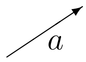
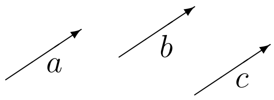
Inhalt Vektoren, reelle Vektorräume, Länge eines Vektors in der Ebene, Skalarprodukt, Orthogonalität, Geraden in der Ebene

1 Vektoren

Viele physikalische Größen (z. B. Kraft, Geschwindigkeit, Beschleunigung, ...) haben nicht nur einen Betrag, sondern auch eine Richtung. In der Physik ist ein *Vektor* eine gerichtete Strecke (im zwei- oder dreidimensionalen Raum), repräsentiert durch Pfeile:



Zwei Vektoren heißen *gleich*, wenn sie die gleiche Richtung und die gleiche Länge haben:

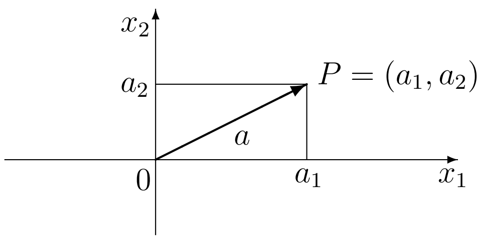


$a = b = c$

Die Fußpunkte müssen nicht übereinstimmen; ein Vektor kann beliebig parallel verschoben werden, ohne daß er sich ändert.

Beschreibung von Vektoren der Ebene durch Koordinaten

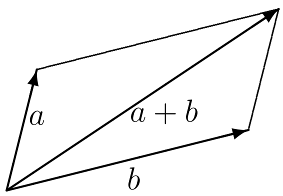
Wir führen in der Ebene ein rechtwinkliges Koordinatensystem ein; ein Vektor (in der Ebene) kann dann ohne Änderung in den Nullpunkt verschoben werden:



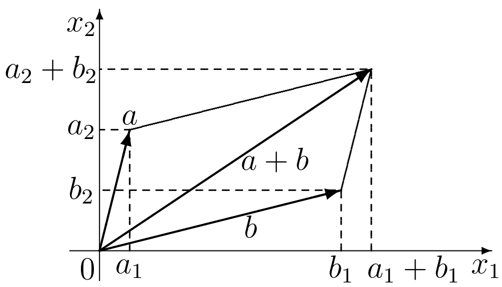
Die Vektoren entsprechen dann eindeutig den Punkten P der Ebene.
Jeder Punkt P der Ebene ist eindeutig durch seine Koordinaten a_1, a_2 bestimmt.
Vektoren (in der Ebene) entsprechen also Paaren (a_1, a_2) reeller Zahlen.
Dem Zahlenpaar $(0, 0)$ entspricht der *Nullvektor* o (mit der Länge 0, er hat keine Richtung.)

Im dreidimensionalen Raum werden Vektoren (nach Wahl eines Koordinatensystems) durch Tripel (a_1, a_2, a_3) von reellen Zahlen beschrieben.

Addition von Vektoren



$a + b$ erhält man als Diagonale im von a, b aufgespannten Parallelogramm.



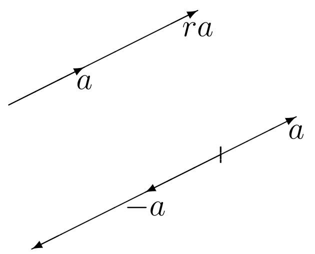
In Koordinaten:
Ist $a = (a_1, a_2)$, $b = (b_1, b_2)$ in der Ebene, so ist

$$a + b = (a_1 + b_1, a_2 + b_2).$$

Die Vektoraddition erfolgt also komponentenweise.

Entsprechendes gilt für Vektoren im dreidimensionalen Raum.

Multiplikation eines Vektors mit einer reellen Zahl
Sei a ein Vektor, r eine reelle Zahl (ein Skalar).

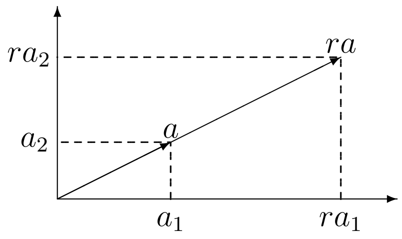


$ra = (-r)(-a)$ für $r < 0$

Für $r \geq 0$ hat ra die gleiche Richtung wie a, die Länge von ra ist das r-fache der Länge von a.

