

# Brückenkurs Mathematik

Guido Walz / Frank Zeilfelder / Thomas Rießinger

# Brückenkurs Mathematik

für Studieneinsteiger aller Disziplinen

3. Auflage

## **Autoren**

Prof. Dr. Guido Walz

PD Dr. Frank Zeilfelder

Universität Mannheim, Institut für Mathematik, 68131 Mannheim

Prof. Dr. Thomas Rießinger

Fachhochschule Frankfurt a.M., Fachbereich 2, 60318 Frankfurt a.M.

## **Wichtiger Hinweis für den Benutzer**

Der Verlag und die Autoren haben alle Sorgfalt walten lassen, um vollständige und akkurate Informationen in diesem Buch zu publizieren. Der Verlag übernimmt weder Garantie noch die juristische Verantwortung oder irgendeine Haftung für die Nutzung dieser Informationen, für deren Wirtschaftlichkeit oder fehlerfreie Funktion für einen bestimmten Zweck. Der Verlag übernimmt keine Gewähr dafür, dass die beschriebenen Verfahren, Programme usw. frei von Schutzrechten Dritter sind. Die Wiedergabe von Gebrauchsnamen, Handelsnamen, Warenbezeichnungen usw. in diesem Buch berechtigt auch ohne besondere Kennzeichnung nicht zu der Annahme, dass solche Namen im Sinne der Warenzeichen- und Markenschutz-Gesetzgebung als frei zu betrachten wären und daher von jedermann benutzt werden dürften. Der Verlag hat sich bemüht, sämtliche Rechteinhaber von Abbildungen zu ermitteln. Sollte dem Verlag gegenüber dennoch der Nachweis der Rechtsinhaberschaft geführt werden, wird das branchenübliche Honorar gezahlt.

## **Bibliografische Information der Deutschen Nationalbibliothek**

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über <http://dnb.d-nb.de> abrufbar.

Springer ist ein Unternehmen von Springer Science+Business Media  
[springer.de](http://springer.de)

3. Auflage 2011

© Spektrum Akademischer Verlag Heidelberg 2011

Spektrum Akademischer Verlag ist ein Imprint von Springer

11 12 13 14 15      5 4 3 2 1

Das Werk einschließlich aller seiner Teile ist urheberrechtlich geschützt. Jede Verwertung außerhalb der engen Grenzen des Urheberrechtsgesetzes ist ohne Zustimmung des Verlages unzulässig und strafbar. Das gilt insbesondere für Vervielfältigungen, Übersetzungen, Mikroverfilmungen und die Einspeicherung und Verarbeitung in elektronischen Systemen.

