Luise Unger
In LATEX gesetzt von Luise Unger

Mathematische Grundlagen

Kurseinheit 7:
Etwas Integralrechnung und viel Logik

mathematik
und
informatik

FernUniversität in Hagen

Studierhinweise

Diese Kurseinheit ist zweigeteilt. Wir beginnen mit einem Kapitel zur Integralrechnung, welches inhaltlich noch zur Analysis zählt. Die Integration von Funktionen ist aus der klassischen Aufgabe der „Inhaltsmessung“ entstanden. Diese etwas vage Beschreibung werden wir in Abschnitt 19.1 präzisieren. In 19.2 werden wir dann sehen, dass die Integration von Funktionen in gewissen Sinne der inverse Prozess der Differentiation ist. Diese Sichtweise wird es uns ermöglichen, in vielen Fällen Integrale zu berechnen. Es gibt in der Mathematik viele Integralbegriffe. In diesem Kurs werden wir nur auf den Integralbegriff eingehen, der auf Bernhard Riemann zurückgeht, und der genauer als Riemann-Integral bezeichnet wird.

Der zweite – umfangreichere – Teil dieser Kurseinheit gibt eine Einführung in die formale Logik. Mathematische Definitionen, Sätze und Beweise sind in der Sprache der Logik formuliert. Dabei kann dies in einer formalen, symbolischen Weise geschehen, aber auch in einer informellen, jedoch trotzdem präzisen Weise. Bisher haben wir uns an die informelle Schreibweise gehalten, und in diesem Kapitel werden wir verstärkt den formalen Gesichtspunkt im Fokus behalten. Neben ihrer Rolle als Sprache der Mathematik besitzt die Logik eine eigenständige Bedeutung (viele Mathematikerinnen und Mathematiker sehen die Logik nicht als ein Teilgebiet der Mathematik an). Wichtige Anwendungen finden sich in der Informatik. Hier sind etwa zu nennen: Logik und Digitaltechnik, Logik und Komplexitätstheorie, Logik und Datenbanken oder Logik als Programmiersprache.

Natürlich spielen logische Schlussregeln seit jeher eine zentrale Rolle in der Mathematik. Trotzdem hat sich die Logik als eigenständiger Zweig erst am Ende des 19. Jahrhunderts etabliert. Im vergangenen Jahrhundert haben sich viele Teilgebiete der Logik herausgebildet. Wir gehen in diesem Kurs auf zwei davon ein: auf die Aussagenlogik und die Prädikatenlogik. Genau genommen ist die Aussagenlogik ein Teil der Prädikatenlogik, wir betrachten sie jedoch gesondert, das sie leichter zu überblicken ist und an ihr exemplarisch die Formalismen der Logik erklärt werden können.

Aussagenlogik und Prädikatenlogik sind formale Sprachen, wie eine Programmiersprache. Alle Sprachen habe folgende Charakterisierung gemeinsam: Sie bestehen aus einem Alphabet (in der Aussagenlogik werden die Elemente des Alphabets Elementaraussagen genannt, in der Prädikatenlogik heißen sie Terme), wobei die Wörter einer Sprache durch (formale) Regeln – der Grammatik – gebildet werden. Die Grammatik wird Syntax genannt, während die inhaltliche Bedeutung durch die Semantik ausgedrückt wird. In den Abschnitten 20.1.1 und 20.1.2 gehen wir auf Syntax und Semantik der Aussagenlogik ein, in 20.2.2 und 20.2.3 auf Syntax und Semantik der Prädikatenlogik.

Wenn ein in der Sprache der Logik vorliegender Ausdruck dem Rechner zur Weiterverarbeitung übergeben wird, muss er – abhängig von der zu bearbeitenden Aufgabe – oft in einer speziellen Form vorliegen. Das bedeutet, dass ein solcher Ausdruck durch einen logisch äquivalenten ersetzt werden muss. Welche Formen dabei von Interesse sind, und wie die Umformungen durchgeführt werden können, werden wir für die Aussagenlogik in 20.1.3 und für die Prädikatenlogik in 20.2.4 behandeln.

Ein Grund dafür, sich in der Mathematik und der Informatik mit Logik zu beschäftigen, liegt darin, dass man Beweise formalisieren und im günstigsten Fall einen Beweis mit Hilfe des Computers durchführen möchte. Dazu muss jedoch geklärt werden, aufgrund welcher Regeln eine Beweisführung durchgeführt werden kann. Dieser Gedanke führt zum Begriff eines Kalküs. Dieser besteht aus einer Menge von Ausdrücken, die Axiome genannt werden, und aus einer Menge von Regeln, mit deren Hilfe aus den Axiomen einer Eingabemenge weitere Ausdrücke gebildet werden können. Wie so ein Regelwerk aussehen kann, und wie mit einem solchen formale Beweise durchgeführt werden können, werden wir für die Aussagenlogik in 20.1.4 und für die Prädikatenlogik in 20.2.5 sehen.

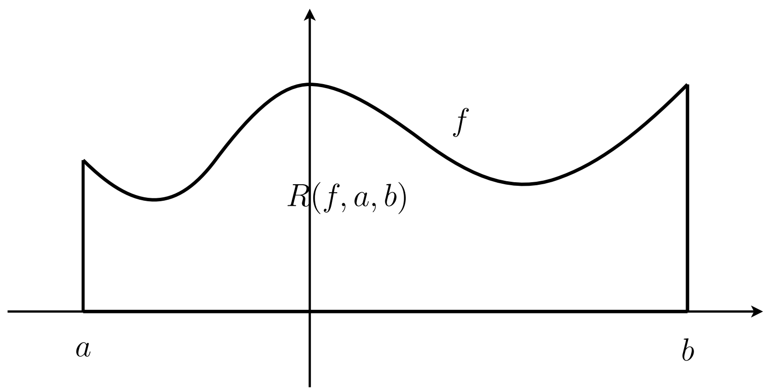
Kapitel 19

Integration

19.1 Das Riemann-Integral

Das Integral formalisiert ein einfaches, sehr intuitives Konzept, nämlich das des Flächeninhalts. In der Geometrie des Mittelstufenunterrichts haben Sie vermutlich Formeln für Flächeninhalte verschiedener regelmäßige Figuren, wie Dreiecke oder Rechtecke hergeleitet. Vermutlich haben Sie aber nie eine akzeptable Definition dafür gesehen, was ein Flächeninhalt überhaupt ist.

In diesem Abschnitt werden wir versuchen eine Definition vom Flächeninhalt für sehr spezielle Gebiete zu geben, die wir in der folgenden Skizze verdeutlichen möchten:



Wir betrachten Gebiete $R(f, a, b)$, die durch die x-Achse, vertikale Geraden durch die Punkte $(a, 0)$ und $(b, 0)$ und den Graph einer „gutartigen“ Funktion f mit $f(x) \geq 0$ für alle $x \in [a, b]$ begrenzt werden. Die Zahl A, die wir letztlich dem Flächeninhalt des Gebietes $R(f, a, b)$ zuordnen werden, wird das Integral von f

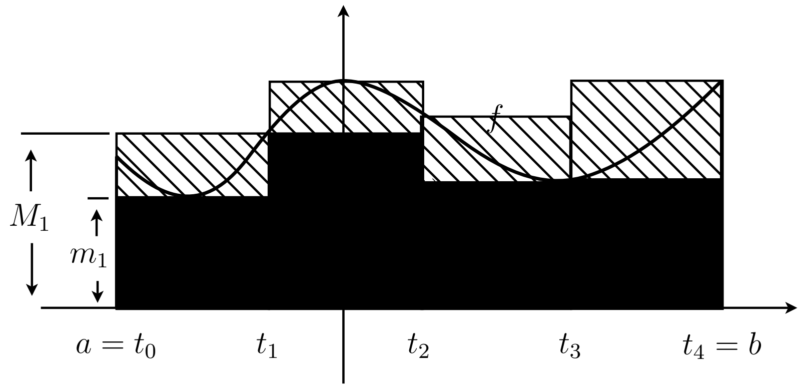
auf $[a, b]$ genannt. Allgemeiner: Wir werden $R(f, a, b)$ auch für Funktionen mit „Sprüngen“ betrachten. Dann sprechen wir aber von der Menge $R(f, a, b)$ und nicht von dem Gebiet.

Die Idee hinter der angestrebten Definition wird in der folgenden Skizze veranschaulicht. Wir haben das Intervall $[a, b]$ mit Hilfe von Zahlen t_0, t_1, t_2, t_3, t_4 in vier Intervalle

$$[t_0, t_1], [t_1, t_2], [t_2, t_3], [t_3, t_4]$$

unterteilt. Dabei gilt

$$a = t_0 < t_1 < t_2 < t_3 < t_4 = b.$$



Auf dem ersten Intervall $[t_0, t_1]$ hat f den minimalen Funktionswert m_1 und den maximalen Funktionswert M_1. Analog, auf den Intervallen $[t_{i-1}, , t_{i-2}]$ hat f den Minimalwert m_i und den Maximalwert M_i. Die Summe

$$s = m_1(t_1 - t_0) + m_2(t_2 - t_1) + m_3(t_3 - t_2) + m_4(t_4 - t_3)$$

ist der Flächeninhalt der Rechtecke, die in $R(f, a, b)$ liegen, und die Summe

$$S = M_1(t_1 - t_0) + M_2(t_2 - t_1) + M_3(t_3 - t_2) + M_4(t_4 - t_3)$$

ist der Flächeninhalt der Rechtecke, die $R(f, a, b)$ enthalten. Der rote Faden auf unserem Weg, den Flächeninhalt A von $R(f, a, b)$ zu definieren, ist die Beobachtung, dass immer $s \leq A \leq S$ gelten sollte, und zwar unabhängig davon, wie das Intervall $[a, b]$ unterteilt wird. Und das, was wir hier am Beispiel gemacht haben, machen wir jetzt formal.

19.1.1 Definition: Sei $a < b$. Eine **Partition** P des Intervalls $[a, b]$ sind endlich viele Punkte $t_0, t_1, \dots, t_n$, sodass gilt:

$$a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b.$$

19.1.2 Definition: Sei $a < b$, sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ beschränkt, und sei $t_0, \dots, t_n$ eine Partition P von $[a, b]$. Für alle $1 \leq i \leq n$ sei

$$\begin{aligned} m_i &= \inf\{f(x) \mid t_{i-1} \leq x \leq t_i\} \text{ und} \\ M_i &= \sup\{f(x) \mid t_{i-1} \leq x \leq t_i\}. \end{aligned}$$

Die **Untersumme** $U(f, P)$ von f für die Partition P wird definiert als

$$U(f, P) = \sum_{i=1}^{n} m_i(t_i - t_{i-1}).$$

Die **Obersumme** $O(f, P)$ von f für P wird definiert als

$$O(f, P) = \sum_{i=1}^{n} M_i(t_i - t_{i-1}).$$

Die Unter- und die Obersumme korrespondieren zu den Summen s und S in unserem Beispiel oben. Sie repräsentieren die Summe der Flächeninhalte der Rechtecke unterhalb beziehungsweise oberhalb des Graphen von f.

Die Annahme, dass f beschränkt ist, ist wichtig. Nur dann können wir m_i und M_i definieren. Weiterhin war es nötig, die Zahlen m_i und M_i als inf beziehungsweise sup zu definieren. Da wir nicht verlangen, dass f stetig ist, können wir nicht erwarten, dass es Minima beziehungsweise Maxima gibt.

19.1.3 Bemerkung: Sei $a < b$, sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ beschränkt, und sei $t_0, \dots, t_n$ eine Partition P von $[a, b]$. Dann gilt $U(f, P) \leq O(f, P)$.

Beweis: Für alle $1 \leq i \leq n$ gilt $m_i(t_i - t_{i-1}) \leq M_i(t_i - t_{i-1})$. Es folgt $U(f, P) \leq O(f, P)$. $\square$

19.1.4 Definition: Sei $a < b$ und sei $t_0, \dots, t_n$ eine Partition P von $[a, b]$ und sei $t'_0, \dots, t'_m$ eine Partition Q von $[a, b]$. Wir sagen, dass Q eine **Verfeinerung** von P ist, wenn $\{t_0, \dots, t_n\} \subseteq \{t'_0, \dots, t'_m\}$.

Intuitiv sollte klar sein, was mit Unter- und Obersummen passiert, wenn wir eine Partition P verfeinern. Die Rechtecke werden durch Unterteilungen schmaler und diejenigen unter dem Funktionsgraphen füllen das Gebiet besser aus. Die Untersumme sollte bei einer Verfeinerung also größer werden. Bei den Obersummen ist es gerade umgekehrt. Dadurch, dass die Rechtecke schmaler werden, approximieren die Rechtecke das Gebiet besser, und die Obersumme wird kleiner. Dass unsere Intuition uns nicht täuscht, ist Inhalt des folgenden Lemmas.

19.1.5 Lemma: Sei $a < b$, und sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ beschränkt. Sei P eine Partition von $[a, b]$, und sei Q eine Verfeinerung von P.

Dann gilt $U(f, P) \leq U(f, Q)$ und $O(f, P) \geq O(f, Q)$.

Beweis: Wir betrachten zunächst einen Spezialfall, nämlich der, dass Q einen Punkt mehr als P enthält. Wir sind dann in folgender Situation:

$$\begin{array}{lllllllllll} P: & a = t_0 & < & \cdots & t_{k-1} & & & < & t_k & < & \cdots & t_n = b \\ Q: & a = t_0 & < & \cdots & t_{k-1} & < & u & < & t_k & < & \cdots & t_n = b. \end{array}$$

Seien $m' = \inf\{f(x) \mid t_{k-1} \leq x \leq u\}$ und $m'' = \inf\{f(x) \mid u \leq x \leq t_k\}$. Dann gilt

$$\begin{aligned} U(f, P) &= \sum_{i=1}^{n} m_i(t_i - t_{i-1}) \text{ und} \\ U(f, Q) &= \sum_{i=1}^{k-1} m_i(t_i - t_{i-1} + m'(u - t_{k-1}) + m''(t_k - u) + \sum_{i=k+1}^{n} m_i(t_i - t_{i-1}). \end{aligned}$$

Um $U(f, P) \leq U(f, Q)$ zu zeigen, reicht es also, $m_k(t_k - t_{k-1}) \leq m'(u - t_{k-1}) + m''(t_k - u)$ zu verifizieren. Da $\{f(x) \mid t_{k-1} \leq x \leq u\} \subseteq \{f(x) \mid t_{k-1} \leq x \leq t_k\}$, folgt $\inf\{f(x) \mid t_{k-1} \leq x \leq u\} \geq \inf\{f(x) \mid t_{k-1} \leq x \leq t_k\}$, denn die rechte Menge enthält möglicherweise noch kleinere Elemente als die linke. Mit demselben Argument gilt $\inf\{f(x) \mid u \leq x \leq t_k\} \geq \inf\{f(x) \mid t_{k-1} \leq x \leq t_k\}$, und es folgt

$$m_k(t_k - t_{k-1}) = m_k(u - t_{k-1}) + m_k(t_k - u) \leq m'(u - t_{k-1}) + m'' t_k - u),$$

also $U(f, P) \leq U(f, Q)$. Ein ähnlicher Beweis zeigt $O(f, P) \geq O(f, Q)$.

Der allgemeine Fall folgt nun schnell aus dem Spezialfall. Eine Verfeinerung Q entsteht aus P durch sukzessives Einfügen von endlich vielen Punkten. Mit anderen Worten, wir erhalten eine Kette $P = P_1, P_2, \ldots, P_r = Q$, sodass P_{j+1} einen Punkt mehr als P_j hat. Dies liefert

$$\begin{aligned} U(f, P) = U(f, P_1) \leq U(f, P_2) \leq \cdots \leq U(f, P_r) = U(f, Q) \text{ und} \\ O(f, P) = O(f, P_1) \geq O(f, P_2) \geq \cdots \geq O(f, P_r) = O(f, Q). \end{aligned}$$

□

Mit Hilfe dieses Lemmas und der Bemerkung 19.1.3 folgt, dass – unabhängig von den Partitionen – Untersummen niemals größer als Obersummen werden können.

19.1.6 Proposition: (Untersummen sind nie größer als Obersummen)

Sei $a < b$, und sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ beschränkt. Seien P_1 und P_2 Partitionen von $[a, b]$. Dann gilt $U(f, P_1) \leq O(f, P_2)$.

Beweis: Es gibt eine Partition P von $[a, b]$, die sowohl P_1 als auch P_2 verfeinert (zum Beispiel die Partition P, die alle Punkte von P_1 und P_2 enthält). Mit dem Lemma 19.1.5 und Bemerkung 19.1.3 folgt $U(f, P_1) \leq U(f, P) \leq O(f, P) \leq O(f, P_2)$. □

Es folgt, dass jede Obersumme eine obere Schranke für die Menge aller Untersummen ist. Damit ist jede Obersumme $O(f, P')$ kleiner oder gleich der kleinsten oberen Schranke aller Untersummen:

$$\sup\{U(f, P) \mid P \text{ ist eine Partition von } [a, b]\} \leq O(f, P')$$

für alle Partitionen P' von $[a, b]$.

Dies wiederum heißt, dass $\sup\{U(f, P) \mid P \text{ eine Partition von } [a, b]\}$ eine untere Schranke für die Menge aller Obersummen ist. Es folgt

$$\sup\{U(f, P) \mid P \text{ Partition von } [a, b]\} \leq \inf\{O(f, P) \mid P \text{ Partition von } [a, b]\}.$$

Integrierbar nennen wir eine Funktion, wenn diese Zahlen übereinstimmen, und diese Eigenschaft einer Funktion ist das, was wir vorher „gutartig“genannt hatten.

19.1.7 Definition: Sei $a < b$, und sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ beschränkt. Wir nennen f **integrierbar** auf $[a, b]$, wenn

$$\sup\{U(f, P) \mid P \text{ Partition von } [a, b]\} = \inf\{O(f, P) \mid P \text{ Partition von } [a, b]\}.$$

In diesem Fall wird diese gemeinsame Zahl das **Riemann-Integral** von f auf $[a, b]$ genannt, und mit $\int_a^b f$ oder $\int_a^b f(x)dx$ bezeichnet. Dabei wird a die **untere Integrationsgrenze**, b die **obere Integrationsgrenze**, f der **Integrand** und x die **Integrationsvariable** genannt.

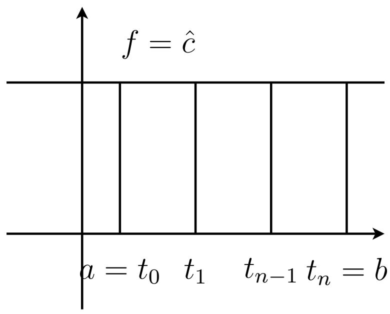
Ob wir die Integrationsvariable mit x oder t oder anders bezeichen, ist völlig gleichgültig.

Beachten Sie bitte, dass wir für eine Riemann-integrierbare Funktion voraussetzen, dass sie beschränkt ist.

Es gibt verschiedene Integral-Begriffe. Da wir in diesem Kurs aber nur das Riemann-Integral betrachten werden, werden wir den Namen Riemann künftig unterdrücken, und vom Integral sprechen. Ausgesprochen wird $\int_a^b f$ beziehungsweise $\int_a^b f(x)dx$ als „Integral von a nach b f“ beziehungsweise „Integral von a nach b f von x dx“.

19.1.8 Beispiel: Es folgen zwei einfache Beispiele.

1. Sei $c \in \mathbb{R}$, sei $a < b$, und sei $\hat{c} : [a, b] \to \mathbb{R}$ die konstante Funktion, also $\hat{c}(x) = c$ für alle $x \in [a, b]$.



Wenn $t_0, \ldots, t_n$ irgendeine Partition P von $[a, b]$ ist, dann ist $m_i = M_i = c$ für alle $1 \leq i \leq n$. Somit gilt

$$U(\hat{c}, P) = O(\hat{c}, P) = \sum_{i=1}^{n} c(t_i - t_{i-1}) = c(b - a)$$

für alle Partitionen von $[a, b]$. Somit ist $\hat{c}$ auf $[a, b]$ integrierbar, und $\int_a^b \hat{c}(x)dx = c(b - a)$.

2. Sei $a < b$, und sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ die Dirichlet-Funktion, also

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{falls } x \in \mathbb{Q} \\ 0, & \text{falls } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}.$$

Sei $t_0, \ldots, t_n$ irgendeine Partition P von $[a, b]$. Dann ist $m_i = 0$ für alle $1 \leq i \leq n$, denn in jedem $[t_{i-1}, t_i]$ gibt es eine Zahl aus $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, und es ist $M_i = 1$, denn in jedem Intervall $[t_{i-1}, t_i]$ gibt es ein Element aus $\mathbb{Q}$. Es folgt

$$U(f, P) = \sum_{i=1}^{n} 0(t_i - t_{i-1}) = 0 \neq b - a = \sum_{i=1}^{n} 1(t_i - t_{i-1}) = O(f, P)$$

für alle Partitionen P von $[a, b]$. Somit ist f nicht integrierbar, was unserer Intuition vom Flächeninhalt entsprechen sollte.

Mit inf's und sup's lässt es sich nicht gut rechen, daher formulieren wir den Integrierbarkeitsbegriff in der folgenden Proposition um.

19.1.9 Proposition: Sei $a < b$, und sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ beschränkt. Genau dann ist f auf $[a, b]$ integrierbar, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ eine Partition P von $[a, b]$ so gibt, dass $O(f, P) - U(f, P) < \varepsilon$ ist.

Beweis: Wir nehmen zunächst an, dass es zu jedem $\varepsilon > 0$ eine Partition P mit $O(f,P) - U(f,P) < \varepsilon$ gibt. Da

$$\inf\{O(f,P') \mid P' \text{ Partition von } [a,b]\} \leq O(f,P)$$

und

$$\sup\{U(f,P') \mid P' \text{ Partition von } [a,b]\} \geq U(f,P),$$

folgt

$$\inf\{O(f,P') \mid P' \text{ Partition von } [a,b]\} - \sup\{U(f,P') \mid P' \text{ Partition von } [a,b]\} < \varepsilon.$$

Da dies für alle $\varepsilon > 0$ gilt, muss

$$\inf\{O(f,P') \mid P' \text{ Partition von } [a,b]\} = \sup\{U(f,P') \mid P' \text{ Partition von } [a,b]\}$$

gelten, das heißt, f ist integrierbar auf $[a,b]$.

Sei umgekehrt f integrierbar auf $[a,b]$. Dann gilt

$$\sup\{U(f,P) \mid P \text{ Partition von } [a,b]\} = \inf\{O(f,P) \mid P \text{ Partition von } [a,b]\}.$$

Für jedes $\varepsilon > 0$ gibt es dann Partitionen P' und P'' von $[a,b]$ mit $O(f,P'') - U(f,P') < \varepsilon$. Sei P eine Verfeinerung von P' und P''. Mit Lemma 19.1.5 gilt $O(f,P) \leq O(f,P'')$ und $U(f,P) \geq U(f,P')$. Es folgt

$$O(f,P) - U(f,P) \leq O(f,P'') - U(f,P') < \varepsilon.$$

□

19.1.10 Beispiel: Das folgende Beispiel zeigt, das integrierbare Funktionen auf $[a,b]$ nicht stetig auf $[a,b]$ sein müssen. Sei $f : [0,2] \to \mathbb{R}$ definiert durch $f(x) = 0$ für $x \neq 1$ und $f(x) = 1$ für $x = 1$. Unser Gefühl sagt uns vermutlich, dass der Flächeninhalt der Menge $R(f,0,2)$ in diesem Fall 0 sein sollte, denn ein Ausreißer an der Stelle $x = 1$ trägt zum Flächeninhalt nichts bei. Dass unser Gefühl nicht täuscht, werden wir jetzt nachweisen, wobei wir Proposition 19.1.9 verwenden.

Angenommen $t_0, \ldots, t_n$ ist eine Partition P von $[0,2]$ mit $t_{j-1} < 1 < t_j$. Dann gilt $m_i = M_i = 0$ für alle $i \neq j$, aber $m_j = 0$ und $M_j = 1$. Da

$$U(f,P) = \sum_{i=1}^{j-1} m_i(t_i - t_{i-1}) + m_j(t_j - t_{j-1}) + \sum_{i=j+1}^{n} m_i(t_i - t_{i-1}) = 0$$

und

$$O(f,P) = \sum_{i=1}^{j-1} M_i(t_i - t_{i-1}) + M_j(t_j - t_{j-1}) + \sum_{i=j+1}^{n} M_i(t_i - t_{i-1}) = t_j - t_{j-1}$$

folgt $O(f,P) - U(f,P) = t_j - t_{j-1}$. Um eine Partition P zu erhalten, für die $O(f,P) - U(f,P) < \varepsilon$ ist, müssen wir nur eine wählen, für die $t_j - t_{j-1} < \varepsilon$ ist, und die $t_{j-1} < 1 < t_j$ erfüllt. Somit ist f mit Proposition 19.1.9 integrierbar. Ferner gilt $U(f,P)00 \leq O(f,P)$ für alle Partitionen P. Da f integrierbar ist, gibt es nur eine Zahl zwischen allen Untersummen und allen Obersummen, nämlich das Integral. Es folgt $\int_0^2 f(x)dx = 0$.

Die folgende Proposition besagt, dass wir bei der Integration einer Funktion das Intervall zerlegen und stückweise integrieren können.

19.1.11 Proposition: Sei $a < b$, sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ beschränkt, und sei $c \in \mathbb{R}$ mit $a < c < b$. Dann gilt:

Genau dann ist f auf $[a,b]$ integrierbar, wenn f auf $[a,c]$ und auf $[c,b]$ integrierbar ist. In diesem Fall gilt $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$.

Beweis: Sei f auf $[a,b]$ integrierbar, und sei $\varepsilon > 0$. Sei $t_0, \ldots, t_n$ eine Partition P von $[a,b]$, sodass $O(f,P) - U(f,P) < \varepsilon$ ist. Wir können annehmen, dass $c = t_j$ für ein $1 \leq j \leq n$ ist. (Anderenfalls betrachten wir eine Verfeinerung Q von P, die c enthält. Für diese gilt $O(f,Q) - U(f,Q) < O(f,P) - U(f,P) < \varepsilon$.)

Nun ist $t_0, \ldots, t_j$ eine Partition P' von $[a,c]$, und $t_j, \ldots, t_n$ ist eine Partition P'' von $[c,b]$. Da

$$\begin{aligned} U(f,P) &= U(f,P') + U(f,P'') \text{ und} \\ O(f,P) &= O(f,P') + O(f,P''), \end{aligned}$$

gilt

$$[O(f,P') - U(f,P')] + [O(f,P'') - U(f,P'')] = O(f,P) - U(f,P) < \varepsilon.$$

Keiner der Ausdrücke in den eckigen Klammern ist negativ, also folgt

$$O(f,P') - U(f,P') < \varepsilon \text{ und } O(f,P'') - U(f,P'') < \varepsilon.$$

Somit ist f auf $[a,c]$ und $[c,b]$ integrierbar.

Weiter gilt

$$\begin{array}{lcll} U(f,P') & \leq & \int_a^c f(x)dx & \leq O(f,P') \text{ und} \\ U(f,P'') & \leq & \int_c^b f(x)dx & \leq O(f,P''). \end{array}$$

Damit folgt

$$U(f,P) \leq \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx \leq O(f,P).$$

Da dies für alle Partitionen P richtig ist, folgt

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

Jetzt nehmen wir an, f sei auf $[a,c]$ und auf $[c,b]$ integrierbar. Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es eine Partition P' von $[a,c]$ und eine Partition P'' von $[c,b]$, mit

$$O(f,P') - U(f,P') < \frac{\varepsilon}{2} \text{ und } O(f,P'') - U(f,P'') < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Sei P die Partition von $[a,b]$, die alle Punkte von P' und P'' enthält. Dann gilt

$$U(f,P) = U(f,P') + U(f,P'') \text{ und } O(f,P) = O(f,P') + O(f,P''),$$

also

$$O(f,P) - U(f,P) = [O(f,P') + U(f,P')] - [O(f,P'') - U(f,P'')] < \varepsilon.$$

Es folgt, dass f auf $[a,b]$ integrierbar ist. □

Bei der Integration einer Funktion f hatten wir bisher immer $a < b$ vorausgesetzt. Wir erweitern den Integralbegriff, indem wir definieren:

19.1.12 Notation: Sei $a < b$, und sei f auf $[a,b]$ integrierbar. Wir setzen

$$\int_a^a f(x)dx = 0 \text{ und } \int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx.$$

Die folgende Abschätzung des Integrals ist häufig sehr nützlich.

19.1.13 Lemma: Sei f integrierbar auf $[a,b]$, und sei $m \le f(x) \le M$ für alle $x \in [a,b]$. Dann gilt

$$m(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a).$$

Beweis: Es sind $m(b-a) = U(f,P)$ und $O(f,p) = M(b-a)$ für die Partition P, die nur a und b enthält. Jede weitere Partition Q ist eine Verfeinerung von P, und es folgt

$$m(b-a) = U(f,P) \le U(f,Q) \le O(f,Q) \le O(f,P) = M(b-a).$$

Nach Definition des Integrals folgt die Behauptung. □

Nehmen wir nun an, f sei auf dem Intervall $[a,b]$ integrierbar. Wir definieren eine Funktion $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ durch $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ für alle $x \in [a,b]$. Dies ist mit Proposition 19.1.11 möglich, denn f ist auf $[a,x]$ integrierbar. Da x die obere Integrationsgrenze ist, haben wir die Integrationsvariable mit t bezeichnet. Wir haben in Beispiel 19.1.10 gesehen, dass integrierbare Funktionen nicht stetig sein müssen. Das folgende Ergebnis besagt, dass die Funktion F sich besser benimmt. Sie ist, unabhängig davon ob f es ist oder nicht, immer stetig.

