Lösungen der Nachklausur Mathematische Grundlagen (1141) WS 07/08

Nachklausur am 29.03.2008:

Lösungsvorschläge zu den Aufgaben

zu Aufgabe 1

Wir überführen die erweiterte Koeffizientenmatrix $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & | & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & | & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & | & 3 \end{pmatrix}$ in Treppennormalform. Dazu subtrahieren wir die zweite Zeile von der ersten und erhalten $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & | & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & | & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & | & 3 \end{pmatrix}$. Jetzt subtrahieren wir die dritte Zeile von der ersten und addieren sie zur zweiten. Wir erhalten

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & | & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & | & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & | & 3 \end{pmatrix}.$$

Diese Matrix ist in Treppennormalform. Wir fügen Nullzeilen so ein, dass die Matrix links des Strichs quadratisch wird und die Pivot-Positionen auf der Diagonalen stehen.

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & | & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & | & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & | & 3 \end{pmatrix}$$

Rechts des Strichs steht eine spezielle Lösung $\lambda_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Wir fügen -1 dort auf der Diagonalen ein, wo 0 steht und erhalten

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & | & -2 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & | & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & | & 3 \end{pmatrix}.$$

Jetzt können wir $\mathcal{L}$ ablesen. Es ist

$$\mathcal{L} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} + \left\{ a \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R} \right\}.$$

zu Aufgabe 2

Es sind

$$\begin{array}{rcrcrcr} f(v_1) & = & 0 \cdot v_1 & + & 1 \cdot v_2 & + & 1 \cdot v_3 \\ f(v_2) & = & 0 \cdot v_1 & + & 0 \cdot v_2 & + & 1 \cdot v_3 \\ f(v_3) & = & 1 \cdot v_1 & - & 1 \cdot v_2 & + & 0 \cdot v_3. \end{array}$$

Es folgt

$$_{\mathcal{B}}\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Es ist $\dim(\mathrm{Bild}(f)) = \mathrm{Rg}({}_{\mathcal{B}}\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(f))$. Zur Rang-Bestimmung beginnen wir, die Matrix $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ in Treppennormalform zu überführen. Wir vertauschen die erste und die dritte Zeile und erhalten $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Jetzt subtrahieren wir die erste Zeile von der zweiten und erhalten $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Jetzt können wir aber schon aufhören, denn es ist klar, dass diese Matrix den Rang 3 hat. Somit folgt $\dim(\mathrm{Bild}(f)) = 3$.

zu Aufgabe 3

1. Wir benutzen zum Beweis das Unterraumkriterium. Mit $a = b = 0$ liegt das Nullpolynom in U. Seien $a, a', b, b', s \in \mathbb{R}$. Dann gilt

$$\begin{aligned} & (a + bT + aT^2 + (a+b)T^3) + (a' + b'T + a'T^2 + (a'+b')T^3) \\ = \quad & (a+a') + (b+b')T + (a+a')T^2 + (a+a'+b+b')T^3 \in U \end{aligned}$$

und

$$s(a + bT + aT^2 + (a+b)T^3) = sa + sbT + saT^2 + (sa+sb)T^3 \in U.$$

Mit dem Unterraumkriterium folgt, dass U ein Unterraum von V ist.

2. Mit $a = 1$ und $b = 0$ gilt $1 + T^2 + T^3 \in U$, und mit $a = 0$ und $b = 1$ gilt $T + T^3 \in U$. Diese Polynome sind linear unabhängig, denn sie sind keine Vielfachen voneinander. Wir zeigen nun, dass sie auch ein Erzeugendensystem von U bilden. Dazu sei $a + bT + aT^2 + (a+b)T^3 \in U$. Dann gilt $a + bT + aT^2 + (a+b)T^3 = a(1 + T^2 + T^3) + b(T + T^3)$, somit ist jedes Polynom in U eine Linearkombination der Polynome $1 + T^2 + T^3$ und $T + T^3$. Es folgt, dass $1 + T^2 + T^3, T + T^3$ eine Basis von U ist.

zu Aufgabe 4

1. Sei $m = \dim(\mathrm{Bild}(f)) = \dim(\mathrm{Kern}(f))$. Mit dem Rangsatz gilt

$$\dim(V) = \dim(\mathrm{Bild}(f)) + \dim(\mathrm{Kern}(f)) = 2m,$$

somit ist $\dim(V)$ gerade.

2. Sei $V = \mathbb{R}^2$, und sei e_1, e_2 die Standardbasis von $\mathbb{R}^2$. Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ die lineare Abbildung, die durch $f(e_1) = e_2$ und $f(e_2) = 0$ definiert wird. Dann ist $e_2, 0$ ein Erzeugendensystem von $\mathrm{Bild}(f)$, das heißt, e_2 ist eine Basis von $\mathrm{Bild}(f)$. Mit dem Rangsatz ist $\dim(\mathrm{Kern}(f)) = 1$, und $e_2 \in \mathrm{Kern}(f)$. Es folgt $\mathrm{Kern}(f) = \{ae_2 \mid a \in \mathbb{R}\} = \mathrm{Bild}(f)$.

zu Aufgabe 5

Für $n = 1$ gilt $\sum_{k=1}^{1} 2 \cdot 3^{k-1} = 2 \cdot 3^0 = 2$ und $3^1 - 1 = 2$. Es gilt somit der Induktionsanfang.

