Mathematische Grundlagen(1141) SoSe 2012

Kurseinheit 1:

Lösungsvorschläge zu den Einsendeaufgaben

Aufgabe 1.1

(1) Falsch. Sei X die Menge der geraden ganzen Zahlen, und sei Y die Menge der ganzen Zahlen. Dann ist X eine echte Teilmenge von Y.

Sei $f : X \to Y$ definiert durch $f(x) = \frac{x}{2}$, für alle $x \in X$. Sei $g : Y \to X$ definiert durch $g(y) = 2y$, für alle $y \in Y$.

Dann gilt für alle $x \in X$:

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(\frac{x}{2}) = x,$$

es ist also $g \circ f = \mathrm{id}_X$.

Für alle $y \in Y$ gilt:

$$(f \circ g)(y) = f(g(y)) = f(2y) = y.$$

Somit gilt auch $f \circ g = \mathrm{id}_Y$. Es folgt, dass f invertierbar und somit bijektiv ist.

(2) Falsch. Sei $X = \{1, 2, 3\}$, und sei $Y = \{1, 2\}$. Dann gilt $|X| > |Y|$. Sei $f : X \to Y$ definiert durch $f(1) = f(2) = f(3) = 1$. Dann ist f nicht surjektiv, denn $2 \in Y$ hat kein Urbild unter f.

(3) Falsch. Wenn X nur ein Element x enthält, dann enhält $X \times X$ ebenfalls nur ein Element, nämlich (x, x). Wir können dann eine bijektive Abbildung $f : X \to X \times X$ definieren, indem wir $f(x) = (x, x)$ setzen.

(4) Wahr, denn es gilt $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$.

(5) Wahr. Sei $y \in \mathrm{Bild}(g \circ f)$. Dann gibt es ein $x \in X$ mit $y = (g \circ f)(x) = g(f(x))$. Somit gibt es ein $z \in X$, nämlich $z = f(x)$, mit $y = g(z)$. Es folgt also, dass $y \in \mathrm{Bild}(g)$ ist.

(6) Falsch. Es ist

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x^3) = (x^3)^2 = x^6 \neq x^5$$

für alle $x\mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$.

(7) Wahr. Es ist $f \circ g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, und es gilt

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x + 1) = x + 1 - 1 = x$$

für alle $x \in \mathbb{N}$.

(8) Wahr. Wenn $|X \times Y| = p$, so sind X und Y endliche Mengen. Es gilt $|X \times Y| = |X| \cdot |Y| = p$. Da p eine Primzahl ist, gilt $|X| = 1$ oder $|Y| = 1$, und es folgt die Behauptung.

(9) Wahr. Für alle x gilt:

$$\begin{aligned} x \in X &\implies x \in X \cup Y \text{ nach Definition der Vereinigung} \\ &\implies x \in X \cap Y \text{ wegen } X \cup Y = Y \cap X \\ &\implies x \in Y \text{ nach Definition des Durchschnitts.} \end{aligned}$$

Analog gilt:

$$x \in Y \implies x \in X \cup Y \implies x \in X \cap Y \implies x \in X.$$

Unter der Voraussetzung $X \cup Y = X \cap Y$ gilt also $X \subseteq Y$ und $Y \subseteq X$, und damit $X = Y$.

(10) Falsch. Sei $L = M = N = \{1\}$. Dann ist

$$L \times (M \times N) = \{(1, (1, 1))\}$$

und

$$(L \times M) \times N = \{((1, 1), 1)\}.$$

Gleichheit dieser Mengen hätte Gleichheit der Paare $(1, (1, 1))$ und $((1, 1), 1)$ und damit Gleichheit von 1 und $(1, 1)$ zur Folge. [Zwei Paare (a, b) und (c, d) sind genau dann gleich, wenn $a = c$ und $b = d$ ist.] Die Zahl 1 stimmt aber nicht mit dem Paar $(1, 1)$ überein.

Aufgabe 1.2

In den drei linken Spalten stehen die möglichen wahr-falsch Kombinationen der Aussagen $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ und $\mathcal{C}$. Rechts des zweiten Doppelstriches finden Sie die Wahrheitswerte der zu untersuchenden Aussage.

