Luise Unger
In LATEX gesetzt von Luise Unger

Mathematische Grundlagen

Kurseinheit 3:
Vektorräume und lineare Abbildungen

mathematik
und
informatik

FernUniversität in Hagen

Studierhinweise

Vom Standpunkt der „modernen Algebra“ aus gesehen ist die Lineare Algebra die Theorie von endlich erzeugten Vektorräumen über Körpern, also die Theorie von Strukturen, auf die man unweigerlich im Zusammenhang mit dem Lösen linearer Gleichungssysteme stößt.

Endlich erzeugte Vektorräume V hat man völlig unter Kontrolle, wenn man den Begriff einer Basis von V verstanden hat. Eine Basis eines endlich erzeugten Vektorraums V ist ein endliches Erzeugendensystem von V, welches linear unabhängig ist. Der Begriff der linearen Unabhängigkeit wird in Abschnitt 7.1 eingeführt. Nur so viel: Eine Basis ist ein endliches Erzeugendensystem von V, das man nicht mehr verkürzen kann. Nimmt man einen Vektor heraus, ist es kein Erzeugendensystem mehr.

Nach Durcharbeiten von Kapitel 7.1 sollte Ihnen der Begriff der linearen Unabhängigkeit keine Schwierigkeiten mehr bereiten. Auch im Halbschlaf sollten Sie in der Lage sein, zu überprüfen, ob gegebene Vektoren linear unabhängig sind oder nicht. Es wird Sie vermutlich nicht mehr überraschen, dass ein wichtiges Hilfsmittel bei der Untersuchung auf lineare Unabhängigkeit von Vektoren der Gaußalgorithmus ist.

Ein endlich erzeugter Vektorraum V hat in der Regel viele Basen. Ein sehr schönes und überraschendes Ergebnis ist aber, dass je zwei Basen von V gleich viele Elemente haben. Wir beweisen dieses Ergebnis in Abschnitt 7.3. Es folgt aus dem so genannten Austauschsatz von Steinitz, der weitere wichtige Folgerungen hat, die wir in Abschnitt 7.3.2 zusammenfassen.

Nach Durcharbeiten von Abschnitt 7.3 sollten Sie den Austauschsatz und den Basisergänzungssatz verstanden haben, auswendig wissen und anwenden können.

Einem endlich erzeugten Vektorraum können wir eine Zahl zuordnen, nämlich die Anzahl der Elemente einer Basis – und damit aller Basen – von V. Diese Zahl nennen wir die Dimension von V. Die Dimensionsformeln, die in 7.4.2 bewiesen werden, müssen Sie beherrschen und die Beweise sollten Sie skizzieren können.

In Kapitel 8 untersuchen wir Abbildungen zwischen Vektorräumen, die zugeschnitten sind auf die mathematische Struktur, die uns in der Linearen Algebra interessiert: die Vektorräume. Diese Abbildungen heißen **lineare Abbildungen**. Lineare Abbildungen erkennen, dass Definitions- und Wertebereich Vektorräume sind. Das, was einen Vektorraum von anderen mathematischen Strukturen unterscheidet, sind zwei Dinge: Wir können Elemente addieren (Vektoraddition), und wir können Elemente mit Körperelementen multiplizieren (Skalarmultiplikation). Eine Abbildung f heißt linear, wenn sie diese Strukturen respektiert: das Bild von der Summe von Vektoren ist die Summe der Bilder der Vektoren, und das Bild eines skalaren Vielfachen eines Vektors ist das skalare Vielfache des Bildvektors.

Lineare Abbildungen dienen dazu, Vektorräume zu vergleichen. Wenn $f : V \to W$ eine bijektive lineare Abbildung ist, dann sieht man V und W als „im Wesentlichen gleich“ an und nennt V und W **isomorph** (das kommt aus dem Griechischen und bedeutet „von gleicher Gestalt“). Nicht, dass V und W wirklich gleich sein müssen, aber alles, was V und W als Vektorräume auszeichnet – Elemente, Vektoraddition und skalare Multiplikation – entspricht einander in beiden Vektorräumen. In Abschnitt 8.2 stellen wir die Frage, wann endlich erzeugte Vektorräume isomorph sind, und ob es unter denjenigen Vektorräumen, die isomorph sind, einen ganz besonders schönen, einfachen gibt. Die Antwort: Je zwei endlich erzeugte $\mathbb{K}$-Vektorräume derselben Dimension sind isomorph, und wenn n die Dimension eines $\mathbb{K}$-Vektorraums V ist, dann ist V zu dem wohl einfachsten $\mathbb{K}$-Vektorraum der Dimension n isomorph: dem $\mathbb{K}^n$.

Im Zusammenhang mit linearen Abbildungen $f : V \to W$ treffen wir auf zwei interessante Unterräume: Das Bild von f, also $\text{Bild}(f) = \{w \in W \mid w = f(v) \text{ für ein } v \in V\}$ und den Kern von f. Dieser ist die Menge aller Vektoren in V, die unter f auf 0 abgebildet werden. Beide Vektorräume untersuchen wir in Abschnitt 8.3. In diesem Abschnitt werden wir auf eine weitere wichtige Dimensionsformel treffen, den so genannten Rangsatz. Den Rangsatz und seine Folgerungen müssen Sie verstanden haben und anwenden können.

