Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого
Высшая школа интеллектуальных систем и суперкомпьютерных технологий

Расчетная работа №2

Дисциплина: Теория вероятности и математическая статистика

Тема: cards – red dog

Выполнил
студент гр. 3530901/90003 ___________________________ Руднев А.К.
(подпись)

Преподаватель ___________________________ Никитин К.В.
(подпись)

«___» _______________ 2021 г.

Санкт-Петербург

2021

Содержание

1. Техническое задание

Рэд Дог (Red dog)

В данной игре нужно угадать, попадет ли номинал третьей карты между номиналами двух предыдущих.

Игра ведется на 6 колодах. Масти не учитываются, а карты ранжируются (двойки – min, тузы – max).

После ставок дилер открывает две карты.

Если карты идут друг за другом по рангу, то фиксируется ничья (Push).

Если карты одного ранга, то вытягивается третья карта.

Если она того же ранга, то игрок выигрывает с выплатами 11 к 1, в противном случае также фиксируется ничья.

Если две карты не идут друг за другом и не имеют один и тот же ранг, то дилер фиксирует разброс между картами (spread) – количество вмещающихся номиналов.

Игрок может удвоить ставку перед тем, как дилер откроет третью карту. Выплаты зависят от разброса – 5 к 1 для разброса 1, 4 к 1 для разброса 2, 2 к 1 для разброса 3 и 1 к 1 для разброса от 4 до 11. Если третья карта совпадает с одной из первых двух или не попадает по номиналу в диапазон между ними, то игрок теряет ставки.

1. Теоретическая модель

1.1 Для игры требуется их исходных данных сначала определить

- возможные исходы в игре.
- возможные ставки
- игровые показатели для каждой из ставок
    - выигрышные суммы (таблицу выигрышей) для каждой ставки и для каждого исхода.
    - вероятности выигрышей (распределение)
    - средний выигрыш на единичную ставку для каждого типа ставок (мат. ожидание, медиана, мода, средина разброса)
    - посчитать квантили со значениями выигрышей для вероятностей 0.1-0.9 с шагом 0.1
    - СКО выигрыша на единичную ставку для каждого типа ставок
    - волатильность и доверительные интервалы для выигрышей (волатильность определяется разбросом выигрышей в каждой игре относительно среднего значения, в играх с низкой волатильностью выигрыши как правило, более частые, но не очень большие, в играх с высокой волатильностью, наоборот, выигрыши редкие, но при этом могут достигать высоких значений).
    - средний коэффициент возврата игроку RTP, процент дохода заведения (house advantage) для каждой ставки
    - вероятность выигрыша (p_{hit}), т.е. в скольки процентах ходов в среднем есть выигрыш.
    - средняя длительность игры (длительность игры – количество ходов от ставки до момента, когда приходится делать следующую ставку в предположении, что все выигрыши игрок также использует на ставку). Например, после ставки 1, игрок выигрывает 10 кредитов, затем использует эти 10 кредитов последовательно на ставки, всех их проигрывает, длительность игры равна $1 + 10 = 11$ ходов.

Зам. Некоторые характеристики иногда точно не могут быть вычислены в связи с высокой трудоемкостью вычислений. В этом случае следует попытаться вычислить их приближенно, сделав некоторые допущения.

1.2. Построить графически для каждой из ставок

- распределение выигрышей (закон распределения и функция распределения) на двух графиках друг под другом

- точечные оценки средних выигрышей (мат. ожидание, медиана, плюс минус СКО)

- доверительные интервалы для коэффициента возврата как функцию от числа сыгранных игр:

$$\left[\overline{k_{return}} - \frac{k_p}{\sqrt{N}} s_{k_{return}}, \overline{k_{return}} - \frac{k_p}{\sqrt{N}} s_{k_{return}}\right]$$

$\overline{k_{return}}$ – мат. ожидание или среднее значение коэффициента возврата, $s_{k_{return}}$ – СКО коэффициента возврата на одну игру, N – количество игр, k_p – коэффициент, зависящий от доверительной вероятности p,

1.3. На основе анализа игровых показателей предложить различные варианты игровых стратегий для игр, в которых это может помочь игроку выиграть больше. Посчитать для этих стратегий соответствующие игровые показатели.