19.1.14 Satz: Sei f auf dem abgeschlossenen Intervall $[a,b]$ integrierbar.

Die Funktion $F : [a,b] \to \mathbb{R}$, $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ für alle $x \in [a,b]$, ist stetig auf $[a,b]$.

Beweis: Da f auf $[a,b]$ beschränkt ist, gibt es ein $M > 0$ mit $-M \leq f(x) \leq M$ für alle $x \in [a,b]$.

Sei $x \in [a,b]$, und sei (x_n) eine Folge in $[a,b]$, die gegen x konvergiert. Sei $\varepsilon > 0$ vorgegeben. Dann gibt es ein n_0, sodass $|x - x_n| < \frac{\varepsilon}{M}$ für alle $n \geq n_0$ ist. Sei $n \geq n_0$.

1. Fall: $x_n \geq x$, also $x_n = x + h$ für ein $h \geq 0$. Da $n \geq n_0$, gilt $0 \leq h < \frac{\varepsilon}{M}$. Es folgt

$$F(x_n) = \int_a^{x_n} f(t)dt = \int_a^{x+h} f(t)dt = \int_a^x f(t)dt + \int_x^{x+h} f(t)dt.$$

Mit Lemma 19.1.13 folgt

$$F(x_n) - F(x) = \int_x^{x+h} f(t)dt \leq (x + h - x)M = hM < \frac{\varepsilon}{M} M = \varepsilon,$$

also $F(x_n) - F(x) = |F(x_n) - F(x)| < \varepsilon$.

2. Fall: $x_n < x$, also $x = x_n + h$ für ein $h > 0$ und $h < \frac{\varepsilon}{M}$. Es folgt

$$F(x) = \int_a^{x_n+h} f(t)dt = \int_a^{x_n} f(t)dt + \int_{x_n}^{x_n+h} f(t)dt,$$

also

$$F(x) - F(x_n) = \int_{x_n}^{x_n+h} f(t)dt \leq (x_n + h - x_n)M = hM < \varepsilon.$$

Somit gilt $F(x) - F(x_n) = |F(x_n) - F(x)| < \varepsilon$, und es folgt, dass F auf $[a,b]$ stetig ist. □

19.1.15 Definition: Sei f auf dem abgeschlossenen Intervall $[a,b]$ integrierbar.

Die Funktion $F : [a,b] \to \mathbb{R}$, $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ für alle $x \in [a,b]$ wird **unbestimmtes Integral** genannt.

Aus integrierbaren Funktionen können wir durch Addition und skalare Multiplikation weitere integrierbare Funktionen bilden.

19.1.16 Proposition: (Rechenregeln der Integration)

1. Sind f und g auf $[a,b]$ integrierbar, so ist $f+g$ auf $[a,b]$ integrierbar, und $\int_a^b (f+g)(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$.
2. Ist f auf $[a,b]$ integrierbar, und ist $\alpha \in \mathbb{R}$, so ist αf auf $[a,b]$ integrierbar, und $\int_a^b (\alpha f)(x)dx = \alpha \int_a^b f(x)dx$.

Beweis:

1. Sei $t_0, \ldots, t_n$ eine Partition P von $[a,b]$. Für alle $1 \leq i \leq n$ definieren wir

$$\begin{array}{ll} m_i = \inf\{(f+g)(x) \mid t_{i-1} \leq x \leq t_i\} & M_i = \sup\{(f+g)(x) \mid t_{i-1} \leq x \leq t_i\} \\ m_i' = \inf\{f(x) \mid t_{i-1} \leq x \leq t_i\} & M_i' = \sup\{f(x) \mid t_{i-1} \leq x \leq t_i\} \\ m_i'' = \inf\{g(x) \mid t_{i-1} \leq x \leq t_i\} & M_i'' = \sup\{g(x) \mid t_{i-1} \leq x \leq t_i\}. \end{array}$$

Es gilt

$$\begin{aligned} m_i' + m_i'' &= \inf\{f(x_1) \mid t_{i-1} \leq x_1 \leq t_i\} + \inf\{g(x_2) \mid t_{i-1} \leq x_2 \leq t_i\} \\ &= \inf\{f(x_1) + g(x_2) \mid t_{i-1} \leq x_1, x_2 \leq t_i\} \\ &\leq \inf\{(f+g)(x) \mid t_{i-1} \leq x \leq t_i\} = m_i, \end{aligned}$$

und analog $M_i' + M_i'' \geq M_i$. Es folgt

$$U(f,P) + U(g,P) \leq U(f+g,P) \text{ und } O(f+g,P) \leq O(f,P) + O(g,P),$$

und damit

$$U(f,P) + U(g,P) \leq U(f+g,P) \leq O(f+g,P) \leq O(f,P) + O(g,P).$$

Sei $\varepsilon > 0$ vorgegeben. Da f und g integrierbar sind, gibt es Partitionen P' und P'' von $[a,b]$ mit

$$O(f,P') - U(f,P') < \frac{\varepsilon}{2} \text{ und } O(g.P'') - U(g,P'') < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Sei P eine Verfeinerung von P' und P''. Dann gilt

$$[O(f,P) + O(g,P)] - [U(f,P) + U(g,P)] < \varepsilon,$$

also

$$O(f+g,P) - U(f+g,P) < \varepsilon.$$

Es folgt, dass $f+g$ auf $[a,b]$ integrierbar ist.

Darüber hinaus gilt:

$$\begin{aligned} U(f,P)+U(g,P) &\leq U(f+g,P) \\ &\leq \int_a^b (f+g)(x)dx \\ &\leq O(f+g,P) \leq O(f,P)+O(g,P) \end{aligned}$$

und

$$U(f,P)+U(g,P) \leq \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx \leq O(f,P)+O(g,P).$$

Da $[O(f,P)+O(g,P)]-[U(f,P)+U(g,P)]$ beliebig klein gemacht werden kann, folgt

$$\int_a^b (f+g)(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx.$$

2. Ist $c=0$, so ist $cf=\hat{0}$ und $\int_a^b \hat{0}(x)dx = 0$ (vergleiche Beispiel 19.1.8). Es ist auch $0\int_a^b f(x)dx = 0$, und es folgt die Behauptung. Wir können also annehmen, dass $c \neq 0$ ist. Es gilt $c \cdot U(f,P) = U(cf,P)$ und $c \cdot O(f,P) = O(cf,P)$ für alle Partitionen von $[a,b]$.

   Sei $\varepsilon > 0$ vorgegeben. Sei zunächst $c > 0$. Dann gibt es eine Partition P, sodass
   $$O(f,P)-U(f,P) < \frac{\varepsilon}{c}$$
   ist. Es folgt,
   $$c(O(f,P)-U(f,P)) = O(cf,P)-U(cf,P) < \varepsilon,$$
   das heißt cf ist integrierbar.

   Ist $c<0$, so ist $-\frac{\varepsilon}{c} > 0$, und es gibt eine Partition P mit
   $$\frac{\varepsilon}{c} < O(f,P)-U(f,P) < -\frac{\varepsilon}{c},$$
   also
   $$\varepsilon > O(cf,P)-U(cf,P) > -\varepsilon.$$
   Somit ist cf auch für $c<0$ integrierbar. Es folgt
   $$\int_a^b (cf)(x)dx = \inf\{O(cf,P)\} = c\inf\{O(f,P)\} = c\int_a^b f(x)dx.$$

□

19.2 Der Zusammenhang zwischen Differential- und Integralrechnung

Im letzten Abschnitt haben wir den Integralbegriff geometrisch motiviert. Differenzierbare Funktionen spielten dabei keine Rolle. Dieser Abschnitt wird aber zeigen, dass Integral- und Differentialrechnung ganz eng gekoppelt sind. Die Brücke schlägt dabei das unbestimmte Integral (vergleiche Definition 19.1.15).

19.2.1 Satz: (Erster Hauptsatz der Differtial- und Integralrechnung)

Sei $a < b$, und sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ integrierbar. Sei $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt \text{ für alle } x \in [a, b].$$

Ist f in $c \in [a, b]$ stetig, so ist F in c differenzierbar, und es gilt $F'(c) = f(c)$.

Beweis: Sei f in $c \in [a, b]$ stetig. Für alle $h > 0$ definieren wir

$$\begin{aligned} m_h &= \inf\{f(x) \mid x \in U_h(c) \cap [a, b]\} \text{ und} \\ M_h &= \sup\{f(x) \mid x \in U_h(c) \cap [a, b]\}. \end{aligned}$$

Dass f in c stetig ist, bedeutet gerade, dass $\lim\limits_{h\to 0} m_h = \lim\limits_{h\to 0} M_h = f(c)$ ist.

Sei (c_n) eine Folge in $[a, b] \setminus \{c\}$, die gegen c konvergiert.

Zu zeigen ist, dass $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{F(c_n)-F(c)}{c_n-c}$ existiert und $= f(c)$ ist. Sei c_n ein Folgenglied. Wir unterscheiden zwei Fälle.

1.Fall: $c_n > c$, also $c_n = c + h$ für ein $h > 0$. Dann gilt

$$\frac{F(c_n) - F(c)}{c_n - c} = \frac{1}{h}\left(\int_a^{c_n} f(t)dt - \int_a^c f(t)dt\right) = \frac{1}{h}\int_c^{c_n} f(t)dt.$$

Dabei haben wir beim letzten Gleichheitszeichen Proposition 19.1.11 verwendet. Es gilt $m_h \le f(t) \le M_h$ für alle $t \in U_h(c) \cap [a, b]$, also erhalten wir mit Lemma 19.1.13 die Abschätzung $m_h \cdot h \le \int_c^{c_n} f(t)dt \le M_h \cdot h$. Wir teilen durch h und erhalten die Abschätzung

$$m_h \le \frac{F(c_n) - F(c)}{c_n - c} \le M_h.$$

2. Fall: $c_n < c$, also $c = c_n + h$ für ein $h > 0$. Dann gilt

$$\frac{F(c_n) - F(c)}{c_n - c} = \frac{1}{-h}\left[\int_a^{c_n} f(t)dt - \int_a^c f(t)dt\right] = \frac{1}{-h}\left[-\int_{c_n}^c f(t)dt\right] = \frac{1}{h}\int_{c_n}^c f(t)dt.$$

Wieder haben wir beim letzten Gleichheitszeichen Proposition 19.1.11 verwendet. Wie oben erhalten wir die Abschätzung

$$m_h \leq \frac{F(c_n) - F(c)}{c_n - c} \leq M_h.$$

Für $n \to \infty$ strebt c_n gegen c, also h gegen 0. Es folgt

$$f(c) \leq \lim_{n\to\infty} \frac{F(c_n) - F(c)}{c_n - c} \leq f(c), \text{ also } F'(c) = f(c).$$

□

Als Folgerung aus dem Beweis von Satz 19.2.1 werden wir zeigen, dass Funktionen, die auf einem Intervall $[a, b]$ stetig sind, auf $[a, b]$ integrierbar sind. Dazu benötigen wir aber noch einige Begriffe. Dazu sei f eine auf einem Intervall $[a, b]$ beschränkte Funktion. Dann existieren

$$\sup\{U(f, P) \mid P \text{ Partition von } [a, b]\} \text{ und } \inf\{O(f, P) \mid P \text{ Partition von } [a, b]\}.$$

19.2.2 Definition: Sei f eine auf einem Intervall $[a, b]$ beschränkte Funktion. Wir nennen $\sup\{U(f, P) \mid P \text{ Partition von } [a, b]\}$ das **Unterintegral** von f auf $[a, b]$ und $\inf\{O(f, P) \mid P \text{ Partition von } [a, b]\}$ das Oberintegral von f auf $[a, b]$. Das Unterintegral wird mit $\underline{\int_a^b} f(x)dx$ und das Oberintegral mit $\overline{\int_a^b} f(x)dx$ bezeichnet.

Dass f auf $[a, b]$ integrierbar ist, bedeutet gerade, dass $\underline{\int_a^b} f(x)dx = \overline{\int_a^b} f(x)dx$ ist.

Für das Unterintegral und das Oberintegral gelten ganz analoge Beziehungen wie für das Integral. Zu nennen sind:

1. $\underline{\int_a^b} f(x)dx = \underline{\int_a^c} f(x)dx + \underline{\int_c^b} f(x)dx$ und $\overline{\int_a^b} f(x)dx = \overline{\int_a^c} f(x)dx + \overline{\int_c^b} f(x)dx$ für alle $a < c < b$.

2. Wenn $m \leq f(x) \leq M$ für alle $x \in [a, b]$, so gilt

$$m(b - a) \leq \underline{\int_a^b} f(x)dx \leq \overline{\int_a^b} f(x)dx \leq M(b - a).$$

Mit diesen Begriffen folgt analog zum Beweis von Satz 19.2.1:

19.2.3 Korollar: Sei $a < b$. Ist f auf $[a, b]$ stetig, so ist f auf $[a, b]$ integrierbar.

Beweis: Wir definieren Funktionen $U : [a, b] \to \mathbb{R}$ und $O : [a, b] \to \mathbb{R}$ durch

$$U(x) = \underline{\int_a^x} f(t)dt \text{ und } O(x) = \overline{\int_a^x} f(t)dt.$$

Sei $c \in [a, b]$, und sei (c_n) eine Folge in $[a, b] \setminus \{c\}$, die gegen c konvergiert. Für alle $h > 0$ seien m_h und M_h wie im Beweis von Satz 19.2.1. Wie in diesem Beweis gilt

$$m_h \leq \frac{U(c_n) - U(c)}{c_n - c} \leq \frac{O(c_n) - O(c)}{c_n - c} \leq M_h.$$

Da f in c stetig ist, streben m_h und M_h für $h \to 0$ gegen $f(c)$. Es folgt, dass U und O in c differenzierbar sind, und es gilt $U'(c) = O'(c) = f(c)$ für alle $c \in [a, b]$. Mit Korollar 16.1.3 folgt, dass es eine Konstante k so gibt, dass $O(c) = U(c) + k$ für alle $c \in [a, b]$ ist. Da $O(a) = U(a) = 0$, folgt $k = 0$, also $O(c) = U(c)$ für alle $c \in [a, b]$. Somit gilt

$$\overline{\int_a^b} f(t)dt = O(b) = U(b) = \underline{\int_a^b} f(t)dt,$$

und das bedeutet, dass f auf $[a, b]$ integrierbar ist. □

Wir haben gesehen, dass es integrierbare Funktionen gibt, die nicht stetig sind. Also gilt die Umkehrung in Korollar 19.2.3 nicht. Aber das Korollar sichert erst einmal für eine riesige Klasse von Funktionen, nämlich die stetigen, dass sie integrierbar sind.

Ich erinnere an die Definition einer Stammfunktion 17.5.9. Eine Funktion g heißt Stammfunktion zu einer Funktion f auf einem Intervall $[a, b]$, falls $g'(x) = f(x)$ für alle $x \in [a, b]$ ist. Eine einfache Folgerung aus Satz 19.2.1 und Korollar 19.2.3 ist:

19.2.4 Korollar: Ist f auf $[a, b]$ stetig, so besitzt f auf $[a, b]$ eine Stammfunktion.

Beweis: Ist f auf $[a, b]$ stetig, so ist f mit Korollar 19.2.3 integrierbar, und mit Satz 19.2.1 folgt, dass $F : [a, b] \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \int_a^x f(t)dt$ eine Stammfunktion von f ist. □

Eine wichtige Frage habe ich bisher vor mir hergeschoben, nämlich die, wie man das Integral einer integrierbaren Funktion wirklich ausrechnet. Bisher kennen wir erst das Integral einer einzigen Funktion, nämlich der konstanten Funktion $\hat{c}$. Und für diese Funktion wäre der ganze Heckmeck mit den Unter- und Obersummen nun wirklich nicht nötig gewesen.

Der zweite Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung reduziert die Berechnung von Integralen in vielen Fällen auf eine Trivialität.

19.2.5 Satz: (Zweiter Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung)

Ist f auf einem Intervall $[a,b]$ integrierbar, und ist g irgendeine Stammfunktion von f auf $[a,b]$, so gilt

$$\int_a^b f(x)dx = g(b) - g(a).$$

Beweis: Sei $t_0, \ldots, t_n$ eine Partition P von $[a,b]$. Mit dem Mittelwertsatz 16.1.1 gibt es einen Punkt $x_i \in [t_{i-1}, t_i]$ mit

$$g(t_i) - g(t_{i-1}) = g'(x_i)(t_i - t_{i-1}) = f(x_i)(t_i - t_{i-1}).$$

Seien

$$\begin{aligned} m_i &= \inf\{f(x) \mid t_{i-1} \leq x \leq t_i\} \text{ und} \\ M_i &= \sup\{f(x) \mid t_{i-1} \leq x \leq t_i\}. \end{aligned}$$

Dann gilt

$$m_i(t_i - t_{i-1}) \leq f(x_i)(t_i - t_{i-1}) \leq M_i(t_i - t_{i-1}),$$

also

$$m_i(t_i - t_{i-1}) \leq g(t_i) - g(t_{i-1}) \leq M_i(t_i - t_{i-1}).$$

Addieren wir diese Ungleichungen für alle $1 \leq i \leq n$ auf, so erhalten wir

$$\sum_{i=1}^n m_i(t_i - t_{i-1}) \leq g(b) - g(a) \leq \sum_{i=1}^n M_i(t_i - t_{i-1}),$$

sodass

$$U(f,P) \leq g(b) - g(a) \leq O(f,P)$$

für alle Partitionen P von $[a,b]$ gilt. Dies heißt aber gerade, dass gilt:

$$g(b) - g(a) = \int_a^b f(x)dx.$$

$\square$

19.2.6 Bezeichnung: Statt $g(b) - g(a)$ schreibt man oft $g(x)\Big|_a^b$.

Um das Integral $\int_a^b f(x)dx$ einer integrierbaren Funktion f auf $[a,b]$ ausrechnen zu können, genügt es, eine Stammfunktion g von f auf $[a,b]$ zu finden und $g(a)-g(b)$ zu berechnen.

Eine Tabelle mit Ableitungen elementarer Funktionen kann umgekehrt als Tabelle von Stammfunktionen der Ableitungen interpretiert werden. Die folgende Tabelle stellt eine kleine Sammlung von Stammfunktionen zusammen.

19.2.7 Tabelle: (Stammfunktionen)

Funktion	Definitionsbereich	Stammfunktion
$x \mapsto x^n, n \in \mathbb{N}_0$	$\mathbb{R}$	$x \mapsto \frac{1}{n+1}x^{n+1}$
$x \mapsto x^{-n}, n \in \mathbb{N}, n \geq 2$	$\mathbb{R} \setminus \{0\}$	$x \mapsto \frac{1}{-n+1}x^{-n+1}$
$x \mapsto x^{-1}$	$(0,\infty)$	$x \mapsto \ln(x)$
$x \mapsto x^{-1}$	$(-\infty,0)$	$x \mapsto \ln(-x)$
$x \mapsto x^\alpha, \alpha \in \mathbb{R}, \alpha \neq -1$	$(0,\infty)$	$x \mapsto \frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1}$
$x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$	$\mathbb{R}$	$x \mapsto \arctan(x)$
$x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$(-1,1)$	$x \mapsto \arcsin(x)$
$x \mapsto \exp(x)$	$\mathbb{R}$	$x \mapsto \exp(x)$
$x \mapsto a^x, a > 0, a \neq 1$	$\mathbb{R}$	$x \mapsto \frac{1}{\ln(a)}a^x$
$x \mapsto \cos(x)$	$\mathbb{R}$	$x \mapsto \sin(x)$
$x \mapsto \sin(x)$	$\mathbb{R}$	$x \mapsto -\cos(x)$
$x \mapsto \frac{1}{\cos^2(x)}$	$((k-\frac{1}{2})\pi,(k+\frac{1}{2})\pi), k \in \mathbb{Z}$	$x \mapsto \tan(x)$
$x \mapsto \frac{1}{\sin^2(x)}$	$(k\pi,(k+1)\pi), k \in \mathbb{Z}$	$x \mapsto -\cot(x)$

19.2.8 Beispiele: Es folgen einige Beispiele, wie der zweite Hauptsatz verwendet werden kann.

1. Wir möchten $\int_0^2 (x^2+3x-4)dx$ berechnen. Zunächst folgt aus den Rechenregeln der Integralrechnung 19.1.16:

$$\int_1^2 (x^2+3x-4)dx = \int_1^2 x^2 dx + 3\int_1^2 x dx - 4\int_1^2 1 dx.$$

Jetzt müssen wir Stammfunktionen für $x \mapsto x^2$, $x \mapsto x$ und $x \mapsto 1$ finden. Die Tabelle der Stammfunktionen liefert:

$$\begin{aligned} x &\mapsto \tfrac{1}{3}x^3 && \text{ist eine Stammfunktion von } x \mapsto x^2 \\ x &\mapsto \tfrac{1}{2}x^2 && \text{ist eine Stammfunktion von } x \mapsto x \\ x &\mapsto x && \text{ist eine Stammfunktion von } x \mapsto 1. \end{aligned}$$

Dann gilt

$$\int_1^2 (x^2+3x-4)dx = \left(\frac{1}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 - 4x\right)\Big|_0^2 = \left(\frac{8}{3}+6-8\right) - \left(\frac{1}{3}+\frac{3}{2}-4\right) = \frac{17}{6}.$$

2. Seien $a, b \in \mathbb{R}$, $0 \le a < b$. Wir möchten $\int_a^b \sqrt{x} dx$ berechnen. Eine Stammfunktion von $x \mapsto \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$ ist $x \mapsto \frac{1}{1+\frac{1}{2}} x^{1+\frac{1}{2}} = \frac{2}{3}\sqrt{x^3}$. Es folgt

$$\int_a^b \sqrt{x} dx = \frac{2}{3}\sqrt{x^3}\Big|_a^b = \frac{2}{3}(\sqrt{b^3} - \sqrt{a^3}).$$

3. Sei $F(x) = x\ln(x) - x$. Dann gilt $F'(x) = \ln(x)$, das heißt, $x \mapsto x\ln(x) - x$ ist eine Stammfunktion von ln. Folglich gilt für alle $0 < a, b$:

$$\int_a^b \ln(x) dx = (x\ln(x) - x)\Big|_a^b = (b\ln(b) - b) - (a\ln(a) - a).$$

An dem letzten Beispiel lässt sich ziemlich gut ein Dilemma bei der Integration erkennen. Wenn wir einmal wissen, dass $x \mapsto x\ln(x) - x$ eine Stammfunktion von ln ist, dann ist die Integration von ln kein Problem mehr. Nur, wie finden wir eine Stammfunktion? Natürlich hat jede auf $[a, b]$ stetige Funktion f eine Stammfunktion, nämlich $x \mapsto \int_a^x f(t)dt$, nur hilft die uns nicht weiter. Wir hätten gern eine, die zum Beispiel aus elementaren Funktionen zusammengebaut ist. Man kann zeigen, dass das nicht immer möglich ist. Wenn man mit einem Integral konfrontiert wird, kann man oft im Vorfeld nicht sagen, ob es eine einfache Funktion gibt, die eine Stammfunktion ist. Es gibt riesige Sammlungen von Funktionen mit zugehörigen Stammfunktionen, und auch die gängigen Computeralgebrasysteme sind in der Lage, in vielen Fällen Stammfunktionen bereitzustellen. Anders als bei der Differentiation, bei der wir mit Hilfe weniger Differentiationsregeln von allen differenzierbaren Funktionen die Ableitung bestimmen konnten, gibt es für die Integralrechnung keine Standardverfahren zu deren Berechnung.

Aber jede Differentiationsregel können wir auch als Integrationsregel interpretieren. Wichtigste Beispiele sind die Produktregel 15.2.1 und die Kettenregel 15.2.3 der Differentiation. Diese führen uns zu der so genannten partiellen Integration und zur Integration durch Substitution.

19.2.9 Satz: (Partielle Integration)

Sei $a < b$. Seien $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ differenzierbar, seien f' und g' stetig. Dann gilt

$$\int_a^b f(x)g'(x)dx = f(x)g(x)\Big|_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)dx.$$

Bevor wir in den Beweis einsteigen, versuchen wir die Formel mit uns sprechen zu lassen. Im ersten Schritt geht es darum, zu erkennen, ob eine Funktion h (der Integrand links des Gleichheitszeichens) das Produkt einer Funktion f und einer Ableitung g' ist. Dann können wir es mit partieller Integration versuchen. Manchmal ist das Integral auf der rechten Seite einfacher zu berechnen.

19.2.10 Beispiel: Wir wollen $\int_a^b x\exp(x)dx$ berechnen.

$$\int_a^b \underbrace{x}_{=f(x)}\underbrace{\exp(x)}_{=g'(x)}dx = \underbrace{x\exp(x)}_{=f(x)g(x)}\Big|_a^b - \int_a^b \underbrace{1}_{=f'(x)}\underbrace{\exp(x)}_{=g(x)}dx = (x\exp(x) - \exp(x))\Big|_a^b.$$

19.2.11 Aufgabe: Berechnen Sie folgende Integrale. Das zweite kennen Sie bereits (vergleiche 19.2.8.3), aber leiten Sie trotzdem die Formel mit partieller Integration her. Der Trick ist, $g' = \hat{1}$ zu setzen.

$$\int_a^b x\sin(x)dx \text{ und } \int_a^b \ln(x)dx.$$

Beweis: (von Satz 19.2.9) Die Produktregel besagt $(fg)'(x) = f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$. Es folgt $f'(x)g(x) = (fg)'(x) - f(x)g'(x)$. Eine Stammfunktion von $(fg)'$ ist fg, und es folgt $\int_a^b f(x)g'(x)dx = f(x)g(x)\Big|_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)dx$. □

Der zweiten wichtigen Integrationsregel liegt die Kettenregel zugrunde.

19.2.12 Satz: (Substitutionsregel)

Sei I ein Intervall, und sei $f : I \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Sei $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ differenzierbar mit $g([a, b]) \subseteq I$, und g' sei stetig. Dann gilt

$$\int_a^b f(g(x))g'(x)dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)du.$$

19.2.13 Beispiel: Als erstes Beispiel zur Verwendung der Substitutionsregel schauen wir uns $\int_a^b \sin^5(x)\cos(x)dx$ an. Zur Erinnerung: $\sin^5(x) = (\sin(x))^5$. Der Faktor $\cos(x)$ wird die Rolle von $g'(x)$ übernehmen, dann ist $g(x) = \sin(x)$. Der Ausdruck $(\sin(x))^5$ kann als $(g(x))^5 = f(g(x))$ mit $f(u) = u^5$ geschrieben werden. Damit gilt

$$\begin{aligned}
\int_a^b \sin^5(x)\cos(x)dx &= \int_a^b f(g(x))g'(x)dx \text{ mit } g(x) = \sin(x) \text{ und } f(u) = u^5 \\
&= \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)du \text{ mit der Substitutionsregel} \\
&= \int_{\sin(a)}^{\sin(b)} u^5 du = \frac{u^6}{6}\Big|_{\sin(a)}^{sin(b)} = \frac{\sin^6(b)}{6} - \frac{\sin^6(a)}{6}.
\end{aligned}$$

19.2.14 Aufgabe: Bestimmen Sie $\int_a^b \tan(x)dx$ (Hinweis: $g(x) = \cos(x)$) und $\int_a^b \frac{1}{x\ln(x)}dx$ (Hinweis: $g(x) = \ln(x)$).

19.2.15 Bezeichnung: Unter Verwendung der Schreibweise $dg(x) = g'(x)dx$ lautet die Substitutionsregel

$$\int_a^b f(g(x))dg(x) = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)du$$

In dieser Form lässt sie sich gut merken. Wir ersetzen einfach u durch $g(x)$. Läuft f von a nach b, so läuft u von $g(a)$ nach $g(b)$.

Beweis: (von Satz 19.2.12) Sei F eine Stammfunktion von f.

