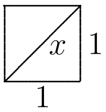
Studienvorkurs Mathematik 1011A308

M. Schulte: Vortrag 3: Reelle Zahlen und Ungleichungen

Inhalt Axiomatische Beschreibung von $\mathbb{R}$, Ungleichungen, Supremum und Infimum

Bezeichnungen

$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$ = Menge der *natürlichen* Zahlen, $\mathbb{N}^0 = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$,
$\mathbb{Z} = \{0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, \ldots\}$ = Menge der *ganzen* Zahlen,
$\mathbb{Q} = \{\frac{a}{b} \mid a, b \in \mathbb{Z},\ b \neq 0\}$ = Menge der *rationalen* Zahlen (Brüche ganzer Zahlen).

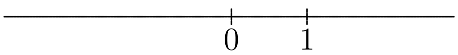


Es gibt Probleme, die über den Bereich $\mathbb{Q}$ der rationalen Zahlen hinausführen: In einem Quadrat der Seitenlänge 1 gilt für die Diagonale x (nach Pythagoras): $x^2 = 1^2 + 1^2 = 2$.

Behauptung *Es gibt kein $x \in \mathbb{Q}$ mit $x^2 = 2$.*

Beweis (indirekt): Annahme: Es gibt ein $x \in \mathbb{Q}$ mit $x^2 = 2$. Wir schreiben $x = \frac{a}{b}$ mit $a, b \in \mathbb{Z},\ b \neq 0$. Wir können annehmen, daß a, b teilerfremd sind (sonst kürzen wir den größten gemeinsamen Teiler heraus). Es ist $a^2 = (bx)^2 = b^2x^2 = 2b^2$ gerade. Dann ist aber auch a gerade (denn für ungerades $a = 2m + 1$ wäre auch $a^2 = 4m^2 + 4m + 1 = 2(2m^2 + 2m) + 1$ ungerade). Also ist $a = 2m$ mit einem $m \in \mathbb{Z}$. Es folgt $4m^2 = a^2 = 2b^2$, also $2m^2 = b^2$, damit ist auch b^2 und somit b gerade. Also sind a und b beide durch 2 teilbar. Das widerspricht der Teilerfremdheit von a, b. Unsere Annahme war also falsch.

Um auch Gleichungen der Form $x^2 = a$ für $a \geq 0$ lösen zu können, erweitert man $\mathbb{Q}$ zum Bereich $\mathbb{R}$ der *reellen* Zahlen. Wir führen diese Konstruktion nicht durch, sondern beschreiben $\mathbb{R}$ durch seine Eigenschaften.



Anschaulich: Reelle Zahlen entsprechen Punkten auf der Zahlengeraden.

1 Axiomatische Beschreibung von $\mathbb{R}$

Auf $\mathbb{R}$ gibt es eine Addition $+$ und eine Multiplikation $\cdot$, die folgenden Bedingungen genügen:

Kommutativgesetz für $+$:	$a + b = b + a$ für alle $a, b \in \mathbb{R}$,
Assoziativgesetz für $+$:	$(a + b) + c = a + (b + c)$ für alle $a, b, c \in \mathbb{R}$,
Existenz der Null:	es gibt eine reelle Zahl 0 mit $a + 0 = a$ für alle $a \in \mathbb{R}$, und zu jedem $a \in \mathbb{R}$ gibt es ein $-a \in \mathbb{R}$ mit $a + (-a) = 0$,
Kommutativgesetz für $\cdot$:	$ab = ba$ für alle $a, b \in \mathbb{R}$,
Assoziativgesetz für $\cdot$:	$(ab)c = a(bc)$ für alle $a, b, c \in \mathbb{R}$,
Existenz der Eins:	es gibt eine reelle Zahl $1 \neq 0$ mit $a \cdot 1 = a$ für alle $a \in \mathbb{R}$, und zu jedem $a \in \mathbb{R},\ a \neq 0$ gibt es ein $a^{-1} \in \mathbb{R}$ mit $a \cdot a^{-1} = 1$,
Distributivgesetz:	$(a + b)c = (ac) + (bc)$ für alle $a, b, c \in \mathbb{R}$.

(Es kommen später noch weitere Axiome.)

Bemerkungen

0 und 1 sind durch die obigen Bedingungen eindeutig bestimmt, für jedes $a \in \mathbb{R}$ ist $-a$ eindeutig bestimmt, und für jedes $a \in \mathbb{R},\ a \neq 0$ ist a^{-1} eindeutig bestimmt.