1.4. Проанализировать игровые показатели (процент возврата, вероятность выигрыша, волатильность, средняя продолжительность игры) на различных ставках и спрогнозировать, для какого типа азартных игроков какая из ставок будет представлять больший интерес.

2. Имитационная модель.

2.1 Построить имитационную модель игры путем вероятностного моделирования и убедиться в ее адекватности путем сравнения ее основных эмпирических характеристик, рассчитанных по имитационной модели с теоретическими. Рассмотреть все возможные ставки.

2.2 Построить эмпирические графики функций и закона распределения. Убедиться в соответствии теоретических и эмпирических характеристик с увеличением числа розыгрышей.

2.3 Определить эмпирически оценки всех вычисленных в п. 1.1 теоретических показателей и убедиться, что они совпадают с достаточной степени точности.

2.4 Определить, сколько требуется промоделировать игр, чтобы оценки среднего процента выигрыша, вероятности выигрыша, коэффициента волатильности совпали с точностью до одной десятой, одной сотой, одной тысячной.

2.5 Проверить различные стратегии игры из п 1.3 для случая игр, требующих мастерства.

2. Теоретическая модель

2.1 Возможные исходы в игре:

Сначала игрок делает ставку и вскрывается 2 карты:

1) Карты идут друг за другом по рангу – НИЧЬЯ

2) Карты одного ранга – вытягивается 3 карта:

а) 3 карта того же ранга – ПОБЕДА 11 к 1

б) 3 карта другого ранга – НИЧЬЯ

3) Карта разных рангов и не идут друг за другом, дилер устанавливает разброс между ними (spread):

а) Игрок удваивает ставку (р – ранг):

а1) р1 карта < р3 карта < р2 карта – ПОБЕДА

а2) р1 карта >= р3 карта, р2 <= р3 - ПРОИГРЫШ

б) Игрок не удваивает ставку (р – ранг)

б1) р1 карта < р3 карта <р2 карта – ПОБЕДА

б2) р1 карта > = р3 карта, р2 <= р3 - ПРОИГРЫШ

Для 3 ситуации ПОБЕДА – выигрыш, может быть, с разными с разными коэффициентами:

а) spread = 1 – 5 к 1

б) spread = 2 – 4 к 1

в) spread = 3 – 2 к 1

г) spread = [4, 11] – 1 к 1

2.2 Возможные ставки:

В данной игре нет четкого руководства по ставкам, то есть игрок может ставить любую сумму (число), для наглядности в ходе выполнения работы будут рассмотрены случаи с единичной ставкой.

Есть вариант удваивать ставку после открытия двух карт, но он никак не сказывается на вероятности выигрыша, так как не влияет на исход.

2.3 Игровые показатели для каждой из ставок

2.3.1 Выигрышные суммы для каждого исхода:

1) Игра (p1 и p2 можно менять местами, p – ранг карт, n, m, k – ранги карт)

Таблица 1 – Выигрышные суммы

Pay	p1	p2	X2	p3	spread	Win
1	n	n + 1	-	-	-	1
1	n	n - 1	-	-	-	1
1	n	n	-	m	-	1
1	n	n	-	n	-	11
1	n(3)	n + 1 < m(5) < n - 1	-	n(m)< k(4) < m(n)	1	5
1	n(3)	n + 1 < m(5) < n - 1	-	$k \neq 4$	1	0
1	n(3)	n + 1 < m(5) < n - 1	+	n(m)< k(4) < m(n)	1	10
1	n(3)	n + 1 < m(5) < n - 1	+	$k \neq 4$	1	0
1	n(2)	n + 1 < m(5) < n - 1	-	n(m) < k(3,4) < m(n)	2	4
1	n(2)	n + 1 < m(5) < n - 1	-	$k \neq 3, 4$	2	0
1	n(2)	n + 1 < m(5) < n - 1	+	n(m)< k(3, 4) < m(n)	2	8
1	n(2)	n + 1 < m(5) < n - 1	+	$k \neq 3, 4$	2	0
1	n(2)	n + 1 < m(6) < n - 1	-	n(m)< k(3 - 5) < m(n)	3	2
1	n(2)	n + 1 < m(6) < n - 1	-	$k \neq 3, 4, 5$	3	0
1	n(2)	n + 1 < m(6) < n - 1	+	n(m)< k(3 - 5) < m(n)	3	4
1	n(2)	n + 1 < m(6) < n - 1	+	$k \neq 3, 4, 5$	3	0
1	n(2)	n + 1 < m(7) < n - 1	-	n(m)< k(3 - 6) < m(n)	4	1
1	n(2)	n + 1 < m(7) < n - 1	-	$k \neq$ 3-6	4	0
1	n(2)	n + 1 < m(7) < n - 1	+	n(m)< k(3 - 6) < m(n)	4	2
1	n(2)	n + 1 < m(7) < n - 1	+	$k \neq$ 3-6	4	0