Planung und Lektorat: Dr. Andreas Rüdinger, Anja Groth

Redaktion: Heidemarie Wolter

Satz: EDV-Beratung Frank Herweg, Leutershausen

Umschlaggestaltung: SpieszDesign, Neu-Ulm

Titelfotografie: © age; Mauritius

ISBN 978-3-8274-2763-2

# Inhaltsverzeichnis

<b>Einleitung und Vorwort</b> .....	VII
<b>1 Elementare Rechenmethoden</b> .....	1
1.1 Grundrechenarten .....	1
1.2 Bruchrechnung und rationale Zahlen .....	5
1.3 Klammerrechnung .....	13
1.4 Potenzen und Wurzeln .....	14
1.5 Spezielle Ausdrücke und Notationen .....	21
<b>2 Grundlegendes über Funktionen</b> .....	33
2.1 Definitionsbereich, Wertevorrat und Bildmenge .....	34
2.2 Verkettung von Funktionen; Monotonie und Umkehrbarkeit .....	38
2.3 Potenz- und Wurzelfunktionen .....	49
2.4 Polynome und rationale Funktionen .....	54
2.5 Exponential- und Logarithmusfunktionen .....	66
<b>3 Gleichungen und Ungleichungen</b> .....	77
3.1 Lineare Gleichungen .....	79
3.2 Quadratische Gleichungen .....	83
3.3 Polynomgleichungen höherer Ordnung .....	91
3.4 Wurzel- und Exponentialgleichungen .....	98
3.5 Ungleichungen .....	108
<b>4 Geometrie</b> .....	115
4.1 Dreiecke und trigonometrische Funktionen .....	115
4.2 Ebene geometrische Figuren .....	142
<b>5 Einführung in die Lineare Algebra</b> .....	159
5.1 Vektoren .....	160
5.2 Matrizen .....	175
5.3 Lineare Gleichungssysteme .....	194
5.4 Analytische Geometrie .....	215
<b>6 Differenzial- und Integralrechnung</b> .....	229
6.1 Erste Ableitung von Funktionen und Ableitungsregeln .....	229
6.2 Anwendungen von Ableitungen und Kurvendiskussion .....	254

6.3	Integration von Funktionen .....	280
<b>7</b>	<b>Grundlagen der Wahrscheinlichkeitsrechnung .....</b>	<b>303</b>
7.1	Kombinatorik .....	304
7.2	Relative Häufigkeit und klassische Definition der Wahrscheinlichkeit .	313
7.3	Axiomatische Definition der Wahrscheinlichkeit .....	320
7.4	Bedingte Wahrscheinlichkeiten .....	325
<b>8</b>	<b>Komplexe Zahlen .....</b>	<b>329</b>
8.1	Die imaginäre Einheit $i$ und die Menge der komplexen Zahlen .....	329
8.2	Grundrechenarten für komplexe Zahlen .....	331
8.3	Die Gauß'sche Zahlenebene und die trigonometrische Form komplexer Zahlen .....	334
8.4	Potenzen und Wurzeln komplexer Zahlen .....	339
8.5	Vollständige Lösung quadratischer und biquadratischer Gleichungen .	345
	<b>Lösungen der Übungsaufgaben.....</b>	<b>349</b>
	<b>Literatur .....</b>	<b>369</b>
	<b>Stichwortverzeichnis .....</b>	<b>371</b>

*Die Mathematik als Fachgebiet ist so ernst, dass man keine Gelegenheit versäumen sollte, dieses Fachgebiet unterhaltsamer zu gestalten.*

Blaise Pascal

## Einleitung und Vorwort

Auch heute noch soll es ab und zu vorkommen, dass jemand in einer stillen Stunde ein Buch in die Hand nimmt, um darin zu schmökern; das wird allerdings in den seltensten Fällen ein Mathematik-Buch sein, aber das liegt nicht so sehr an der Mathematik selbst, sondern an der Art und Weise, wie sie in vielen Büchern dargestellt wird. Wenn Ihnen hierbei Begriffe wie ‚trocken‘, ‚spröde‘ oder ‚unverständlich‘ einfallen, sind wir schon auf einem guten Wege zu einer gemeinsamen Einschätzung.

Die Mathematik hat in der Gesellschaft leider einen hohen Igitt!-Faktor, und das liegt nicht selten an traumatischen Schulerlebnissen und schlechten Lehrbüchern für Schüler. Mit einem solchen schulischen Werdegang hat man aber meist Angst vor den mathematischen Teilen des Studiums, und ganz im Sinne einer selbst erfüllenden Prophezeiung bekommt man dann da auch wirklich Probleme.