Wir beweisen z. B. die Eindeutigkeit der 0: Gibt es $0, 0'$ mit $a + 0 = a = a + 0'$ für alle $a \in \mathbb{R}$, so folgt $0' = 0' + 0 = 0 + 0' = 0$.

Mit den Axiomen folgt:
Für alle $a, b \in \mathbb{R}$ hat die Gleichung $a + x = b$ genau eine Lösung (nämlich $x = b + (-a)$).
Für alle $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a \neq 0$ hat die Gleichung $ax = b$ genau eine Lösung (nämlich $x = a^{-1}b$).

Wir verwenden für $a, b \in \mathbb{R}$ die Schreibweisen: $a - b := a + (-b)$ und $\frac{a}{b} := ab^{-1}$ für $b \neq 0$.

Anordnungsaxiome
Auf $\mathbb{R}$ ist eine Relation „> 0" mit folgenden Bedingungen gegeben:

Trichotomie: Für jedes $a \in \mathbb{R}$ gilt *genau* einer der folgenden Fälle:

$$a > 0, \quad a = 0, \quad -a > 0.$$

Verträglichkeit mit $+, \cdot$: Für alle $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a > 0,\ b > 0$ gilt $a + b > 0$ und $ab > 0$.

Die reellen Zahlen a mit $a > 0$ heißen *positiv*.
Anschaulich bedeutet $a > 0$: Auf dem Zahlenstrahl liegt a rechts von 0.

Diese Axiome gelten alle auch für $\mathbb{Q}$. Durch diese Axiome wird $\mathbb{R}$ also nicht charakterisiert. Es fehlt noch ein weiteres Axiom für $\mathbb{R}$.

2 Ungleichungen

Für $a, b \in \mathbb{R}$ wird definiert: $a > b :\Longleftrightarrow a - b > 0, \quad a \geq b :\Longleftrightarrow a > b$ oder $a = b$.
Es gilt also: $a \geq b \Longleftrightarrow a - b > 0$ oder $a - b = 0 \Longleftrightarrow a - b \geq 0$.
Außerdem setzt man: $b < a :\Longleftrightarrow a > b, \quad b \leq a :\Longleftrightarrow a \geq b$.

Aus den Axiomen folgt: $a > b,\ b > c \Rightarrow a > c$.
Beweis: $a > b,\ b > c \Rightarrow a - b > 0,\ b - c > 0 \Rightarrow a - c = (a - b) + (b - c) > 0 \Rightarrow a > c$.

Bemerkungen
a) Es gilt auch: (i) $a \geq 0,\ b \geq 0 \Rightarrow a + b \geq 0,\ ab \geq 0$, (ii) $a \geq b,\ b \geq c \Rightarrow a \geq c$.
b) Für alle $a \neq 0$ ist $a^2 > 0$; insbesondere ist $1 = 1^2 > 0$.

Beweis zu b): Für $a \neq 0$ ist (wegen der Trichotomie) $a > 0$ oder $-a > 0$. Für $a > 0$ ist $a^2 = a \cdot a > 0$ (nach dem Verträglichkeitsaxiom). Für $-a > 0$ ist $a^2 = (-a) \cdot (-a) > 0$.

Rechenregeln für „$\geq$": Für alle $a, b, c, d, p \in \mathbb{R}$ gilt:
(i) $a \geq b,\ p \geq 0 \Rightarrow ap \geq bp$.
Beweis: $a \geq b \Rightarrow a - b \geq 0$. Mit $p \geq 0$ folgt $(a - b)p = ap - bp \geq 0$ nach Bemerkung a), also $ap \geq bp$.

(ii) $a \geq b,\ p \leq 0 \Rightarrow ap \leq bp$.
Beweis: $a - b \geq 0,\ -p \geq 0 \Rightarrow (a - b)(-p) = bp - ap \geq 0$ nach (i), also $bp \geq ap$.

(iii) $a \geq b \Rightarrow a + c \geq b + c$.
Beweis: $a - b \geq 0 \Rightarrow (a + c) - (b + c) = a - b \geq 0$.

(iv) $a \geq b,\ c \geq d \Rightarrow a + c \geq b + d$.
Beweis: $a - b \geq 0,\ c - d \geq 0 \Rightarrow a + c - (b + d) = (a - b) + (c - d) \geq 0$.

(v) $a \geq b,\ c \geq d$, alle vier Zahlen $a, b, c, d \geq 0 \Rightarrow ac \geq bd$.
Beweis: $a \geq b,\ c \geq 0 \Rightarrow ac \geq bc$. $c \geq d,\ b \geq 0 \Rightarrow bc \geq bd$. Daraus folgt $ac \geq bd$.

