Inhalt Matrizen, Rang einer Matrix, lineare Gleichungssysteme, invertierbare Matrizen

Im Folgenden seien K ein Körper und $m, n, p, q \in \mathbb{N}$.

1 Matrizen

Definition a) Eine *Matrix* vom Typ (m, n) oder eine $m \times n$-*Matrix* über K ist ein rechteckiges Schema

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \text{ mit } a_{ij} \in K \text{ für } 1 \leq i \leq m,\ 1 \leq j \leq n.$$

Schreibweise: $A = (a_{ij})_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n} = (a_{ij})$.
Sei $\mathrm{Mat}_{m,n}(K)$ die Menge aller $m \times n$-Matrizen über K, $\mathrm{Mat}_n(K) := \mathrm{Mat}_{n,n}(K)$.
b) Zwei Matrizen $A = (a_{ij})$ vom Typ (m, n), $B = (b_{ij})$ vom Typ (p, q) heißen *gleich*, wenn $m = p$, $n = q$ und $a_{ij} = b_{ij}$ für alle $i = 1, \dots, m$, $j = 1, \dots, n$ gilt.

Spezielle Matrizen

$m \times n$-Nullmatrix $\mathbf{0}_{m,n} = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$, $n \times n$-Einheitsmatrix $\mathbf{1}_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Für p, q mit $1 \leq p \leq m$, $1 \leq q \leq n$ heißen die Matrizen

$$E_{pq} := E_{p,q} := \begin{array}{cl} \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \vdots & & \vdots \\ \vdots & & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} & \leftarrow p\text{-te Zeile} \\ \uparrow\ q\text{-te Spalte} & \end{array}$$

Matrizeneinheiten aus $\mathrm{Mat}_{m,n}(K)$.

Definition Für $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij}) \in \mathrm{Mat}_{m,n}(K)$ und $a \in K$ seien

$$A + B := (a_{ij} + b_{ij}) \in \mathrm{Mat}_{m,n}(K) \quad \text{und} \quad aA := (aa_{ij}) \in \mathrm{Mat}_{m,n}(K).$$

Satz 1 a) $\mathrm{Mat}_{m,n}(K)$ *ist mit diesen Verknüpfungen ein K-Vektorraum mit Null* $\mathbf{0}_{m,n}$.
b) *Die Matrizeneinheiten E_{pq}, $1 \leq p \leq m$, $1 \leq q \leq n$ bilden eine Basis von* $\mathrm{Mat}_{m,n}(K)$.
c) $\dim \mathrm{Mat}_{m,n}(K) = mn$.

Definition Für $A = (a_{ij}) \in \mathrm{Mat}_{m,n}(K)$, $B = (b_{ij}) \in \mathrm{Mat}_{n,p}(K)$ heißt

$$AB = (c_{ij}) \in \mathrm{Mat}_{m,p}(K) \quad \text{mit} \quad c_{ij} := \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj} \quad (1 \leq i \leq m,\ 1 \leq j \leq p)$$

Matrizenprodukt von A, B. (Das Produkt von A mit B ist also nur dann definiert, wenn die Spaltenzahl von A mit der Zeilenzahl von B übereinstimmt.)

Die (i,j)-Komponente von AB erhält man aus der i-ten Zeile von A und der j-ten Spalte von B:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \dots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1j} & \dots & b_{1p} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & \dots & b_{nj} & \dots & b_{np} \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{ccc} & \vdots & \\ \cdots & \boxed{a_{i1}b_{1j} + \ldots + a_{in}b_{nj}} & \cdots \\ & \vdots & \end{array} \right).$$

Spezialfall Für $A \in \mathrm{Mat}_{m,n}(K)$, $v \in K^n = \mathrm{Mat}_{n,1}(K)$ ist $Av \in \mathrm{Mat}_{m,1}(K) = K^m$.

Eigenschaften der Matrizenmultiplikation
a) *Assoziativgesetz* $(AB)C = A(BC)$ für $A \in \mathrm{Mat}_{m,n}(K), B \in \mathrm{Mat}_{n,p}(K), C \in \mathrm{Mat}_{p,q}(K)$.
b) *Distributivgesetze* $A(B+B') = AB + AB'$, $(A+A')B = AB + A'B$ für alle $A, A' \in \mathrm{Mat}_{m,n}(K)$, $B, B' \in \mathrm{Mat}_{n,p}(K)$.
c) $(aA)B = a(AB) = A(aB)$ für alle $A \in \mathrm{Mat}_{m,n}(K)$, $B \in \mathrm{Mat}_{n,p}(K)$, $a \in K$.
d) $A\mathbf{1}_n = A = \mathbf{1}_m A$ für alle $A \in \mathrm{Mat}_{m,n}(K)$.