2.3.2 Вероятности выигрышей:

По условию задачи стартовая колода состоит из 6 базовых колод – всего 312 карт (от 2 до тузов) – 24 карты каждого ранга. Для начала рассмотрим вероятность того, что 3 карты зайдем в интервал между первыми двумя, для этого нужно вытянуть карту подходящего ранга: 24(14 - i) – все карта больше ранга i, которые исключаются (где i – наибольший ранг двух карт), 24*j – все карты рангом ниже, чем ранг j (где j – наименьший ранг двух карт), следовательно вероятность вытащить 3 карту, попадающую в нужный ранг из колоды равна $\frac{312-24*(14-i)-24*j}{310} = \frac{-24+24j-24i}{310} = \frac{24(j-i-1)}{310}$, при условии, что j – наибольший ранг карты, i – наименьший ранг карты, и они лежат на интервале [2; 14], где 14 – туз.

Вероятности выигрышей, когда уже были вытянуты 2 карты:

Вероятность вытянуть 3 карты одного ранга: $\frac{24}{312} * \frac{23}{311} * \frac{22}{310}$= 0,000404

По полученной формуле были высчитаны вероятности выпадения необходимых карт для разных spread.

Вероятность вытянуть карту при spread = 1: 0,077

Вероятность вытянуть карту при spread = 2: 0,15

Вероятность вытянуть карту при spread = 3: 0,23

Вероятность вытянуть карту при spread = 4: 0,31

Вероятность вытянуть карту при spread = 5: 0,387

Вероятность вытянуть карту при spread = 6: 0,465

Вероятность вытянуть карту при spread = 7: 0,54

Вероятность вытянуть карту при spread = 8: 0,62

Вероятность вытянуть карту при spread = 9: 0,69

Вероятность вытянуть карту при spread = 10: 0,774

Вероятность вытянуть карту при spread = 11: 0,85

Вероятности вытянуть определенный spread:

Вероятность вытянуть spread = $\frac{24}{312} * \frac{24}{311} *$ количетсво способов

Вероятность вытянуть spread = 1: 0.1305

Вероятность вытянуть spread = 2: 0.1187

Вероятность вытянуть spread = 3: 0.1068

Вероятность вытянуть spread = 4: 0.09497

Вероятность вытянуть spread = 5: 0.08311

Вероятность вытянуть spread = 6: 0.07123

Вероятность вытянуть spread = 7: 0.05936

Вероятность вытянуть spread = 8: 0.04748

Вероятность вытянуть spread = 9: 0.03561

Вероятность вытянуть spread = 10: 0.02374

Вероятность вытянуть spread = 11: 0.01187

Вероятность выиграть P(spread)*P(карты):

Вероятность достать spread = 1 и выиграть: 0.01004

Вероятность достать spread = 2 и выиграть: 0.01785

Вероятность достать spread = 3 и выиграть: 0.02456

Вероятность достать spread = 4 и выиграть: 0.02944

Вероятность достать spread = 5 и выиграть: 0.03216

Вероятность достать spread = 6 и выиграть: 0.03312

Вероятность достать spread = 7 и выиграть: 0.03680

Вероятность достать spread = 8 и выиграть: 0.02944

Вероятность достать spread = 9 и выиграть: 0.02457

Вероятность достать spread = 10 и выиграть: 0.01837

Вероятность достать spread = 11 и выиграть: 0.01008

Суммарно получается, что у Казино, которое проводит подобные игры на 6 колодах есть риск = 0.266 – вероятность выигрыша клиента.

Важно учесть, что после вскрытия двух карт можно повысить ставку, тем самым вероятность выиграть будет уже не зависеть от вытянутых первых двух карт.