Für die Funktion $F \circ g : [a, b] \to \mathbb{R}$ gilt mit der Kettenregel $(F \circ g)'(x) = F'(g(x))g'(x) = f(g(x))g'(x)$. Eine Stammfunktion von $(F \circ g)'$ ist $F \circ g$. Es folgt

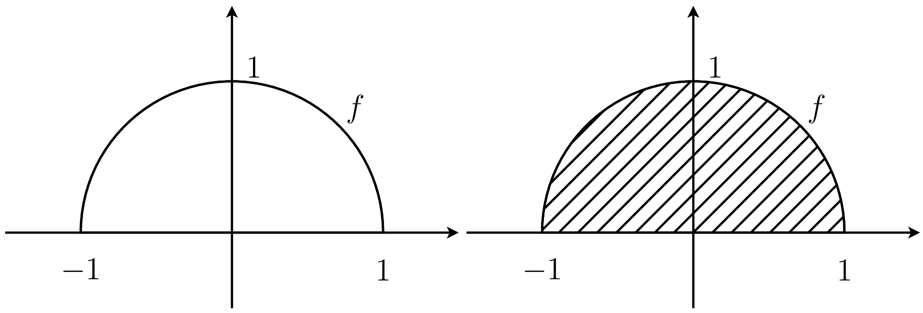
$$\int_a^b f(g(x))g'(x) = (F \circ g)(x)\Big|_a^b = F(g(b)) - F(g(a)) = F(u)\Big|_{g(a)}^{g(b)} = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)du.$$

$\square$

Als letztes in diesem Analysis-Teil des Kurses möchte ich eine Sache aufgreifen, die bis jetzt etwas unbefriedigend ist. In Abschnitt 18.1 haben wir die Winkelfunktionen sin und cos definiert und nachgewiesen, dass sie wirklich all die schönen

Eigenschaften haben, die Sie vermutlich von der Schule her kennen. Weiter haben wir die Kreiszahl π sauber definiert – als das Doppelte der einzigen Nullstelle von cos im Intervall $[0, 2]$. Aber was hat das alles mit Kreisen zu tun? In der Schule haben Sie vermutlich gelernt, dass π der Flächeninhalt des Einheitskreisen, also des Kreises mit Radius 1 ist. Und dass man Sie damals nicht belogen hat, werden wir jetzt beweisen.

Betrachten wir folgende Skizze:



Links sehen Sie einen Halbkreis mit Radius 1. Dieser ist dargestellt als Graph einer Funktion $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$. Die Funktion f erfüllt $f(u) \geq 0$ für alle $u \in [-1, 1]$. Für diese Funktion ist das Integral $\int_{-1}^{1} f(u)du$ der Flächeninhalt des Gebietes in der Skizze rechts.

Wenn π wirklich der Flächeninhalt des Einheitskreises ist, dann muss $\int_{-1}^{1} f(u)du = \frac{\pi}{2}$ sein. Und genau das werden wir jetzt beweisen.

Ein Kreis mit Mittelpunkt $(0, 0)$ und Radius 1 ist die Menge aller Punkte (x, y), die von $(0, 0)$ den Abstand 1 haben, also der Gleichung $x^2 + y^2 = 1$ genügen. Formen wir nach y^2 um und ziehen wir die Wurzel, so erhalten wir $y = \sqrt{1 - x^2}$. Die Funktion $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$, deren Graph der Halbkreis mit Radius 1 ist, ist also gegeben durch

$$f(u) = \sqrt{1 - u^2} \text{ für alle } u \in [-1, 1].$$

Dass wir die Variable u nennen, ist kein Zufall. Wir möchten $\int_{-1}^{1} f(u)du$ berechnen, und interpretieren das als die rechte Seite in der Substitutionsformel 19.2.12.

Wir setzen $g(x) = \cos(x)$, also $f(g(x))g'(x) = \sqrt{1 - \cos^2(x)}(-\sin(x))$. Es folgt

$$\int_a^b f(g(x))g'(x)dx = \int_a^b \sqrt{1 - \cos^2(x)}(-\sin(x))dx = \int_{-1}^{1} f(u)du = \int_{-1}^{1} \sqrt{1 - u^2}du,$$

wobei a und b so sind, dass $\cos(a) = -1$ und $\cos(b) = 1$ sind. Das ist zum Beispiel durch $a = \pi$ und $b = 2\pi$ möglich. Es folgt mit der Substitutionsregel

$$\int_{\pi}^{2\pi} \sqrt{1 - \cos^2(x)}(-\sin(x))dx = \int_{-1}^{1} \sqrt{1 - u^2}du.$$

Mit dem trigonometrischen Pythagoras gilt $\sin^2(x)+\cos^2(x) = 1$, also $\sqrt{1-\cos^2(x)} = |\sin(x)|$. Da $\sin(x) \leq 0$ für $x \in [\pi, 2\pi]$, gilt $\sqrt{1-\cos^2(x)} = -\sin(x)$. Es folgt

$$\int_{-1}^{1} \sqrt{1-u^2}du = \int_{\pi}^{2\pi} \sqrt{1-\cos^2(x)}(-\sin(x))dx = \int_{\pi}^{2\pi} \sin^2(x)dx.$$

Mit den Additionstheoremen gilt

$$\cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x) = (\cos^2(x) + \sin^2(x)) - 2\sin^2(x) = 1 - 2\sin^2(x).$$

Umformen nach $\sin^2(x)$ liefert $\sin^2(x) = \frac{1}{2}(1-\cos(2x))$. Wir setzen ein und erhalten

$$\int_{-1}^{1} \sqrt{1-u^2}du = \int_{\pi}^{2\pi} \frac{1}{2}(1-\cos(2x))dx = \frac{1}{2}\int_{\pi}^{2\pi}(1-\cos(2x))dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_{\pi}^{2\pi} 1dx - \frac{1}{2}\int_{\pi}^{2\pi} \cos(2x)dx.$$

Eine Stammfunktion von $\cos(2x)$ ist $\frac{1}{2}\sin(2x)$. Es folgt

$$\int_{-1}^{1} \sqrt{1-u^2}du = \frac{x}{2}\Big|_{\pi}^{2\pi} - \underbrace{\frac{1}{4}\sin(2x)\Big|_{\pi}^{2\pi}}_{=0} = \frac{\pi}{2}.$$

Somit gilt:

19.2.16 Satz: Der Flächeninhalt des Einheitskreises ist π. □

Mit diesem Ergebnis verabschiedet sich die Analysis von Ihnen, und wir wenden uns der Logik zu.

Lösungen der Aufgaben

Lösungen der Aufgaben in 19.2

Aufgabe 19.2.11

1. Wir setzen $f = \mathrm{id}$ und $g = -\cos$, also $g'(x) = \sin(x)$. Dann gilt

$$\begin{aligned}\int\limits_a^b f(x)g'(x)dx &= \int\limits_a^b x\sin(x)dx\\ &= x(-\cos(x))\Big|_a^b - \int\limits_a^b 1(-\cos(x))dx\\ &= (-x\cos(x) + \sin(x))\Big|_a^b.\end{aligned}$$

2. Wir setzen $f = \ln$ und $g = \mathrm{id}$, also $g' = \hat{1}$. Dann gilt

$$\begin{aligned}\int\limits_a^b g'(x)f(x)dx &= \int\limits_a^b 1\cdot\ln(x)dx\\ &= x\ln(x)\Big|_a^b - \int\limits_a^b x\tfrac{1}{x}dx\\ &= (x\ln(x) - x)\Big|_a^b.\end{aligned}$$

Aufgabe 19.2.14

1. Wir setzen $g(x) = \cos(x)$, also $g'(x) = -\sin(x)$, und $f(u) = \frac{1}{u}$. Dann gilt $f(g(x))g'(x) = -\frac{\sin(x)}{\cos(x)}$, also

$$\begin{aligned}\int\limits_a^b \tan(x)dx &= -\int\limits_a^b f(g(x))g'(x)dx = -\int\limits_{g(a)}^{g(b)} f(u)du\\ &= -\int\limits_{g(a)}^{g(b)} \tfrac{1}{u})du = -\int\limits_{\cos(a)}^{\cos(b)} \tfrac{1}{u})du\\ &= -(\ln(\cos(b)) - \ln(\cos(a))) = \ln(\cos(a)) - \ln(\cos(b)).\end{aligned}$$

2. Wir setzen $g(x) = \ln(x)$, dann ist $g'(x) = \frac{1}{x}$. Sei $f(u) = \frac{1}{u}$. Dann gilt $\frac{1}{x\ln(x)} = f(g(x))g'(x)$. Es folgt

$$\begin{aligned}\int\limits_a^b \frac{1}{x\ln(x)}dx &= \int\limits_a^b f(g(x))g'(x)dx \\ &= \int\limits_{g(a)}^{g(b)} f(u)du = \int\limits_{\ln(a)}^{\ln(b)} \frac{1}{u}du \\ &= \ln(\ln(b)) - \ln(\ln(a)).\end{aligned}$$

Kapitel 20

Logik

Menschen benutzen ähnliche Denkmuster, wenn sie argumentieren, ob eine Behauptung aus Annahmen folgt oder nicht. Diese Denkmuster werden in der Logik mathematisch analysiert. Die Logik beschäftigt sich nicht nur mit der Frage, ob Aussagen wahr oder falsch sind, sondern auch damit, welche Schlüsse aus Annahmen gezogen werden können. Typische Fragen der Logik sind:

1. Was folgt aus gegebenen Voraussetzungen?
2. Wie kann man beweisen, dass eine Behauptung aus Voraussetzungen folgt?
3. Was ist ein Beweis?
4. Wie kann man zeigen, dass eine Aussage nicht aus Voraussetzungen folgt?

Zur Beantwortung dieser und weiterer Fragen wurde eine spezielle Sprache entwickelt, die Sprache der Prädikatenlogik, die die Aussagenlogik als Teilsprache umfasst. Die Prädikatenlogik ist eine künstliche Sprache, ähnlich wie eine Programmiersprache. Sie ist vom Wortschatz und der Grammatik her minimal. Anders als bei natürlichen Sprachen gibt es in der Prädikatenlogik keine Mehrdeutigkeiten. Daher eignet sich die Prädikatenlogik gut zur Beschreibung und Spezifikation von Hard- und Software. Die Schlussregeln der Prädikatenlogik sind so gemacht, dass Beweise in der Prädikatenlogik mechanisch von einem Computerprogramm überprüft werden können. Solche Methoden werden auch in der Informatik eingesetzt, da Hard- und Softwaresysteme immer komplizierter werden und Menschen allmählich die Übersicht verlieren.

Die Logik hat viele Bezüge zur Informatik. Als Beispiele, die Ihnen sicher im Studium begegnen werden, seien genannt:

1. **Logik und Digitaltechnik** Die Aussagenlogik beschäftigt sich mit den

Wahrheitswerten „wahr“ und „falsch“. Diese Wahrheitswerte können mit den digitalen Werten 1 (Strom) und 0 (kein Strom) identifiziert werden. Es gibt darum einen starken Bezug zwischen der Aussagenlogik und digitalen Schaltkreisen.

2. **Logik und Komplexitätstheorie** Eines der bekanntesten offenen Probleme der theoretischen Informatik ist die Frage, ob die so genannten Komplexitätsklassen P und NP gleich sind. Diese Frage kann man äquivalent dazu so stellen: Gibt es einen Algorithmus, der in polynomialer Zeit (in Bezug auf die Länge der Eingabe) entscheidet, ob eine aussagenlogische Formel erfüllbar ist?

3. **Logik und Datenbanken** Eine wichtige Anwendung der Prädikatenlogik in der Informatik sind relationale Datenbanken. Relationale Datenbanken sind nichts anderes als gewisse Strukturen der Prädikatenlogik. Eine Datenbankabfrage kann übersetzt werden in eine prädikatenlogische Formel.

4. **Logik als Programmiersprache** In der Logikprogrammierung werden Fragmente der Prädikatenlogik als Programme betrachtet. Die Suche nach einem Beweis der Formel gilt als Berechnung. Ein Beispiel für eine Logikprogrammiersprache ist Prolog. Mit Logikprogrammierung beschäftigt man sich im Rahmen der Künstlichen Intelligenz.

Wir beginnen unsere Einführung in die formale Logik mit der Aussagenlogik, die wie oben bereits erwähnt eine Teilsprache der Prädikatenlogik ist.

20.1 Aussagenlogik

20.1.1 Syntax

Aussagenlogische Formeln sind aufgebaut aus Elementaraussagen, die **Atome** genannt werden. Die Menge der Atome bezeichnen wir mit Σ (ausgesprochen „Sigma“ und nicht zu verwechseln mit dem Summationszeichen), und die Atome selbst mit Großbuchstaben mit oder ohne Indizes. Die Atome können durch $\neg$ negiert werden oder durch die Junktoren $\wedge$ (Konjunktion), $\vee$ (Disjunktion), $\rightarrow$ (Implikation) oder $\leftrightarrow$ (Äquivalenz) zu komplexen Formeln verknüpft werden. Diese Formeln werden wir mit kleinen griechischen Buchstaben bezeichnen. Die Junktoren sind gerade die, die wir in Abschnitt 1.2.1 eingeführt haben. Zu beachten ist aber, dass in der Logik der Implikationspfeil und der Äquivalenzpfeil nicht wie in der Mathematik durch Doppelpfeile sondern durch einfache Pfeile symbolisiert werden. Wir werden uns in dieser Kurseinheit an die Konvention der Logik halten, also die Implikation mit $\rightarrow$ und die Äquivalenz durch $\leftrightarrow$ bezeichnen.

In der Syntax der Aussagenlogik wird festgelegt, wie wir korrekte aussagenlogische Formeln konstruieren können. Dabei geht man induktiv vor: Zunächst wird festgelegt, dass die Atome selbst Formeln sind, und dann wird festgelegt, wie aus existierenden Formeln weitere konstruiert werden können. Genauer:

20.1.1 Definition: Aussagenlogische Formeln werden induktiv durch die folgenden vier Schritte definiert. Dabei sei Σ die Menge der Atome.

1. Jedes Atom in Σ ist eine Formel.
2. Ist α eine Formel, so ist $(\neg\alpha)$ eine Formel.
3. Für Formeln α und β sind $(\alpha \wedge \beta)$, $(\alpha \rightarrow \beta)$, $(\alpha \leftrightarrow \beta)$ und $(\alpha \vee \beta)$ Formeln.
4. Nur Ausdrücke, die mit 1., 2. und 3. gebildet werden, sind Formeln.

20.1.2 Aufgabe: Sei $\Sigma = \{A, B, C, D\}$.

1. Warum ist $((A \vee ((\neg B) \wedge C)) \vee (A \vee (\neg B)))$ eine Formel?
2. Warum ist $(A \vee \neg B)$ keine Formel?

Bei der Erzeugung von Formeln müssen wir darauf achten, dass in Schritt 2 und in Schritt 3 die Klammern zu den Formeln gehören. Durch die in der Definition verlangten Klammern werden Formeln allerdings schnell unübersichtlich. Um Klammern einzusparen werden so genannte Präzedenzregeln eingeführt. Ähnlich wie beim Rechnen mit Zahlen, bei der Multiplikation stärker bindet als Addition (Punktrechnung vor Strichrechnung), legen wir fest, welche logischen Operationen stärker binden als andere.

20.1.3 Vereinbarung: (Präzedenzregeln)

1. $\neg$ bindet stärker als $\wedge$.
2. $\wedge$ bindet stärker als $\vee$.
3. $\vee$ bindet stärker als $\rightarrow$ und $\leftrightarrow$.

Mit den Präzedenzregeln können wir die Formel $(((\neg A) \vee B) \wedge C)$ schreiben als $((\neg A \vee B) \wedge C)$. Auf die Klammerung von $\neg A \vee B$ können wir allerdings nicht verzichten, denn $\wedge$ bindet stärker als $\vee$. Die Formel $(\neg A \vee B \wedge C)$ entspricht somit der Formel $(\neg A \vee (B \wedge C))$.

Um weitere Klammern zu sparen, müssen wir noch regeln, ob bei Operationen gleicher Bindungsstärke von links nach rechts oder von rechts nach links geklammert wird.

20.1.4 Definition: Sei $\Box$ ein Platzhalter für logische Operationen derselben Bindungsstärke. Wir sagen, dass die Operation $\Box$ **linksasssoziativ** bindet, wenn $A \Box B \Box C$ gleichbedeutend mit $(A \Box B) \Box C$ ist. Wir sagen, dass $\Box$ **rechtsassoziativ** bindet, wenn $A \Box B \Box C$ gleichbedeutend mit $A \Box (B \Box C)$ ist.

Linksassoziativ ist üblicher als rechtsassoziativ. Wir vereinbaren nun:

20.1.5 Vereinbarung: (Klammerersparnis)

1. $\wedge$, $\vee$ und $\rightarrow$ binden linksassoziativ.
2. $\rightarrow$ braucht nicht geklammert zu werden.
3. Klammern, die Formeln umfassen, können weggelassen werden.

20.1.6 Aufgabe: Schreiben Sie folgende aussagenlogische Formeln mit so wenigen Klammern wie möglich.

1. $((A \wedge B) \vee C)$
2. $(\neg A)$
3. $(((A \vee B) \rightarrow C) \wedge B)$.

20.1.7 Definition: Sei α eine Formel. Mit **atoms**(α) bezeichnen wir die Menge der in α auftretenden Atome. Ein **Literal** ist ein Atom A oder ein negiertes Atom $\neg A$. Ein Atom A wird auch als **positives Literal** und $\neg A$ als **negatives Literal** bezeichnet.

20.1.2 Semantik

Im letzten Abschnitt haben wir festgelegt, wie die Struktur aussagenlogischer Formeln aussieht. In diesem Abschnitt wollen wir zeigen, wie aussagenlogischen Formeln eine Bedeutung zugeordnet wird. In der Aussagenlogik gehen wir von zwei Wahrheitswerten aus, und zwar vom Wert **1** für „wahr“ und dem Wert **0** für „falsch“. Gebräuchlich sind auch andere Bezeichnungen für die Wahrheitswerte, etwa f oder **false** für falsch und w oder **true** für wahr. Im Abschnitt 1.2 haben wir f und w verwendet. Wir verwenden Fettdruck für Wahrheitswerte, um sie nicht mit Zahlen zu verwechseln.

Wir können einzelnen Atomen nun Wahrheitswerte zuordnen, und wenn wir wissen, wie die Konjunktion, Disjunktion, Negation, Implikation und Äquivalenz zu verrechnen sind, dann können wir aussagenlogischen Formeln ebenfalls Wahrheitswerte zuordnen. Wir haben das – etwas Hände wedelnd – bereits in Abschnitt 1.2 gemacht und werden es hier noch einmal formalisieren.

20.1.8 Definition: Sei Σ die Menge der Atome. Eine Abbildung $\mathfrak{I} : \Sigma \to \{\mathbf{0}, \mathbf{1}\}$ wird **Bewertung** genannt. Eine Bewertung $\mathfrak{I}$ wird auch als **Interpretation** bezeichnet.

Eine Bewertung ordnet somit jedem Atom einen der Werte $\mathbf{0}$ oder $\mathbf{1}$ zu. Wir erweitern jetzt die Bewertungen der Atome zu Bewertungen auf Formeln. Die Erweiterung basiert auf der induktiven Definition von Formeln.

20.1.9 Definition: Sei $\mathfrak{I}$ eine Bewertung der Atome. Wir erweitern die Bewertung zu einer **Bewertung von Formeln**, wobei wir die Erweiterung wieder mit $\mathfrak{I}$ bezeichnen, durch die Regeln

(i) $\mathfrak{I}(\neg\alpha) = \mathbf{1}$ genau dann, wenn $\mathfrak{I}(\alpha) = \mathbf{0}$.

(ii) $\mathfrak{I}(\alpha \wedge \beta) = \mathbf{1}$ genau dann, wenn $\mathfrak{I}(\alpha) = \mathbf{1}$ und $\mathfrak{I}(\beta) = \mathbf{1}$.

(iii) $\mathfrak{I}(\alpha \vee \beta) = \mathbf{1}$ genau dann, wenn $\mathfrak{I}(\alpha) = \mathbf{1}$ oder $\mathfrak{I}(\beta) = \mathbf{1}$.

(iv) $\mathfrak{I}(\alpha \to \beta) = \mathbf{1}$ genau dann, wenn $\mathfrak{I}(\alpha) = \mathbf{0}$ oder $\mathfrak{I}(\beta) = \mathbf{1}$.

(v) $\mathfrak{I}(\alpha \leftrightarrow \beta) = \mathbf{1}$ genau dann, wenn $\mathfrak{I}(\alpha) = \mathfrak{I}(\beta)$.

Machen wir einen Moment Pause und stellen uns vor, die Formeln in Definition 20.1.9 seien Atome. Vergleichen Sie nun die Definitionen von Konjunktion, Disjunktion, Negation, Implikation und Äquivalenz in Abschnitt 1.2.1. Sie werden feststellen, dass die durch die Wahrheitstafeln definierten Junktoren gerade die Bewertungen von Definition 20.1.9 sind. Es geschieht also in dieser Definition auf der ersten Ebene der induktiven Definition (bei der Atome Formeln sind) nichts Neues. Neu ist, dass an Stelle der Atome nun auch Formeln bewertet werden.

Zur Berechnung der Bewertung einer Formel bieten sich zwei Wege an. Einmal können wir von der Bewertung der Atome ausgehen und schrittweise den Wert für jede Teilformel bestimmen und so die Bewertung des Formel bestimmen. Folgendes Beispiel illustriert diese Vorgehensweise.

20.1.10 Beispiel: Berechnung der Bewertung einer Formel: Von den Atomen zur Formel:

Sei $\alpha = (A \vee B) \wedge \neg B \to A$. Als Bewertung der Atome nehmen wir an, es gelte $\mathfrak{I}(A) = \mathbf{0}$ und $\mathfrak{I}(B) = \mathbf{1}$.

Mit 20.1.9 (iii) gilt $\mathfrak{I}(A \vee B) = \mathbf{1}$. Da $\wedge$ stärker bindet als $\to$, berechnen wir im nächsten Schritt die Bewertung von $(A \vee B) \wedge \neg B$. Es ist $\mathfrak{I}(\neg B) = \mathbf{0}$ (mit 20.1.9 (i)), also $\mathfrak{I}((A \vee B) \wedge \neg B) = \mathbf{0}$ (mit 20.1.9 (ii)). Mit 20.1.9 (iv) folgt nun $\mathfrak{I}((A \vee B) \wedge \neg B \to A) = \mathbf{1}$, also $\mathfrak{I}(\alpha) = \mathbf{1}$.

20.1.11 Aufgabe: Sei $\alpha = (A \vee \neg B) \wedge (A \vee B \to C)$ mit $\mathfrak{I}(A) = \mathfrak{I}(B) = \mathfrak{I}(C) = \mathbf{0}$. Bestimmen Sie wie in 20.1.10 die Bewertung von α.

Ein anderer Weg, die Bewertung einer Formel zu berechnen ist, eine Formel sukzessive in ihre Teilformeln zu zerlegen, bis wir auf der Ebene der Atome angekommen sind. Aus der Bewertung der Atome können wir dann auf die Bewertung der Formel schließen. Das folgende Beispiel illustriert diese Vorgehensweise.

20.1.12 Beispiel: Berechnung der Bewertung einer Formel: Von der Formel zum Atom:

Sei $\alpha = A \wedge (A \to B) \wedge (\neg B \vee D)$. Seien $\mathfrak{I}(A) = \mathbf{1}$, $\mathfrak{I}(B) = \mathbf{1}$ und $\mathfrak{I}(D) = \mathbf{1}$.

Es gilt

$$\begin{array}{rcl} \mathfrak{I}(\alpha) & = & \mathfrak{I}(A \wedge (A \to B) \wedge (\neg B \vee D)) = \mathbf{1} \\ & \Leftrightarrow & \mathfrak{I}(A) = \mathbf{1} \text{ und } \mathfrak{I}((A \to B)) = \mathbf{1} \text{ und } \mathfrak{I}(\neg B \vee D) = \mathbf{1} \\ & \Leftrightarrow & \mathfrak{I}(A) = \mathbf{1} \text{ und } (\mathfrak{I}(A) = \mathbf{0} \text{ oder } \mathfrak{I}(B) = \mathbf{1}) \text{ und } (\mathfrak{I}(\neg B) = \mathbf{1} \text{ oder } \mathfrak{I}(D) = \mathbf{1}). \end{array}$$

Da $\mathfrak{I}(A) = \mathbf{1}$, $\mathfrak{I}(B) = \mathbf{1}$ und $\mathfrak{I}(D) = \mathbf{1}$, folgt $\mathfrak{I}(\alpha) = \mathbf{1}$.

20.1.13 Aufgabe: Sei $\alpha = (A \vee \neg B) \wedge (A \vee B \to C)$. Sei $\mathfrak{I}(A) = \mathbf{0}$, $\mathfrak{I}(B) = \mathbf{0}$ und $\mathfrak{I}(C) = \mathbf{1}$. Bestimmen Sie wie in 20.1.12 die Bewertung von α.

Ob eine Formel für eine Bewertung wahr oder falsch ist, hängt nur von der Bewertung der in der Formel auftretenden Atome ab. Atome, die in der Formel nicht enthalten sind, können beliebige Bewertungen haben. Da jedes Atom die Bewertung $\mathbf{0}$ oder $\mathbf{1}$ haben kann, besitzt eine Formel mit n Atomen 2^n mögliche Bewertungen. Fassen wir die möglichen Bewertungen und die Bewertungen der Formel in einer Tabelle zusammen, so erhalten die Wahrheitstafel der Formel. Formal definiert:

20.1.14 Definition: Wenn wir alle möglichen Bewertungen der Atome einer Formel zusammen mit dem zugehörigen Wahrheitswert der Formel in eine Tabelle schreiben, so erhalten wir die **Wahrheitstafel** für die Formel.

20.1.15 Beispiel: Sei $\alpha = (A \vee \neg B) \wedge (A \vee B \to C)$ die Formel in 20.1.13. Die Wahrheitstafel dieser Formel ist:

A	B	C	α
0	**0**	**0**	**1**
0	**0**	**1**	**1**
0	**1**	**0**	**0**
0	**1**	**1**	**0**
1	**0**	**0**	**0**
1	**0**	**1**	**1**
1	**1**	**0**	**0**
1	**1**	**1**	**1**

Da diese Wahrheitstafel vielleicht etwas vom Himmel fällt, schreiben wir sie noch einmal ausführlicher, indem wir – quasi als Nebenrechnung – die Wahrheitswerte für die Teilformeln $A \vee \neg B$ und $A \vee B \to C$ mit in die Tafel aufnehmen:

A	B	C	$A \vee \neg B$	$A \vee B \to C$	α
0	**0**	**0**	**1**	**1**	**1**
0	**0**	**1**	**1**	**1**	**1**
0	**1**	**0**	**0**	**0**	**0**
0	**1**	**1**	**0**	**1**	**0**
1	**0**	**0**	**1**	**0**	**0**
1	**0**	**1**	**1**	**1**	**1**
1	**1**	**0**	**1**	**0**	**0**
1	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**

Die zweite Zeile der Wahrheitstafel in 20.1.15 zeigt, dass es eine Bewertung der Atome so gibt, dass die Formel α wahr wird. Wir sagen, dass α erfüllbar ist. Die dritte Zeile zeigt, dass es eine Bewertung so gibt, dass α falsch ist. Dazu sagt man, dass α falsifizierbar ist. In der folgenden Definition legen wir weitere Begriffe fest, die bei Bewertungen von Formeln gebräuchlich sind.

20.1.16 Definition: 1. Eine Formel α heißt **erfüllbar**, wenn es eine Bewertung $\mathfrak{I}$ mit $\mathfrak{I}(\alpha) = \mathbf{1}$ gibt.

2. Eine Formel α heißt **tautologisch** (eine **Tautologie**, **allgemeingültig**), wenn die Formel für jede Bewertung $\mathfrak{I}$ den Wert $\mathfrak{I}(\alpha) = \mathbf{1}$ besitzt.

3. Eine Formel α heißt **widerspruchsvoll** (**unerfüllbar**), wenn die Formel für jede Bewertung $\mathfrak{I}$ den Wert $\mathfrak{I}(\alpha) = \mathbf{0}$ annimmt.

4. Eine Formel α heißt **falsifizierbar**, wenn es eine Bewertung $\mathfrak{I}$ mit $\mathfrak{I}(\alpha) = \mathbf{0}$ gibt.

20.1.17 Aufgabe: Geben Sie jeweils ein Beispiel für eine Formel α, die

1. erfüllbar ist.
2. tautologisch ist.
3. widerspruchsvoll ist.
4. falsifizierbar ist.

Die Begriffe erfüllbar, widerspruchsvoll und tautologisch stehen in einem engen Zusammenhang, wie das folgende Ergebnis zeigt.

20.1.18 Bemerkung: Sei α eine aussagenlogische Formel. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent.

(a) Die Formel α ist widerspruchsvoll.

(b) Die Formel α ist nicht erfüllbar.

(c) Die Formel $\neg\alpha$ ist tautologisch.

Beweis:

(a) $\Rightarrow$ **(b)** Sei α widerspruchsvoll. Dann ist α für alle Bewertungen falsch, also $\mathfrak{I}(\alpha) = \mathbf{0}$. Es gibt also keine Bewertung, für die Formel wahr ist. Es folgt, dass α nicht erfüllbar ist.

(b) $\Rightarrow$ **(c)** Sei α nicht erfüllbar. Für alle Bewertungen gilt $\mathfrak{I}(\alpha) = \mathbf{0}$. Es folgt $\mathfrak{I}(\neg\alpha) = \mathbf{1}$ für alle Bewertungen. Somit ist $\neg\alpha$ tautologisch.

(c) $\Rightarrow$ **(a)** Sei $\neg\alpha$ tautologisch.Dann gilt für jede Bewertung $\mathfrak{I}(\neg\alpha) = \mathbf{1}$, also $\mathfrak{I}(\alpha) = \mathbf{0}$. Es folgt, dass α widerspruchsvoll ist.

