M. Schulte: Aussagenlogik, Mengen und Abbildungen, vollständige Induktion, komplexe Zahlen

Inhalt Aussagenlogik, Mengen, Abbildungen, Körper, vollständige Induktion, komplexe Zahlen

1 Aussagenlogik

Eine *Aussage* ist ein vollständiger Satz, der prinzipiell wahr oder falsch ist (ohne dass das praktisch feststellbar sein muss). Jede Aussage hat also einen Wahrheitswert, W (wahr) oder F (falsch).

Negation, Konjunktion, Disjunktion

Aus gegebenen Aussagen $P, Q, \ldots$ kann man neue bilden.
Die *Negation* von P, nicht P (geschrieben $\neg P$), ist genau dann wahr, wenn P falsch ist.
Die *Konjunktion* von P, Q, P und Q $(P \wedge Q)$, ist genau dann wahr, wenn P und Q wahr sind.
Die *Disjunktion* von P, Q, P oder Q $(P \vee Q)$, ist genau dann wahr, wenn P wahr oder Q wahr ist. Dabei wird „oder" im nichtausschließenden Sinn verwendet: $P \vee Q$ ist also auch dann wahr, wenn P, Q beide wahr sind.

Implikation, Äquivalenz

Die *Implikation* „Wenn P, dann Q" $(P \Rightarrow Q)$ ist falsch, wenn P wahr und Q falsch ist, sonst immer wahr. Bei falschem P ist also $P \Rightarrow Q$ stets wahr.
Die *Äquivalenz* $P \Leftrightarrow Q$ ist genau dann wahr, wenn P, Q denselben Wahrheitswert haben.
Diese Vereinbarungen lassen sich in Wahrheitstafeln festhalten:

P	$\neg P$
W	F
F	W

P	Q	$P \wedge Q$
W	W	W
W	F	F
F	W	F
F	F	F

P	Q	$P \vee Q$
W	W	W
W	F	W
F	W	W
F	F	F

P	Q	$P \Rightarrow Q$
W	W	W
W	F	F
F	W	W
F	F	W

P	Q	$P \Leftrightarrow Q$
W	W	W
W	F	F
F	W	F
F	F	W

Äquivalente Aussageformen

Entsteht R aus $P_1, \ldots, P_n$ durch Anwendungen von $\neg, \wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow$, so heißt R eine *Aussageform*. Zwei Aussageformen R, S (die beide aus $P_1, \ldots, P_n$ entstanden sind) heißen *äquivalent* $(R \sim S)$, falls jede Kombination von Wahrheitswerten für $P_1, \ldots, P_n$ zum selben Wahrheitswert für R und S führt.

Beispiele $\neg(P \wedge Q) \sim (\neg P) \vee (\neg Q)$, $\neg(P \vee Q) \sim (\neg P) \wedge (\neg Q)$, $(P \Rightarrow Q) \sim (\neg P) \vee Q$.

Eine Aussageform, die immer wahr ist, heißt *Tautologie*, eine, die immer falsch ist, *Antinomie*. Zum Beispiel ist $P \vee (\neg P)$ eine Tautologie, $P \wedge (\neg P)$ eine Antinomie.

All- und Existenzaussagen

Für jedes x aus einem Universum (oder Grundbereich) U sei $P(x)$ eine Aussage.
Die *Allaussage* „Für alle x gilt $P(x)$" $(\forall x\ P(x))$ ist genau dann wahr, wenn für jedes a aus U die Aussage $P(a)$ wahr ist.
Die *Existenzaussage* „Es gibt ein x mit $P(x)$" $(\exists x\ P(x))$ ist genau dann wahr, wenn für mindestens ein a aus U die Aussage $P(a)$ wahr ist.

Entstehen R, S aus $P_1(x), \ldots, P_n(x)$ durch Anwendungen von $\neg, \wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow, \forall, \exists$, so heißen R, S *äquivalent*, falls für jede Wahl von $P_1(x), \ldots, P_n(x)$ die Aussagen R, S denselben Wahrheitswert haben.

Beispiele $\neg\big(\forall x\ P(x)\big) \sim \exists x\ \big(\neg P(x)\big)$, $\neg\big(\exists x\ P(x)\big) \sim \forall x\ \big(\neg P(x)\big)$.

2 Mengen

Eine *Menge* ist eine Zusammenfassung von Objekten zu einem Ganzen.
Gehört x zu einer Menge M, sagt man „x ist *Element* von M“ (geschrieben $x \in M$).
Gehört x nicht zu M, schreibt man $x \notin M$.