2.3.3 Ожидаемый выигрыш:

Это то, сколько в среднем выигрывает/проигрывает игрок за одну игру при ставке 1:

$$EV = \sum (Net\ Pay_i * P_i)$$

$$\boldsymbol{EV} = 0.3847$$

2.3.4 Ожидаемый выигрыш на одну ставку

Это то, сколько в среднем выигрывает/проигрывает игрок за одну игру при ставке 1 – выражается в процентах

$$EV_{per\ unit} = \frac{EV_{wager}}{wager\ amount}$$

Из теоретической модели самой игры можно сказать, что если wager = 1, то $EV_{per\ unit} = EV$

2.3.5 – Преимущество/доход заведения

Это то, сколько в среднем получает прибыль заведение за одну игру при ставке 1

$$HA = \frac{EV}{Wager} * 100\%$$

$$HA = 38{,}47$$

2.3.6 – Процент возврата

Это то, сколько в процентах возвращается игроку с одной ставки. Можно посчитать, если вычесть из 100% доход заведения

$$VAR = \sum[(Net\ Pay_i - EV)^2 * P_i]$$

$$\mathrm{VAR} = 599$$

2.3.7 – Среднее отклонение выигрыша на одну ставку SD

СКО выигрыша за 1 игру при единичной ставке:

$$SD_{per\ unit} = \frac{SD_{wager}}{wager\ amount}$$

$$SD_{per\ unit} = 24{,}47$$

2.3.8 - Вероятность выигрыша в одной игре или частота выигрышей (Hit)

Данная вероятность получается суммированием всех вероятностей Pi, для которых игроку возвращается его ставка плюс он что-то выигрывает:

$$Hit = 0.49564$$

2.3.9 – Средняя длительность игры

1) Выиграли: +11 ходов, +5 ходов, + 4 хода, +2 хода, +1 ход

2) Проиграли: +0 ходов

Средняя длительность игры = 4.6 хода

Далее представлены графики функции плотности распределения рис. 1, и функции распределения вероятности получения того или иного выигрыша рис. 2