Für $r < 0$ kehrt man die Richtung von a um und multipliziert den dann entstehenden Vektor $-a$ mit $-r$:

$$ra := (-r)(-a) \text{ für } r < 0.$$



In Koordinaten: Für $a = (a_1, a_2)$ erhält man (mit einem Strahlensatz)

$$ra = (ra_1, ra_2).$$

Die Multiplikation mit einer reellen Zahl erfolgt also komponentenweise.
Entsprechendes gilt im dreidimensionalen Raum.

Rechenregeln für die Vektoraddition und die Multiplikation mit reellen Zahlen
Für beliebige Vektoren a, b, c und beliebige reelle Zahlen r, s gilt (wobei o den Nullvektor bezeichnet):

$$(a+b)+c = a+(b+c), \quad a+b = b+a, \quad a+o = a, \quad a+(-a) = o,$$
$$(r+s)a = ra+sa, \quad r(a+b) = ra+rb, \quad (rs)a = r(sa), \quad 1a = a.$$

Diese Rechenregeln kann man sich geometrisch klarmachen, oder man erhält sie aus der Beschreibung von Vektoren durch Koordinaten.

Diese Rechenregeln führen zu folgendem allgemeinen Begriff:

2 Reelle Vektorräume

Definition Eine Menge V zusammen mit zwei Rechenoperationen

$$+ : V \times V \to V,\ (a,b) \mapsto a+b, \qquad \mathbb{R} \times V \to V,\ (r,a) \mapsto ra$$

heißt *reeller Vektorraum*, falls folgende Bedingungen erfüllt sind:
Für alle $a, b, c \in V$ gilt $(a+b)+c = a+(b+c)$ und $a+b = b+a$,
es gibt ein Element $o \in V$ mit $a+o = a$ für alle $a \in V$, und zu jedem $a \in V$ gibt es ein $-a \in V$ mit $a+(-a) = o$,
für alle $a, b \in V,\ r, s \in \mathbb{R}$ gilt $(r+s)a = ra+sa,\ r(a+b) = ra+rb,\ (rs)a = r(sa),\ 1a = a$.

Beispiele reeller Vektorräume
a) Für $n \in \mathbb{N}$ ist $\mathbb{R}^n := \{(a_1, \dots, a_n) \mid a_i \in \mathbb{R} \text{ für alle } 1 \leq i \leq n\}$ ein reeller Vektorraum mit den komponentenweisen Operationen

$$(a_1, \dots, a_n) + (b_1, \dots, b_n) := (a_1+b_1, \dots, a_n+b_n), \quad r(a_1, \dots, a_n) := (ra_1, \dots, ra_n)$$

(für $(a_1, \dots, a_n), (b_1, \dots, b_n) \in \mathbb{R}^n,\ r \in \mathbb{R}$) mit $0 = (0, \dots, 0)$ als Nullvektor.

Es gibt noch viele andere Beispiele reeller Vektorräume, etwa die folgenden:

b) Die reellen Zahlenfolgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} = (a_1, a_2, a_3, \dots)$ bilden einen reellen Vektorraum mit den Operationen

$$(a_n) + (b_n) := (a_n + b_n), \quad r(a_n) := (ra_n).$$

(Die konvergenten reellen Folgen bilden mit diesen Operationen ebenfalls einen reellen Vektorraum.)

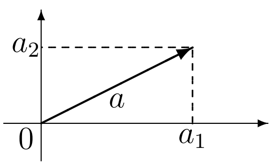
c) Sei X eine nichtleere Menge. Dann ist $\mathrm{Abb}(X, \mathbb{R}) := \{f : X \to \mathbb{R} \text{ Abbildung}\}$ ein reeller Vektorraum mit den Operationen

$$(f, g) \mapsto f + g, \quad \text{wobei } (f + g)(x) := f(x) + g(x) \text{ für alle } f, g \in \mathrm{Abb}(X, \mathbb{R}),\ x \in X,$$

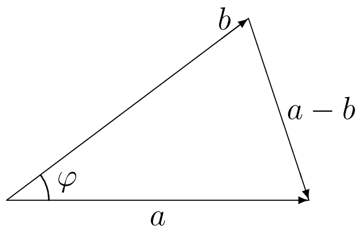
$$(r, f) \mapsto rf, \quad \text{wobei } (rf)(x) := rf(x) \text{ für alle } f \in \mathrm{Abb}(X, \mathbb{R}),\ r \in \mathbb{R},\ x \in X.$$

In der Mathematik ist ein *Vektor* ein Element eines beliebigen Vektorraums.

