Kurseinheit 2:

Lösungsvorschläge zu den Einsendeaufgaben

Aufgabe 2.1

(1) Falsch. Die Ränge der Koeffizientenmatrix und der erweiterten Koeffizientenmatrix sind gleich. Somit besitzt dieses lineare Gleichungssystem mindestens eine Lösung.

(2) Wahr. Die Treppennormalform der erweiterten Koeffizientenmatrix ist $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 1 & 1 & | & 1 \end{pmatrix}$.
Die Ränge der Koeffizientenmatrix und der erweiterten Koeffizientenmatrix sind gleich. Somit besitzt dieses lineare Gleichungssystem mindestens eine Lösung. Da $\mathrm{Rg}(A) < 3$, gibt es mehr als eine, also unendlich viele Lösungen, denn $\mathbb{R}$ enthält unendlich viele Elemente.

(3) Wahr. Es gilt $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

(4) Falsch. Beispielsweise hat $\begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 1$ keine Lösung.

(5) Wahr. Ist $A \in \mathrm{M}_{mn}(\mathbb{R})$, so ist der Nullvektor in $\mathrm{M}_{m1}(\mathbb{R})$ immer eine Lösung von $Ax = 0$.

(6) Wahr. Sei $A \in \mathrm{M}_{mn}(\mathbb{R})$. Wenn $Ax = b$ mehr als eine Lösung hat, sind die Ränge von A und der erweiterten Koeffizientenmatrix gleich. Weiter ist $\mathrm{Rg}(A) < n$. Damit hat das zugehörige homogene Gleichungssystem unendlich viele Lösungen. Es folgt, dass $Ax = b$ unendlich viele Lösungen hat.

(7) Falsch. Das lineare Gleichungssystem $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ hat unendlich viele Lösungen.

(8) Falsch. Alle Matrizen $\begin{pmatrix} 1 & a \end{pmatrix}$ mit $a \in \mathbb{R}$ sind in Treppennormalform.

(9) Wahr. Nur $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ sind in Treppennormalform.

(10) Wahr. Es gilt $A(\lambda + \lambda') = A\lambda + A\lambda' = 0 + 0 = 0$.

Aufgabe 2.2

In Matrix-Schreibweise lautet das lineare Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 4 \\ 2 & 2 & -3 & 1 \\ 3 & 3 & -4 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Es ist $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 4 \\ 2 & 2 & -3 & 1 \\ 3 & 3 & -4 & -2 \end{pmatrix}$ die Koeffizientenmatrix, und $A' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 4 & | & 5 \\ 2 & 2 & -3 & 1 & | & 3 \\ 3 & 3 & -4 & -2 & | & 1 \end{pmatrix}$ ist die erweiterte Koeffizientenmatrix. Wir überführen A' in Treppennormalform. Dazu subtrahieren wir das Doppelte der ersten Zeile von der zweiten und das 3-fache der ersten Zeile von der dritten. Wir erhalten

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 4 & | & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -7 & | & -7 \\ 0 & 0 & 2 & -14 & | & -14 \end{pmatrix}.$$

Wir subtrahieren das Doppelte der zweiten Zeile von der dritten und addieren dann das Doppelte der zweiten Zeile zur ersten. Das ergibt

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -10 & | & -9 \\ 0 & 0 & 1 & -7 & | & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix}.$$

Diese Matrix ist in Treppennormalform. Wir fügen Nullzeilen so ein, dass die Matrix links des Strichs quadratisch ist und die Pivot-Positionen auf der Diagonalen stehen. Wir erhalten

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -10 & | & -9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -7 & | & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix}.$$

Wir fügen -1 dort auf der Diagonalen ein, wo 0 steht und erhalten

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -10 & | & -9 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -7 & | & -7 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & | & 0 \end{pmatrix}.$$

Rechts des Strichs steht eine spezielle Lösung λ_0 des Gleichungssystems. Die Lösungsmenge ist somit

$$\mathcal{L} = \begin{pmatrix} -9 \\ 0 \\ -7 \\ 0 \end{pmatrix} + \left\{ a \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} -10 \\ 0 \\ -7 \\ -1 \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R} \right\}$$

Aufgabe 2.3

1. Die erste Teilmenge ist kein Unterraum, denn die Nullmatrix ist nicht enthalten.
2. Die zweite Teilmenge besteht nur aus der Nullmatrix. Sie ist somit ein Unterraum von $\mathrm{M}_{22}(\mathbb{R})$.
3. Die dritte Teilmenge ist kein Unterraum, denn die Nullmatrix ist nicht enthalten.
4. Die Menge $X_4 = \{A \in \mathrm{M}_{22}(\mathbb{R}) \mid A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}\}$ ist ein Unterraum von $\mathrm{M}_{22}(\mathbb{R})$. Zum Beweis benutzen wir das Unterraumkriterium. Die Nullmatrix liegt in X_4. Seien

$A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} a' & b' \\ b' & c' \end{pmatrix} \in X_4$. Dann gilt $A + B = \begin{pmatrix} a+a' & b+b' \\ b+b' & c+c' \end{pmatrix} \in X_4$. Sei $r \in \mathbb{R}$, und sei $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \in X_4$. Dann gilt $rA = \begin{pmatrix} ra & rb \\ rb & rc \end{pmatrix}$, also $rA \in X_4$. Mit dem Unterraumkriterium folgt, dass X_4 ein Unterraum von $\mathrm{M}_{22}(\mathbb{R})$ ist.