□

Zu entscheiden, ob eine Formel erfüllbar ist, ist in der Regel eine schwierige Aufgabe. Eine Formel mit n Atomen hat insgesamt 2^n Bewertungen. Wir könnten beispielsweise mit Hilfe von Wahrheitstafeln systematisch alle 2^n Bewertungen überprüfen. Das ist selbst mit dem schnellsten Computer für große n ein hoffnungsloses Unterfangen. Es sind keine schnellen Verfahren bekannt, und man vermutet, dass es auch keine schnellen Verfahren für das so genannte Erfüllbarkeitsproblem gibt. Dieses Problem ist die Aufgabe, für eine beliebige Formel zu entscheiden, ob es Bewertungen der Atome so gibt, dass die Formel wahr ist.

In der folgen Definition legen wir fest, was es bedeuten soll, dass eine logische Formel semantisch aus einer anderen folgt.

20.1.19 Definition: Seien α und β aussagenlogische Formeln. Wir sagen, dass β eine **semantische Folgerung** aus α ist (**semantisch aus** α **folgt**), wenn für jede Bewertung $\mathfrak{I}$, für die α wahr ist, auch β wahr ist.

Mit anderen Worten: Falls $\mathfrak{I}(\alpha) = \mathbf{1}$, so muss auch $\mathfrak{I}(\beta) = \mathbf{1}$ gelten.

20.1.20 Beispiel: Sei $\alpha = (A \vee B) \wedge (\neg A \vee B)$, und sei $\beta = B$. Die Wahrheitstafel von α ist

A	B	$A \vee B$	$\neg A \vee B$	α
1	**1**	**1**	**1**	**1**
1	**0**	**1**	**0**	**0**
0	**1**	**1**	**1**	**1**
0	**0**	**0**	**1**	**0**

Falls $\mathfrak{I}(\alpha) = \mathbf{1}$, so gilt $\mathfrak{I}(\beta) = \mathbf{1}$. Somit ist β eine semantische Folgerung aus α.

20.1.21 Notation: Wenn β eine semantische Folgerung aus α ist, so schreiben wir $\alpha \models \beta$. Ist α tautologisch, also immer wahr, so schreiben wir $\models \alpha$. Seien $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ Formeln. An Stelle von $\alpha_1 \wedge \cdots \wedge \alpha_n \models \alpha$ schreiben wir $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \models \alpha$. Für eine Menge F von Formeln sei α_F die Konjunktion der Formeln in F. An Stelle von $\alpha_F \models \alpha$ ist auch $F \models \alpha$ gebräuchlich.

Die folgende Bemerkung fasst einige Zusammenhänge zwischen semantischen Folgerungen und tautologischen beziehungsweise widerspruchsvollen Formeln zusammen.

20.1.22 Bemerkung: Seien α und β aussagenlogische Formeln. Dann gilt:

1. Genau dann gilt $\alpha \models \beta$, wenn $\alpha \to \beta$ tautologisch ist.
2. Genau dann gilt $\alpha \models \beta$, wenn $\alpha \wedge \neg\beta$ widerspruchsvoll ist.
3. Genau dann ist α widerspruchsvoll, wenn für alle β gilt: $\alpha \models \beta$.
4. Genau dann ist α widerspruchsvoll, wenn es eine aussagenlogische Formel π mit $\alpha \models (\pi \wedge \neg\pi)$ gibt.

Beweis:

1. Die Wahrheitstafel von $\alpha \to \beta$ ist

α	β	$\alpha \to \beta$
0	**0**	**1**
0	**1**	**1**
1	**0**	**0**
1	**1**	**1**

.

Genau dann ist $\alpha \to \beta$ tautologisch, wenn $\mathfrak{I}(\alpha \to \beta) = \mathbf{1}$ für alle Bewertungen ist. Dies ist äquivalent dazu, dass es keine Bewertung mit $\mathfrak{I}(\alpha) = \mathbf{1}$ und $\mathfrak{I}(\beta) = \mathbf{0}$ gibt, denn nur dann wäre $\mathfrak{I}(\alpha \to \beta) = \mathbf{0}$. Das ist aber gerade zu $\alpha \models \beta$ äquivalent.

2. Die Wahrheitstafel von $\alpha \wedge \neg\beta$ ist

α	β	$\alpha \wedge \neg\beta$
0	**0**	**0**
0	**1**	**0**
1	**0**	**1**
1	**1**	**0**

.

   Genau dann ist $\alpha \wedge \neg\beta$ widerspruchsvoll, wenn $\mathfrak{I}(\alpha \wedge \neg\beta) = \mathbf{0}$ für alle Bewertungen ist. Das ist äquivalent dazu, dass es keine Bewertung mit $\mathfrak{I}(\alpha) = \mathbf{1}$ und $\mathfrak{I}(\beta) = \mathbf{0}$ gibt. Das wiederum ist zu $\alpha \models \beta$ äquivalent.

3. Genau dann gilt $\alpha \models \beta$ für alle β, wenn $\mathfrak{I}(\alpha \to \beta) = \mathbf{1}$ für alle β ist. Da β wahr oder falsch sein kann, ist dies äquivalent dazu, dass $\mathfrak{I}(\alpha) = \mathbf{0}$ für alle Bewertungen ist. Das bedeutet, dass α widerspruchsvoll ist.

4. Sei π eine aussagenlogische Formel. Es ist $\mathfrak{I}(\pi \wedge \neg\pi) = \mathbf{0}$.

   Genau dann gilt $\alpha \models (\pi \wedge \neg\pi)$, wenn $\mathfrak{I}(\alpha \to (\pi \wedge \neg\pi)) = \mathbf{1}$ für alle Bewertungen ist. Da $\mathfrak{I}(\pi \wedge \neg\pi) = \mathbf{0}$, ist dies äquivalent dazu, dass $\mathfrak{I}(\alpha) = \mathbf{0}$ für alle Bewertungen ist. Mit anderen Worten, α ist widerspruchsvoll.

□

Die zweite Aussage von 20.1.22 entspricht einem indirekten Beweis. Wenn wir zeigen wollen, dass β eine semantische Folgerung aus α ist, so genügt es, die Negation $\neg\beta$ zu α hinzuzunehmen und zu zeigen, dass $\alpha \wedge \neg\beta$ widerspruchsvoll ist. Die dritte Aussage von 20.1.22 besagt, dass aus einer widerspruchsvollen Formel alle erfüllbaren und alle widersprüchlichen Formeln gefolgert werden können.

Wir kommen nun zum Begriff der logischen Äquivalenz von Formeln, wie wir sie bereits in 1.2 kennen gelernt haben. Noch einmal die Definition:

20.1.23 Definition: Zwei aussagenlogische Formeln α und β heißen **logisch äqivalent**, in Zeichen $\alpha \approx \beta$, wenn $\mathfrak{I}(\alpha) = \mathfrak{I}(\beta)$ für alle Bewertungen gilt.

Die logische Äquivalenz hätten wir auch mit Hilfe der semantischen Folgerungen definieren können. Es gilt nämlich $\alpha \approx \beta$ genau dann, wenn $\alpha \models \beta$ und $\beta \models \alpha$ gelten.

Es gelten folgende Aussagen, die auch **Vererbungsregeln** genannt werden:

20.1.24 Bemerkung: (Vererbungsregeln)

Seien α, β, γ aussagenlogische Formeln. Dann gelten:

1. Wenn $\alpha \approx \beta$, so gilt $\neg\alpha \approx \neg\beta$.
2. Wenn $\alpha \approx \beta$, so gilt $\gamma \wedge \alpha \approx \gamma \wedge \beta$.
3. Wenn $\alpha \approx \beta$, so gilt $\gamma \vee \alpha \approx \gamma \vee \beta$.

Beweis:

1. Sei $\alpha \approx \beta$. Wenn $\mathfrak{I}(\alpha) = \mathfrak{I}(\beta) = \mathbf{1}$, so gilt $\mathfrak{I}(\neg\alpha) = \mathfrak{I}(\neg\beta) = \mathbf{0}$. Wenn $\mathfrak{I}(\alpha) = \mathfrak{I}(\beta) = \mathbf{0}$, so folgt $\mathfrak{I}(\neg\alpha) = \mathfrak{I}(\neg\beta) = \mathbf{1}$. Es gilt also $\mathfrak{I}(\neg\alpha) = \mathfrak{I}(\neg\beta)$ für alle Bewertungen, also $\neg\alpha \approx \neg\beta$.
2. Sei $\alpha \approx \beta$, und sei γ eine beliebige Formel. Wir müssen zeigen, dass die Wahrheitstafeln für $\gamma \wedge \alpha$ und $\gamma \wedge \beta$ gleich sind, sofern $\mathfrak{I}(\alpha) = \mathfrak{I}(\beta)$ ist. Da

α	γ	$\gamma \wedge \alpha$
0	**0**	**0**
0	**1**	**0**
1	**0**	**0**
1	**1**	**1**

und

β	γ	$\gamma \wedge \beta$
0	**0**	**0**
0	**1**	**0**
1	**0**	**0**
1	**1**	**1**

, folgt die Behauptung.

3. Der Beweis dieser Behauptung ist analog zu dem in 2.

□

Die folgende Proposition besagt, dass wir bei der induktiven Definition von aussagenlogischen Formeln in 20.1.1 auf die Junktoren $\wedge$, $\rightarrow$ und $\leftrightarrow$ hätten verzichten können. Diese lassen sich logisch äquivalent allein durch die Negation und die Disjunktion ausdrücken. Es gilt nämlich:

20.1.25 Proposition: (Junktor-Minimierung)

Seien α und β aussagenlogische Formeln. Dann gilt:

1. $\alpha \rightarrow \beta \approx \neg\alpha \vee \beta$.
2. $\alpha \wedge \beta \approx \neg(\neg\alpha \vee \neg\beta)$.
3. $\alpha \leftrightarrow \beta \approx (\alpha \rightarrow \beta) \wedge (\beta \rightarrow \alpha) \approx (\neg\alpha \vee \beta) \wedge (\neg\beta \vee \alpha) \approx \neg(\neg(\neg\alpha \vee \beta) \vee \neg(\neg\beta \vee \alpha))$.

Beweis: Für die Beweise stellen wir die Wahrheitstafeln auf.

1. Es sind

α	β	$\alpha \to \beta$
0	**0**	**1**
0	**1**	**1**
1	**0**	**0**
1	**1**	**1**

und

α	β	$\neg\alpha \vee \beta$
0	**0**	**1**
0	**1**	**1**
1	**0**	**0**
1	**1**	**1**

. Da die Wahrheitstafeln übereinstimmen, gilt die Behauptung.

2. Es sind

α	β	$\alpha \wedge \beta$
0	**0**	**0**
0	**1**	**0**
1	**0**	**0**
1	**1**	**1**

und

α	β	$\neg(\neg\alpha \vee \neg\beta)$
0	**0**	**0**
0	**1**	**0**
1	**0**	**0**
1	**1**	**1**

. Da die Wahrheitstafeln übereinstimmen, gilt die Behauptung.

3. Es sind

α	β	$\alpha \leftrightarrow \beta$
0	**0**	**1**
0	**1**	**0**
1	**0**	**0**
1	**1**	**1**

und

α	β	$(\alpha \to \beta) \wedge (\beta \to \alpha)$
0	**0**	**1**
0	**1**	**0**
1	**0**	**0**
1	**1**	**1**

. Da die Wahrheitstafeln übereinstimmen, gilt die erste Äquivalenz. Die anderen Äquivalenzen folgen, indem wir 1. und 2. anwenden.

□

Logische Äquivalenzen werden dazu verwendet, um Formeln zu vereinfachen oder in eine leichter lesbare oder besser verarbeitbare Form zu bringen. Die folgende Sammlung von Umformungsgesetzen gibt eine Übersicht über die gebräuchlichsten logischen Äquivalenzen.

20.1.26 Proposition: (Äquivalenzregeln)

Seien α, β und γ aussagenlogische Formeln. Dann gelten:

1. $\neg\neg\alpha \approx \alpha$. (Diese Regel wird **Negationsregel** genannt)

2. $\alpha \vee \alpha \approx \alpha$ und $\alpha \wedge \alpha \approx \alpha$. (Diese Regeln werden **Idempotenzregeln** genannt.)

3. $\alpha \wedge \beta \approx \beta \wedge \alpha$ und $\alpha \vee \beta \approx \beta \vee \alpha$. (Diese Regeln werden **Kommutativgesetze** genannt.)

4. $(\alpha \vee \beta) \vee \gamma \approx \alpha \vee (\beta \vee \gamma)$ und $(\alpha \wedge \beta) \wedge \gamma \approx \alpha \wedge (\beta \wedge \gamma)$. (Diese Regeln werden **Assoziativgesetze** genannt.)

5. $(\alpha \wedge \beta) \vee \gamma \approx (\alpha \vee \gamma) \wedge (\beta \vee \gamma)$ und $(\alpha \vee \beta) \wedge \gamma \approx (\alpha \wedge \gamma) \vee (\beta \wedge \gamma)$. (Diese Regeln werden **Distributivgesetze** genannt.)
6. $\neg(\alpha \wedge \beta) \approx \neg\alpha \vee \neg\beta$ und $\neg(\alpha \vee \beta) \approx \neg\alpha \wedge \neg\beta$. (Diese Regeln werden **Regeln von De Morgan** genannt).

Beweis: Die Beweise all dieser Aussagen werden dadurch geführt, dass man Wahrheitstafeln aufstellt und feststellt, dass sich für alle Bewertungen dieselben Wahrheitswerte ergeben. □

20.1.27 Aufgabe: Beweisen Sie die Regeln von De Morgan.

Als Folgerung aus 20.1.26 erhalten wir:

20.1.28 Korollar: Seien α, β und γ aussagenlogische Formeln. Dann gelten:

$$\alpha \vee (\beta \wedge \gamma) \approx (\alpha \vee \beta) \wedge (\alpha \vee \gamma) \text{ und } \alpha \wedge (\beta \vee \gamma) \approx (\alpha \wedge \beta) \vee (\alpha \wedge \gamma).$$

Beweis: Mit dem Kommutativgesetz gilt $\alpha \vee (\beta \wedge \gamma) \approx (\beta \wedge \gamma) \vee \alpha$. Mit dem Distributivgesetz gilt $(\beta \wedge \gamma) \vee \alpha \approx (\beta \vee \alpha) \wedge (\gamma \vee \alpha)$. Wenden wir das Kommutativgesetz nun auf die Formeln in den Klammern an, so erhalten wir $(\beta \vee \alpha) \wedge (\gamma \vee \alpha) \approx (\alpha \vee \beta) \wedge (\alpha \vee \gamma)$. Es folgt $\alpha \vee (\beta \wedge \gamma) \approx (\alpha \vee \beta) \wedge (\alpha \vee \gamma)$. Die zweite Formel wird analog bewiesen. □

In der Algebra gilt das Distributivgesetz $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$. In der Logik gilt das entsprechende Gesetz für die Konjunktion und die Disjunktion, nämlich $\alpha \wedge (\beta \vee \gamma) \approx (\alpha \wedge \beta) \vee (\alpha \wedge \gamma)$. In der Logik gilt aber auch das Distributivgesetz für die Disjunktion und die Konjunktion, also $\alpha \vee (\beta \wedge \gamma) \approx (\alpha \vee \beta) \wedge (\alpha \vee \gamma)$. In der Algebra gilt Entsprechendes nicht, es ist $a + (bc) \neq (a + b)(a + c)$.

Die Wahrheitswerte **0** und **1** sind in der Regel nicht Bestandteil aussagenlogischer Formeln. Es gibt aber Anwendungen, in denen Wahrheitswerte als Bestandteile von Formeln zugelassen werden. Dazu führt man folgende Vereinbarungen ein:

20.1.29 Vereinbarung: Es gelten $\mathfrak{I}(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ und $\mathfrak{I}(\mathbf{1}) = \mathbf{1}$, und weiter vereinbaren wir $\alpha \wedge \mathbf{0} \approx \mathbf{0}$, $\alpha \vee \mathbf{0} \approx \alpha$, $\alpha \wedge \mathbf{1} \approx \alpha$, $\alpha \vee \mathbf{1} \approx \mathbf{1}$, $\alpha \wedge \neg\alpha \approx \mathbf{0}$ und $\alpha \vee \neg\alpha \approx \mathbf{1}$.

20.1.3 Normalformen

Normalformen von aussagenlogischen Formeln spielen eine wichtige Rolle in Anwendungsgebieten der Logik. Fast alle Verfahren, die Formeln auf Erfüllbarkeit prüfen, oder Formeln, die in der Schaltungstechnik verwendet werden, verlangen, dass Formeln in bestimmten Aufbau haben. Diese Normalformen werden wir in diesem Abschnitt vorstellen und zeigen, wie Formeln in logisch äquivalente Normalformen überführt werden können.

Vorweg: Wir haben in 20.1.25 gesehen, dass die Junktoren Implikation und Äquivalenz mit Hilfe der Junktoren Konjunktion und Disjunktion ausgedrückt werden können. Wir werden daher im Folgenden annehmen, dass alle Formeln keine Implikationen oder Äquivalenzen beinhalten.

Negationsnormalform

Wir beginnen mit der so genannten Negationsnormalform. Bei dieser wird verlangt, dass alle Negationszeichen direkt vor den Atomen stehen. Das bedeutet also, dass Negationszeichen nicht vor Klammern stehen dürfen, und dass keine mehrfachen Negationen, etwa $\neg\neg A$, auftreten dürfen. Formal ausgedrückt:

20.1.30 Definition: Sei α eine aussagenlogische Formel ohne $\rightarrow$ und ohne $\leftrightarrow$. Wir sagen, dass α in **Negationsnormalform** (NNF) ist, wenn jedes Negationszeichen direkt vor einem Atom steht.

Jede Formel ohne Implikationen oder Äquivalenzen ist logisch äquivalent zu einer Formeln in NNF. Um eine Formel in NNF zu überführen, benutzen wir die Äquivalenzregeln 20.1.26. Wir ersetzen jedes Vorkommen von $\neg\neg\alpha$ durch α (Negationsregel). Weiter ersetzen wir $\neg(\alpha \vee \beta)$ durch $\neg\alpha \wedge \neg\beta$ (Gesetz von De Morgan) und $\neg(\alpha \wedge \beta)$ durch $\neg\alpha \vee \neg\beta$ (Gesetz von De Morgan). Diese Ersetzungen werden solange gemacht, bis es nicht mehr geht. Wenn keine Ersetzung mehr gemacht werden kann, dann kommt die Negation in der Formel nur noch unmittelbar vor den Atomen vor.

20.1.31 Beispiel: Wir berechnen eine NNF von $\neg((A \vee B) \wedge (\neg C \vee D))$. Es gilt

$$\begin{array}{rcll}
\neg((A \vee B) \wedge (\neg C \vee D)) & \approx & \neg(A \vee B) \vee \neg(\neg C \vee D) & \text{De Morgan} \\
& \approx & (\neg A \wedge \neg B) \vee \neg(\neg C \vee D) & \text{De Morgan} \\
& \approx & (\neg A \wedge \neg B) \vee (\neg\neg C \wedge \neg D) & \text{De Morgan} \\
& \approx & (\neg A \wedge \neg B) \vee (C \wedge \neg D) & \text{Negationsregel.}
\end{array}$$

20.1.32 Aufgabe: Bestimmen Sie eine NNF von $\neg(\neg A \wedge \neg(A \vee \neg(B \vee A)))$.

Die NNF einer Formel ist nicht eindeutig. Beispielsweise sind die beiden Formeln $(\neg A \vee B) \wedge (\neg B \vee A)$ und $(A \wedge B) \vee (\neg A \wedge \neg B)$ in NNF und beide logisch äquivalent zu $A \leftrightarrow B$.

Konjunktive Normalform

Wir beginnen mit einer Notation, die es uns erlaubt, aussagenlogische Formeln kompakter zu schreiben.

20.1.33 Notation: Seien $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ aussagenlogische Formeln.

1. Wir bezeichnen mit $\bigwedge\limits_{i=1}^{n} \alpha_i$ die Formel $\bigwedge\limits_{i=1}^{n} \alpha_i = \alpha_1 \wedge \cdots \wedge \alpha_n$.
2. Wir bezeichnen mit $\bigvee\limits_{i=1}^{n} \alpha_i$ die Formel $\bigvee\limits_{i=1}^{n} \alpha_i = \alpha_1 \vee \cdots \vee \alpha_n$.

Ausgesprochen werden $\bigwedge\limits_{i=1}^{n} \alpha_i$ und $\bigvee\limits_{i=1}^{n} \alpha_i$ als „Konjunktion über α_1 bis α_n" beziehungsweise „Disjunktion über α_1 bis α_n".

20.1.34 Definition: Eine Formel der Form $\alpha = \bigvee\limits_{i=1}^{n} \alpha_i$ wird **Klausel** genannt, wenn alle α_i, $1 \leq i \leq n$, Literale, also Atome oder negierte Atome sind (vergleiche 20.1.7). Sind alle Literale einer Klausel negativ, so spricht man von einer **negativen Klausel**, sind alle Literale positiv, so wird α eine **positive Klausel** genannt. Eine Klausel, die genau k Literale enthält, bezeichnen wir als k-Klausel.

Beispiele für Klauseln sind $(A \vee \neg B \vee D)$ oder $\neg A$ oder C. Eine Implikation der Form $\bigwedge\limits_{i=1}^{n} A_i \to B$, wie sie häufig vorkommt, da sie für die Aussage „Wenn A_1 und A_2 und ... und A_n dann B" steht, entspricht nach Ersetzen des Implikationspfeils der Klausel $(\neg A_1 \vee \cdots \vee \neg A_n \vee B)$, denn es gilt

$$(A_1 \wedge \cdots \wedge A_n \to B) \approx (\neg(A_1 \wedge \cdots \wedge A_n) \vee B \approx (\neg A_1 \vee \cdots \vee \neg A_n \vee B).$$

Bei diesen Umformungen haben wir 20.1.25 und 20.1.26 benutzt.

Kommen wir nun zur Definition der konjunktiven Normalform:

20.1.35 Definition: Eine Formel α ist in **konjunktiver Normalform** (KNF), wenn α eine Konjunktion von (einer oder mehreren) Klauseln ist.

Eine Formel ohne Implikationspfeile oder Äquivalenzen kann in KNF umgewandelt werden, indem wir sie zunächst in NNF überführen und dann konsequent die Distributivgesetze 20.1.26 und 20.1.28 anwenden: $\alpha \vee (\beta \wedge \gamma)$ wird ersetzt durch $(\alpha \vee \beta) \wedge (\alpha \vee \gamma)$ und $(\beta \wedge \gamma) \vee \alpha$ wird ersetzt durch $(\beta \vee \alpha) \wedge (\gamma \vee \alpha)$.

20.1.36 Beispiel: Gegeben sei die Formel $\alpha = \neg(A \wedge (\neg B \vee \neg(\neg C \vee E) \vee \neg A))$. Dann gilt

$$
\begin{array}{lcll}
\alpha & \approx & \neg A \vee (B \wedge (\neg C \vee E) \wedge A) & \text{Negationsnormalform} \\
 & \approx & (\neg A \vee B) \wedge (\neg A \vee ((\neg C \vee E) \wedge A)) & \text{Distributivgesetz} \\
 & \approx & (\neg A \vee B) \wedge (\neg A \vee (\neg C \vee E)) \wedge (\neg A \vee A) & \text{Distributivgesetz} \\
 & \approx & (\neg A \vee B) \wedge (\neg A \vee \neg C \vee E) \wedge (\neg A \vee A) & \text{Klammern.}
\end{array}
$$

20.1.37 Aufgabe: Berechnen Sie eine konjunktive Normalform von $\neg((A \vee B) \wedge (C \to D))$.

Fast alle Verfahren, die eine Formel auf Erfüllbarkeit überprüfen, verlangen, dass die Eingabe in konjunktiver Normalform gegeben ist.

Disjunktive Normalform

Das Analogon zu einer Klausel (Disjunktion von Literalen) ist ein Monom (Konjunktion von Literalen), das wir jetzt formal definieren wollen.

20.1.38 Definition: Eine Formel der Form $\alpha = \bigwedge_{i=1}^{n} \alpha_i$ wird als **Monom** bezeichnet, falls alle α_i, $1 \leq i \leq n$, Literale sind. Eine Konjunktion, die genau k Literale enthält, wird k-Monom genannt.

Beispiele für Monome sind $(A \wedge \neg B \wedge D)$ oder $\neg A$ oder C.

Wir definieren nun disjunktive Normalformen:

20.1.39 Definition: Eine Formel α ist in **disjunktiver Normalform** (DNF), wenn α eine Disjunktion von (einem oder mehreren) Monomen ist.

Eine Formel ohne Implikationspfeile oder Äquivalenzen kann in DNF umgewandelt werden, indem wir sie zunächst in NNF überführen und dann konsequent die Distributivgesetze 20.1.26 und 20.1.28 anwenden: $\alpha \wedge (\beta \vee \gamma)$ wird ersetzt durch $(\alpha \wedge \beta) \vee (\alpha \wedge \gamma)$ und $(\beta \vee \gamma) \wedge \alpha$ wird ersetzt durch $(\beta \wedge \alpha) \vee (\gamma \wedge \alpha)$.

20.1.40 Beispiel: Gegeben sei die Formel $\alpha = \neg(A \wedge (\neg B \vee \neg(\neg C \vee E) \vee \neg A))$. In 20.1.36 haben wir eine KNF dieser Formel berechnet, jetzt bestimmen wir eine

DNF von α. Es gilt

$$\begin{array}{rcll} \alpha & \approx & \neg A \vee (B \wedge (\neg C \vee E) \wedge A) & \text{Negationsnormalform} \\ & \approx & \neg A \vee ((B \wedge \neg C) \vee (B \wedge E)) \wedge A & \text{Distributivgesetz} \\ & \approx & \neg A \vee ((B \wedge \neg C) \wedge A) \vee ((B \wedge E) \wedge A) & \text{Distributivgesetz} \\ & \approx & \neg A \vee (B \wedge \neg C \wedge A) \vee (B \wedge E \wedge A) & \text{Klammern.} \end{array}$$

20.1.41 Aufgabe: Berechnen Sie eine DNF von $\alpha = \neg((A \vee B) \rightarrow (\neg C \wedge D))$.

20.1.4 Formale Beweise

Wenn man zeigen will, dass eine Formel aus Annahmen folgt, dann tut man das in einem Beweis. Ein Beweis besteht aus einer Folge von kleinen Schritten, welche die Behauptung aus den Voraussetzungen herleiten. In der Logik gibt es verschiedene Beweissysteme (genannt **Logikkalküle**, es heißt übrigens „der Kalkül“), und wir werden in den folgenden Abschnitten einen davon vorstellen.

Gültige Argumente

Ein logischer Schluss kann symbolisch durch $\alpha_1 \wedge \cdots \wedge \alpha_n \rightarrow \beta$ ausgedrückt werden. Dabei sind $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ die **Prämissen** oder Voraussetzungen, und β ist die **Konklusion**. Wann würde man eine solche Formel ein gültiges Argument nennen? Eine informelle Antwort ist, dass die Formel $\alpha_1 \wedge \cdots \wedge \alpha_n \rightarrow \beta$ wahr sein sollte, sofern $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ alle wahr sind. Natürlich ist diese Implikation auch wahr, wenn eine der Prämissen falsch ist, aber bei einem gültigen Argument interessieren wir uns in der Regel nur dafür, was passiert, wenn alle Annahmen richtig sind. Weiter würden wir vermutlich für ein gültiges Argument verlangen, dass die Konklusion irgendwas mit den Prämissen zu tun hat. Betrachten wir zum Beispiel die „Argumentation“: Auf Dienstag folgt Mittwoch und Hunde sind Tiere, also hat der Tag 24 Stunden. Obwohl alle drei Aussagen wahr sind, und obwohl der Wahrheitswert der Implikation **1** ist, würde wohl niemand von uns das als ein gültiges Argument ansehen. Die Konklusion „Der Tag hat 24 Stunden“ ist zufällig richtig, hat aber rein gar nichts mit den Prämissen zu tun.

Ein gültiges Argument sollte wahr sein, basierend auf der internen Struktur des Arguments. Wir definieren daher:

20.1.42 Definition: Eine Formel der Form $\alpha_1 \wedge \cdots \wedge \alpha_n \rightarrow \beta$ heißt **gültiges Argument**, wenn sie eine Tautologie ist.

20.1.43 Beispiel: Die Formel $\alpha \wedge (\alpha \to \beta) \to \beta$ ist ein gültiges Argument. Sie ist von der Bauart $\alpha_1 \wedge \alpha_2 \to \gamma$ mit $\alpha_1 = \alpha$, $\alpha_2 = (\alpha \to \beta)$ und $\gamma = \beta$. Die Wahrheitstafel der Formel ist:

α	β	$\alpha \to \beta$	$\alpha \wedge (\alpha \to \beta)$	$\alpha \wedge (\alpha \to \beta) \to \beta$
0	**0**	**1**	**0**	**1**
0	**1**	**1**	**0**	**1**
1	**0**	**0**	**0**	**1**
1	**1**	**1**	**1**	**1**

Somit ist die Formel tautologisch, also ein gültiges Argument.