1. Die Wahrheitstafel für $(\mathcal{A} \wedge \mathcal{B}) \Rightarrow \mathcal{C}$ ist:

$\mathcal{A}$	$\mathcal{B}$	$\mathcal{C}$	$\mathcal{A} \wedge \mathcal{B}$	$(\mathcal{A} \wedge \mathcal{B}) \Rightarrow \mathcal{C}$
w	w	w	w	w
w	w	f	w	f
w	f	w	f	w
f	w	w	f	w
w	f	f	f	w
f	w	f	f	w
f	f	w	f	w
f	f	f	f	w

Die Wahrheitstafel für $(\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{C}) \vee (\mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{C})$ ist:

$\mathcal{A}$	$\mathcal{B}$	$\mathcal{C}$	$\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{C}$	$\mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{C}$	$(\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{C}) \vee (\mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{C})$
w	w	w	w	w	w
w	w	f	f	f	f
w	f	w	w	w	w
f	w	w	w	w	w
w	f	f	f	w	w
f	w	f	w	f	w
f	f	w	w	w	w
f	f	f	w	w	w

Wenn wir die mittleren Spalten zwischen den Doppelstrichen als Nebenrechnungen interpretieren (was sie ja auch sind), so sind die verbleibenden Spalten der Wahrheitstafeln gleich. Die Aussagen sind somit logisch äquivalent.

2. Die Wahrheitstafel für $(\mathcal{A} \vee \mathcal{B}) \Rightarrow \mathcal{C}$ ist:

$\mathcal{A}$	$\mathcal{B}$	$\mathcal{C}$	$\mathcal{A} \vee \mathcal{B}$	$(\mathcal{A} \vee \mathcal{B}) \Rightarrow \mathcal{C}$
w	w	w	w	w
w	w	f	w	f
w	f	w	w	w
f	w	w	w	w
w	f	f	w	f
f	w	f	w	f
f	f	w	f	w
f	f	f	f	w

Die Wahrheitstafel für $(\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{C}) \wedge (\mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{C})$ ist:

$\mathcal{A}$	$\mathcal{B}$	$\mathcal{C}$	$\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{C}$	$\mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{C}$	$(\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{C}) \wedge (\mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{C})$
w	w	w	w	w	w
w	w	f	f	f	f
w	f	w	w	w	w
f	w	w	w	w	w
w	f	f	f	w	f
f	w	f	w	f	f
f	f	w	w	w	w
f	f	f	w	w	w

Wieder interpretieren wir die mittleren Spalten zwischen den Doppelstrichen als Nebenrechnungen. Die verbleibenden Spalten der Wahrheitstafeln sind gleich, und es folgt, dass die Aussagen logisch äquivalent sind.

Aufgabe 1.3

1. Für den Induktionsanfang sei $n = 1$. Es sind $\frac{1}{1 \cdot 3} = \frac{1}{3}$ und $\frac{1}{2 \cdot 1 + 1} = \frac{1}{3}$. Es gilt somit der Induktionsanfang.

   In der Induktionsannahme nehmen wir an, es sei $n \geq 1$ und es gelte $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(2k-1)(2k+1)} = \frac{n}{2n+1}$. Dann folgt

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{(2k-1)(2k+1)} &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(2k-1)(2k+1)} + \frac{1}{(2(n+1)-1)(2(n+1)+1)} \\
&= \frac{n}{2n+1} + \frac{1}{(2n+1)(2n+3)} = \frac{n(2n+3)+1}{(2n+1)(2n+3)} \\
&= \frac{2n^2+3n+1}{(2n+1)(2n+3)} = \frac{(2n+1)(n+1)}{(2n+1)(2n+3)} = \frac{n+1}{2(n+1)+1}.
\end{aligned}$$

   Mit dem Prinzip der vollständigen Induktion folgt, dass die Formel für alle $n \in \mathbb{N}$ richtig ist.

2. Für $n = 1$ gilt $\sum_{k=1}^{1} 2 \cdot 3^{k-1} = 2 \cdot 3^0 = 2$ und $3^1 - 1 = 2$. Es gilt somit der Induktionsanfang.