3 Länge eines Vektors in der Ebene



Sei a ein Vektor in der Ebene mit den Koordinaten a_1, a_2 (bezüglich eines rechtwinkligen Koordinatensystems). Für die Länge $|a|$ von a gilt (nach Pythagoras) $|a|^2 = a_1^2 + a_2^2$, also $|a| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$.

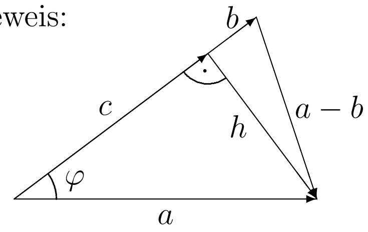


Satz 1 (Cosinus-Satz) *Für Vektoren a, b in der Ebene gilt*

$$|a - b|^2 = |a|^2 + |b|^2 - 2|a| \cdot |b| \cos\varphi,$$

wobei φ mit $0 \le \varphi \le \pi$ der von a, b eingeschlossene Winkel sei.

Beweis:



Sei c der Vektor zum Fußpunkt des Lotes von a auf b und $h := a - c$. Mit dem Satz von Pythagoras folgt

$$\begin{aligned} |a - b|^2 &= |h|^2 + |b - c|^2 = |h|^2 + \big(|b| - |c|\big)^2 \\ &= |h|^2 + |b|^2 + |c|^2 - 2|b| \cdot |c| \\ &= |a|^2 + |b|^2 - 2|b| \cdot |c| \quad (\text{da } |a|^2 = |h|^2 + |c|^2). \end{aligned}$$

Es ist $\cos\varphi = \frac{|c|}{|a|}$, also $|c| = |a| \cos\varphi$ und damit $|a - b|^2 = |a|^2 + |b|^2 - 2|a| \cdot |b| \cos\varphi$.
(Bei anderer geometrischer Konstellation wird der Beweis analog geführt.)

Wir nehmen den „Korrekturterm“ $2|a| \cdot |b| \cos\varphi$ zum Anlass für die folgende Definition:

4 Das Skalarprodukt zweier Vektoren

Definition Für zwei Vektoren a, b heißt $a \cdot b := |a| \cdot |b| \cos\varphi$ (wobei φ der Winkel zwischen a, b ist) *Skalarprodukt* von a, b. Das Skalarprodukt von a, b ist eine reelle Zahl (ein *Skalar*).

Insbesondere ist $a \cdot a = |a|^2$ (wegen $\cos 0 = 1$), also $a \cdot a \ge 0$ und $|a| = \sqrt{a \cdot a}$.

Satz 2 *Für Vektoren $a = (a_1, a_2)$, $b = (b_1, b_2)$ der Ebene ist $a \cdot b = a_1 b_1 + a_2 b_2$.*

Beweis: Nach dem Cosinus-Satz (Satz 1) gilt $|a-b|^2 = |a|^2 + |b|^2 - 2a\cdot b$, also $a\cdot b = \frac{1}{2}(|a|^2+|b|^2-|a-b|^2) = \frac{1}{2}\big(a_1^2+a_2^2+b_1^2+b_2^2-(a_1-b_1)^2-(a_2-b_2)^2\big) = a_1b_1+a_2b_2$.

Das Skalarprodukt kann man auch für Vektoren des $\mathbb{R}^n$ definieren:

Definition des Skalarproduktes für Vektoren des $\mathbb{R}^n$
Für $a=(a_1,\dots,a_n),\ b=(b_1,\dots,b_n)\in\mathbb{R}^n$ heißt

$$a\cdot b := a_1b_1+\ldots+a_nb_n \text{ *Skalarprodukt* von } a,b \text{ und}$$

$$|a| := \sqrt{a\cdot a} = \sqrt{a_1^2+\ldots+a_n^2} \text{ der *Betrag* von } a.$$

Rechenregeln für das Skalarprodukt im $\mathbb{R}^n$
Für alle $a,b,c\in\mathbb{R}^n,\ r\in\mathbb{R}$ gilt
$a\cdot b = b\cdot a,\ a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c,\ a\cdot(rb)=r\,a\cdot b,\ a\cdot a\geq 0$ und $(a\cdot a=0 \iff a=0)$.

