Inhalt Lineare Abbildungen, Kern und Bild einer linearen Abbildung, Dimensionsformel für lineare Abbildungen, Anwendungen der Dimensionsformel

Im Folgenden seien K ein Körper und U, V, W Vektorräume über K.

1 Lineare Abbildungen

Definition Eine Abbildung $f : V \to W$ heißt *linear*, falls für alle $v, v' \in V$ und $a \in K$ gilt: $f(v + v') = f(v) + f(v')$ und $f(av) = af(v)$.

Bemerkungen
a) $f : V \to W$ linear $\iff$ $f(av + a'v') = af(v) + a'f(v')$ für alle $v, v' \in V,\ a, a' \in K$.
b) Ist $f : V \to W$ linear, so ist $f(0_V) = 0_W$.

Beweis: a) „$\Rightarrow$“: Ist f linear, so gilt $f(av + a'v') = f(av) + f(a'v') = af(v) + a'f(v')$.
„$\Leftarrow$“: Für $a = a' := 1$ folgt $f(v + v') = f(v) + f(v')$, für $a' := 0$ folgt $f(av) = af(v)$.
b) Aus $f(0) = f(0 + 0) = f(0) + f(0)$ folgt $f(0) = 0$ durch Subtraktion von $f(0)$.

Definition
$\mathrm{Hom}_K(V, W) = \mathrm{Hom}(V, W) := \{f \mid f : V \to W \text{ linear}\},\ \mathrm{End}(V) := \mathrm{Hom}(V, V)$.

Satz 1 a) *Für $f, g \in \mathrm{Hom}(V, W),\ a \in K$ sind $f + g : V \to W,\ af : V \to W$ wieder linear, wobei*

$$(f + g)(v) := f(v) + g(v) \quad \textit{und} \quad (af)(v) := af(v) \quad \textit{für alle } v \in V.$$

b) $\mathrm{Hom}(V, W)$ *ist mit den Verknüpfungen aus a) ein K-Vektorraum mit dem Nullelement $0 : V \to W,\ 0(v) := 0$ für alle $v \in V$.*
c) *Für $f, f_1, f_2 \in \mathrm{Hom}(V, W)$, $g, g_1, g_2 \in \mathrm{Hom}(U, V)$, $a \in K$ gilt $f \circ (g_1 + g_2) = f \circ g_1 + f \circ g_2$, $(f_1 + f_2) \circ g = f_1 \circ g + f_2 \circ g$, $(af) \circ g = a(f \circ g) = f \circ (ag)$.*

Definition $f : V \to W$ heißt *(Vektorraum-)Isomorphismus*, falls f linear und bijektiv ist. V heißt *isomorph* zu W (in Zeichen: $V \cong W$), falls ein Isomorphismus $V \to W$ existiert.

Bemerkungen $\mathrm{id}_V : V \to V,\ v \mapsto v$ ist ein Isomorphismus. Sind $f : V \to W,\ g : U \to V$ Isomorphismen, so ist $f \circ g : U \to W$ ein Isomorphismus. Ist $f : V \to W$ ein Isomorphismus, so ist $f^{-1} : W \to V$ ein Isomorphismus. Ist V isomorph zu W, so auch W isomorph zu V.

2 Kern und Bild einer linearen Abbildung

Definition Für eine lineare Abbildung $f : V \to W$ heißt $\mathrm{Kern}\, f := \{v \in V \mid f(v) = 0\}$ *Kern* von f, $\mathrm{Bild}\, f := \{f(v) \mid v \in V\} = \{w \in W \mid \text{Es gibt ein } v \in V \text{ mit } w = f(v)\}$ *Bild* von f.
$\mathrm{Kern}\, f$ ist ein Untervektorraum von V, $\mathrm{Bild}\, f$ ist ein Untervektorraum von W.

Satz 2 (Injektivitätskriterium)
Für lineares $f : V \to W$ gilt: f injektiv $\iff$ $\mathrm{Kern}\, f = \{0\}$.