Bernoullische Ungleichung
Für alle $n \in \mathbb{N}^0$ *und alle* $x \geq -1$ *gilt* $(1+x)^n \geq 1+nx$.

Beweis durch vollständige Induktion nach n: Für $n=0$ ist $(1+x)^0 = 1 \geq 1+0x$.
$n \to n+1$: Es gelte die *Induktionsvoraussetzung* $(1+x)^n \geq 1+nx$. Zu zeigen ist die *Induktionsbehauptung* $(1+x)^{n+1} \geq 1+(n+1)x$.
Wegen $(1+x)^n \geq 1+nx$ und $1+x \geq 0$ gilt (nach Rechenregel (i))

$$\begin{aligned}(1+x)^{n+1} &= (1+x)^n \cdot (1+x) \geq (1+nx)\cdot(1+x) \\ &= 1+(n+1)x+nx^2 \geq 1+(n+1)x \qquad \text{(da } nx^2 \geq 0\text{)}.\end{aligned}$$

Absolutbetrag einer reellen Zahl
Definition: Für $a \in \mathbb{R}$ heißt $|a| := \begin{cases} a, & \text{falls } a \geq 0 \\ -a, & \text{falls } a < 0 \end{cases}$ *Absolutbetrag* von a.

Bemerkung: Für $a, b \in \mathbb{R}$ gibt $|a-b|$ den Abstand der Punkte a, b auf der Zahlengeraden an, denn für $a \geq b$ ist der Abstand $a-b = |a-b|$, und für $a < b$ ist der Abstand gleich $b-a = -(a-b) = |a-b|$.
Für $a, b \in \mathbb{R}$ sei $\max(a,b) := \begin{cases} a, & \text{falls } a \geq b \\ b, & \text{falls } a < b \end{cases}$.

Hilfsatz (i) Für alle $a \in \mathbb{R}$ ist $|a| = \max(a, -a)$.
(ii) Für alle $a, M \in \mathbb{R}$ mit $M \geq 0$ gilt: $-M \leq a \leq M \iff |a| \leq M$.

Beweis: (i) Für $a \geq 0$ ist $-a \leq 0 \leq a$, also $\max(a,-a) = a = |a|$, für $a < 0$ ist $-a > 0 > a$, also $\max(a,-a) = -a = |a|$.
(ii) „$\Rightarrow$“: Gilt $-M \leq a \leq M$, so ist $M \geq -a$ (durch Multiplikation von $-M \leq a$ mit -1), also $-a \leq M$ und $a \leq M$, und mit (i) folgt $|a| = \max(a,-a) \leq M$.
„$\Leftarrow$“: Für $|a| \leq M$ ist $a \leq M$ und $-a \leq M$, also $-M \leq a \leq M$.

Eigenschaften des Absolutbetrages
Für alle $a, b \in \mathbb{R}$ gilt
(i) $|a| \geq 0$ und ($|a| = 0 \iff a = 0$),
(ii) $|ab| = |a|\,|b|$,
(iii) $|a+b| \leq |a| + |b|$ *(Dreiecksungleichung).*

Beweis: (i) ist klar.
(ii) Die Vorzeichen $\varepsilon, \eta \in \{\pm 1\}$ seien so gewählt, daß $|a| = \varepsilon a \geq 0$ und $|b| = \eta b \geq 0$ gilt. Dann ist $\varepsilon\eta ab = |a|\,|b| \geq 0$, also $|ab| = \varepsilon\eta ab = |a|\,|b|$.
(iii) Nach (ii) des Hilfssatzes (mit $M = |a|$) gilt $-|a| \leq a \leq |a|$ und $-|b| \leq b \leq |b|$. Durch Addition der Ungleichungen (nach Rechenregel (iv)) folgt

$$-\big(|a|+|b|\big) \leq a+b \leq |a|+|b|.$$

Aus (ii) des Hilfssatzes (mit $M = |a|+|b|$) folgt $|a+b| \leq |a|+|b|$.

Folgerungen
a) Ersetzt man in der Dreiecksungleichung b durch $-b$, so folgt $|a-b| \leq |a| + |-b| = |a|+|b|$.
b) Für alle $a, b \in \mathbb{R}$ gilt $|a-b| \geq \big||a|-|b|\big|$.

Beweis: Mit der Dreiecksungleichung folgt $|a| = |b+(a-b)| \leq |b| + |a-b|$, also $|a|-|b| \leq |a-b|$. Durch Vertauschen von a, b folgt $|b|-|a| \leq |b-a| = |a-b|$, also $\big||a|-|b|\big| \leq |a-b|$.