   Im Induktionsschritt nehmen wir an, dass $\sum_{k=1}^{n} 2 \cdot 3^{k-1} = 3^n - 1$ für ein $n \geq 1$ gilt. Dann folgt
   $$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n+1} 2 \cdot 3^{k-1} &= \sum_{k=1}^{n} 2 \cdot 3^{k-1} + 2 \cdot 3^n \\ &= 3^n - 1 + 2 \cdot 3^n \\ &= 3^n(1+2) - 1 \\ &= 3^{n+1} - 1. \end{aligned}$$
   Mit dem Prinzip der vollständigen Induktion folgt die Behauptung.

Aufgabe 1.4

Behauptung: Die Menge M der Matrizen $A \in \mathrm{M}_{22}(\mathbb{R})$ mit $A \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} A$ ist
$$M = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R} \right\}.$$

Beweis: Sei $A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} \in M$. Dann gilt $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & a+b \\ 0 & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$. Die Matrizen in M haben also die geforderte Eigenschaft.

Sei umgekehrt $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{22}(\mathbb{R})$ eine Matrix, für die $A \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} A$ gilt. Dann folgt
$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & a+b \\ c & c+d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+c & b+d \\ c & a \end{pmatrix}.$$

Es gilt also $\begin{pmatrix} a & a+b \\ c & c+d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+c & b+d \\ c & a \end{pmatrix}$. Es folgt $a = a+c$, also $c = 0$, und $c+d = a$, also $a = d$. Somit gilt $A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$, also $A \in M$.

Aufgabe 1.5

1. Die Abbildung f ist nicht injektiv, denn $f(1) = f(-1) = 1$. Sie ist auch nicht surjektiv, denn alle negativen ganzen Zahlen haben keine Urbilder unter f.
2. Es sind $f(-3) = 3 = f(3), f(-2) = 2 = f(2), f(-1) = 1 = f(1)$ und $f(0) = 0$. Es folgt $f(U) = \{0, 1, 2, 3\}$. Weiter ist $\{-3, 3\}$ die Menge der Urbilder von 3, $\{-2, 2\}$ ist die Menge der Urbilder von 2, $\{-1, 1\}$ ist die Menge der Urbilder von 1, und 0 ist das Urbild von 0. Die gesuchte Menge ist damit $\{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$, die Ausgangsmenge U.

3. Das Urbild von 0 ist 0, die Urbilder von 10 sind $-10, 10$, die Urbilder von 15 sind $-15, 15$. Die Elemente -5 und -10 haben keine Urbilder. Somit ist $W = \{-15, -10, 0, 10, 15\}$. Es sind $f(-15) = 15 = f(15), f(-10) = 10 = f(10)$ und $f(0) = 0$. Es folgt $f(W) = \{0, 10, 15\}$.

Aufgabe 1.6

Sei $A \in \mathrm{M}_{nn}(\mathbb{K})$ eine Matrix, sodass $AB = BA$ für alle $B \in \mathrm{M}_{nn}(\mathbb{K})$ gilt. Dann gilt insbesondere $E_{ii}A = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{ii} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & a_{1i} & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & a_{ii} & \vdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & a_{ni} & \cdots & 0 \end{pmatrix} = AE_{ii}$

für jedes i mit $1 \leq i \leq n$. Es folgt $a_{ij} = 0$ für alle $1 \leq i, j \leq n$ und $i \neq j$. Somit sind alle Elemente, die nicht auf der Diagonalen von A stehen, Null.

Weiter ist für alle $1 \leq i \leq n$

$E_{1i}A = \begin{pmatrix} a_{i1} & \cdots & a_{ii} & \cdots & a_{in} \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & a_{11} & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & a_{1n} & \cdots & 0 \end{pmatrix} = AE_{1i}$, das heißt, die i-te Spalte von AE_{1i} ist die erste Spalte von A.

Es folgt $a_{ii} = a_{11}$ für alle $1 \leq i \leq n$. Somit sind alle Diagonalelemente von A gleich. Es folgt $A = aI_n$ für ein $a \in \mathbb{K}$, die Behauptung.