Im Induktionsschritt nehmen wir an, dass $\sum_{k=1}^{n} 2 \cdot 3^{k-1} = 3^n - 1$ für ein $n \geq 1$ gilt. Dann folgt

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n+1} 2 \cdot 3^{k-1} &= \sum_{k=1}^{n} 2 \cdot 3^{k-1} + 2 \cdot 3^n \\ &= 3^n - 1 + 2 \cdot 3^n \\ &= 3^n(1+2) - 1 \\ &= 3^{n+1} - 1. \end{aligned}$$

Mit dem Prinzip der vollständigen Induktion folgt die Behauptung.

zu Aufgabe 6

1. **Behauptung:** Die Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{10^n} x^n$ ist für alle x mit $|x| < 10$ konvergent.

   Beweis: Es gilt
   $$\sqrt[n]{\left|\frac{n}{10^n}\right|} = \sqrt[n]{\frac{n}{10^n}} = \frac{1}{10}\sqrt[n]{n}.$$
   Es ist $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$, und es folgt
   $$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left|\frac{n}{10^n}\right|} = \frac{1}{10} \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = \frac{1}{10} = \limsup \sqrt[n]{\left|\frac{n}{10^n}\right|}.$$
   Mit dem Satz von Cauchy-Hadamard folgt, dass der Konvergenzradius der Potenzreihe 10 ist. Somit konvergiert die Reihe für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $|x| < 10$.

2. **Behauptung:** Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n3^n}{(n+1)!}$ ist konvergent.

   Beweis: Wir verwenden zum Beweis das Quotientenkriterium. Es gilt
   $$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{(n+1)3^{n+1}}{(n+2)!} \cdot \frac{(n+1)!}{n3^n} = \frac{n+1}{n(n+2)} \cdot 3.$$
   Es ist $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n+2} \lim_{n\to\infty} \frac{3}{n} = 0$. Somit gibt es ein $q < 1$ mit $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < q$ für fast alle n, und mit dem Quotientenkriterium folgt, dass die Reihe konvergent ist.

zu Aufgabe 7

Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch $x \mapsto x - \exp(-x)$.

1. Als Differenz differenzierbarer Funktionen ist f differenzierbar, und es gilt $f'(x) = 1 + \exp(-x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Da $\exp(y) > 0$ für alle $y \in \mathbb{R}$, folgt, dass $f'(x) > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$ ist. Somit ist f streng monoton wachsend, und somit injektiv.

2. Es gilt $x = e^{-x}$ genau dann, wenn $f(x) = x - \exp(-x) = 0$ ist. Es sind $f(0) = -1$ und $f(1) = 1 - \frac{1}{e} > 0$. Da f als differenzierbare Funktion stetig ist, folgt mit dem Zwischenwertsatz, dass es ein $x_0 \in [0, 1]$ mit $f(x_0) = 0$ gibt. Für dieses x_0 gilt $x_0 = e^{-x_0}$. Da f injektiv ist, gibt es genau ein $x_0 \in \mathbb{R}$ mit $f(x_0) = 0$, also genau ein $x_0 \in \mathbb{R}$, das die Gleichung $x = e^{-x}$ erfüllt.

zu Aufgabe 8

Mögliche Extremwerte liegen vor, sofern $f'(x) = 0$ ist. Es ist

$$\begin{aligned} f'(x) &= -\sin(x) - (-\sin(x) 2\cos(x)) = -\sin(x) + \sin(x) 2\cos(x) \\ &= \sin(x)(2\cos(x) - 1). \end{aligned}$$

Genau dann ist $f'(x) = 0$, wenn $\sin(x) = 0$ oder $2\cos(x) - 1 = 0$. Die einzigen Nullstellen von sin in $[0, \pi]$ sind 0 und π.

Genau dann ist $2\cos(x) - 1 = 0$, wenn $\cos(x) = \frac{1}{2}$. Es ist $\cos(\frac{\pi}{3}) = \frac{1}{2}$, und da cos auf $[0, \pi]$ streng monoton fallend ist, folgt, dass $\frac{\pi}{3}$ die einzige Nullstelle von $2\cos(x) - 1$ in $[0, \pi]$ ist. Somit gilt

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x \in \{0, \frac{\pi}{3}, \pi\}.$$

Es ist

$$\begin{aligned} f''(x) &= -2\sin^2(x) + 2\cos^2(x) - \cos(x) \\ &= 2(\cos^2(x) - \sin^2(x)) - \cos(x). \end{aligned}$$

Einsetzen der Nullstellen von f' liefert

$$\begin{aligned} f''(0) &= 2(1 - 0) - 1 = 1 > 0 && \Rightarrow \text{ 0 ist lokales Minimum} \\ f''(\tfrac{\pi}{3}) &= 2(\tfrac{1}{4} - \tfrac{3}{4}) - \tfrac{1}{2} = -\tfrac{3}{2} < 0 && \Rightarrow \tfrac{\pi}{3} \text{ ist lokales Maximum} \\ f''(\pi) &= 2(1 - 0) + 1 = 3 > 0 && \Rightarrow \pi \text{ ist lokales Minimum.} \end{aligned}$$

zu Aufgabe 9

Es gilt

$$\begin{aligned}
\neg((A \vee B) \wedge (\neg C \vee D)) &\approx \neg(A \vee B) \vee \neg(\neg C \vee D) && \text{De Morgan}\\
&\approx (\neg A \wedge \neg B) \vee \neg(\neg C \vee D) && \text{De Morgan}\\
&\approx (\neg A \wedge \neg B) \vee (\neg\neg C \wedge \neg D) && \text{De Morgan}\\
&\approx (\neg A \wedge \neg B) \vee (C \wedge \neg D) && \text{Negationsregel.}
\end{aligned}$$

Dann ist $(\neg A \wedge \neg B) \vee (C \wedge \neg D)$ eine Negationsnormalform der Formel $\neg((A \vee B) \wedge (\neg C \vee D))$.