Luise Unger
In LATEX gesetzt von Luise Unger

Mathematische Grundlagen

Kurseinheit 5:
Stetige und differenzierbare Funktionen

mathematik
und
informatik

FernUniversität in Hagen

Studierhinweise

Nachdem wir in der letzten Kurseinheit herausgearbeitet haben, was den Körper der reellen Zahlen so besonders macht, und jetzt, wo wir mit dem Konvergenzbegriff für reelle Folgen ein mächtiges Hilfsmittel für unsere weiteren Untersuchungen zur Verfügung haben, wenden wir uns in dieser Kurseinheit dem zentralen Anliegen der reellen Analysis zu: der Untersuchung von Funktionen (= Abbildungen) von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$.

Nachdem wir in Abschnitt 13.1 zunächst einige Begrifflichkeiten für Funktionen festlegen, widmet sich Abschnitt 13.2 Beispielen. Diesen Abschnitt sollten Sie sehr genau studieren, denn auf die hier vorgestellten Beispiele werden wir immer wieder zurückgreifen und sie immer detaillierter untersuchen. Die Eigenschaften der allgemeinen Potenz (wir werden zum Beispiel erklären, was unter $x^{\sqrt{2}}$ zu verstehen ist), der Exponentialfunktion und des Logarithmus sollten Sie beherrschen.

In der Analysis ist man weniger an dem Wert $f(a)$ einer Funktion an der Stelle a interessiert als vielmehr an der Veränderung, welcher die Funktionswerte unterworfen sind, wenn man an a wackelt, also a geringfügig verändert. Völlig willkürliche, unberechenbare Änderungen sind wissenschaftlich schwer fassbar. Ohne gewisse „Änderungsgesetze“ wird man keine bemerkenswerten Einsichten erwarten dürfen. Ein wichtiges Änderungsgesetz ist die so genannte Stetigkeit einer Funktion. Diesem widmet sich Kapitel 14. Durch die Stetigkeit einer Funktion f an der Stelle a sind die Funktionswerte $f(x)$ für dicht bei a liegende x an den Wert $f(a)$ in gewisser Weise gebunden. Sie weichen wenig von $f(a)$ ab, wenn x wenig von a abweicht. Genauer: $f(x)$ weicht beliebig wenig von $f(a)$ ab, sofern x hinreichend wenig von a abweicht. Es sind die Erfordernisse der Praxis, die auf solche Betrachtungen führen. Wollen wir nämlich einen Funktionswert $f(a)$, etwa $\sqrt{a}$, wirklich berechnen, so haben wir in der Regel schon das Problem, dass wir a nur näherungsweise – etwa eine auf wenige Stellen reduzierte Dezimalzahl a' – gegeben haben. Andererseits wird uns im Allgemeinen eine gewisse, von vornherein feststehende Abweichung der Näherung $f(a')$ von $f(a)$ akzeptabel erscheinen. In einer solchen Situation müssen wir uns fragen, ob unser Näherungswert a' „gut genug“ ist; in dem Sinne, dass $f(a')$ nicht weiter als a priori erlaubt von $f(a)$ abweicht. Ist f in a stetig, so dürfen wir sicher sein, dass wir bei jeder noch so kleinen Toleranzgrenze doch stets akzeptable Näherungswerte $f(a')$ berechnen können, wenn wir mit a' nur dicht genug bei a bleiben. Und gerade diese Tatsache ist es, die die große praktische Bedeutung stetiger Funktionen ausmacht.

Ein weiteres Änderungsgesetz, die so genannte Differenzierbarkeit einer Funktion f, nehmen wir in Kapitel 15 unter die Lupe. Wir werden die Änderung einer Funktion f an der Stelle a, also die Differenz $f(x)-f(a)$, mit der Änderung der einfachsten nicht konstanten Funktion, nämlich der identischen Funktion $\mathrm{id}_{\mathbb{R}}$ vergleichen, das heißt, wir werden den so genannten Differenzenquotienten $\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ betrachten,und aus dessen Verhalten Rückschlüsse auf $f(x)$ in der Nähe von a zu ziehen versuchen. Differenzierbarkeit ist eine stärkere Eigenschaft als Stetigkeit. Jede in a differenzierbare Funktion f ist in a auch stetig.

Nachdem wir in 15.1 die Definition, erste Eigenschaften und eine geometrische Interpretation der Differenzierbarkeit aufführen, kommen wir in 15.2 zu den Differentiationsregeln. Diese sollten Ihnen in Fleisch und Blut übergehen. In 15.3 betrachten wir dann wieder Beispiele. Alle Beispiele aus 13.2 werden Ihnen wieder begegnen; die dort diskutierten Funktionen sind alle differenzierbar. Es werden aber auch zwei möglicherweise „alte Bekannte“ auftauchen: die Winkelfunktionen Sinus und Kosinus, die Sie möglicherweise in der Schule kennen gelernt haben. In der Schule werden diese gewöhnlich über den schwer fassbaren Begriff der „Länge eines Kurvenstücks“ definiert. Wir werden hier einen anderen Weg gehen. Wir nehmen an, dass es Funktionen, die wir Sinus und Kosinus nennen, gibt, die gewisse Eigenschaften (genannt SinKos1 bis SinKos5) haben, die wir von den Winkelfunktionen erwarten. Wir zeigen dann, dass diese Funktionen differenzierbar sein müssen. In Kurseinheit 6 werden wir dann zeigen, dass es solche Funktionen wirklich gibt, und dass man ihre Funktionswerte sogar als geschlossene Formel angeben kann, in der Begriffe, wie die Länge eines Kurvenstücks nicht auftreten.

Kapitel 13

Funktionen

13.1 Grundlagen und erste Beispiele

In 1.4 haben wir bereits Abbildungen zwischen Mengen betrachtet und beispielsweise Begriffe wie das Bild einer Abbildung, Injektivität und Surjektivität, Invertierbarkeit und so weiter, erklärt. All diese Begriffe werden wir hier wieder brauchen. Allerdings gibt es kleine Unterschiede bei der Benutzung einiger Begriffe in der Analysis und in der Linearen Algebra. Selbst wenn es Ihnen als verwirrend erscheint, werden wir diese Nuancen auch in diesem Kurs benutzen, denn Sie werden sie auch in allen weiterführenden Büchern finden, die Sie im Verlauf des Studiums anschauen müssen.

Die erste Besonderheit ist, dass man in der Analysis nicht von Abbildungen spricht, man redet von Funktionen.

13.1.1 Definition: Sei D eine nicht leere Teilmenge von $\mathbb{R}$. Eine **Funktion** f auf D ist eine Abbildung $f : D \to \mathbb{R}$. Die Menge

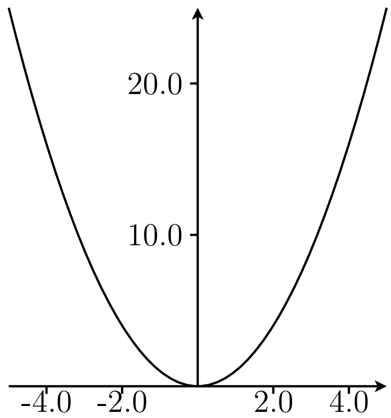
$$\{y \in \mathbb{R} \mid \text{ es gibt ein } x \in D \text{ mit } f(x) = y\}$$

wird das **Bild** von D unter f genannt und mit $f(D)$ oder $\mathrm{Bild}(f)$ bezeichnet.

13.1.2 Definition: Der **Graph** einer Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ ist die Menge

$$\{(x, f(x)) \mid x \in D\} \subseteq D \times \mathbb{R}.$$

Wie Sie es aus der Schule gewohnt sind, lässt sich der Graph einer Funktion oft nach Wahl eines rechtwinkligen Koordinatensystems in der Ebene veranschaulichen. Als Beispiel betrachten wir die Funktion $f : [-5, 5] \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$. Ihr Graph ist



Warum nur oft und nicht immer? Beispielsweise ist $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definiert durch $f(x) = 1$ für alle $x \in \mathbb{Q}$ und $f(x) = 0$ für alle $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, eine Funktion, die wir nicht grafisch veranschaulichen können. Diese Funktion wird nach dem deutschen Mathematiker Dirichlet (gesprochen Dirichleh) (1805-1859) benannt:

13.1.3 Definition: Die Funktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \text{ definiert durch } f(x) = \begin{cases} 1, & \text{falls } x \in \mathbb{Q} \\ 0, & \text{falls } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

wird **Dirichletfunktion** genannt.

Ein weiterer Unterschied bei der Verwendung von Begriffen in der Linearen Algebra und der Analysis tritt beim Begriff der Komposition von Abbildungen auf.

13.1.4 Definition: Seien $f : D \to \mathbb{R}$ und $g : D' \to \mathbb{R}$ Funktionen, und sei $f(D) \subseteq D'$. Die Funktion

$$g \circ f : D \to \mathbb{R}, \text{ definiert durch } (g \circ f)(x) = g(f(x)) \text{ für alle } x \in D,$$

wird **Komposition** der Funktionen f und g genannt.

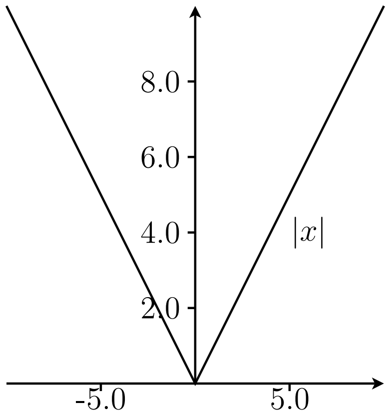
Sie sehen den Unterschied zu Definition 1.4.14? In Definition 1.4.14 hatten wir verlangt, dass der Wertebereich von f gleich dem Definitionsbereich von g sein muss. In der Analysis wird nur verlangt, dass der Wertebereich von f eine Teilmenge des Definitionsbereichs von g ist.

Das sind aber schon fast alle Unterschiede im Sprachgebrauch von Begriffen in der Linearen Algebra und der Analysis.

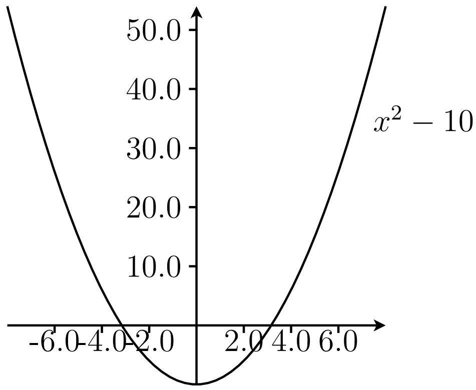
13.1.5 Beispiel: Als Beispiel für die Komposition von Funktionen betrachten wir die **Betragsfunktion**

$$|\ | : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto |x|.$$

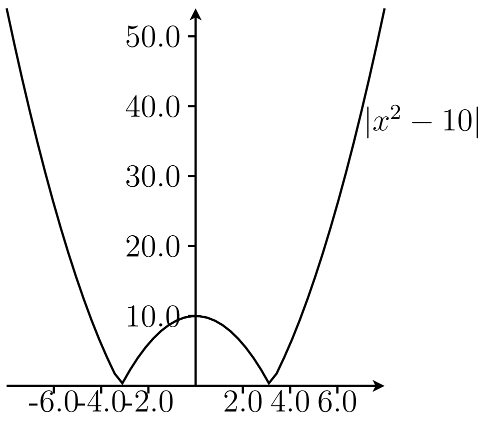
Der Graph der Betragsfunktion ist



Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch $f(x) = x^2 - 10$. Der Graph von f ist



Die Komposition $|\ | \circ f$ ordnet jedem x die Zahl $|x^2 - 10|$ zu, das heißt, der Teilgraph unterhalb der x-Achse wird nach oben gespiegelt:



Sei $f : D \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Wenn wir den Wertebereich von f eingrenzen auf

$f(D)$, also $f : D \to f(D)$ betrachten, dann ist $f : D \to f(D)$ surjektiv. (Zur Erinnerung an Definition 1.4.9: Eine Funktion $f : D \to D'$ heißt surjektiv, wenn jedes Element $d' \in D'$ im Bild von f liegt.) Ist f injektiv, so ist $f : D \to f(D)$ injektiv und surjektiv, also bijektiv und somit invertierbar (vergleiche Korollar 1.4.22). Somit folgt:

13.1.6 Bemerkung: Sei $f : D \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Genau dann gibt es eine Funktion $f^{-1} : f(D) \to \mathbb{R}$ mit $f^{-1} \circ f = \mathrm{id}_D$ und $f \circ f^{-1} = \mathrm{id}_{f(D)}$, wenn f injektiv ist. □

Die Funktion f^{-1} erhält einen speziellen Namen:

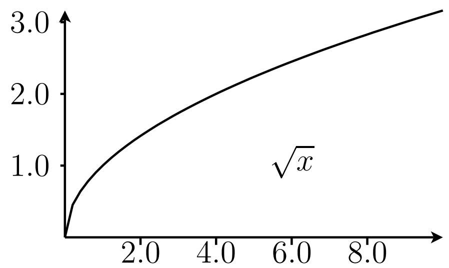
13.1.7 Definition: Sei $f : D \to \mathbb{R}$ eine injektive Funktion. Die Funktion

$$f^{-1} : f(D) \to \mathbb{R} \text{ mit } f^{-1} \circ f = \mathrm{id}_D \text{ und } f \circ f^{-1} = \mathrm{id}_{f(D)}$$

wird **Umkehrfunktion** von f genannt.

13.1.8 Beispiele:

1. Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch $f(x) = x^2$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Dann ist f nicht injektiv, denn $f(2) = f(-2) = 4$, aber $2 \neq -2$. Somit besitzt f keine Umkehrfunktion.
2. Sei $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ wie oben definiert durch $f(x) = x^2$. Dann ist $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ injektiv, besitzt also eine Umkehrfunktion. Wir haben in Satz 11.2.68 gesehen, dass wir aus jeder reellen Zahl $a \geq 0$ die Wurzel ziehen können, und es folgt $f([0, \infty)) = [0, \infty)$. Die Wurzelfunktion $\sqrt{} : [0, \infty) \to \mathbb{R}$, die jeder Zahl x in $[0, \infty)$ die Zahl $\sqrt{x}$ zuordnet, ist die Umkehrfunktion zu f. Der Graph der Wurzelfunktion ist

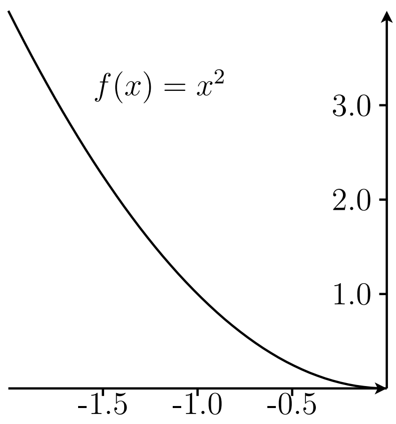


13.1.9 Definition: Eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ heißt **monoton wachsend** (beziehungsweise **monoton fallend**), falls für alle $x, y \in D$ gilt: Ist $x < y$, so folgt $f(x) \leq f(y)$ (beziehungsweise $f(x) \geq f(y)$).

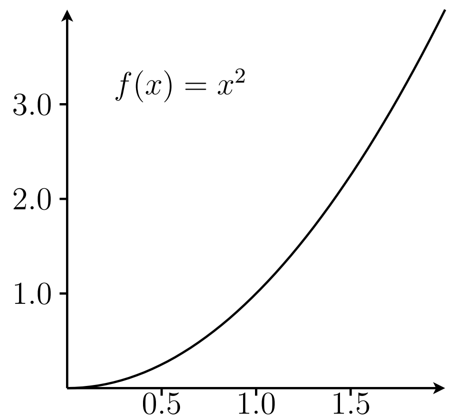
Eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ heißt **streng monoton wachsend** (beziehungsweise **streng monoton fallend**), falls für alle $x, y \in D$ gilt: Ist $x < y$, so folgt $f(x) < f(y)$ (beziehungsweise $f(x) > f(y)$).

Eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ heißt **monoton** (beziehungsweise **streng monoton**), falls f monoton (beziehungsweise streng monoton) wachsend oder fallend ist.

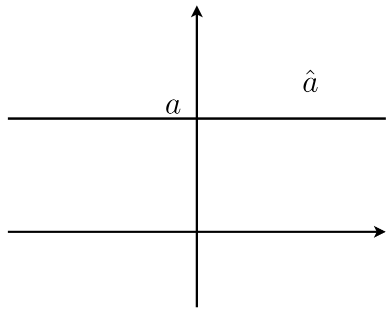
13.1.10 Beispiele: 1. Die Funktion $f : [-2, 0] \to \mathbb{R}$, definiert durch $f(x) = x^2$, ist streng monoton fallend.



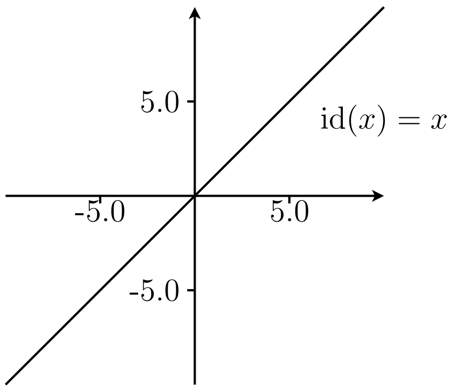
2. Die Funktion $f : [0, 2] \to \mathbb{R}$, definiert durch $f(x) = x^2$, ist streng monoton wachsend.



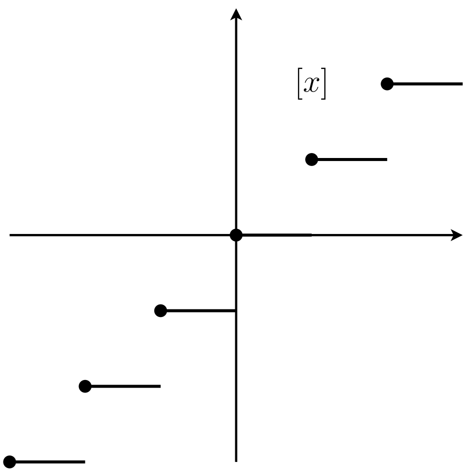
3. Sei $a \in \mathbb{R}$. Die **konstante Funktion** $\hat{a} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ordnet jeder reellen Zahl x die Zahl a zu. Sie ist monoton wachsend und monoton fallend. Ihr Graph ist



4. Durch die **identische Funktion** $\mathrm{id} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ wird jedes $x \in \mathbb{R}$ wieder auf x abgebildet. Diese Funktion ist streng monoton wachsend. Ihr Graph ist



5. Die **Größte-Ganze-Funktion** $[\ ] : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto [x]$, ordnet jedem $x \in \mathbb{R}$ die größte ganze Zahl $\leq x$ zu. Diese Funktion ist monoton wachsend, allerdings nicht streng monoton wachsend. Ihr Graph ist



   Durch die Punkte werden die „Sprungstellen“ des Graphen angedeutet.

6. In 12.1.1 hatten wir reelle Folgen als Funktionen $f : D \to \mathbb{R}$ mit $D = \mathbb{N}$

definiert. Die Definition 12.5.1 einer monotonen Folge stimmt in diesem Zusammenhang (also $D = \mathbb{N}$) mit unserer Definition einer monotonen Funktion überein.

Die folgende Proposition besagt, dass streng monotone Funktionen Umkehrfunktionen besitzen, und dass diese wieder streng monoton sind.

13.1.11 Proposition: (Umkehrfunktionen streng monotoner Funktionen)

1. Jede streng monotone Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ ist injektiv.
2. Ist f streng monoton wachsend, so ist $f^{-1} : f(D) \to \mathbb{R}$ streng monoton wachsend.
3. Ist f streng monoton fallend, so ist $f^{-1} : f(D) \to \mathbb{R}$ streng monoton fallend.

Beweis:

1. Sei $f : D \to \mathbb{R}$ streng monoton wachsend. Seien $x, y \in D$ mit $x \neq y$. Dann gilt $x < y$, also $f(x) < f(y)$, oder $y < x$ und damit $f(y) < f(x)$. In beiden Fällen folgt $f(x) \neq f(y)$, das heißt, f ist injektiv. Ist f streng monoton fallend, so folgt die Injektivität von f völlig analog.
2. Sei $f : D \to \mathbb{R}$ streng monoton wachsend. Da f injektiv ist, existiert $f^{-1} : f(D) \to \mathbb{R}$. Seien $y_1, y_2 \in f(D)$ mit $y_1 < y_2$. Seien $x_1, x_2 \in D$ mit $f(x_1) = y_1$ und $f(x_2) = y_2$. Da f streng monoton wachsend ist, folgt aus $y_1 < y_2$, dass $x_1 < x_2$ ist, denn die Annahme, dass $x_1 = x_2$ oder $x_1 > x_2$ ist, würde $y_1 \geq y_2$ implizieren. Da aber $f^{-1}(y_1) = x_1$ und $f^{-1}(y_2) = x_2$ gelten, folgt aus $y_1 < y_2$, dass $f^{-1}(y_1) < f^{-1}(y_2)$. Somit ist f^{-1} streng monoton wachsend.
3. Ist f streng monoton fallend, so wird analog bewiesen, dass f^{-1} streng monoton fallend ist.

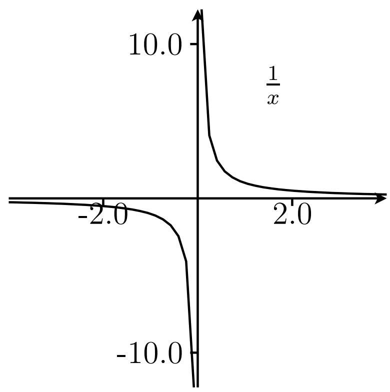
$\square$

13.1.12 Aufgabe: Geben Sie ein Beispiel für eine Funktion $f : [0, 2] \to \mathbb{R}$, die injektiv aber nicht streng monoton ist.

13.1.13 Beispiele: 1. Sei $r \in \mathbb{Q}$. Wir haben in 11.2.79 gesehen, dass die Funktion $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^r$ streng monoton wachsend ist, sofern $r > 0$ ist, und f ist streng monoton fallend, falls $r < 0$ ist. Somit existiert die Umkehrfunktion zu f. Was ist das Bild von f? Nach Definition 11.2.76 ist $x^r > 0$ für alle $x > 0$, also $\mathrm{Bild}(f) \subseteq (0, \infty)$. Ist $z > 0$, so ist $z^{\frac{1}{r}}$ das Urbild von z

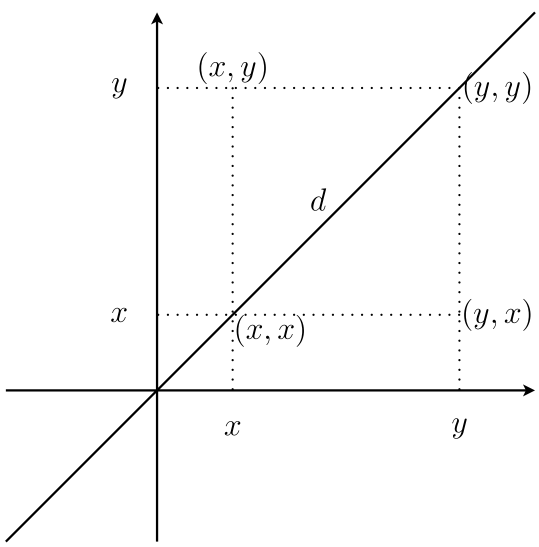
unter f, das heißt, $\mathrm{Bild}(f) = (0, \infty)$. Die Umkehrfunktion f^{-1} ist also eine Funktion von $(0, \infty)$ nach $\mathbb{R}$. Sie ordnet jedem x die Zahl $x^{\frac{1}{r}}$ zu.

2. Die **Kehrwert-Funktion** $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$, die jeder von Null verschiedenen Zahl x die Zahl $\frac{1}{x}$ zuordnet, ist auf $(-\infty, 0)$ und auf $(0, \infty)$ streng monoton fallend. Ihr Funktionsgraph ist



Die Umkehrfunktion der Kehrwert-Funktion ist die Kehrwert-Funktion selbst.

Wie können wir uns den Graph der Umkehrfunktion $f^{-1} : f(D) \to \mathbb{R}$ einer injektiven Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ vorstellen? Dazu einige Vorüberlegungen. Der Graph von f ist die Menge $\{(a, f(a)) \mid a \in D\}$. Der Graph von f^{-1} ist somit die Menge $\{(f(a), a) \mid f(a) \in f(D)\}$. Die Koordinaten der Punkte im Graph von f werden also gerade vertauscht. Wir müssen also nur überlegen, wie sich eine solche Vertauschung geometrisch interpretieren lässt. Dazu die folgende Skizze:



Die Punkte (x, y), (x, x), (y, x) und (y, y) bilden ein Quadrat mit der Diagonalen d. Den Punkt (y, x) erhalten wir, indem wir den Punkt (x, y) an der Diagonalen $d = \{(z, z) \mid z \in \mathbb{R}\}$ spiegeln. Somit erhalten wir:

13.1.14 Merkregel: Sei $f : D \to \mathbb{R}$ eine injektive Funktion. Den Graph von f^{-1} erhalten wir, indem wir den Graph von f an der Diagonale $d = \{(z, z) \mid z \in \mathbb{R}\}$ spiegeln. □

Aus gegebenen Funktionen mit demselben Definitionsbereich können wir mittels algebraischer Verknüpfungen neue Funktionen konstruieren:

13.1.15 Definition: Seien $f, g : D \to \mathbb{R}$ Funktionen, und sei $a \in \mathbb{R}$. Wir definieren

1. $f + g : D \to \mathbb{R}$ durch $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$,
2. $f - g : D \to \mathbb{R}$ durch $(f - g)(x) = f(x) - g(x)$,
3. $af : D \to \mathbb{R}$ durch $(af)(x) = af(x)$,
4. $fg : D \to \mathbb{R}$ durch $(fg)(x) = f(x)g(x)$.
5. Ist $g(x) \neq 0$ für alle $x \in D$, so definieren wir $\frac{f}{g} : D \to \mathbb{R}$ durch $\frac{f}{g}(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$.

13.1.16 Notation: Sei $f : D \to \mathbb{R}$ eine Funktion, und sei $n \in \mathbb{N}$. Das n-fache Produkt von f mit sich selbst wird mit f^n bezeichnet.

13.1.17 Aufgabe: Geben Sie ein Beispiel für eine Funktion f, sodass $f^2 \neq f \circ f$ ist.

13.1.18 Aufgabe: Was für Funktionen sind $\frac{\hat{1}}{\mathrm{id}}$ beziehungsweise id^3?

Eine andere Methode aus einer gegebenen Funktion f eine neue zu gewinnen ist die so genannte Restriktion:

13.1.19 Definition: Sei $f : D \to \mathbb{R}$ eine Funktion, und sei $D' \subseteq D$, wobei $D' \neq \emptyset$ ist. Dann heißt die Funktion $f|_{D'} : D' \to \mathbb{R}$, definiert durch $f|_{D'}(x) = f(x)$ für alle $x \in D'$, die **Restriktion** oder **Einschränkung** von f auf D'.

Analog zu beschränkten Folgen werden beschränkte Funktionen definiert:

13.1.20 Definition: Eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ heißt **nach unten beschränkt**, wenn es eine reelle Zahl a so gibt, dass $a \leq f(x)$ für alle $x \in D$ gilt. Die Funktion f heißt **nach oben beschränkt**, wenn es ein $b \in \mathbb{R}$ so gibt, dass $f(x) \leq b$ für alle $x \in D$ gilt. Die Funktion f heißt **beschränkt**, wenn f nach unten und oben beschränkt ist.

Eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ ist genau dann beschränkt, wenn die Funktion

$$|f| : D \to \mathbb{R}, \text{ definiert durch } |f|(x) = |f(x)|$$

nach oben beschränkt ist.

13.1.21 Beispiele: 1. Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$, ist nach unten beschränkt, jedoch nicht nach oben beschränkt. Schränken wir allerdings den Definitionsbereich auf ein abgeschlossenes Intervall ein, betrachten also etwa $f|_{[-1,1]}$, so ist $f|_{[-1,1]} : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ beschränkt.