Ich hatte oben den zugegebenermaßen unbewiesenen Metasatz in den Raum gestellt, dass man einen endlich erzeugten $\mathbb{K}$-Vektorraum V völlig unter Kontrolle hat, wenn man eine Basis von V im Griff hat. Unterstützt wird diese Hypothese durch das Hauptergebnis in Abschnitt 8.4. Wenn wir eine Abbildung $f : M \to N$ definieren wollen, dann müssen wir für jedes Element $m \in M$ angeben, was $f(m)$ ist. Wenn wir eine *lineare* Abbildung $f : V \to W$ zwischen endlich erzeugten *Vektorräumen* V und W angeben wollen, müssen wir nur angeben, wie f eine Basis von V abbildet. Alles weitere wird durch die Linearität erledigt. Dieses Ergebnis ist hilfreich, wenn wir lineare Abbildungen mit vorgegebenen Eigenschaften konstruieren wollen.

Wir haben unseren Streifzug durch die Lineare Algebra in Kapitel 2 mit Matrizen begonnen, und wir werden ihn in Kapitel 9 wieder dort beenden. Wir untersuchen die Menge der linearen Abbildungen zwischen endlich erzeugten Vektorräumen und stellen fest, dass wieder ein Vektorraum vor uns liegt. Einer, der auf den ersten Blick ziemlich abstrakt aussieht. Das stimmt aber nicht, denn er ist isomorph zu etwas, was wir schon gut kennen, nämlich $\mathrm{M}_{mn}(\mathbb{K})$. Jeder linearen Abbildung f können wir also eine Matrix A zuordnen (wie das gemacht wird, müssen Sie beherrschen), und von dieser Matrix können wir viele Eigenschaften der linearen Abbildung ablesen. Der Rang der Matrix ist die Dimension des Bildes der linearen Abbildung, der Kern von f ist isomorph zur Lösungsmenge des linearen Gleichungssystems $Ax = 0$, und selbst die Komposition linearer Abbildungen finden wir als Matrizenmultiplikation wieder.

Wir können, wie wir in Kapitel 8 gesehen haben, jedes Problem eines abstrakten endlich erzeugten Vektorraums übersetzen in ein Problem in $\mathbb{K}^n$, und mit unseren Ergebnissen in Kapitel 9 jedes Problem über lineare Abbildungen zwischen endlich erzeugten Vektorräumen übersetzen in ein Problem über Matrizen. Warum also sollte man sich den Stress mit der abstrakten Vektorraumtheorie machen, und nicht statt dessen nur $\mathbb{K}^n$ und $\mathrm{M}_{mn}(\mathbb{K})$ betrachten? Mein Credo ist: Man muss beides können. Warum dies so ist, werde ich in Kapitel 10 erklären.

Kapitel 7

Basen und Dimension

7.1 Lineare Unabhängigkeit

Sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum und seien $v_1, \ldots, v_n \in V$. Der Nullvektor lässt sich immer als eine Linearkombination der Vektoren $v_1, \ldots, v_n$ schreiben. Wie? Nun, als Koeffizienten nehmen wir nur 0. Sie finden das etwas einfältig? Ist es, und daher wird es mit einem Namen abgestraft.

7.1.1 Definition: Eine Linearkombination $\sum\limits_{i=1}^{n} a_i v_i = 0$ heißt **triviale Darstellung des Nullvektors** durch $v_1, \ldots, v_n$, wenn $a_i = 0$ für alle $1 \leq i \leq n$ ist. Falls mindestens ein $a_i \neq 0$ ist, so nennen wir $\sum\limits_{i=1}^{n} a_i v_i = 0$ eine **nicht-triviale Darstellung des Nullvektors** durch $v_1, \ldots, v_n$.

7.1.2 Definition: Sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum. Vektoren $v_1, \ldots, v_n \in V$ heißen **linear unabhängig**, falls aus $\sum\limits_{i=1}^{n} a_i v_i = 0$ folgt, dass die Koeffizienten a_i Null sind für alle $1 \leq i \leq n$.

Die Vektoren $v_1, \ldots v_n \in V$ heißen **linear abhängig**, falls es eine nicht-triviale Darstellung des Nullvektors durch $v_1, \ldots, v_n$ gibt.

Lineare Unabhängigkeit von Vektoren $v_1, \ldots, v_n$ bedeutet also gerade, dass jede Linearkombination der Vektoren $v_1, \ldots, v_n$, die den Nullvektor ergibt, die triviale Darstellung des Nullvektors sein muss.

7.1.3 Beispiele: (a) Sei $V = \mathbb{K}^n$. Seien $e_1, \ldots, e_n \in \mathbb{K}^n$ wie im Beispiel 6.3.9 (a), also e_i der Vektor, der in der i-ten Zeile eine 1 hat, und dessen übrige Einträge 0 sind.

Behauptung: Die Vektoren $e_1, \ldots, e_n$ sind linear unabhängig.

Beweis: Seien $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{K}$, so dass

$$\sum_{i=1}^{n} a_i e_i = \begin{pmatrix} a_1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ a_2 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \cdots + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ a_{n-1} \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_{n-1} \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Dann sind offenbar alle $a_i = 0$, $1 \leq i \leq n$. □

(b) Sei $V = \mathrm{M}_{mn}(\mathbb{K})$. Seien $E_{ij}, 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n$ die Matrizen des Beispiels 6.3.9 (b).

Behauptung: Die Matrizen E_{ij}, $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$ sind linear unabhängig.

Beweis: Seien $a_{ij} \in \mathbb{K}$, $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$, so dass

$$\sum_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}} a_{ij} E_{ij} = \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{m} a_{ij} E_{ij} \right) = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

Es folgt, dass alle Koeffizienten a_{ij} Null sind, die Behauptung. □

(c) Sei $V = \mathbb{K}[T]$. Setze $e_0 = 1$, und für alle $i \in \mathbb{N}$ setze $e_i = T^i$. Sei $n \in \mathbb{N}$ beliebig.