20.1.44 Aufgabe: Beweisen Sie, dass $(\alpha \to \beta) \wedge \neg\beta \to \neg\alpha$ ein gültiges Argument ist.

Um zu überprüfen, ob eine Formel $\alpha_1 \wedge \cdots \wedge \alpha_n \to \beta$ ein gültiges Argument ist, könnten wir Wahrheitstafeln aufstellen und überprüfen, ob die Formel tautologisch ist. Wir werden aber anders vorgehen. Wir werden so genannte Ableitungsregeln aufstellen, die es erlauben, Formeln zu manipulieren, sodass der Wahrheitsgehalt erhalten bleibt. Wir beginnen mit den Prämissen $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$, von denen wir annehmen, dass sie wahr sind, wenden dann Ableitungsregeln an, die neue Formeln erzeugen, und enden schließlich mit der Konklusion β. Das geschieht in einer so genannten Beweisfolge:

20.1.45 Definition: Eine **Beweisfolge** ist eine Folge $(\gamma_1, \ldots, \gamma_s)$ von Formeln, wobei für jede Formel γ_i, $1 \leq i \leq s$, in der Folge gilt: γ_i ist entweder eine Prämisse, oder γ_i ist das Ergebnis einer Ableitungsregel des Beweissystems, die auf Formeln in $\{\gamma_1, \ldots, \gamma_j\}$ mit $j < i$ angewendet wurde.

Um formal zu beweisen, dass β aus $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ mit Hilfe eines gültigen Arguments geschlossen werden kann, müssen wir eine Beweisfolge aufstellen, die folgende Form hat:

α_1	Prämisse
α_2	Prämisse
$\vdots$	$\vdots$
α_n	Prämisse
$Formel_1$	Ergebnis einer Ableitungsregel, die auf bereits vorhandene Formeln angewendet wurde
$Formel_2$	Ergebnis einer Ableitungsregel, die auf bereits vorhandene Formeln angewendet wurde
$\vdots$	$\vdots$
$Formel_t$	Ergebnis einer Ableitungsregel, die auf bereits vorhandene Formeln angewendet wurde
β	Ergebnis einer Ableitungsregel, die auf bereits vorhandene Formeln angewendet wurde

Wie die Ableitungsregeln konkret aussehen, wird Inhalt des folgenden Abschnitts sein.

Ableitungsregeln der Aussagenlogik

Die Ableitungsregeln in einem Beweissystem (Logikkalkül) müssen sorgfältig gewählt werden. Zum einen dürfen sie nicht zu mächtig sein. Die Gefahr ist dann, dass sie möglicherweise nicht mehr wahrheitserhaltend sind, und wir plötzlich aus den Prämissen Unsinn schließen können. Zum anderen dürfen sie auch nicht zu schwach sein, denn dann gibt es möglicherweise gültige Argumente, die wir mit Hilfe der Ableitungsregeln nicht herleiten können. Darüber hinaus sollten wir auch nicht zu viele Ableitungsregeln aufstellen, um das Beweissystem übersichtlich zu gestalten.

Die Ableitungsregeln der Aussagenlogik fallen in zwei Kategorien: Äquivalenzregeln und Schlussregeln. Die Äquivalenzregeln erlauben, Formeln, auch Teilformeln einer Formel, durch logisch äquivalente Formeln zu ersetzen, und die Schlussregeln erlauben, aus gegebenen Formeln neue Formeln herzuleiten. Wir beginnen mit den Äquivalenzregeln:

20.1.46 Äquivalenzregeln: Eine Formel aus der linken Spalte der folgenden Tabelle darf durch die logisch äquivalente Formel in der mittleren Spalte ersetzt werden und eine Formel aus der mittleren Spalte durch die entsprechende der linken Spalte.

Formel	äquivalent zu	Name/Abkürzung der Regel
$\alpha \vee \beta$ $\alpha \wedge \beta$	$\beta \vee \alpha$ $\beta \wedge \alpha$	Kommutativgesetz/com
$(\alpha \vee \beta) \vee \gamma$ $(\alpha \wedge \beta) \wedge \gamma$	$\alpha \vee (\beta \vee \gamma)$ $\alpha \wedge (\beta \wedge \gamma)$	Assoziativgesetz/ass
$\neg(\alpha \vee \beta)$ $\neg(\alpha \wedge \beta$	$\neg\alpha \wedge \neg\beta$ $\neg\alpha \vee \neg\beta$	Gesetz von De Morgan/De Morgan
$\alpha \rightarrow \beta$	$\neg\alpha \vee \beta$	Implikation/imp
α	$\neg\neg\alpha$	Doppelte Negation/dn

Dass die Formeln in 20.1.46 äquivalent sind, haben wir bereits früher gesehen.

20.1.47 Beispiel: Angenommen, eine Prämisse eines aussagenlogischen Arguments ist $(\neg\alpha \vee \neg\beta) \vee \gamma$.

Eine Beweisfolge für das Argument könnte folgendermaßen beginnen:

1.	$(\neg\alpha \vee \neg\beta) \vee \gamma$	Prämisse
2.	$\neg(\alpha \wedge \beta) \vee \gamma$	1, De Morgan
3.	$(\alpha \wedge \beta) \rightarrow \gamma$	2, imp

Schritt 1 ist eine Prämisse, Schritt 2 wird aus Schritt 1 hergeleitet durch Anwendung eines Gesetzes von De Morgan. Schritt 3 wird aus Schritt 2 dadurch abgeleitet, dass wir die Implikationsregel anwenden. Dabei ersetzen wir $\neg(\alpha \wedge \beta) \vee \gamma$ (entsprechend der mittleren Spalte in der Tabelle oben) durch die logisch äquivalente Formel (in der linken Spalte der Tabelle).

Kommen wir nun zu der zweiten Kategorie der Ableitungsregeln, den Schlussregeln.

20.1.48 Schlussregeln: Wenn wir eine oder mehrere Formeln der Form, wie sie in der linken Spalte der folgenden Tabelle auftreten, bereits in unserer Beweisfolge haben, dann können wir die Formel in der mittleren Spalte zu der Beweisfolge hinzufügen.

Aus	ableitbar	Name/Abkürzung der Regel
α und $\alpha \rightarrow \beta$	β	Modus ponens/mp
$\alpha \rightarrow \beta$ und $\neg\beta$	$\neg\alpha$	Modus tollens/mt
α und β	$\alpha \wedge \beta$	Konjunktion/con
$\alpha \wedge \beta$	α, β	Vereinfachung/simp
α	$\alpha \vee \beta$	Ausdehnung/add

Anders als bei den Äquivalenzregeln funktionieren die Schlussregeln nur in einer Richtung. Von Formeln der linken Spalte können wir auf Formeln der mittleren Spalte schließen aber nicht von Formeln der mittleren Spalte auf Formeln in der linken.

Bevor wir uns Beispielen zuwenden, diskutieren wir kurz die Schlussregeln.

Die Regel Modus ponens besagt, dass die Implikation die Wahrheit erhält. Wenn α und $\alpha \to \beta$ wahr sind, dann auch β. In 20.1.43 hatten wir uns bereits davon überzeugt, dass $\alpha \wedge (\alpha \to \beta) \to \beta$ ein gültiges Argument ist. Der vollständige lateinische Name der Regel, Modus ponendo ponens, „Schlussfigur (modus), die durch das Setzen (ponendo) einer Aussage eine andere Aussage setzt (ponens)", lässt sich so erklären, dass bei gegebener erster Prämisse, „Wenn α, dann β", durch das „Setzen" (Annehmen) der zweiten Prämisse, α, die aus beiden folgende Formel β „gesetzt" (hergeleitet) wird.

Die Regel Modus tollens verlangt, dass wenn $\alpha \to \beta$ und $\neg\beta$ wahr sind, dann auch $\neg\alpha$ wahr ist. In 20.1.44 haben Sie gezeigt, dass die Formel $(\alpha \to \beta) \wedge \neg\beta \to \neg\alpha$ ein gültiges Argument ist. Der lateinische Name Modus tollendo tollens, „durch Aufheben aufhebende Schlussweise" erklärt sich daraus, es sich um eine Schlussfigur (modus) handelt, die bei gegebener erster Prämisse, $\alpha \to \beta$, durch das „Aufheben" (tollendo) der Formel β, also durch das Setzen ihrer Verneinung, $\neg\beta$, eine andere Formel, nämlich α, ebenfalls „aufhebt" (tollens), also zu seiner Verneinung, $\neg\alpha$, führt.

Die Regel Konjunktion (die Abkürzung con steht für conjunction) ist offensichtlich. Wenn wir α und β haben, können wir auf $\alpha \wedge \beta$ schließen. Offenbar ist $\alpha \wedge \beta \to \alpha \wedge \beta$ eine Tautologie, also ein gültiges Argument.

Die Regel Vereinfachung (die Abkürzung simp steht für simplification) besagt, dass wenn wir $\alpha \wedge \beta$ haben, auf α und auch auf β schließen dürfen. Die Formeln $\alpha \wedge \beta \to \alpha$ und $\alpha \wedge \beta \to \beta$ sind Tautologien, also gültige Argumente.

Die Regel Ausdehnung (die Abkürzung add steht für addition) besagt, dass wir zu einer wahren Prämisse α jede beliebige Formel β hinzu nehmen dürfen und mit $\alpha \vee \beta$ eine wahre Aussage bekommen. Die Formel $\alpha \to (\alpha \vee \beta)$ ist eine Tautologie.

20.1.49 Beispiel: Angenommen $\alpha \to (\beta \wedge \gamma)$ und α sind Prämissen eines Arguments. Eine Beweisfolge kann aus folgenden Schritten bestehen:

1.	$\alpha \to (\beta \wedge \gamma)$	Prämisse
2.	α	Prämisse
3.	$\beta \wedge \gamma$	1, 2, mp

Jetzt ein etwas komplexeres Beispiel, das einen kompletten formalen Beweis zeigt.

20.1.50 Beispiel: Wir werden die Formel

$$A \wedge (B \to C) \wedge ((A \wedge B) \to (D \vee \neg C)) \wedge B \to D$$

herleiten. Dazu müssen wir eine Beweisfolge aufstellen, die mit den Prämissen beginnt und die mit der Konklusion, D, endet. Es gibt vier Prämissen, und die ersten vier Schritte der Beweisfolge sind einfach. Wir müssen die Prämissen auflisten.

1.	A	Prämisse
2.	$B \to C$	Prämisse
3.	$(A \wedge B) \to (D \vee \neg C)$	Prämisse
4.	B	Prämisse

Unser Ziel ist die Konklusion, also D. Aber ohne dahin zu schielen, können wir bereits aus den Prämissen bereits einige Formeln ableiten, die vielleicht später nützlich werden können.

5.	C	2, 4, mp
6.	$A \wedge B$	1, 4, con
7.	$D \vee \neg C$	3, 6, mp

An dieser Stelle taucht D auf, allerdings noch verknüpft mit $\vee\neg C$. Wir müssen versuchen, D zu isolieren. Die Formel in Schritt 7 können wir in eine Implikation umformen.

8.	$\neg C \vee D$	7, com
9.	$C \to D$	8, imp

Jetzt sind wir mit Modus ponens aber am Ziel:

10.	D	5, 9, mp

20.1.51 Aufgabe: Begründen Sie bei dem folgenden formalen Beweis der Formel

$$(A \to (B \vee C)) \wedge \neg B \wedge \neg C \to \neg A$$

jeden Beweisschritt.

1. $A \to (B \vee C)$
2. $\neg B$
3. $\neg C$
4. $\neg B \wedge \neg C$
5. $\neg(B \vee C)$
6. $\neg A$

20.1.52 Aufgabe: Leiten Sie mit einem formalen Beweis folgende Formel her:

$$(A \vee \neg B \to C) \wedge (C \to D) \wedge A \to D$$

Korrektheit und Vollständigkeit

Das Beweissystem, das wir in den vorhergehenden Abschnitten beschrieben haben, führt nicht zu Widersprüchen. Jedes Argument, das wir formal beweisen können, ist eine Tautologie, denn die einzelnen Ableitungsregeln sind tautologisch. Man drückt diese Tatsache dadurch aus, dass man sagt, dass das Beweissystem **korrekt** ist.

Komplizierter ist die Frage, ob wir jede Implikation, die tautologisch ist, auch mit Hilfe unserer Ableitungsregeln formal beweisen können. Wenn man diese Frage bejahen kann, würde man das Beweissystem **vollständig** nennen. Dies ist der Fall, aber das ist alles andere als offensichtlich. Wir verzichten daher auf einen Beweis, und bitten Sie, den folgenden Satz einfach zu glauben.

20.1.53 Satz: Das auf den Äquivalenz- und Schlussregeln in 20.1.46 und 20.1.48 basierende Beweissystem der Aussagenlogik ist korrekt und vollständig.

Dieser Satz besagt, dass die Ableitungsregeln richtig gewählt waren. Nicht zu stark um zu Widersprüchen zu führen und nicht zu schwach um alle Tautologien zu beweisen. Es gibt andere Logikkalküle, die andere (in der Regel mehr) Ableitungsregeln verwenden. Diese können wir mit unseren Ableitungsregeln herleiten. Sobald eine solche Regel bewiesen ist, können wir sie in Beweisfolgen verwenden, denn an Stelle der bewiesenen Regel können wir deren formale Herleitung in der Beweisfolge einfügen. Wir werden im Folgenden eine sehr nützliche Formel herleiten, die formale Beweise oft vereinfacht.

20.1.54 Proposition: (Deduktionsregel)

Seien α, β und γ logische Formeln. Dann sind die Formeln $\alpha \to (\beta \to \gamma)$ und $(\alpha \wedge \beta) \to \gamma$ äquivalent.

Beweis: Wir werden eine Reihe von Äquivalenzregeln (vergleiche 20.1.46) verwenden, um $\alpha \to (\beta \to \gamma)$ in $(\alpha \wedge \beta) \to \gamma$ umzuformen.

1.	$\alpha \to (\beta \to \gamma)$	Prämisse
2.	$\alpha \to (\neg\beta \vee \gamma)$	imp
3.	$\neg\alpha \vee (\neg\beta \vee \gamma)$	imp
4.	$(\neg\alpha \vee \neg\beta) \vee \gamma$	ass
5.	$\neg(\alpha \wedge \beta) \vee \gamma$	De Morgan
6.	$(\alpha \wedge \beta) \to \gamma$	imp

Da die Substitutionen in 20.1.46 in beiden Richtungen gültig sind, können wir aus

$(\alpha\wedge\beta) \to \gamma$ auch $\alpha \to (\beta \to \gamma)$ herleiten. Es folgt also $(\alpha\wedge\beta) \to \gamma \leftrightarrow \alpha \to (\beta \to \gamma)$, die Behauptung. $\square$

Nehmen wir an, wir möchten eine Formel $\alpha_1 \wedge \cdots \wedge \alpha_n \to (\beta \to \gamma)$ beweisen. Mit 20.1.54 können wir statt dessen die Formel $\alpha_1 \wedge \cdots \wedge \alpha_n \wedge \beta \to \gamma$ herleiten. Das hat den Vorteil, dass wir eine Prämisse – nämlich β – mehr zur Verfügung haben, die wir als Munition in unserem formalen Beweis abfeuern können.

Die Hinzunahme weiterer Formeln zu den Ableitungsregeln hat den Vorteil, dass sie Beweise vereinfachen oder verkürzen können. Sie hat allerdings den Nachteil, dass wir uns dann eine Reihe von Formeln mehr merken müssen.

Formale Beweise können wir nicht so mechanisch abarbeiten wie Wahrheitstafeln, aber die strengen Äquivalenz- und Schlussregeln liefern doch einen mehr oder weniger mechanischen Weg, Beweisfolgen zu konstruieren. Es gibt nur eine gewisse Anzahl erlaubter Regeln, die an jeder Stelle des Beweises angewendet werden können. Wenn eine Regel in eine Sackgasse führt, gehen wir zurück und probieren eine andere Regel. Weiter kann es mehr als eine richtige Beweisfolge geben. Trotzdem gibt es einige Tipps, welche Regeln vielversprechend sind.

20.1.55 Merkregel:

1. Modus ponens ist vermutlich die überzeugendste Schlussregel. Denken Sie möglichst oft daran, sie zu nutzen.
2. Formeln der Form $\neg(\alpha \wedge \beta)$ oder $\neg(\alpha \vee \beta)$ sind selten hilfreich in Beweisfolgen. Benutzen Sie die Gesetze von De Morgan, um sie durch $\neg\alpha \vee \neg\beta$ beziehungsweise $\neg\alpha \wedge \neg\beta$ zu ersetzen.
3. Formeln der Form $\alpha \vee \beta$ sind ebenfalls selten hilfreich in Beweisfolgen, denn sie implizieren weder α noch β. Benutzen Sie die doppelte Negation, um sie in $\neg\neg\alpha \vee \beta$ und dann mit der Implikationsregel in $\neg\alpha \to \beta$ zu überführen.
4. Wenn die Konklusion einer zu beweisenden Formel eine Implikation ist, wenn die Formel also von der Form $\alpha_1 \wedge \cdots \wedge \alpha_n \to (\beta \to \gamma)$ ist, sollten Sie daran denken, dass Sie statt dessen auch $\alpha_1 \wedge \cdots \wedge \alpha_n \wedge \beta \to \gamma$ herleiten können.

20.1.56 Aufgabe: Leiten Sie folgende Formeln her.

1. $(\alpha \to \beta) \wedge (\beta \to \gamma) \to (\alpha \to \gamma)$
2. $(\neg\alpha \vee \beta) \wedge (\beta \to \gamma) \to (\alpha \to \gamma)$
3. $(\alpha \to \beta) \wedge (\neg\gamma \vee \alpha) \wedge \gamma \to \beta$
4. $\alpha \wedge \neg\alpha \to \beta$

20.1.5 Aussagenlogische Modellierung

Die Aussagenlogik ist geeignet zur Repräsentation von statischem Wissen, das in Elementaraussagen zerlegt und mit Hilfe logischer Junktoren aufgebaut werden kann. Die Elementaraussagen dürfen dabei nur wahr oder falsch sein. Dynamische Systeme werden normalerweise nicht mit der Aussagenlogik modelliert. Dies trifft auch auf Wissen zu, das mehr als zwei Wahrheitswerte annehmen kann oder mit Unsicherheit behaftet ist.

Bei der Modellierung werden wir einzelnen Elementaraussagen Atome in Form von Großbuchstaben zuordnen. Für eine Übersetzung in Formeln müssen wir dann die passenden Junktoren verwenden. Wie einzelne Sätze der deutschen Sprache in Formeln übersetzt werden können, zeigt die folgende Zusammenstellung.

Die Aussage „Es regnet“ wird durch das Atom R ausgedrückt, für die Aussage „Die Straße ist nass“ wählen wir das Atom S.

Es regnet nicht	$\neg R$
Es regnet oder die Straße ist nass	$R \vee S$
Es regnet und die Straße ist nass	$R \wedge S$
Wenn es regnet, ist die Straße nass	$R \rightarrow S$
Genau dann, wenn es regnet, ist die Straße nass	$R \leftrightarrow S$
Die Straße ist nass genau dann, wenn es regnet	$S \leftrightarrow R$
Die Straße ist nass dann und nur dann, wenn es regnet	$S \leftrightarrow R$
Entweder ist die Straße nass oder es regnet	$(R \vee S) \wedge (\neg R \vee \neg S)$

Wir schließen mit einem Beispiel.

20.1.57 Beispiel: Nehmen wir an, Sie sind Geschworener in einem Prozess und die Verteidigerin argumentiert wie folgt.

„Wenn mein Mandant schuldig ist, dann war das Messer im Schrank. Das Messer war nicht im Schrank, oder Emma Peel sah das Messer. Wenn das Messer am 10. Oktober nicht dort war, konnte Emma Peel es nicht sehen. Wenn das Messer am 10. Oktober im Schrank war, dann war sowohl das Messer im Schrank also auch der Hammer im Stall. Aber wir alle wissen, das der Hammer nicht im Stall war. Daher, meine Damen und Herren, ist mein Mandant unschuldig.“

Hat die Verteidigerin Sie überzeugt?

Analysieren wir das Argument. Zunächst isolieren wir die Elementaraussagen und benennen sie durch Atome.

Der Mandant ist schuldig	A
Das Messer war im Schrank	B
Emma Peel sah das Messer	C
Das Messer war am 10. Oktober im Schrank	D
Der Hammer war im Stall	E

Die Verteidigerin versucht, uns folgende Formel als gültiges Argument zu verkaufen:

$$(A \to B) \wedge (\neg B \vee C) \wedge (\neg D \to \neg C) \wedge (D \to B \wedge E) \wedge (\neg E) \to \neg A.$$

Prüfen wir es nach.

1.	$A \to B$	Prämisse
2.	$\neg B \vee C$	Prämisse
3.	$\neg D \to \neg C$	Prämisse
4.	$D \to B \wedge E$	Prämisse
5.	$\neg E$	Prämisse
6.	$\neg B \vee \neg E$	5, add
7.	$\neg(B \wedge E)$	6, De Morgan
8.	$\neg D$	4, 7, mt
9.	$\neg C$	3, 8, mp
10.	$\neg B$	9,2
11.	$\neg A$	1,10, mt

Somit ist der Angeklagte unschuldig.

20.2 Prädikatenlogik

20.2.1 Einführung

In der Prädikatenlogik spricht man darüber, ob Prädikate (Eigenschaften) auf Objekte eines Universums zutreffen oder nicht, und ob Objekte gleich sind oder nicht. Daneben gibt es Funktionen auf dem Universum, die Objekten andere Objekte zuordnen. Welche Prädikate genau zur Verfügung stehen, was das Universum der Objekte ist, und welche Funktionen angewendet werden, wird vorher festgelegt und hängt vom Kontext ab. Weiter gibt es Variablen, die beliebige Objekte des Universums bezeichnen und Quantoren, die erlauben, Aussagen wie „für alle x gilt“ oder „es gibt ein x mit“ zu machen.

Um etwas in der Prädikatenlogik ausdrücken zu können, benötigen wir ein Vokabular, mit dem wir Aussagen und Sätze formulieren können. Dies führt zu dem Begriff prädikatenlogischer Formeln, deren korrekte Bildung mit Hilfe der Syntax festgelegt wird. Formeln enthalten Variablen, Konstantensymbole, Funktionssymbole, Prädikatssymbole und Quantoren. Bei der Festlegung der Syntax der Prädikatenlogik sind die Symbole für Konstanten, Funktionen und Prädikate völlig abstrakt. Erst in der Semantik werden sie konkretisiert. Dann wird ein Universum festgelegt, für die Funktionssymbole werden konkrete Funktionen eingesetzt und Objekte des Universums werden durch konkrete Prädikate in Beziehung gesetzt. Danach werden die Formeln interpretiert, das heißt, wir können Aussagen darüber machen, ob eine Formel in der durch die Konkretisierungen geschaffenen Welt wahr oder falsch ist.

Bevor wir uns der Syntax der Prädikatenlogik zuwenden noch einige Begriffe.

20.2.1 Definition: Seien M, $M_1, \ldots, M_n$ Mengen, und sei $n \in \mathbb{N}$.

1. Mit M^n bezeichnen wir die Menge

   $$M^n := \{(m_1, \ldots, m_n) \mid m_i \in M \text{ für alle } 1 \leq i \leq n\}.$$

   Ein Element in M^n wir ein n**-Tupel** genannt.

2. Mit $M_1 \times \cdots \times M_n$ bezeichnen wir die Menge

   $$M_1 \times \cdots \times M_n := \{(m_1, \ldots, m_n) \mid m_i \in M_i \text{ für alle } 1 \leq i \leq n\}.$$

3. Eine n**-stellige** Funktion auf M ist eine Abbildung $f : M^n \to M$.

4. Eine Teilmenge R von $M_1 \times \cdots \times M_n$ wird n**-stellige** Relation auf $M_1, \ldots, M_n$ genannt. Ist $(m_1, \ldots, m_n) \in R$ so schreiben wir $R(m_1, \ldots, m_n)$ und sagen, dass $m_1, \ldots, m_n$ **in Relation (Beziehung) stehen**.

Die Menge M^n ist ein Spezialfall der in 20.2.1 2. definierten Menge, denn es gilt $M_i = M$ für alle $1 \leq i \leq n$. In der Linearen Algebra hatten wir beispielsweise $\mathbb{K}^n$ als Menge der Spaltenvektoren bezeichnet, mit der Definition oben ist $\mathbb{K}^n$ aber die Menge der Zeilenvektoren. Da wir hier mit den den Elementen in M^n aber nichts weiter „machen“ werden, sie zum Beispiel nicht mit Matrizen multiplizieren werden, wird die inkonsistente Schreibweise hoffentlich nicht zur Verwirrung führen.

20.2.2 Beispiel: Sei M eine Menge, und sei $R_1 \subseteq M^2$ die 2-stellige Relation, die durch $R_1 = \{(a, a) \mid a \in M\}$ definiert wird. Dann steht jedes $a \in M$ bezüglich R nur zu sich selbst in Relation.

Sei $M = \mathbb{R}$, und sei R_2 die 2-stellige Relation, die durch $R_2 = \{(a, a+1) \mid a \in \mathbb{R}\}$ definiert ist. Dann stehen 1 und 2 in Relation, nicht aber 2 und 1, denn $(2, 1) \notin R_2$.

20.2.2 Syntax

Terme

Prädikatenlogische Formeln werden aus so genannten Termen aufgebaut, die wir jetzt definieren werden.

20.2.3 Definition: Sei V eine Menge von Variablen, K eine Menge von Konstantensymbolen und F eine Menge von Funktionssymbolen. Weiter seien $V \cap K = \emptyset$ und $V \cap F = \emptyset$ und $K \cap F = \emptyset$. **Terme** werden induktiv definiert durch die folgenden vier Schritte:

1. Jede Variable aus V ist ein Term.
2. Jedes Konstantensymbol aus K ist ein Term.
3. Sind $t_1, \ldots, t_n$ Terme, und ist f ein Funktionssymbol der Stelligkeit $n > 0$, so ist $f(t_1, \ldots, t_n)$ ein Term.
4. Terme werden nur mit den Schritten 1., 2. und 3. gebildet.

20.2.4 Beispiel: Seien $x_1, x_2, y \in V$, $a, b, c \in K$ und $f, g \in F$. Sei f ein 2-stelliges Funktionssymbol und g ein 3-stelliges Funktionssymbol. Dann sind x_1, $g(y, f(a, x_2), f(b, f(c, y)))$ und $f(g(x_1, x_2, y), c)$ Terme.

Konstanten bezeichnen wir in der Regel mit Kleinbuchstaben $a, b, c \ldots$ aus dem ersten Teil des Alphabets, Variablen mit Kleinbuchstaben x, y, z und Terme mit (in der Regel indizierten) Buchstaben t und s. Den Termen entsprechen in der Prädikatenlogik Objekte, über die Aussagen gemacht werden.

Prädikatenlogische Formeln

Seien $t_1, \ldots, t_n$ Terme. Wenn diese Terme in Beziehung zueinander stehen, drückt man dies durch $P(t_1, \ldots, t_n)$ aus und nennt P ein **n-stelliges Prädikat**. Ein Prädikat ist nicht anderes als eine n-stellige Relation auf der Menge der Terme (vergleiche 20.2.1).

Prädikate werden mit Hilfe der Junktoren $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$, wie wir sie bereits aus der Aussagenlogik kennen, und den Quantoren $\forall$ („für alle“ – Allquantor) und $\exists$

(„es gibt“ – Existenzquantor) zu prädikatenlogischen Formeln verknüpft.

20.2.5 Definition: Sei V eine Menge von Variablen, K eine Menge von Konstantensymbolen, F eine Menge von Funktionssymbolen und P eine Menge von Prädikatssymbolen. Der Durchschnitt von je zwei dieser Mengen sei leer. **Prädikatenlogische Formeln** werden induktiv definiert durch folgende Schritte:

1. Sind $t_1, \ldots, t_n$, $n > 0$, Terme, und ist P ein n-stelliges Prädikatssymbol, so ist $P(t_1, \ldots, t_n)$ eine Formel. Wir bezeichnen $P(t_1, \ldots, t_n)$ auch als **Primformel**.
2. Sind t_1 und t_2 Terme, so ist $t_1 = t_2$ eine Formel. Auch $t_1 = t_2$ ist eine **Primformel**.
3. Ist α eine Formel, so ist auch $(\neg\alpha)$ eine Formel.
4. Sind α und β Formeln, dann sind auch $(\alpha \wedge \beta)$ und $(\alpha \vee \beta)$ Formeln.
5. Sei x ein Variablensymbol, und sei α eine Formel. Dann sind auch $\forall x\alpha$ und $\exists x\alpha$ Formeln.
6. Formeln werden nur mit 1. bis 5. gebildet.

Sie vermissen in der Definition vielleicht die Junktoren $\rightarrow$ und $\leftrightarrow$. Beide Junktoren lassen sich aber problemlos verwenden. Wir legen einfach die Implikation $\alpha \rightarrow \beta$ als Abkürzung für $\neg\alpha \vee \beta$ und die Äquivalenz $\alpha \leftrightarrow \beta$ als Abkürzung für $(\alpha \rightarrow \beta) \wedge (\beta \rightarrow \alpha)$ fest. Vergleichen Sie auch 20.1.25.

20.2.6 Beispiel: Beispiele für Formeln sind:

1. $\forall x(P(x) \wedge Q(x)) \wedge \exists y(S(y) \wedge \forall zR(x, z))$
2. $\forall x(P(x) \vee \exists xQ(x))$ mit den Primformeln $P(x)$ und $Q(x)$.
3. $\forall xP(f(x, y, a), z) \wedge \exists yS(h(g(y)))$ mit Termen $g(y)$,$h(g(y))$ und $f(x, y, a)$.
4. $\forall x\exists y\forall z(R(x, y, z) \wedge R(x, f(f(z)), x))$
5. $\forall x(x = f(x) \vee \neg P(x, x))$ mit Termen x und $f(x)$.