Satz 3 (Ungleichung von Cauchy-Schwarz) *Für alle $a,b\in\mathbb{R}^n$ gilt $|a\cdot b|\leq|a|\,|b|$.*

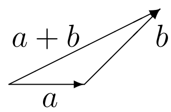
Beweis für $n=2$: Für $a,b\in\mathbb{R}^2$ ist $|a\cdot b|=|a|\,|b|\,|\cos\varphi|\leq|a|\,|b|$ (wegen $|\cos\varphi|\leq 1$).
Allgemeiner Beweis: Für $b=0$ ist die Aussage klar. Sei jetzt $b\neq 0$, also $b\cdot b\neq 0$, und $r:=\frac{a\cdot b}{b\cdot b}$.
Wegen $(rb-a)\cdot(rb-a)\geq 0$ folgt dann (mit den Rechenregeln für das Skalarprodukt)

$$\begin{aligned}
0\leq (rb-a)\cdot(rb-a) &= r^2\, b\cdot b - 2r\, a\cdot b + a\cdot a \\
&= \frac{(a\cdot b)^2}{(b\cdot b)^2} b\cdot b - 2\frac{(a\cdot b)^2}{b\cdot b} + a\cdot a \qquad \text{(durch Einsetzen von } r\text{)} \\
&= -\frac{(a\cdot b)^2}{b\cdot b} + a\cdot a \\
&= \frac{1}{b\cdot b}\Big(-(a\cdot b)^2 + |a|^2|b|^2\Big)
\end{aligned}$$

Wegen $b\cdot b>0$ folgt $|a|^2|b|^2\geq(a\cdot b)^2$ und damit (durch Wurzelziehen) $|a\cdot b|\leq|a|\,|b|$.

Rechenregeln für den Betrag Für alle $a,b\in\mathbb{R}^n,\ r\in\mathbb{R}$ gilt
(i) $|a|\geq 0$ und $(|a|=0\Leftrightarrow a=0)$,
(ii) $|ra|=|r|\,|a|$,
(iii) *(Dreiecksungleichung)* $|a+b|\leq|a|+|b|$.

Die Bezeichnung „Dreiecksungleichung“ ist durch folgendes Bild motiviert:



Beweis der Dreiecksungleichung: Mit der Ungleichung von Cauchy-Schwarz (Satz 3) folgt

$$|a+b|^2 = (a+b)\cdot(a+b) = |a|^2+|b|^2+2a\cdot b \leq |a|^2+|b|^2+2|a|\,|b| = (|a|+|b|)^2.$$

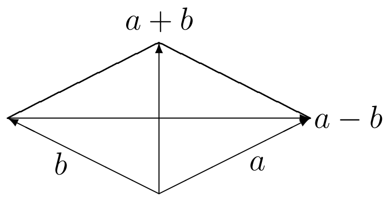
Durch Wurzelziehen folgt daraus die Behauptung.

5 Orthogonalität

In der Ebene stehen a,b aufeinander senkrecht (sind orthogonal zueinander), wenn $a=0$ oder $b=0$ oder der eingeschlossene Winkel φ gleich $90°$ ist, wenn also $a=0$ oder $b=0$ oder $\cos\varphi=0$ gilt, d. h. es gilt $a\cdot b=0$. Dies motiviert folgende allgemeine Definition.

Definition $a,b\in\mathbb{R}^n$ stehen *senkrecht* aufeinander (sind *orthogonal* zueinander, in Zeichen: $a\perp b$), wenn $a\cdot b=0$ ist.

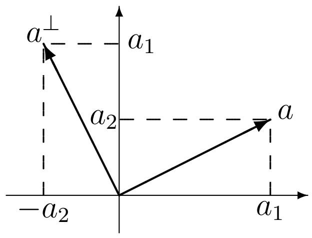
Beispiele
1. Der Satz von Pythagoras kann jetzt folgendermaßen formuliert werden:
Für $a\perp b$ gilt $|a+b|^2=|a|^2+|b|^2$.
Beweis: $|a+b|^2=(a+b)\cdot(a+b)=a\cdot a+b\cdot b+2a\cdot b=a\cdot a+b\cdot b+0=|a|^2+|b|^2$.



