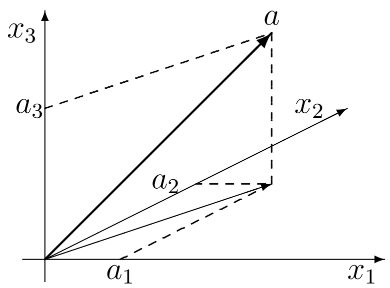
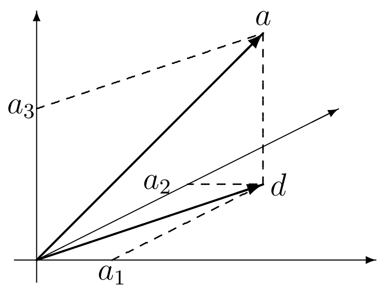
Inhalt Vektoren im Raum, das Vektorprodukt, das Spatprodukt, Ebenen im Raum

1 Vektoren im Raum

Ein Vektor im Raum ist eine Klasse gleichlanger und gleichgerichteter Pfeile im Raum; jeder Pfeil der Klasse repräsentiert den Vektor.



Beschreibung durch Koordinaten
Wir wählen ein rechtwinkliges Koordinatensystem. Ein Vektor wird dann repräsentiert durch einen Ortsvektor vom Nullpunkt zu einem Punkt des Raumes, der durch Koordinaten (a_1, a_2, a_3) beschrieben wird.
Vektoren im Raum entsprechen also Tripeln (a_1, a_2, a_3) reeller Zahlen.



Länge eines Vektors
Ein Vektor $a = (a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{R}^3$ hat die Länge

$$|a| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}.$$

Beweis: Nach dem Satz von Pythagoras gilt
$|a|^2 = |d|^2 + a_3^2 = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2$.

Skalarprodukt zweier Vektoren
Für $a, b \in \mathbb{R}^3$ setzt man $a \cdot b := |a| \cdot |b| \cos\varphi$ (wobei φ der Winkel zwischen a, b ist).

Da a, b in einer Ebene liegen, gilt der *Cosinus-Satz* $|a - b|^2 = |a|^2 + |b|^2 - 2a \cdot b$.

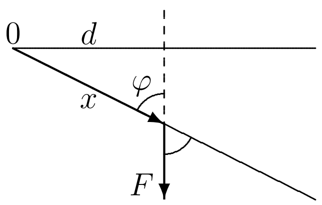
Für $a = (a_1, a_2, a_3)$, $b = (b_1, b_2, b_3) \in \mathbb{R}^3$ folgt $a \cdot b = \frac{1}{2}(|a|^2 + |b|^2 - |a-b|^2) = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$.
Es gelten entsprechende Rechenregeln wie im $\mathbb{R}^2$, insbesondere ist $|a| = \sqrt{a \cdot a}$.

Es gilt die *Ungleichung von Cauchy-Schwarz:* $|a \cdot b| \leq |a|\,|b|$ für $a, b \in \mathbb{R}^3$.

Man definiert: $a \perp b \iff a \cdot b = 0$ für $a, b \in \mathbb{R}^3$.

Zusätzlich zu diesen (bereits bekannten) Begriffen kommt im $\mathbb{R}^3$ das *Vektorprodukt* hinzu:

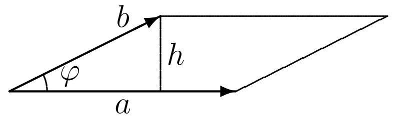
2 Das Vektorprodukt zweier Vektoren



Motivation
In der Physik betrachtet man das *Drehmoment*.
Auf einen Punkt mit Ortsvektor x wirke eine Kraft F in der Drehebene. Es sei d der Abstand der „Wirkungslinie“ der Kraft von der Drehachse (im Nullpunkt); wegen $\sin\varphi = \frac{d}{|x|}$ ist $d = |x| \sin\varphi$.
Das Drehmoment M hat dann den Betrag $|M| = |F| \cdot d = |F| \cdot |x| \sin\varphi$. Das Drehmoment hat auch eine Richtung (in Richtung Drehachse), ist also ein Vektor.