Zwei Mengen M, N heißen *gleich* ($M = N$), wenn sie dieselben Elemente enthalten, d. h. für alle x gilt: $x \in M \iff x \in N$.

Bezeichnungen
Ist $P(x)$ für alle x eines Universums U eine Aussage, so bezeichnet $M = \{x \in U \mid P(x)\}$ die Menge aller $x \in U$, für die $P(x)$ wahr ist.
Besteht M genau aus den Elementen $a_1, \dots, a_n$, schreibt man $M = \{a_1, \dots, a_n\}$.
Die Menge, die *kein* Element enthält, heißt *leere Menge*, bezeichnet mit $\emptyset$.

Definition Seien M, N Mengen. M heißt *Teilmenge* von N (geschrieben $M \subset N$), falls jedes Element von M auch Element von N ist, d. h. $\forall x\ (x \in M \Rightarrow x \in N)$.
Es gilt: $M = N \iff M \subset N$ und $N \subset M$.

Durchschnitt und Vereinigung von Mengen
$M \cap N := \{x \mid x \in M \text{ und } x \in N\}$ heißt *Durchschnitt* der Mengen M, N.
$M \cup N := \{x \mid x \in M \text{ oder } x \in N\}$ heißt *Vereinigung* von M, N.

3 Abbildungen

Eine *Abbildung* $f : M \to N$ ist gegeben durch eine Menge M (den *Definitionsbereich* von f), eine Menge N (den *Wertebereich* von f) und eine Zuordnungsvorschrift, die jedem $x \in M$ genau ein $y \in N$ zuordnet; man schreibt $f(x) = y$ oder $x \mapsto f(x) = y$.
Zwei Abbildungen $f : M \to N,\ g : P \to Q$ heißen *gleich*, wenn $M = P,\ N = Q$ und $f(x) = g(x)$ für alle $x \in M$ gilt.

Beispiele
a) Sei $\mathbb{R}_+ := \{x \mid x \in \mathbb{R},\ x \geq 0\}$. Durch $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R},\ f(x) :=$ ein $y \in \mathbb{R}$ mit $y^2 = x$, wird *keine* Abbildung definiert, weil die Zuordnungsvorschrift nicht eindeutig ist, da etwa für $x = 1$ sowohl $1^2 = 1$ als auch $(-1)^2 = 1$ gilt.
b) Durch $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R},\ f(x) :=$ dasjenige $y \in \mathbb{R}$ mit $y \geq 0$ und $y^2 = x$ für $x \in \mathbb{R}_+$, wird eine Abbildung definiert, denn zu jedem $x \in \mathbb{R}_+$ gibt es genau ein $y \in \mathbb{R}$ mit $y \geq 0$ und $y^2 = x$.

Komposition von Abbildungen
Für Abbildungen $f : M \to N,\ g : N \to P$ sei $g \circ f : M \to P,\ x \mapsto (g \circ f)(x) := g\big(f(x)\big)$.

Injektive, surjektive, bijektive Abbildungen
Eine Abbildung $f : M \to N$ heißt *injektiv*, falls für alle $x, x' \in M$ aus $x \neq x'$ notwendig $f(x) \neq f(x')$ folgt. Äquivalent dazu ist: Für alle $x, x' \in M$ folgt aus $f(x) = f(x')$ notwendig $x = x'$.
Eine Abbildung $f : M \to N$ heißt *surjektiv*, falls zu jedem $y \in N$ ein $x \in M$ mit $f(x) = y$ existiert.
Eine Abbildung $f : M \to N$ heißt *bijektiv*, falls f injektiv und surjektiv ist.
Äquivalent dazu ist: Zu jedem $y \in N$ gibt es *genau* ein $x \in M$ mit $f(x) = y$.
Ist $f : M \to N$ bijektiv, so heißt die Abbildung

$$f^{-1} : N \to M,\ f^{-1}(y) := \text{dasjenige } x \in M \text{ mit } f(x) = y$$

die *Umkehrabbildung* von f.