2. In einem *Rhombus* (einem gleichseitigen Viereck) stehen die Diagonalen aufeinander senkrecht:
Für $|a| = |b|$ gilt $(a+b) \perp (a-b)$.

Beweis:
$(a+b)\cdot(a-b) = a\cdot a - a\cdot b + b\cdot a - b\cdot b = |a|^2 - |b|^2 = 0.$

Senkrechte in der Ebene



Sei $a = (a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2$. Durch Drehung von a um $90°$ erhält man einen zu a senkrechten Vektor $a^\perp$ gleicher Länge:

$$a^\perp = (-a_2, a_1).$$

Es gilt $a^\perp \perp a,\ |a^\perp| = |a|,\ (a^\perp)^\perp = -a.$

Satz 4 *Für alle* $a, x \in \mathbb{R}^2$ *gilt:* $(a\cdot a)x = (x\cdot a)a + (x\cdot a^\perp)a^\perp.$

Beweis durch Nachrechnen:

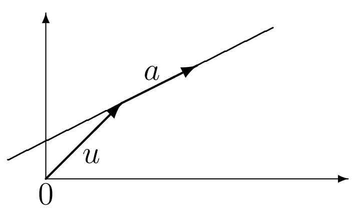
$$\begin{aligned}(x\cdot a)a + (x\cdot a^\perp)a^\perp &= (x_1a_1 + x_2a_2)(a_1, a_2) + (-x_1a_2 + x_2a_1)(-a_2, a_1)\\ &= (x_1a_1^2 + x_1a_2^2, x_2a_2^2 + x_2a_1^2)\\ &= (a_1^2 + a_2^2)(x_1, x_2) = (a\cdot a)x.\end{aligned}$$

Folgerung *Für alle* $a, x \in \mathbb{R}^2,\ a \neq 0$ *gilt:* $x \perp a \iff x \in \mathbb{R}a^\perp := \{ra^\perp \mid r \in \mathbb{R}\}.$

Beweis: „$\Leftarrow$“: Aus $x = ra^\perp$ folgt $x\cdot a = (ra^\perp)\cdot a = r(a^\perp\cdot a) = 0.$
„$\Rightarrow$“: Für $x \perp a$ gilt $(a\cdot a)x = (x\cdot a)a + (x\cdot a^\perp)a^\perp = (x\cdot a^\perp)a^\perp$, also $x = \frac{x\cdot a^\perp}{a\cdot a}a^\perp \in \mathbb{R}a^\perp.$

6 Geraden in der Ebene

1. Parameterdarstellung

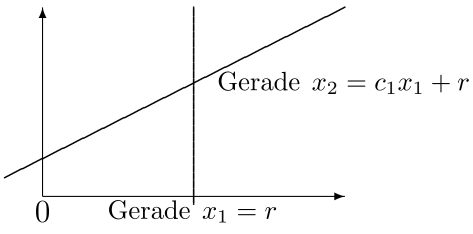


Man wählt einen Punkt u auf der Geraden und einen Richtungsvektor $a \neq 0$. Dann ist

$$G_{u,a} = u + \mathbb{R}a := \{u + ta \mid t \in \mathbb{R}\}$$

die Gerade durch u in Richtung a.

2. Beschreibung durch Gleichungen



Man kann Geraden auch durch Gleichungen der Form $x_2 = c_1x_1 + r$ oder $x_1 = r$ beschreiben.
Es gilt:

$$x_2 = c_1x_1 + r \iff -c_1x_1 + x_2 = r,$$

$$x_1 = r \iff x_1 + 0x_2 = r.$$

Die allgemeine Geradengleichung erhält man in der Form $c_1x_1 + c_2x_2 = r$ mit Konstanten c_1, c_2, r mit $(c_1, c_2) \neq (0, 0)$.