2. Die Dirichletfunktion 13.1.3 ist beschränkt.

3. Die konstanten Funktionen $\hat{a}$, $a \in \mathbb{R}$, sind beschränkt.

4. Die Wurzelfunktion ist nach unten beschränkt, denn $\sqrt{x} \geq 0$ für alle $x \geq 0$. Sie ist nicht nach oben beschränkt, denn angenommen, es gibt ein $b \in \mathbb{R}$ mit $\sqrt{x} \leq b$ für alle $x \in (0, \infty)$. Sei $x > b^2$. Dann gilt $\sqrt{x} > b$, ein Widerspruch.

13.1.22 Aufgabe: 1. Beweisen Sie: Wenn $f : D \to \mathbb{R}$ surjektiv ist, dann ist f weder nach oben noch nach unten beschränkt.

2. Geben Sie ein Beispiel für eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, die weder nach unten noch nach oben beschränkt ist, und die nicht surjektiv ist.

13.1.23 Aufgabe: 1. Seien $f, g : D \to \mathbb{R}$ beschränkte Funktionen, und sei $\alpha \in \mathbb{R}$. Beweisen Sie, dass $f + g$, $f - g$, αf und fg beschränkt sind.

2. Seien (a_n) und (b_n) beschränkte Folgen, und sei $\alpha \in \mathbb{R}$. Beweisen Sie, dass $(a_n)+(b_n)$, $(a_n)-(b_n)$, $\alpha(a_n)$ und $(a_n)(b_n)$ beschränkte Folgen sind. Hinweis: Wenn Sie den ersten Teil der Aufgabe benutzen, ist das ein Einzeiler.

3. Geben Sie ein Beispiel für beschränkte Funktionen $f, g : D \to \mathbb{R}$, sodass $\frac{f}{g}$ nicht beschränkt ist.

13.2 Beispiele

In diesem Abschnitt werden wir einige Beispielklassen von Funktionen vorstellen, die wir im Folgenden genauer untersuchen werden.

13.2.1 Polynomfunktionen

In den Kurseinheiten 2 und 3 haben Sie bereits Polynome in $\mathbb{K}[T]$, $\mathbb{K}$ ein Körper, kennen gelernt. Polynome haben die Form $a_0 + a_1T + \cdots + a_nT^n$, wobei die Koeffizienten $a_0, \ldots, a_n$ in $\mathbb{K}$ liegen. Wir hatten in $\mathbb{K}[T]$ die Addition und Skalarmultiplikation betrachtet, allerdings hatten wir weder Polynome miteinander multipliziert noch hatten wir Körperelemente in Polynome eingesetzt. Das wird sich in diesem Abschnitt ändern. Bevor wir uns aber Polynomfunktionen zuwenden, betrachten wir noch einmal Polynome, und zwar ganz allgemein Polynome in $\mathbb{K}[T]$, wobei $\mathbb{K}$ einen beliebigen Körper bezeichnet.

Einschub: Nullstellen von Polynomen in $\mathbb{K}[T]$

Sei $\mathbb{K}$ ein Körper, und seien $p = \sum\limits_{i=0}^{n} a_iT^i$ und $q = \sum\limits_{i=0}^{m} b_iT^i$ Polynome in $\mathbb{K}[T]$. Wir können p und q gliedweise miteinander multiplizieren, wobei wir allerdings die Regeln $T^iT^j = T^{i+j}$ und $aT = Ta$ für alle $i, j \in \mathbb{N}_0$ und alle $a \in \mathbb{K}$ beachten müssen. Als Beispiel:

13.2.1 Beispiel: Seien $p = 2 + 3T + T^3$ und $q = 1 + 2T^2$ in $\mathbb{R}[T]$. Dann gilt

$$\begin{aligned} pq &= (2 + 3T + T^3)(1 + 2T^2) \\ &= 2(1 + 2T^2) + 3T(1 + 2T^2) + T^3(1 + 2T^2) \\ &= 2 + 4T^2 + 3T + 6T^3 + T^3 + 2T^5 \\ &= 2 + 3T + 4T^2 + 7T^3 + 2T^5. \end{aligned}$$

Wir können das Produkt von Polynomen als Formel ausdrücken:

13.2.2 Definition: Seien $p = \sum\limits_{i=0}^{n} a_iT^i$ und $q = \sum\limits_{i=0}^{m} b_iT^i$ Polynome in $\mathbb{K}[T]$. Wir definieren das Produkt pq durch

$$pq = \sum_k c_kT^k \text{ mit } c_k = \sum_{i+j=k} a_ib_j.$$

Um dieser ungewohnten Schreibweise den Schrecken zu nehmen, bearbeiten Sie bitte die folgenden Aufgaben.

13.2.3 Aufgabe: Seien $p = \sum\limits_{i=0}^{n} a_iT^i$ und $q = \sum\limits_{i=0}^{m} b_iT^i$ Polynome in $\mathbb{K}[T]$. Berechnen Sie $c_0, \ldots, c_5$.

13.2.4 Aufgabe: Betrachten Sie das Beispiel 13.2.1 oben. Berechnen Sie in diesem konkreten Fall $c_0, \ldots, c_5$ und überzeugen Sie sich davon, dass die Formel in Definition 13.2.2 dasselbe Ergebnis liefert wie das, was wir durch Ausmultiplizieren errechnet haben.

Ich erinnere an den Grad eines Polynoms $\sum_{i=0}^{n} a_i T^i$. Dieser ist definiert als größter Index der Koeffizienten, die $\neq 0$ sind. Wie sich der Grad eines Produktes von Polynomen berechnet, ist Inhalt der folgenden Bemerkung.

13.2.5 Bemerkung: (Gradformel)

Seien $p = \sum_{i=0}^{n} a_i T^i$ und $q = \sum_{i=0}^{m} b_i T^i$ Polynome in $\mathbb{K}[T]$ mit $\mathrm{Grad}(p) = n \geq 0$ und $\mathrm{Grad}(q) = m \geq 0$. Dann gilt $\mathrm{Grad}(pq) = n + m$.

Beweis: Nach Definition ist $pq = \sum_k \left(\sum_{i+j=k} a_i b_j \right) T^k$. Für $k > n + m$ lässt sich $\sum_{i+j=k} a_i b_j$ nicht bilden, es gilt also $\mathrm{Grad}(pq) \leq n+m$. Sei $k = n+m$. Es gibt genau zwei Koeffizienten, deren Indizes sich zu $n + m = k$ addieren lassen, nämlich a_n und b_m; somit ist $c_k = a_n b_m$. Da $a_n \neq 0$ und $b_m \neq 0$, folgt $a_n b_m \neq 0$ (vergleiche 2. in Proposition 1.6.4). Es folgt $\mathrm{Grad}(pq) \geq n+m$. Aus $n+m \leq \mathrm{Grad}(pq) \leq n+m$ folgt $\mathrm{Grad}(pq) = n + m$, die Behauptung. □

Sind p und q Polynome, so kann man p durch q mit Rest teilen. Das kennen Sie möglicherweise aus der Schule, aber wir führen es hier noch einmal vor. Der Beweis, den Sie in der Schule vermutlich nicht gesehen haben, ist etwas technisch. Beim ersten Lesen können Sie ihn ohne Bedenken überspringen.

13.2.6 Proposition: (Division mit Rest in $\mathbb{K}[T]$)

Zu Polynomen $p, q \in \mathbb{K}[T]$ mit $q \neq 0$ gibt es eindeutig bestimmte Polynome $f, r \in \mathbb{K}[T]$ mit $p = fq + r$ und $\mathrm{Grad}(r) < \mathrm{Grad}(q)$.

Beweis: Wir zeigen zunächst die Existenz dieser Polynome. Wenn p das Nullpolynom ist, dann ist $p = fq + r$ genau dann erfüllt, wenn $f = r = 0$ ist. Wir können also annehmen, dass $\mathrm{Grad}(p) \geq 0$ ist.

Ist $\mathrm{Grad}(p) < \mathrm{Grad}(q)$, so gilt $p = 0q + p$, und wir sind fertig.

Wir können also annehmen, dass $\mathrm{Grad}(p) \geq \mathrm{Grad}(q)$ ist. Wir beweisen die Existenz der Polynome f und r mit Induktion nach dem Grad von p.

Sei $\text{Grad}(p) = 0$. Dann ist p ein konstantes Polynom $p \neq 0$. Auch q ist konstant, und q ist nach Voraussetzung nicht das Nullpolynom. Setze $r = 0$ und $f = pq^{-1}$. Dann ist $p = fq + r$.

Seien nun $p = \sum_{i=0}^{n} a_i T^i$ und $q = \sum_{i=0}^{m} b_i T^i$ mit $a_n \neq 0$ und $b_m \neq 0$, $n \geq m$ und $n > 0$. Setze

$$p_1 = p - a_n b_m^{-1} T^{n-m} q = \sum_{i=0}^{n} a_i T^i - \sum_{i=0}^{m} a_n {b_m}^{-1} b_i T^{n-m+i}.$$

Dann ist $\text{Grad}(p_1) < \text{Grad}(p)$, denn $a_n T^n$ hebt sich gegen $-a_n b_m^{-1} b_m T^{n-m+m}$ im zweiten Summanden weg. Wir setzen voraus, dass es f_1 und r in $\mathbb{K}[T]$ gibt, sodass $p_1 = f_1 q + r$, wobei $\text{Grad}(r) < \text{Grad}(q)$ ist. Einsetzen liefert $f_1 q + r = p - a_n b_m^{-1} T^{n-m} q$, und durch Umformen nach p erhalten wir die gewünschte Darstellung

$$p = \left(a_n b_m^{-1} T^{n-m} + q_1\right) q + r.$$

Wir zeigen nun die Eindeutigkeit der Schreibweise.

Seien $r, r', f, f' \in \mathbb{K}[T]$ mit $\text{Grad}(r) < \text{Grad}(q)$, $\text{Grad}(r') < \text{Grad}(q)$ und

$$p = fq + r \text{ und } p = f'q + r'.$$

Sei ohne Einschränkung $\text{Grad}(r') \geq \text{Grad}(r)$ (anderenfalls benennen wir r und r' um). Dann ist $\text{Grad}(r') \geq \text{Grad}(r' - r)$, und es gilt

$$0 = p - p = q(f - f') + r - r' \Rightarrow r' - r = q(f - f').$$

Wenn $f - f'$ nicht das Nullpolynom ist, dann gilt $\text{Grad}(q(f - f')) \geq \text{Grad}(q)$, und wir erhalten die Abschätzung

$$\text{Grad}(r') \geq \text{Grad}(r' - r) = \text{Grad}(q(f - f')) \geq \text{Grad}(q).$$

Dies ist ein Widerspruch, denn $\text{Grad}(r') < \text{Grad}(q)$. Somit ist $f - f'$ das Nullpolynom, also $f = f'$. Es folgt $r' - r = 0$, also $r = r'$. □

Wir benötigen im Folgenden noch eine Sache, die Ihnen vermutlich aber nicht fremd ist. Wir können in Polynome einsetzen, und können Nullstellen von Polynomen untersuchen. Formal:

13.2.7 Definition: Sei $\mathbb{K}$ ein Körper, und sei $p = \sum_{i=0}^{n} a_i T^i \in \mathbb{K}[T]$. Für alle $r \in \mathbb{K}$ definieren wir folgende Element aus $\mathbb{K}$

$$\tilde{p}(r) = \sum_{i=0}^{n} a_i r^i,$$

und sagen, dass $\tilde{p}(r)$ durch **Einsetzen** von r in p entsteht. Ist $r \in \mathbb{K}$ so, dass $\tilde{p}(r) = 0$ ist, so nennen wir r eine **Nullstelle** von p.

Polynome müssen keine Nullstellen haben. Ein Beispiel ist $p = T^2 + 1 \in \mathbb{R}[T]$. Für alle reellen Zahlen r gilt $r^2 + 1 > 0$, das heißt, p hat keine Nullstelle. Wenn λ allerdings eine Nullstelle ist, dann lässt sich $T - \lambda$ von p abdividieren. Genauer, es gilt:

13.2.8 Proposition: (Nullstellen und Faktoren $T - \lambda$)

Ein Element $\lambda \in \mathbb{K}$ ist genau dann Nullstelle von $p \in \mathbb{K}[T]$, wenn $p = (T - \lambda)q$ für ein Polynom $q \in \mathbb{K}[T]$ ist.

Beweis:

$\Rightarrow$ Sei λ eine Nullstelle von p. Wir dividieren p durch $T - \lambda$ mit Rest und erhalten

$$p = (T - \lambda)q + r \text{ mit } \mathrm{Grad}(r) < 1.$$

Wenn $\mathrm{Grad}(r) = -\infty$, wenn also r das Nullpolynom ist, dann sind wir fertig.

Angenommen, r ist nicht das Nullpolynom. Dann ist $\mathrm{Grad}(r) = 0$, also $r \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$. Wir setzen λ in die Gleichung $p = (T - \lambda)q + r$ ein und erhalten $\tilde{p}(\lambda) = (\lambda - \lambda)\tilde{q}(\lambda) + r$. Nach Voraussetzung ist $\tilde{p}(\lambda) = 0$, und auch $(\lambda - \lambda)\tilde{q}(\lambda) = 0$. Es folgt $r = 0$, ein Widerspruch zur Annahme.

$\Leftarrow$ Wenn $p = (T - \lambda)q$, dann ist λ offenbar eine Nullstelle von p.

$\square$

Wie viele Nullstellen kann ein Polynom maximal haben? Proposition 13.2.8 und die Gradformel 13.2.5 geben auf diese Frage eine Antwort.

13.2.9 Korollar: (Anzahl der Nullstellen von Polynomen)

Ein Polynom $p \in \mathbb{K}[T]$, $p \neq 0$, vom Grad $n \geq 0$ hat höchstens n verschiedene Nullstellen.

Beweis: Ist $p \neq 0$ ein konstantes Polynom, also $\mathrm{Grad}(p) = 0$, so hat p keine Nullstelle. Wir können also annehmen, dass p nicht konstant ist. Seien $\lambda_1, \ldots, \lambda_s$ die s verschiedenen Nullstellen von p.

Angenommen, $s > n$. Es gibt $p_1 \in \mathbb{K}[T]$ mit $\mathrm{Grad}(p_1) = n - 1$ und $p = (T - \lambda_1)p_1$. Wegen $\lambda_j - \lambda_1 \neq 0$ für $j \in \{2, \ldots, s\}$ sind $\lambda_2, \ldots, \lambda_s$ Nullstellen von p_1. Setzt man diese Vorgehensweise fort, so gibt es p_n mit $\mathrm{Grad}(p_n) = 0$ (also $p_n \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$) und $p = (T - \lambda_1) \ldots (T - \lambda_n)p_n$. Da $\lambda_i - \lambda_j = \neq 0$ für $i \in \{n+1, \ldots, s\}$ und $j \in \{1, \ldots, n\}$ gilt, können $\lambda_{n+1}, \ldots, \lambda_n$ keine Nullstellen von p sein, ein Widerspruch. Somit gilt $s \leq n$. $\square$

Von Polynomen zu Polynomfunktionen

Indem wir einsetzen liefert jedes Polynom in $\mathbb{R}[T]$ eine Funktion von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$. Genauer:

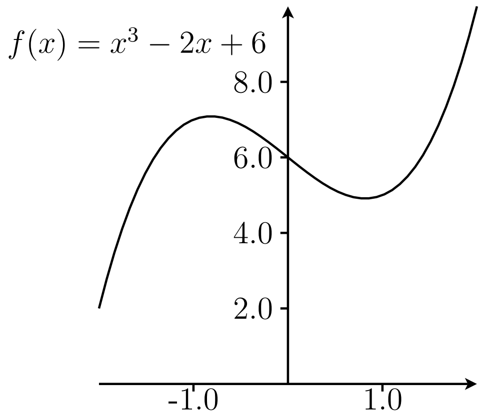
13.2.10 Definition: Sei $p = \sum_{i=0}^{n} a_i T^i \in \mathbb{R}[T]$. Die zu ö$p$ korrespondierende **Polynomfunktion** $\tilde{p} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ wird definiert durch

$$\tilde{p}(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i \text{ für alle } x \in \mathbb{R}.$$

Formal ausgedrückt ist eine Polynomfunktion eine Funktion der Bauart

$$\hat{a_0}\mathrm{id}^0 + \hat{a_1}\mathrm{id} + \cdots + \hat{a_n}\mathrm{id}^n = \sum_{i=0}^{n} \hat{a_i}\mathrm{id}^i. \text{ Dabei ist } \mathrm{id}^0 = \hat{1}.$$

13.2.11 Beispiel: Die wohl einfachsten Polynomfunktionen sind die Potenz-Funktionen $x \mapsto x^n$. Deren Funktionsgraphen kennen Sie vermutlich von der Schule. Hier sehen Sie den Graph der Polynomfunktion $x \mapsto x^3 - 2x + 6$:



Seien $p, q \in \mathbb{R}[T]$ Polynome, und seien $\tilde{p}$ und $\tilde{q}$ die zugehörigen Polynomfunktionen. Im Folgenden werden wir uns die Frage stellen:

13.2.12 Frage: Seien p und q verschiedene Polynome in $\mathbb{R}[T]$. Sind dann die zugehörigen Polynomfunktionen $\tilde{p}$ und $\tilde{q}$ ebenfalls verschieden?

Um diese Frage beantworten zu können, müssten wir im Prinzip $\tilde{p}(x)$ und $\tilde{q}(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$ vergleichen. Der folgende fundamentale Identitätssatz für Polynomfunktionen besagt, dass es viel einfacher geht. Wir müssen nur für endlich viele $x \in \mathbb{R}$ überprüfen, ob $\tilde{p}(x) = \tilde{q}(x)$ gilt. Genauer:

13.2.13 Satz: (Identitätssatz für Polynomfunktionen)

Seien $p = \sum_{i=0}^{n} a_i T^i$ und $q = \sum_{i=0}^{m} b_i T^i$ in $\mathbb{R}[T]$, und seien $\tilde{p}$ und $\tilde{q}$ die zugehörigen Polynomfunktionen. Sei $\mathrm{Grad}(p) = n$, und sei $\mathrm{Grad}(q) = m$.

Gilt $\tilde{p}(x) = \tilde{q}(x)$ für $\max(n, m) + 1$ verschiedene $x \in \mathbb{R}$, so ist $m = n$ und $a_i = b_i$ für alle $0 \leq i \leq n$. Insbesondere gilt $\tilde{p}(x) = \tilde{q}(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

Beweis: Wir können annehmen, dass $\mathrm{Grad}(p) \geq \mathrm{Grad}(q)$ gilt, anderenfalls benennen wir p und q einfach um. Indem wir $b_{m+1} = \cdots = b_n = 0$ setzen, können wir q als $q = \sum_{i=0}^{n} b_i T^i$ schreiben. Sei $r = p - q = \sum_{i=0}^{n} (a_i - b_i) T^i$. Es ist $\mathrm{Grad}(r) \leq n$.

Seien $x_1, \ldots, x_{n+1}$ verschiedene reelle Zahlen mit

$$\tilde{p}(x_i) = \tilde{q}(x_i) \text{ für alle } 1 \leq i \leq n + 1.$$

Dann sind $x_1, \ldots, x_{n+1}$ Nullstellen von $r = p - q$, denn $\tilde{r}(x_i) = \tilde{p}(x_i) - \tilde{q}(x_i) = 0$. Da ein Polynom vom Grad $n \geq 0$ mit Proposition 13.2.9 höchstens n verschiedene Nullstellen besitzt, folgt, dass $\mathrm{Grad}(r) = -\infty$ ist, dass r also das Nullpolynom ist. Somit gilt $a_i = b_i$ für alle $0 \leq i \leq n$, also auch $m = n$. □

Eine Polynomfunktion lässt sich häufig in verschiedenen Weisen schreiben. Zum Beispiel ist $1 - 2x^2 + x^4 = (x^2 - 1)^2 = (x^2 - 2x + 1)(x + 1)^2 = (x^2 - 2x + 1)(x^2 + 2x + 1)$. Der Identitätssatz für Polynomfunktionen besagt insbesondere, dass jede dieser Schreibweisen immer zu ein und derselben Normalform $a_0 + a_1 x + \cdots a_n x^n$ führt.

Im Wesentlichen eine Umformulierung von Satz 13.2.13 ist:

13.2.14 Korollar: Seien $p, q \in \mathbb{R}[T]$ verschiedene Polynome. Dann gilt $\tilde{p} \neq \tilde{q}$.

Beweis: Die Behauptung folgt mit Kontraposition aus Satz 13.2.13: Gilt $\tilde{p} = \tilde{q}$ so gibt es unendlich viele verschiedene reelle Zahlen mit $\tilde{p}(x) = \tilde{q}(x)$. Somit gilt $p = q$. □

Satz 13.2.13 beziehungsweise Korollar 13.2.14 erlauben uns, den Grad einer Polynomfunktion zu definieren:

13.2.15 Definition: Sei $p \in \mathbb{R}[T]$ ein Polynom. Der **Grad** $\mathrm{Grad}(\tilde{p})$ der zugehörigen Polynomfunktion $\tilde{p}$ wird als $\mathrm{Grad}(p)$ definiert.

Polynomfunktionen werden in der nächsten Kurseinheit noch eine wichtige Rolle spielen. Der Grund dafür ist, dass sich die Funktionswerte von Polynomfunktionen sehr leicht berechnen lassen, was leider für viele anderen Funktionen nicht der Fall ist. Es gibt allerdings Funktionen, deren Funktionswerte sich durch Polynomfunktionen näherungsweise bestimmen lassen. Dazu aber mehr in Kurseinheit 6.

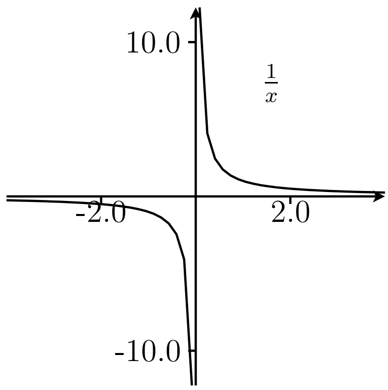
13.2.2 Rationale Funktionen

13.2.16 Definition: Seien $\tilde{p}, \tilde{q} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Polynomfunktionen. Dann wird

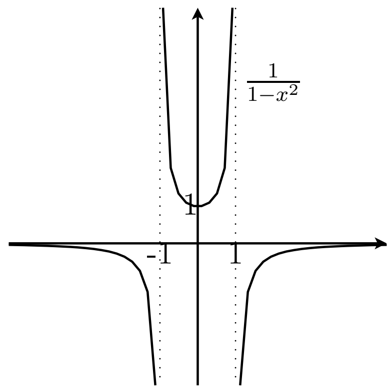
$$\frac{\tilde{p}}{\tilde{q}} : \mathbb{R} \setminus \{\text{Nullstellen von } q\} \to \mathbb{R}$$

eine **rationale Funktion** genannt.

13.2.17 Beispiele: 1. Die Kehrwert-Funktion $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$, die jeder von Null verschiedenen Zahl x die Zahl $\frac{1}{x}$ zuordnet, ist eine rationale Funktion. Die Polynomfunktion $\tilde{p}$ ist die konstante Funktion $\hat{1} = \mathrm{id}^0$ – eine Polynomfunktion vom Grad 0. Die Polynomfunktion $\tilde{q}$ ist die identische Funktion $x \mapsto x$. Der Graph von $\frac{\tilde{p}}{\tilde{q}}$ ist

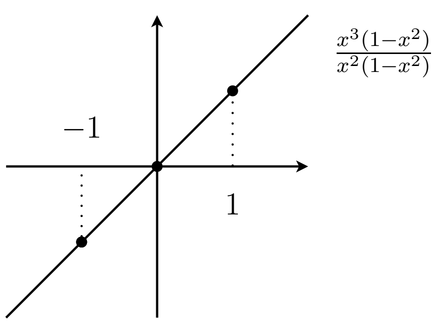


2. Sei $\tilde{p} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die konstante Funktion $\hat{1}$, und sei $\tilde{q} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die Polynomfunktion $x \mapsto 1-x^2$. Die Nullstellen von q sind 1 und -1, und $\frac{\tilde{p}}{\tilde{q}} : \mathbb{R}\setminus\{-1, 1\} \to \mathbb{R}$ ist eine rationale Funktion. Ihr Graph ist



Ist $f = \frac{\tilde{p}}{\tilde{q}}$ eine rationale Funktion, so ist f nicht notwendigerweise für alle $x \in \mathbb{R}$ definiert. In den (höchstens endlich vielen) Nullstellen von q ist f nämlich nicht erklärt. Seien $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ die Nullstellen von q. Indem wir Proposition 13.2.8 auf alle Nullstellen anwenden, wobei wir immer einen Faktor $(T - \lambda_i)$ mit höchstmöglicher Potenz ausklammern, können wir q in der Form $q = (T - \lambda_1)^{t_1} \cdots (T - \lambda_r)^{t_r} q'$ schreiben. Nun kann es aber vorkommen, dass λ_1 auch eine Nullstelle von p ist, also $p = (T - \lambda_1)^{s_1} p'$ mit $\tilde{p'}(\lambda_1) \neq 0$. Ist $t_1 \leq s_1$, so können wir den Faktor $(T - \lambda_1)^{t_1}$ kürzen. Seien $p_1 = (T - \lambda_1)^{s_1 - t_1} p'$ und $q_1 = (T - \lambda_2)^{t_2} \cdots (T - \lambda_r)^{t_r} q'$. Die rationale Funktion $f_1 = \frac{\tilde{p_1}}{\tilde{q_1}}$ stimmt mit f auf dem Definitionsbereich von f überein und ist darüber hinaus auch auf λ_1 definiert. Daher setzen wir einfach $f(\lambda_1) = f_1(\lambda_1)$. Ganz entsprechend gehen wir mit all denjenigen Nullstellen des Nenners vor, wo dieser Kürzungsprozess möglich ist. Befreien wir Zähler und Nenner auch noch von allen weiteren gemeinsamen Teilern, so erhalten wir eine rationale Funktion g, von der man sagt, dass sie in **gekürzter** Form vorliegt. Die Funktion g stimmt mit f auf dem Definitionsbereich von f überein, hat aber möglicherweise einen größeren Definitionsbereich.

13.2.18 Beispiel: Seien $p = T^3(1 - T^2)$ und $q = T^2(1 - T^2)$. Sei $f = \frac{\tilde{p}}{\tilde{q}}$ die zugehörige rationale Funktion. Die Nullstellen von q sind $-1, 0, 1$. Somit ist f für $x = -1, 0, 1$ nicht definiert, in der Skizze wird dies durch einen Punkt angedeutet.



Die gekürzte Form ist die identische Funktion, die für alle $x \in \mathbb{R}$ definiert ist.

13.2.3 Allgemeine Potenz

In Definition 11.2.76 hatten wir für positive a und rationale r definiert, was a^r ist, und wir hatten in 11.2.78 gezeigt, dass sich die bekannten Rechenregeln für natürliche Exponenten auch auf rationale Exponenten übertragen lassen. Hier werden wir erklären, was unter a^ρ zu verstehen ist, wobei ρ (gesprochen „roh“) eine beliebige reelle Zahl ist. Für die Definition von a^ρ werden wir konvergente Folgen benötigen – Sie sollten daher die Kurseinheit 4 parat haben.

Wir beginnen auch gleich mit einem Grenzwert einer Folge:

13.2.19 Proposition: Für alle $a > 0$ gilt $\lim\limits_{n\to\infty} a^{\frac{1}{n}} = 1$.

Beweis: Wir nehmen zunächst an, dass $a \geq 1$ ist. Für alle $n \geq a$ gilt mit 11.2.79 die Ungleichung

$$1 = 1^{\frac{1}{n}} \leq a^{\frac{1}{n}} \leq n^{\frac{1}{n}}.$$

Es sind $\lim\limits_{n\to\infty} 1^{\frac{1}{n}} = 1$ und $\lim\limits_{n\to\infty} n^{\frac{1}{n}} = 1$ (vergleiche 12.1.11). Mit dem Einschnürungssatz 12.4.3 folgt, dass $(a^{\frac{1}{n}})$ ebenfalls gegen 1 konvergiert.

