FernUniversität in Hagen

Bitte hier unbedingt Matrikelnummer und Adresse eintragen, sonst keine Bearbeitung möglich.

Postanschrift: FernUniversität ·58084 Hagen

(Name, Vorname)

(Straße, Nr.)

(PLZ, Wohnort)

FernUniversität in Hagen
FAKULTÄT für Mathematik und Informatik

Klausur
WS 2007/08

Nachklausur: 01141 Mathematische Grundlagen
DATUM: 29.3.2008
UHRZEIT: 10.00 - 12.00 Uhr
KLAUSURORT:

Bearbeitungshinweise

(Bitte vor Arbeitsbeginn durchlesen!)

1. Schreiben Sie Ihre Klausur bitte nicht mit Bleistift.
2. Füllen Sie bitte die grau hinterlegten Felder leserlich und vollständig aus, und schreiben Sie Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer auf jedes Lösungsblatt, das Sie abgeben.
3. Die Reihenfolge, in der Sie die Aufgaben/Teilaufgaben lösen, ist Ihnen freigestellt. Kreuzen Sie in der Tabelle (s.u.) an, welche Aufgaben Sie bearbeitet haben.
4. Bei jeder Aufgabe ist die erreichbare Höchstpunktzahl vermerkt. Sie haben die Klausur bestanden, wenn Sie **40** Punkte erreichen.
5. Erlaubtes Hilfsmittel ist ein beidseitig beschriebenes, handschriftliches DIN-A4 Blatt mit eigenen Aufzeichnungen.
6. Weitere Hilfsmittel wie Studienbriefe, Glossare, Bücher, Aufzeichnungen, Taschenrechner, etc. dürfen während der Klausur nicht benutzt werden. Ihre Benutzung sowie andere Täuschungsversuche führen dazu, dass Ihre Klausur mit 5 bewertet wird.
7. Die Finanzamtsbescheinigung wird Ihnen zugeschickt.

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Summe
Bearbeitet										
max. Punktezahl	8	8	8	8	8	12	12	12	4	80
erreichte Punktezahl										
Korrektur										

Datum/Note	

Nachklausur am 29.03.2008:

Aufgabenstellungen

Die Lösungen der folgenden Aufgaben müssen Sie begründen.

Aufgabe 1

Bestimmen Sie die Lösungsmenge $\mathcal{L}$ des folgenden linearen Gleichungssystems über $\mathbb{R}$.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

[*8 Punkte*]

Aufgabe 2

Sei V ein Vektorraum über einem Körper $\mathbb{K}$. Sei v_1, v_2, v_3 eine Basis $\mathcal{B}$ von V. Sei $f : V \to V$ die lineare Abbildung, die durch $f(v_1) = v_2 + v_3$, $f(v_2) = v_3$ und $f(v_3) = v_1 - v_2$ definiert wird.

Berechnen Sie ${}_{\mathcal{B}}\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(f)$ und $\dim(\mathrm{Bild}(f))$.

[*4 + 4 = 8 Punkte*]

Aufgabe 3

Sei V der Vektorraum der Polynome vom Grad ≤ 3 über $\mathbb{R}$.

Sei $U = \{a + bT + aT^2 + (a + b)T^3 \mid a, b \in \mathbb{R}\}$.

1. Beweisen Sie, dass U ein Unterraum von V ist.

2. Bestimmen Sie eine Basis von U.

[*4 + 4 = 8 Punkte*]

Aufgabe 4

Sei V ein endlichdimensionaler Vektorraum über einem Körper $\mathbb{K}$. Sei $f : V \to V$ linear, und sei $\mathrm{Kern}(f) = \mathrm{Bild}(f)$.

1. Beweisen Sie, dass $\dim(V)$ gerade ist.
2. Geben Sie ein Beispiel für einen Vektorraum V und eine lineare Abbildung f mit $\mathrm{Kern}(f) = \mathrm{Bild}(f)$. (Begründung bitte nicht vergessen.)

[*2 + 6 = 8 Punkte*]

Aufgabe 5

Beweisen Sie folgende Formel mit vollständiger Induktion.

$$\text{Für alle } n \in \mathbb{N} \text{ gilt } \sum_{k=1}^{n} 2 \cdot 3^{k-1} = 3^n - 1.$$

[*8 Punkte*]

Aufgabe 6

1. Beweisen Sie, dass die Potenzreihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{n}{10^n} x^n$ für alle x mit $|x| < 10$ konvergent ist.
2. Beweisen Sie, dass die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n3^n}{(n+1)!}$ konvergent ist.

[*6 + 6 = 12 Punkte*]

Aufgabe 7

Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch $x \mapsto x - \exp(-x)$.

1. Beweisen Sie, dass f injektiv ist.
2. Beweisen Sie, dass die Gleichung $x = \exp(-x)$ genau eine reelle Lösung $x \in \mathbb{R}$ besitzt.

[*6 + 6 = 12 Punkte*]

Aufgabe 8

Bestimmen Sie die lokalen Extremwerte der Funktion $f : [0, \pi] \to \mathbb{R}$ definiert durch $x \mapsto \cos(x) - \cos^2(x)$.

Hinweis: Es sind $\cos(\frac{\pi}{3}) = \frac{1}{2}$ und $\sin(\frac{\pi}{3}) = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

[*12 Punkte*]

Aufgabe 9

Berechnen Sie eine Negationsnormalform von $\neg((A \vee B) \wedge (\neg C \vee D))$. Dabei sind A, B, C und D Atome.

[*4 Punkte*]

Funktion	Definitionsbereich	Stammfunktion
$x \mapsto x^n, n \in \mathbb{N}_0$	$\mathbb{R}$	$x \mapsto \frac{1}{n+1}x^{n+1}$
$x \mapsto x^{-n}, n \in \mathbb{N}, n \geq 2$	$\mathbb{R} \setminus \{0\}$	$x \mapsto \frac{1}{-n+1}x^{-n+1}$
$x \mapsto x^{-1}$	$(0, \infty)$	$x \mapsto \ln(x)$
$x \mapsto x^{-1}$	$(-\infty, 0)$	$x \mapsto \ln(-x)$
$x \mapsto x^\alpha, \alpha \in \mathbb{R}, \alpha \neq -1$	$(0, \infty)$	$x \mapsto \frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1}$
$x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$	$\mathbb{R}$	$x \mapsto \arctan(x)$
$x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$(-1, 1)$	$x \mapsto \arcsin(x)$
$x \mapsto \exp(x)$	$\mathbb{R}$	$x \mapsto \exp(x)$
$x \mapsto a^x, a > 0, a \neq 1$	$\mathbb{R}$	$x \mapsto \frac{1}{\ln(a)}a^x$
$x \mapsto \cos(x)$	$\mathbb{R}$	$x \mapsto \sin(x)$
$x \mapsto \sin(x)$	$\mathbb{R}$	$x \mapsto -\cos(x)$
$x \mapsto \frac{1}{\cos^2(x)}$	$((k-\frac{1}{2})\pi, (k+\frac{1}{2})\pi), k \in \mathbb{Z}$	$x \mapsto \tan(x)$
$x \mapsto \frac{1}{\sin^2(x)}$	$(k\pi, (k+1)\pi), k \in \mathbb{Z}$	$x \mapsto -\cot(x)$