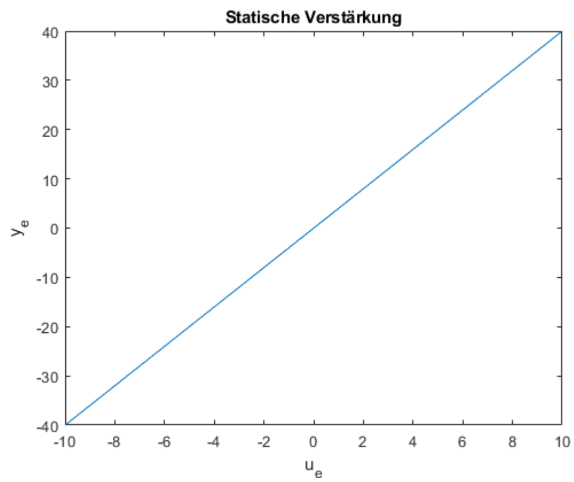

Abbildung 6: Statische Verstärkung

4 Verhalten bei Schwingungseingängen

4.1 Das Pol-Nullstellenplot

In Abbildung 7 ist der Pol-Nullstellenplot des Systems zu sehen.
Die mit x markierten Stellen zeigen die Polstellen an. Dieses System hat keine Nullstellen.
Die Polstellen des Systems befinden sich im negativen (0 inkludiert) Teil der reell-wertigen Achse und liegen somit in der linken Halbebene.

Das gleiche gilt für die Eigenwerte der $Systemmatrix A$:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{7} & 0 \end{bmatrix}$$
$$\lambda_1 = 0 + 0,3780i \qquad \Re(\lambda_1) = 0$$
$$\lambda_2 = 0 - 0,3780i \qquad \Re(\lambda_2) = 0$$

$\Rightarrow$Das System ist stabil.

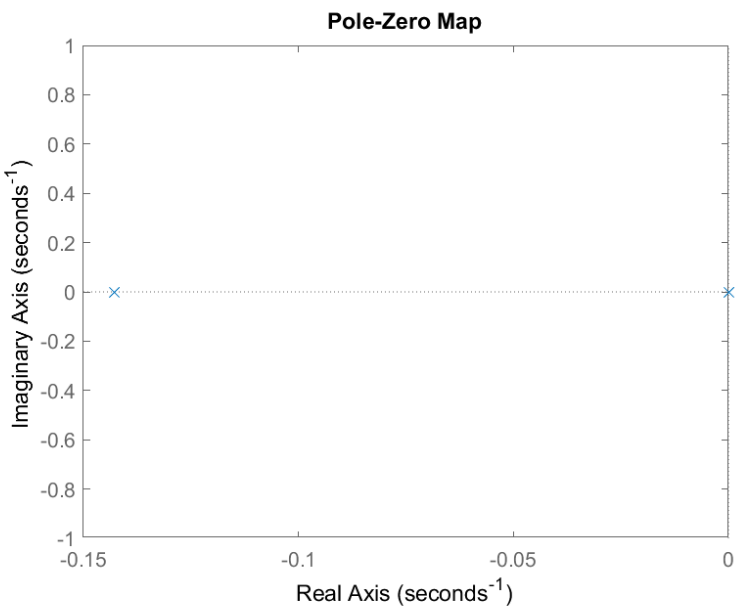

Abbildung 7: Pol-Nullstellenplot

4.2 Bode-Diagramm

In Abbildung 8 ist die Amplitude und die Phase des Systemausgangs in Abhängigkeit zur Frequenz (logarithmisch skaliert) dargestellt.

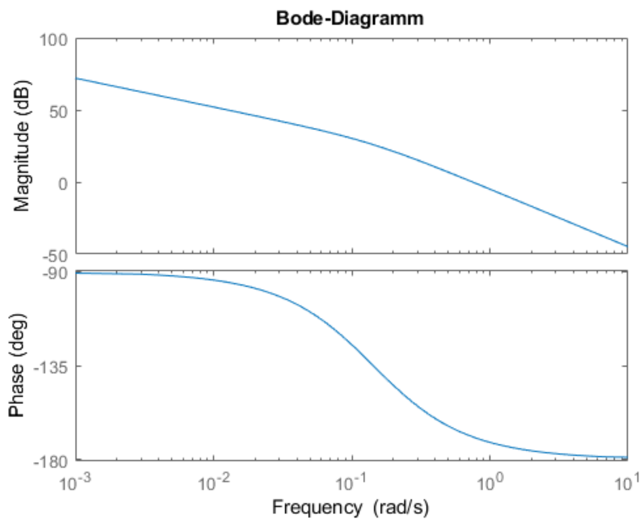

Abbildung 8: Bode-Diagramm

4.3 Nyquist-Plot

Die Ortskurve oder auch Nyquist-Plot in Abbildung 9 ist ein Graph, der die Amplitude und Phase des Systems für Schwingungen mit allen Frequenzen darstellt.

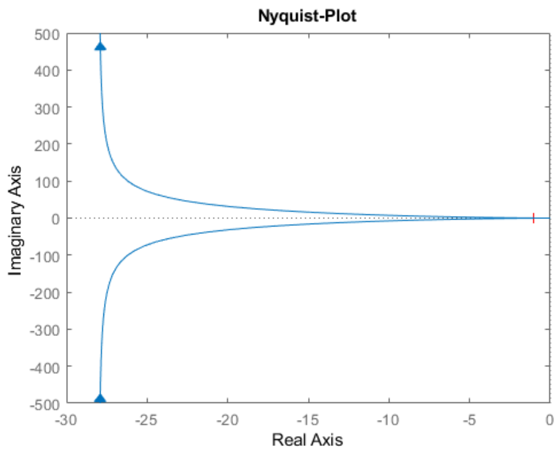

Abbildung 9: Nyquist-Plot