Definition Sind a, b Vektoren im Raum, so sei $a \times b$ derjenige Vektor im Raum mit:
1. $|a \times b| = |a|\,|b| \sin\varphi$, wobei φ der von a, b eingeschlossene Winkel ist,
2. $a \times b \perp a$ und $a \times b \perp b$,
3. Die Richtung von $a \times b$ ergibt sich aus der *Rechte-Hand-Regel:* Daumen (der rechten Hand) in Richtung a, Zeigefinger in Richtung b, Mittelfinger in Richtung $a \times b$.

Bemerkung $|a \times b| = |a||b| \sin\varphi$ ist die Fläche des von a, b aufgespannten Parallelogramms.

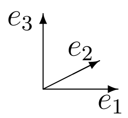


Beweis: Das Parallelogramm hat die Höhe $h = |b| \sin\varphi$.
Die Fläche ist dann gleich $|a|h = |a|\,|b| \sin\varphi$.

Haben a, b die gleiche (oder entgegengesetzte) Richtung, ist also $\varphi = 0°$ oder $\varphi = 180°$, so ist $\sin\varphi = 0$, also $a \times b = 0$.

Rechenregeln für das Vektorprodukt Sind a, b, c Vektoren im Raum, $r \in \mathbb{R}$, so gilt:
(1) $a \times (rb) = r(a \times b) = (ra) \times b$,
(2) $a \times b = -b \times a$,
(3) $a \times (b + c) = a \times b + a \times c$.
(1) und (2) folgen leicht aus der Definition, (3) ist etwas schwieriger zu zeigen.

Beschreibung des Vektorprodukts in Koordinaten



Für die *Einheitsvektoren* $e_1 := (1,0,0)$, $e_2 := (0,1,0)$, $e_3 := (0,0,1)$ gilt
$e_1 \times e_2 = e_3, \quad e_2 \times e_3 = e_1, \quad e_3 \times e_1 = e_2.$

Für einen beliebigen Vektor $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ gilt

$$x = (x_1, x_2, x_3) = x_1(1,0,0) + x_2(0,1,0) + x_3(0,0,1) = x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3.$$

Für Vektoren $x = (x_1, x_2, x_3)$, $y = (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3$ folgt mit den obigen Rechenregeln:

$$\begin{aligned} x \times y &= (x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3) \times (y_1e_1 + y_2e_2 + y_3e_3) \\ &= x_1y_1\, e_1 \times e_1 + x_1y_2\, e_1 \times e_2 + x_1y_3\, e_1 \times e_3 + \ldots = 0 + x_1y_2\, e_3 - x_1y_3\, e_2 + \ldots \\ &= (x_2y_3 - x_3y_2,\ x_3y_1 - x_1y_3,\ x_1y_2 - x_2y_1). \end{aligned}$$

Grassmann-Identität *Für alle $a, b, c \in \mathbb{R}^3$ gilt $a \times (b \times c) = (a \cdot c)b - (a \cdot b)c$.*
Beweis als Übungsaufgabe (etwas langwierig).

Folgerungen
a) $a \times b = 0 \iff a, b$ sind *linear abhängig*, d. h. a ist Vielfaches von b oder umgekehrt.

Beweis: „$\Leftarrow$“: Sind a, b linear abhängig, so haben a, b die gleiche (oder entgegengesetzte) Richtung, nach der obigen Bemerkung ist also $a \times b = 0$.
„$\Rightarrow$“: Sei $a \times b = 0$. Für $a = 0$ sind a, b linear abhängig ($a = 0b$). Ist $a \neq 0$, so folgt aus $a \times b = 0$ mit der Grassmann-Identität $0 = a \times (a \times b) = (a \cdot b)a - (a \cdot a)b$, also $(a \cdot a)b = (a \cdot b)a$, damit ist $b = \frac{a \cdot b}{a \cdot a} a$ ein Vielfaches von a.

b) Seien $a, b \in \mathbb{R}^3$ linear unabhängig (d. h. nicht linear abhängig). Für alle $x \in \mathbb{R}^3$ gilt:
$x \perp a$ und $x \perp b \iff x \in \mathbb{R}(a \times b) := \{t(a \times b) \mid t \in \mathbb{R}\}$.