Behauptung: Für alle $n \in \mathbb{N}_0$ sind $e_0, \ldots, e_n$ linear unabhängig in $\mathbb{K}[T]$.

Beweis: Seien $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{K}$, so dass

$$a_0 e_0 + \cdots + a_n e_n = \sum_{i=0}^{n} a_i T^i = 0 \text{ ist.}$$

Dabei ist die 0 rechts des zweiten Gleichheitszeichens der Nullvektor in $\mathbb{K}[T]$, also das Nullpolynom. Wenn es ein $1 \leq i \leq n$ mit $a_i \neq 0$ gibt, dann ist der Grad des Polynoms $\sum_{i=0}^{n} a_i T^i$ größer oder gleich 0, während der Grad des Nullpolynoms $-\infty$ ist. Die Gleichung oben ist also nur dann erfüllt, wenn alle Koeffizienten $a_i = 0$ sind. □

(d) Sei $A \in \mathrm{M}_{mn}(\mathbb{K})$, und sei $\mathrm{Rg}(A) = r$. Seien $S_1, \ldots, S_{n-r}$ die im Beweis von Proposition 5.2.17 konstruierten Lösungen von $Ax = 0$. Dann sind $S_1, \ldots, S_{n-r}$ linear unabhängig.

Beweis: Seien $a_1, \ldots, a_{n-r} \in \mathbb{K}$, so dass $\sum_{i=1}^{n-r} a_i S_i = 0$ ist. Dann ist $\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_{n-r} \end{pmatrix}$ Lösung des linearen Gleichungssystems $Bx = 0$, wobei B die Matrix ist, deren Spalten $S_1, \ldots, S_{n-r}$ sind. Mit Proposition 5.2.17 ist $\mathrm{Rg}(B) = n - r$, und mit Korollar 5.2.14 folgt, dass dieses lineare Gleichungssystem genau eine Lösung besitzt. Es folgt $\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_{n-r} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$. Somit gilt $a_1 = \cdots = a_{n-r} = 0$, die Behauptung. □

(e) Sei $V = \mathbb{R}^3$, und seien $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$, und $v_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Behauptung: v_1, v_2, v_3 sind linear unabhängig.

Beweis: Seien $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}$ so dass

$$a_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + a_2 \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} + a_3 \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Dann ist $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ Lösung des linearen Gleichungssystems

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \\ 2 & 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Wir berechnen den Rang der Koeffizientenmatrix. Dazu subtrahieren wir die erste Zeile von der zweiten und das Doppelte der ersten Zeile von der dritten und erhalten $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & -2 & -3 \end{pmatrix}$. Jetzt subtrahieren wir die zweite Zeile von der dritten: $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$. Unser geübtes Auge sieht, dass der Rang dieser Matrix 3 ist, denn wir werden 3 Pivotpositionen erhalten. Mit dem Korollar 5.2.14

über die eindeutige Lösbarkeit linearer Gleichungssysteme folgt, dass das Gleichungssystem genau eine Lösung hat. Diese Lösung muss der Nullvektor sein. Es folgt $a_1 = a_2 = a_3 = 0$, die Behauptung. $\square$

7.1.4 Aufgabe: Untersuchen Sie, ob folgende Vektoren linear unabhängig sind.

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4.$$

7.1.5 Aufgabe: Untersuchen Sie, ob folgende Vektoren linear unabhängig sind.

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{22}(\mathbb{R}).$$

7.1.6 Proposition: (Charakterisierung linear abhängiger Vektoren)

Sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum, und seien $v_1, \dots, v_n \in V$. Genau dann sind $v_1, \dots, v_n$ linear abhängig, wenn es ein i mit $1 \leq i \leq n$ gibt, so dass $v_i \in \langle v_1, \dots, v_{i-1}, v_{i+1}, \dots, v_n \rangle$ ist.

Beweis:

$\Rightarrow$ Seien $v_1, \dots, v_n$ linear abhängig. Dann gibt es eine nicht-triviale Darstellung des Nullvektors $\sum_{i=1}^{n} a_i v_i = 0$ durch $v_1, \dots, v_n$. Sei a_i ein Koeffizient mit $a_i \neq 0$. Dann folgt $0 = \sum_{i=1}^{n} a_i v_i = a_i v_i + \sum_{j \neq i} a_j v_j$, und damit $v_i = -\sum_{j \neq i} a_i^{-1} a_j v_j$. Der Vektor v_i ist also eine Linearkombination von $v_1, \dots, v_{i-1}, v_{i+1}, \dots, v_n$. Es folgt $v_i \in \langle v_1, \dots, v_{i-1}, v_{i+1}, \dots, v_n \rangle$.

$\Leftarrow$ Sei $v_i \in \langle v_1, \dots, v_{i-1}, v_{i+1}, \dots, v_n \rangle$. Dann gibt es Skalare $b_1, \dots, b_{i-1}, b_{i+1}, \dots, b_n$, so dass $v_i = \sum_{j \neq i} b_j v_j$. Dann ist $0 = \sum_{j \neq i} b_j v_j - 1 \cdot v_i$ eine nicht-triviale Darstellung des Nullvektors durch $v_1, \dots, v_n$. Die Vektoren $v_1, \dots, v_n$ sind also linear abhängig.

$\square$

Genau ein Vektor v in V ist also linear abhängig, wenn er der Nullvektor ist (oder anders ausgedrückt, jeder von Null verschiedene Vektor ist linear unabhängig), und zwei Vektoren v_1, v_2 sind genau dann linear abhängig, wenn einer ein skalares Vielfaches des anderen ist.