Beweis: „$\Rightarrow$“: Sei f injektiv. Wegen $f(0) = 0$ ist $0 \in \mathrm{Kern}\, f$. Ist $v \in \mathrm{Kern}\, f$, also $f(v) = 0 = f(0)$, so folgt (da f injektiv ist) $v = 0$. Also ist $\mathrm{Kern}\, f = \{0\}$.
„$\Leftarrow$“: Sei $\mathrm{Kern}\, f = \{0\}$. Sind $v, v' \in V$ mit $f(v) = f(v')$, so ist $f(v - v') = f(v) - f(v') = 0$, also $v - v' \in \mathrm{Kern}\, f = \{0\}$ und damit $v = v'$. Also ist f injektiv.

3 Die Dimensionsformel für lineare Abbildungen

Satz 3 (Dimensionsformel)

Sei V endlich-dimensional, $f : V \to W$ linear. Dann sind auch $\operatorname{Kern} f$ *und* $\operatorname{Bild} f$ *endlich-dimensional, und es gilt*

$$\dim \operatorname{Bild} f + \dim \operatorname{Kern} f = \dim V.$$

Beweis: $\operatorname{Kern} f$ ist als Untervektorraum von V endlich-dimensional. Ist $v_1, \dots, v_n$ eine Basis von V, so ist $f(v_1), \dots, f(v_n)$ ein Erzeugendensystem von $\operatorname{Bild} f$ (wie man leicht sieht), also ist $\operatorname{Bild} f$ endlich erzeugt und damit endlich-dimensional.

Es seien $p := \dim \operatorname{Kern} f$, $q := \dim \operatorname{Bild} f$. Wir wählen Basen $\{u_1, \dots, u_p\}$ von $\operatorname{Kern} f$ und $\{w_1, \dots, w_q\}$ von $\operatorname{Bild} f$. Zu jedem w_j gibt es ein $v_j \in V$ mit $w_j = f(v_j)$ für $j = 1, \dots, q$.

Behauptung: $\{u_1, \dots, u_p, v_1, \dots, v_q\}$ ist eine Basis von V.

Beweis: a) $u_1, \dots, u_p, v_1, \dots, v_q$ *sind linear unabhängig:* Seien $a_1, \dots, a_p, b_1, \dots, b_q \in K$ mit

$$\sum_{i=1}^{p} a_i u_i + \sum_{j=1}^{q} b_j v_j = 0.$$

Anwendung von f ergibt $0 = \sum\limits_{i=1}^{p} a_i f(u_i) + \sum\limits_{j=1}^{q} b_j f(v_j) = 0 + \sum\limits_{j=1}^{q} b_j w_j$ (wegen $u_i \in \operatorname{Kern} f$ und $f(v_j) = w_j$). Da die $w_1, \dots, w_q$ linear unabhängig sind, folgt $b_1 = \ldots = b_q = 0$ und dann $\sum\limits_{i=1}^{p} a_i u_i = 0$. Da auch die $u_1, \dots, u_p$ linear unabhängig sind, folgt $a_1 = \ldots = a_p = 0$. Damit ist die lineare Unabhängigkeit der $u_1, \dots, u_p, v_1, \dots, v_q$ gezeigt.

b) $u_1, \dots, u_p, v_1, \dots, v_q$ *erzeugen V:* Sei $v \in V$. Es ist $f(v) \in \operatorname{Bild} f = \operatorname{Lin}(w_1, \dots, w_q)$, also gibt es $b_1, \dots, b_q \in K$ mit $f(v) = \sum\limits_{j=1}^{q} b_j w_j = \sum\limits_{j=1}^{q} b_j f(v_j) = f(\sum\limits_{j=1}^{q} b_j v_j)$. Also ist

$$f(v - \sum_{j=1}^{q} b_j v_j) = 0, \quad \text{d. h.} \quad v - \sum_{j=1}^{q} b_j v_j \in \operatorname{Kern} f = \operatorname{Lin}(u_1, \dots, u_p).$$

Es gibt also $a_1, \dots, a_p \in K$ mit $v - \sum\limits_{j=1}^{q} b_j v_j = \sum\limits_{i=1}^{p} a_i u_i$, also $v = \sum\limits_{i=1}^{p} a_i u_i + \sum\limits_{j=1}^{q} b_j v_j$. Nach a) und b) ist $\{u_1, \dots, u_p, v_1, \dots, v_q\}$ eine Basis von V, also gilt

$$\dim V = p + q = \dim \operatorname{Kern} f + \dim \operatorname{Bild} f.$$

4 Anwendungen der Dimensionsformel

Satz 4

Seien V, W endlich-dimensional mit $\dim V = \dim W$. *Für lineares $f : V \to W$ gilt dann:* *f injektiv $\iff$ f surjektiv $\iff$ f bijektiv.*

Beweis: Es genügt zu zeigen: f injektiv $\iff$ f surjektiv.