Sei nun $0 < a < 1$. Dann gilt $\frac{1}{a} > 1$, und wie wir gerade gezeigt haben, folgt, dass $((\frac{1}{a})^{\frac{1}{n}})$ gegen 1 konvergiert. Da $(\frac{1}{a})^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{a^{\frac{1}{n}}}$, erhalten wir mit den Rechenregeln für konvergente Folgen 12.4.12, dass die Folge der Kehrwerte – also $(a^{\frac{1}{n}})$ – gegen $\frac{1}{1} = 1$ konvergiert. $\square$

13.2.20 Lemma: Sind alle r_n rational, und konvergiert (r_n) gegen $r \in \mathbb{Q}$, so konvergiert für jedes $a > 0$ die Folge (a^{r_n}) gegen a^r.

Beweis: Wir betrachten zunächst den Spezialfall, dass (r_n) eine Nullfolge ist. Mit Proposition 13.2.19 wissen wir, dass $(a^{\frac{1}{n}})$ gegen 1 konvergiert. Mit den Rechenregeln für konvergente Folgen gilt auch $\lim\limits_{n\to\infty} a^{-\frac{1}{n}} = 1$.

Sei $\varepsilon > 0$ gewählt. Dann gibt es ein $m \in \mathbb{N}$ mit $a^{\frac{1}{m}}, a^{-\frac{1}{m}} \in U_\varepsilon(1)$.

Da (r_n) eine Nullfolge ist, gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$, sodass $-\frac{1}{m} < r_n < \frac{1}{m}$ für alle $n \geq n_0$ gilt. Proposition 11.2.80 impliziert, dass a^{r_n} zwischen $a^{-\frac{1}{m}}$ und $a^{\frac{1}{m}}$ liegt. (Genauer, wenn $a \geq 1$, so gilt $a^{-\frac{1}{m}} \leq a^{r_n} \leq a^{\frac{1}{m}}$ und wenn $a < 1$, so gilt $a^{\frac{1}{m}} < a^{r_n} < a^{-\frac{1}{m}}$.) Somit gilt $a^{r_n} \in U_\varepsilon(1)$ für alle $n \geq n_0$, und es folgt, dass (a^{r_n}) gegen 1 konvergiert.

Sei nun (r_n) eine Folge, die gegen r konvergiert. Nach Annahme sind r_n und r rationale Zahlen, also ist $(r_n - r)$ eine Nullfolge, deren Folgenglieder in $\mathbb{Q}$ sind. Mit dem eben bewiesenen gilt $\lim\limits_{n\to\infty} a^{r_n - r} = 1$. Auch die konstante Folge (a^r) ist konvergent (mit Grenzwert a^r). Es folgt, dass $(a^{r_n}) = (a^{r_n - r}a^r) = (a^{r_n - r})(a^r)$ konvergent ist. Es gilt

$$\lim_{n\to\infty} a^{r_n} = \lim_{n\to\infty} (a^{r_n - r}) \lim_{n\to\infty} (a^r) = 1 \cdot a^r = a^r.$$

□

Um a^ρ für alle $a > 0$ und alle $\rho \in \mathbb{R}$ zu definieren, werden wir wie folgt vorgehen: Wir wählen eine Folge (r_n) von rationalen Zahlen, die gegen ρ konvergiert. Dass es eine solche Folge gibt, sichert Proposition 12.2.9. Wir zeigen, dass $\lim\limits_{n\to\infty} a^{r_n}$ existiert, und dass für je zwei solcher Folgen rationaler Zahlen die Grenzwerte identisch sind. Dann definieren wir a^ρ als $\lim\limits_{n\to\infty} a^{r_n}$. Und das nehmen wir jetzt in Angriff.

Sei (t_n) eine Folge rationaler Zahlen mit Grenzwert ρ. Mit Lemma 12.5.12 enthält (t_n) eine monotone Teilfolge (s_n). Diese Teilfolge konvergiert ebenfalls gegen ρ (vergleiche Proposition 12.2.4). Als konvergente Folge ist (s_n) beschränkt (siehe Proposition 12.2.7). Sei s eine untere Schranke und S eine obere Schranke von (s_n). Dann gilt $s \leq s_n \leq S$ für alle $n \in \mathbb{N}$, und es folgt $a^s \leq a^{s_n} \leq a^S$, falls $a > 1$ und $a^s \geq a^{s_n} \geq a^S$, falls $a < 1$. Somit ist (a^{s_n}) beschränkt. Da (s_n) monoton ist, folgt aus Proposition 11.2.80, dass (a^{s_n}) monoton ist. Mit dem Monotonieprinzip (Satz 12.5.2) ist (a^{s_n}) konvergent.

Sei nun (r_n) eine beliebige Folge rationaler Zahlen mit Grenzwert ρ. Dann ist $(r_n - s_n)$ eine Folge rationaler Zahlen mit Grenzwert 0. Aus Lemma 13.2.20 folgt, dass $(a^{r_n - s_n})$ gegen 1 konvergiert. Es ist $a^{r_n} = a^{r_n - s_n}a^{s_n}$, also konvergiert $(a^{r_n}) = (a^{r_n - s_n}a^{s_n}) = (a^{r_n - s_n})(a^{s_n})$ gegen $\lim\limits_{n\to\infty} a^{s_n}$. Für je zwei rationale Folgen (r_n) und (r_n') mit Grenzwert ρ gilt also $\lim\limits_{n\to\infty} a^{r_n} = \lim\limits_{n\to\infty} a^{r_n'}$. Dies erlaubt uns a^ρ wie folgt zu definieren:

13.2.21 Definition: Sei $a > 0$, und sei $\rho \in \mathbb{R}$. Sei (r_n) eine rationale Folge mit Grenzwert ρ. Wir definieren a^ρ als $\lim\limits_{n\to\infty} a^{r_n}$. Weiter definieren wir 0^ρ für $\rho > 0$ als 0.

Wir werden nun zeigen, dass die Regeln der Potenzrechnung, die wir in Proposition 11.2.78 hergeleitet haben, auch in diesem allgemeinen Kontext, also für beliebige reelle Zahlen als Exponenten gelten.

13.2.22 Proposition: Seien $a, b \in (0, \infty)$, und seien $\rho, \sigma \in \mathbb{R}$. Sei (r_n) eine Folge rationaler Zahlen, die gegen ρ konvergiert, und sei (s_n) eine Folge rationaler Zahlen, die gegen σ konvergiert. Dann gilt:

1. $a^\rho a^\sigma = a^{\rho+\sigma}$.
2. $\frac{a^\rho}{a^\sigma} = a^{\rho-\sigma}$.
3. $a^\rho b^\rho = (ab)^\rho$.
4. $\frac{a^\rho}{b^\rho} = (\frac{a}{b})^\rho$, sofern $b \neq 0$.

Beweis: Wie wir oben gesehen haben, gilt $\lim\limits_{n\to\infty} a^{r_n} = a^\rho$ und $\lim\limits_{n\to\infty} a^{s_n} = a^\sigma$.

1. Mit den Potenzregeln für Potenzen mit rationalen Exponenten gilt $a^{r_n}a^{s_n} = a^{r_n+s_n}$. Ferner ist $(r_n + s_n)$ eine Folge rationaler Zahlen, die gegen $\rho + \sigma$ konvergiert. Es folgt $\lim\limits_{n\to\infty} a^{r_n+s_n} = a^{\rho+\sigma}$. Somit gilt
$$a^{\rho+\sigma} = \lim_{n\to\infty} a^{r_n+s_n} = \lim_{n\to\infty} a^{r_n}a^{s_n} = (\lim_{n\to\infty} a^{r_n})(\lim_{n\to\infty} a^{s_n}) = a^\rho a^\sigma.$$
2. Es gilt $\frac{a^{r_n}}{a^{s_n}} = a^{r_n-s_n}$. Ferner ist $(r_n - s_n)$ eine Folge von rationalen Zahlen mit Grenzwert $\rho - \sigma$, also $\lim\limits_{n\to\infty} a^{r_n-s_n} = a^{\rho-\sigma}$. Es folgt
$$a^{\rho-\sigma} = \lim_{n\to\infty} a^{r_n-s_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{a^{r_n}}{a^{s_n}} = \frac{\lim a^{r_n}}{\lim a^{s_n}} = \frac{a^\rho}{a^\sigma}.$$
3. Es gilt $a^{r_n}b^{r_n} = (ab)^{r_n}$, also $\lim\limits_{n\to\infty}(ab)^{r_n} = (ab)^\rho$. Es folgt
$$(ab)^\rho = \lim_{n\to\infty}(ab)^{r_n} = \lim_{n\to\infty} a^{r_n}b^{r_n} = (\lim_{n\to\infty} a^{r_n})(\lim_{n\to\infty} b^{r_n}) = a^\rho b^\rho.$$
4. Es gilt $\frac{a^{r_n}}{b^{r_n}} = (\frac{a}{b})^{r_n}$, also $\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{a}{b})^{r_n} = (\frac{a}{b})^\rho$. Es folgt
$$(\frac{a}{b})^\rho = \lim_{n\to\infty}(\frac{a}{b})^{r_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{a^{r_n}}{b^{r_n}} = \frac{\lim a^{r_n}}{\lim b^{r_n}} = \frac{a^\rho}{b^\rho}.$$

□

13.2.23 Korollar: Für alle $\rho \in \mathbb{R}$ und alle $a > 0$ ist $a^\rho > 0$.

Beweis: Sei (r_n) eine Folge rationaler Zahlen mit Grenzwert ρ. Sei $a > 0$. Es ist $a^{r_n} > 0$, und mit dem Vergleichssatz 12.4.1 folgt
$$0 = \lim_{n\to\infty} 0 \leq \lim_{n\to\infty} a^{r_n} = a^\rho.$$
Da $a^\rho a^{-\rho} = a^{\rho-\rho} = a^0 = 1$, folgt $a^\rho \neq 0$, denn 0 ist in $\mathbb{R}$ nicht invertierbar. Es folgt $a^\rho > 0$, die Behauptung. □

Es fehlt noch der Beweis dafür, dass $(a^\rho)^\sigma = a^{\rho\sigma}$ ist. Diese Formel ist richtig, aber die werden wir erst später in 13.2.30 beweisen.

Jetzt, wo wir a^ρ für alle $a > 0$ und alle $\rho \in \mathbb{R}$ definiert haben, können wir die Funktion $x \mapsto x^\rho$ definieren.

13.2.24 Definition: Sei $\rho \in \mathbb{R}$. Die Funktion $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^\rho$ für alle $x \in (0, \infty)$ wird (allgemeine) **Potenzfunktion** genannt.

Meist verzichten wir, wenn wir von dieser Funktion sprechen, auf das Adjektiv „allgemein“.

Die folgende Proposition untersucht die allgemeine Potenzfunktion auf Monotonieeigenschaften.

13.2.25 Proposition: Die allgemeine Potenzfunktion $x \mapsto x^\rho$ ist

1. streng monoton wachsend, falls $\rho > 0$,
2. streng monoton fallend, falls $\rho < 0$.
3. die konstante Funktion $\hat{1}$, falls $\rho = 0$.

Beweis:

1. Sei $\rho > 0$, und sei $r \in \mathbb{Q}$ eine rationale Zahl, die zwischen 0 und ρ liegt, also $0 < r < \rho$. Dass es so ein r gibt, folgt aus Korollar 11.2.59. Sei (r_n) eine Folge in $\mathbb{Q}$, die gegen ρ konvergiert. Dann gibt es ein n_0, sodass $r < r_n$ für alle $n \geq n_0$ gilt.

   Sei $a < b$, also $\frac{b}{a} > 1$. Mit Proposition 11.2.80 folgt
   $$1 = (\frac{b}{a})^0 < (\frac{b}{a})^r < (\frac{b}{a})^{r_n} \text{ für fast alle } n.$$
   Mit dem Vergleichssatz 12.4.1 folgt
   $$1 < (\frac{b}{a})^r = \lim_{n\to\infty}(\frac{b}{a})^r \leq \lim_{n\to\infty}(\frac{b}{a})^{r_n} = \frac{b^\rho}{a^\rho},$$
   also $a^\rho < b^\rho$. Somit ist die Potenzfunktion für $\rho > 0$ streng monoton wachsend.

2. Sei $\rho < 0$, also $-\rho > 0$. Wie wir oben gezeigt haben, gilt $1 < \frac{b^{-\rho}}{a^{-\rho}} = \frac{a^\rho}{b^\rho}$, also $b^\rho < a^\rho$. Somit ist die Potenzfunktion für $\rho < 0$ streng monoton fallend.

3. Da $a^0 = 1$ für alle $a \in (0, \infty)$, ist die Potenzfunktion für $\rho = 0$ die konstante Funktion $\hat{1}$.

□

Halten wir hier noch zwei Regeln fest, die wir später noch benötigen werden:

13.2.26 Korollar: Seien $\rho, \sigma \in \mathbb{R}$, und sei $\rho < \sigma$. Dann gilt:

1. Ist $a > 1$, so gilt $a^\rho < a^\sigma$.
2. Ist $0 < a < 1$, so gilt $a^\rho > a^\sigma$.

Beweis:

1. Sei $a > 1$, und sei $\rho < \sigma$, also $\sigma - \rho > 0$. Da die Potenzfunktion $x \mapsto x^{\sigma-\rho}$ streng monoton wachsend ist, folgt $1 = 1^{\sigma-\rho} < a^{\sigma-\rho}$. Mit Proposition 13.2.22 gilt $a^{\sigma-\rho} = \frac{a^\sigma}{a^\rho}$, und wir erhalten die Abschätzung $1 < \frac{a^\sigma}{a^\rho}$. Es folgt $a^\rho < a^\sigma$, die Behauptung.
2. Sei $0 < a < 1$. Dann ist $\frac{1}{a} > 0$. Mit dem, was wir gerade bewiesen haben, folgt $\frac{1}{a^\rho} = (\frac{1}{a})^\rho < (\frac{1}{a})^\sigma = \frac{1}{a^\sigma}$. Somit gilt $a^\rho > a^\sigma$, die Behauptung.

□

Gleich werden wir folgende Formel benötigen:

13.2.27 Bemerkung: Für alle $k \in \mathbb{N}$ und alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt:

$$x^k - y^k = (x-y)q_k(x) \text{ mit } q_k(x) = x^{k-1} + x^{k-2}y + \cdots + xy^{k-2} + y^{k-1}.$$

Beweis: Es gilt nämlich

$$\begin{aligned}&(x-y)(x^{k-1} + x^{k-2}y + \cdots + xy^{k-2} + y^{k-1})\\ &= (x^k + x^{k-1}y + \cdots + xy^{k-1}) - (x^{k-1}y + x^{k-2}y^2 + \cdots + xy^{k-1} + y^k) = x^k - y^k.\end{aligned}$$

□

Zum Beweis der Formel $(a^\rho)^\sigma = a^{\rho\sigma}$ brauchen wir noch zwei Vorüberlegungen.

13.2.28 Lemma: Sei $r \in \mathbb{Q}$. Sind alle $x_n > 0$, und konvergiert (x_n) gegen x, so konvergiert (x_n^r) gegen x^r.

Beweis: Falls $r = 0$, so ist die Behauptung richtig. Angenommen, $r \in \mathbb{N}$. Dann folgt die Behauptung, indem wir die Produktformel in Proposition 12.4.12 r Mal anwenden. Ist $-r \in \mathbb{N}$, so betrachten wir die Folge $(\frac{1}{x_n})$. Diese konvergiert gegen

$\frac{1}{x}$, und mit dem eben bewiesenen folgt, dass $((\frac{1}{x_n})^{-r}) = (x_n^r)$ gegen $(\frac{1}{x})^{-r} = x^r$ konvergiert.

Sei nun $r \notin \mathbb{Z}$. Wir betrachten zunächst den Fall, dass $r = \frac{1}{q}$ mit $q \in \mathbb{N}$ und $q \geq 2$ ist. Setze $y_n = x_n^{\frac{1}{q}}$ und $y = x^{\frac{1}{q}}$. Mit Bemerkung 13.2.27 gilt

$$x_n - x = y_n^q - y^q = (y_n - y)[y_n^{q-1} + y_n^{q-2}y + \cdots + y^{q-1}].$$

Es ist $[y_n^{q-1} + y_n^{q-2}y + \cdots + y^{q-1}] \geq y^{q-1} > 0$, und es folgt

$$0 \leq y^{q-1}|y_n - y| \leq |x_n - x|.$$

Da $(|x_n - x|)$ eine Nullfolge ist, ist $(|y_n - y|)$ eine Nullfolge, das heißt, (y_n) konvergiert gegen y. Es gilt also, dass $((x_n)^{\frac{1}{q}})$ gegen $x^{\frac{1}{q}}$ konvergiert.

Sei nun $r = \frac{p}{q}$ mit $q \in \mathbb{N}$, $q \geq 2$ und $p \in \mathbb{Z}$. Mit dem eben bewiesenen konvergiert $((x_n)^{\frac{1}{q}})$ gegen $x^{\frac{1}{q}}$. Es folgt – wie wir oben gezeigt haben – dass $((x_n)^{\frac{p}{q}}) = (((x_n)^{\frac{1}{q}})^p)$ gegen $(x^{\frac{1}{q}})^p = x^{\frac{p}{q}}$ konvergiert. $\square$

13.2.29 Proposition: Sei $a > 0$. Konvergiert eine Folge (x_n) beliebiger reeller Zahlen gegen x, so konvergiert (a^{x_n}) gegen a^x.

Beweis: Der Beweis ist nahezu wortwörtlich gleich zu dem von Lemma 13.2.20. Wir betrachten zunächst den Fall, dass (x_n) gegen 0 konvergiert. Mit Proposition 13.2.19 wissen wir, dass $(a^{\frac{1}{n}})$ gegen 1 konvergiert. Mit den Rechenregeln für konvergente Folgen gilt auch $\lim_{n\to\infty} a^{-\frac{1}{n}} = 1$.

Sei $\varepsilon > 0$ gewählt. Dann gibt es ein $m \in \mathbb{N}$ mit $a^{\frac{1}{m}}, a^{-\frac{1}{m}} \in U_\varepsilon(1)$.

Da (x_n) eine Nullfolge ist, gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$, sodass $-\frac{1}{m} < x_n < \frac{1}{m}$ für alle $n \geq n_0$ gilt. Korollar 13.2.26 impliziert, dass a^{x_n} zwischen $a^{-\frac{1}{m}}$ und $a^{\frac{1}{m}}$ liegt. (Genauer, wenn $a \geq 1$, so gilt $a^{-\frac{1}{m}} \leq a^{x_n} \leq a^{\frac{1}{m}}$ und wenn $a < 1$, so gilt $a^{\frac{1}{m}} < a^{x_n} < a^{-\frac{1}{m}}$.) Somit gilt $a^{x_n} \in U_\varepsilon(1)$ für alle $n \geq n_0$, und es folgt, dass (a^{x_n}) gegen 1 konvergiert.

Sei nun (x_n) eine Folge, die gegen x konvergiert. Dann ist $(x_n - x)$ eine Nullfolge. Mit dem eben bewiesenen gilt $\lim_{n\to\infty} a^{x_n - x} = 1$. Auch die konstante Folge (a^x) ist konvergent (mit Grenzwert a^x). Es folgt, dass $(a^{x_n}) = (a^{x_n - x}a^x) = (a^{x_n - x})(a^x)$ konvergent ist. Es gilt

$$\lim_{n\to\infty} a^{x_n} = \lim_{n\to\infty}(a^{x_n - x}) \lim_{n\to\infty}(a^x) = 1 \cdot a^x = a^x.$$

$\square$

Jetzt haben wir endlich die Bausteine zusammen, um die noch fehlende Potenzregel zu beweisen.

13.2.30 Proposition: Für alle $a > 0$ und alle $\rho, \sigma \in \mathbb{R}$ gilt $(a^\rho)^\sigma = a^{\rho\sigma}$.

Beweis: Seien (r_n) und (s_n) Folgen rationaler Zahlen, die gegen ρ beziehungsweise σ konvergieren. Sei $k \in \mathbb{N}$ fest. Da $a^{r_n} > 0$, können wir Lemma 13.2.28 anwenden, und es folgt, dass $((a^{r_n})^{s_k})$ gegen $(a^\rho)^{s_k}$ konvergiert. Da die Folge $(r_n s_k)$ gegen ρs_k konvergiert, gilt mit Proposition 13.2.29, dass $(a^{r_n s_k})$ gegen $a^{\rho s_k}$ konvergiert. Es folgt $(a^\rho)^{s_k} = a^{\rho s_k}$, denn $(a^{r_n})^{s_k} = a^{r_n s_k}$.

Die Folge (ρs_n) konvergiert gegen $\rho\sigma$. Mit Proposition 13.2.29 folgt $\lim\limits_{n\to\infty} a^{\rho s_n} = a^{\rho\sigma}$. Wieder mit Proposition 13.2.29 gilt $\lim\limits_{n\to\infty} (a^\rho)^{s_n} = (a^\rho)^\sigma$. Da $a^{\rho s_n} = (a^\rho)^{s_n}$, folgt $(a^\rho)^\sigma = a^{\rho\sigma}$, die Behauptung. $\square$

13.2.31 Korollar: Sei $\rho \neq 0$ eine reelle Zahl. Das Bild der allgemeinen Potenzfunktion $f : (0,\infty) \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^\rho$, ist $(0,\infty)$. Die Umkehrfunktion von $x \mapsto x^\rho$ ist $x \mapsto x^{\frac{1}{\rho}}$.

Beweis: Sei $y > 0$. Dann existiert $y^{\frac{1}{\rho}} \in (0,\infty)$, und es gilt $(y^{\frac{1}{\rho}})^\rho = y$. Somit liegt y im Bild von f, also $(0,\infty) \subseteq \mathrm{Bild}(f)$. Mit Korollar 13.2.23 gilt auch $\mathrm{Bild}(f) \subseteq (0,\infty)$, also $\mathrm{Bild}(f) = (0,\infty)$. Da $(x^\rho)^{\frac{1}{\rho}} = (x^{\frac{1}{\rho}})^\rho = x$ ist $x \mapsto x^{\frac{1}{\rho}}$ die Umkehrfunktion zu f. $\square$

Zusammenfassung

Fassen wir alles noch einmal zusammen, was wir über die allgemeine Potenz gezeigt haben.

- Der Ausdruck a^ρ ist für alle $a > 0$ und alle $\rho \in \mathbb{R}$ definiert.
- Für $a < 0$ ist a^ρ nur für $\rho \in \mathbb{Z}$ definiert.
- Für $a = 0$ und $\rho > 0$ setzen wir $0^\rho = 0$. Für $\rho \leq 0$ ist 0^ρ nicht definiert.
- Für alle $a \geq 0$ ist $a^0 = 1$.
- Um a^ρ zu bilden, wählen wir eine Folge (r_n) rationaler Zahlen, die gegen ρ konvergiert. Da die r_n rational sind, können wir a^{r_n} bilden. Die Folge (a^{r_n}) ist konvergent, und wir setzen $a^\rho = \lim\limits_{n\to\infty} a^{r_n}$. (Wichtig ist dabei, dass diese

Konstruktion unabhängig von der Folge (r_n) ist, denn es gibt viele Folgen rationaler Zahlen, die gegen ρ konvergieren.)

- Für alle $a > 0$ ist $a^\rho > 0$.

Beim Rechnen mit allgemeinen Potenzen gelten folgende Regeln:

13.2.32 Satz: Für alle $a, b > 0$ und alle $\rho, \sigma \in \mathbb{R}$ gilt

1. $a^\rho a^\sigma = a^{\rho+\sigma}$.
2. $\frac{a^\rho}{a^\sigma} = a^{\rho-\sigma}$.
3. $a^\rho b^\rho = (ab)^\rho$.
4. $\frac{a^\rho}{b^\rho} = (\frac{a}{b})^\rho$, sofern $b \neq 0$.
5. $(a^\rho)^\sigma = a^{\rho\sigma}$.

Die Potenzfunktion hat folgende Eigenschaften:

13.2.33 Satz: Sei $\rho \in \mathbb{R}$, $\rho \neq 0$. Sei $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^\rho$, die Potenzfunktion. Dann gilt:

1. $\mathrm{Bild}(f) = (0, \infty)$.
2. Ist $\rho > 0$, so ist f streng monoton wachsend.
3. Ist $\rho < 0$, so ist f streng monoton fallend.
4. Die Umkehrfunktion g von f ist $g : (0, \infty) \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^{\frac{1}{\rho}}$.
5. Für $\rho = 0$ ist $f = \hat{1}$.

13.2.4 Exponentialfunktion

Wir können jetzt zu jeder reellen Zahl $a > 0$ und jeder reellen Zahl ρ die reelle Zahl a^ρ bilden. Mit dieser Konstruktion definieren wir die so genannte Exponentialfunktion.

13.2.34 Definition: Sei $a > 0$. Die **Exponentialfunktion** $\exp_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist definiert durch $\exp_a(x) = a^x$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Die reelle Zahl a wird die **Basis** der Exponentialfunktion genannt.

Die Exponentialfunktion hat folgende Eigenschaften:

13.2.35 Satz: (Eigenschaften der Exponentialfunktion)

Sei $a > 0$. Dann gilt

1. Für $a \neq 1$ ist $\operatorname{Bild}(\exp_a) = (0, \infty)$.
2. Für $a = 1$ ist $\operatorname{Bild}(\exp_a) = \{1\}$.
3. Falls $a > 1$, so ist $\exp_a$ streng monoton wachsend.
4. Falls $0 < a < 1$, so ist $\exp_a$ streng monoton fallend.
5. Falls $a = 1$, so gilt $\exp_a = \hat{1}$.
6. Es sind $\exp_a(1) = a$ und $\exp_a(0) = 1$.
7. Für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt $\exp_a(x + y) = \exp_a(x) \exp_a(y)$.

Beweis:

1. Da $a^x > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$, gilt $\operatorname{Bild}(\exp_a) \subseteq (0, \infty)$.

   Sei $y \in (0, \infty)$. Wir müssen zeigen, dass es ein $x \in \mathbb{R}$ mit $a^x = y$ gibt.

   Sei zunächst $a > 1$. Es folgt $\frac{1}{a} < 1$. Wir haben in Beispiel 4 in 12.1.11 gesehen, dass $((\frac{1}{a})^n)$ gegen 0 konvergiert. Es gibt also ein m mit $(\frac{1}{a})^m = a^{-m} \leq y$ und $(\frac{1}{a})^m \leq \frac{1}{y}$, also $a^m \geq y$. Somit gilt die Ungleichungskette $a^{-m} \leq y \leq a^m$. Setze $s = -m$ und $t = m$. Wir wenden auf das Intervall $[s, t]$ die Intervallhalbierungsmethode an (vergleiche Beispiel 12.5.23), und zwar so, dass wir für die Intervallschachtelung $\langle s_n | t_n \rangle$ stets $a^{s_n} \leq y \leq a^{t_n}$ erhalten. Diese Intervallschachtelung erfasst genau einen Punkt x (siehe Satz 12.5.22). Da (s_n) und (t_n) gegen x konvergieren, gilt mit Proposition 13.2.29 $\lim\limits_{n\to\infty} a^{s_n} = a^x = \lim\limits_{n\to\infty} a^{t_n}$. Der Vergleichssatz liefert

   $$a^x = \lim_{n\to\infty} a^{s_n} \leq \lim_{n\to\infty} y \leq \lim_{n\to\infty} a^{t_n} = a^x,$$

   also $a^x \leq y \leq a^x$. Es folgt $a^x = y$, und x ist ein Urbild von y unter $\exp_a$.

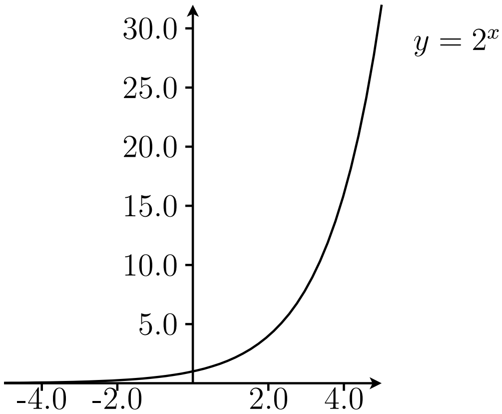
   Sei nun $0 < a < 1$. Dann gilt $\frac{1}{a} > 1$. Mit dem eben bewiesenen gibt es ein $x \in \mathbb{R}$ mit $(\frac{1}{a})^x = \frac{1}{a^x} = \frac{1}{y}$. Es folgt $a^x = y$. Sowohl für $a > 1$ also auch für $0 < a < 1$ gilt also $(0, \infty) \subseteq \operatorname{Bild}(\exp_a)$, also $\operatorname{Bild}(\exp_a) = (0, \infty)$.