7.1.7 Aufgabe: Geben Sie ein Beispiel für drei Vektoren v_1, v_2, v_3 in $\mathbb{R}^3$, so dass v_1, v_2 und v_1, v_3 und v_2, v_3 linear unabhängig sind, aber v_1, v_2, v_3 linear abhängig sind.

7.2 Basen endlich erzeugter Vektorräume

Wir kommen nun zu einer zentralen Definition der Linearen Algebra.

7.2.1 Definition: Sei V ein endlich erzeugter $\mathbb{K}$-Vektorraum, $V \neq \{0\}$. Die Vektoren $v_1, \ldots, v_n \in V$ heißen eine **Basis** von V, falls $v_1, \ldots, v_n$ ein Erzeugendensystem von V ist, und falls $v_1, \ldots, v_n$ linear unabhängig sind.

7.2.2 Aufgabe: Sei $U = \langle 1 + T + T^2 \rangle$ der durch das Polynom $p = 1 + T + T^2$ erzeugte Unterraum von $\mathbb{R}[T]$. Warum ist $1, T, T^2$ keine Basis von U?

7.2.3 Beispiele: (a) Sei $V = \mathbb{K}^n$. Seien $e_1, \ldots, e_n \in \mathbb{K}^n$ wie in den Beispielen 6.3.9 und 7.1.3 (a). Wir haben gezeigt, dass $e_1, \ldots, e_n$ ein Erzeugendensystem von $\mathbb{K}^n$ ist und auch, dass $e_1, \ldots, e_n$ linear unabhängig sind. Es folgt, dass $e_1, \ldots, e_n$ eine Basis von $\mathbb{K}^n$ bildet.

7.2.4 Definition: Wir nennen $e_1, \ldots, e_n$ die **Standardbasis** oder die **kanonische Basis** von $\mathbb{K}^n$.

(b) Sei $V = \mathrm{M}_{mn}(\mathbb{K})$, und seien $E_{ij} \in \mathrm{M}_{mn}(\mathbb{K})$, $1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n$ wie in den Beispielen 6.3.9 und 7.1.3 (b). Wir haben gezeigt, dass die E_{ij}, $1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n$ ein Erzeugendensystem von $\mathrm{M}_{mn}(\mathbb{K})$ bilden und dass sie linear unabhängig sind. Die Matrizen $E_{ij} \in \mathrm{M}_{mn}(K)$, $1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n$ bilden also eine Basis von $\mathrm{M}_{mn}(\mathbb{K})$.

7.2.5 Definition: Wir nennen $E_{ij} \in \mathrm{M}_{mn}(\mathbb{K})$ die **Standardbasis** oder die **kanonische Basis** von $\mathrm{M}_{mn}(\mathbb{K})$.

(c) Sei $n \in \mathbb{N}$, und sei V der Vektorraum der Polynome vom Grad $\leq n$ über $\mathbb{K}$. Seien $e_0, \ldots, e_n$ wie in den Beispielen 6.3.9 und 7.1.3 (c). Wir haben gesehen, dass $e_0, \ldots, e_n$ ein Erzeugendensystem von V bilden, und dass sie linear unabhängig sind. Es folgt, dass sie eine Basis von V bilden.

7.2.6 Definition: Wir nennen $e_0, \ldots, e_n$ die **Standardbasis** oder die **kanonische Basis** des Vektorraums der Polynome vom Grad $\leq n$ über $\mathbb{K}$.

(d) Sei $A \in \mathrm{M}_{mn}(\mathbb{K})$, und sei $\mathrm{Rg}(A) = r$. Sei $\mathcal{U}$ die Lösungsmenge von $Ax = 0$, und seien $S_1, \ldots, S_{n-r}$ die im Beweis von Proposition 5.2.17 konstruierten Lösungen. Wir haben in den Beispielen 6.3.9 und 7.1.3 (d) gesehen, dass $S_1, \ldots, S_{n-r}$ ein Erzeugendensystem von $\mathcal{U}$ ist, und dass die Vektoren $S_1, \ldots, S_{n-r}$ linear unabhängig sind. Sie bilden also eine Basis von $\mathcal{U}$.

(e) Sei $V = \mathbb{R}^3$. Wir haben in Beispiel 6.3.7 gezeigt, dass $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ ein Erzeugendensystem von V bilden, und in Beispiel 7.1.3 (e), dass sie linear unabhängig sind. Somit bilden v_1, v_2, v_3 eine Basis von $\mathbb{R}^3$. Auch e_1, e_2, e_3 ist eine Basis von $\mathbb{R}^3$, und wir sehen:

Achtung: Endlich erzeugte Vektorräume haben in der Regel viele Basen. Die Redewendung „die Basis von V“ ist fast immer falsch.

Warum in der Regel? Weil es immer noch diesen pathologischen Fall gibt, den Vektorraum $\{0\}$. Den hatten wir bei der Definition oben ausgeschlossen, und dem verpassen wir jetzt per Definition eine Basis. Wir definieren, dass $\emptyset$ die (und das ist außer bei $\mathbb{F}_2^1$ der einzige Fall, wo man **die** sagen darf) Basis von $\{0\}$ ist.

7.2.7 Proposition: (Charakterisierung von Basen)

Sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum, $V \neq \{0\}$, und seien $v_1, \ldots, v_n \in V$. Dann sind äquivalent:

(a) $v_1, \ldots, v_n$ ist eine Basis von V.

(b) Jedes $v \in V$ lässt sich eindeutig als Linearkombination der Vektoren $v_1, \ldots, v_n$ schreiben.

Beweis:

(a)⇒(b) Da $v_1, \ldots, v_n$ ein Erzeugendensystem von V ist, ist jedes $v \in V$ eine Linearkombination der Vektoren $v_1, \ldots, v_n$.