„$\Rightarrow$“: Sei f injektiv, also $\operatorname{Kern} f = \{0\}$. Die Dimensionsformel (Satz 3) liefert

$$\dim W = \dim V = \dim \operatorname{Bild} f + \dim \operatorname{Kern} f = \dim \operatorname{Bild} f;$$

da $\operatorname{Bild} f$ ein Untervektorraum von W ist, folgt $\operatorname{Bild} f = W$, also ist f surjektiv.

„$\Leftarrow$“: Sei f surjektiv, also $\operatorname{Bild} f = W$. Dann ist

$$\dim \operatorname{Bild} f = \dim W = \dim V = \dim \operatorname{Bild} f + \dim \operatorname{Kern} f,$$

also $\dim \operatorname{Kern} f = 0$ und damit $\operatorname{Kern} f = \{0\}$, also f injektiv (nach Satz 2).

Satz 5 (Dimensionsformel für homogene lineare Gleichungssysteme)
Seien $m, n \in \mathbb{N}$, $v_1, \ldots, v_n \in K^m$ *und* $G \ \sum_{j=1}^{n} x_j v_j = 0$ *ein* ***homogenes*** *lineares Gleichungssystem von* m *Gleichungen in* n *Unbekannten* $x_1, \ldots, x_n$*. Für den Lösungsraum* $L(G)$ *von* G *gilt dann*

$$\dim L(G) = n - \dim \operatorname{Lin}(v_1, \ldots, v_n).$$

(Man setzt $\operatorname{rang}\{v_1, \ldots, v_n\} := \dim \operatorname{Lin}(v_1, \ldots, v_n)$.)

Beweis: $f : K^n \to K^m$, $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \mapsto \sum_{j=1}^{n} x_j v_j$ ist eine lineare Abbildung. Es gilt

$$\operatorname{Kern} f = L(G) \ \text{ und } \ \operatorname{Bild} f = \operatorname{Lin}(v_1, \ldots, v_n).$$

Mit der Dimensionsformel (Satz 3) folgt also

$$\dim L(G) = \dim \operatorname{Kern} f = \dim K^n - \dim \operatorname{Bild} f = n - \dim \operatorname{Lin}(v_1, \ldots, v_n).$$

Satz 6 (Klassifikation endlich-dimensionaler Vektorräume bis auf Isomorphie)
a) *Sei* V *endlich-dimensional mit* $n := \dim V \geq 1$*. Dann gilt* $V \cong K^n$*.*
b) *Sei* V *endlich-dimensional. Dann gilt:* $V \cong W \iff \dim V = \dim W$*.*

Beweis: a) Sei $\{v_1, \ldots, v_n\}$ eine Basis von V. Wir definieren

$$f : K^n \to V,\ f\left(\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}\right) := \sum_{j=1}^{n} a_j v_j \ \text{ für alle } a_1, \ldots, a_n \in K.$$

Man zeigt leicht, dass f linear ist. f ist surjektiv, denn jedes $v \in V$ hat eine Darstellung $v = \sum_{j=1}^{n} a_j v_j$ mit $a_1, \ldots, a_n \in K$. Wegen $\dim V = n = \dim K^n$ ist f dann auch injektiv. Also ist $f : K^n \to V$ ein Isomorphismus.

b) „$\Leftarrow$“: Sei $n := \dim V = \dim W$. Für $n = 0$ ist $V = \{0_V\}$, $W = \{0_W\}$, also gilt $V \cong W$. Für $n \geq 1$ gilt nach a) $V \cong K^n$, $W \cong K^n$, also ist $V \cong W$.
„$\Rightarrow$“: Gelte $V \cong W$, also existiert ein Isomorphismus $f : V \to W$. Da f injektiv ist, ist $\operatorname{Kern} f = \{0\}$; weil f surjektiv ist, ist $\operatorname{Bild} f = W$. Nach der Dimensionsformel (Satz 3) gilt dann

$$\dim V = \dim \operatorname{Bild} f + \dim \operatorname{Kern} f = \dim \operatorname{Bild} f = \dim W.$$