2. Für $a = 1$ ist $\exp_1$ die konstante Funktion $\hat{1}$. Deren Bild ist $\{1\}$.
3. Dies ist die erste Aussage von Korollar 13.2.26.
4. Dies ist die zweite Aussage von Korollar 13.2.26.
5. Es sind $\exp_a(1) = a^1 = a$ und $\exp_a(0) = a^0 = 1$.

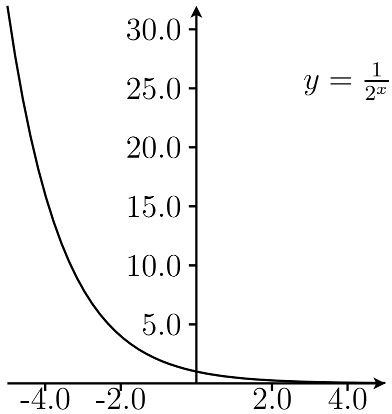
6. Für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt $\exp_a(x+y) = a^{x+y} = a^x \cdot a^y = \exp_a(x)\exp_a(y)$.

$\square$

Die folgende Skizze zeigt den Graph von $\exp_2$:



Es folgt der Graph von $\exp_{\frac{1}{2}}$:



Mit dem Applet, das sich hinter folgendem Link verbirgt, können Sie die Graphen der Exponentialfunktion zu verschiedenen Basen anschauen.

http://www.geogebra.org/de/examples/exp/exp01.html

13.2.36 Aufgabe: Sei $a > 1$. Beweisen Sie, dass das Bild der Einschränkung von $\exp_a$ auf $(-\infty, 0)$ das Intervall $(0, 1)$ ist.

In Definition 12.5.6 haben wir die Euler'sche Zahl e eingeführt. Auch diese können wir natürlich als Basis der Exponentialfunktion verwenden. In Anwendungen der Chemie, Physik oder Biologie wird diese Funktion häufig verwendet, und daher erhält sie eine gesonderte Bezeichnung.

13.2.37 Notation: Die Exponentialfunktion $\exp_e$ wird mit exp (also ohne den Index e) bezeichnet. Man nennt exp oft auch einfach e-**Funktion**. An Stelle von $\exp(x)$ schreibt man auch e^x.

In Definition 12.5.6 haben wir e als Grenzwert der Folge $((1+\frac{1}{n})^{n+1})$ definiert. In Proposition 12.5.7 haben wir gesehen, dass auch $\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n = e$ gilt. Der folgende Satz bietet eine Verallgemeinerung von 12.5.7. Zum Beweis benötigen wir ein Lemma:

13.2.38 Lemma: Sei (a_n) eine Folge mit Grenzwert a, und sei (k_n) eine Folge natürlicher Zahlen, sodass $(\frac{1}{k_n})$ eine Nullfolge ist. Dann konvergiert die Folge (a_{k_n}) ebenfalls gegen a.

Beweis: Sei $\varepsilon > 0$ vorgegeben. Dann gibt es ein n_0, sodass $|a_n - a| < \varepsilon$ für alle $n > n_0$ ausfällt. Da $(\frac{1}{k_n})$ eine Nullfolge ist, gibt es ein n_1, sodass $\frac{1}{k_n} < \frac{1}{n_0}$ für alle $n > n_1$ ist. Es folgt $k_n > n_0$ für alle $n > n_1$. Für diese n gilt dann $|a_{k_n} - a| < \varepsilon$, das heißt, (a_{k_n}) konvergiert gegen a. □

13.2.39 Satz: Sei (x_n) eine Nullfolge, und seien $x_n > -1$ und $x_n \neq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt $\lim\limits_{n\to\infty}(1+x_n)^{\frac{1}{x_n}} = e$.

Beweis: Wir nehmen zunächst an, dass alle Folgenglieder x_n positiv sind. Dann gibt es ein m, sodass $0 < x_n \leq 1$ für alle $n \geq m$ ist. Für diese n gilt $\frac{1}{x_n} \geq 1$. Zu jedem dieser n gibt es eine natürliche Zahl k_n mit

$$k_n \leq \frac{1}{x_n} < k_n + 1, \text{ also } \frac{1}{k_n+1} < x_n \leq \frac{1}{k_n}.$$

Die Folge (k_n) ist eine Folge natürlicher Zahlen, und da $0 \leq \frac{1}{k_n+1} < x_n$ gilt, folgt, dass $(\frac{1}{k_n+1})$ eine Nullfolge ist. Wegen $\frac{1}{k_n} \leq \frac{2}{k_n+1}$ ist auch $(\frac{1}{k_n})$ eine Nullfolge.

Aus der Ungleichung $\frac{1}{k_n+1} < x_n \leq \frac{1}{k_n}$ folgt

$$1 + \frac{1}{k_n+1} < 1 + x_n \leq 1 + \frac{1}{k_n}.$$

Da die Potenzfunktion für Exponenten > 0 streng monoton wächst (Proposition 13.2.25), folgt

$$(1+\frac{1}{k_n+1})^{\frac{1}{x_n}} < (1+x_n)^{\frac{1}{x_n}} \leq (1+\frac{1}{k_n})^{\frac{1}{x_n}}.$$

Da die Exponentialfunktion für Basen > 1 streng monoton wächst (Satz 13.2.35), gilt

$$(1+\frac{1}{k_n+1})^{k_n} \leq (1+\frac{1}{k_n+1})^{\frac{1}{x_n}} \text{ und } (1+\frac{1}{k_n})^{\frac{1}{x_n}} < (1+\frac{1}{k_n})^{k_n+1}.$$

Somit erhalten wir insgesamt die Abschätzung

$$(1+\frac{1}{k_n+1})^{k_n} < (1+x_n)^{\frac{1}{x_n}} < (1+\frac{1}{k_n})^{k_n+1}.$$

Mit Definition 12.5.6 und Lemma 13.2.38 folgt, dass $((1+\frac{1}{k_n})^{k_n+1})$ gegen e konvergiert. Die linke Seite der Ungleichung schreiben wir um: Es ist $(1+\frac{1}{k_n+1})^{k_n} = (1+\frac{1}{k_n+1})^{k_n+1}(1+\frac{1}{k_n+1})^{-1}$. Es ist $\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{1}{k_n+1})^{k_n+1} = e$ (mit Proposition 12.5.7 und Lemma 13.2.38), und es ist $\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{1}{k_n+1})^{-1} = 1$. Somit ist $\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{1}{k_n+1})^{k_n} = e$. Mit dem Einschnürungssatz 12.4.3 folgt $\lim\limits_{n\to\infty}(1+x_n)^{\frac{1}{x_n}} = e$.

Wir behalten die Annahme, alle Folgenglieder x_n seien positiv, bei und untersuchen nun den Grenzwert der Folge $(1-x_n)^{\frac{1}{x_n}}$.

Aus der Ungleichung oben, also

$$k_n \leq \frac{1}{x_n} < k_n+1, \text{ also } \frac{1}{k_n+1} < x_n \leq \frac{1}{k_n},$$

folgt

$$1-\frac{1}{k_n} \leq 1-x_n < 1-\frac{1}{k_n+1}.$$

Wie oben folgt

$$(1-\frac{1}{k_n})^{\frac{1}{x_n}} \leq (1-x_n)^{\frac{1}{x_n}} < (1-\frac{1}{k_n+1})^{\frac{1}{x_n}}.$$

Da die Exponentialfunktion für Basen < 1 streng monoton fällt, folgt daraus

$$(1-\frac{1}{k_n})^{k_n+1} < (1-\frac{1}{k_n})^{\frac{1}{x_n}} \text{ und } (1-\frac{1}{k_n+1})^{\frac{1}{x_n}} \leq (1-\frac{1}{k_n+1})^{k_n},$$

also insgesamt

$$(1-\frac{1}{k_n})^{k_n+1} < (1-x_n)^{\frac{1}{x_n}} < (1-\frac{1}{k_n+1})^{k_n}.$$

Die linke Seite dieser Ungleichung schreiben wir wieder um: Es ist $(1-\frac{1}{k_n})^{k_n+1} = (1-\frac{1}{k_n})^{k_n}(1-\frac{1}{k_n})$. Mit Proposition 12.5.7 und Lemma 13.2.38 konvergiert $(1-\frac{1}{k_n})^{k_n}$ gegen $\frac{1}{e}$, und $(1-\frac{1}{k_n})$ konvergiert gegen 1. Somit konvergiert $(1-\frac{1}{k_n})^{k_n+1}$ gegen

$\frac{1}{e}$. Die rechte Seite der Ungleichung ist $(1-\frac{1}{k_n+1})^{k_n} = (1-\frac{1}{k_n+1})^{k_n+1}(1-\frac{1}{k_n+1})^{-1}$. Die Folge $(1-\frac{1}{k_n+1})^{k_n+1}$ konvergiert gegen $\frac{1}{e}$, und $(1-\frac{1}{k_n+1})^{-1}$ konvergiert gegen 1. Es folgt, dass $(1-\frac{1}{k_n+1})^{k_n}$ gegen $\frac{1}{e}$ konvergiert. Mit dem Einschnürungssatz gilt $\lim\limits_{n\to\infty}(1-x_n)^{\frac{1}{x_n}} = \frac{1}{e}$ und damit $\lim\limits_{n\to\infty}(1-x_n)^{-\frac{1}{x_n}} = e$.

Unsere bisherigen Überlegungen zeigen, dass die Behauptung des Satzes richtig ist, sofern alle Folgenglieder von (x_n) positiv sind oder alle negativ sind. Es folgt, dass sie auch richtig ist, wenn fast alle positiv oder fast alle negativ sind, denn bei Konvergenzuntersuchungen interessieren uns ja nur Endstücke von Folgen. Es bleibt der Fall zu untersuchen, dass in (x_n) unendlich viele Folgenglieder positiv und unendlich viele negativ sind. Wir können dann (x_n) in zwei Teilfolgen (x'_n) und (x''_n) zerlegen, von denen die erste nur positive und die zweite nur negative Glieder enthält. Mit dem bisher Bewiesenen gilt $\lim\limits_{n\to\infty}(1+x'_n)^{\frac{1}{x'_n}} = e$ und $\lim\limits_{n\to\infty}(1+x''_n)^{\frac{1}{x''_n}} = e$. Sei $\varepsilon > 0$ vorgegeben. Dann liegen fast alle Folgenglieder von $((1+x'_n)^{\frac{1}{x'_n}})$ in $U_\varepsilon(e)$ und fast alle von $((1+x''_n)^{\frac{1}{x''_n}})$ in $U_\varepsilon(e)$. Somit liegen fast alle Folgenglieder von $((1+x_n)^{\frac{1}{x_n}})$ in $U_\varepsilon(e)$, und es folgt die Behauptung. □

13.2.5 Logarithmus

Im letzten Abschnitt haben wir gezeigt, dass die Funktion $\exp_a$ ($a > 0$ und $a \neq 1$) monoton ist, und dass ihr Bild $(0,\infty)$ ist. Mit Proposition 13.1.11 folgt, dass es zu $\exp_a$ eine Umkehrfunktion gibt. Diese erhält wiederum einen Namen:

13.2.40 Definition: Sei $a > 0$, $a \neq 1$. Die Umkehrfunktion der Exponentialfunktion $\exp_a$ zur Basis a wird **Logarithmus zur Basis** a genannt und mit $\log_a$ bezeichnet.

13.2.41 Aufgabe: Berechnen Sie $\log_2(8)$.

Der Logarithmus $\log_a : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ ist also dadurch definiert, dass $\log_a(\exp_a(x)) = x$ für alle $x \in (0,\infty)$ und $\exp_a(\log_a(x)) = x$ für alle $a \in \mathbb{R}$ gilt. Auch diesmal fassen wir die Eigenschaften des Logarithmus zusammen:

13.2.42 Satz: (Eigenschaften des Logarithmus)

Sei $a > 0$ und $a \neq 1$. Dann gilt

1. $\mathrm{Bild}(\log_a) = \mathbb{R}$.
2. Für $a > 1$ ist $\log_a$ streng monoton wachsend.

3. Für $0 < a < 1$ ist $\log_a$ streng monoton fallend.
4. $\log_a(1) = 0$ und $\log_a(a) = 1$.
5. Ist $a > 1$, so ist $\log_a(x) < 0$ für alle $x < 1$, und $\log_a(x) > 0$ für alle $x > 1$.
6. Ist $0 < a < 1$, so ist $\log_a(x) > 0$ für alle $x < 1$, und $\log_a(x) < 0$ für alle $x > 1$.
7. Für alle $x, y \in (0, \infty)$ gilt $\log_a(xy) = \log_a(x) + \log_a(y)$ und $\log_a(\frac{x}{y}) = \log_a(x) - \log_a(y)$.
8. Für alle $\rho \in \mathbb{R}$ und alle $x > 0$ gilt $\log_a(x^\rho) = \rho \log_a(x)$.

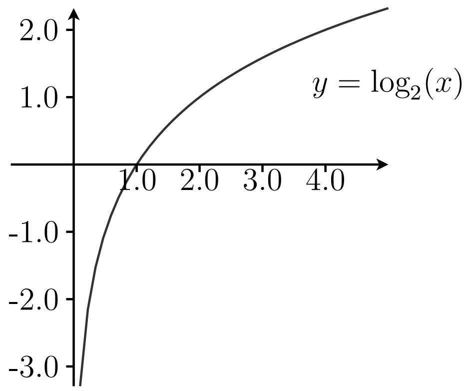
Beweis:

1. Sei $y \in \mathbb{R}$. Setze $x = a^y$. Dann gilt $\log_a(x) = y$, das heißt, jedes $y \in \mathbb{R}$ besitzt ein Urbild unter $\log_a$.
2. Sei $a > 1$. Mit Satz 13.2.35 ist $\exp_a$ streng monoton wachsend. Mit Proposition 13.1.11 ist die Umkehrfunktion, also $\log_a$ ebenfalls streng monoton wachsend.
3. Sei $0 < a < 1$. Mit Satz 13.2.35 ist $\exp_a$ streng monoton fallend. Mit Proposition 13.1.11 ist $\log_a$ ebenfalls streng monoton fallend.
4. Es gilt $a^0 = 1$, also $\log_a(1) = 0$. Analog ist $a^1 = a$, also $\log_a(a) = 1$.
5. Sei $a > 1$. Sei $x < 1$. Da $\log_a$ streng monoton wachsend ist, gilt $\log_a(x) < \log_a(1) = 0$, also $\log_a(x) < 0$. Ist $x > 1$, so gilt analog $0 = \log_a(1) < \log_a(x)$, also $\log_a(x) > 0$.
6. Der Beweis ist analog zum Fall $a > 1$.
7. Seien $x, y \in \mathbb{R}$. Setze $x' = \log_a(x)$ und $y' = \log_a(y)$. Dann gilt
$$\exp_a(x' + y') = \exp_a(x') \exp_a(y') = xy, \text{ also}$$
$$\log_a(x) + \log_a(y) = x' + y' = \log_a(\exp_a(x' + y')) = \log_a(xy).$$
Analog gilt
$$\exp_a(x' - y') = \frac{\exp_a(x')}{\exp_a(y')} = \frac{x}{y}.$$
Es folgt
$$\log_a(x) - \log_a(y) = x' - y' = \log_a(\exp_a(x' - y')) = \log_a(\frac{x}{y}).$$

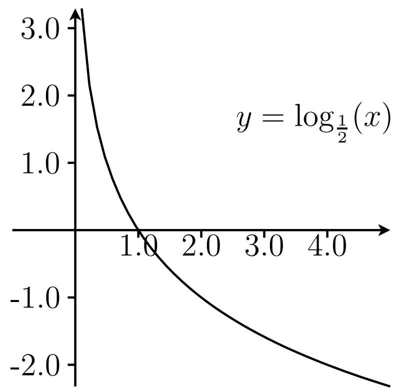
8. Es gilt
$$a^{\log_a(x^\rho)} = x^\rho = (a^{\log_a(x)})^\rho = a^{\rho \log_a(x)},$$
und wegen der Injektivität von $\exp_a$ folgt $\log_a(x^\rho) = \rho \log_a(x)$.

□

Es folgt eine Skizze des Graphen von $\log_2$:



Und hier der Graph von $\log_{\frac{1}{2}}$:



Wenn die Euler'sche Zahl e die Basis des Logarithmus ist, erhält die Funktion eine spezielle Bezeichnung.

13.2.43 Definition: Die Funktion $\log_e : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ wird mit ln bezeichnet und **natürlicher Logarithmus** genannt. Es ist auch üblich, den natürlichen Logarithmus mit log zu bezeichnen.

Man kann die Exponential- und die Logarithmusfunktion zur Basis a und auch die allgemeine Potenzfunktion durch die e-Funktion und den natürlichen Logarithmus ausdrücken. Es gilt nämlich:

13.2.44 Proposition: Sei $a > 0$. Dann gilt:

1. Für alle $x > 0$ ist $x^a = \exp(a \ln(x))$.
2. Für alle $x \in \mathbb{R}$ ist $\exp_a(x) = \exp(x \ln(a))$.
3. Sei $a \neq 1$. Für alle $x > 0$ ist $\log_a(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(a)}$.

13.2.45 Aufgabe: Beweisen Sie Proposition 13.2.44.

Für Logarithmen gilt ein analoges Resultat zu Proposition 13.2.29:

13.2.46 Proposition: Sei $a > 0$, $a \neq 1$. Sei (x_n) eine Folge positiver reeller Zahlen mit Grenzwert x. Dann gilt $\lim\limits_{n\to\infty}(\log_a(x_n)) = \log_a(x)$.

Beweis: Wir betrachten zunächst den Spezialfall $x = 1$. Sei $\varepsilon > 0$ gewählt. Dann gilt

$$\exp_a(-\varepsilon) < \exp_a(0) = 1 < \exp_a(\varepsilon) \text{ für } a > 0, \text{ und}$$

$$\exp_a(\varepsilon) < \exp_a(0) = 1 < \exp_a(-\varepsilon) \text{ für } 0 < a < 1,$$

denn im ersten Fall ist $\exp_a$ monoton wachsend, und im zweiten Fall ist $\exp_a$ monoton fallend. Da (x_n) gegen 1 konvergiert, gibt es in beiden Fällen ein n_0, sodass für alle $n \geq n_0$ gilt:

$$\exp_a(-\varepsilon) < x_n < \exp_a(\varepsilon) \text{ für } a > 0, \text{ und}$$

$$\exp_a(\varepsilon) < x_n < \exp_a(-\varepsilon) \text{ für } 0 < a < 1.$$

Wir wenden $\log_a$ auf diese Ungleichungen an und erhalten

$$-\varepsilon < \log_a(x_n) < \varepsilon \text{ für } a > 0, \text{ denn } \log_a \text{ ist monoton wachsend, beziehungsweise}$$

$$-\varepsilon < \log_a(x_n) < \varepsilon \text{ für } 0 < a < 1, \text{ denn } \log_a \text{ ist monoton fallend.}$$

Es folgt, dass (x_n) gegen $0 = \log_a(1)$ konvergiert.

Ist nun x eine beliebige positive, reelle Zahl, so konvergiert $(\frac{x_n}{x})$ gegen 1. Mit dem eben bewiesenen konvergiert $(\log_a(\frac{x_n}{x}))$ gegen 0. Es gilt aber $\log_a(\frac{x_n}{x}) = \log_a(x_n) - \log_a(x)$ mit Satz 13.2.42, das heißt, $(\log_a(x_n) - \log_a(x))$ konvergiert gegen 0. Es folgt $\lim\limits_{n\to\infty}(\log_a(x_n)) = \log_a(x)$. □

Aus diesem Ergebnis erhalten wir:

13.2.47 Proposition: Sei $\rho \in \mathbb{R}$. Sei (x_n) eine Folge positiver reeller Zahlen mit Grenzwert x. Dann gilt $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n^\rho) = x^\rho$.

Beweis: Sei $a > 1$. Mit Proposition 13.2.46 folgt, dass $(\log_a(x_n))$ gegen $\log_a(x)$ konvergiert. Somit konvergiert $(\rho \log_a(x_n)) = (\log_a(x_n^\rho))$ (vergleiche Satz 13.2.42) gegen $\log_a(x^\rho)$. Mit Proposition 13.2.29 folgt, dass $(a^{\log_a(x_n^\rho)}) = (\exp_a(\log_a(x_n^\rho))) = (x_n^\rho)$ gegen $a^{\log_a(x^\rho)} = \exp_a(\log_a(x^\rho)) = x^\rho$ konvergiert, die Behauptung. $\square$

In Kapitel 15.3 werden wir das folgende Ergebnis benötigen:

13.2.48 Proposition: Sei $a > 0$, und sei (x_n) eine Nullfolge mit $x_n \neq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a^{x_n} - 1}{x_n} = \ln a.$$

Beweis: Die Behauptung ist richtig, wenn $a = 1$ ist, denn dann ist $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1^{x_n}-1}{x_n} = 0 = \ln 1$. Wir können also annehmen, dass $a \neq 1$ ist.

Setze $y_n = a^{x_n} - 1$.

Da (x_n) gegen 0 konvergiert, folgt mit Proposition 13.2.29, dass (a^{x_n}) gegen $a^0 = 1$ konvergiert. Somit ist (y_n) eine Nullfolge. Da $a^\rho > 0$ für alle $a > 0$ (Korollar 13.2.23), ist $y_n > -1$, und da $a \neq 1$, ist $y_n \neq 0$. Wir können also Satz 13.2.39 auf (y_n) anwenden, und erhalten

$$\lim_{n\to\infty} (1 + y_n)^{\frac{1}{y_n}} = e.$$

Mit Proposition 13.2.46 folgt

$$\lim_{n\to\infty} \ln((1 + y_n)^{\frac{1}{y_n}}) = \ln e = 1.$$

Mit Aussage 8 in 13.2.42 ist $\ln((1 + y_n)^{\frac{1}{y_n}}) = \frac{\ln(1+y_n)}{y_n}$, also

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln(1 + y_n)}{y_n} = 1.$$

Es folgt

$$\lim_{n\to\infty} \frac{y_n}{\ln(1 + y_n)} = 1.$$

Betrachten wir den Ausdruck $\ln(1 + y_n)$ genauer: $\ln(1 + y_n) = \ln(1 + a^{x_n} - 1) = \ln(a^{x_n}) = x_n \ln(a)$ mit Aussage 8 in 13.2.42. Wir formen um und erhalten

$$x_n = \frac{\ln(1 + y_n)}{\ln(a)}.$$

Dann gilt

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a^{x_n} - 1}{x_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{y_n}{\ln(1 + y_n)} \ln(a) = \ln(a) \lim_{n\to\infty} \frac{y_n}{\ln(1 + y_n)} = \ln(a),$$

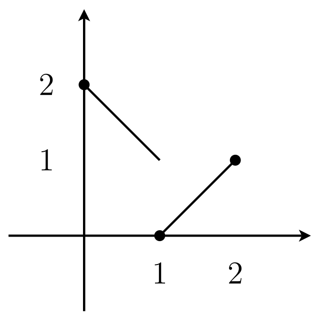
denn $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{y_n}{\ln(1+y_n)} = 1$. $\square$

Lösungen der Aufgaben

Lösungen der Aufgaben in 13.1

Aufgabe 13.1.12

Sei $f : [0,2] \to \mathbb{R}$ definiert durch $f(x) = \begin{cases} 2-x, & \text{falls } x \in [0,1) \\ x-1 & \text{falls } x \in [1,2] \end{cases}$. Ihr Graph ist



Wieder wird durch den Punkt die „Sprungstelle“ des Graphen angedeutet.

Die Funktion ist auf dem Intervall $[0,1)$ streng monoton fallend und auf dem Intervall $[1,2]$ streng monoton wachsend. Somit ist sie auf $[0,2]$ nicht monoton. Seien $x, y \in [0,2]$ mit $x \neq y$. Falls $x, y \in [0,1)$, so gilt $f(x) \neq f(y)$, denn f ist streng monoton fallend auf $[0,1)$. Falls $x, y \in [1,2]$, so gilt analog $f(x) \neq f(y)$. Falls $x \in [0,1)$ und $y \in [1,2]$, so gilt $f(x) \neq f(y)$, denn $f(x) > 1$ und $f(y) \leq 1$. Analog gilt $f(x) \neq f(y)$, sofern $x \in [1,2]$ und $y \in [0,1)$. Aus $x \neq y$ folgt also $f(x) \neq f(y)$, das heißt, f ist injektiv.

Aufgabe 13.1.17

Sei $f = \mathrm{id} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Dann gilt $f^2(x) = f(x)f(x) = x^2$ und $(f \circ f)(x) = f(f(x)) = x$. Es gilt also $f^2 \neq f \circ f$.

Aufgabe 13.1.18

Die Funktion $\frac{\hat{1}}{\mathrm{id}}$ ist die Kehrwert-Funktion, denn $\frac{\hat{1}}{\mathrm{id}}(x) = \frac{\hat{1}(x)}{\mathrm{id}(x)} = \frac{1}{x}$ für alle $x \neq 0$.

Die Funktion id^3 erhebt jedes x in die dritte Potenz, also $\mathrm{id}^3(x) = x^3$.

Aufgabe 13.1.22

1. Sei $f : D \to \mathbb{R}$ surjektiv. Zu jedem $a \in \mathbb{R}$ gibt es ein $y \in \mathbb{R}$ mit $y < a$. Da f surjektiv ist, liegt y im Bild von f, das heißt, f ist nicht nach unten beschränkt. Sei $b \in \mathbb{R}$. Dann gibt es ein $z \in \mathbb{R}$ mit $z > b$. Auch z liegt im Bild von f, und es folgt, dass f nicht nach oben beschränkt ist.
2. Die Größte-Ganze-Funktion (siehe Beispiele 13.1.10) liefert so ein Beispiel. Das Bild sind die ganzen Zahlen, somit ist die Funktion nicht beschränkt. Sie ist nicht surjektiv, denn kein $y \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ liegt im Bild.

Aufgabe 13.1.23

1. Seien f und g beschränkt. Dann gibt es $b, b' \in \mathbb{R}$ mit $|f(x)| \leq b$ und $|g(x)| \leq b'$ für alle $x \in D$. Wir müssen zeigen, dass $|f+g|$, $|f-g|$, $|\alpha f|$ und $|fg|$ nach oben beschränkt sind. Auf geht's:

   (a) $f+g$:

   $$|f+g|(x) = |(f+g)(x)| = |f(x)+g(x)| \leq |f(x)| + |g(x)| \leq b + b'.$$

   Dabei haben wir beim ersten Ungleichungszeichen die Dreiecksungleichung benutzt. Es folgt, dass $|f+g|$ durch $b+b'$ nach oben beschränkt ist.

   (b) $f-g$:

   $$\begin{aligned} |f-g|(x) &= |(f-g)(x)| = |f(x)-g(x)| = |f(x)+(-g(x))| \\ &\leq |f(x)| + |-g(x)| = |f(x)| + |g(x)| \leq b + b'. \end{aligned}$$

   Wieder haben wir beim ersten Ungleichungszeichen die Dreiecksungleichung benutzt. Es folgt, dass $|f-g|$ durch $b+b'$ nach oben beschränkt ist.

   (c) αf:

   $$|\alpha f|(x) = |(\alpha f)(x)| = |\alpha f(x)| = |\alpha||f(x)| \leq |\alpha| b.$$

   Es folgt, dass $|\alpha f|$ durch $|\alpha| b$ nach oben beschränkt ist.

   (d) fg:

   $$|fg|(x) = |(fg)(x)| = |f(x)g(x)| = |f(x)||g(x)| \leq bb'.$$

   Es folgt, dass $|fg|$ durch bb' nach oben beschränkt ist.