Mit diesem Buch versuchen wir, Ihnen diese Einstiegsprobleme zu ersparen, indem wir Ihnen auf unterhaltsame Weise eine Brücke bauen, die Sie sanft über alle Untiefen hinweg ins Innere der Hochschulmathematik hineingeleitet. Diese Brücke beginnt auf der einen Seite beim einfachen Zahlenrechnen, wie es Ihnen vermutlich in der Mittelstufe schon begegnet ist, und führt Sie hinüber bis zu den Grundlagen von Linearer Algebra, Differenzialrechnung und Wahrscheinlichkeitsrechnung, die die Hauptinhalte Ihrer ersten Semester darstellen werden. Diesen Inhalten werden Sie dort immer gegenüberstehen, und bei deren Behandlung können Sie dann beruhigt sagen: „Kenn’ ich schon!“

Das Buch wendet sich an Studierende aller Fachrichtungen, die im Laufe des Studiums oder auch Berufslebens mit Mathematik in Berührung kommen. Eines unserer Hauptanliegen ist es, zu beweisen, dass es möglich ist, ein Mathematik-Buch zu schreiben, das man von vorne bis hinten einfach lesen kann, ohne im Formalismus oder in humorloser Trockenheit verloren zu gehen, das einem nach dem Lesen aber dennoch das nötige Wissen und die fachliche Sicherheit für einen erfolgreichen Mathematikteil des Studiums vermittelt hat.

Eine große Zahl von Übungsaufgaben, deren Lösungen Sie am Ende des Buches finden, hilft bei der weiteren Vertiefung des Gelesenen. Ganz bewusst haben wir auf Beweise größtenteils verzichtet – damit werden Sie sich im Verlauf Ihres Studiums noch genügend oft herumschlagen müssen –, vielmehr wollen wir Ihnen ganz einfach Lust auf Mathematik machen, auch wenn Ihnen das momentan noch als Gegensatz erscheinen mag.

Ein großes Ärgernis ist in unseren Augen der ‚Krankenschwestern-Plural‘, den viele Lehrbuchautoren an den Tag legen („Wie geht’s uns denn heute?“, „Morgen wird uns also die Leber herausoperiert!“, „Jetzt integrieren wir mal eine Funktion!“). Schrecklich! (Dies bezieht sich wohlgernekt nur auf diese Formulierungsunart, *nicht* auf den Berufsstand der Krankenschwestern und -pfleger, eine Gruppe, deren Vertreter jeder für sich vermutlich mehr für die Menschheit leistet als alle Mathematikprofessoren der Welt zusammen.) Wir haben uns, um diese Unsitte zu vermeiden, dafür entschieden, Sie in jedem Kapitel ganz persönlich im Ich-Stil anzureden – jeder von uns hat diejenigen Kapitel verfasst, deren Inhalte er kompetent und (hoffentlich) instruktiv vermitteln kann, und dieses soll auch durch den Schreibstil ausgedrückt werden.

Und nun (und das meinen wir ernst!): Viel Spaß beim Studium der folgenden Seiten!

Sommer 2005

Guido Walz  
Frank Zeilfelder  
Thomas Rießinger

## Vorwort zur zweiten Auflage

Die erfreulich gute Akzeptanz unseres Buches machte bereits jetzt eine zweite Auflage erforderlich. Wir haben die Gelegenheit genutzt, um einige kleinere Fehler im Text, auf die wir von aufmerksamen Leserinnen und Lesern hingewiesen wurden, zu beseitigen.

Außerdem haben wir ein neues Kapitel über die Grundlagen komplexer Zahlen aufgenommen. Wir hoffen, dass Ihnen dieses ebenso viel Spaß macht wie der restliche Text.

Frühjahr 2007

Guido Walz  
Frank Zeilfelder  
Thomas Rießinger

## Vorwort zur dritten Auflage

Trotz aller Bemühungen um Fehlerfreiheit – ein Zustand, den wohl kein Buch der Welt jemals erreichen wird – fanden sich in der zweiten Auflage immer noch ein paar Druckfehler, die wir nun korrigiert haben.

Diese dritte Auflage enthält als Neuerung eine Formelsammlung zum Herausnehmen, in der Sie die wichtigsten Formeln des Buchs in komprimierter Form finden und die Sie für jede Gelegenheit bei sich tragen können.

Frühjahr 2011

Guido Walz  
Frank Zeilfelder  
Thomas Rießinger