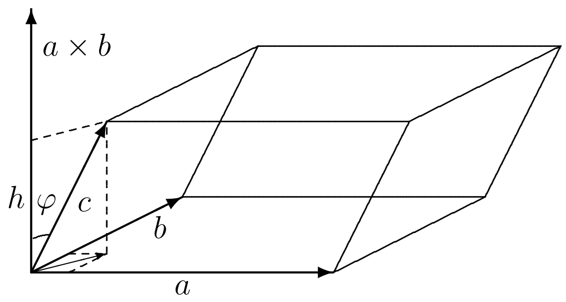
Beweis: „$\Leftarrow$“ ist klar wegen $a \times b \perp a$ und $a \times b \perp b$.
„$\Rightarrow$“: Aus $x \perp a$ und $x \perp b$ folgt $x \times (a \times b) = (x \cdot b)a - (x \cdot a)b = 0$. Nach a) sind dann $x, a \times b$ linear abhängig, also x ein Vielfaches von $a \times b$ oder umgekehrt. Da a, b linear unabhängig sind, ist $a \times b \neq 0$ nach a). Dann ist x in jedem Fall ein Vielfaches von $a \times b$ (denn aus $a \times b = rx$ folgt $r \neq 0$, also $x = \frac{1}{r}(a \times b)$).

3 Das Spatprodukt dreier Vektoren

Für Vektoren a, b, c im Raum heißt $(a \times b) \cdot c \in \mathbb{R}$ das *Spatprodukt* von a, b, c.

Das Spatprodukt $(a \times b) \cdot c$ ist gleich $\pm$Volumen des von a, b, c aufgespannten Spates.
Die von (linear unabhängigen) a, b aufgespannte Ebene zerschneidet den Raum in zwei Halbräume. Das Vorzeichen von $(a \times b) \cdot c$ ist gleich $+$, wenn $a \times b, c$ im gleichen Halbraum liegen (dann nennt man a, b, c ein *Rechtssystem*), sonst gleich $-$.

Beweis (für den Fall, dass $a \times b, c$ im gleichen Halbraum liegen):



Der Spat hat die Höhe $h = |c| \cos \varphi$, wobei φ der Winkel zwischen $a \times b, c$ ist. Dann gilt

$$\begin{aligned} \text{Volumen des Spates} &= \text{Grundfläche} \cdot \text{Höhe} \\ &= |a \times b| \cdot |c| \cdot \cos \varphi \\ &= (a \times b) \cdot c \end{aligned}$$

(s. Definition des Skalarproduktes $(a \times b) \cdot c$).

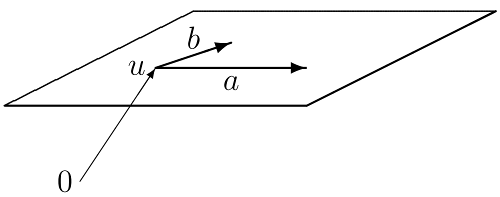
Folgerung *Seien $a, b \in \mathbb{R}^3$ linear unabhängig, also $a \times b \neq 0$. Dann gilt für alle $c \in \mathbb{R}^3$: $(a \times b) \cdot c = 0 \iff c$ liegt in der von a, b aufgespannten Ebene $\mathbb{R}a + \mathbb{R}b := \{sa + tb \mid s, t \in \mathbb{R}\}$.*

Beweis:

$$\begin{aligned} (a \times b) \cdot c = 0 &\iff \text{Der von } a, b, c \text{ aufgespannte Spat hat das Volumen } 0 \\ &\iff \text{Der von } a, b, c \text{ aufgespannte Spat hat die Höhe } 0 \qquad (\text{da } |a \times b| \neq 0) \\ &\iff c \text{ liegt in der von } a, b \text{ aufgespannten Ebene} \\ &\iff c \in \mathbb{R}a + \mathbb{R}b := \{sa + tb \mid s, t \in \mathbb{R}\}. \end{aligned}$$

4 Ebenen im Raum

1. Parameterdarstellung



Man wählt einen Punkt u in der Ebene und zwei linear unabhängige Richtungsvektoren a, b. Es ist

$$E_{u;a,b} = u + \mathbb{R}a + \mathbb{R}b := \{u + sa + tb \mid s, t \in \mathbb{R}\}$$

die von a, b aufgespannte Ebene durch u.

2. Beschreibung durch eine Gleichung

Die allgemeine Ebenengleichung ist $c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 = r$ mit $c = (c_1, c_2, c_3) \in \mathbb{R}^3$, $c \neq 0$ und $r \in \mathbb{R}$. Für $c \in \mathbb{R}^3$, $c \neq 0$ und $r \in \mathbb{R}$ setzt man

$$H_{c,r} := \{x \in \mathbb{R}^3 \mid c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 = r\} = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid c \cdot x = r\}.$$

$H_{c,r}$ ist eine Ebene im $\mathbb{R}^3$.

