Mathematische Grundlagen(1141) SoSe 2012

Kurseinheit 5:

Lösungsvorschläge zu den Einsendeaufgaben

Aufgabe 5.1

(1) Wahr.

(2) Wahr.

(3) Wahr.

(4) Wahr, denn $\exp(x + \exp(x)) = \exp(x)\exp(\exp(x))$.

(5) Falsch. Wir multiplizieren die Gleichung $\exp(x) - 3\exp(-x) = 2$ mit $\exp(x)$ und erhalten

$$(\exp(x))^2 - 3 = 2\exp(x), \text{ also } 0 = (\exp(x))^2 - 2\exp(x) - 3 = (\exp(x)-3)(\exp(x)+1).$$

Diese Gleichung ist genau dann erfüllt, wenn $\exp(x) = 3$ oder $\exp(x) = -1$ ist. Der Fall $\exp(x) = -1$ ist nicht möglich, denn $\exp(x)$ ist immer ≥ 0. Also ist die Gleichung genau dann richtig, wenn $\exp(x) = 3$, also $x = \ln(3)$ ist.

(6) Wahr. Angenommen, $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ und $\lim\limits_{x\to a}(f+g)(x)$ existieren. Dann existiert

$$\lim_{x\to a}(f+g)(x) - \lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x).$$

(7) Falsch. Sei $f : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ die konstante Funktion $\hat{0}$, und sei $g : (0,\infty) \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{1}{x}$. Dann ist $fg = \hat{0}$, also existieren $\lim\limits_{x\to 0}(fg)(x)$ und $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$. Allerdings existiert $\lim\limits_{x\to 0} g(x)$ nicht, denn wenn $(x_n) = (\frac{1}{n})$ ist, dann konvergiert (x_n) gegen 0, alle Folgenglieder liegen in $(0,\infty)$, und $g(x_n) = (n)$ divergiert.

(8) Falsch. Es ist

$$\frac{\sin(ax)}{\sin(bx)} = \frac{\sin(ax)}{ax}\frac{ax}{\sin(bx)} = a\frac{\sin(ax)}{ax}\frac{bx}{b\sin(bx)} = \frac{a}{b}\frac{\sin(ax)}{ax}\frac{bx}{\sin(bx)}.$$

Sei (x_n) eine Folge in $\mathbb{R}\setminus\{0\}$, die gegen 0 konvergiert. Dann ist $(y_n) = (ax_n)$ ebenfalls eine Folge in $\mathbb{R}\setminus\{0\}$, die gegen 0 konvergiert. Es folgt

$$1 = \lim_{n\to\infty}\frac{\sin(y_n)}{y_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{\sin(ax_n)}{ax_n},$$

also $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin(ax)}{ax} = 1$. Analog ist $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin(bx)}{bx} = 1$, also $\lim\limits_{x\to 0}\frac{bx}{\sin(bx)} = 1$. Damit gilt $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin(ax)}{\sin(bx)} = \frac{a}{b}$.

(9) Wahr. Sei $(x_n) = (1+\frac{1}{n})$. Dann konvergiert (x_n) gegen 1, und alle Folgenglieder liegen in $\mathbb{R}\setminus\{1\}$. Es ist $(\frac{1}{x_n-1}) = (n)$, und diese Folge ist divergent. Somit existiert $\lim\limits_{x\to 1}\frac{1}{x-1}$ nicht.

(10) Wahr. Die Folge $(x_n) = (\frac{(-1)^n}{n})$ liegt in $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ und konvergiert gegen 0. Es ist $(f(x_n)) = (\frac{(-1)^n}{2})$, und diese Folge konvergiert nicht. Somit existiert $\lim\limits_{x\to 0}\frac{|x|}{2x}$ nicht.

Aufgabe 5.2

Die Funktionen id_{IR} und g sind für alle $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ stetig. Es folgt, dass das Produkt f für alle $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ stetig ist.

Wir beweisen nun die Stetigkeit von f in 0. Sei (x_n) eine Nullfolge. Da g beschränkt ist, ist $(g(x_n))$ beschränkt, und da (x_n) eine Nullfolge ist, existiert $\lim\limits_{n\to\infty} x_n g(x_n)$ und der Grenzwert ist 0. Es folgt $\lim\limits_{n\to\infty} x_n g(x_n) = \lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = 0 = f(0)$ also ist f auch an der Stelle 0 stetig.

Aufgabe 5.3

1. Sei $a \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$. Dann liegt a in $(-\infty, -1) = I_1$ oder in $(-1, 1) = I_2$ oder in $(1, \infty) = I_3$.