Sei $v \in V$. Sei $v = \sum_{i=1}^{n} a_i v_i = \sum_{i=1}^{n} b_i v_i$, mit $a_i, b_i \in \mathbb{K}$ für alle $1 \leq i \leq n$. Zu zeigen ist, dass $a_i = b_i$ ist, für alle $1 \leq i \leq n$. Es gilt

$$0 = v - v = \sum_{i=1}^{n} a_i v_i - \sum_{i=1}^{n} b_i v_i = \sum_{i=1}^{n} (a_i - b_i) v_i.$$

Da $v_1, \ldots, v_n$ linear unabhängig sind, folgt $a_i - b_i = 0$ für alle $1 \leq i \leq n$, also $a_i = b_i$ für alle $1 \leq i \leq n$.

(b)⇒(a) Nach Annahme lässt sich jeder Vektor $v \in V$ als Linearkombination der Vektoren $v_1, \ldots, v_n$ darstellen. Dies zeigt, dass $v_1, \ldots, v_n$ ein Erzeugendensystem von V ist. Zu zeigen bleibt die lineare Unabhängigkeit der Vektoren $v_1, \ldots, v_n$.

Sei $\sum_{i=1}^{n} a_i v_i = 0$ für Skalare $a_1, \ldots, a_n$. Es ist auch $\sum_{i=1}^{n} 0 v_i = 0$, und da sich jeder Vektor (also auch der Nullvektor) eindeutig als Linearkombination der Vektoren $v_1, \ldots, v_n$ darstellen lässt, folgt, dass $a_i = 0$ für alle $1 \leq i \leq n$. Es folgt, dass $v_1, \ldots, v_n$ eine Basis von V ist.

□

Wie steht es mit der Existenz von Basen von endlich erzeugten Vektorräumen? Der Vektorraum $\{0\}$ hat nach Definition eine Basis. Die folgende Proposition besagt, dass jeder endlich erzeugte Vektorraum V eine Basis besitzt. Schöner sogar: wenn wir ein endliches Erzeugendensystem von V haben, können wir überflüssige Vektoren aus diesem Erzeugendensystem so aussortieren, dass eine Basis übrigbleibt.

7.2.8 Proposition: (Existenz von Basen endlich erzeugter Vektorräume)

Sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum, $V \neq \{0\}$, und seien $v_1, \ldots, v_n \in V$. Dann gilt:

(a) Ist $v_1, \ldots, v_n$ ein Erzeugendensystem von V, und ist $v_i \in \langle v_1, \ldots, v_{i-1}, v_{i+1}, \ldots, v_n \rangle$, so ist $v_1, \ldots, v_{i-1}, v_{i+1}, \ldots, v_n$ ein Erzeugendensystem von V.

(b) Wenn $v_1, \ldots, v_n$ ein Erzeugendensystem von V ist, dann gibt es Vektoren $v_{i_1}, \ldots, v_{i_t} \in \{v_1, \ldots, v_n\}$, so dass $v_{i_1}, \ldots, v_{i_t}$ eine Basis von V ist.

Beweis:

(a) Sei $v_1, \ldots, v_n$ ein Erzeugendensystem von V, und sei $v_i = \sum_{j \neq i} a_j v_j$.

Sei $v \in V$. Da $v_1, \ldots, v_n$ ein Erzeugendensystem von V ist, gibt es Skalare $b_i, \ldots, b_n$, so dass

$$\begin{aligned} v &= \sum_{j \neq i} b_j v_j + b_i v_i \\ &= \sum_{j \neq i} b_j v_j + b_i \left(\sum_{j \neq i} a_j v_j \right) \\ &= \sum_{j \neq i} (b_j + b_i a_j) v_j. \end{aligned}$$

Somit gilt $v \in \langle v_1, \dots, v_{i-1}, v_{i+1}, \dots, v_n \rangle$, und $v_1, \dots, v_{i-1}, v_{i+1}, \dots, v_n$ ist ein Erzeugendensystem von V.

(b) Sei $v_1, \dots, v_n$ ein Erzeugendensystem von V. Wenn $v_1, \dots, v_n$ schon eine Basis von V ist, dann sind wir fertig. Wir können also annehmen, dass $v_1, \dots, v_n$ keine Basis von V ist. Dann sind die Vektoren $v_1, \dots, v_n$ linear abhängig. Mit der Charakterisierung 7.1.6 linear abhängiger Vektoren gibt es ein $v_i \in \{v_1, \dots, v_n\}$, so dass $v_i \in \langle v_1, \dots, v_{i-1}, v_{i+1}, \dots, v_n \rangle$. Mit (a) folgt, dass schon $v_1, \dots, v_{i-1}, v_{i+1}, \dots, v_n$ ein Erzeugendensystem von V ist. Wenn $v_1, \dots, v_{i-1}$, $v_{i+1}, \dots v_n$ linear unabhängig sind, bilden sie eine Basis, wenn sie linear abhängig sind, verfahren wir wie beschrieben. Da wir nur endlich viele Vektoren zur Verfügung haben, erhalten wir nach endlich vielen Schritten eine Basis.

$\square$

7.2.9 Aufgabe: Geben Sie ein Beispiel für einen Vektorraum V, eine Basis $v_1, \dots, v_n$ von V und einen Unterraum U von V, so dass keine Teilmenge von $\{v_1, \dots, v_n\}$ eine Basis von U ist.

7.2.10 Aufgabe: Beweisen Sie, dass $\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$ ein Erzeugendensystem von $\mathbb{F}_2^3$ ist, und finden Sie Vektoren in $\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}\right\}$, die eine Basis von $\mathbb{F}_2^3$ sind.