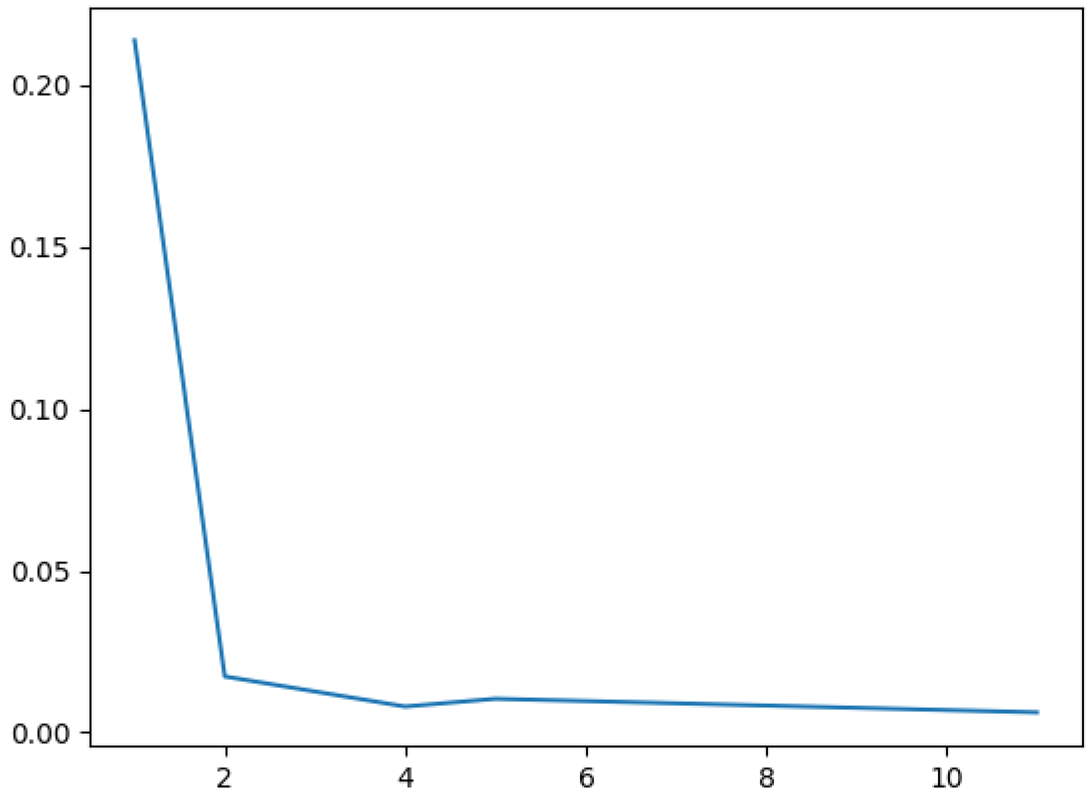

Рис. 1 – Функция плотности распределения от spread

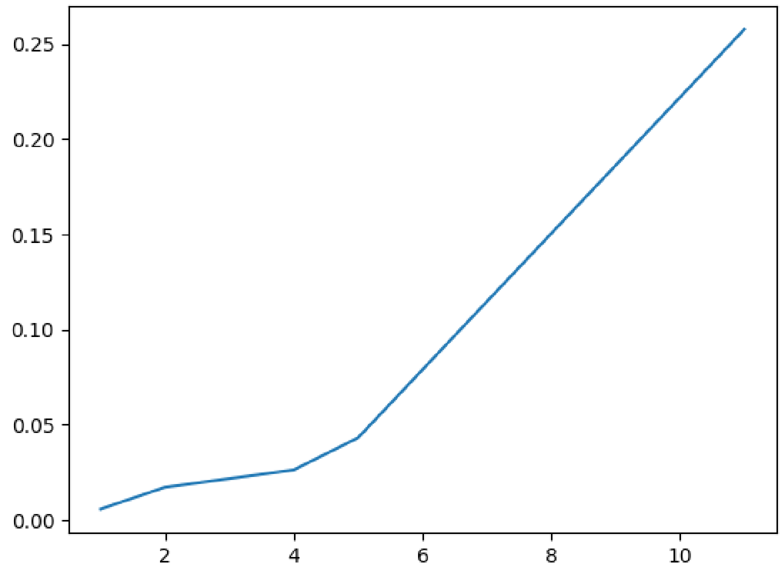

Рис. 2 – Функция распределения вероятности

Плотность распределения вероятности выигрыша на n-шаге (теоретическая):

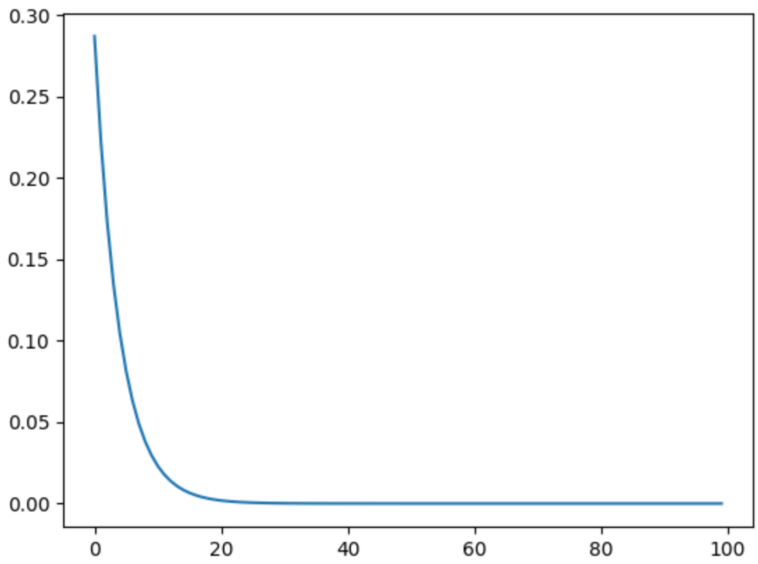

Рис. 4 - Плотность распределения вероятности выигрыша на *n-ом* шаге

Функция распределения вероятности выигрыша на n-шаге (теоретическая):

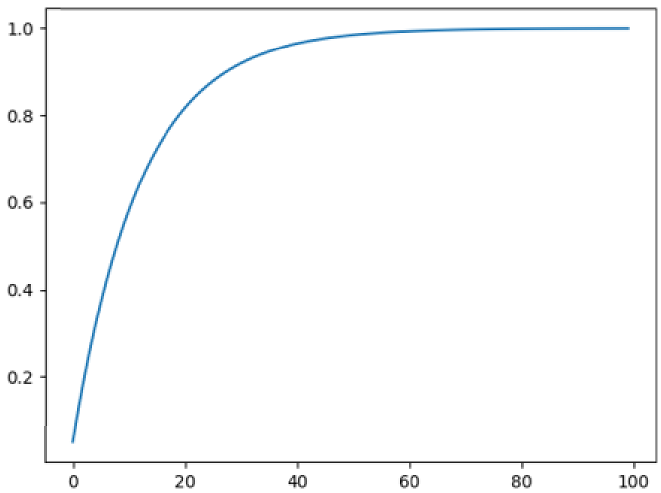

Рис. 5 - Функция распределения вероятности выигрыша на n-шаге

3. Имитационная модель

Результаты моделирования для 100000 игр представлены в таблице 2 с учётом разных экспериментов.