Beispiele
a) $f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto x^2$ ist nicht injektiv (da z. B. $(-1)^2 = 1^2$ gilt) und nicht surjektiv (da z. B. kein $x \in \mathbb{R}$ mit $x^2 = -1$ existiert).
b) $f_2 : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R},\ x \mapsto x^2$ ist injektiv (denn aus $x_1^2 = x_2^2$ mit $x_1, x_2 \geq 0$ folgt $x_1 = x_2$), aber nicht surjektiv (da kein $x \in \mathbb{R}_+$ mit $x^2 = -1$ existiert).
c) $f_3 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+,\ x \mapsto x^2$ ist nicht injektiv (wegen $(-1)^2 = 1^2$), aber surjektiv, denn zu jedem $y \in \mathbb{R}_+$ gibt es ein $x \in \mathbb{R}$ mit $x^2 = y$.
d) $f_4 : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+,\ x \mapsto x^2$ ist injektiv und surjektiv, also bijektiv.

4 Körper

Eine Menge K mit zwei Abbildungen $+ : K \times K \to K,\ (a,b) \mapsto a + b$ (Addition) und $\cdot : K \times K \to K,\ (a,b) \mapsto ab$ (Multiplikation) heißt ein *Körper*, falls gilt:

K0 K hat mindestens zwei Elemente,
K1 $(a+b)+c = a+(b+c)$ und $a+b = b+a$ für alle $a,b,c \in K$,
K2 $(ab)c = a(bc)$ und $ab = ba$ für alle $a,b,c \in K$,
K3 $a(b+c) = ab + ac$ für alle $a,b,c \in K$,
K4 Es gibt Elemente $0, 1 \in K$ mit $a + 0 = a,\ a1 = a$ für alle $a \in K$, zu jedem $a \in K$ existiert ein $a' \in K$ mit $a + a' = 0$, zu jedem $a \in K,\ a \neq 0$ existiert ein $a^* \in K$ mit $aa^* = 1$.

Bemerkungen Die Elemente 0 und 1 sind durch die obigen Bedingungen eindeutig bestimmt. Für jedes $a \in K$ ist a' mit $a + a' = 0$ eindeutig bestimmt, ebenso a^* für $a \neq 0$. Bezeichnungen: $-a := a'$ heißt das *Negative* von a, für $a \neq 0$ heißt $\frac{1}{a} = a^{-1} := a^*$ das *Reziproke* von a.

Beispiele $\mathbb{Q}$ und $\mathbb{R}$ mit der gewöhnlichen Addition und Multiplikation sind Körper. Auch $\mathbb{F}_2 = \{0, 1\}$ mit 0 als Nullelement, 1 als Einselement und $1 + 1 = 0$ ist ein Körper.

Rechenregeln Sei K ein Körper. Für $a_1, \ldots, a_m \in K$ sind $a_1 + \ldots + a_m$ und $a_1 \cdot \ldots \cdot a_m$ unabhängig von der Beklammerung und der Reihenfolge. Man setzt

$$\sum_{i=1}^{m} a_i := a_1 + \ldots + a_m \quad \text{und} \quad \prod_{i=1}^{m} a_i := a_1 \cdot \ldots \cdot a_m.$$

5 Vollständige Induktion

Prinzip der vollständigen Induktion

Sei P eine für natürliche Zahlen sinnvolle Eigenschaft. P genüge folgenden Bedingungen:
Induktionsanfang $n = 1$: *1 hat die Eigenschaft P.*
Induktionsschritt $n \to n+1$: *Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt: Hat n die Eigenschaft P, so hat auch $n + 1$ die Eigenschaft P.*
Dann hat jede natürliche Zahl die Eigenschaft P.

Varianten des Induktionsprinzips: Induktionsanfang $n = 0$, Induktionsschritt $n \to n+1$ für alle $n \in \mathbb{N}^0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$, die Behauptung gilt dann für alle $n \in \mathbb{N}^0$; oder
Induktionsanfang bei $n = 1$, Induktionsschritt $n - 1 \to n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n > 1$; oder
Induktionsanfang bei n_0, Induktionsschritt $n \to n+1$ für alle $n \geq n_0$, die Behauptung gilt dann für alle $n \geq n_0$.

Beispiele a) Sei K ein Körper, es sei $q \in K,\ q \neq 1$.
Behauptung: Für alle $n \in \mathbb{N}^0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$ gilt $\displaystyle\sum_{i=0}^{n} q^i = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$.