Zum Ende dieses Abschnittes noch zwei Bemerkungen zu linear unabhängigen Vektoren und Erzeugendensystemen.

7.2.11 Bemerkung: Sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum, und seien $v_1, \dots, v_n \in V$.

(a) Sind $v_1, \dots, v_n$ linear unabhängig, und gilt $v_{n+1} \notin \langle v_1, \dots, v_n \rangle$, so sind $v_1 \dots, v_n$, v_{n+1} linear unabhängig.

(b) Wenn $v_1, \dots, v_n$ ein Erzeugendensystem von V ist, dann sind $v_1, \dots, v_n, v_{n+1}$ für alle $v_{n+1} \in V$ linear abhängig.

Beweis:

(a) Sei $v_{n+1} \notin \langle v_1, \dots, v_n \rangle$, und sei $\sum_{i=1}^{n+1} a_i v_i = 0$. Wenn $a_{n+1} \neq 0$, so gilt $v_{n+1} =$

$-\sum_{i=1}^{n} a_{n+1}^{-1} a_i v_i$, und $v_{n+1} \in \langle v_1, \ldots, v_n \rangle$. Dies widerspricht unserer Annahme. Es gilt also $a_{n+1} = 0$, und $\sum_{i=1}^{n+1} a_i v_i = \sum_{i=1}^{n} a_i v_i = 0$. Da $v_1, \ldots, v_n$ linear unabhängig sind, folgt, dass $a_i = 0$ für alle $1 \leq i \leq n$. Die Darstellung des Nullvektors als Linearkombination der Vektoren $v_1, \ldots, v_n, v_{n+1}$ ist also trivial.

(b) Sei $v_1, \ldots, v_n$ ein Erzeugendensystem von V, und sei $v_{n+1} \in V$. Dann gibt es Skalare $a_1, \ldots, a_n$, so dass $v_{n+1} = \sum_{i=1}^{n} a_i v_i$ ist. Mit der Charakterisierung 7.1.6 linear abhängiger Vektoren oben folgt die Behauptung.

□

7.2.12 Aufgabe: Sei $v_1, \ldots, v_n$ eine Basis eines $\mathbb{K}$-Vektorraums V, und seien $b_1, \ldots, b_n \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$. Beweisen Sie, dass $b_1 v_1, \ldots, b_n v_n$ eine Basis von V ist.

7.3 Der Austauschsatz von Steinitz

Wir haben im letzten Abschnitt gesehen, dass jeder endlich erzeugte Vektorraum eine Basis besitzt, und dass schon jedes endliche Erzeugendensystem eine Basis enthält. Außerdem haben wir gesehen, dass Vektorräume (sieht man mal von dem pathologischen Null-Vektorraum und dem Vektorraum $\mathbb{F}_2^1$ ab) viele Basen haben, dass also eine Basis von V weit davon entfernt ist, eindeutig zu sein. Gibt es irgendetwas, was zwei Basen eines endlich erzeugten Vektorraums V gemeinsam haben?

Nehmen wir einmal an, Sie und ich hätten die Aufgabe, eine Basis eines endlich erzeugten Vektorraums V zu bestimmen. Nehmen wir ferner an, Sie hätten eine Basis von V berechnet, die aus 17 Vektoren besteht. Kann ich eine Basis konstruieren, die aus 15 Vektoren besteht? Eine Folgerung aus dem Steinitz'schen Austauschsatz wird sein, dass dies nicht möglich ist. Ihre Basis und meine Basis von V werden vermutlich verschieden sein, aber beide werden aus 17 Vektoren bestehen.

7.3.1 Austauschlemma und Austauschsatz

Die zentrale Idee des Austauschsatzes ist das:

7.3.1 Lemma: (Austauschlemma)

Sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum, und sei $v \in V$ mit $v \neq 0$. Sei $u_1, \ldots, u_n$ eine Basis von V. Dann gibt es ein $1 \leq i \leq n$, so dass $u_1, \ldots u_{i-1}, v, u_{i+1}, \ldots, u_n$ eine Basis von V ist.

Beweis: Falls v einer der Vektoren $u_1, \ldots, u_n$ ist, sind wir schon fertig. Wir können also annehmen, dass $v \notin \{u_1, \ldots, u_n\}$. Dann gibt es Skalare $a_1, \ldots, a_n$, so dass $v = \sum\limits_{i=1}^{n} a_i u_i$ ist. Da $v \neq 0$, gibt es (mindestens) einen Index i, $1 \leq i \leq n$, so dass $a_i \neq 0$ ist. Wir formen die Gleichung nach u_i um. Dann gilt

$$u_i = -\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} a_i^{-1} a_j u_j + a_i^{-1} v,$$

also $u_i \in \langle u_1, \ldots, u_{i-1}, v, u_{i+1}, \ldots, u_n \rangle$. Da $u_1, \ldots, u_n$ ein Erzeugendensystem von V ist, ist auch $u_1, \ldots, u_n, v$ ein Erzeugendensystem von V, und mit Proposition 7.2.8 (a) folgt, dass $u_1, \ldots, u_{i-1}, v, u_{i+1}, \ldots, u_n$ ein Erzeugendensystem von V ist. Wir müssen also nur noch die lineare Unabhängigkeit von $u_1, \ldots, u_{i-1}, v, u_{i+1}, \ldots, u_n$ zeigen.