Das Kommutativgesetz $AB = BA$ gilt für die Matrizenmultiplikation im Allgemeinen *nicht*. Es gibt Matrizen $A \neq \mathbf{0}$, $B \neq \mathbf{0}$ mit $AB = \mathbf{0}$.

2 Der Rang einer Matrix

Definition Sei $A \in \mathrm{Mat}_{m,n}(K)$. Für $j \in \{1,\ldots,n\}$ bezeichne $v_j \in K^m$ die j-te Spalte von A, für $i \in \{1,\ldots,m\}$ sei $u_i \in \mathrm{Mat}_{1,n}(K)$ die i-te Zeile von A. Wir setzen

$$\begin{aligned} \text{spaltenrang}\, A &:= \text{rang}\{v_1,\ldots,v_n\} &= \dim \mathrm{Lin}(v_1,\ldots,v_n), \\ \text{zeilenrang}\, A &:= \text{rang}\{u_1,\ldots,u_m\} &= \dim \mathrm{Lin}(u_1,\ldots,u_m). \end{aligned}$$

Satz 2 (Ranggleichung) spaltenrang A = zeilenrang A.

Definition rang A := spaltenrang A = zeilenrang A heißt *Rang* von $A \in \mathrm{Mat}_{m,n}(K)$.

Der Rang einer Matrix kann mit Hilfe *elementarer Umformungen* berechnet werden:

Elementare Zeilenumformungen einer Matrix

EZU1 Addition einer Zeile zu einer anderen Zeile: $Z_i \mapsto Z_i + Z_j$, $j \neq i$,

EZU2 Multiplikation einer Zeile mit einem $a \in K$, $a \neq 0$: $Z_i \mapsto aZ_i$, $a \neq 0$,

EZU3 Addition einer Linearkombination von r Zeilen zu einer von diesen verschiedenen Zeile,

EZU4 Vertauschung zweier Zeilen: $Z_i \leftrightarrow Z_j$.

Analog werden elementare Spaltenumformungen definiert.

Satz 3 *Der Rang einer Matrix ändert sich nicht bei elementaren (Zeilen- oder Spalten-) Umformungen.*

Satz 4 *Sei* $A \in \mathrm{Mat}_{m,n}(K)$. *Dann kann* A *durch iterierte Zeilenumformungen und Spalten*vertauschungen *in eine Matrix*

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & * & \cdots & * & * & \cdots & * \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & * & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & * & \cdots & * \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & & & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \left.\vphantom{\begin{matrix}1\\0\\\vdots\\0\end{matrix}}\right\} r \\ \vphantom{\begin{matrix}0\\\vdots\\0\end{matrix}} \end{array}$$

transformiert werden. Es ist dann rang A = rang $A' = r$.

Damit kann der Rang einer Matrix explizit berechnet werden:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 2 \\ -7 & 3 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[Z_1 \mapsto Z_1 - Z_2]{} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ -7 & 3 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{Z_2 \mapsto Z_2 - 3Z_1 \\ Z_3 \mapsto Z_3 + 7Z_1}]{}$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 0 & -8 & -7 \\ 0 & 24 & 21 \end{pmatrix} \xrightarrow[Z_3 \mapsto Z_3 + 3Z_2]{} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 0 & -8 & -7 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Jetzt liest man rang $A = 2$ ab.

3 Lineare Gleichungssysteme

Sei $G \ \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i \ (1 \leq i \leq m)$ ein lineares Gleichungssystem mit m Gleichungen in n Unbekannten $x_1, \ldots, x_n$ über K. Wir setzen

$$A := (a_{ij}) \in \mathrm{Mat}_{m,n}(K), \ x := \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad w := \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \in K^m.$$

Das lineare Gleichungssystem kann dann in der Form $Ax = w$ geschrieben werden.

Lösung von G mit dem Gaußschen Algorithmus

Sei $r = \text{rang}\, A$. Durch iterierte Zeilenumformungen und Spaltenvertauschungen kann A, w transformiert werden in A', w' mit

$$A' = (a'_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & * & \cdots & * & * & \cdots & * \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & * & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & * & \cdots & * \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & & & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \left.\vphantom{\begin{matrix}1\\0\\ \vdots \\0\end{matrix}}\right\} r \\ \\ \\ \\ \end{matrix} \quad \text{und} \quad w' = \begin{pmatrix} b'_1 \\ \vdots \\ b'_r \\ b'_{r+1} \\ \vdots \\ b'_m \end{pmatrix}.$$

Die vorkommenden Spaltenvertauschungen werden in gleicher Reihenfolge am Vektor x der Unbekannten vorgenommen:

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \longrightarrow x' = \begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix}.$$

Man erhält das Gleichungssystem $G' \ \ A'x' = w'$. Dann gilt:
a) $x \in K^n$ ist Lösung von $G \iff x'$ ist Lösung von G'.
b) G besitzt eine Lösung $\iff b'_{r+1} = \ldots = b'_m = 0$.
c) Es gelte $b'_{r+1} = \ldots = b'_m = 0$. Dann erhält man die Lösungen von G' folgendermaßen: Man kann $x'_{r+1}, \ldots, x'_n$ beliebig vorgeben und dann sukzessiv $x'_r, x'_{r-1}, \ldots, x'_1$ ausrechnen nach der Formel

$$x'_i = b'_i - \sum_{j=i+1}^{n} a'_{ij}x'_j \ \text{ für } i = r, r-1, \ldots, 1.$$

Anschließend macht man die Umnummerierung der Unbekannten rückgängig und erhält $x_1, \ldots, x_n$.

Beispiel Gesucht sind die Lösungen des reellen linearen Gleichungssystems

$$G \qquad \begin{array}{rcrcrcr} x_1 & - & x_2 & & & = & 1 \\ -2x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & = & -1 \\ -x_1 & + & x_2 & - & 2x_3 & = & -3. \end{array}$$

Koeffizientenmatrix	rechte Seite	Umformungen/ Umbenennungen
$\begin{matrix} 1 & -1 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & -2 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 1 \\ -1 \\ -3 \end{matrix}$	$Z_2 \mapsto Z_2 + 2Z_1$ $Z_3 \mapsto Z_3 + Z_1$
$\begin{matrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{matrix}$	$S_2 \leftrightarrow S_3$ $x_2' = x_3$ $x_3' = x_2$
$\begin{matrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{matrix}$	$Z_3 \mapsto Z_3 + 2Z_2$
$\begin{matrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 1 \\ 1 \\ \boxed{0} \end{matrix}$	

Es ist $r = 2$, das Gleichungssystem ist lösbar (wegen der eingerahmten 0), man kann $x_3' = x_2$ beliebig vorgeben und erhält $x_3 = x_2' = 1,\ x_1 = 1 + x_3' = 1 + x_2$. Also gilt

$$L(G) = \{ \begin{pmatrix} 1 + x_2 \\ x_2 \\ 1 \end{pmatrix} \mid x_2 \in \mathbb{R} \}.$$

4 Invertierbare Matrizen

Definition $P \in \mathrm{Mat}_n(K)$ heißt *invertierbar*, falls eine Matrix $P' \in \mathrm{Mat}_n(K)$ existiert mit $PP' = P'P = \mathbf{1}_n$.
Dann ist $P' \in \mathrm{Mat}_n(K)$ mit $PP' = P'P = \mathbf{1}_n$ eindeutig bestimmt, heißt die *inverse Matrix* von P und wird mit P^{-1} bezeichnet.

Beweis der Eindeutigkeit: Gilt $PP' = P'P = \mathbf{1}_n$ und auch $PP'' = P''P = \mathbf{1}_n$, so folgt $P' = \mathbf{1}_n P' = (P''P)P' = P''(PP') = P''\mathbf{1}_n = P''$.

Satz 5 (Äquivalenzsatz für Invertierbarkeit)
Für $P \in \mathrm{Mat}_n(K)$ sind folgende Aussagen äquivalent:
(i) *P invertierbar.*
(ii) $\mathrm{rang}\, P = n$.
(iii) *P kann allein durch iterierte elementare Zeilenumformungen in $\mathbf{1}_n$ überführt werden.*
(iv) *P kann allein durch iterierte elementare Spaltenumformungen in $\mathbf{1}_n$ überführt werden.*

Berechnung der Inversen einer invertierbaren Matrix
Ist $P \in \mathrm{Mat}_n(K)$ invertierbar, so kann die Inverse $P^{-1} \in \mathrm{Mat}_n(K)$ folgendermaßen berechnet werden: Man formt P mittels elementarer Zeilenumformungen zur Einheitsmatrix $\mathbf{1}_n$ um und wendet dieselben elementaren Zeilenumformungen auf die Einheitsmatrix $\mathbf{1}_n$ an. Die Matrix, die dabei aus $\mathbf{1}_n$ entsteht, ist die Inverse P^{-1}.
Statt mit elementaren Zeilenumformungen kann man auch mit elementaren Spaltenumformungen arbeiten, man darf die Umformungen aber *nicht* gemischt verwenden (also entweder nur Zeilenumformungen oder nur Spaltenumformungen).
Das Verfahren gestattet auch die Feststellung der Invertierbarkeit.