Эксперимент	EV	HA	VAR
1	0.3812	38.12	591
2	0.3897	38.87	584
3	0.3884	38.84	611

При анализе последних результатов можно сделать вывод, что имитационная модель написана верно.

Было прописано несколько простых стратегий игры с начальной суммой в 100 у.е. и ставкой в 1:

1) Стратегия игрока, который никогда не повышает ставку. График изменения его состояния представлен на рисунке 8.

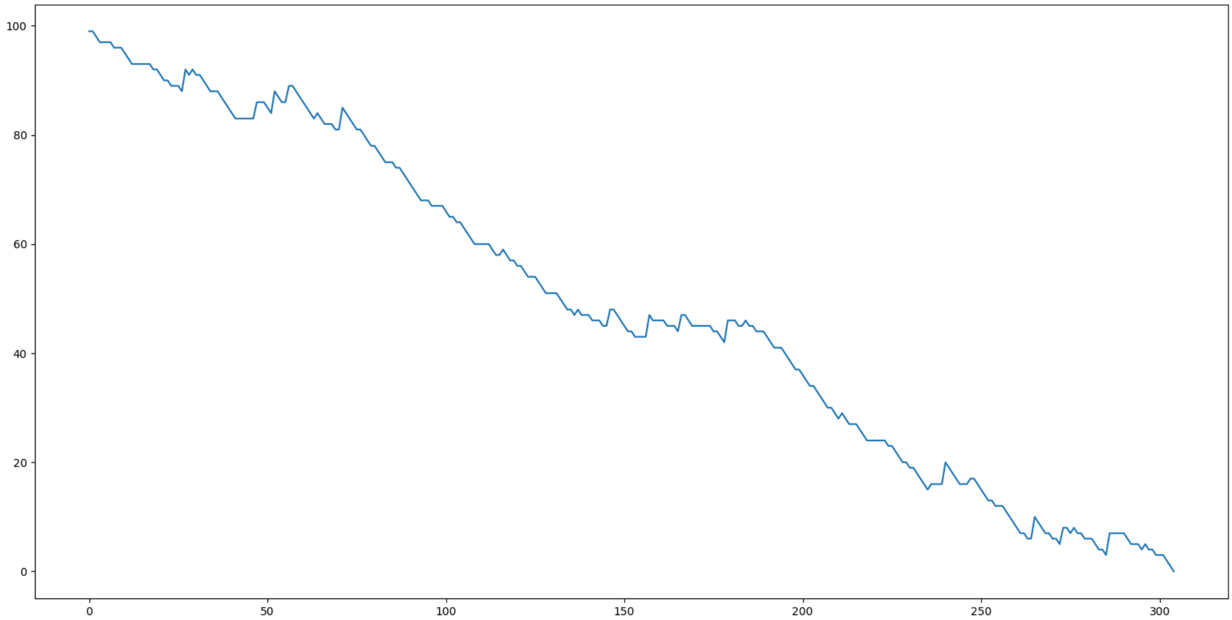

Рис. 8 – График изменения количества денег от количества ставок

2) Игрок, который повышает ставку только если spread == 3, график изменения его состояния представлен на рисунке 9.