2. Man nehme im ersten Teil $D = \mathbb{N}$.

3. Sei $f = \hat{1} : [1, \infty) \to \mathbb{R}$ die konstante Funktion, und sei $g = \frac{\hat{1}}{\mathrm{id}} : [1, \infty) \to \mathbb{R}$ die Kehrwert-Funktion. Beide sind beschränkt. Aber $\frac{f}{g} = \mathrm{id} : [1, \infty) \to \mathbb{R}$ ist nicht nach oben beschränkt.

Lösungen der Aufgaben in 13.2

Aufgabe 13.2.3 Es gilt:

$$\begin{aligned}
c_0 &= \sum_{i+j=0} a_i \cdot b_j &&= a_0 b_0 \\
c_1 &= \sum_{i+j=1} a_i \cdot b_j &&= a_0 b_1 + a_1 b_0 \\
c_2 &= \sum_{i+j=2} a_i \cdot b_j &&= a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0 \\
c_3 &= \sum_{i+j=3} a_i \cdot b_j &&= a_0 b_3 + a_1 b_2 + a_2 b_1 + a_3 b_0 \\
c_4 &= \sum_{i+j=4} a_i \cdot b_j &&= a_0 b_4 + a_1 b_3 + a_2 b_2 + a_3 b_1 + a_4 b_0 \\
c_5 &= \sum_{i+j=5} a_i \cdot b_j &&= a_0 b_5 + a_1 b_4 + a_2 b_3 + a_3 b_2 + a_4 b_1 + a_5 b_0.
\end{aligned}$$

Aufgabe 13.2.4

Seien $p = 2 + 3T + T^3$ und $q = 1 + 2T^2$in $\mathbb{R}[T]$. Es sind $a_0 = 2, a_1 = 3, a_2 = 0, a_3 = 1$ und $b_0 = 1, b_1 = 0, b_2 = 2$. Es folgt $c_0 = 2$, $c_1 = a_0 b_1 + a_1 b_0 = 0 + 3 = 3$, $c_2 = a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0 = 4 + 0 + 0 = 4$, $c_3 = a_1 b_2 + a_2 b_1 + a_3 b_0 = 6 + 0 + 1 = 7$, $c_4 = a_2 b_2 + a_3 b_1 = 0 + 0 = 0$ und $c_5 = a_3 b_2 = 2$. Es folgt $pq = 2 + 3T + 4T^2 + 7T^3 + 2T^5$.

Aufgabe 13.2.36

Für alle x gilt $\exp_a(x) > 0$. Sei $x < 0$. Da $\exp_a$ für $a > 1$ streng monoton wachsend ist, folgt $\exp_a(x) < \exp_a(0) = 1$, also $0 < \exp_a(x) < 1$ für alle $x \in (-\infty, 0)$. Somit ist das Bild von $\exp_a|_{(-\infty,0)}$ in $(0, 1)$ enthalten.

Sei umgekehrt $y \in (0, 1)$. Wir müssen zeigen, dass y im Bild von $\exp_a|_{(-\infty,0)}$ liegt.

Da $\mathrm{Bild}(\exp_a) = (0, \infty)$, gibt es ein x_0 mit $\exp_a(x_0) = y$. Dieses x_0 muss in $(-\infty, 0)$ liegen, denn wäre $x_0 \geq 0$, so folgt wieder aus der Tatsache, dass $\exp_a$ streng monoton wachsend ist, dass $y = \exp_a(x_0) \geq \exp_a(0) = 1$ ist. Dieser Widerspruch zeigt $x_0 \in (-\infty, 0)$, das heißt, $(0, 1)$ ist im Bild von $\exp_a|_{(-\infty,0)}$ enthalten.

Aufgabe 13.2.41

$\log_2(8) = 3$, denn $2^3 = 8$.

Aufgabe 13.2.45

1. Für alle $x > 0$ gilt
$$\exp(a\ln(x)) = \exp(\ln(x^a)) = x^a.$$

2. Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt
$$\exp(x\ln(a)) = \exp(\ln(a^x)) = a^x = \exp_a(x).$$

3. Es gilt
$$\begin{aligned} y = \log_a(x) \quad &\Leftrightarrow \quad \exp_a(y) = x \\ &\Leftrightarrow \quad \exp(y\ln(a)) = x \text{ mit dem zweiten Teil der Aufgabe.} \end{aligned}$$
Es folgt $y\ln(a) = \ln(\exp(y\ln(a))) = \ln(x)$. Jetzt bringen wir $\ln(a)$ auf die andere Seite und erhalten $\log_a(x) = y = \frac{\ln(x)}{\ln(a)}$.

Kapitel 14

Stetigkeit

In diesem Abschnitt führen wir den Begriff der Stetigkeit von Funktionen ein. Wie der Name bereits suggeriert, bedeutet Stetigkeit einer Funktion, dass sie ein gewisses kontrolliertes Verhalten aufweist und keine unerwarteten Sprünge an den Tag legt. Wir werden diese Vorstellung im nächsten Abschnitt präzisieren. Der Stetigkeitsbegriff basiert wieder auf dem Grenzwertbegriff von Folgen.

14.1 Grundlagen, Beispiele, erste Eigenschaften

Wir haben bereits viele stetige Funktionen in diesem Kurs kennen gelernt, allerdings ohne diesen Begriff einzuführen. Das wollen wir jetzt nachholen.

14.1.1 Definition: Sei $f : D \to \mathbb{R}$ eine Funktion, und sei $a \in D$. Dann heißt f **stetig in** a, wenn gilt: Ist (a_n) eine Folge von Zahlen in D, die gegen a konvergiert, dann konvergiert die Folge $(f(a_n))$ gegen $f(a)$. Die Funktion f heißt **stetig** auf D, wenn f in jedem $a \in D$ stetig ist.

14.1.2 Aufgabe: Sei $c \in \mathbb{R}$, und sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto c$ eine konstante Funktion. Beweisen Sie, dass f stetig ist.

14.1.3 Aufgabe: Sei $D = \{x_1, \ldots, x_n\}$ eine endliche Teilmenge von $\mathbb{R}$. Beweisen Sie, dass jede Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ stetig ist.

14.1.4 Beispiele:

1. In Proposition 13.2.47 haben wir gezeigt, dass die allgemeine Potenzfunktion $x \mapsto x^\rho$ für alle $\rho \in \mathbb{R}$ auf $(0, \infty)$ stetig ist. Damit sind insbesondere die Potenzfunktionen mit natürlichen Exponenten und die Wurzelfunktionen stetig.

2. In Proposition 13.2.29 haben wir gezeigt, dass die Exponentialfunktion $\exp_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto a^x$ für alle $a > 0$ auf $\mathbb{R}$ stetig ist.

3. In Proposition 13.2.46 haben wir gezeigt, dass die Logarithmusfunktion $\log_a : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ für alle $a > 0$, $a \neq 1$ auf $(0, \infty)$ stetig ist.

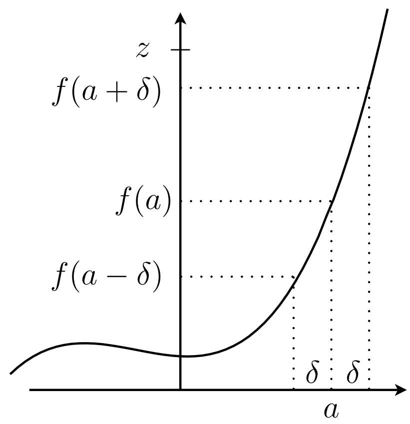
14.1.5 Aufgabe: Beweisen Sie, dass die Größte-Ganze-Funktion (vergleiche Beispiele 13.1.10) für alle $a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ stetig ist.

Unstetigkeit einer Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ in einem Punkt $a \in D$ bedeutet, dass es eine gegen a konvergierende Folge (a_n) so gibt, dass $(f(a_n))$ entweder nicht konvergiert oder gegen einen Grenzwert konvergiert, der von $f(a)$ verschieden ist.

14.1.6 Beispiel: Die Dirichlet-Funktion f (siehe 13.1.3) ist in keinem Punkt ihres Definitionsbereiches stetig. Denn angenommen, $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Sei (x_n) eine Folge rationaler Zahlen, die gegen x konvergiert. Dass eine solche Folge existiert, folgt zum Beispiel aus Proposition 12.2.9. Dann gilt $f(x_n) = 1$, also $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = 1$. Da $f(x) = 0$ ist, ist f in x nicht stetig. Sei andererseits $x \in \mathbb{Q}$. Sei $(x_n) = (x + \frac{\sqrt{2}}{n})$. Die Folge (x_n) konvergiert gegen x (denn $(\frac{\sqrt{2}}{n})$ ist eine Nullfolge), und alle Folgenglieder liegen in $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Es folgt $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = 0$ und $f(x) = 1$. Somit ist die Dirichlet-Funktion auch für jedes $x \in \mathbb{Q}$ nicht stetig.

14.1.7 Aufgabe: Beweisen Sie, dass die Größte-Ganze-Funktion für alle $a \in \mathbb{Z}$ nicht stetig ist.

Die alltägliche Stetigkeitsvorstellung besagt, dass „stetige“ Veränderungen keinen abrupten Schwankungen unterliegen. Die folgende Proposition drückt dies präzise aus: Wenn f in a stetig ist, und es ist $t < f(a) < z$, so ist auch $t < f(x) < z$, sofern x nur nahe genug bei a liegt. Vorab eine Skizze zu dieser Situation:



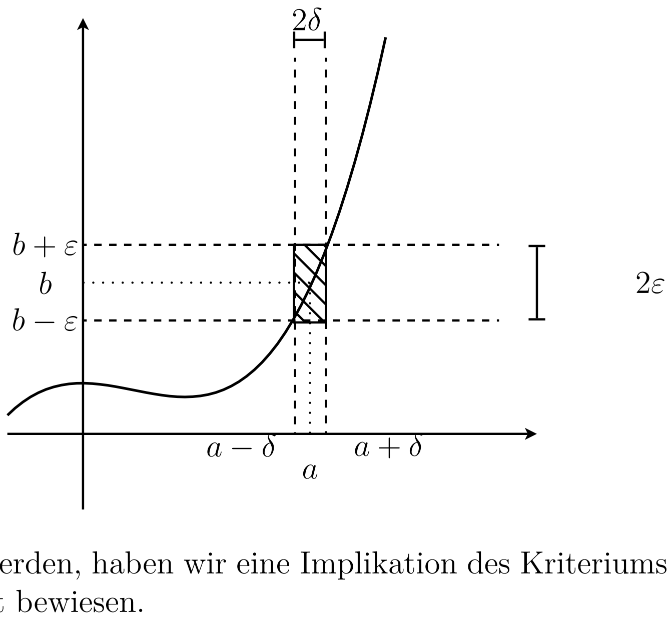
14.1.8 Proposition: Sei $f : D \to \mathbb{R}$ stetig in a. Sei $t < f(a) < z$. Dann gibt es eine δ-Umgebung $U_\delta(a)$ von a, sodass für alle $x \in D \cap U_\delta(a)$ immer noch $t < f(x) < z$ ist.

Beweis: Angenommen, so eine Umgebung U würde nicht existieren. Dann gibt es zu jeder δ-Umgebung von a ein „Ausnahme-x" mit $f(x) > z$ oder $f(x) < t$. Insbesondere gibt es zu jedem $U_{\frac{1}{n}}(a)$, $n \in \mathbb{N}$, ein x_n mit $f(x_n) > z$ oder $f(x) < t$. Dann konvergiert (x_n) gegen a, und da f in a stetig ist, muss $(f(x_n))$ gegen $f(a)$ konvergieren. Da alle $f(x_n)z$ nicht in $[t, z]$ enthalten sind, kann aber auch $f(a) = \lim_{n\to\infty}(f(x_n))$ nicht in (t, z) enthalten sein. Das ist ein Widerspruch zu unserer Annahme, dass $t < f(a) < z$ ist. □

Es gibt eine zu Definition 14.1.1 äquivalente Formulierung der Stetigkeit einer Funktion in einem Punkt a, die eher geometrisch motiviert ist. Dies ist das so genannte $\varepsilon - \delta$-Kriterium, gesprochen: „epsilon-delta-Kriterium", das ich erst einmal informell formulieren möchte.

Das $\varepsilon - \delta$-Kriterium sagt aus: Wenn wir zu jedem gegebenen 2ε-Streifen um $f(a) = b$ einen 2δ-Streifen um a so legen können, dass alle Punkte $(x, f(x))$ mit $x \in U_\delta(a)$ in dem von den Streifen gebildeten Rechteck liegen, dann ist f in a stetig.

Ist umgekehrt f in a stetig, so lässt sich zu jedem 2ε-Streifen um $f(a) = b$ ein 2δ-Streifen um a so legen, dass alle Punkte $(x, f(x))$ mit $x \in U_\delta(a)$ in dem von den Streifen gebildeten Rechteck liegen. Bitte vergleichen Sie mit der folgenden Skizze:



Wie Sie sehen werden, haben wir eine Implikation des Kriteriums mit Proposition 14.1.8 schon fast bewiesen.

14.1.9 Satz: ($\varepsilon - \delta$-Kriterium für Stetigkeit)

Eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ ist genau dann in einem Punkt $a \in D$ stetig, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ so gibt, dass

für alle $x \in D$ mit $|x - a| < \delta$ immer $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$ ausfällt.

Beweis:

$\Rightarrow$ Sei f in a stetig, und sei $\varepsilon > 0$ gegeben. Es ist $f(a) - \varepsilon < f(a) < f(a) + \varepsilon$. Mit Proposition 14.1.8 gibt es ein $\delta > 0$, sodass für alle $x \in U_\delta(a) \cap D$ (also $|x - a| < \delta$ und $x \in D$) immer $f(x) \in U_\varepsilon(f(a))$ (also $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$) gilt.

$\Leftarrow$ Wir nehmen an, das $\varepsilon - \delta$-Kriterium sei erfüllt. Sei (x_n) eine Folge, die gegen a konvergiert. Sei $\varepsilon > 0$ vorgegeben. Wir wählen $\delta > 0$ sodass für alle $x \in D$ mit $|x - a| < \delta$ immer $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$ ist. Zu diesem δ gibt es einen Index n_0, sodass für alle $n > n_0$ stets $|x_n - a| < \delta$ ist. Wegen des $\varepsilon - \delta$-Kriteriums ist jetzt $|f(x_n) - f(a)| < \varepsilon$ für alle $n \geq n_0$. Also konvergiert $(f(x_n))$ gegen $f(a)$, das heißt, f ist in a stetig.

$\square$

14.1.10 Aufgabe: Beweisen Sie mit Hilfe des $\varepsilon - \delta$-Kriteriums, dass der Absolutbetrag $|\ | : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto |x|$, stetig ist.

Aus stetigen Funktionen können wir nach bewährtem Muster neue stetige Funktionen konstruieren.

14.1.11 Proposition: (Rechenregeln für Stetigkeit)

Seien $f, g : D \to \mathbb{R}$ Funktionen, und sei $a \in D$, sodass f und g stetig in a sind. Sei $\alpha \in \mathbb{R}$. Die folgenden Funktionen sind ebenfalls stetig in a:

1. $f + g$,
2. $f - g$,
3. αf,
4. fg,
5. $\frac{f}{g}$, falls $g(x) \neq 0$ für alle $x \in D$.
6. Außerdem gilt: Ist $h : E \to \mathbb{R}$ mit $f(D) \subseteq E$ in $f(a)$ stetig, so ist $h \circ f$ in a stetig.

14.1.12 Aufgabe: Beweisen Sie 5. und zwei weitere Aussagen Ihrer Wahl von Proposition 14.1.11.

Mit Hilfe dieser Rechenregeln können wir zeigen, dass zwei weitere Beispielklassen von Funktionen, die wir im letzten Kapitel betrachtet haben, stetig sind.

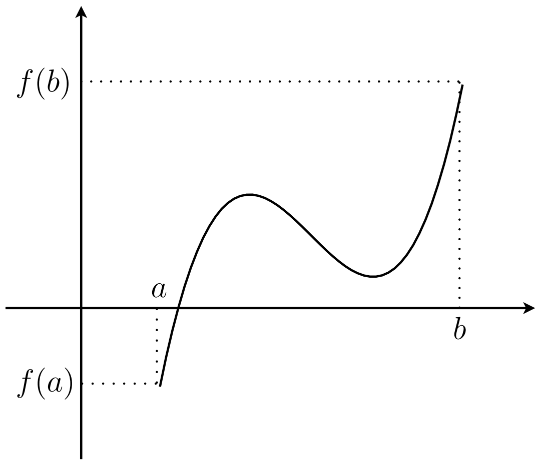
14.1.13 Proposition: Polynomfunktionen und rationale Funktionen sind überall dort stetig, wo sie definiert sind.

14.1.14 Aufgabe: Beweisen Sie Proposition 14.1.13.

14.2 Stetige Funktionen auf Intervallen

In diesem Abschnitt werden wir stetige Funktionen $f : D \to \mathbb{R}$ untersuchen, bei denen D ein abgeschlossenes Intervall $[a, b]$, $a < b$, ist.

Betrachten wir folgende Skizze eines Graphen einer stetigen Funktion f, die auf dem abgeschlossenen Intervall $[a, b]$ definiert ist. Anschaulich ist klar, dass der Graph die x-Achse schneiden muss, sofern die Funktion auf einem Intervallende größer und dem anderen Intervallende kleiner als Null ist.



Das ist gerade die Aussage des Nullstellensatzes von Bolzano, in dessen Beweis wir noch folgendes Lemma benötigen werden.

14.2.1 Lemma: Sei A eine nicht leere, beschränkte Teilmenge von $\mathbb{R}$. Seien $\sup A$ das Supremum und $\inf A$ das Infimum von A. Dann gibt es eine Folge (x_n) mit $x_n \in A$, die gegen $\sup A$ konvergiert und eine Folge (y_n) mit $y_n \in A$, die gegen $\inf A$ konvergiert.

Beweis: Liegt $\sup A$ in A, so wählen wir $(x_n) = (\sup A)$. Angenommen, $\sup A \notin A$. Zu jedem $n \in \mathbb{N}$ gibt es ein $x_n \in A$ mit $\sup A - \frac{1}{n} < x_n < \sup A$. Die Folge (x_n) konvergiert gegen $\sup A$. Eine Folge, die gegen $\inf A$ konvergiert, wird analog konstruiert. □

14.2.2 Satz: (Nullstellensatz von Bolzano)

Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion mit $f(a) < 0$ und $f(b) > 0$ (oder $f(a) > 0$ und $f(b) < 0$). Dann gibt es mindestens ein $x \in (a, b)$ mit $f(x) = 0$.

Beweis: Wir führen den Beweis unter der Annahme, dass $f(a) < 0$ und $f(b) > 0$ ist. Der Fall $f(a) > 0$ und $f(b) < 0$ ist völlig analog.

Sei $A = \{x \in [a, b] \mid f(x) \leq 0\}$. Die Menge A ist nicht leer (denn $a \in A$), und sie ist beschränkt (etwa durch b). Mit dem Supremumsprinzip 11.2.52 besitzt A ein Supremum $\sup A \in [a, b]$. Mit Lemma 14.2.1 gibt es eine Folge (x_n) von Zahlen in $\mathbb{R}$, die gegen $\sup A$ konvergiert. Da f in $\sup A$ stetig ist, konvergiert $(f(x_n))$ gegen $f(\sup A)$. Da $f(x_n) \leq 0$, folgt $f(\sup A) \leq 0$, insbesondere ist $\sup A < b$. Angenommen, $f(\sup A) < 0$. Mit Proposition 14.1.8 (angewendet auf die Einschränkung $f|_{[\sup A, b]}$ und den Punkt $\sup A$, der die Rolle von a übernimmt) gibt es noch Punkte x in dem halboffenen Intervall $(\sup A, b]$ mit $f(x) < 0$. Das ist ein Widerspruch zur Definition von $\sup A$. Es folgt $f(\sup A) = 0$. □

14.2.3 Definition: Sei $f : D \to \mathbb{R}$ eine Funktion, und sei $x \in D$ mit $f(x) = 0$. Dann wird x eine **Nullstelle** von f genannt.

Als Folgerung aus dem Nullstellensatz erhalten wir den Satz, dass eine auf einem abgeschlossenen Intervall $[a, b]$ stetige Funktion jeden Wert zwischen $f(a)$ und $f(b)$ annimmt:

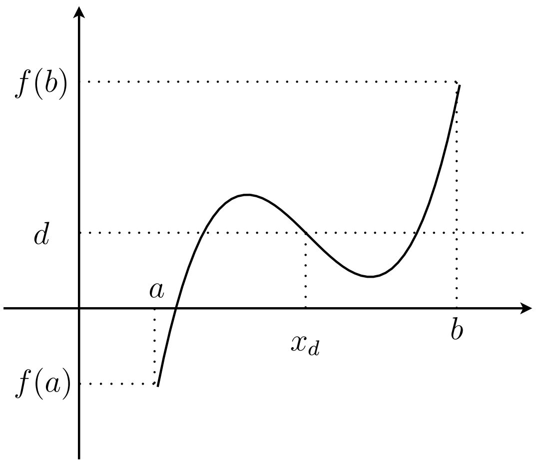
14.2.4 Korollar: (Zwischenwertsatz von Bolzano)

Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion, und sei d eine Zahl zwischen $f(a)$ und $f(b)$, also $f(a) \leq d \leq f(b)$, falls $f(a) \leq f(b)$ und $f(b) \leq d \leq f(a)$, falls $f(b) \leq f(a)$. Dann gibt es ein $x_d \in [a, b]$ mit $f(x_d) = d$.

Beweis: Ist $f(a) = f(b)$, so sind wir fertig.

Sei nun $f(a) < f(b)$, und sei d ein Punkt aus $(f(a), f(b))$. Sei $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ definiert durch $g(x) = f(x) - d$. Dann ist g auf $[a, b]$ stetig, es ist $g(a) < 0$ und $g(b) > 0$, und mit dem Nullstellensatz 14.2.2 gibt es ein $x_d \in [a, b]$ mit $g(x_d) = 0 = f(x_d) - d$. Es folgt $f(x_d) = d$, die Behauptung. Der Fall $f(b) < f(a)$ wird analog bewiesen. □

Auch hier eine Skizze dazu, was uns der Satz sagen möchte. Angenommen, wir haben eine auf $[a, b]$ stetige Funktion f. Wir fixieren $f(a)$ und $f(b)$ und ein d zwischen $f(a)$ und $f(b)$ auf der y-Achse. Wenn wir jetzt von d parallel zur x-Achse laufen, dann sichert der Zwischenwertsatz, dass wir den Graph von f an mindestens einer Stelle schneiden. Marschieren wir nun von einem solcher Schnittpunkte parallel zur y-Achse auf die x-Achse, so finden wir ein x_d mit $f(x_d) = d$.



Sei I ein Intervall in $\mathbb{R}$. Dabei wollen wir zunächst völlig offen lassen, ob I abgeschlossen (und damit eventuell nur aus einem Punkt besteht), halboffen, offen oder uneigentlich ist. Ein Intervall I ist dadurch charakterisiert, dass mit je zwei Punkten $x_1 \neq x_2$ in I alle Punkte zwischen x_1 und x_2 in I liegen. Sei nun f eine auf I stetige Funktion. Der Zwischenwertsatz besagt, dass mit je zwei Punkten $f(x_1)$ und $f(x_2)$ im Bild von f auch alle Punkte zwischen $f(x_1)$ und $f(x_2)$ im Bild von f liegen. Wir haben damit als Folgerung aus dem Zwischenwertsatz:

14.2.5 Korollar: Das Bild einer stetigen Funktion f auf einem Intervall I ist ein Intervall. $\square$

14.2.6 Beispiel: Sei $f : (0, 1] \to \mathbb{R}$ die Kehrwert-Funktion, also $x \mapsto \frac{1}{x}$. Das Intervall $I = (0, 1]$ ist beschränkt, aber $f(I)$ hat diese Eigenschaft nicht mehr. Es ist nämlich $f(I) = [1, \infty)$. Würden wir f auf irgendein abgeschlossenes Intervall einschränken, also ein winzig kleines $\varepsilon > 0$ wählen und $f : [\varepsilon, 1] \to \mathbb{R}$ betrachten würde dieses Phänomen (also das Bild eines beschränkten Intervalls ist unbeschränkt) nicht mehr auftauchen. Das Bild ist dann $[1, \frac{1}{\varepsilon}]$, denn f ist streng monoton fallend.

Das, was wir gerade im Beispiel gesehen haben, dass nämlich das Bild einer auf einem beschränkten Intervall I stetigen Funktion f ein unbeschränkte Intervall sein kann, und dass dieses Phänomen nicht auftritt, wenn wir f auf ein abgeschlossenes

Intervall einschränken, ist kein Zufall sondern Inhalt des folgenden Satzes. Im Beweis werden wir folgendes Lemma verwenden, das ein Kriterium dafür liefert, was abgeschlossene Intervalle von nicht abgeschlossenen unterscheidet.

14.2.7 Lemma: Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall (abgeschlossen, halboffen, offen oder uneigentlich). Dann gilt:

Genau dann ist I abgeschlossen, wenn jede Folge (x_n) von Elementen in I eine konvergente Teilfolge besitzt, deren Grenzwert in I liegt.

Beweis:

$\Rightarrow$ Sei $I = [a, b]$ ein abgeschlossenes Intervall. Sei (x_n) eine Folge von Zahlen in I. Dann ist (x_n) beschränkt, und mit dem Auswahlprinzip von Bolzano-Weierstraß 12.5.13 folgt, dass (x_n) eine konvergente Teilfolge (x'_n) besitzt. Da $a \leq x'_n \leq b$ für alle $n \in \mathbb{N}$, folgt $a \leq \lim\limits_{n\to\infty}(x'_n) \leq b$, also $\lim\limits_{n\to\infty}(x'_n) \in I$.

$\Leftarrow$ Sei I ein nicht abgeschlossenes Intervall. Wir nehmen zunächst an, I sei ein uneigentliches Intervall. Dann ist I nicht beschränkt. Dann enthält I eine Folge (x_n) mit $|x_n| > n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Jede Teilfolge von (x_n) ist nicht beschränkt, also auch nicht konvergent. Im Falle uneigentlicher Intervalle gibt es also Folgen von Zahlen in I, die keine konvergenten Teilfolgen besitzen.

Sei nun I ein beschränktes, nicht abgeschlossenes Intervall. Dann ist I von der Form $(a, b]$, oder $[a, b)$ oder (a, b). In allen Fällen gilt $a = \inf I$ und $b = \sup I$. Mit Lemma 14.2.1 gibt es Folgen (x_n) und (y_n) von Elementen in I, die gegen $\sup A$ beziehungsweise $\inf A$ konvergieren. Alle Teilfolgen konvergieren ebenfalls gegen $\sup A$ beziehungsweise $\inf A$. Es gibt somit Folgen von Zahlen in I, deren Teilfolgen alle gegen einen Grenzwert konvergieren, der nicht in I liegt.

$\square$

14.2.8 Satz: Sei $I = [a, b]$ ein abgeschlossenes Intervall, und sei $f : I \to \mathbb{R}$ stetig. Dann ist $f(I)$ ein abgeschlossenes Intervall. Insbesondere ist $f(I)$ beschränkt.