Die Quantoren beziehen sich nur auf die Variablen. Wir sprechen daher von der Prädikatenlogik erster Stufe. In der Prädikatenlogik zweiter Stufe sind auch Funktions- und Prädikatsvariablen gestattet. Wir betrachten in dieser Kurseinheit nur die Prädikatenlogik erster Stufe, und da deshalb keine Missverständnisse auftreten können, bleiben wir bei der Bezeichnung Prädikatenlogik.

An der Formel $((\forall x(\exists y P(x,y)) \wedge (\forall z P(z,z))) \wedge (P(z,f(z)) \wedge \neg P(a,a)))$ wird schnell klar, dass die Klammerungen, die Definition 20.2.5 verlangt, nicht unbedingt zur leichten Lesbarkeit der Formeln beitragen. Ebenso wie für die Aussagenlogik führen wir für die Prädikatenlogik Präzedenzregeln ein.

20.2.7 Vereinbarung: Es gelten die Präzedenzregeln 20.1.3 und 20.1.5 der Aussagenlogik, und zusätzlich gilt, dass $\exists$ und $\forall$ stärker binden als alle aussagenlogischen Junktoren.

20.2.8 Aufgabe: Schreiben Sie die Formel

$$((\forall x(\exists y P((x,y))) \wedge (\forall z P(z,z))) \wedge (P(z,f(z)) \wedge \neg P(a,a)))$$

mit so wenigen Klammern wie möglich.

Auch wenn man auf die Klammerung wegen der Präzedenzregeln verzichten kann, so ist dies nicht immer zu empfehlen. Die Formel $\forall x P(x) \wedge Q(x)$ kann schnell zu Missverständnissen führen, wohingegen bei der Formel $(\forall x P(x)) \wedge Q(x)$, die der Formel $\forall x P(x) \wedge Q(x)$ entspricht, unmittelbar klar wird, dass sich der Quantor nicht auf die Teilformel $Q(x)$ bezieht.

Betrachten wir die Formel $\forall x Q(x,y)$. Bei dieser sehen wir, dass es keinen Quantor mit der Variablen y gibt. Die Variable x hingegen ist durch einen Quantor gebunden.

In der Formel $\forall x(Q(x) \wedge \exists x P(x))$ kommt das x in verschiedenen Rollen vor. In der Teilformel $\exists x P(x)$ ist jedes Vorkommen der Variablen x in $P(x)$ durch den Existenzquantor gebunden, sodass der führende Allquantor sich nicht auf die Teilformel $\exists x P(x)$ auswirkt. Zur Präzisierung dieser Beobachtung führen wir den Begriff des Wirkungsbereiches eines Quantors ein.

20.2.9 Definition: Seien $\forall x\alpha$ und $\exists x\alpha$ Formeln. Wir sagen, dass x die **Variable des Quantors** ist, und dass die Formel α der **Wirkungsbereich** des Quantors ist. Wir sagen, dass der Quantor alle Vorkommen von x in der Formel α **bindet**, außer den Vorkommen, die durch einen weiteren Quantor innerhalb von α gebunden sind.

20.2.10 Beispiel: Betrachten wir noch einmal die Formel $\forall x(Q(x) \wedge \exists x P(x))$. Diese Formel ist von der Bauart $\forall x\alpha$ mit $\alpha = (Q(x) \wedge \exists x P(x))$. Der Wirkungsbereich des Allquantors ist die Formel α, und x ist die Variable der Formel. Die Variable x in der Teilformel $\exists x P(x)$ ist durch den Existenzquantor gebunden. Es folgt, dass der Allquantor nur die Variable x in $Q(x)$ bindet.

20.2.11 Definition: Das Vorkommen einer Variable x heißt **frei**, wenn es nicht im Wirkungsbereich eines Quantors liegt. Man sagt auch, dass die **Variable** x

frei vorkommt. Ein Vorkommen einer Variable x heißt **gebunden**, wenn x im Wirkungsbereich eines Quantors liegt.

Eine Variable x kann sowohl frei als auch gebunden in einer Formel α vorkommen. Ein Beispiel ist die Formel $(\forall x P(x) \vee Q(x))$. Da der Wirkungsbereich des Allquantors nur die Formel $P(x)$ ist, liegt das letzte Vorkommen von x nicht im Wirkungsbereich eines Quantors.

20.2.12 Beispiel:

1. Gegeben sei die Formel
$$\forall x(P(x) \wedge Q(x)) \wedge \exists y(S(y) \wedge \forall z R(x,z)).$$
Der Wirkungsbereich des ersten Allquantors ist $(P(x) \wedge Q(x))$, der des Existenzquantors ist $S(y) \wedge \forall z R(x,z)$, der des letzten Allquantors ist $R(x,z)$. Bis auf das letzte Vorkommen von x in $R(x,z)$ sind alle Vorkommen von x gebunden.

2. Gegeben sei die Formel $\forall x(P(x) \wedge \exists x Q(x))$. Der Wirkungsbereich des Allquantors ist $(P(x) \wedge \exists x Q(x))$, und der des Existenzquantors ist $Q(x)$. Das Vorkommen von x in $P(x)$ ist durch den Allquantor gebunden. Das Vorkommen von x in $Q(x)$ ist nicht durch den Allquantor sondern durch den Existenzquantor gebunden.

20.2.13 Aufgabe: Gegeben seien folgende prädikatenlogische Formeln:

1. $\forall x \exists y P(x,y,z)$
2. $\exists y(P(y) \wedge \exists y(R(y,z) \wedge Q(y)))$
3. $\exists x(\exists y(\exists z(P(x,y) \wedge Q(x,y))))$

Welches sind die Wirkungsbereiche der Quantoren, welche Variablen sind durch welche Quantoren gebunden und welche Variablen sind frei?

20.2.14 Definition: Enthält eine Formel keine freien Variablen, so bezeichnen wir sie als **geschlossene Formel**.

20.2.15 Aufgabe: Geben Sie ein Beispiel für eine geschlossene Formel.

Für spätere Anwendungen müssen Variablen so umbenannt werden, dass das Ergebnis der Umbenennung eine logisch äquivalente Formel ist.

20.2.16 Definition: Wir sagen, dass eine Formel **konsistent umbenannt** ist, wenn

1. es nicht zugleich eine freie und eine gebundene Variable mit Namen x gibt, und
2. die Variablen verschiedener Vorkommen von Quantoren verschiedene Variablennamen besitzen.

Ein Verfahren für die konsistente Umbenennung von Formeln ist:

20.2.17 Merkregel: (Konsistente Umbenennung)

1. Solange ein Variablenname x sowohl frei als auch gebunden vorkommt, wähle einen neuen Variablennamen z und ersetze alle freien Vorkommen von x durch z.
2. Solange es zwei Quantoren mit einer Variable gleichen Namens gibt, wähle einen der Quantoren und einen neuen Variablennamen z. Ersetze im Wirkungsbereich des Quantors alle Vorkommen von x durch z, außer den Vorkommen von x, die durch einen weiteren Quantor in diesem Wirkungsbereich gebunden sind.

20.2.18 Beispiel: Wir überführen die Formel

$$R(x) \wedge \forall x(P(x) \wedge \forall x(Q(x) \wedge \exists x S(x)))$$

in eine konsistent umbenannte Formel.

Die Variable x kommt frei in $R(x)$ und gebunden in der zweiten Teilformel vor. Wir wählen einen neuen Namen z und ersetzen wie in 1. von Merkregel 20.2.17 die freie Variable. Wir erhalten

$$R(z) \wedge \forall x(P(x) \wedge \forall x(Q(x) \wedge \exists x S(x)))$$

Der erste und der zweite Allquantor binden x. Wir wählen den ersten Allquantor und y als neuen Variablennamen. Alle Vorkommen von x in $\forall x(Q(x) \wedge \exists x S(x))$ liegen im Wirkungskreis des ersten Allquantors. Daher ersetzen wir nur das Vorkommen von x in $P(x)$. Wir erhalten mit 2. in 20.2.17:

$$R(z) \wedge \forall y(P(y) \wedge \forall x(Q(x) \wedge \exists x S(x))).$$

Der zweite und der dritte Quantor binden x. Wir wählen y_1 als weiteren Variablennamen und ersetzen x in $Q(x)$. Wir erhalten

$$R(z) \wedge \forall y(P(y) \wedge \forall y_1(Q(y_1) \wedge \exists x S(x))).$$

Diese Formel ist konsistent umbenannt.

20.2.19 Aufgabe: Überführen Sie $\exists z((\neg \exists x(P(x,z) \vee \forall y Q(x, f(y)))) \vee \forall y P(g(z,y), z))$ in eine konsistent umbenannte Formel.

20.2.3 Semantik

Bisher haben wir nur die syntaktische Struktur von Formeln festgelegt und nicht über die Bedeutung von Formeln gesprochen. In der Prädikatenlogik wird die Semantik über Interpretationen festgelegt, die den einzelnen Symbolen (Funktions- und Konstanten- und Prädikatssymbolen) eine Bedeutung in Form von konkreten Objekten zuordnen. Als Beispiel betrachten wir die Formel $\forall x P(x, a, f(x))$. Zunächst müssen wir festlegen, welches Universum (Grundbereich) wir betrachten. Hier wollen wir festlegen, dass das Universum die natürlichen Zahlen sind. Dann können wir dem Prädikatssymbol P eine konkrete Relation $\mathbf{P}$, dem Funktionssymbol f eine feste Funktion $\mathbf{f}$ und dem Konstantensymbol a eine feste Konstante $\mathbf{a}$ zuordnen. Hier wollen wir vereinbaren, dass $\mathbf{a}$ die Konstante 1, $\mathbf{f}$ die Funktion $n \mapsto n+1$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $\mathbf{P}$ die Menge aller Tripel (x, y, z) mit $x + y = z$ ist. Mit dieser Interpretation ist die Formel wahr, denn für alle natürlichen Zahlen n gilt $n + 1 = \mathbf{f}(n)$.

In Definition 20.2.5 hatten wir festgelegt, dass für Terme t_1 und t_2 auch $t_1 = t_2$ eine Formel ist. Die Semantik des Gleichheitszeichens $t_1 = t_2$ wird so festgelegt, dass für jede Interpretation $\mathfrak{I}$ gelten soll: $\mathfrak{I}(t_1 = t_2)$ ist genau dann wahr, wenn die Interpretation für beide Terme die gleichen Ergebnisse liefert, wenn also $\mathfrak{I}(t_1) = \mathfrak{I}(t_2)$ gilt.

Die Menge der Symbole, denen wir durch eine Interpretation eine Bedeutung zuordnen, können wir durch eine so genannte Signatur einschränken:

20.2.20 Definition: Eine **Signatur** besteht aus einem Tripel $\Sigma = (\mathbf{K}, \mathbf{F}, \mathbf{R})$, wobei $\mathbf{K}$ eine Menge von Konstantensymbolen, $\mathbf{F}$ eine Menge von Funktionssymbolen und $\mathbf{R}$ eine Menge von Prädikatssymbolen ist. Wenn α eine Formel ist, dann besteht die **durch α induzierte Signatur** $\Sigma(\alpha)$ aus der Menge der in α vorkommenden Konstantensymbolen, der Menge der vorkommenden Funktionssymbolen und der Menge der vorkommenden Prädikatssymbole.

Bei der folgenden Definition der Interpretation gehen wir nicht von Formeln aus, sondern von einer Signatur.

20.2.21 Definition: Eine zu einer Signatur Σ syntaktisch passende **Interpretation** besteht aus

1. einer beliebigen, nicht leeren Menge U, dem **Universum** oder **Grundbereich** und

2. einer Abbildung $\mathfrak{I}$, die den verschiedenen Symbolen aus Σ konkrete Objekte wie folgt zuordnet:

(a) jeder Variablen x einen Wert $\mathbf{x}_\mathrm{U} \in U$,

(b) jedem Konstantensymbol a eine Konstante $\mathbf{a} \in U$,

(c) jedem n-stelligen Funktionssymbol f eine Funktion $\mathbf{f} : U^n \to U$,

(d) jedem n-stelligen Prädikatssymbol P eine Relation $\mathbf{P} \subseteq U^n$.

Bevor wir mit der Definition fortfahren, führen wir eine modifizierte Interpretation ein. Sei $\mathfrak{I}$ eine gegebene Interpretation, und sei $\mathbf{x}_\mathrm{U} \in U$. Dann bezeichnet die Interpretation $\mathfrak{I}[x/\mathbf{x}_\mathrm{U}]$ eine andere Interpretation, nämlich die, die der Variablen x den Wert $\mathbf{x}_\mathrm{U}$ zuordnet und die restlichen Zuordnungen unverändert lässt.

Im Weiteren verwenden wir wieder die Wahrheitswerte wahr und falsch, die wir wie im letzten Kapitel durch **1** und **0** symbolisieren.

20.2.22 Definition: (Interpretation, Fortsetzung)

Wir erweitern die Interpretation auf prädikatenlogische Formeln, deren Variablen konsistent umbenannt sind.

Für jeden Term $f(t_1, \ldots, f_n)$ legen wir fest $\mathfrak{I}(f(t_1, \ldots, f_n)) = \mathfrak{I}(f)(\mathfrak{I}(t_1), \ldots, \mathfrak{I}(t_n))$.

Für Formeln gilt:

1. $\mathfrak{I}(P(t_1, \ldots, t_n)) = \mathfrak{I}(P)(\mathfrak{I}(t_1), \ldots, \mathfrak{I}(t_n))$. Es ist $\mathfrak{I}(P(t_1, \ldots, t_n)) = \mathbf{1}$ genau dann, wenn $(\mathfrak{I}(t_1), \ldots, \mathfrak{I}(t_n)) \in \mathfrak{I}(P)$.
2. $\mathfrak{I}(t_1 = t_2) = \mathbf{1}$ genau dann, wenn $\mathfrak{I}(t_1) = \mathfrak{I}(t_2)$,
3. $\mathfrak{I}(\neg\alpha) = \mathbf{1}$ genau dann, wenn $\mathfrak{I}(\alpha) = \mathbf{0}$,
4. $\mathfrak{I}(\alpha \wedge \beta) = \mathbf{1}$ genau dann, wenn $\mathfrak{I}(\alpha) = \mathbf{1}$ und $\mathfrak{I}(\beta) = \mathbf{1}$,
5. $\mathfrak{I}(\alpha \vee \beta) = \mathbf{1}$ genau dann, wenn $\mathfrak{I}(\alpha) = \mathbf{1}$ oder $\mathfrak{I}(\beta) = \mathbf{1}$,
6. $\mathfrak{I}(\exists x\alpha) = \mathbf{1}$ genau dann, wenn es ein $\mathbf{x}_\mathrm{U} \in U$ so gibt, dass $\mathfrak{I}[x/\mathbf{x}_\mathrm{U}](\alpha) = \mathbf{1}$ ist,
7. $\mathfrak{I}(\forall x\alpha) = \mathbf{1}$ genau dann, wenn für jedes $\mathbf{x}_\mathrm{U} \in U$ gilt, dass $\mathfrak{I}[x/\mathbf{x}_\mathrm{U}](\alpha) = \mathbf{1}$ ist.

20.2.23 Beispiel: Gegeben sei die Formel

$$\alpha = \forall x \exists y P(x, y) \wedge \forall x \forall y (x = y \to P(x, f(y))) \wedge \neg P(a, a).$$

Eine zu $\Sigma(\alpha)$ syntaktisch passende Interpretation $\mathfrak{I}$ ist dann (vergleichen Sie bitte mit Definition 20.2.21):

1. $U = \{3, 4\}$, das Universum,
2. die Zuordnungen
   (a) $\mathfrak{I}(a) = \mathbf{a} = 3$, die Konstante,
   (b) $\mathfrak{I}(f) = \mathbf{f}$ mit $\mathbf{f}(3) = 4$ und $\mathbf{f}(4) = 3$, die Funktion,
   (c) $\mathfrak{I}(P) = \mathbf{P} = \{(3, 4), (4, 3)\}$, die Relation.

Wir berechnen nun den Wahrheitswert der Formel. Dazu bestimmen wir für jede der drei durch die Konjunktionen abgegrenzten Teilformeln den Wahrheitswert. Ist jede Teilformel für die Interpretation wahr, so ist α für die Interpretation wahr.

Wir beginnen mit der Teilformel $\forall x \exists y P(x, y)$. Genau dann ist $\mathfrak{I}(\forall x \exists y P(x, y)) = \mathbf{1}$, wenn für alle $\mathbf{x}_\mathrm{U} \in U$ gilt: $\mathfrak{I}[x/\mathbf{x}_\mathrm{U}](\exists y P(x, y)) = \mathbf{1}$ (vergleichen Sie mit 7. in Definition 20.2.22), also $\mathfrak{I}(\exists y P(3, y)) = \mathbf{1}$ und $\mathfrak{I}(\exists y P(4, y)) = \mathbf{1}$ mit der Definition von $\mathfrak{I}[x/\mathbf{x}_\mathrm{U}]$ oben.

Mit 6. in Definition 20.2.22 gelten $\mathfrak{I}(\exists y P(3, y)) = \mathbf{1}$ und $\mathfrak{I}(\exists y P(4, y)) = \mathbf{1}$ genau dann, wenn es ein $\mathbf{y}_\mathrm{U} \in U$ gibt mit

$$\mathfrak{I}[y/\mathbf{y}_\mathrm{U}](P(3, y)) = \mathfrak{I}(P(3, \mathbf{y}_\mathrm{U})) = \mathbf{P}(3, \mathbf{y}_\mathrm{U}) = \mathbf{1},$$

und es ein $\mathbf{y}_\mathrm{U} \in U$ gibt mit

$$\mathfrak{I}[y/\mathbf{y}_\mathrm{U}](P(4, y)) = \mathfrak{I}(P(4, \mathbf{y}_\mathrm{U})) = \mathbf{P}(4, \mathbf{y}_\mathrm{U}) = \mathbf{1}.$$

Im ersten Fall erledigt $\mathbf{y}_\mathrm{U} = 4$ den Job, denn $(3, 4) \in \mathbf{P}$, und im zweiten Fall gilt für $\mathbf{y}_\mathrm{U} = 3$, dass $(4, 3) \in \mathbf{P}$ ist. Die Teilformel $\forall x \exists y P(x, y)$ ist daher für die Interpretation wahr.

Bei der Untersuchung des Wahrheitswertes der zweiten Teilformel, also

$$\forall x \forall y (x = y \to P(x, f(y))),$$

gehen wir den umgekehrten Weg. Wir beginnen mit den Eigenschaften der Relation und der Funktion.

Für alle $\mathbf{x}_\mathrm{U}, \mathbf{y}_\mathrm{U} \in U$ gilt mit $\mathbf{x}_\mathrm{U} = \mathbf{y}_\mathrm{U}$ auch $(\mathbf{x}_\mathrm{U}, \mathbf{f}(\mathbf{y}_\mathrm{U})) \in \mathbf{P}$, also

$$\mathfrak{I}(\mathbf{x}_\mathrm{U} = \mathbf{y}_\mathrm{U} \to P(\mathbf{x}_\mathrm{U}, f(\mathbf{y}_\mathrm{U})) = \mathbf{1} \text{ für alle } \mathbf{x}_\mathrm{U}, \mathbf{y}_\mathrm{U} \in U.$$

Es folgt

$$\mathfrak{I}[y/\mathbf{y}_\mathrm{U}](\mathbf{x}_\mathrm{U} = y \to P(\mathbf{x}_\mathrm{U}, f(y)) = \mathbf{1} \text{ für alle } \mathbf{x}_\mathrm{U}, \mathbf{y}_\mathrm{U} \in U,$$

also

$$\mathfrak{I}(\forall y (\mathbf{x}_\mathrm{U} = y \to P(\mathbf{x}_\mathrm{U}, f(y))) = \mathbf{1} \text{ für alle } \mathbf{x}_\mathrm{U} \in U.$$

Es folgt

$$\mathfrak{I}[x/\mathbf{x}_\mathrm{U}](\forall y(x = y \to P(x, f(y))) = \mathbf{1} \text{ für alle } \mathbf{x}_\mathrm{U} \in U,$$

also

$$\mathfrak{I}(\forall x \forall y(x = y \to P(x, f(y)))) = \mathbf{1}.$$

Somit gilt auch die zweite Teilformel.

Da auch noch $(3,3) \notin \mathbf{P}$, ist $\mathfrak{I}(\neg P(a,a)) = \mathbf{1}$, und es folgt $\alpha = \mathbf{1}$ für diese Interpretation.

Und noch ein Beispiel:

20.2.24 Beispiel: Sei $\alpha = \forall x P(x, f(x)) \wedge \forall z Q(g(a, z))$. Ferner gelte

1. P ist ein zweistelliges und Q ein einstellliges Prädikatssymbol,
2. f ist ein einstelliges und g ein zweistelliges Funktionssymbol,
3. a ist ein Konstantensymbol.

Eine zu $\Sigma(\alpha)$ syntaktisch passende Interpretation ist:

1. $U = \mathbb{N}$, das Universum,
2. (a) $\mathfrak{I}(a) = \mathbf{a} = 2$,
   (b) $\mathfrak{I}(f) = \mathbf{f} : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, definiert durch $\mathbf{f}(n) = n + 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$,
   (c) $\mathfrak{I}(g) = \mathbf{g} : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, definiert durch $\mathbf{g}(n, m) = n + m$ für alle $n, m \in \mathbb{N}$,
   (d) $\mathfrak{I}(P) = \mathbf{P} = \{(m, n) \mid m, n \in U \text{ und } m < n\}$,
   (e) $\mathfrak{I}(Q) = \mathbf{Q} = \{n \in U \mid n \text{ ist Primzahl}\}$.

Für diese Interpretation ist α falsch, denn es gilt $\mathfrak{I}(\forall z Q(g(a, z))) = \mathbf{0}$, da $g(2, 4) = 6$, und 6 ist keine Primzahl.

20.2.25 Aufgabe: 1. Konstruieren Sie eine Interpretation, sodass die Formel $\forall x(P(x) \vee Q(x))$ wahr ist.

2. Konstruieren Sie eine Interpretation, sodass die Formel $\forall x(P(x) \vee Q(x))$ falsch ist.
3. Gibt es eine Interpretation, sodass die Formel $\forall x P(x)$ wahr und die Formel $\exists x P(x)$ falsch ist?
4. Gibt es eine Interpretation, sodass die Formel $\forall x P(x)$ falsch und die Formel $\exists x P(x)$ wahr ist?

Die in der Aussagenlogik eingeführten Begriffe erfüllbar, widerspruchsvoll und tautologisch sind auch in der Prädikatenlogik üblich. Wir können Definition 20.1.16 wie folgt modifizieren:

20.2.26 Definition: Eine Formel α heißt **erfüllbar**, falls es eine Interpretation gibt, die für α den Wert wahr liefert. Sie ist **widerspruchsvoll**, falls sie für jede Interpretation den Wert falsch, und **tautologisch**, falls sie für jede Interpretation den Wahrheitswert wahr liefert.

Um zu beweisen, dass eine Formel erfüllbar ist, reicht es also, eine erfüllende Interpretation anzugeben. In der Regel gibt es aber unendlich viele syntaktisch passende Interpretationen, die wir nicht alle überprüfen können. Sollte eine Formel widerspruchsvoll sein, so kommen wir in ernste Schwierigkeiten, denn wir wissen ja nicht, wann wir mit dem Prüfen aufhören müssen. In diesem Zusammenhang trifft man auf den Begriff der Entscheidbarkeit:

20.2.27 Definition: Eine beliebige Menge M heißt **entscheidbar**, wenn es einen Algorithmus gibt, der für jedes x angibt, ob x in M liegt oder nicht.

Man kann zeigen (was wir hier nicht tun werden), dass die Menge der erfüllbaren prädikatenlogischen Formeln nicht entscheidbar ist. Das bedeutet **nicht**, dass man noch keinen solchen Algorithmus gefunden hat, sondern, dass man beweisen kann, dass es einen solchen nicht geben kann.

Wenn wir in Bemerkung 20.1.18 aussagenlogische Formeln durch prädikatenlogische Formeln und Bewertung durch Interpretation ersetzen, so erhalten wir:

20.2.28 Bemerkung: Sei α eine prädikatenlogische Formel. Die folgenden Aussagen sind äquivalent:

1. Die Formel α ist widerspruchsvoll.
2. Die Formel α ist nicht erfüllbar.
3. Die Formel $\neg\alpha$ ist tautologisch.

Analog zum Begriff der semantischen Folgerung in der Aussagenlogik ist der Begriff der semantischen Folgerung in der Prädikatenlogik.

20.2.29 Definition: Seien α und β prädikatenlogische Formeln. Wir sagen, dass β **aus** α **folgt**, wenn für jede Interpretation $\mathfrak{I}$, für die $\mathfrak{I}(\alpha) = \mathbf{1}$ gilt, auch $\mathfrak{I}(\beta) = \mathbf{1}$ ist. Als Abkürzung benutzen wir wieder das Zeichen $\models$ und schreiben $\alpha \models \beta$, falls β aus α folgt.

Wie im Fall der Aussagenlogik gilt:

20.2.30 Bemerkung: Seien α und β prädikatenlogische Formeln. Es gilt $\alpha \models \beta$ genau dann, wenn $\alpha \wedge \neg\beta$ widerspruchsvoll ist.

Beweis: Sei $\mathfrak{I}$ eine Interpretation, und es gelte $\alpha \models \beta$. Ist $\mathfrak{I}(\alpha) = \mathbf{0}$, so folgt $\mathfrak{I}(\alpha \wedge \neg\beta) = \mathbf{0}$, unabhängig vom Wahrheitswert von β. Ist $\mathfrak{I}(\alpha) = \mathbf{1}$, so gilt $\mathfrak{I}(\beta) = \mathbf{1}$, denn β ist eine semantische Folgerung aus α. Es folgt $\mathfrak{I}(\neg\beta) = \mathbf{0}$, also $\mathfrak{I}(\alpha \wedge \neg\beta) = \mathbf{0}$.

Sei umgekehrt $\mathfrak{I}(\alpha \wedge \neg\beta) = \mathbf{0}$. Ist $\mathfrak{I}(\alpha) = 1$, so folgt $\mathfrak{I}(\neg\beta) = \mathbf{0}$, also $\mathfrak{I}(\beta) = \mathbf{1}$. Es folgt $\alpha \models \beta$. $\square$

Die logische Äquivalenz zwischen prädikatenlogischen Formeln ist wie im aussagenlogischen Fall definiert. Anstelle von Bewertungen verwenden wir Interpretationen.

20.2.31 Definition: Formeln α und β heißen **logisch äquivalent**, in Zeichen $\alpha \approx \beta$, wenn $\mathfrak{I}(\alpha) = \mathfrak{I}(\beta)$ für alle Interpretationen $\mathfrak{I}$ gilt.

Auch für prädikatenlogische Formeln α und β gilt wie für aussagenlogische Formeln: $\alpha \approx \beta$ genau dann, wenn $\alpha \models \beta$ und $\beta \models \alpha$.

Neben den Umformungsgesetzen, die wir schon in Proposition 20.1.26 für die Aussagenlogik kennen gelernt haben, und die auch für prädikatenlogische Formeln gelten, folgen nun weitere Gesetze, die sich auf Quantoren beziehen.

20.2.32 Proposition: (Äquivalenzregeln)

Seien α und β prädikatenlogische Formen. Dann gilt:

1. $\neg(\exists x\alpha) \approx \forall x(\neg\alpha)$ und $\neg(\forall x\alpha) \approx \exists x(\neg\alpha)$.

   (Diese Regel wird **Quantorwechsel** genannt.)

2. $\exists x\exists y\alpha \approx \exists y\exists x\alpha$ und $\forall x\forall y\alpha \approx \forall y\forall x\alpha$.

   (Diese Regel wird **Quantortausch** genannt.)

3. $\exists x\alpha \vee \exists x\beta \approx \exists x(\alpha \vee \beta)$ und $\forall x\alpha \wedge \forall x\beta \approx \forall x(\alpha \wedge \beta)$.

   (Diese Regel wird **Quantorzusammenfassung** genannt.)

4. Ist x keine freie Variable in α, so gilt $\exists x\alpha \approx \alpha$ und $\forall x\alpha \approx \alpha$.

   (Diese Regel wird **Quantorelimination** genannt.)

5. Ist x keine freie Variable in β, so gilt

(a) $\exists x\alpha \wedge \beta \approx \exists x(\alpha \wedge \beta)$ und $\exists x\alpha \vee \beta \approx \exists x(\alpha \vee \beta)$.

(b) $\forall x\alpha \wedge \beta \approx \forall x(\alpha \wedge \beta)$ und $\forall x\alpha \vee \beta \approx \forall x(\alpha \vee \beta)$.

(Diese Regel wird **Quantifizierung** genannt.)