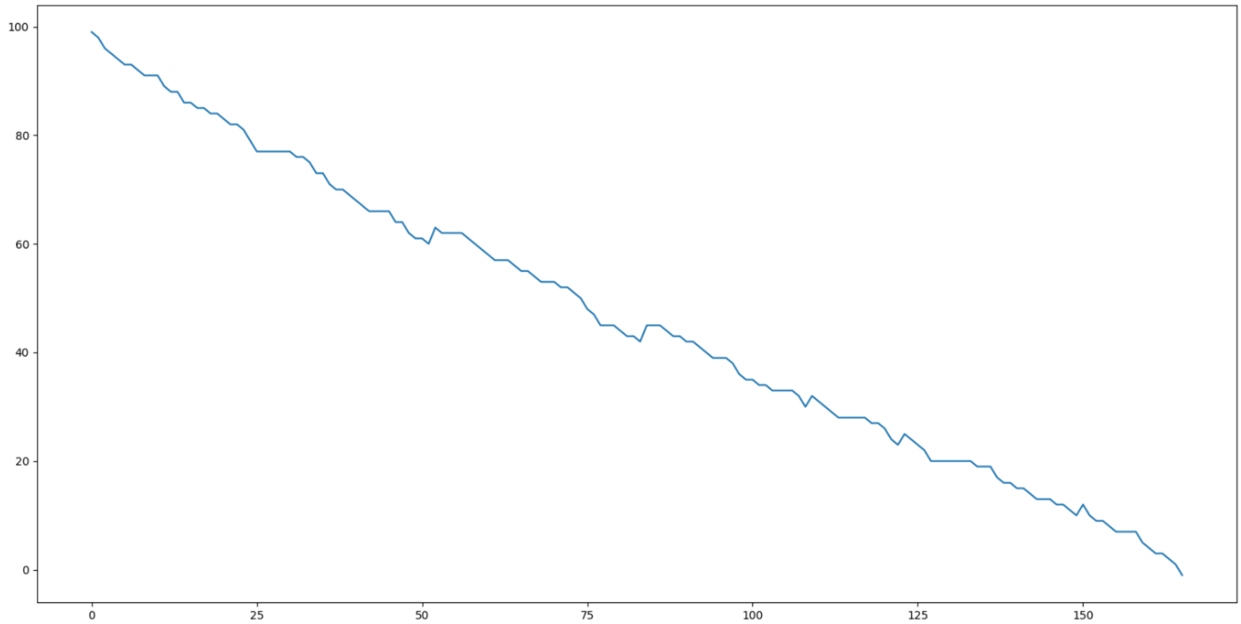

Рис. 9 – График изменения количества денег от количества ставок

3) Игрок, который повышает, если коэффициент> 1, график изменения состояния игрока приведен на рисунке 10.

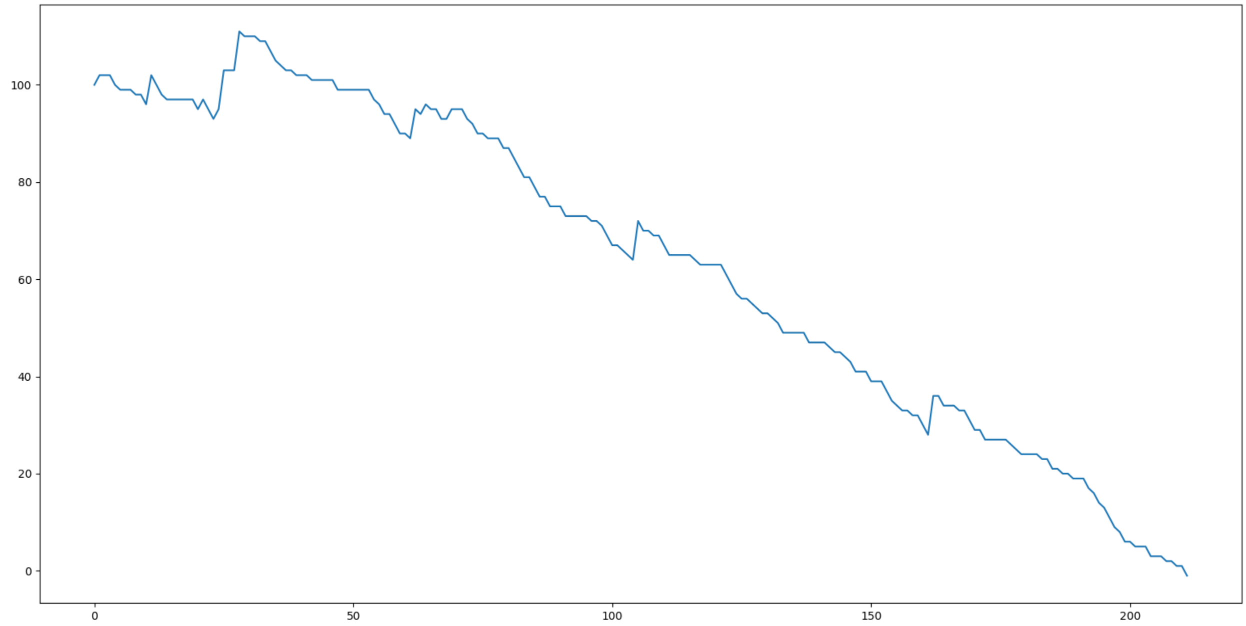

Рис. 10 – График изменения количества денег от количества ставок

4) Алчный игрок, который всегда повышает, даже если коэффициент = 0, график изменения его состояния приведен на рисунке 11