Beweis: Mit Korollar 14.2.5 ist Bild(f) ein Intervall. Wir benutzen Lemma 14.2.7 um zu zeigen, dass dieses Intervall abgeschlossen ist. Sei (y_n) eine beliebige Folge in Bild(f). Dann gilt $(y_n) = (f(x_n))$ mit $x_n \in I$. Da $[a, b]$ beschränkt ist, ist (x_n) beschränkt. Mit dem Auswahlprinzip von Bolzano-Weierstraß 12.5.13 folgt, dass (x_n) eine konvergente Teilfolge (x'_n) besitzt. Da $a \leq x'_n \leq b$ für alle $n \in \mathbb{N}$, folgt $a \leq \lim\limits_{n\to\infty}(x'_n) \leq b$, also $x' = \lim\limits_{n\to\infty}(x'_n) \in I$. Da f in x' stetig ist, konvergiert $(f(x'_n))$

gegen $f(x')$. Die Folge $(f(x'_n))$ ist eine Teilfolge von (y_n), und ihr Grenzwert $f(x')$ liegt in Bild(f). Mit Lemma 14.2.7 folgt, dass Bild(f) ein abgeschlossenes Intervall ist. Da abgeschlossene Intervalle beschränkt sind, folgt, dass $f(I)$ beschränkt ist. $\square$

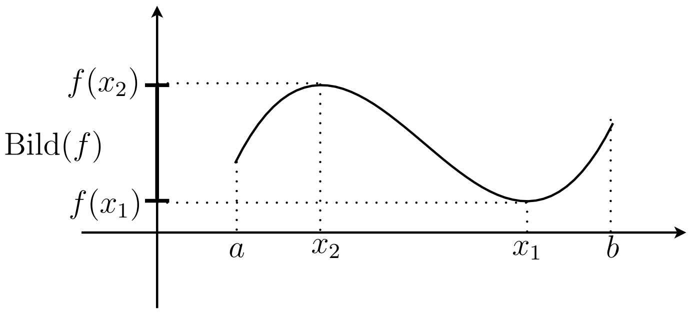
Mit diesem Satz bekommen wir auf einen Schlag das folgende wichtige Ergebnis, das besagt, dass eine auf einem abgeschlossenen Intervall stetige Funktion f immer Extremalwerte – also ein Minimum und ein Maximum – besitzt. Genauer:

14.2.9 Korollar: (Satz vom Minimum und Maximum)

Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig auf $[a, b]$. Dann gibt es eine Minimalstelle x_1 und eine Maximalstelle x_2 in $[a, b]$, sodass $f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2)$ für alle $x \in [a, b]$ gilt.

Beweis: Enthält Bild(f) nur einen Punkt, so ist jedes $x \in [a, b]$ eine Minimal- und eine Maximalstelle und wir sind fertig. Wir können mit Satz 14.2.8 also annehmen, dass Bild(f) ein abgeschlossenes Intervall $[y_1, y_2]$ ist. Dann ist $y_1 = f(x_1)$ und $y_2 = f(x_2)$ für gewisse $x_1, x_2 \in [a, b]$. Es folgt, dass x_1 eine Minimalstelle und x_2 eine Maximalstelle von f ist, denn es gilt $f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2)$ für alle $x \in [a, b]$. $\square$

Zur Veranschaulichung noch eine Skizze:



In Proposition 13.1.11 haben wir gezeigt, dass jede streng monotone Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ injektiv ist. In Aufgabe 13.1.12 wurden Sie aufgefordert, eine injektive Funktion $f : [0, 2] \to \mathbb{R}$ zu konstruieren, die nicht streng monoton ist. Möglicherweise haben Sie sich mit dieser Aufgabe schwer getan, und möglicherweise haben Sie die Lösung für einen faulen Trick gehalten. Das ist nicht verwunderlich. Vermutlich wird jede Funktion, an die wir im Alltagsgeschäft denken, stetig sein. Um diese Aufgabe zu lösen, mussten Sie eine nicht stetige Funktion konstruieren. Das ist nämlich die Aussage des folgenden Lemmas:

14.2.10 Lemma: Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ injektiv und stetig. Dann ist f streng monoton.

Beweis: Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ injektiv und stetig. Ist $a = b$, dann sind wir schon fertig. Wir nehmen also $a \neq b$ an, und da f injektiv ist, folgt $f(a) \neq f(b)$. Wir nehmen zunächst an, dass $f(a) < f(b)$ ist und werden zeigen, dass f streng monoton wachsend ist. Sei $x_0 \in (a,b)$, also $a < x_0 < b$. Aus der Injektivität von f folgt $f(a) \neq f(x_0)$ und $f(x_0) \neq f(b)$. Angenommen, $f(a) > f(x_0)$. Mit dem Zwischenwertsatz 14.2.5 nimmt f auf $[x_0, b]$ jeden Wert zwischen $f(x_0)$ und $f(b)$ an, also auch den Wert $f(a)$. Aber $a \notin [x_0, b]$, das heißt, f ist nicht injektiv. Dieser Widerspruch zeigt, dass $f(a) < f(x_0)$ sein muss. Analog wird gezeigt, dass $f(x_0) < f(b)$ ist. Aus $a < x_0 < b$ folgt somit $f(a) < f(x_0) < f(b)$. Wäre f auf $[a,b]$ nicht streng monoton wachsend, so gäbe es wegen der Injektivität von f Punkte $x_1, x_2 \in [a,b]$ mit $x_1 < x_2$ und $f(a) \leq f(x_2) < f(x_1)$. Auf $[a, x_1]$ muss f jeden Wert zwischen $f(a)$ und $f(x_1)$ annehmen, also auch $f(x_2)$. Da $x_2 \notin [a, x_1]$ folgt wieder, dass f nicht injektiv ist, ein Widerspruch. Dieser Widerspruch zeigt, dass f auf $[a,b]$ streng monoton wachsend ist. Hätten wir $f(a) > f(b)$ angenommen, so hätten analoge Argumente gezeigt, dass f streng monoton fallend ist. $\square$

Das eben bewiesene Lemma können wir benutzen, um die Aussage auf beliebige Intervalle zu verallgemeinern.

14.2.11 Proposition: Sei $f : I \to \mathbb{R}$ eine injektive und stetige Funktion, wobei I ein beliebiges Intervall bezeichnet. Dann ist f streng monoton.

Beweis: Seien $a, b \in I$, und sei $a < b$. In Lemma 14.2.10 haben wir gesehen, dass f auf $[a,b]$ streng monoton ist. Wir nehmen zunächst an, dass f auf $[a,b]$ streng monoton wachsend ist. Seien nun x_1 und x_2 beliebige Elemente in I mit $x_1 < x_2$. Wir müssen zeigen, dass $f(x_1) < f(x_2)$ ist. Die Zahlen x_1, x_2, a, b liegen in einem gemeinsamen abgeschlossenen Intervall $[c,d]$ mit $c, d \in I$. (Beachten Sie, dass wir nicht verlangen, dass a, b, c, d, x_1, x_2 verschieden sind.) Auf $[c,d]$ ist f streng monoton wachsend oder streng monoton fallend. Da $f$auf $[a,b]$ streng monoton wachsend ist, folgt, dass f auch auf $[c,d]$ streng monoton wachsend ist. Somit gilt $f(x_1) < f(x_2)$, dass heißt, f ist auf I streng monoton wachsend. Wäre f auf $[a,b]$ streng monoton fallend, so zeigen analoge Argumente, dass f auf I streng monoton fallend ist. $\square$

Kombinieren wir nun Proposition 13.1.11 und Proposition 14.2.11 so erhalten wir:

14.2.12 Korollar: Sei I ein Intervall, und sei $f : I \to \mathbb{R}$ stetig. Genau dann ist f injektiv, wenn f streng monoton ist. $\square$

14.2.13 Aufgabe: Geben Sie ein Beispiel für eine injektive und stetige Funktion $f : D \to \mathbb{R}$, die nicht streng monoton ist.

Umkehrfunktionen stetiger Funktionen, die auf Intervallen definiert sind, sind stetig, wie die folgende Proposition aussagt:

14.2.14 Proposition: Sei $f : I \to \mathbb{R}$ eine injektive, stetige Funktion, wobei I ein beliebiges Intervall ist. Dann ist $f^{-1} : f(I) \to \mathbb{R}$ stetig.

Beweis: Sei $f : I \to \mathbb{R}$ eine injektive, stetige Funktion. Mit Proposition 14.2.11 ist f streng monoton. Wir nehmen zunächst an, dass f streng monoton wachsend ist. Dann ist auch f^{-1} streng monoton wachsend.

Sei $y_0 \in \operatorname{Bild}(f)$, und sei $x_0 = f^{-1}(y_0)$. Wir nehmen zunächst an, dass x_0 kein Randpunkt von I ist. Dann gibt es ein $r > 0$, sodass das abgeschlossene Intervall $[x_0 - r, x_0 + r]$ ganz in I enthalten ist. Sei $\varepsilon > 0$ mit $r \geq \varepsilon$ gewählt. Dann liegt auch das Intervall $[x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon]$ in I. Es folgt

$$f(x_0 - \varepsilon) < y_0 < f(x_0 + \varepsilon), \text{denn } f \text{ ist monoton wachsend.}$$

Dann gibt es ein $\delta > 0$ mit

$$f(x_0 - \varepsilon) < y_0 - \delta < y_0 + \delta < f(x_0 + \varepsilon).$$

Für jedes $y \in f(I)$ mit $y \in U_\delta(y_0)$ (also $|y - y_0| < \delta$) gilt damit $f(x_0 - \varepsilon) < y < f(x_0 + \varepsilon)$. Da f^{-1} streng monoton wachsend ist, folgt $x_0 - \varepsilon < f^{-1}(y) < x_0 + \varepsilon$, also

$$|f^{-1}(y) - x_0| = |f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)| < \varepsilon.$$

Mit dem $\varepsilon - \delta$-Kriterium 14.1.9 folgt, dass f^{-1} in y_0 stetig ist.

Jetzt nehmen wir an, dass x_0 der linke Randpunkt von I ist (sofern I links abgeschlossen ist). Dann gibt es ein $r > 0$, sodass $[x_0, x_0 + r]$ in I liegt. Sei $\varepsilon > 0$, $\varepsilon \leq r$ gewählt. Dann liegt $[x_0, x_0 + \varepsilon]$ in I. Es folgt $f(x_0) = y_0 < f(x_0 + \varepsilon)$. Für alle $y \in f(I)$ mit $y \in U_\delta(y_0)$ folgt $f(x_0) \leq y \leq f(x_0 + \varepsilon)$, also $x_0 \leq f^{-1}(y) < x_0 + \varepsilon$. Somit ist $0 \leq f^{-1}(y) - x_0 < \varepsilon$, und damit

$$|f^{-1}(y) - x_0| = |f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)| < \varepsilon.$$

Wieder folgt mit dem $\varepsilon - \delta$-Kriterium 14.1.9, dass f^{-1} in y_0 stetig ist. Entsprechend argumentieren wir, wenn x_0 der rechte Randpunkt von I ist. Ist f streng monoton fallend, so wird der Beweis analog geführt. $\square$

14.3 Grenzwerte von Funktionen

In diesem Abschnitt führen wir den Begriff von Grenzwerten von Funktionen ein. Wir beginnen mit einer Definition.

14.3.1 Definition: Sei $M \subseteq \mathbb{R}$ eine Teilmenge von $\mathbb{R}$. Ein Punkt $a \in \mathbb{R}$, der nicht in M liegen muss, heißt **Häufungspunkt** von M, wenn es mindestens eine Folge (a_n) von Elementen in $M \setminus \{a\}$ gibt, deren Grenzwert a ist.

14.3.2 Beispiele:

1. Ein Häufungspunkt einer Menge M kann, muss aber nicht zu M gehören. Als Beispiel betrachten wir das Intervall $I = [0, 1)$. Das Infimum des Intervalls ist 0, und $0 \in I$, das Supremum ist 1, und $1 \notin I$. Mit Lemma 14.2.1 gibt es eine Folge von Punkten in I, die gegen $\sup I$ konvergiert und eine Folge, die gegen $\inf I$ konvergiert. Somit sind $0 \in I$ und $1 \notin I$ Häufungspunkte von I.
2. Sei $M = \mathbb{Q}$. In Proposition 12.2.9 haben wir gezeigt, dass jede reelle Zahl, insbesondere jede Zahl in $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ ein Häufungspunkt von M ist.
3. Sei $M = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Sei $a \in \mathbb{Q}$. Dann ist $(a + \frac{\sqrt{2}}{n})$ eine Folge in M, die gegen a konvergiert. Somit ist jedes $a \in \mathbb{Q}$ ein Häufungspunkt von $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

14.3.3 Aufgabe: Sei I ein Intervall in $\mathbb{R}$. Sei $a \in I$. Beweisen Sie, dass a ein Häufungspunkt von $I \setminus \{a\}$ ist.

14.3.4 Definition: Sei $f : D \to \mathbb{R}$ eine Funktion, und sei a ein Häufungspunkt von D. Die Funktion f heißt **konvergent** in a, wenn für jede Folge (a_n) in $D \setminus \{a\}$, die gegen a konvergiert, die Folge $(f(a_n))$ konvergent ist.

Als unmittelbare Konsequenz dieser Definition erhalten wir:

14.3.5 Beobachtung: Sei $f : D \to \mathbb{R}$ eine Funktion, die in $a \in D$ stetig ist, und sei a ein Häufungspunkt von D. Dann ist f konvergent in a.

Beweis: Ist f in a stetig, so gilt für jede Folge (a_n) in D, die gegen a konvergiert, dass $(f(a_n))$ konvergent ist (sogar mit Grenzwert $f(a)$, aber das muss uns für diese Beobachtung nicht interessieren). Insbesondere gilt das für alle Folgen (a_n), deren Folgenglieder in $D \setminus \{a\}$ liegen. Da a ein Häufungspunkt von D ist, folgt, dass f in a konvergent ist. □

Kauen wir noch einmal langsam die Definition 14.3.4 durch, und vergleichen wir mit dem Begriff der Stetigkeit:

1. Ist $f : D \to \mathbb{R}$ in a stetig, so muss a in D liegen. Ist f in a konvergent, so muss a nicht in D liegen. Es wird allerdings auch nicht verboten, dass a in D liegt.

2. f kann in a stetig sein, ohne dass a ein Häufungspunkt von D ist. Beispiel: $f : \{a\} \to \mathbb{R}$, $a \mapsto a^2$ ist stetig in a, aber a ist kein Häufungspunkt von $\{a\}$, da es keine Folge in $\emptyset = \{a\} \setminus \{a\}$ gibt, die gegen a konvergiert. Ist a aber kein Häufungspunkt von D, so ist f nicht konvergent in $\{a\}$.

3. Um zu überprüfen, ob f in a stetig ist, müssen wir für jede Folge in D, die gegen a konvergiert, das Konvergenzverhalten der Folgen $(f(a_n))$ untersuchen. Um zu überprüfen, ob f in a konvergiert, interessieren uns nur die Folgen (a_n) in D, bei denen a selbst als Folgenglied nicht vorkommt, und die gegen a konvergieren. Nur für diese Folgen (a_n) müssen wir das Konvergenzverhalten von $(f(a_n))$ untersuchen.

4. Damit f in a stetig ist, muss für jede Folge (a_n), die gegen a konvergiert, der Grenzwert von $(f(a_n))$ existieren und gleich $f(a)$ sein. Damit f in a konvergiert, müssen für alle Folgen (a_n) in $D \setminus \{a\}$ mit Grenzwert a die Grenzwerte der Folgen $(f(a_n))$ existieren. Was diese Grenzwerte konkret sind, ist völlig egal, insbesondere können sie verschieden von $f(a)$ sein.

14.3.6 Aufgabe: Geben Sie ein Beispiel für eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ mit Häufungspunkt $a \in D$, sodass f in a konvergiert, aber in a nicht stetig ist.

Das Beispiel, das Sie in der Lösung zu Aufgabe 14.3.6 gesehen haben, zeigt, dass die Umkehrung der Beobachtung 14.3.5 im Allgemeinen nicht gilt. Aus der Konvergenz von f in a können wir – selbst wenn a in D liegt und ein Häufungspunkt von D ist – nicht auf die Stetigkeit von f in a schließen. Auf den Zusammenhang zwischen Stetigkeit von f in a und Konvergenz von f in a werden wir in Proposition 14.3.9 noch einmal eingehen.

Ist f konvergent in a, und sind (a_n) und (a'_n) zwei Folgen in $D \setminus \{a\}$ mit Grenzwert a, so ist zunächst überhaupt nicht klar, dass die Grenzwerte von $(f(a_n))$ und $(f(a'_n))$ irgendetwas miteinander zu tun haben. Haben sie aber doch, sie sind gleich, wie die folgende Proposition aussagt.

14.3.7 Proposition: Sei $f : D \to \mathbb{R}$ eine Funktion, und sei a ein Häufungspunkt von D. Sei f konvergent in a. Seien (a_n) und (a'_n) zwei Folgen in $D \setminus \{a\}$ mit Grenzwert a. Dann gilt $\lim\limits_{n\to\infty} f(a_n) = \lim\limits_{n\to\infty} f(a'_n)$.

Beweis: Seien (a_n) und (a'_n) zwei Folgen in $D \setminus \{a\}$ mit Grenzwert a. Wir betrachten die „gemischte Folge“ $(a_1, a'_1, a_2, a'_2 \dots)$. Auch diese Folge hat den Grenzwert a, denn in jeder ε-Umgebung von a liegen fast alle Folgenglieder der gemischten Folge. Da f in a konvergiert, existiert der Grenzwert z der Folge $(f(a_1), f(a_1'), f(a_2), f(a_2') \dots)$. Die Folgen $(f(a_n))$ und $(f(a_n'))$ sind Teilfolgen dieser konvergenten Folge, und mit Proposition 12.2.4 folgt, dass sie ebenfalls gegen z konvergieren müssen. Somit gilt $\lim_{n\to\infty} f(a_n) = z = \lim_{n\to\infty} f(a_n')$, die Behauptung. □

Proposition 14.3.7 erlaubt uns jetzt, den Grenzwert einer Funktion f, die in a konvergiert, zu definieren.

14.3.8 Definition: Sei $f : D \to \mathbb{R}$ eine Funktion, und sei a ein Häufungspunkt von D. Sei f konvergent in a. Der **Grenzwert von** f **in** a ist der Grenzwert einer (und damit aller) Folge $(f(a_n))$, wobei (a_n) eine Folge in $D \setminus \{a\}$ ist, die gegen a konvergiert. Ist b dieser Grenzwert, so schreiben wir $\lim_{x\to a} f(x) = b$.

Gesprochen wird $\lim_{x\to a} f(x) = b$ als „b ist der Grenzwert (oder Limes) von $f(x)$ für x gegen a“ oder „$f(x)$ konvergiert gegen b für x gegen a“.

Kommen wir nun noch einmal auf den Zusammenhang zwischen Konvergenz von Funktionen und Stetigkeit zurück. Zur Erinnerung: Diese Begriffe lassen sich nur dann vergleichen, wenn a in D liegt und ein Häufungspunkt von D ist.

14.3.9 Proposition: Sei $f : D \to \mathbb{R}$ eine Funktion, sei $a \in D$, und sei a ein Häufungspunkt von D. Dann gilt:

f ist genau dann stetig in a, wenn $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$ ist.

Beweis:

- $\Rightarrow$ Sei f stetig in a. Mit Beobachtung 14.3.5 folgt, dass f in a konvergent ist. Sei (a_n) eine Folge in $D\setminus\{a\}$, die gegen a konvergiert. Eine solche Folge existiert, da a ein Häufungspunkt von D ist. Nach Annahme konvergiert $(f(a_n))$ gegen $f(a)$. Mit Proposition 14.3.7 konvergieren alle Folgen in $D \setminus \{a\}$ gegen $f(a)$, also gilt $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$.

- $\Leftarrow$ Sei $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$. Sei (a_n) eine Folge in D, die gegen a konvergiert. Wenn (a_n) eine Teilfolge (a_n') besitzt, die in $D \setminus \{a\}$ liegt, dann konvergiert (a_n') ebenfalls gegen a, und es gilt $\lim_{n\to\infty} f(a_n) = f(a)$. Angenommen, (a_n) besitzt keine Teilfolge in $D \setminus \{a\}$. Dann sind fast alle Folgenglieder a, und es gibt einen Index n_0 mit $a_n = a$ für alle $n \geq n_0$. Es folgt $f(a_n) = f(a)$ für alle $n \geq n_0$, das heißt, $\lim_{n\to\infty} f(a_n) = f(a)$. Somit ist f stetig in a.

□

14.3.10 Beispiel: Seien $n \in \mathbb{N}$ und $a \in \mathbb{R}$. Sei $f : \mathbb{R} \setminus \{a\} \to \mathbb{R}$ definiert durch $x \mapsto \frac{x^n - a^n}{x-a}$. Dann gilt $\lim\limits_{x \to a} f(x) = na^{n-1}$.

Beweis: Mit Bemerkung 13.2.27 gilt

$$x^n - a^n = (x-a)(x^{n-1} + ax^{n-2} + \cdots + a^{n-2}x + a^{n-1}).$$

Sei $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch $g(x) = x^{n-1} + ax^{n-2} + \cdots + a^{n-2}x + a^{n-1}$. Dann gilt $f(x) = g(x)$ für alle $x \neq a$. Da g eine Polynomfunktion ist, ist g stetig in a, und es folgt mit Proposition 14.3.9, dass $\lim\limits_{x \to a} g(x) = g(a)$ ist. Es ist

$$g(a) = a^{n-1} + aa^{n-2} + \cdots + a^{n-1} = na^{n-1},$$

also $\lim\limits_{x \to a} g(x) = na^{n-1}$. Da bei dieser Grenzwertuntersuchung nur Folgen in $\mathbb{R} \setminus \{a\}$ betrachtet wurden, folgt $\lim\limits_{x \to a} g(x) = \lim\limits_{x \to a} f(x) = na^{n-1}$. $\square$

Sei $f : D \to \mathbb{R}$ eine beliebige Funktion, und sei a ein Häufungspunkt von D, der nicht in D liegt. Wir nehmen an, dass der Grenzwert $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ existiert. Wir definieren

$$g : D \cup \{a\} \to \mathbb{R}, x \mapsto \begin{cases} f(x), & \text{falls } x \in D \\ \lim\limits_{x \to a} f(x) & \text{für } x = a \end{cases}$$

Mit Proposition 14.3.9 ist g stetig. Die Funktion g erhält einen Namen:

14.3.11 Definition: Die Funktion g wird **stetige Fortsetzung** von f auf $D \cup \{a\}$ genannt.

Mit stetigen Fortsetzungen haben wir schon gearbeitet, bevor wir wussten, was Stetigkeit ist. Ich möchte zwei Beispiele nennen:

14.3.12 Beispiele:

1. In Abschnitt 13.2.2 haben wir durch Übergang zur gekürzten Form g einer rationalen Funktion $f = \frac{\tilde{p}}{\tilde{q}}$ eine Funktion definiert, die auf $D = \mathbb{R} \setminus \{\text{Nullstellen von } q\}$ mit f überein stimmte aber eventuell für gewisse Nullstellen von p definiert war. Die Funktion g war nichts anderes als eine stetige Fortsetzung von f auf $D \cup \{\text{gewisse Nullstellen von } q\}$.
2. In Definition 11.2.76 hatten wir für positive a und rationale r definiert, was a^r ist, also die Funktion $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$, $r \mapsto a^r$ für alle $r \in \mathbb{Q}$, definiert. In Abschnitt 13.2.3 hatten wir die allgemeine Potenz $\rho \mapsto a^\rho$ für alle $\rho \in \mathbb{R}$ als stetige Fortsetzung von $\mathbb{Q}$ auf $\mathbb{R}$ erklärt.

Die Technik der stetigen Fortsetzung einer Funktion macht noch in einem anderen Zusammenhang Sinn. Betrachten wir zunächst ein Beispiel:

14.3.13 Beispiel: Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x \neq 0 \\ 1 & \text{für } x = 0. \end{cases}$$

Dann gilt $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0$.

Beweis: Sei (a_n) eine Nullfolge in $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. Dann ist $(f(a_n))$ die konstante Folge (0), also $\lim\limits_{n \to \infty} f(a_n) = 0$. Es folgt $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0$. □

In Beispiel 14.3.13 haben wir eine Funktion, die in $a \in D$ (im Beispiel $a = 0$) nicht stetig ist, aber es existiert $\lim\limits_{x \to a} f(x)$. In einer solchen Situation können wir $f|_{D \setminus \{a\}}$ betrachten, und diese Funktion stetig auf D fortsetzen. Mit anderen Worten: Wir können f so umdefinieren, dass f nunmehr in a stetig ist. In dieser Situation führt man wieder einen eigenen Begriff ein:

14.3.14 Definition: Sei $f : D \to \mathbb{R}$ eine Funktion, die in $a \in D$ nicht stetig ist, und sei a ein Häufungspunkt von D. Wir sagen, dass f in a eine **hebbare Unstetigkeit** besitzt, wenn $f|_{D \setminus \{a\}}$ auf D stetig fortgesetzt werden kann.

Das folgende Kriterium für Konvergenz von Funktionen ist ein Analogon zum $\varepsilon - \delta$-Kriterium für die Stetigkeit.

14.3.15 Satz: ($\varepsilon - \delta$-Kriterium für den Grenzwert)

Sei $f : D \to \mathbb{R}$ eine Funktion und sei a ein Häufungspunkt von $D \setminus \{a\}$. Dann gilt: Genau dann ist $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt, sodass für alle $x \in D \setminus \{a\}$ mit $0 < |x - a| < \delta$ immer $|f(x) - b| < \varepsilon$ ist.

Beweis: Wir definieren $g : D \to \mathbb{R}$ durch $x \mapsto \begin{cases} f(x) & \text{für } x \in D \setminus \{a\} \\ b & \text{für } x = a \end{cases}$. Dann ist g die stetige Fortsetzung von $f|_{D \setminus \{a\}}$, und es gilt

$$\begin{aligned} \lim_{x \to a} f(x) = b \quad &\Leftrightarrow \quad \lim_{x \to a} g(x) = b = g(a) \\ &\Leftrightarrow \quad g \text{ ist stetig in } a \text{ (mit 14.3.9)} \\ &\Leftrightarrow \quad \text{für alle } x \in D \text{ mit } 0 < |x - a| < \delta \text{ gilt } |f(x) - b| < \varepsilon. \end{aligned}$$

Die letzte Äquivalenz folgt mit dem $\varepsilon - \delta$-Kriterium für Stetigkeit 14.1.9, angewendet auf g und der Tatsache, dass $f(x) = g(x)$ für alle $x \in D \setminus \{a\}$ ist. □

Für Funktionenkonvergenz gibt es ein Analogon zum Cauchy'schen Konvergenzprinzip 12.5.17 für Folgen:

14.3.16 Satz: (Cauchy'sches Konvergenzprinzip für Funktionen)

Sei $f : D \to \mathbb{R}$ eine Funktion, und sei a ein Häufungspunkt von D.

Genau dann existiert $\lim\limits_{x\to a} f(x)$, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ so gibt, dass für alle $x, y \in D \setminus \{a\}$ mit $|x - a| < \delta$ und $|y - a| < \delta$ stets $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$ ist.

Beweis:

$\Rightarrow$ Angenommen, $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ existiert, und $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$.Wähle $\varepsilon > 0$. Mit dem $\varepsilon - \delta$-Kriterium gibt es ein $\delta > 0$, sodass für alle $z \in D$ mit $0 < |z - a| < \delta$ immer $|f(z) - b| < \frac{\varepsilon}{2}$ bleibt.

Insbesondere gilt für alle $x, y \in D \setminus \{a\}$ mit $|x - a| < \delta$ und $|y - a| < \delta$ immer $|f(x) - b| < \frac{\varepsilon}{2}$ und $|b - f(y)| < \frac{\varepsilon}{2}$. Es folgt

$$|f(x) - f(y)| = |f(x) - b + b - f(y)| \leq |f(x) - b| + |b - f(y)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

$\Leftarrow$ Wir nehmen nun an, dass es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ so gibt, dass für alle $x, y \in D \setminus \{a\}$ mit $|x - a| < \delta$ und $|y - a| < \delta$ stets $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$ ist.

Sei (a_n) eine Folge in $D \setminus \{a\}$, die gegen a konvergiert. Sei $\varepsilon > 0$ vorgegeben. Sei $\delta > 0$ so, dass für alle $x, y \in D \setminus \{a\}$ mit $|x - a| < \delta$ und $|y - a| < \delta$ stets $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$ ist. Da (a_n) gegen a konvergiert, gibt es ein n_0, sodass für alle $n \geq n_0$ die Abschätzung $|a_n - a| < \delta$ gilt. Für alle $m, n \geq n_0$ folgt mit der Annahme $|f(a_n) - f(a_m)| < \varepsilon$. Somit ist $(f(a_n))$ eine Cauchyfolge (vergleiche 12.5.14). Mit dem Cauchy'schen Konvergenzprinzip 12.5.16 folgt, dass $(f(a_n))$ konvergent ist. Somit existiert $\lim\limits_{x\to a} f(x)$.