Definition Für $c = (c_1, c_2) \in \mathbb{R}^2,\ c \neq 0,\ r \in \mathbb{R}$ sei

$$H_{c,r} := \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid c_1x_1 + c_2x_2 = r\} = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid c \cdot x = r\}.$$

Frage: Wie kommt man von der Parameterdarstellung zur Geradengleichung?

Satz 5 *Seien $u, a \in \mathbb{R}^2,\ a \neq 0$. Für $c := a^\perp$ und $r := c \cdot u$ gilt dann $G_{u,a} = H_{c,r}$.*

Beweis: „$\subseteq$“: Sei $u + ta \in G_{u,a}$. Dann gilt $c \cdot (u + ta) = c \cdot u = r$, also $u + ta \in H_{c,r}$.
„$\supseteq$“: Sei $x \in H_{c,r}$, also $a^\perp \cdot x = r = a^\perp \cdot u$ und damit $x - u \perp a^\perp$. Nach obiger Folgerung ist dann $x - u \in \mathbb{R}(a^\perp)^\perp = \mathbb{R}(-a) = \mathbb{R}a$, also gilt $x - u = ta$ für ein $t \in \mathbb{R}$, somit ist $x = u + ta \in G_{u,a}$.

3. Hessesche Normalform einer Geraden

Gegeben sei die Geradengleichung $c \cdot x = r$ mit $c \in \mathbb{R}^2,\ c \neq 0,\ r \in \mathbb{R}$. Wir können $r \geq 0$ annehmen (sonst multiplizieren wir die Gleichung mit -1). Division der Gleichung durch $|c| \neq 0$ liefert die Gleichung

$$\frac{c}{|c|} \cdot x = \frac{r}{|c|}.$$

Setzen wir $n := \frac{c}{|c|},\ d := \frac{r}{|c|}$, so erhalten wir die Geradengleichung in der Form $n \cdot x = d$ mit $n \in \mathbb{R}^2,\ |n| = 1,\ d \geq 0$. Diese Form heißt *Hessesche Normalform* der Geradengleichung (nach L. O. Hesse, 1811–1874).

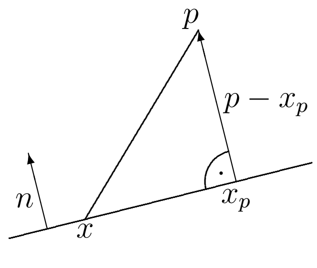
Satz 6 *Eine Gerade G sei in Hessescher Normalform gegeben, also*

$$G = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid n \cdot x = d\} \quad \textit{mit } n \in \mathbb{R}^2,\ |n| = 1 \textit{ und } d \in \mathbb{R},\ d \geq 0.$$

Dann gilt:
a) *$n \perp G$, d. h. $n \perp (x - y)$ für alle $x, y \in G$.*
b) *d ist der Abstand von 0 zu G, d. h. $d = \min\{|x| \mid x \in G\}$.*
c) *Für alle $p \in \mathbb{R}^2$ ist $|p \cdot n - d|$ der Abstand von p zu G, d. h. $|p \cdot n - d| = \min\{|p - x| \mid x \in G\}$.*

Beweis: a) Sind $x, y \in G$, also $n \cdot x = d = n \cdot y$, so gilt $n \cdot (x - y) = 0$, also $n \perp G$.

c)



Sei $p \in \mathbb{R}^2$. Es sei x_p der „Fußpunkt von p auf der Geraden“, also $x_p \in G$ mit $p - x_p \perp G$.
Für ein beliebiges $x \in G$ gilt (nach Pythagoras)

$$|p - x|^2 = |p - x_p|^2 + |x - x_p|^2 \geq |p - x_p|^2,$$

also $|p - x| \geq |p - x_p|$. Damit ist $|p - x_p| = \min\{|p - x| \mid x \in G\}$.

Wegen $p - x_p \perp G$, also $p - x_p \perp n^\perp$, ist $p - x_p = tn$ mit einem $t \in \mathbb{R}$. Bilden des Skalarprodukts mit n liefert

$$t = t(n \cdot n) = (tn) \cdot n = p \cdot n - x_p \cdot n = p \cdot n - d$$

(wegen $x_p \in G$). Also ist $|p - x_p| = |t| = |p \cdot n - d|$.

b) Speziell für $p = 0$ ist der Abstand von 0 zu G gleich $|0 \cdot n - d| = |d| = d$.