Beschränkte Mengen

Definitionen: Eine Teilmenge M von $\mathbb{R}$ heißt *nach oben beschränkt*, wenn es ein $b \in \mathbb{R}$ gibt mit $x \leq b$ für alle $x \in M$. Jedes solche b heißt dann eine *obere Schranke* von M.
M heißt *nach unten beschränkt*, wenn es ein $a \in \mathbb{R}$ gibt mit $a \leq x$ für alle $x \in M$. Jedes solche a heißt eine *untere Schranke* von M.
M heißt *beschränkt*, falls M nach oben und nach unten beschränkt ist.

3 Supremum und Infimum

Definitionen Sei M eine Teilmenge von $\mathbb{R}$.
Eine reelle Zahl s heißt *kleinste obere Schranke* (oder *Supremum*) von M, falls gilt:
1. s ist eine obere Schranke von M.
2. Für jede obere Schranke s' von M gilt $s \leq s'$.

Eine reelle Zahl t heißt *größte untere Schranke* (oder *Infimum*) von M, falls gilt:
1. t ist eine untere Schranke von M.
2. Für jede untere Schranke t' von M gilt $t' \leq t$.

Es gilt: *Jede Teilmenge M von $\mathbb{R}$ hat höchstens ein Supremum und höchstens ein Infimum.*

Beweis: Seien s und s' beide Suprema von M. Da s' obere Schranke von M ist und s Supremum von M ist, folgt $s \leq s'$. Da s obere Schranke von M ist und s' Supremum von M ist, folgt $s' \leq s$. Also gilt $s = s'$. Für das Infimum schließt man analog.

Bezeichnung: Falls das Supremum von M existiert, bezeichnet man es mit $\sup M$.
Falls das Infimum von M existiert, bezeichnet man es mit $\inf M$.

Vollständigkeitsaxiom für $\mathbb{R}$
Jede nichtleere, nach oben beschränkte Teilmenge M von $\mathbb{R}$ besitzt ein Supremum.

Aus dem Vollständigkeitsaxiom folgt: *Jede nichtleere, nach unten beschränkte Teilmenge M von $\mathbb{R}$ besitzt ein Infimum.* (Beweis als Übungsaufgabe.)

Bemerkung Das Vollständigkeitsaxiom gilt in $\mathbb{Q}$ nicht. Man kann zeigen:
Hätte $\{x \in \mathbb{Q} \mid x^2 < 2\}$ in $\mathbb{Q}$ ein Supremum $s \in \mathbb{Q}$, so wäre $s^2 = 2$. Da es kein $s \in \mathbb{Q}$ mit $s^2 = 2$ gibt, hat $\{x \in \mathbb{Q} \mid x^2 < 2\}$ in $\mathbb{Q}$ kein Supremum.

Satz von Archimedes *Zu jeder reellen Zahl a gibt es eine natürliche Zahl n mit $n > a$.*

Beweis (indirekt): Annahme: Es gibt eine reelle Zahl a, so daß $n \leq a$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt. Dann ist die Teilmenge $\mathbb{N}$ von $\mathbb{R}$ nach oben beschränkt. Nach dem Vollständigkeitsaxiom existiert also $s := \sup \mathbb{N}$. Da s die kleinste obere Schranke von $\mathbb{N}$ ist, ist $s-1$ keine obere Schranke von $\mathbb{N}$, also existiert ein $n \in \mathbb{N}$ mit $s - 1 < n$. Dann ist $s < n + 1 \in \mathbb{N}$, also s keine obere Schranke von $\mathbb{N}$, Widerspruch!

Folgerungen
a) *Zu jedem $a \in \mathbb{R}$ mit $a > 0$ und jedem $b \in \mathbb{R}$ gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ mit $na > b$.*
Beweis: Nach dem Satz von Archimedes gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ mit $n > \frac{b}{a}$, also ist $na > b$.
b) *Zu jedem $a \in \mathbb{R}$ mit $a > 0$ gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ mit $0 < \frac{1}{n} < a$.*
Beweis: Nach dem Satz von Archimedes gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ mit $n > \frac{1}{a}$, also ist $a > \frac{1}{n}$.
c) *Gilt $0 \leq a < \frac{1}{n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$, so ist $a = 0$.*
Beweis: Wäre $a > 0$, so gäbe es nach b) ein $n \in \mathbb{N}$ mit $\frac{1}{n} < a$, Widerspruch!