Beweis durch vollständige Induktion: Induktionsanfang $n=0$: $\sum_{i=0}^{0} q^i = q^0 = 1 = \frac{1-q}{1-q}$.
Induktionsschritt $n \to n+1$: Sei $n \in \mathbb{N}^0$ beliebig. Es gelte die Behauptung für n, also $\sum_{i=0}^{n} q^i = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$ *(Induktionsvoraussetzung)*. Mit der Induktionsvoraussetzung folgt

$$\sum_{i=0}^{n+1} q^i = \sum_{i=0}^{n} q^i + q^{n+1} = \frac{1-q^{n+1}}{1-q} + q^{n+1} = \frac{1-q^{n+1}+(1-q)q^{n+1}}{1-q} = \frac{1-q^{n+2}}{1-q}.$$

Nach dem Induktionsprinzip gilt dann die Behauptung für alle $n \in \mathbb{N}^0$.

b) Sei $K=\mathbb{Q}$ oder $K=\mathbb{R}$. *Behauptung:* Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i(i+1)} = \frac{n}{n+1}$.

Beweis durch vollständige Induktion: $n=1$: $\sum_{i=1}^{1} \frac{1}{i(i+1)} = \frac{1}{2} = \frac{1}{1+1}$.

$n-1 \to n$ für $n>1$: Mit der Induktionsvoraussetzung $\sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{i(i+1)} = \frac{n-1}{n}$ folgt

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i(i+1)} &= \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{i(i+1)} + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n-1}{n} + \frac{1}{n(n+1)} \quad \text{(nach Induktionsvorauss.)}\\ &= \frac{(n-1)(n+1)+1}{n(n+1)} = \frac{n^2}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}.\end{aligned}$$

6 Komplexe Zahlen

Satz *Die Menge* $\mathbb{R}\times\mathbb{R} = \{(a,b) \mid a,b \in \mathbb{R}\}$ *ist mit der Addition* $(a,b)+(a',b') := (a+a', b+b')$ *und der Multiplikation* $(a,b)\cdot(a',b') := (aa'-bb', ab'+ba')$ *ein Körper mit Nullelement* $(0,0)$ *und Einselement* $(1,0)$.
Das Negative von (a,b) *ist* $(-a,-b)$, *das Reziproke von* $(a,b) \neq (0,0)$ *ist* $(\frac{a}{a^2+b^2}, \frac{-b}{a^2+b^2})$.
Dieser Körper heißt *Körper der komplexen Zahlen* und wird mit $\mathbb{C}$ bezeichnet.

Man identifiziert $a \in \mathbb{R}$ mit $(a,0) \in \mathbb{C}$.
Für $i := (0,1)$ gilt dann $i^2 = (0,1)\cdot(0,1) = (-1,0) = -1$.
Jede komplexe Zahl z schreibt sich eindeutig als

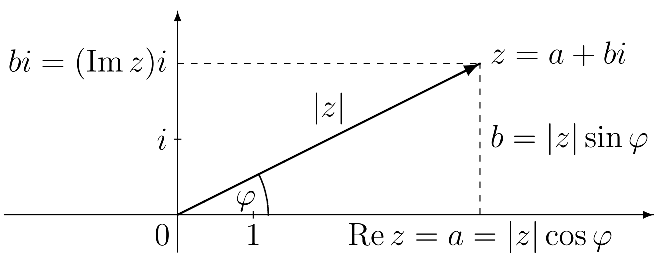
$$z = (a,b) = (a,0)+(0,b) = (a,0)+(b,0)\cdot(0,1) = a+bi$$

mit $a,b \in \mathbb{R}$. $a = \operatorname{Re} z$ heißt *Realteil* von z, $b = \operatorname{Im} z$ heißt *Imaginärteil* von z.

Das Reziproke von $a+bi \neq 0$ (also a oder $b \neq 0$) ist $\displaystyle\frac{1}{a+bi} = \frac{a-bi}{(a+bi)(a-bi)} = \frac{a-bi}{a^2+b^2}$.

Für $z=a+bi$ mit $a,b \in \mathbb{R}$ heißt $\overline{z} := a-bi$ die *konjugiert komplexe Zahl* oder das *Konjugiert-Komplexe* von z, $|z| := \sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{z\cdot\overline{z}}$ der *Betrag* von z.
Wegen $z\cdot\overline{z} = |z|^2$ gilt für $z \neq 0$: $z^{-1} = \dfrac{\overline{z}}{|z|^2}$.

Geometrische Deutung:



Darstellung von $z \neq 0$ *in Polarkoordinaten:* Es ist $\cos\varphi = \frac{a}{|z|}$, $\sin\varphi = \frac{b}{|z|}$, also

$$\begin{aligned}z = a+bi &= |z|\cos\varphi + i|z|\sin\varphi\\ &= |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi).\end{aligned}$$