Beweis:

1. Wir beweisen die erste Formel. Es gilt

$$
\begin{aligned}
\mathfrak{I}(\neg(\exists x\alpha)) = \mathbf{1} \quad &\Leftrightarrow \quad \mathfrak{I}(\exists x\alpha) = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad \text{Es gibt kein } \mathbf{x}_{\mathrm{U}} \in U \text{ mit } \mathfrak{I}[x/\mathbf{x}_{\mathrm{U}}](\alpha) = \mathbf{1} \\
&\Leftrightarrow \quad \mathfrak{I}[x/\mathbf{x}_{\mathrm{U}}](\alpha) = \mathbf{0} \text{ für alle } \mathbf{x}_U \in U \\
&\Leftrightarrow \quad \mathfrak{I}[x/\mathbf{x}_{\mathrm{U}}](\neg\alpha) = \mathbf{1} \text{ für alle } \mathbf{x}_U \in U \\
&\Leftrightarrow \quad \mathfrak{I}(\forall x(\neg\alpha)) = \mathbf{1}.
\end{aligned}
$$

   Es folgt $\neg(\exists x\alpha) \models \forall x(\neg\alpha)$ und $\forall x(\neg\alpha) \models \neg(\exists x\alpha)$, also $\neg(\exists x\alpha) \approx \forall x(\neg\alpha)$.

   Die zweite Aussage wird analog bewiesen.

2. Die Behauptung folgt durch Umbenennen der Variable x in y und umgekehrt.

3. Wir beweisen die erste Formel. Es gilt:

$$
\begin{aligned}
\mathfrak{I}(\exists x\alpha \vee \exists x\beta) = \mathbf{1} \quad &\Leftrightarrow \quad \mathfrak{I}(\exists x\alpha) = \mathbf{1} \text{ oder } \mathfrak{I}(\exists x\beta) = \mathbf{1} \\
&\Leftrightarrow \quad \text{Es gibt ein } \mathbf{x}_{\mathrm{U}} \in U \text{ mit } \mathfrak{I}[x/\mathbf{x}_{\mathrm{U}}](\alpha) = \mathbf{1}, \\
&\qquad\ \text{oder es gibt ein } \mathbf{x}_{\mathrm{U}} \in U \text{ mit } \mathfrak{I}[x/\mathbf{x}_{\mathrm{U}}](\beta) = \mathbf{1} \\
&\Leftrightarrow \quad \text{Es gibt ein } \mathbf{x}_{\mathrm{U}} \in U \text{ mit } \mathfrak{I}[x/\mathbf{x}_{\mathrm{U}}](\alpha \vee \beta) = \mathbf{1} \\
&\Leftrightarrow \quad \mathfrak{I}(\exists x(\alpha \vee \beta)) = \mathbf{1}
\end{aligned}
$$

   Somit gilt $\exists x\alpha \vee \exists x\beta \approx \exists x(\alpha \vee \beta)$, die Behauptung. Die zweite Aussage wird analog bewiesen.

4. Sei x keine freie Variable in α. Dann binden die Quantoren keine Variablen in der Formel α mit Namen x, und es folgt, dass die Wahrheitswerte von $\exists x\alpha$ und $\forall x\alpha$ mit dem Wahrheitswert von α übereinstimmen.

5. Es gilt:

$$
\begin{aligned}
\mathfrak{I}(\exists x(\alpha \wedge \beta)) = \mathbf{1} \quad &\Leftrightarrow \quad \text{Es gibt ein } \mathbf{x}_{\mathrm{U}} \in U \text{ mit } \mathfrak{I}[x/\mathbf{x}_{\mathrm{U}}](\alpha \wedge \beta) = \mathbf{1} \\
&\Leftrightarrow \quad \text{Es gibt ein } \mathbf{x}_{\mathrm{U}} \in U \text{ mit } \mathfrak{I}[x/\mathbf{x}_{\mathrm{U}}](\alpha) = \mathbf{1}, \\
&\qquad\ \text{und } \mathfrak{I}[x/\mathbf{x}_{\mathrm{U}}](\beta) = \mathbf{1} \\
&\Leftrightarrow \quad \mathfrak{I}(\exists x\alpha) = \mathbf{1} \text{ und } \mathfrak{I}(\exists x\beta) = \mathbf{1} \\
&\Leftrightarrow \quad \mathfrak{I}(\exists x\alpha) = \mathbf{1} \text{ und } \mathfrak{I}(\beta) = \mathbf{1} \text{ mit 4.} \\
&\Leftrightarrow \quad \mathfrak{I}(\exists x\alpha \wedge \beta) = \mathbf{1}.
\end{aligned}
$$

Für die zweite Aussage benutzen wir das, was wir bereits bewiesen haben. Es gilt

$$\begin{aligned} \exists x(\alpha \vee \beta) &\approx \exists x\alpha \vee \exists x\beta \text{ mit 3.} \\ &\approx \exists x\alpha \vee \beta \text{ mit 4.} \end{aligned}$$

Die beiden letzten Aussagen werden analog bewiesen.

□

20.2.33 Aufgabe: Beweisen Sie die nicht bewiesenen Aussagen in Proposition 20.2.32.

Gehen wir die Umformungsregeln in Proposition 20.2.32 noch einmal durch.

Die erste Regel, der Quantorwechsel, erlaubt, Negationen vor Quantoren in die Formeln zu ziehen. Weiter zeigt diese Regel, dass wir in der Prädikatenlogik mit einem Quantor auskommen können. Wenn wir einen haben, dann können wir Aussagen, die den anderen benötigen, mit dem ersten ausdrücken. Genauer, es gilt $\forall x\alpha \approx \neg\exists x\neg\alpha$, das heißt, der Allquantor kann durch die Negation und den Existenzquantor ausgedrückt werden. Weiter gilt $\exists x\alpha \approx \neg\forall x\neg\alpha$, das heißt, der Existenzquantor kann durch die Negation und den Allquantor ausgedrückt werden.

Beim Quantortausch, der zweiten Regel, ist darauf zu achten, dass wir nur gleiche Quantoren vertauschen dürfen.

20.2.34 Aufgabe: Geben Sie ein Beispiel dafür, dass $\forall x\exists y\alpha$ und $\exists y\forall x\alpha$ nicht logisch äquivalent sind.

Bei der Quantorzusammenfassung, also der dritten Aussage in Proposition 20.2.32, ist Vorsicht geboten. Der Existenzquantor verträgt sich mit der Disjunktion und der Allquantor mit der Konjunktion. Umgekehrt ist das nicht immer der Fall, wie Sie jetzt zeigen sollen.

20.2.35 Aufgabe: Geben Sie jeweils ein Beispiel dafür, dass

1. $\forall x\alpha \vee \forall x\beta$ und $\forall x(\alpha \vee \beta)$ nicht logisch äquivalent sind.
2. $\exists x\alpha \wedge \exists x\beta$ und $\exists x(\alpha \wedge \beta)$ nicht logisch äquivalent sind.

Die Quantifizierung, also die fünfte Regel, erlaubt, einen Quantor in einer Teilformel, die Teil einer Konjunktion oder Disjunktion ist, „nach außen“ zu ziehen.

Die folgenden Beispiele sollen die logisch äquivalenten Umformungen verdeutlichen:

20.2.36 Beispiel: 1. **Quantorwechsel**

$$\neg\exists y \forall x P(x,y) \approx \forall y \neg \forall x P(x,y) \approx \forall y \exists x \neg P(x,y)$$

2. **Quantorzusammenfassung**

$$\forall x \exists y P(x,y) \wedge \forall x R(x) \approx \forall x(\exists y P(x,y) \wedge R(x))$$

3. **Quantifizierung**

$$\exists x P(x) \wedge \exists y S(y) \approx \exists x(P(x) \wedge \exists y S(y))$$

4. **Konsistente Umbenennung**

$$\exists x(P(x) \wedge \exists x S(x)) \approx \exists y(P(y) \wedge \exists x S(x))$$

20.2.37 Aufgabe: Überprüfen Sie die Korrektheit der folgenden logischen Äquivalenzen. Welche Umformungsregeln benutzen Sie?

1. $\forall x P(x) \wedge \exists x Q(x) \approx \forall x \exists x_1 (P(x) \wedge Q(x_1))$
2. $\exists x Q(x) \wedge \forall y P(z) \wedge \forall y P(y) \approx \exists x \forall y (Q(x) \wedge P(z) \wedge P(y))$

20.2.4 Normalformen

Im Weiteren behandeln wir nur geschlossene Formeln, das heißt, Formeln ohne freie Variablen. Wir stellen zunächst die Negationsnormalform und dann die so genannte pränexe Normalform vor.

Negationsnormalform

Die Negationsnormalform für aussagenlogische Formeln verlangt, dass Negationszeichen direkt vor Atomen stehen. In der Prädikatenlogik stehen die Primformeln $P(t_1, \ldots, t_n)$ und $t_1 = t_2$ für aussagenlogische Atome. So verlangen wir hier, dass die Negationszeichen direkt vor den Primformeln stehen.

20.2.38 Definition: Eine Formel α ist in **Negationsnormalform**, wenn jedes Negationszeichen direkt vor einer Primformel steht.

Wir erweitern das Verfahren zur Erzeugung einer Negationsnormalform prädikatenlogischer Formeln um Regeln, die Negationszeichen über Quantoren zu ziehen. Die entsprechenden Regeln finden wir in der Liste der prädikatenlogischen Umformungsregeln in Proposition 20.2.32. Es handelt sich um die Quantorenwechsel $\neg(\exists x\alpha) \approx \forall x(\neg\alpha)$ und $\neg(\forall x\alpha) \approx \exists x(\neg\alpha)$, die ebenso wie die De Morganschen Regeln (vergleiche 20.1.26) Negationszeichen nach innen ziehen.

Ein Verfahren zur Erzeugung einer logisch äquivalenten Negationsnormalform beruht auf den De Morganschen Regeln, der Elimination doppelter Negationszeichen und den Quantorwechseln. Wir führen folgende Schritte aus, solange sie anwendbar sind:

1. Ersetze $\neg(\alpha \wedge \beta)$ durch $\neg\alpha \vee \neg\beta$.
2. Ersetze $\neg(\alpha \vee \beta)$ durch $\neg\alpha \wedge \neg\beta$.
3. Ersetze $\neg\neg\alpha$ durch α.
4. Ersetze $\neg(\exists x\alpha)$ durch $\forall x\neg\alpha$.
5. Ersetze $\neg(\forall x\alpha)$ durch $\exists x\neg\alpha$.

Die resultierende Formel ist in Negationsnormalform.

20.2.39 Beispiel:

$$\begin{array}{lll}
& \neg((\forall x(P(x) \vee \neg\exists y S(x,y))) \wedge \neg\exists z S(z,z)) & \\
\approx & \neg(\forall x(P(x) \vee \neg\exists y S(x,y))) \vee \neg\neg\exists z S(z,z) & \text{De Morgan} \\
\approx & \neg(\forall x(P(x) \vee \neg\exists y S(x,y)) \vee \exists z S(z,z) & \text{Doppelte Negation} \\
\approx & \neg\forall x P(x) \wedge \neg\neg\exists y S(x,y) \vee \exists z S(z,z) & \text{De Morgan} \\
\approx & \neg\forall x P(x) \wedge \exists y S(x,y) \vee \exists z S(z,z) & \text{Doppelte Negation} \\
\approx & \exists x\neg P(x) \wedge \exists y S(x,y) \vee \exists z S(z,z) & \text{Quantorwechsel}
\end{array}$$

20.2.40 Aufgabe: Transformieren Sie

$$\neg(P(x) \rightarrow \forall y Q(y)) \vee R(z)$$

in Negationsnormalform, sodass die transformierte Formel keine Implikationspfeile mehr enthält.

Pränexe Normalform

Bisher können die Quantoren noch verstreut in einer Formel auftreten, wie etwa in $\forall x P(x) \wedge \exists y S(y,y)$. Wenn alle Quantoren am Anfang einer Formel stehen, sprechen wir von einer pränexen Normalform.

20.2.41 Definition: Eine Formel α ist in **pränexer Normalform**, wenn sie die Form $Q_1 x_1 \dots Q_n x_n \beta$ hat, wobei $Q_i \in \{\exists, \forall\}$ für alle $1 \leq i \leq n$ und β keine Quantoren enthält. Die Quantorfolge $Q_1 x_1 \dots Q_n x_n$ wird als **Präfix** und β als der **Kern** der Formel bezeichnet.

Das folgende Verfahren zeigt, wie man Formeln in pränexe Normalform überführen kann.

Die Eingabe ist eine Formel in Negationsnormalform.

1. Führe eine konsistente Umbenennung so durch, dass verschiedene Quantoren sich auf verschiedene Variablen beziehen und keine Variable sowohl frei als auch gebunden auftritt.
2. Wende folgende Ersetzungsregeln so lange wie möglich an:
   (a) Ersetze $(\forall x \alpha) \wedge \beta$ durch $\forall x(\alpha \wedge \beta)$.
   (b) Ersetze $(\forall x \alpha) \vee \beta$ durch $\forall x(\alpha \vee \beta)$.
   (c) Ersetze $(\exists x \alpha) \wedge \beta$ durch $\exists x(\alpha \wedge \beta)$.
   (d) Ersetze $(\exists x \alpha) \vee \beta$ durch $\exists x(\alpha \vee \beta)$.

Diese Schritte führen zu logisch äquivalenten Formeln (vergleiche Proposition 20.2.32).

Beachten Sie auch, dass wir auch das Kommutativgesetz für $\wedge$ und $\vee$ haben. Wenn wir beispielsweise die Formel $\beta \wedge (\forall x \alpha)$ haben, so ist diese logisch äquivalent zu $(\forall x \alpha) \wedge \beta$, also logisch äquivalent zu $\forall x(\alpha \wedge \beta)$ beziehungsweise zu $\forall x(\beta \wedge \alpha)$.

Folgendes Beispiel soll die Überführung einer Formel in pränexe Normalform verdeutlichen.

20.2.42 Beispiel:

$$\begin{array}{ll} & \forall x \neg P(x) \wedge \forall x(P(x) \wedge R(x)) \wedge \forall x(Q(x) \wedge \exists y R(y)) \\ \approx & \forall x_1 \neg P(x_1) \wedge \forall x_2(P(x_2) \wedge R(x_2)) \wedge \forall x_3(Q(x_3) \wedge \exists y R(y)) \\ \approx & \forall x_1 \neg P(x_1) \wedge \forall x_2(P(x_2) \wedge R(x_2)) \wedge \forall x_3 \exists y(Q(x_3) \wedge R(y)) \\ \approx & \forall x_1 \forall x_2 \forall x_3 \exists y(\neg P(x_1) \wedge P(x_2) \wedge R(x_2) \wedge Q(x_3) \wedge R(y)) \end{array}$$

Für den Kern einer Formel in pränexer Normalform können wir beispielsweise verlangen, dass er in konjunktiver Normalform (vergleiche Definition 20.1.35) vorliegen muss. Für Formeln ohne Quantoren ist die konjunktive Normalform wie in der Aussagenlogik definiert. Primformeln spielen dabei die Rolle aussagenlogischer Atome. Ein Literal ist dann eine Primformel oder die Negation einer Primformel. Eine Klausel ist wieder eine Disjunktion von Literalen, und eine Konjuntion von Klauseln ist eine konjunktive Normalform. Das Verfahren, das eine aussagenlogische Formel in eine logisch äquivalente Formel in konjunktiver Normalform umwandelt, kann direkt auf Formeln ohne Quantoren angewendet werden.

20.2.43 Aufgabe: Transformieren Sie die Formel

$$\exists z((\neg\exists x(P(x,z) \vee \forall y Q(x,f(y)))) \vee \forall y P(g(z,y),z))$$

in pränexe Normalform, sodass der Kern in konjunktiver Normalform ist.

20.2.5 Formale Beweise

In Abschnitt 20.1.4 haben wir bereits festgestellt, dass gültige Argumente in der Aussagenlogik symbolisch durch Formeln der Bauart $\alpha_1 \wedge \cdots \wedge \alpha_n \rightarrow \beta$ ausgedrückt werden können, sofern es sich um Tautologien handelt. Dies gilt analog auch für prädikatenlogische Argumente, auch wenn die Teilformeln Prädikate, Funktionen und Quantoren enthalten.

Aussagenlogische Argumente können prinzipiell über Wahrheitstafeln auf ihre Gültigkeit hin überprüft werden. Das ist in der Prädikatenlogik nicht möglich, denn wir können nicht alle Interpretationen überprüfen. Mehr noch als in der Aussagenlogik sind wir also auf ein Kalkül angewiesen, mit dessen Hilfe wir aus gegebenen Prämissen gültige Schlüsse ableiten können. Dies geschieht wie in Definition 20.1.45 in Form einer Beweisfolge.

Dabei treffen wir folgende Vereinbarung:

20.2.44 Vereinbarung: Auch in der Prädikatenlogik gelten die Äquivalenzregeln 20.1.46:

Formel	äquivalent zu	Name/Abkürzung der Regel
$\alpha \vee \beta$ $\alpha \wedge \beta$	$\beta \vee \alpha$ $\beta \wedge \alpha$	Kommutativgesetz/com
$(\alpha \vee \beta) \vee \gamma$ $(\alpha \wedge \beta) \wedge \gamma$	$\alpha \vee (\beta \vee \gamma)$ $\alpha \wedge (\beta \wedge \gamma)$	Assoziativgesetz/ass
$\neg(\alpha \vee \beta)$ $\neg(\alpha \wedge \beta$	$\neg\alpha \wedge \neg\beta$ $\neg\alpha \vee \neg\beta$	Gesetz von De Morgan/De Morgan
$\alpha \rightarrow \beta$	$\neg\alpha \vee \beta$	Implikation/imp
α	$\neg\neg\alpha$	Doppelte Negation/dn

Auch in der Prädikatenlogik gelten die Schlussregeln 20.1.48:

Aus	ableitbar	Name/Abkürzung der Regel
α, $\alpha \to \beta$	β	Modus ponens/mp
$\alpha \to \beta$, $\neg\beta$	$\neg\alpha$	Modus tollens/mt
α, β	$\alpha \wedge \beta$	Kunjunktion/con
$\alpha \wedge \beta$	α, β	Vereinfachung/simp
α	$\alpha \vee \beta$	Ausdehnung/add

Die Formeln α, β und γ sind dabei prädikatenlogische Formeln.

Hinzu kommen folgende weitere Ableitungsregeln. Zunächst nehmen wir zu den Ableitungen der Prädikatenlogik die Äquivalenzregeln 20.2.32 hinzu, die wir hier noch einmal tabellarisch zusammenfassen.

20.2.45 Äquivalenzregeln: Es gelten

Formel	äquivalent zu	Name	Einschränkung
$\neg(\exists x\alpha)$ $\neg(\forall x\alpha)$	$\forall x(\neg\alpha)$ $\exists x(\neg\alpha)$	Quantorwechsel	
$\exists x\exists y\alpha$ $\forall x\forall y\alpha$	$\exists y\exists x\alpha$ $\forall y\forall x\alpha$	Quantortausch	
$\exists x\alpha \vee \exists x\beta$ $\forall x\alpha \wedge \forall x\beta$	$\exists x(\alpha \vee \beta)$ $\forall x(\alpha \wedge \beta)$	Quantor- zusammenfassung	
$\exists x\alpha$ $\forall x\alpha$	α α	Quantorelimination	x keine freie Variable in α
$\exists x\alpha \wedge \beta$ $\exists x\alpha \vee \beta$ $\forall x\alpha \wedge \beta$ $\forall x\alpha \vee \beta$	$\exists x(\alpha \wedge \beta)$ $\exists x(\alpha \vee \beta)$ $\forall x(\alpha \wedge \beta)$ $\forall x(\alpha \vee \beta)$	Quantifizierung	x keine freie Variable in β

Äquivalenzregeln darf man auch auf Teilformeln anwenden, das heißt, wir dürfen Teilformeln einer Formel durch logisch äquivalente ersetzen. Bei den Äquivalenzregeln darf man eine Formel aus der linken Spalte der Tabelle durch die logisch äquivalente Formel in der mittleren Spalte ersetzen und eine Formel aus der mittleren Spalte durch die entsprechende der linken Spalte. Wie in der Aussagenlogik ist das bei den Schlussregeln anders. Von Formeln der linken Spalte der folgenden Tabelle können wir auf Formeln der mittleren Spalte schließen aber nicht von Formeln der mittleren Spalte auf Formeln in der linken. Vorab noch eine Notation.

20.2.46 Notation: Sei α eine prädikatenlogische Formel, und sei t ein Term. Wir bezeichnen mit $\alpha_{[x/t]}$ die Formel, die aus α dadurch entsteht, dass wir in α jedes freie Auftreten von x durch t ersetzt.

20.2.47 Schlussregeln: Es gelten

Formel	ableitbar	Name/Abkürzung	Einschränkung
$\forall x\alpha$	$\alpha_{[x/t]}$	$\forall$-Instantiierung $\forall$-i	t muss ein variablenfreier Term sein
$\exists x\alpha$	$\alpha_{[x/a]}$	$\exists$-Instantiierung $\exists$-i	Das Konstantensymbol a durfte bisher nicht verwendet werden.

Gehen wir diese Formeln durch, insbesondere ihre Einschränkungen.

$\forall$-Instantiierung

Diese Regel besagt, dass wir von $\forall x\alpha$ auf $\alpha_{[x/a]}$, $\alpha_{[x/f(a,b)]}$, $\alpha_{[x/b]}$ und so weiter schließen dürfen. Wir können also einen Allquantor abstreifen. Die Begründung für diese Regel ist, dass, falls P für jedes Element des Universums wahr ist, dann können wir beliebige Konstanten einsetzen, und P wird immer noch wahr sein.

20.2.48 Beispiel: Die $\forall$-Instantiierung kann benutzt werden, um einen der klassischen Syllogismen des griechischen Philosophen Aristoteles zu beweisen. Aristoteles lebte von 384 bis 322 vor unserer Zeitrechnung und war der erste, der ein System formaler Logik entwickelt hat. Syllogismen sind ein Begriff für einen Katalog von Typen logischer Argumente. Eines dieser Argumente lautete: „Alle Menschen sind sterblich. Sokrates ist ein Mensch. Somit ist Sokrates sterblich.“ Wenn wir folgende Notation verwenden:

$M(x)$	x ist ein Mensch
$S(x)$	x ist sterblich
s	Sokrates (ein Konstantensymbol),

dann hat Aristoteles' Argumentation die Form

$$\forall x(M(x) \to S(x)) \wedge M(s) \to S(s).$$

Und das können wir jetzt formal beweisen:

1.	$\forall x(M(x) \to S(x))$	Prämisse
2.	$M(s)$	Prämisse
3.	$M(s) \to S(s)$	$\forall$-Instantiierung
4.	$S(s)$	2,3, mp

20.2.49 Aufgabe: Beweisen Sie folgende Formel:

$$\forall x(P(x) \to R(x)) \wedge \neg R(a) \to \neg P(a).$$

Ohne die Einschränkung an die ∀-Instantiierung könnten wir aus der folgenden Formel $\forall x \exists y P(x, y)$ die Formel $\exists y P(y, y)$ herleiten. Letztere ist aber keine Tautologie. Wenn das Universum die natürlichen Zahlen sind, und wenn $y > x$ die Bedeutung von $P(x, y)$ ist, dann ist $\forall x \exists y P(x, y)$ wahr, denn zu jeder natürlichen Zahl x gibt es eine natürliche Zahl y mit $y > x$. Die Formel $\exists y P(y, y)$ ist mit dieser Interpretation allerdings falsch. Es gibt keine natürliche Zahl y mit $y > y$.

∃-Instantiierung

Diese Regel erlaubt, einen Existenzquantor abzustreifen. Sie besagt, dass wir von $\exists x \alpha$ auf $\alpha_{[x/a]}$ schließen können, falls a ein völlig neues Konstantensymbole ist. Falls α für ein Element des Universums wahr ist, dann können wir diesem Element einen Namen geben, aber wir dürfen nichts weiter von ihm annehmen.

Folgendes wären gültige Schritte in einer Beweisfolge:

1.	$\forall x(P(x) \rightarrow Q(x))$	Prämisse
2.	$\exists y P(y)$	Prämisse
3.	$P(a)$	2, ∃-i
4.	$P(a) \rightarrow Q(a)$	1, ∀-i
5.	$Q(a)$	3, 4, mp

In Schritt 3 haben wir dem Element mit Eigenschaft P, von dessen Existenz wir aus Schritt 2 wissen, den Namen a gegeben. In Schritt 4 haben wir ∀-i dazu benutzt, um zu schließen, dass die Implikation, die für alle Elemente des Universums wahr ist, auch für unser spezielles a wahr ist. VORSICHT: Die Schritte 3 und 4 dürfen nicht in umgekehrter Reihenfolge abgearbeitet werden. Wenn ∀-i erst für 1 benutzt wird, um eine Konstante a zu benennen, dann gibt es keine Gründe dafür, dass dies spezielle a dasjenige ist, das die Eigenschaft P aus dem zweiten Schritt hat.

Ein Wort der Warnung

Äquivalenzregeln dürfen Sie auch auf Teilformeln anwenden. Das ist bei den Schlussregeln nicht möglich. Diese müssen Sie auf die gesamte Formel anwenden. Nehmen wir etwa an, wir hätten die Formel $\forall x \exists y P(x, y)$. Würden wir ∃-Instantiierung auf die Teilformel $\exists y P(x, y)$ anwenden, so erhalten wir die Formel $P(x, a)$ und somit $\forall x P(x, a)$. Letzteres wird aber in der Regel falsch sein. Wenn das Universum alle Menschen sind, und wenn $P(x, y)$ die Bedeutung „y ist Vater von x“ hat, dann bedeutet die Formel $\forall x \exists y P(x, y)$ so viel wie „Jeder Mensch hat einen Vater“. Wenn wir für y jedoch in der Teilformel $\exists y P(x, y)$ Helmut Kohl einsetzen, bedeutet $\forall x P(x, a)$ aber „Alle Menschen haben Helmut Kohl als Vater“.

Was mich überraschen würde.

Lösungen der Aufgaben

Lösungen der Aufgaben in 20.1.1

Aufgabe 20.1.2

1. A und C sind Formeln mit 1. Mit 2 ist $(\neg B)$ eine Formel. Mit 3 sind dann $(A \vee (\neg B))$ und $((\neg B) \wedge C)$ Formeln. Wieder mit 3 ist dann $(A \vee ((\neg B) \wedge C))$ eine Formel. Da $(A \vee ((\neg B) \wedge C))$ und $(A \vee (\neg B))$ Formeln sind, ist auch $((A \vee ((\neg B) \wedge C)) \vee (A \vee (\neg B))$ mit 3 eine Formel.

2. $(A \vee \neg B)$ ist keine Formel, da $\neg B$ nicht geklammert ist, also keine Formel ist.

Aufgabe 20.1.6

1. Die äußeren Klammern um $((A \wedge B) \vee C)$ können wir weglassen. Da $\wedge$ stärker bindet als $\vee$, können wir auch die Klammern um $(A \wedge B)$ weglassen. Mit den Präzedenzregeln und den Regeln zu Klammerersparnis entspricht die Formel $((A \wedge B) \vee C)$ der Formel $A \wedge B \vee C$.

2. Bei der Formel $(\neg A)$ können wir die äußeren Klammern weglassen und erhalten $\neg A$.

3. Bei der Formel $(((A \vee B) \rightarrow C) \wedge B)$ lassen wir zunächst die äußeren Klammern weg und erhalten $((A \vee B) \rightarrow C) \wedge B$. Betrachten wir nun $((A \vee B) \rightarrow C)$. Da $\vee$ stärker bindet als $\rightarrow$, können wir die inneren Klammern weglassen und erhalten $(A \vee B \rightarrow C) \wedge B$. Die letzten Klammern können wir nicht weglassen, denn $\wedge$ bindet stärker als $\rightarrow$. Die Formel $A \vee B \rightarrow C \wedge B$ entspricht der Formel $A \vee B \rightarrow (C \wedge B)$, und das ist eine andere als $(A \vee B \rightarrow C) \wedge B$.

Lösungen der Aufgaben in 20.1.2

Aufgabe 20.1.11

Sei $\alpha = (A \vee \neg B) \wedge (A \vee B \rightarrow C)$ mit $\mathfrak{I}(A) = \mathfrak{I}(B) = \mathfrak{I}(C) = \mathbf{0}$. Es ist $\mathfrak{I}(\neg B) = \mathbf{1}$, also $\mathfrak{I}(A \vee \neg B) = \mathbf{1}$. Weiter ist $\mathfrak{I}(A \vee B) = \mathbf{0}$, und damit $\mathfrak{I}(A \vee B \rightarrow C) = \mathbf{1}$. Es folgt $\mathfrak{I}(\alpha) = \mathbf{1}$.

Aufgabe 20.1.13

Sei $\alpha = (A \vee \neg B) \wedge (A \vee B \rightarrow C)$. Sei $\mathfrak{I}(A) = \mathbf{0}$, $\mathfrak{I}(B) = \mathbf{0}$ und $\mathfrak{I}(C) = \mathbf{1}$.