   Die Einschränkung von f auf I_i, $1 \leq i \leq 3$, ist eine Polynomfunktion, also stetig in allen Punkten ihres Definitionsbereichs. Somit gilt für jede Folge (a_n) in I_i, die gegen a konvergiert, dass $(f(a_n))$ gegen $f(a)$ konvergiert.

   Sei nun (b_n) eine Folge in $\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$ die gegen a konvergiert. Da a kein Randpunkt von I_i ist, gibt es eine ε-Umgebung von a, die ganz in I_i liegt. Diese Umgebung enthält fast alle Folgenglieder von (b_n), es gilt also, dass $(f(b_n))$ gegen $f(a)$ konvergiert. Somit ist f stetig in $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$.

2. Zu zeigen ist: Für alle $\varepsilon > 0$ gibt es ein $\delta > 0$, sodass für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $|x + 1| < \delta$ immer $|f(x) - 1| < \varepsilon$ ausfällt.

   (Vorbemerkung: Wie findet man so ein δ? Um ein Gefühl dafür zu bekommen, was passiert, wählen wir zunächst einmal $\delta \leq 1$. Es gilt dann

   $$|x + 1| \leq 1 \Leftrightarrow -1 \leq x + 1 \leq 1 \Leftrightarrow -2 \leq x \leq 0.$$

   Gilt nun zusätzlich $|x| \leq 1$, so erhalten wir

   $$|f(x) - 1| = |x^2 - 1| = |x + 1| \cdot |x - 1| < \delta|x - 1|,$$

   und dieser Ausdruck muss $< \varepsilon$ werden. Schätzen wir erst einmal $|x - 1|$ ab. Dazu steigen wir in die Ungleichungen oben noch einmal ein. Unter der Annahme, dass $|x + 1| \leq 1$ ist, folgt $-3 \leq x - 1 \leq -1$, also $|x - 1| \leq 3$. Wir erhalten damit die Abschätzung

   $$|f(x) - 1| < 3\delta.$$

   Ist nun $\delta > 0$ sowohl kleiner als 1 als auch kleiner als $\frac{\varepsilon}{3}$, so erhalten wir

   $$|f(x) - 1| \leq 3\delta < 3\frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon,$$

   und genau da wollten wir hin. Wir müssen jetzt noch überprüfen, ob dieses $\delta < \min(1, \frac{\varepsilon}{3})$ auch für die x mit $|x+1| \leq 1$ und $|x| > 1$ (also $-2 < x < -1$) funktioniert. Dann gilt

   $$|f(x) - 1| = \left|\frac{1 - x}{2} - 1\right| = \frac{1}{2}|-x - 1| = \frac{1}{2}|x + 1| < \frac{1}{2}\delta < \frac{1}{2}\frac{\varepsilon}{3} < \varepsilon.$$

Dieses δ liefert also auch hier die gewünschte Abschätzung.

All das, was ich bisher geschrieben habe, ist etwas, was bei Ihnen auf demSchmierzettel stehen sollte, und was nicht in einen formalen Beweis gehört. Ein solcher könnte etwa wie folgt aussehen:)

Sei $\varepsilon > 0$ vorgegeben. Wähle $\delta = \min(1, \frac{\varepsilon}{3})$. Dann ist $\delta > 0$. Sei $x \in \mathbb{R}$ mit $|x+1| < \delta$. Es folgt $-3 < x - 1 < -1$, also $|x - 1| < 3$.

Ist $|x| \leq 1$, so gilt

$$|f(x) - 1| = |x^2 - 1| = |x + 1| \cdot |x - 1| < \frac{\varepsilon}{3} \cdot 3 = \varepsilon.$$

Ist $|x| > 1$, so gilt

$$|f(x) - 1| = \left|\frac{1 - x}{2} - 1\right| = \frac{1}{2}| - x - 1| = \frac{1}{2}|x + 1| < \frac{1}{2}\frac{\varepsilon}{3} < \varepsilon.$$

Für alle $\varepsilon > 0$ gibt es also ein $\delta > 0$, sodass für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $|x + 1| < \delta$ immer $|f(x) - 1| < \varepsilon$ ausfällt. Es folgt, dass f in -1 stetig ist.

3. Wir zeigen jetzt, dass f in 1 nicht stetig ist. Sei $(a_n) = (1 + \frac{1}{n})$. Die Folge (a_n) konvergiert gegen 1. Es folgt

$$\lim_{n\to\infty} f(a_n) = \lim_{n\to\infty} \frac{1 - 1 - \frac{1}{n}}{2} = 0 \neq 1 = f(1).$$

Es folgt, dass f in 1 nicht stetig ist.

Aufgabe 5.4

Ist $f(a) = a$ oder $f(b) = b$, so sind wir schon fertig. Wir nehmen also an, dass $f(a) \neq a$ und $f(b) \neq b$ gilt.