Seien $b_1, \ldots, b_n$ Skalare, so dass $\sum\limits_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} b_j u_j + b_i v = 0$ ist. Falls $b_i \neq 0$, so folgt

$$v = -\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} b_i^{-1} b_j u_j.$$

Andererseits wissen wir auch, dass $v = \sum\limits_{i=1}^{n} a_i u_i$ ist, mit $a_i \neq 0$, und wir erhalten einen Widerspruch dazu, dass sich jeder Vektor in V eindeutig als Linearkombination der Vektoren einer Basis schreiben lässt (Charakterisierung von Basen, 7.2.7). Es folgt $b_i = 0$. Da $u_1, \ldots, u_{i-1}, u_{i+1}, \ldots, u_n$ linear unabhängig sind, folgt, dass die Darstellung $\sum\limits_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} b_j u_j = 0$ des Nullvektors trivial ist. Somit sind alle Koeffizienten b_i, $1 \leq i \leq n$, Null, und $u_1, \ldots, u_{i-1}, v, u_{i+1}, \ldots, u_n$ ist eine Basis von V. □

7.3.2 Aufgabe: Seien $u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, u_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, u_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, und sei $v =$

$\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Beweisen Sie, dass u_1, u_2, u_3, u_4 eine Basis von $\mathbb{R}^4$ ist. Welche $i \in \{1, 2, 3, 4\}$ können Sie wählen, so dass $u_1, \ldots, u_{i-1}, v, u_{i+1}, \ldots, u_4$ eine Basis von $\mathbb{R}^4$ ist?

Der Beweis des Austauschlemmas zeigt, dass wir diejenigen Vektoren der vorgegebenen Basis gegen $v \neq 0$ austauschen dürfen, deren Koeffizienten in einer Linearkombination von v nicht Null sind.

Der folgende Austauschsatz von Ernst Steinitz (1871–1928) besagt, dass wir den Prozess, einen Vektor $v \neq 0$ in eine Basis hinein zu tauschen, iterieren können.

7.3.3 Satz: (Austauschsatz von Steinitz)

Sei $u_1, \ldots, u_n$, $n \in \mathbb{N}$, eine Basis eines endlich erzeugten Vektorraums V, und seien $v_1, \ldots, v_m$ linear unabhängige Vektoren in V. Dann gibt es $u_{i_{m+1}}, \ldots, u_{i_n} \in \{u_1, \ldots, u_n\}$, so dass $v_1, \ldots, v_m, u_{i_{m+1}}, \ldots, u_{i_n}$ eine Basis von V ist.

Beweis: Wir beweisen den Satz mit Induktion nach m.

Sei $m = 1$. Dann ist $v_1 \neq 0$, denn der Nullvektor ist linear abhängig. Mit dem Austauschlemma folgt die Behauptung.

Im Induktionsschritt nehmen wir an, dass die Aussage des Satzes für $m - 1 \geq 1$ linear unabhängige Vektoren $v_1, \ldots, v_{m-1}$ gilt.

Seien $v_1, \ldots, v_m$ linear unabhängig. Dann sind $v_1, \ldots, v_{m-1}$ linear unabhängig, und nach Voraussetzung gibt es $u_{i_m}, \ldots, u_{i_n} \in \{u_1, \ldots, u_n\}$, so dass

$$v_1, \ldots, v_{m-1}, u_{i_m}, \ldots, u_{i_n} \quad \text{eine Basis von } V \text{ ist.}$$

Wir müssen zeigen, dass wir den Vektor v_m in diese Basis hineintauschen können, und zwar so, dass wir einen der Vektoren $u_{i_m}, \ldots, u_{i_n}$ durch v_m ersetzen können. Dies geschieht wie im Beweis des Austauschlemmas.

Da $v_1, \ldots, v_{m-1}, u_{i_m}, \ldots, u_{i_n}$ eine Basis von V ist, gibt es Skalare $a_1, \ldots, a_n$, so dass

$$v_m = \sum_{i=1}^{m-1} a_i v_i + \sum_{j=m}^{n} a_j u_{i_j}.$$

Da $v_m \neq 0$ (denn der Nullvektor ist linear abhängig), gibt es mindestens einen Koeffizienten, der nicht Null ist. Wären alle Koeffizienten a_j, $m \leq j \leq n$ Null, so wäre v_m eine Linearkombination der Vektoren $v_1, \ldots, v_{m-1}$, ein Widerspruch zur Annahme, dass $v_1, \ldots, v_m$ linear unabhängig sind. Es gibt also ein j, $m \leq j \leq n$, so dass $a_j \neq 0$. Wie im Beweis des Austauschlemmas folgt, dass wir u_{i_j} durch v_m ersetzen können, und dass

$$v_1, \ldots, v_{m-1}, u_{i_m}, \ldots, u_{i_{j-1}}, v_m, u_{i_{j+1}}, \ldots, u_{i_n}$$

eine Basis von V ist. Nach Umbenennung (falls nötig) der Indizes der Vektoren $u_{i_m}, \ldots u_{i_{j-1}}, u_{i_{j+1}}, \ldots, u_{i_n}$ erhalten wir die Aussage des Satzes. □

Der Austauschsatz ist ein Resultat, das sich richtig gelohnt hat. Er hat eine Reihe sehr wichtiger Folgerungen, die wir im nächsten Abschnitt zusammenfassen.

7.3.2 Folgerungen aus dem Austauschsatz

7.3.4 Korollar: Sei $v_1, \ldots, v_n$ eine Basis von V, und seien $w_1, \ldots, w_m \in V$ linear unabhängig. Dann ist $m \leq n$.

Beweis: Nach dem Austauschsatz können wir $w_1, \ldots, w_m$ durch $n - m$ Vektoren in $\{v_1, \ldots, v_n\}$ zu einer Basis von V ergänzen. Die Zahl $n - m$ kann also nicht negativ sein, und es folgt die Behauptung. □

7.3.5 Korollar: (Charakterisierung endlich erzeugter Vektorräume)

Ein $\mathbb{K}$-Vektorraum V ist genau dann endlich erzeugt, wenn jede Menge linear unabhängiger Vektoren endlich ist.