$\square$

Wir schließen dieses Kapitel mit den Rechenregeln für Grenzwerte von Funktionen, die, wie schon die Rechenregeln für Stetigkeit (Proposition 14.1.11) aus den Rechenregeln für konvergente Folgen, Proposition 12.4.12, folgen. Dabei verzichten wir auf einen Beweis, da in ihn keine einzige neue Idee eingeht.

14.3.17 Proposition: (Rechenregeln für Funktionenkonvergenz)

Seien $f, g : D \to \mathbb{R}$ Funktionen, und sei a ein Häufungspunkt von D. Seien $\lim\limits_{x\to a} f(x) = u$ und $\lim\limits_{x\to a} g(x) = v$. Sei $\alpha \in \mathbb{R}$. Dann gilt

1. $\lim_{x \to a}(f \pm g)(x) = u \pm v$,
2. $\lim_{x \to a}(\alpha f)(x) = \alpha u$,
3. $\lim_{x \to a}(fg)(x) = uv$,
4. $\lim_{x \to a}(\frac{f}{g}) = \frac{u}{v}$, sofern $v \neq 0$ ist.

$\square$

14.3.18 Aufgabe: Sei $f : D \to \mathbb{R}$ eine Funktion, und sei a ein Häufungspunkt von D. Sei $h : D \to \mathbb{R}$ eine beschränkte Funktion.

Beweisen Sie: Ist $\lim_{x \to a} f(x) = 0$, so ist $\lim_{x \to a}(fh)(x) = 0$.

Lösungen der Aufgaben

Lösungen der Aufgaben in 14.1

Aufgabe 14.1.2

Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto c$, eine konstante Funktion, und sei $a \in \mathbb{R}$. Sei (a_n) eine Folge in $\mathbb{R}$, die gegen a konvergiert. Dann ist $(f(a_n))$ eine konstante Folge, also $(f(a_n)) = (c)$. Deren Grenzwert ist c, und es folgt $\lim\limits_{n\to\infty} f(a_n) = c = f(a)$. Somit ist$f$ in jedem Punkt $a \in \mathbb{R}$ stetig.

Aufgabe 14.1.3

Sei $x_i \in D$, und sei (a_n) eine Folge in D, die gegen x_i konvergiert. Sei ε_i der minimale Abstand zwischen x_i und allen $x_j \in D$ mit $j \neq i$. Dann ist $\varepsilon_i > 0$, und (a_n) besitzt ein Endstück, das ganz in $U_{\varepsilon_i}(x_i)$ liegt. In $U_{\varepsilon_i}(x_i) \cap D$ liegt aber nur x_i, und es folgt, dass die Folge $(f(a_n))$ ein Endstück $(f(x_i))$ besitzt. Somit konvergiert $(f(a_n))$ gegen $f(x_i)$, das heißt, f ist in x_i stetig.

Aufgabe 14.1.5

Behauptung: Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto [x]$, ist für alle $a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ stetig.

Beweis: Sei $a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$. Sei (a_n) eine Folge in $\mathbb{R}$ mit Grenzwert a. Da $a \notin \mathbb{Z}$, gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$, sodass für alle $n \geq n_0$ die Folgenglieder a_n in dem offenen Intervall $([a], [a] + 1)$ liegen.

Für die Folge $(f(a_n))$ folgt, dass $f(a_n) = [a]$ für alle $n \geq n_0$ ist. Somit ist $\lim\limits_{n\to\infty}(f(a_n)) = [a] = f(a)$, das heißt, f ist in a stetig.

Aufgabe 14.1.7

Behauptung: Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto [x]$, ist für alle $a \in \mathbb{Z}$ nicht stetig.

Beweis: Sei $a \in \mathbb{Z}$. Die Folge $(a_n) = (a - \frac{1}{n})$ konvergiert gegen a, und es ist $(f(a_n))$ die konstante Folge $(a - 1)$. Deren Grenzwert ist $a - 1 \neq f(a)$. Es folgt, dass f

nicht stetig in a ist.

Aufgabe 14.1.10

Sei $a \in \mathbb{R}$. Für alle $\varepsilon > 0$ müssen wir ein $\delta > 0$ so bestimmen, dass für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $|x - a| < \delta$ immer $||x| - |a|| < \varepsilon$ ausfällt.

In 11.2.21 haben wir gezeigt, dass $||x|| - |a|| \leq |x - a|$ gilt. Setzen wir also $\delta = \varepsilon$, so erhalten wir:

$$|x - a| < \varepsilon \Rightarrow ||x| - |a|| \leq |x - a| < \varepsilon.$$

Mit $\delta = \varepsilon$ ist das $\varepsilon - \delta$-Kriterium also erfüllt, und es folgt, dass der Absolutbetrag für alle $a \in \mathbb{R}$ stetig ist.

Aufgabe 14.1.12

Seien $f, g : D \to \mathbb{R}$ Funktionen, und sei $a \in D$, sodass f und g stetig in a sind. Sei $\alpha \in \mathbb{R}$.

1. **Behauptung:** $f + g$ ist in a stetig.

   Beweis: Sei (a_n) eine Folge in D, die gegen a konvergiert. Dann gilt

   $$((f+g)(a_n)) = (f(a_n) + g(a_n)) = (f(a_n)) + g(a_n).$$

   Da f und g in a stetig sind, folgt

   $$\lim_{n\to\infty}(f+g)(a_n) = \lim_{n\to\infty} f(a_n) + \lim_{n\to\infty} g(a_n) = f(a) + g(a) = (f+g)(a).$$

   Somit ist $f + g$ in a stetig.

2. **Behauptung:** $f - g$ ist in a stetig.

   Beweis: Sei (a_n) eine Folge in D, die gegen a konvergiert. Dann gilt

   $$((f-g)(a_n)) = (f(a_n) - g(a_n)) = (f(a_n)) - g(a_n).$$

   Da f und g in a stetig sind, folgt

   $$\lim_{n\to\infty}(f-g)(a_n) = \lim_{n\to\infty} f(a_n) - \lim_{n\to\infty} g(a_n) = f(a) - g(a) = (f-g)(a).$$

   Somit ist $f - g$ in a stetig.

3. **Behauptung:** αf ist in a stetig.

   Beweis: Sei (a_n) eine Folge in D, die gegen a konvergiert. Dann gilt $((\alpha f)(a_n)) = (\alpha f(a_n))$. Da f in a stetig ist, folgt $\lim\limits_{n\to\infty} f(a_n) = f(a)$, also $\lim\limits_{n\to\infty}(\alpha f)(a_n) = \alpha f(a) = (\alpha f)(a)$. Somit ist αf in a stetig.

4. **Behauptung:** fg ist stetig in a.

   Beweis: Sei (a_n) eine Folge in D, die gegen a konvergiert. Dann gilt $((fg)(a_n)) = (f(a_n)g(a_n))$, und es folgt

   $$\lim n \to \infty (fg)(a_n) = \lim n \to \infty f(a_n)g(a_n) = f(a)g(a) = (fg)(a).$$

   Somit ist fg in a stetig.

5. **Behauptung:** Falls $g(x) \neq 0$ für alle $x \in D$, so ist $\frac{f}{g}$ in a stetig.

   Beweis: Sei (a_n) eine Folge in D, die gegen a konvergiert. Dann gilt $(\frac{f}{g}(a_n)) = (\frac{f(a_n)}{g(a_n)})$, also

   $$\lim_{n\to\infty} \frac{f}{g}(a_n) = \lim_{n\to\infty} \frac{f(a_n)}{g(a_n)} = \frac{f(a)}{g(a)} = \frac{f}{g}(a).$$

   Somit ist $\frac{f}{g}$ stetig in a.

6. **Behauptung:** Ist $h : E \to \mathbb{R}$ mit $f(D) \subseteq E$ in $f(a)$ stetig, so ist $h \circ f$ in a stetig.

   Beweis: Sei (a_n) eine Folge in D, die gegen a konvergiert. Da f in a stetig ist, folgt $\lim\limits_{n\to\infty} f(a_n) = f(a)$. Da h in $f(a)$ stetig ist, folgt

   $$\lim_{n\to\infty} (h \circ f)(a_n) = \lim_{n\to\infty} h(f(a_n)) = h(f(a)) = (h \circ f)(a).$$

   Somit ist $h \circ f$ in a stetig.

Aufgabe 14.1.14 Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \sum\limits_{i=0}^{n} a_i x^i$ eine Polynomfunktion. Da Potenzfunktionen mit natürlichen Exponenten stetig sind (vergleiche Beispiel 14.1.4), sind alle Funktionen $x \mapsto x^i$, $1 \leq i \leq n$, stetig. Mit den Rechenregeln 14.1.11 folgt, dass $x \mapsto a_i x^i$, $1 \leq i \leq n$, steig ist. Da Summen stetiger Funktionen stetig sind, sehen wir, dass die Funktion $x \mapsto \sum\limits_{i=1}^{n} a_i x^i$ stetig ist. Da auch konstante Funktionen stetig sind (vergleiche Aufgabe 14.1.2), folgt, dass $x \mapsto \sum\limits_{i=0}^{n} a_i x^i$ stetig ist. Somit sind Polynomfunktionen stetig auf $\mathbb{R}$.

Seien nun f und g Polynomfunktionen, und sei N die Menge der Nullstellen von g. Dann ist $\frac{f}{g} : \mathbb{R} \setminus N \to \mathbb{R}$ definiert. Mit dem, was wir eben überlegt haben, sind f und g auf $\mathbb{R} \setminus N$ stetig, und mit den Rechenregeln 14.1.11 folgt, dass $\frac{f}{g}$ auf $\mathbb{R} \setminus N$ stetig ist.

Lösungen der Aufgabe in 14.2

Aufgabe 14.2.13

Aus Korollar 14.2.12 folgt, dass D kein Intervall sein darf. Sei etwa $f : [0,1] \cup [2,3] \to \mathbb{R}$ definiert durch $x \mapsto x$ für alle $x \in [0,1]$ und $x \mapsto -x$ für alle $x \in [2,3]$. Dann ist f nicht streng monoton, denn auf $[0,1]$ ist f streng monoton wachsend und auf $[2,3]$ streng monoton fallend. Da die identische Funktion $\mathrm{id}_{\mathbb{R}}$ auf ganz $\mathbb{R}$ stetig ist, ist f auf $[0,1]$ stetig. Da auch $-\mathrm{id}_{\mathbb{R}}$ auf ganz $\mathbb{R}$ stetig ist, ist f auf $[2,3]$ stetig. Es folgt, dass f stetig ist. Es bleibt zu zeigen, dass f injektiv ist. Dazu seien $x_1, x_2 \in [0,1] \cup [2,3]$ mit $x_1 \neq x_2$. Liegen x_1 und x_2 beide in $[0,1]$ oder beide in $[2,3]$, so gilt $f(x_1) \neq f(x_2)$. Liegt x_1 in $[0,1]$ und x_2 in $[2,3]$, so ist $f(x_2) < 0$ und $f(x_1) \geq 0$, also $f(x_1) \neq f(x_2)$. Es folgt, dass f injektiv ist.

Lösungen der Aufgaben in 14.3

Aufgabe 14.3.3

Wir nehmen zunächst an, dass $I = [x, y]$ ein abgeschlossenes Intervall ist, und dass a einer der Randpunkte von I ist. Ist a der linke Randpunkt von I, also $a = x$, so gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$, sodass $a + \frac{1}{n_0}$ in I liegt. Dann liegt auch $a + \frac{1}{n_0+n}$, für alle $n \in \mathbb{N}$ in I, und $(a + \frac{1}{n_0+n})$ ist eine Folge in $I \setminus \{a\}$, die gegen a konvergiert. Somit ist a ein Häufungspunkt von $I \setminus \{a\}$. Ist a der rechte Randpunkt von I, so argumentieren wir analog: Es gibt ein $n_0 \in \mathbb{N}$, sodass $a - \frac{1}{n_0}$ in I liegt. Dann liegt auch $a - \frac{1}{n_0+n}$, für alle $n \in \mathbb{N}$ in I, und $(a - \frac{1}{n_0+n})$ ist eine Folge in $I \setminus \{a\}$, die gegen a konvergiert. Somit ist a auch in diesem Fall ein Häufungspunkt von $I \setminus \{a\}$.

Jetzt nehmen wir an, dass I ein beliebiges Intervall ist, und dass a kein Randpunkt von I ist. Dann gibt es eine ε-Umgebung von a, sodass $U_\varepsilon(a)$ ganz in I liegt. Für $n_0 > \frac{1}{\varepsilon}$ liegt dann $a + \frac{1}{n_0+n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ ebenfalls in I, und $(a + \frac{1}{n_0+n})$ ist eine Folge in $I \setminus \{a\}$, die gegen a konvergiert. Dies zeigt, dass a ein Häufungspunkt von $I \setminus \{a\}$ ist.

Aufgabe 14.3.6

Sei $f : [0,2] \to \mathbb{R}$ definiert durch $f(x) = 1$ für $x \in [0,2]$ und $x \neq 1$ und $f(1) = 3$. Dann ist f in 1 nicht stetig, denn die Folge $(1 + \frac{1}{n})$ konvergiert gegen 1, aber $(f(1 + \frac{1}{n})$ konvergiert nicht gegen $f(1) = 3$.Ist (a_n) hingegen eine beliebige Folge in $[0,2] \setminus \{1\}$, die gegen 1 konvergiert, so ist $(f(a_n))$ die konstante Folge (1), und diese konvergiert. Somit existiert $\lim\limits_{n\to\infty} f(a_n)$, das heißt, f ist konvergent gegen 1.

Aufgabe 14.3.18

Sei (a_n) eine Folge in $D \setminus \{a\}$, die gegen a konvergiert. Da h beschränkt ist, ist $(h(a_n))$ eine beschränkte Folge. Nach Annahme ist $(f(a_n))$ eine Nullfolge. Mit Proposition 12.4.9 ist $(f(a_n)h(a_n)) = ((fh)(a_n))$ eine Nullfolge, also $\lim\limits_{x\to a}(fh)(x) = 0$.

Kapitel 15

Differenzierbarkeit

Bei der Untersuchung von Funktionen in der Analysis ist man weniger an dem konkreten Wert $f(a)$ einer Funktion an einer Stelle a interessiert, sondern an der Veränderung dieser Werte bei Veränderung von a. Mit zwei wichtigen Änderungsmodi haben wir uns bereits beschäftigt, nämlich mit der Monotonie und der Stetigkeit von Funktionen. In diesem Kapitel nehmen unsere bisherigen Untersuchungen eine neue Wendung. Wir werden die Änderung einer Funktion f in der Nähe von a, also die Differenz $f(x) - f(a)$, mit der Änderung der einfachsten nicht konstanten Funktion, nämlich der identischen Funktion, vergleichen. Das heißt, wir werden den so genannten **Differenzenquotienten** $\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ betrachten, und aus seinem Verhalten Rückschlüsse auf die Funktion in der Nähe von a ziehen.

15.1 Die Ableitung einer Funktion

15.1.1 Definition: Sei $f : I \to \mathbb{R}$ eine Funktion, wobei I ein beliebiges Intervall bezeichnet. Wir sagen, dass f **im Punkt** $a \in I$ **differenzierbar** ist, wenn der Grenzwert

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \text{ oder, was dasselbe ist, } \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

existiert. Dieser Grenzwert wird mit $f'(a)$ bezeichnet und die **Ableitung** von f an der Stelle a genannt. Ist f für alle Punkte $x \in I$ differenzierbar, dann sagen wir dass f **differenzierbar** ist und nennen $f' : I \to \mathbb{R}$, $x \mapsto f'(x)$ die **Ableitung** von f.

15.1.2 Beispiel: In Beispiel 14.3.10 haben wir gezeigt, dass $\lim\limits_{x \to a} \frac{x^n - a^n}{x-a} = na^{n-1}$ ist. Mit anderen Worten, wir haben gezeigt, dass die Funktion $x \mapsto x^n$ in jedem

Punkt $a \in \mathbb{R}$ differenzierbar ist, und dass na^{n-1} die Ableitung dieser Funktion an der Stelle a ist.

Dass eine Funktion f an der Stelle a differenzierbar ist, bedeutet, dass für jede Folge in I, die gegen a konvergiert, die Folge $(\frac{f(x_n)-f(a)}{x_n-a})$ gegen $f'(a)$ konvergiert. Anders ausgedrückt, Differenzierbarkeit von f an der Stelle a heißt, dass die Funktion

$$F_a : I \to \mathbb{R}, x \mapsto \begin{cases} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} & \text{für } x \neq a \\ f'(a) & \text{für } x = a \end{cases}$$

in a stetig ist.

Über den Zusammenhang zwischen Differenzierbarkeit und Stetigkeit gibt die folgende Proposition Auskunft.

15.1.3 Proposition: Eine Funktion f ist in jedem Punkt stetig, in dem sie differenzierbar ist.

Beweis: Sei $f : I \to \mathbb{R}$ in $a \in I$ differenzierbar. Sei (a_n) eine Folge in $I \setminus \{a\}$, die gegen a konvergiert. Dann gilt

$$f(a_n) - f(a) = \frac{f(a_n) - f(a)}{a_n - a}(a_n - a).$$

Wegen der Existenz von $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{f(a_n)-f(a)}{a_n-a}$ ergibt sich

$$\lim_{n\to\infty}(f(a_n) - f(a)) = \lim_{n\to\infty} \frac{f(a_n) - f(a)}{a_n - a} \cdot \lim_{n\to\infty}(a_n - a) = f'(a) \cdot 0 = 0.$$

Es folgt $\lim\limits_{n\to\infty} f(a_n) = f(a)$ (vergleiche Aufgabe 12.1.14), das heißt, f ist stetig in a. ☐

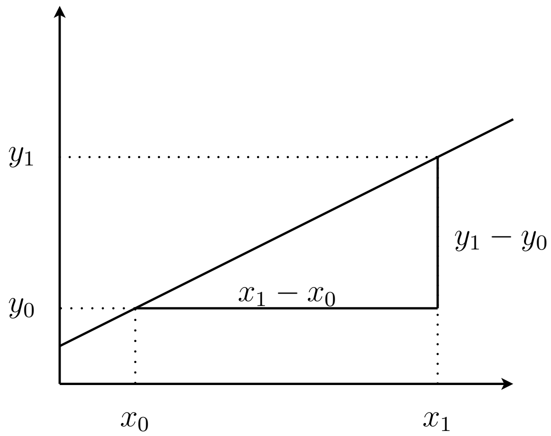
Differenzierbarkeit in a ist also eine stärkere Eigenschaft als Stetigkeit in a.

15.1.4 Aufgabe: In Aufgabe 14.1.10 haben Sie gezeigt, dass der Absolutbetrag $x \mapsto |x|$ stetig ist. Beweisen Sie, dass der Absolutbetrag in 0 nicht differenzierbar ist.

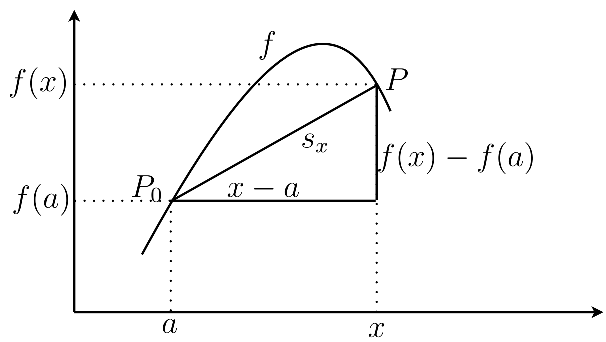
Hier noch einmal formal die Definition des Differenzenquotienten, die zu Beginn dieses Kapitels so nebenbei eingeführt wurde:

15.1.5 Definition: Sei $f : D \to \mathbb{R}$ eine Funktion, und sei $a \in D$. Sei $x \in D \setminus \{a\}$. Der Bruch $\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ wird **Differenzenquotient** genannt.

Bei der Untersuchung einer Funktion auf Differenzierbarkeit in a betrachtet man das Verhalten des Differenzenquotienten bei Annäherung von x an a. Der Differenzenquotient lässt eine geometrische Interpretation zu: Ist eine Gerade g durch die Gleichung $y = bx + c$ gegeben, so ist für je zwei verschiedene Werte x_0, x_1 auf der x-Achse und die zugehörigen Werte $y_0 = bx_0 + c, y_1 = bx_1 + c$ auf der y-Achse stets $\frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} = b$. Dieser Quotient b (vergleiche folgende Skizze), wird die **Steigung** von g genannt.



Nun sei f eine Funktion auf einem Intervall I gegeben, und es sei a ein fester Punkt in I. Dann ist für jedes $x \neq a$ der Quotient $\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ die Steigung der **Sehne** s_x, die durch die Punkte $P_0 = (a, f(a))$ und $P = (x, f(x))$ geht (vergleichen Sie mit folgender Skizze).



Die Steigung von s_x nennt man auch die **mittlere Steigung** von f zwischen x und a. Ist f in a differenzierbar, so streben die mittleren Steigungen gegen $f'(a)$, sofern x gegen a strebt. Es ist daher nahe liegend, $f'(a)$ die **Steigung der Funktion f im Punkt** a zu nennen. Die Gerade durch P_0 mit der Steigung $f'(a)$, also die Gerade $y = f(a) + f'(a)(x - a)$ heißt **Tangente** an f im Punkt P_0. Man kann sich die Tangente vorstellen als die „Grenzlage“ der Sekanten s_x, wenn x gegen a strebt. Fassen wir zusammen:

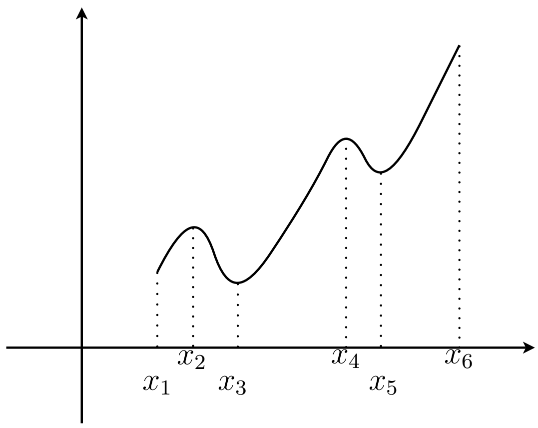
15.1.6 Merkregel: Sei $f : D \to \mathbb{R}$ eine Funktion, die im Punkt $a \in D$ differenzierbar ist. Die Ableitung $f'(a)$ ist die Steigung der Tangente an f im Punkt $(a, f(a))$.

15.1.7 Definition: Sei $f : D \to \mathbb{R}$ eine Funktion, und sei $a \in D$. Wir sagen, dass f in a ein **lokales Maximum** beziehungsweise **lokales Minimum besitzt**, wenn es eine δ-Umgebung $U_\delta(a)$ von a so gibt, dass

für alle $x \in U_\delta(a) \cap D$ stets $f(x) \leq f(a)$ beziehungsweise $f(x) \geq f(a)$ ist.

In diesem Fall wird a ein **lokales Maximum** beziehungsweise ein **lokales Minimum** genannt. Lokale Maxima und Minima heißen auch **lokale Extrema**.

Eine Funktion kann viele lokale Extrema haben, wie die folgende Skizze zeigt.



In den Punkten x_1, x_3, x_5 befinden sich lokale Minima, und in x_2, x_4, x_6 lokale Maxima.

15.1.8 Definition: Sei $f : D \to \mathbb{R}$ eine Funktion, und sei $a \in D$. Wir sagen, dass sich in a ein **globales Maximum** beziehungsweise **globales Minimum** von f befindet, wenn $f(a) \geq f(x)$ beziehungsweise $f(a) \leq f(x)$ für alle $x \in D$ ist. Punkte, in denen sich globale Maxima und Minima befinden, heißen auch **globale Extrema**.

Ein globales Extremum ist immer auch ein lokales Extremum.

15.1.9 Aufgabe: Geben Sie ein Beispiel für eine Funktion f, die kein globales Extremum besitzt.

15.1.10 Definition: Sei $X \subseteq \mathbb{R}$. Ein Punkt $x \in X$ heißt **innerer Punkt** von X, wenn es eine δ-Umgebung $U_\delta(x)$ so gibt, dass $U_\delta(x)$ ganz in X liegt.

15.1.11 Beispiel: Ist I ein abgeschlossenes Intervall, so sind alle Punkte bis auf die Randpunkte innere Punkte von I. Ist I ein offenes Intervall, so sind alle Punkte von I innere Punkte.

Die folgende Proposition ist ein erstes Indiz dafür, wie man aus der Differenzierbarkeit einer Funktion in einem Punkt f auf Eigenschaften von f in einer Umgebung von a schließen kann.

15.1.12 Proposition: Sei $f : I \to \mathbb{R}$ eine Funktion, die in einem inneren Punkt $a \in I$ differenzierbar ist. Wenn f in a ein lokales Extremum hat, dann gilt $f'(a) = 0$.

Beweis: Sei a ein innerer Punkt von I, und sei a ein lokales Maximum. Dann gibt es eine δ-Umgebung $U_\delta(a)$, die ganz in I liegt, und für alle $x \in U_\delta(a)$ gilt $f(x) \leq f(a)$. Sei f in a differenzierbar. Sei (a_n) eine Folge in $U_\delta(a) \setminus \{a\}$ mit Grenzwert a, die von links gegen a strebt, deren Folgenglieder also alle kleiner als a sind. (Eine solche Folge existiert, etwa $(a - \frac{1}{n_0+n})$, wobei $n_0 > \frac{1}{\delta}$ ist.) Dann gilt

$$f'(a) = \lim_{n\to\infty} \frac{f(a_n) - f(a)}{a_n - a} \geq 0,$$

denn alle Folgenglieder $\frac{f(a_n)-f(a)}{a_n-a}$ sind ≥ 0.

Sei (a'_n) eine Folge in $U_\delta(a) \setminus \{a\}$ mit Grenzwert a, die von rechts gegen a strebt, deren Folgenglieder also alle größer als a sind. Dann gilt

$$f'(a) = \lim_{n\to\infty} \frac{f(a_n) - f(a)}{a_n - a} \leq 0.$$

Kombinieren wir diese Rechnungen, so erhalten wir $f'(a) = 0$. Analog folgt dies wenn wir annehmen, a sei ein lokales Minimum. □

Anschaulich bedeutet dieses Ergebnis, dass (unter der Annahme, f sei in seinen lokalen Extrema differenzierbar) f an jeder lokalen Extremstelle eine horizontale Tangente, also eine Tangente mit Steigung Null hat.

15.1.13 Aufgabe: Geben Sie ein Beispiel dafür, dass die Umkehrung von Proposition 15.1.12 falsch ist. Genauer: Finden Sie ein Beispiel für eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ und ein $a \in D$, sodass $f'(a) = 0$ ist, ohne dass a ein lokales Extremum ist.

15.1.14 Aufgabe: Geben Sie ein Beispiel dafür, dass Proposition 15.1.12 falsch ist, wenn a kein innerer Punkt ist.

Ist f beispielsweise auf einem offenen Intervall definiert und in jedem Punkt differenzierbar, so stehen nur die Lösungen x_0 der Gleichung $f'(x_0) = 0$ in Verdacht, lokale Extrema zu sein. Ob sie es tatsächlich sind, muss in jedem Einzelfall geprüft werden. Wie eine solche Prüfung bewerkstelligt werden kann, ohne das Vorzeichen von $f(x) - f(x_0)$ für x in der Nähe von x_0 zu untersuchen, werden wir später sehen.

15.2 Differentiationsregeln

Die Differentiationsregeln, die in diesem Abschnitt vorgestellt werden, sind Werkzeuge, die im Weiteren ständig brauchen werden. Sie sollten sie auch im Halbschlaf rauf- und runterdeklinieren können, ohne dabei die Voraussetzungen für deren Gültigkeit zu vergessen.

15.2.1 Proposition: (Rechenregeln der Differentialrechnung)

Seien $f, g : I \to \mathbb{R}$ Funktionen, sei $a \in I$, und seien f und g in a differenzierbar. Sei $\alpha \in \mathbb{R}$. Dann sind $f \pm g$, αf, fg und $\frac{f}{g}$ in a differenzierbar. Letztere Funktion allerdings nur, wenn $g(a) \neq 0$ ist. Die Ableitungen sind durch folgende Formeln gegeben.