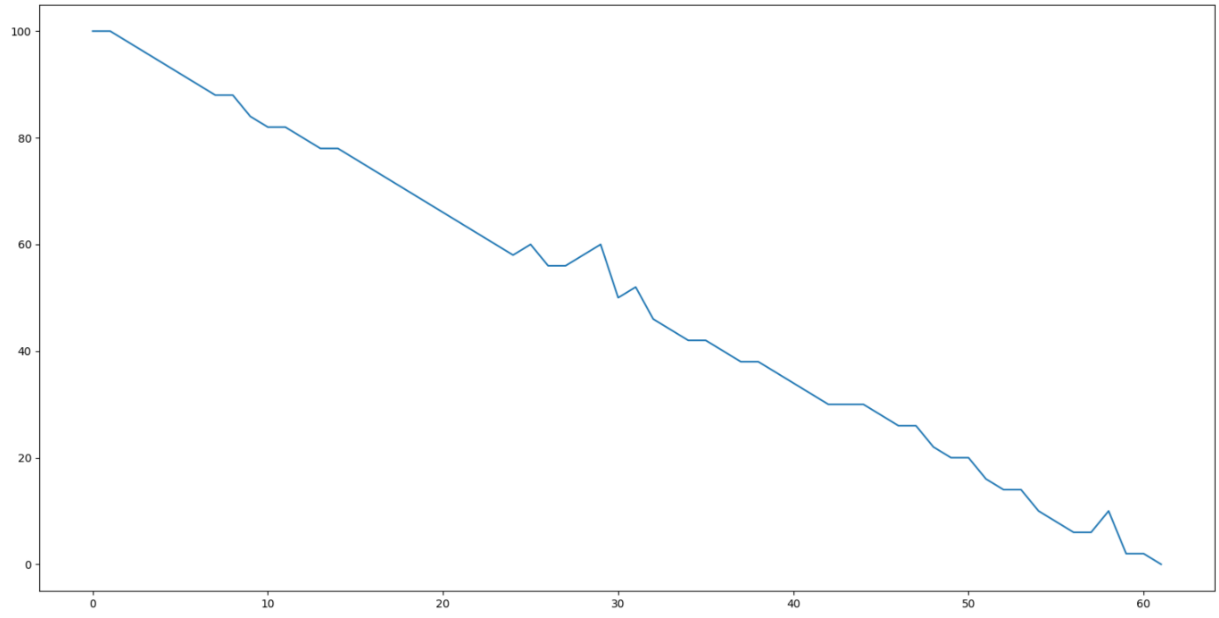

Рис. 8 – График изменения количества денег от количества ставок

Сравнение: можно сделать вывод, что в любом случае игрок останется с пустым карманом, только если он не будет попадать на коэффициент 5к1, 4к1 или 11к1, как, а например, такое было замечено в начале изменения состояния игрока, который повышает ставки с коэффициентами. **С другой**

стороны, если приходить в казино ради атмосферы и времяпрепровождения, а не ради наживы, то рациональней всего будет использовать стратегию бережного игрока, который не повышает ставки, ведь ему хватило аж на 312 обычных ставки (средняя продолжительность игры здесь наивысшая), если цель – быстрее избавиться от денег, то выбор очевиден и стоит удваивать абсолютно каждую ставку (средняя продолжительность игры наименьшая).

4. Вывод:

На основе правил игры “Красный пёс” были вычислены показатели, на которых строится вся игра. Была смоделирована игра в red dog разными стратегиями, а также можно было убедиться, что аналитические значения совпадали с теоретическими.

Так как в этой игре не предусмотрены какие-либо ставки, и она напрямую зависит от клиента, то в ходе выполнения работы она принимала значение = 1.