Es gilt

$$\begin{aligned}
\mathfrak{I}(\alpha) &= \mathfrak{I}((A \vee \neg B) \wedge (A \vee B \rightarrow C)) = \mathbf{1} \\
&\Leftrightarrow \mathfrak{I}(A \vee \neg B) = \mathbf{1} \text{ und } \mathfrak{I}(A \vee B \rightarrow C) = \mathbf{1} \\
&\Leftrightarrow (\mathfrak{I}(A) = \mathbf{1} \text{ oder } \mathfrak{I}(\neg B) = \mathbf{1}) \text{ und } (\mathfrak{I}(A \vee B) = \mathbf{0} \text{ oder } \mathfrak{I}(C) = \mathbf{1}) \\
&\Leftrightarrow (\mathfrak{I}(A) = \mathbf{1} \text{ oder } \mathfrak{I}(B) = \mathbf{0}) \text{ und } \mathfrak{I}(A) = \mathbf{0} \text{ und } \mathfrak{I}(B) = \mathbf{0} \text{ oder } \mathfrak{I}(C) = \mathbf{1}.
\end{aligned}$$

Da $\mathfrak{I}(A) = \mathbf{0}$, $\mathfrak{I}(B) = \mathbf{0}$ und $\mathfrak{I}(C) = \mathbf{1}$, folgt $\mathfrak{I}(\alpha) = \mathbf{1}$.

Aufgabe 20.1.17

1. Die Formel $\alpha = (A \vee \neg B) \wedge (A \vee B \rightarrow C)$ in 20.1.15 liefert ein Beispiel. Für $\mathfrak{I}(A) = \mathbf{0}$, $\mathfrak{I}(B) = \mathbf{0}$ und $\mathfrak{I}(C) = \mathbf{1}$ gilt $\mathfrak{I}(\alpha) = \mathbf{1}$.

2. Die Formel $\alpha = A \vee \neg A$ ist tautolgisch, da sie sowohl für $\mathfrak{I}(A) = \mathbf{1}$ als auch für $\mathfrak{I}(A) = \mathbf{0}$ die Bewertung $\mathfrak{I}(\alpha) = \mathbf{1}$ annimmt.

3. Die Formel $\alpha = A \wedge \neg A$ ist widerspruchsvoll, da sie sowohl für $\mathfrak{I}(A) = \mathbf{1}$ als auch für $\mathfrak{I}(A) = \mathbf{0}$ die Bewertung $\mathfrak{I}(\alpha) = \mathbf{0}$ annimmt.

4. Die Formel $\alpha = (A \vee \neg B) \wedge (A \vee B \rightarrow C)$ in 20.1.15 liefert ein Beispiel. Für $\mathfrak{I}(A) = \mathbf{0}$, $\mathfrak{I}(B) = \mathbf{1}$ und $\mathfrak{I}(C) = \mathbf{0}$ gilt $\mathfrak{I}(\alpha) = \mathbf{0}$.

Aufgabe 20.1.27

1. Es sind

α	β	$\neg(\alpha \wedge \beta)$
0	**0**	**1**
0	**1**	**1**
1	**0**	**1**
1	**1**	**0**

und

α	β	$\neg\alpha \vee \neg\beta$
0	**0**	**1**
0	**1**	**1**
1	**0**	**1**
1	**1**	**0**

. Da die Wahrheitstafeln übereinstimmen, gilt $\neg(\alpha \wedge \beta) \approx \neg\alpha \vee \neg\beta$.

2. Es sind

α	β	$\neg(\alpha \vee \beta)$
0	**0**	**1**
0	**1**	**0**
1	**0**	**0**
1	**1**	**0**

und

α	β	$\neg\alpha \wedge \neg\beta$
0	**0**	**1**
0	**1**	**0**
1	**0**	**0**
1	**1**	**0**

. Da die Wahrheitstafeln übereinstimmen, gilt $\neg(\alpha \vee \beta) \approx \neg\alpha \wedge \neg\beta$.

Lösungen der Aufgaben in 20.1.3

Aufgabe 20.1.32 Gegeben sei die Formel $\neg(\neg A \wedge \neg(A \vee \neg(B \vee A)))$. Es gilt:

$$\begin{array}{rcll}
\neg(\neg A \wedge \neg(A \vee \neg(B \vee A))) & \approx & \neg\neg A \vee \neg\neg(A \vee \neg(B \vee A)) & \text{De Morgan} \\
& \approx & A \vee \neg\neg(A \vee \neg(B \vee A)) & \text{Negationsregel} \\
& \approx & A \vee (A \vee \neg(B \vee A)) & \text{Negationsregel} \\
& \approx & A \vee (A \vee (\neg B \wedge \neg A)) & \text{De Morgan.}
\end{array}$$

Aufgabe 20.1.37 Sei $\alpha = \neg((A \vee B) \wedge (C \to D))$. Wir ersetzen erst den Implikationspfeil, berechnen dann die NNF und benutzen anschließend die Distributivgesetze. Dann gilt

$$\begin{array}{rcll}
\alpha & \approx & \neg((A \vee B) \wedge (\neg C \vee D)) & \text{Ersetzen von } \to \\
& \approx & (\neg(A \vee B) \vee \neg(\neg C \vee D)) & \text{De Morgan} \\
& \approx & (\neg A \wedge \neg B) \vee (\neg\neg C \wedge \neg D) & \text{De Morgan} \\
& \approx & (\neg A \wedge \neg B) \vee (C \wedge \neg D) & \text{Negationsregel, NNF} \\
& \approx & ((\neg A \wedge \neg B) \vee C) \wedge ((\neg A \wedge \neg B) \vee \neg D) & \text{Distributivgesetz} \\
& \approx & (\neg A \vee C) \wedge (\neg B \vee C) \wedge ((\neg A \wedge \neg B) \vee \neg D) & \text{Distributivgesetz} \\
& \approx & (\neg A \vee C) \wedge (\neg B \vee C) \wedge (\neg A \vee \neg D) \wedge (\neg B \vee \neg D) & \text{Distributivgesetz.}
\end{array}$$

Aufgabe 20.1.41 Sei $\alpha = \neg((A \vee B) \to (\neg C \wedge D))$. Dann gilt

$$\begin{array}{rcll}
\alpha & \approx & \neg(\neg(A \vee B) \vee (\neg C \wedge D)) & \text{Ersetzen von } \to \\
& \approx & \neg((\neg A \wedge \neg B) \vee (\neg C \wedge D)) & \text{De Morgan} \\
& \approx & \neg(\neg A \wedge \neg B) \wedge \neg(\neg C \wedge D) & \text{De Morgan} \\
& \approx & (\neg\neg A \vee \neg\neg B) \wedge (\neg\neg C \vee \neg D) & \text{De Morgan} \\
& \approx & (A \vee B) \wedge (C \vee \neg D) & \text{Negationsregel, NNF} \\
& \approx & ((A \vee B) \wedge C) \vee ((A \vee B) \wedge \neg D) & \text{Distributivgesetz} \\
& \approx & ((A \wedge C) \vee (B \wedge C)) \vee ((A \wedge \neg D) \vee (B \wedge \neg D)) & \text{Distributivgesetz} \\
& \approx & (A \wedge C) \vee (B \wedge C) \vee (A \wedge \neg D) \vee (B \wedge \neg D) & \text{Klammern.}
\end{array}$$

Lösungen der Aufgaben in 20.1.4

Aufgabe 20.1.44 Die Formel $(\alpha \to \beta) \wedge \neg\beta \to \neg\alpha$ ist von der Bauart $\alpha_1 \wedge \alpha_2 \to \gamma$ mit $\alpha_1 = (\alpha \to \beta)$, $\alpha_2 = \neg\beta$ und $\gamma = \neg A$. Die Wahrheitstafel ist:

α	β	$\alpha \to \beta$	$(\alpha \to \beta) \wedge \neg\beta$	$(\alpha \to \beta) \wedge \neg\beta \to \neg\alpha$
0	**0**	**1**	**1**	**1**
0	**1**	**1**	**0**	**1**
1	**0**	**0**	**0**	**1**
1	**1**	**1**	**0**	**1**

Somit ist die Formel tautologisch, also ein gültiges Argument.

Aufgabe 20.1.51

1.	$A \to (B \vee C)$	Prämisse
2.	$\neg B$	Prämisse
3.	$\neg C$	Prämisse
4.	$\neg B \wedge \neg C$	2, 3, con
5.	$\neg(B \vee C)$	4, De Morgan
6.	$\neg A$	1, 5, mt

Aufgabe 20.1.52 Wir beweisen die Formel

$$(A \vee \neg B \to C) \wedge (C \to D) \wedge A \to D.$$

1.	$(A \vee \neg B \to C)$	Prämisse
2.	$C \to D$	Prämisse
3.	A	Prämisse
4.	$A \vee \neg B$	3, add
5.	C	1, 4, mp
6.	D	2, 5, mp

Aufgabe 20.1.56

1. An Stelle von $(\alpha \to \beta) \wedge (\beta \to \gamma) \to (\alpha \to \gamma)$ beweisen wir die Formel $(\alpha \to \beta) \wedge (\beta \to \gamma) \wedge \alpha \to \gamma$.

1.	$\alpha \to \beta$	Prämisse
2.	$\beta \to \gamma$	Prämisse
3.	α	Prämisse
4.	β	1, 3, mp
5.	γ	2, 4, mp

2. An Stelle von $(\neg\alpha \vee \beta) \wedge (\beta \rightarrow \gamma) \rightarrow (\alpha \rightarrow \gamma)$ beweisen wir die Formel $(\neg\alpha \vee \beta) \wedge (\beta \rightarrow \gamma) \wedge \alpha \rightarrow \gamma$.

1.	$\neg\alpha \vee \beta$	Prämisse
2.	$\beta \rightarrow \gamma$	Prämisse
3.	α	Prämisse
4.	$\alpha \rightarrow \beta$	1, imp
5.	β	3, 4, mp
6.	γ	2, 5, mp

3.

1.	$\alpha \rightarrow \beta$	Prämisse
2.	$\neg\gamma \vee \alpha$	Prämisse
3.	γ	Prämisse
4.	$\gamma \rightarrow \alpha$	2, imp
5.	α	3, 4, mp
6.	β	1, 5, mp

4.

1.	α	Prämisse
2.	$\neg\alpha$	Prämisse
3.	$\alpha \vee \beta$	1, add
4.	$\beta \vee \alpha$	3, comm
5.	$\neg\neg\beta \vee \alpha$	4, dn
6.	$\neg\beta \rightarrow \alpha$	5, imp
7.	$\neg\neg\beta$	2, 6, mt
8.	β	7, dn

Lösungen der Aufgaben in 20.2.2

Aufgabe 20.2.8

Gegeben sei die Formel

$$((\forall x(\exists y P(x,y)) \wedge (\forall z P(z,z))) \wedge (P(z,f(z)) \wedge \neg P(a,a))).$$

Wir können die umfassenden Klammern weglassen und erhalten

$$(\forall x(\exists y P(x,y)) \wedge (\forall z P(z,z))) \wedge (P(z,f(z)) \wedge \neg P(a,a)).$$

Diese Formel ist von der Form $(\alpha_1 \wedge \alpha_2) \wedge (\alpha_3 \wedge \alpha_4)$ mit den Formeln

$$\begin{array}{rcl}\alpha_1 & = & \forall x(\exists y P(x,y)) \\ \alpha_2 & = & (\forall z P(z,z)) \\ \alpha_3 & = & P(z, f(z)) \\ \alpha_4 & = & \neg P(a,a).\end{array}$$

Da die Präzedenzregeln der Aussagenlogik gelten, können wir die Klammern um $(\alpha_1 \wedge \alpha_2)$ und $(\alpha_3 \wedge \alpha_4)$ weglassen.

Betrachten wir nun die Teilformeln $\alpha_1, \ldots, \alpha_4$. In der Teilformel α_1 bezieht sich der Allquantor auf die Formel $\exists y P(x,y)$. Da die Quantoren stärker binden als die aussagenlogischen Junktoren, kann die Klammer um $\exists y P(x,y)$ weggelassen werden. Ebenso können wir auf die Klammerung um α_2 verzichten. Wir erhalten

$$\forall x \exists y P(x,y) \wedge \forall z P(z,z) \wedge P(z, f(z)) \wedge \neg P(a,a).$$

Keine der Klammern in dieser Formel ist überflüssig.

Aufgabe 20.2.13

1. Der Wirkungsbereich des Allquantors in der Formel $\forall x \exists y P(x,y,z)$ ist die Formel $\exists y P(x,y,z)$, die des Existenzquantors ist $P(x,y,z)$. Die Variable x ist durch den Allquantor gebunden, die von y durch den Existenzquantor. Die Variable z ist frei.

2. Der Wirkungsbereich des ersten Existenzquantors in der Formel

$$\exists y(P(y) \wedge \exists y(R(y,z) \wedge Q(y)))$$

   ist die Formel $(P(y) \wedge \exists y(R(y,z) \wedge Q(y)))$, der des zweiten ist die Formel $(R(y,z) \wedge Q(y))$. Die Variable y ist durch beide Quantoren gebunden, die Variable z ist frei.

3. Der Wirkungsbereich des ersten Existenzquantors in

$$\exists x(\exists y(\exists z(P(x,y) \wedge Q(x,y))))$$

   ist $(\exists y(\exists z(P(x,y) \wedge Q(x,y))))$, der des zweiten ist $(\exists z(P(x,y) \wedge Q(x,y)))$, und der des dritten Existenzquantors ist $(P(x,y) \wedge Q(x,y))$. Die Variable x wird durch den ersten Existenzquantor gebunden, die Variable y durch den zweiten.

Aufgabe 20.2.15

Jede Konstante liefert ein Beispiel, aber auch beispielsweise die Formel $\forall x P(x,1)$.

Aufgabe 20.2.19

In der Formel $\exists z((\neg\exists x(P(x,z) \vee \forall y Q(x,f(y)))) \vee \forall y P(g(z,y),z))$ gibt es keine Variable, die sowohl frei als auch gebunden ist. Allerdings wird die Variable y an zwei Stellen durch einen Quantor gebunden. Wir ersetzen y im Wirkungsbereich des ersten Quantors durch die Variable w und erhalten eine konsistent umbenannte Formel

$$\exists z((\neg\exists x(P(x,z) \vee \forall w Q(x,f(w)))) \vee \forall y P(g(z,y),z)).$$

Lösungen der Aufgaben in 20.2.3

Aufgabe 20.2.25

1. (a) Sei $U = \mathbb{N}$ das Universum.

   (b) Seien $\mathfrak{I}(P) = \mathbf{P} = \{2n \mid n \in \mathbb{N}\}$ und $\mathfrak{I}(Q) = \mathbf{Q} = \{2n-1 \mid n \in \mathbb{N}\}$. Dann ist $\mathbf{P}$ die Menge der geraden natürlichen Zahlen, und $\mathbf{Q}$ ist die Menge der ungeraden natürlichen Zahlen. Da jede natürliche Zahl gerade oder ungerade ist, ist $\mathfrak{I}(\forall x(P(x) \vee Q(x))) = \mathbf{1}$.

2. (a) Sei $U = \mathbb{N}$ das Universum.

   (b) Seien $\mathfrak{I}(P) = \mathbf{P} = \{2n \mid n \in \mathbb{N}\}$ und $\mathfrak{I}(Q) = \mathbf{Q} = \{2n+1 \mid n \in \mathbb{N}\}$. Dann ist $\mathbf{P}$ die Menge der geraden natürlichen Zahlen, und $\mathbf{Q}$ ist die Menge der ungeraden natürlichen Zahlen, die ≥ 3 sind. Da 1 weder in $\mathbf{P}$ noch in $\mathbf{Q}$ liegt, ist $\mathfrak{I}(\forall x(P(x) \vee Q(x))) = \mathbf{0}$.

3. Nein, denn das Universum ist nicht die leere Menge. Wenn alle Elemente des Universums in $\mathfrak{I}(P)$ liegen, muss es ein Element geben, das in $\mathfrak{I}(P)$ liegt.

4. Ja. Sei etwa $U = \mathbb{N}$ und $\mathfrak{I}(P) = \mathbf{P} = \{2n \mid n \in \mathbb{N}\}$. Dann gilt $\mathfrak{I}(\forall x P(x)) = \mathbf{0}$, da keine ungerade natürliche Zahl in $\mathbf{P}$ liegt, aber es ist $\mathfrak{I}(\exists x P(x)) = \mathbf{1}$.

Aufgabe 20.2.33

1. **Behauptung:** $\neg(\forall x \alpha) \approx \exists x(\neg\alpha)$

   Beweis: Es gilt

$$\begin{aligned} \mathfrak{I}(\neg(\forall x\alpha)) = \mathbf{1} &\Leftrightarrow \mathfrak{I}(\forall x\alpha) = \mathbf{0} \\ &\Leftrightarrow \text{Es gibt ein } \mathrm{x_U} \in U \text{ mit } \mathfrak{I}[x/\mathrm{x_U}](\neg\alpha) = \mathbf{1} \\ &\Leftrightarrow \mathfrak{I}(\exists x(\neg\alpha)) = \mathbf{1}. \end{aligned}$$

   Es folgt $\neg(\forall x\alpha) \approx \exists x(\neg\alpha)$, die Behauptung.

2. **Behauptung:** $\forall x\alpha \wedge \forall x\beta \approx \forall x(\alpha \wedge \beta)$

   Beweis: Es gilt

$$\begin{aligned}
\mathfrak{I}(\forall x\alpha \wedge \forall x\beta) = \mathbf{1} &\Leftrightarrow \mathfrak{I}(\forall x\alpha) = \mathbf{1} \text{ und } \mathfrak{I}(\forall x\beta) = \mathbf{1}\\
&\Leftrightarrow \mathfrak{I}[x/\mathrm{x_U}](\alpha) = \mathbf{1} \text{ und } \mathfrak{I}[x/\mathrm{x_U}](\beta) = \mathbf{1}\\
&\ \text{für alle } \mathrm{x_U} \in U\\
&\Leftrightarrow \mathfrak{I}[x/\mathrm{x_U}](\alpha \wedge \beta) = \mathbf{1} \text{ für alle } \mathrm{x_U} \in U\\
&\Leftrightarrow \mathfrak{I}(\forall x(\alpha \wedge \beta)) = \mathbf{1}.
\end{aligned}$$

   Es folgt $\forall x\alpha \wedge \forall x\beta \approx \forall x(\alpha \wedge \beta)$, die Behauptung.

3. **Behauptung:** $\forall x\alpha \wedge \beta \approx \forall x(\alpha \wedge \beta)$

   Beweis: Es gilt

$$\begin{aligned}
\forall x(\alpha \wedge \beta) &\approx \forall x\alpha \wedge \forall x\beta \text{ mit 2. dieser Aufgabe}\\
&\approx \forall x\alpha \wedge \beta \text{ mit 4. in 20.2.32.}
\end{aligned}$$

4. **Behauptung:** $\forall x\alpha \vee \beta \approx \forall x(\alpha \vee \beta)$

   Beweis: Es gilt

$$\begin{aligned}
\mathfrak{I}(\forall x(\alpha \vee \beta)) = \mathbf{1} &\Leftrightarrow \text{Für alle } \mathrm{x_U} \in U \text{ gilt } \mathfrak{I}[x/\mathrm{x_U}](\alpha \vee \beta) = \mathbf{1}\\
&\Leftrightarrow \mathfrak{I}[x/\mathrm{x_U}](\alpha) = \mathbf{1} \text{ für alle } \mathrm{x_U} \in U \text{ oder}\\
&\ \mathfrak{I}[x/\mathrm{x_U}](\beta) = \mathbf{1} \text{ für alle } \mathrm{x_U} \in U\\
&\Leftrightarrow \mathfrak{I}(\forall x\alpha) = \mathbf{1} \text{ oder } \mathfrak{I}(\forall x\beta) = \mathbf{1}\\
&\Leftrightarrow \mathfrak{I}(\forall x\alpha) = \mathbf{1} \text{ oder } \mathfrak{I}(\beta) = \mathbf{1} \text{ mit 4. in 20.2.32}\\
&\Leftrightarrow \mathfrak{I}(\forall x\alpha \vee \beta) = \mathbf{1}.
\end{aligned}$$

Aufgabe 20.2.34 Der umgangssprachlich formulierte Satz „Für alle geraden natürlichen Zahlen x gibt es eine natürliche Zahl y mit $x = 2y$“ ist von der Form $\forall x\exists y\alpha$. Diese Aussage ist wahr. Würden wir die Quantoren vertauschen bekämen wir „Es gibt eine natürliche Zahl y, sodass alle geraden natürlichen Zahlen x von der Form $x = 2y$ sind“. Letzteres ist natürlich Unsinn, es sollten also in der Tat die Formeln $\forall x\exists y\alpha$ und $\exists y\forall x\alpha$ nicht logisch äquivalent sein.

Formalisieren wir unser Beispiel jetzt sauber.

Das Universum U besteht aus den natürlichen Zahlen, also $U = \mathbb{N}$. Wir definieren ein einstelliges Funktionssymbol f und ein einstelliges Prädikatssymbol P. Jetzt interpretieren wir $\mathfrak{I}(f) = \mathbf{f} : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, definiert durch $\mathbf{f}(n) = 2n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $\mathfrak{I}(P) = \mathbf{P} = \{2n \mid n \in \mathbb{N}\}$. Weiter setzen wir $\alpha = P(x) \to x = f(y)$. Die Formel $\forall x\exists y(P(x) \to x = f(y))$ modelliert den Sachverhalt „Für alle geraden natürlichen

Zahlen x gibt es eine natürliche Zahl y mit $x = 2y$", und $\exists y \forall x (P(x) \rightarrow x = f(y)$ bedeutet „Es gibt eine natürliche Zahl y, sodass alle geraden natürlichen Zahlen x von der Form $x = 2y$ sind".

Aufgabe 20.2.35

In beiden Beispielen benutzen wir als Universum die natürlichen Zahlen mit den Teilmengen der geraden und der ungeraden Zahlen.

1. Sei $U = \mathbb{N}$. Sei $\mathfrak{I}(P) = \mathbf{P} = \{2n \mid n \in \mathbb{N}\}$ die Menge der geraden natürlichen Zahlen. Sei $\mathfrak{I}(Q) = \mathbf{Q} = \{2n-1 \mid n \in \mathbb{N}\}$ die Menge der ungeraden natürlichen Zahlen.

   Dann gilt $\mathfrak{I}(\forall x(P(x) \vee Q(x))) = \mathbf{1}$, denn jede natürliche Zahl ist gerade oder ungerade.

   Es ist $\mathfrak{I}(\forall x P(x) \vee \forall x Q(x)) = \mathbf{0}$, denn $\mathfrak{I}(\forall x P(x)) = \mathbf{0}$ und $\mathfrak{I}(\forall x Q(x)) = \mathbf{0}$. Somit sind $\forall x\alpha \vee \forall x\beta$ und $\forall x(\alpha \vee \beta)$ für $\alpha = P(x)$ und $\beta = Q(x)$ nicht logisch äquivalent.

2. Wie vorher sei $U = \mathbb{N}$. Sei $\mathfrak{I}(P) = \mathbf{P} = \{2n \mid n \in \mathbb{N}\}$ die Menge der geraden natürlichen Zahlen. Sei $\mathfrak{I}(Q) = \mathbf{Q} = \{2n-1 \mid n \in \mathbb{N}\}$ die Menge der ungeraden natürlichen Zahlen.

   Dann gilt $\mathfrak{I}(\exists x(P(x) \wedge Q(x))) = \mathbf{0}$, denn keine natürliche Zahl ist gerade und ungerade.

   Es ist $\mathfrak{I}(\exists x P(x) \wedge \exists x Q(x)) = \mathbf{1}$, denn $\mathfrak{I}(\exists x P(x)) = \mathbf{1}$ und $\mathfrak{I}(\exists x Q(x)) = \mathbf{1}$. Somit sind $\exists x\alpha \wedge \exists x\beta$ und $\exists x(\alpha \wedge \beta)$ für $\alpha = P(x)$ und $\beta = Q(x)$ nicht logisch äquivalent.

Aufgabe 20.2.37

1.

$$\begin{array}{rcll}
\forall x P(x) \wedge \exists x Q(x) & \approx & \forall x P(x) \wedge \exists x_1 Q(x_1) & \text{Konsistente Umbenennung} \\
& \approx & \forall x(P(x) \wedge \exists x_1 Q(x_1)) & \text{Quantifizierung} \\
& \approx & \forall x(\exists x_1 Q(x_1) \wedge P(x)) & \text{Kommutativität} \\
& \approx & \forall x(\exists x_1(Q(x_1) \wedge P(x))) & \text{Quantifizierung} \\
& \approx & \forall x(\exists x_1(P(x) \wedge Q(x_1))) & \text{Kommutativität} \\
& \approx & \forall x \exists x_1(P(x) \wedge Q(x)) & \text{Klammern}
\end{array}$$

2.

$$\begin{array}{rcl}
\exists x Q(x) \land \forall y P(z) \land \forall y P(y) & \approx & \exists x Q(x) \land \forall y (P(z) \land P(y)) \\
& & \text{Quantorzusammenfassung} \\
& \approx & \exists x (Q(x) \land \forall y (P(z) \land P(y))) \\
& & \text{Quantifizierung} \\
& \approx & \exists x (\forall y (P(z) \land P(y)) \land Q(x)) \\
& & \text{Kommutativität} \\
& \approx & \exists x (\forall y ((P(z) \land P(y)) \land Q(x))) \\
& & \text{Quantifizierung} \\
& \approx & \exists x (\forall y (Q(x) \land (P(z) \land P(y)))) \\
& & \text{Kommutativität} \\
& \approx & \exists x \forall y (Q(x) \land P(z) \land P(y)) \\
& & \text{Klammern}
\end{array}$$

Lösungen der Aufgaben in 20.2.4

Aufgabe 20.2.40

Es gilt:

$$\begin{array}{rcll}
\neg(P(x) \to \forall y Q(y)) \lor R(z) & \approx & \neg(\neg P(x) \lor \forall y Q(y)) \lor R(z) & \text{Ersetzen von } \to \\
& \approx & \neg\neg P(x) \land \neg\forall y Q(y) \lor R(z) & \text{De Morgan} \\
& \approx & P(x) \land \neg\forall y Q(y) \lor R(z) & \text{Doppelte Negation} \\
& \approx & P(x) \land \exists y \neg Q(y) \lor R(z) & \text{Quantortausch}
\end{array}$$

Die zu $\neg(P(x) \to \forall y Q(y)) \lor R(z)$ logisch äquivalente Formel $P(x) \land \exists y \neg Q(y) \lor R(z)$ ist in Negationsnormalform.

Aufgabe 20.2.43

Die Formel $\exists z((\neg\exists x(P(x,z) \lor \forall y Q(x, f(y)))) \lor \forall y P(g(z,y), z))$ ist noch nicht konsistent umbenannt, denn die Variable y ist an zwei verschiedenen Stellen durch einen Quantor gebunden. Im Wirkungsbereich des zweiten Quantors ersetzen wir y durch die neue Variable w und erhalten

$$\exists z((\neg\exists x(P(x,z) \lor \forall y Q(x, f(y)))) \lor \forall w P(g(z,w), z)).$$

Diese Formel ist konsistent umbenannt.

Es gilt:

$$
\begin{array}{lll}
& \exists z((\neg\exists x(P(x,z) \vee \forall y Q(x,f(y)))) \vee \forall w P(g(z,w),z)) & \\
\approx & \exists z((\forall x \neg(P(x,z) \vee \forall y Q(x,f(y)))) \vee \forall w P(g(z,w),z)) & \text{Quantorwechsel} \\
\approx & \exists z((\forall x(\neg P(x,z) \wedge \neg\forall y Q(x,f(y)))) \vee \forall w P(g(z,w),z)) & \text{De Morgan} \\
\approx & \exists z((\forall x(\neg P(x,z) \wedge \exists y \neg Q(x,f(y)))) \vee \forall w P(g(z,w),z)) & \text{Quantorwechsel} \\
\approx & \exists z(\forall x((\neg P(x,z) \wedge \exists y \neg Q(x,f(y))) \vee \forall w P(g(z,w),z))) & \text{Quantorwechsel} \\
\approx & \exists z(\forall x(\exists y(\neg P(x,z) \wedge \neg Q(x,f(y))) \vee \forall w P(g(z,w),z))) & \text{Quantifizierung} \\
\approx & \exists z(\forall x(\exists y((\neg P(x,z) \wedge \neg Q(x,f(y))) \vee \forall w P(g(z,w),z)))) & \text{Quantifizierung} \\
\approx & \exists z(\forall x(\exists y(\forall w(\neg P(x,z) \wedge \neg Q(x,f(y))) \vee P(g(z,w),z)))) & \text{Quantifizierung} \\
\approx & \exists z \forall x \exists y \forall w(\neg P(x,z) \wedge \neg Q(x,f(y))) \vee P(g(z,w),z) & \text{Klammern}
\end{array}
$$

Diese Formel ist in pränexer Normalform, ihr Kern ist die Formel

$$(\neg P(x,z) \wedge \neg Q(x,f(y))) \vee P(g(z,w),z).$$

Den Kern überführen wir mit Hilfe des Distributivgesetzes in konjunktive Normalform, also

$$(\neg P(x,z) \vee P(g(z,w),z)) \wedge (\neg Q(x,f(y)) \vee P(g(z,w),z)).$$

Die gesuchte Formel ist dann

$$\exists z \forall x \exists y \forall w(\neg P(x,z) \vee P(g(z,w),z)) \wedge (\neg Q(x,f(y)) \vee P(g(z,w),z)).$$

Lösungen der Aufgabe in 20.2.5

Aufgabe 20.2.49

1.	$\forall x(P(x) \rightarrow R(x))$	Prämisse
2.	$\neg R(y)$	Prämisse
3.	$P(a) \rightarrow R(a)$	1, $\forall$-Initiierung
4.	$\neg P(a)$	2, 3, mt

Anhang