Aufgabe 2.4

Wir machen den Ansatz

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} &= a\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} a & a \\ a & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ b & b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 2c \\ 0 & -c \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} a & a+2c \\ a+b & b-c \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Diese Gleichung ist genau dann erfüllt, wenn $a = 3$, $a + b = 1$, $a + 2c = 1$ und $b - c = -1$ ist. Wir ersetzen $a = 3$ in der zweiten und dritten Gleichung und erhalten $b = -2$ und $c = -1$. Folglich gilt $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = 3\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, und es ist $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \in \left\langle \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right\rangle$.

Aufgabe 2.5

$\Rightarrow$ Sei $B \in \mathrm{M}_{nn}(\mathbb{K})$, $B \neq 0$, und sei $AB = 0 \in \mathrm{M}_{mn}(\mathbb{K})$. Seien $b_1, \ldots, b_n$ die Spalten von B. Da $B \neq 0$, gibt es eine Spalte b_i, die keine Nullspalte ist. Da $AB = 0$, folgt $Ab_i = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$. Das homogene lineare Gleichungssytem $Ax = 0$ besitzt daher mehr als eine Lösung, und es folgt $\mathrm{Rg}(A) < n$.

$\Leftarrow$ Sei $\mathrm{Rg}(A) < n$. Es folgt, dass das homogene lineare Gleichungssystem $Ax = 0$ mehr als eine Lösung besitzt. Sei $\lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ eine Lösung. Setze

$$B = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_n & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{nn}(\mathbb{K}).$$

Dann ist $B \neq 0$, und es gilt $AB = 0 \in \mathrm{M}_{mn}(\mathbb{K})$.

Aufgabe 2.6

Wir beginnen die Matrix $A = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & a \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{55}(\mathbb{R})$ in Treppennormalform zu überführen.

Wir subtrahieren das a-fache der Zeile 2 von Zeile 1 und Zeile 2 von den Zeilen 3, 4 und 5:

$$\begin{pmatrix} 0 & (1+a)(1-a) & 1-a & 1-a & 1-a \\ 1 & a & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1-a & a-1 & 0 & 0 \\ 0 & 1-a & 0 & a-1 & 0 \\ 0 & 1-a & 0 & 0 & a-1 \end{pmatrix}.$$

Ist $a = 1$, so hat diese Matrix genau eine Zeile, die keine Nullzeile ist, und es folgt, dass $\mathrm{Rg}(A) = 1$ ist. Wir nehmen im Folgenden an, dass $a \neq 1$ gilt. Wir teilen die Zeilen 1, 3, 4 und 5 durch $1 - a$ und erhalten

$$\begin{pmatrix} 0 & 1+a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Wir subtrahieren das $(a + 1)$-fache von Zeile 3 von Zeile 1, das a-fache von Zeile 3 von Zeile 2 und Zeile 3 von Zeile 5 und 4:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & a+2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & a+1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Wir subtrahieren Zeile 1 von Zeile 2:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & a+2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Wir vertauschen Zeile 1 und 2, dann Zeile 2 und 3, dann 3 und 4, und dann 4 und 5:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & a+2 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Wir addieren Zeile 3 zu den Zeilen 1 und 2, subtrahieren Zeile 3 von Zeile 4 und subtrahieren das $(a+2)$-fache der Zeile 3 von Zeile 5:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & a+3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Wir addieren Zeile 4 zu den Zeilen 1, 2 und 3 und subtrahieren das $(a+3)$-fache der Zeile 4 von Zeile 5:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a+4 \end{pmatrix}.$$

Ist $a = -4$, so hat diese Matrix eine Nullzeile, und es folgt, dass $\mathrm{Rg}(A) = 4$ ist. Ist $a \neq -4$, so können wir die letzte Zeile durch $a+4$ teilen, und die Treppennormalform zu A ist die Einheitsmatrix I_5. Fassen wir noch einmal zusammen: Für $a = 1$ gilt $\mathrm{Rg}(A) = 1$. Für $a = -4$ gilt $\mathrm{Rg}(A) = 4$. Für $a \neq 1$ und $a \neq -4$ gilt $\mathrm{Rg}(A) = 5$.