Wir betrachten die Funktion $g : [a, b] \to \mathbb{R}, x \mapsto f(x)-x$. Als Differenz stetiger Funktionen ist g stetig. Es gilt

$$f(a) \in [a, b], \text{ also } f(a) > a \text{ und damit } g(a) > 0.$$

Analog gilt

$$f(b) \in [a, b], \text{ also } f(b) < b \text{ und damit } g(b) < 0.$$

Nach Nullstellensatz von Bolzano gibt es ein $x_0 \in (a, b)$ mit $g(x_0) = f(x_0) - x_0 = 0$. Es folgt $f(x_0) = x_0$, die Behauptung.

Aufgabe 5.5

1. Die Exponentialfunktion ist differenzierbar, und die identische Funktion ist differenzierbar. Dann ist auch $-\mathrm{id}_{\mathbb{R}}$ differenzierbar. Die Funktion $x \mapsto \exp(-x)$ ist als Komposition differenzierbarer Funktionen differenzierbar. Es folgt, dass sinh und cosh als Vielfache einer Differenz/Summe differenzierbarer Funktionen differenzierbar sind.

2. Für $x \in \mathbb{R}$ gilt

$$\sinh'(x) = \frac{1}{2}(\exp(x) - (-1)\exp(-x)) = \frac{1}{2}(\exp(x) + \exp(-x)) = \cosh(x)$$

und

$$\cosh'(x) = \frac{1}{2}(\exp(x) + (-1)\exp(-x)) = \frac{1}{2}(\exp(x) - \exp(-x)) = \sinh(x).$$

3. Für $x \in \mathbb{R}$ ist

$$\begin{aligned}
\cosh(x)\cosh(y) + \sinh(x)\sinh(y) &= \tfrac{1}{4}((\exp(x) + \exp(-x))(\exp(y) + \exp(-y))) \\
&\quad +(\exp(x) - \exp(-x))(\exp(y) - \exp(-y))) \\
&= \tfrac{1}{2}(\exp(x)\exp(y) + \exp(-x)\exp(-y)) \\
&= \tfrac{1}{2}(\exp(x+y) + \exp(-(x+y))) \\
&= \cosh(x+y).
\end{aligned}$$

4. Für $x \in \mathbb{R}$ ist

$$\begin{aligned}
\cosh(x)\sinh(y) + \sinh(x)\cosh(y) &= \tfrac{1}{4}((\exp(x) + \exp(-x))(\exp(y) - \exp(-y))) \\
&\quad +(\exp(x) - \exp(-x))(\exp(y) + \exp(-y))) \\
&= \tfrac{1}{2}(\exp(x)\exp(y) - \exp(-x)\exp(-y)) \\
&= \tfrac{1}{2}(\exp(x+y) - \exp(-(x+y))) \\
&= \sinh(x+y).
\end{aligned}$$

5. Für $x \in \mathbb{R}$ ist

$$\begin{aligned}
\cosh^2(x) - \sinh^2(x) &= \tfrac{1}{4}((\exp(x) + \exp(-x))^2 - (\exp(x) - \exp(-x))^2) \\
&= \exp(x)\exp(-x) = \exp(0) = 1.
\end{aligned}$$

Aufgabe 5.6

Als rationale Funktion ist f differenzierbar, und für $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ gilt

$$f'(x) = \frac{4x^3(x^3-1) - x^4 \cdot 3x^2}{(x^3-1)^2} = \frac{x^6 - 4x^3}{(x^3-1)^2} = \frac{x^3(x^3-4)}{(x^3-1)^2}.$$

Falls $x > \sqrt[3]{4}$ oder $x < 0$, ist $f'(x) > 0$. Somit ist f auf $(-\infty, 0]$ und auf $[\sqrt[3]{4}, \infty)$ streng monoton wachsend. Falls $x \in (0, \sqrt[3]{4}) \setminus \{1\}$ ist $f'(x) < 0$, und es folgt, dass f auf $[0, 1)$ und auf $(1, \sqrt[3]{4}]$ streng monoton fallend ist.

Genau dann ist $f'(x_0) = 0$, wenn $x_0 = 0$ oder $x_0 = \sqrt[3]{4}$ ist. Somit sind 0 und $\sqrt[3]{4}$ die einzigen Stellen, an denen f einen lokalen Extremwert annehmen kann. Da f auf $(-\infty, 0)$ streng monoton wächst und auf $(0, \sqrt[3]{4})$ streng monoton fällt, liegt bei $x_0 = 0$ ein lokales Maximum vor. Da f auf $(1, \sqrt[3]{4})$ streng monoton fällt und auf $(\sqrt[3]{4}, \infty)$ streng monoton wächst, liegt bei $x_0 = \sqrt[3]{4}$ ein lokales Minimum vor.