Frage: Wie bekommt man aus der Parameterdarstellung die Ebenengleichung?

Satz 1 *Seien a, b linear unabhängig und $u \in \mathbb{R}^3$. Dann gilt:*

$$E_{u;a,b} = H_{c,r} \quad \textit{mit} \;\; c := a \times b \quad \textit{und} \;\; r := (a \times b) \cdot u.$$

Beweis: „$\subseteq$“: Sei $x = u + sa + tb \in E_{u;a,b}$. Für $c = a \times b$ gilt dann (wegen $c \perp a,\ c \perp b$)

$$c \cdot x = (a \times b) \cdot (u + sa + tb) = (a \times b) \cdot u = r, \text{ also } x \in H_{c,r}.$$

„$\supseteq$“: Sei $x \in H_{c,r}$, also $c \cdot x = (a \times b) \cdot x = r = (a \times b) \cdot u$ und damit $(a \times b) \cdot (x - u) = 0$. Nach obiger Folgerung liegt dann $x - u$ in der von a, b aufgespannten Ebene $\mathbb{R}a + \mathbb{R}b$, also $x \in u + \mathbb{R}a + \mathbb{R}b = E_{u;a,b}$.

3. Hessesche Normalform

Die Ebene E sei durch $c \cdot x = r$ gegeben mit $c \in \mathbb{R}^3,\ c \neq 0,\ r \in \mathbb{R}$. Wir können $r \geq 0$ annehmen. Division der Gleichung durch $|c| \neq 0$ liefert die Gleichung

$$\frac{c}{|c|} \cdot x = \frac{r}{|c|}.$$

Setzen wir $n := \frac{c}{|c|},\ d := \frac{r}{|c|}$, so erhalten wir die Ebenengleichung in der Form $n \cdot x = d$ mit $n \in \mathbb{R}^3,\ |n| = 1,\ d \geq 0$ *(Hessesche Normalform der Ebenengleichung).*

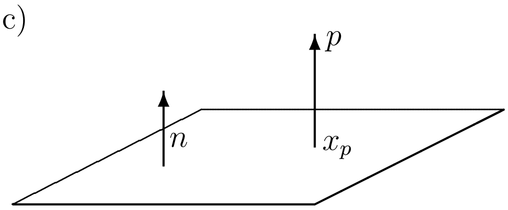
Satz 2 *Die Ebene E sei in Hessescher Normalform gegeben, also*

$$E = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid n \cdot x = d\} \quad \textit{mit}\ n \in \mathbb{R}^3,\ |n| = 1 \ \textit{und}\ d \in \mathbb{R},\ d \geq 0.$$

Dann gilt:
a) *$n \perp E$, d. h. $n \perp (x - y)$ für alle $x, y \in E$.*
b) *d ist der Abstand von 0 zu E, d. h. $d = min\{|x| \mid x \in E\}$.*
c) *Für alle $p \in \mathbb{R}^3$ ist $|p \cdot n - d|$ der Abstand von p zu E, d. h. $|p \cdot n - d| = min\{|p - x| \mid x \in E\}$.*

Beweis: a) Sind $x, y \in E$, also $n \cdot x = d = n \cdot y$, so gilt $n \cdot (x - y) = 0$, also $n \perp E$.

c)



Sei $p \in \mathbb{R}^3$. Es sei x_p der „Fußpunkt von p auf der Ebene“, also $x_p \in E$ mit $p - x_p \perp E$.
Dann ist $|p - x_p|$ der Abstand von p zur Ebene (analog zum $\mathbb{R}^2$).

Wegen $p - x_p \perp E,\ n \perp E$ ist $p - x_p$ ein Vielfaches von n, also $p - x_p = tn$ mit einem $t \in \mathbb{R}$. Bilden des Skalarprodukts mit n liefert

$$t = t(n \cdot n) = (tn) \cdot n = p \cdot n - x_p \cdot n = p \cdot n - d$$

(wegen $x_p \in E$). Also ist $|p - x_p| = |t| = |p \cdot n - d|$.

b) Speziell für $p = 0$ ist der Abstand von 0 zu E gleich $|0 \cdot n - d| = |d| = d$.