1. $(f \pm g)'(a) = f'(a) \pm g'(a)$
2. $(\alpha f)'(a) = \alpha f'(a)$
3. $(fg)'(a) = f(a)g'(a) + g(a)f'(a)$ (Produktregel)
4. $\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{g(a)f'(a) - f(a)g'(a)}{(g(a))^2}$ (Quotientenregel)

Beweis: Aus den Rechenregeln für Funktionenkonvergenz 14.3.17 und der Tatsache, dass Funktionen dort stetig sind, wo sie differenzierbar sind (Proposition 15.1.3), folgt

$$\lim_{x\to a} \frac{(f(x) \pm g(x)) - (f(a) \pm g(a))}{x - a} = \lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \pm \lim_{x\to a} \frac{g(x) - g(a)}{x - a} = f'(a) \pm g'(a),$$

$$\lim_{x\to a} \frac{\alpha f(x) - \alpha f(a)}{x - a} = \alpha \lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \alpha f'(a),$$

$$\begin{aligned} \lim_{x\to a} \tfrac{f(x)g(x) - f(a)g(a)}{x-a} &= \lim_{x\to a} \left(f(x) \tfrac{g(x)-g(a)}{x-a} + g(a) \tfrac{f(x)-f(a)}{x-a} \right) \\ &= \lim_{x\to a} f(x) \cdot \lim_{x\to a} \tfrac{g(x)-g(a)}{x-a} + g(a) \lim_{x\to a} \tfrac{f(x)-f(a)}{x-a} \\ &= f(a)g'(a) + g(a)f'(a), \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to a} \frac{\frac{f(x}{g(x)} - \frac{f(a)}{g(a)}}{x-a} &= \lim_{x\to a} \left(\frac{1}{g(x)g(a)} \left(g(a)\frac{f(x)-f(a)}{x-a} - f(a)\frac{g(x)-g(a)}{x-a}\right)\right) \\
&= \frac{g(a)f'(a)-f(a)g'(a)}{(g(a))^2}.
\end{aligned}
$$

□

Die konstante Funktion $f(x) = c$, $c \in \mathbb{R}$, besitzt wegen $f(x) - f(a) = c - c = 0$ überall die Ableitung 0. Aus der Quotientenregel folgt somit:

15.2.2 Korollar: (Reziprokregel)

Ist $g : I \to \mathbb{R}$ in $a \in I$ differenzierbar ist und $g(a) \neq 0$, so gilt $(\frac{1}{g})'(a) = -\frac{g'(a)}{(g(a))^2}$.□

Die wohl wichtigste Differentiationsregel ist die so genannte Kettenregel.

15.2.3 Satz: (Kettenregel)

Sei g auf dem Intervall I_g und f auf dem Intervall I_f definiert, und sei $\text{Bild}(g) \subseteq I_f$. Sei g in $a \in I_g$ und f in $g(a)$ differenzierbar. Dann ist $f \circ g$ in a differenzierbar, und es gilt

$$(f \circ g)'(a) = f'(g(a))g'(a).$$

Beweis: Wir definieren eine Funktion ϕ wie folgt:

$$\phi(h) = \begin{cases} \frac{f(g(a+h))-f(g(a))}{g(a+h)-g(a)}, & \text{falls } g(a+h) - g(a) \neq 0 \\ \\ f'(g(a)), & \text{falls } g(a+h) - g(a) = 0. \end{cases}$$

Der Knackpunkt des Beweises ist es, zu zeigen, dass ϕ in 0 stetig ist, und das nehmen wir jetzt in Angriff.

Wir wissen, dass f in $g(a)$ differenzierbar ist. Es folgt

$$\lim_{k\to 0} \frac{f(g(a)+k) - f(g(a))}{k} = f'(g(a)).$$

Das heißt, wenn $\varepsilon > 0$, dann gibt es ein $\delta' > 0$, sodass für alle k mit $0 < |k| < \delta'$ gilt:

$$\left| \frac{f(g(a)+k) - f(g(a))}{k} - f'(g(a)) \right| < \varepsilon.$$

Nun ist g differenzierbar in a, also stetig in a. Es gibt also ein $\delta > 0$, sodass für alle h mit $|h| < \delta$ gilt:

$$|g(a+h) - g(a)| < \delta'.$$

Wir betrachten nun irgendein h mit $|h| < \delta$. Wenn $k = g(a+h) - g(a) \neq 0$, so folgt

$$\phi(h) = \frac{f(g(a+h)) - f(g(a))}{g(a+h) - g(a)} = \frac{f(g(a)+k) - f(g(a))}{k}.$$

Da $|h| < \delta$, folgt $|k| < \delta'$. Mit der ersten Ungleichung gilt dann

$$|\phi(h) - f'(g(a))| < \varepsilon.$$

Ist andererseits $g(a+h) - g(a) = 0$, dann ist nach Definition $\phi(h) = f'(g(a))$, und es gilt wieder

$$|\phi(h) - f'(g(a))| < \varepsilon.$$

Mit dem $\varepsilon - \delta$-Kriterium (Satz 14.1.9) folgt, dass ϕ in 0 stetig ist, und es gilt

$$\lim_{h\to 0} \phi(h) = f'(g(a)).$$

Der Rest des Beweises ist einfach. Ist $h \neq 0$ mit $|h| < \delta$, so gilt

$$\frac{f(g(a+h)) - f(g(a))}{h} = \phi(h)\frac{g(a+h) - g(a)}{h}.$$

Diese Gleichung ist auch richtig für $g(a+h) - g(a) = 0$, denn dann gilt $g(a+h) = g(a)$, also $f(g(a+h)) = f(g(a))$, und der Zähler der linken Seite ist 0. Die linke und die rechte Seite der Gleichung sind somit 0. Es folgt

$$\begin{aligned}(f \circ g)'(a) &= \lim_{h\to 0} \tfrac{f(g(a+h)) - f(g)a}{h} = \lim_{h\to 0} \phi(h) \lim_{h\to 0} \tfrac{g(a+h)-g(a)}{h} \\ &= f'(g(a))g'(a).\end{aligned}$$

□

Die folgende Proposition beschäftigt sich mit der Ableitung der Umkehrfunktion f^{-1} einer Abbildung f. Zur Erinnerung: Wenn $f : I \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion ist, wobei I ein Intervall bezeichnet, so ist f genau dann injektiv (und genau dann existiert $f^{-1} : f(I) \to \mathbb{R}$), wenn f streng monoton ist. Dies war gerade die Aussage von Korollar 14.2.12. Ist $f : I \to \mathbb{R}$ stetig, so ist $f(I)$ ein Intervall oder ein Punkt (Korollar 14.2.5). Ist f darüber hinaus injektiv, so ist $f^{-1} : f(I) \to \mathbb{R}$ ebenfalls stetig (Proposition 14.2.14).

15.2.4 Proposition: (Differenzierbarkeit der Umkehrfunktion)

Sei I ein Intervall, und sei $f : I \to \mathbb{R}$ stetig und streng monoton. Sei f in $a \in I$ differenzierbar. Dann ist $f^{-1} : f(I) \to \mathbb{R}$ in $b = f(a)$ differenzierbar, und es gilt $(f^{-1})'(b) = \frac{1}{f'(a)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(b))}$.

Beweis: Sei (y_n) eine Folge in $f(I) \setminus \{b\}$, die gegen b konvergiert. Für alle $n \in \mathbb{N}$ setzen wir $x_n = f^{-1}(y_n)$. Dann ist (x_n) eine Folge in I, und da f^{-1} injektiv ist, sind alle Folgenglieder $\neq a$. Da f^{-1} stetig ist, konvergiert $(x_n) = (f^{-1}(y_n))$ gegen $f^{-1}(b) = a$. Dann gilt

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f^{-1}(y_n) - f^{-1}(b)}{y_n - b} = \lim_{n\to\infty} \frac{x_n - a}{f(x_n) - f(a)} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\frac{f(x_n)-f(a)}{x_n-a}} = \frac{1}{f'(a)}.$$

Also ist f^{-1} in b differenzierbar, und es gilt $(f^{-1})'(b) = \frac{1}{f'(a)}$. □

Jetzt, wo wir so viele Differentiationsregeln kennen gelernt haben, werden Sie sich vielleicht Aufgaben wünschen, mit denen Sie sie vertiefen können. Ich muss Sie auf den folgenden Abschnitt vertrösten. Der Grund dafür ist, dass wir bisher zu wenige Beispiele von Ableitungen kennen. Genau genommen, wir kennen bisher nur die Ableitung von konstanten Funktionen (die ist 0) und die Ableitung von Potenzfunktionen mit natürlichen Exponenten (die Ableitung von $f(x) = x^n$ ist $f'(x) = nx^{n-1}$). Also werden wir uns im nächsten Abschnitt Beispielen widmen.

15.3 Beispiele differenzierbarer Funktionen

15.3.1 Polynomfunktionen

Eine Polynomfunktion $f : I \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \sum\limits_{i=0}^{n} a_i x^i$, ist von der Form

$$f = a_0 + a_1 \mathrm{id}_I + a_2 \mathrm{id}_I^2 + \cdots + a_n \mathrm{id}_I^n,$$

wobei $a_0, \ldots, a_n$ reelle Zahlen sind.

Die konstante Funktion $x \mapsto a_0$ ist auf ganz I differenzierbar; ihre Ableitung ist 0. Die Funktion id_I^i sind Potenzfunktionen $x \mapsto x^i$ mit natürlichen Exponenten. Sie sind auf I differenzierbar, und ihre Ableitung ist $(\mathrm{id}_I^i)'(x) = ix^{i-1}$. Dann ist mit 15.2.1 auch $a_i\mathrm{id}_I^i$ differenzierbar mit $(a_i\mathrm{id}_I^i)' = ia_ix^{i-1}$. Da die Summe differenzierbarer Funktionen differenzierbar ist (Rechenregeln 15.2.1), folgt

15.3.1 Proposition: Polynomfunktionen $f : I \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \sum\limits_{i=0}^{n} a_i x^i$, sind für alle $x \in I$ differenzierbar, und es gilt

$$f'(x) = \sum_{i=1}^{n} ia_i x^{i-1}.$$

□

15.3.2 Rationale Funktionen

Sei n eine natürliche Zahl. Wir betrachten $f : I \setminus \{0\} \to \mathbb{R}, x \mapsto x^{-n} = \frac{1}{x^n}$. Mit der Quotientenregel in 15.2.1 folgt, dass f für alle $x \in I \setminus \{0\}$ differenzierbar ist, und es gilt $f'(x) = -\frac{nx^{n-1}}{x^{2n}} = -nx^{-n-1}$. Kombinieren wir unsere Kenntnis über die Ableitung von Potenzfunktionen mit natürlichen Exponenten und unsere Überlegungen, die wir gerade gemacht haben, so erhalten wir:

15.3.2 Proposition: Sei $k \in \mathbb{Z}$. Dann gilt $(x^k)' = kx^{k-1}$. □

Wir haben in 15.3.1 gesehen, dass Polynomfunktionen differenzierbar sind. Zusammen mit der Quotientenregel ergibt sich:

15.3.3 Proposition: Rationale Funktionen sind dort differenzierbar, wo sie definiert sind. □

15.3.3 Exponentialfunktion, Logarithmus und allgemeine Potenz

15.3.4 Satz: (Ableitung der Exponentialfunktion)

Sei $a > 0$. Für alle $x \in \mathbb{R}$ ist $\exp_a$ in x differenzierbar, und es gilt

$$\exp_a'(x) = \exp_a(x)\ln(a), \text{ insbesondere also } \exp'(x) = \exp(x).$$

Beweis: Die Behauptung ist, dass $\lim\limits_{h\to 0} \frac{a^{x+h}-a^x}{h} = a^x \ln(a)$ ist (vergleiche Definition 15.1.1). Wir klammern a^x aus $\frac{a^{x+h}-a^x}{h}$ aus und erhalten

$$\lim_{h\to 0} \frac{a^{x+h} - a^x}{h} = \lim_{h\to 0} a^x \cdot \frac{a^h - 1}{h} = a^x \lim_{h\to 0} \frac{a^h - 1}{h}.$$

Aus Proposition 13.2.48 folgt $\lim\limits_{h\to 0} \frac{a^h-1}{h} = \ln(a)$, also ist $\exp_a$differenzierbar, und $\exp_a'(x) = \exp_a(x)\ln(a)$, die erste Behauptung. Die zweite Behauptung folgt aus der ersten, denn exp ist die Exponentialfunktion zur Basis e und $\ln(e) = 1$. □

Man schreibt die Formel aus Satz 15.3.4 auch oft als

$$(a^x)' = a^x \ln(a) \text{ und } (e^x)' = e^x.$$

Die e-Funktion hat also die merkwürdige Eigenschaft, sich durch Ableiten zu reproduzieren. Kann es noch mehr Funktionen mit dieser Eigenschaft geben? Nun ja, wenn a eine feste reelle Zahl ist, dann hat auch $f = a\exp$ die Eigenschaft, dass $f'(x) = a\exp(x) = f(x)$ ist. Das ist aber auch die einzige Möglichkeit, wie Sie in der nächsten Kurseinheit als Folgerung aus dem so genannten Mittelwertsatz der Differentialrechnung sehen werden.

Aus Satz 15.3.4 und den Regeln der Differentiation, die wir in Abschnitt 15.2 diskutiert haben, folgen nun auch die Ableitungen der Logarithmusfunktion und der allgemeinen Potenzfunktion.

15.3.5 Korollar: (Ableitung des natürlichen Logarithmus)

Die Funktion ln ist differenzierbar, und für alle $x \in (0, \infty)$ gilt $\ln'(x) = \frac{1}{x}$.

Beweis: Der natürliche Logarithmus ln ist die Umkehrfunktion der streng monotonen e-Funktion. Deshalb ist ln differenzierbar, und es folgt mit Proposition 15.2.4 und Satz 15.3.4:

$$\ln'(x) = \frac{1}{\exp(\ln(x))} = \frac{1}{x}.$$

□

15.3.6 Korollar: (Ableitung des Logarithmus)

Sei $a \in \mathbb{R}$. Die Funktion $\log_a$ ist differenzierbar, und für alle $x \in (0, \infty)$ ist $\log_a'(x) = \frac{1}{x\ln(a)}$.

Beweis: Mit Proposition 13.2.44 gilt $\log_a((x) = \frac{\ln(x)}{\ln(a)}$. Aus Korollar 15.3.5 folgt dann die Differenzierbarkeit, und

$$\log_a'(x) = \frac{1}{\ln(a)}\ln'(x) = \frac{1}{x\ln(a)}.$$

□

15.3.7 Korollar: (Ableitung der allgemeinen Potenzfunktion)

Sei $a \in \mathbb{R}$, und sei $f : (0, \infty) : \mathbb{R}$, $x \mapsto x^a$ die allgemeine Potenzfunktion. Dann ist f differenzierbar, und es gilt $f'(x) = ax^{a-1}$ für alle $x > 0$.

Beweis: Mit Proposition 13.2.44 gilt $x^a = \exp(a\ln(x))$. Setzen wir für einen Moment $h = \exp$ und $g = a\ln$. Dann gilt $f(x) = x^a = h(g(x)) = (h \circ g)(x)$. Nach der Kettenregel 15.2.3 ist f differenzierbar, und es ist $f'(x) = h'(g(x))g'(x)$, also $f'(x) = \exp(a\ln(x))\frac{a}{x}$, denn $h' = \exp$ und $g'(x) = \frac{a}{x}$. Ersetzen wir nun $\exp(a\ln(x))$ wieder durch x^a, so erhalten wir $f'(x) = \frac{ax^a}{x} = ax^{a-1}$. □

15.3.8 Aufgabe: Berechnen Sie $(\sqrt[n]{x})'$ und speziell $(\sqrt{x})'$ für positive x.

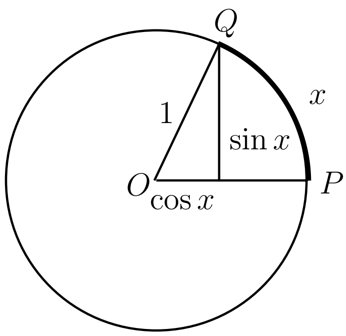
Sie sollten die Differentiationsregeln aus Abschnitt 15.2 auswendig wissen und ebenso die Ableitungen der Funktionen, die wir in diesem Abschnitt hergeleitet haben. Um etwas Übung mit ihrem Umgang zu bekommen, versuchen Sie sich bitte an folgender Aufgabe, ohne vorher die Lösungen zu lesen.

15.3.9 Aufgabe: Berechnen Sie die Ableitungen folgender Funktionen.

1. $x \mapsto \frac{x^2-2x+1}{x+2}$, $x \neq -2$
2. $x \mapsto \frac{2}{x^3} + \frac{4}{x^2} - 3 + 5x$, $x \neq 0$
3. $x \mapsto x^4 \exp(x)$
4. $x \mapsto x \ln(x)$, $x > 0$
5. $x \mapsto x \ln(x) - x$, $x > 0$
6. $x \mapsto \frac{\ln(x)}{x}$, $x > 0$
7. $x \mapsto \frac{1}{\ln(x)}$, $x > 0$ und $x \neq 1$.
8. $x \mapsto \exp(2x + 3)$

15.3.4 Sinus und Kosinus

Aus der Schule sind Ihnen vermutlich die Winkelfunktionen $\sin(x)$ und $\cos(x)$ bekannt. Sie werden gewöhnlich am Einheitskreis definiert, wie es die folgende Skizze angibt:



Dabei ist x die Länge des Kreisbogens PQ (fett eingezeichnet) , das so genannte **Bogenmaß** des Winkels $\angle QOB$.

Aus dieser Definition ergeben sich die folgenden Aussagen:

15.3.10 Eigenschaften: (Eigenschaften der Winkelfunktionen)

(SinKos-1) Die Funktionen sind auf $\mathbb{R}$ definiert und stetig.

(SinKos-2) Es sind $\sin(-x) = -\sin(x)$ und $\cos(-x) = \cos(x)$.

(SinKos-3) Es gelten die Additionstheoreme $\sin(x+y) = \sin(x)\cos(y)+\cos(x)\sin(y)$ und $\cos(x+y) = \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y)$.

(SinKos-4) Es ist $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$.

(SinKos-5) Es ist $\cos(0) = 1$.

Wir werden diese Aussagen jetzt nicht beweisen – und zwar einfach deshalb nicht, weil die oben gegebene Erklärung der Winkelfunktion ziemlich ungenau ist. Sie stützt sich auf den bisher undefinierten Begriff der Länge eines Kurvenstückes. Stellen Sie sich nur einmal vor, Sie müssten exakt angeben, was die Länge des Kreisbogens PQ wirklich ist. Wir werden einen anderen Weg gehen und annehmen, es gäbe Funktionen, die die Eigenschaften (SinKos-1) bis (SinKos-5) erfüllen. Aus diesen Eigenschaften werden wir alle weiteren Aussagen über $\sin(x)$ und $\cos(x)$ beweisen, und später zeigen, dass es solche Funktionen in der Tat gibt. Genauer, wir werden zeigen, dass es genau ein Paar von Funktionen gibt, das (SinKos-1) bis (SinKos-5) erfüllt. In diesem Abschnitt untersuchen wir die Differenzierbarkeit der Winkelfunktionen.

15.3.11 Satz: (Ableitungen der Winkelfunktionen)

Die Winkelfunktionen sin und cos sind differenzierbar auf $\mathbb{R}$, und es ist $\sin' = \cos$ und $\cos' = -\sin$.

Beweis: Da wegen (SinKos-2) $\sin(-x) = -\sin(x)$ und $\cos(-x) = \cos(x)$ ist, folgen aus den Additionstheoremen (SinKos-3) die Gleichungen

$$\sin(x-y) = \sin(x)\cos(y)-\cos(x)\sin(y) \text{ und } \cos(x-y) = \cos(x)\cos(y)+\sin(x)\sin(y).$$

Mit diesen Gleichungen und den Additionstheoremen erhalten wir

$$\sin(x) = \sin(\frac{x+y}{2} + \frac{x-y}{2}) = \sin(\frac{x+y}{2})\cos(\frac{x-y}{2}) + \cos(\frac{x+y}{2})\sin(\frac{x-y}{2})$$

und

$$\sin(y) = \sin(\frac{x+y}{2} - \frac{x-y}{2}) = \sin(\frac{x+y}{2})\cos(\frac{x-y}{2}) - \cos(\frac{x+y}{2})\sin(\frac{x-y}{2}).$$

Diese Gleichungen ziehen wir voneinander ab und erhalten

$$\sin(x) - \sin(y) = 2\cos(\frac{x+y}{2})\sin(\frac{x-y}{2}).$$

Ganz ähnlich erhält man die Gleichung

$$\cos(x) - \cos(y) = -2\sin(\frac{x+y}{2})\sin(\frac{x-y}{2}).$$

Mit diesen Gleichungen und (SinKos-1) und (SinKos-3) erhalten wir die gesuchten Grenzwertaussagen:

$$\lim_{h\to 0}\frac{\sin(x+h)-\sin(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{2\cos(x+\frac{h}{2})\sin(\frac{h}{2})}{h} = \lim_{h\to 0}\cos(x+\frac{h}{2})\frac{\sin(\frac{h}{2})}{\frac{h}{2}} = \cos(x)$$

und

$$\lim_{h\to 0}\frac{\cos(x+h)-\cos(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{-2\sin(x+\frac{h}{2})\sin(\frac{h}{2})}{h} = -\lim_{h\to 0}\sin(x+\frac{h}{2})\frac{\sin(\frac{h}{2})}{\frac{h}{2}} = -\sin(x).$$

Es folgt $\sin'(x) = \cos(x)$ und $\cos'(x) = -\sin(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$, die Behauptung. □

Mit Hilfe der Differentiationsregeln und der bisher bestimmten Ableitungen können die meisten praktisch auftauchenden Funktionen differenzieren. Da Übung ja bekanntlich den Meister und die Meisterin macht, gibt es zum Schluss noch etwas Material.

15.3.12 Aufgabe: Berechnen Sie die Ableitungen folgender Funktionen.

1. $x \mapsto \exp(\sin(x))$
2. $x \mapsto \cos(\ln(x))$, $x > 0$.
3. $x \mapsto \sin(\exp(x^2))$
4. $x \mapsto \ln(\sqrt{1+\cos^2(x)})$

Lösungen der Aufgaben

Lösungen der Aufgaben in 15.1

Aufgabe 15.1.4

Wir betrachten die Folgen $(\frac{1}{n})$ und $(\frac{1}{n})$. Beide Folgen konvergieren gegen 0. Es gilt

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|\frac{1}{n}| - 0}{\frac{1}{n} - 0} = \lim_{n\to\infty} 1 = 1$$

und

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|-\frac{1}{n}| - 0}{-\frac{1}{n} - 0} = \lim_{n\to\infty} -1 = -1.$$

Da die Grenzwerte verschieden sind, ist der Absolutbetrag in 0 nicht differenzierbar.

Aufgabe 15.1.9

Die identische Abbildung $\mathrm{id}_{\mathbb{R}} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ liefert ein Beispiel.

Aufgabe 15.1.13

Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^3$, und sei $a = 0$. Es ist $f'(x) = 3x^2$, also $f'(0) = 0$. Wenn $x < 0$, dann ist $f(x) < 0$, und wenn $x > 0$, dann ist $f(x) > 0$. Es folgt, dass 0 kein lokales Extremum ist.

Aufgabe 15.1.14

Sei $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ die identische Funktion, also $x \mapsto x$. Diese Funktion hat bei $x_0 = 0$ ein lokales Minimum, und x_0 ist kein innerer Punkt des Intervalls $[0, 1]$. Die Ableitung der identischen Funktion ist aber die konstante Funktion $\hat{1}$, also ist die Ableitung f' von f an der Stelle 0 nicht Null.

Lösungen der Aufgaben in 15.3

Aufgabe 15.3.8

Es ist $\sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$. Mit Korollar 15.3.7 folgt

$$(\sqrt[n]{x})' = \frac{1}{n}x^{\frac{1}{n}-1} = \frac{1}{n}x^{-\frac{n-1}{n}} = \frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}.$$

Für $n = 2$ folgt $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

Aufgabe 15.3.9

1. Wir benutzen die Quotientenregel. Es ist
$$(\frac{x^2-2x+1}{x+2})' = \frac{(x+2)(2x-2)-(x^2-2x+1)\cdot 1}{(x+2)^2} = \frac{x^2+4x-5}{(x+2)^2}$$
für alle $x \neq -2$.
2. Wir verwenden die Summenregel und die Regel für die allgemeine Potenz. Es ist
$$(\frac{2}{x^3}+\frac{4}{x^2}-3+5x)' = (\frac{2}{x^3})' + (\frac{4}{x^2})' - (3)' + (5x)' = -\frac{6}{x^4} - \frac{8}{x^3} + 5$$
für alle $x \neq 0$
3. Wir verwenden die Produktregel und die Regel für die e-Funktion. Es ist
$$(x^4\exp(x))' = x^4\exp(x) + 4x^3\exp(x) = (x^4+4x^3)\exp(x).$$
4. Wir benutzen die Produktregel und die Regel für den natürlichen Logarithmus. Es ist
$$(x\ln(x))' = x\frac{1}{x} + 1\cdot\ln(x) = 1 + \ln(x).$$
für alle $x > 0$.
5. Wir benutzen die Summenregel und das vorherige Ergebnis. Es ist
$$(x\ln(x) - x)' = (x\ln(x)' - 1 = \ln(x)$$
für alle $x > 0$.
6. Wir benutzen die Quotientenregel und die Regel für den natürlichen Logarithmus. Es ist
$$(\frac{\ln(x)}{x})' = \frac{1}{x^2}\left(x\frac{1}{x} - 1\cdot\ln(x)\right) = \frac{1-\ln(x)}{x^2}$$
für alle $x > 0$.

7. Wir benutzen die Reziprokregel 15.2.2. Es gilt
$$(\frac{1}{\ln(x)})' = -\frac{\frac{1}{x}}{(\ln(x))^2} = -\frac{1}{x(\ln(x))^2}$$
für alle $x > 0$ und $x \neq 1$.

8. Wir benutzen die Kettenregel und die Regel für die e-Funktion. Es gilt
$$(\exp(2x+3))' = (2x+3)' \exp(2x+3) = 2\exp(2x+3)$$
für alle $x \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 15.3.12

1. Mit der Kettenregel gilt
$$(\exp(\sin(x)))' = (\sin(x))' exp(\sin(x)) = \cos(x)\exp(\sin(x)).$$

2. Mit der Kettenregel gilt
$$(\cos(\ln(x)))' = -(\ln(x))' \sin(\ln(x)) = -\frac{1}{x}\sin(\ln(x)).$$

3. Jetzt brauchen wir die Kettenregel gleich zwei Mal. Es ist
$$\begin{aligned}(\sin(\exp(x^2)))' &= (\exp(x^2)' \cos(\exp(x^2)) = \cos(\exp(x^2))[\exp(x^2)](x^2)' \\ &= \cos(\exp(x^2))[\exp(x^2)]2x.\end{aligned}$$

4. Jetzt wird es noch komplizierter.
$$\begin{aligned}(\ln(\sqrt{1+\cos^2(x)}))' &= \tfrac{1}{\sqrt{1+\cos^2(x)}}(\sqrt{1+\cos^2(x)})' \\ &\quad \text{mit der Ketteregel für } \ln\circ\sqrt{} \\ &= \tfrac{1}{\sqrt{1+\cos^2(x)}}\tfrac{1}{2\sqrt{1+\cos^2(x)}}(1+\cos^2 x)' \\ &\quad \text{mit der Kettenregel für } \sqrt{}\circ(1+\cos^2) \\ &= \tfrac{1}{2(1+\cos^2(x)}(\cos^2(x))' \\ &\quad \text{Summenregel für } (1+\cos^2(x))' \\ &= \tfrac{1}{2(1+\cos^2(x)}(-\sin(x)\cos(x) - \sin(x)\cos(x)) \\ &\quad \text{Produktregel für} \cos^2(x) = \cos(x)\cos(x) \\ &= -\tfrac{\sin(x)\cos(x)}{1+\cos^2(x)}.\end{aligned}$$