Beweis:

$\Rightarrow$ Sei V endlich erzeugt. Dann gibt es ein endliches Erzeugendensystem von V. Mit der Proposition 7.2.8 über die Existenz von Basen endlich erzeugter Vektorräume enthält dieses Erzeugendensystem eine Basis. Es gibt also eine Basis von V, die aus endlich vielen Vektoren $v_1, \ldots, v_n$ besteht. Angenommen, es gibt eine unendliche Menge C von linear unabhängigen Vektoren in V. Dann gibt es eine Teilmenge C' von C mit $n + 1$ linear unabhängigen Vektoren. Mit Korollar 7.3.4 gilt $n + 1 \leq n$, was offenbar Unsinn ist.

$\Leftarrow$ Sei $\{v_1, \ldots, v_m\} \subseteq V$ so, dass $v_1, \ldots, v_m$ linear unabhängig sind. Wenn diese Vektoren schon eine Basis bilden, sind wir fertig. Wenn sie keine Basis sind, gibt es einen Vektor v_{m+1}, so dass $v_{m+1} \notin \langle v_1, \ldots, v_m \rangle$. Mit der Bemerkung 7.2.11 folgt, dass $v_1, \ldots, v_m, v_{m+1}$ linear unabhängig sind. Wenn sie schon eine Basis bilden, sind wir wieder fertig. Sonst iterieren wir dies Verfahren, und da jede Menge linear unabhängiger Vektoren endlich ist, muss dieser

Algorithmus abbrechen. Er bricht ab, wenn wir ein linear unabhängiges Erzeugendensystem – also eine Basis – gefunden haben.

□

Das nächste Ergebnis ist sehr wichtig, und wir werden es in den folgenden Abschnitten immer wieder verwenden.

7.3.6 Korollar: (Basisergänzungssatz)

Sei V ein endlich erzeugter Vektorraum, und seien $w_1, \ldots, w_m$ linear unabhängige Vektoren in V. Dann lässt sich $w_1, \ldots, w_m$ zu einer Basis von V ergänzen, das heißt, es gibt Vektoren $v_{m+1}, \ldots, v_n$, so dass $w_1, \ldots, w_m, v_{m+1}, \ldots, v_n$ eine Basis von V ist.

Beweis: Sei $x_1, \ldots, x_n$ eine Basis von V. Mit Korollar 7.3.5 enthält diese Basis nur endlich viele Elemente. Aus dem Austauschsatz folgt, dass es $v_{m+1}, \ldots, v_n \in \{x_1, \ldots, x_n\}$ gibt, so dass $w_1, \ldots, w_m, v_{m+1}, \ldots, v_n$ eine Basis von V ist. □

Als vorerst letzte Folgerung aus dem Austauschsatz ein Resultat, das uns erlaubt, im nächsten Abschnitt den Begriff der Dimension eines Vektorraums zu definieren.

7.3.7 Korollar: Je zwei Basen eines endlich erzeugten Vektorraums V haben die gleiche Anzahl von Vektoren.

Beweis: Seien $x_1, \ldots, x_s$ und $y_1, \ldots, y_t$ zwei Basen von V. Dann sind $x_1, \ldots, x_s$ linear unabhängig, und mit Korollar 7.3.4 (für die Basis $y_1, \ldots, y_t$) folgt $s \leq t$. Auch die Vektoren $y_1, \ldots, y_t$ sind linear unabhängig, und es folgt mit Korollar 7.3.4 (für die Basis $x_1, \ldots, x_s$), dass $t \leq s$ ist. Somit gilt $s = t$. □

7.3.8 Aufgabe: Sei V der Vektorraum der Polynome vom Grad ≤ 3 über $\mathbb{R}$, und seien $p = 1 + T + T^2$ und $q = 2 + T + T^2$ in V. Beweisen Sie, dass p und q linear unabhängig sind, und ergänzen Sie p, q zu einer Basis von V.

7.4 Dimension

Jedem endlich erzeugten $\mathbb{K}$-Vektorraum können wir eine Zahl $n \in \mathbb{N}_0$ zuordnen, nämlich die Anzahl der Vektoren einer (und damit, mit Korollar 7.3.7 im letzten Abschnitt, jeder) Basis von V. Dies führt zum Begriff der Dimension eines Vektorraums.

7.4.1 Definition und Beispiele

7.4.1 Definition: Sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum.

(a) Wenn V nicht endlich erzeugt ist, so sagen wir, dass die **Dimension von** V **über** $\mathbb{K}$ **unendlich** ist, und schreiben $\dim_{\mathbb{K}}(V) = \infty$.

(b) Wenn V endlich erzeugt und $V \neq \{0\}$ ist, so sagen wir, dass n die **Dimension von** V **über** $\mathbb{K}$ ist, und schreiben $\dim_{\mathbb{K}}(V) = n$, falls jede Basis von V aus n Vektoren besteht.

(c) Wenn $V = \{0\}$, so definieren wir die **Dimension von** V **über** $\mathbb{K}$ als 0 und schreiben $\dim_{\mathbb{K}}(V) = 0$.

7.4.2 Beispiele: (a) Wir haben in Beispiel 7.2.3 (a) gesehen, dass $e_1, \ldots, e_n$ eine Basis von $\mathbb{K}^n$ ist. Somit gilt $\dim_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}^n) = n$.

(b) Wie wir in 7.2.3 (b) gesehen haben, ist E_{ij}, $1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n$ eine Basis von $\mathrm{M}_{mn}(\mathbb{K})$. Somit ist $\dim_{\mathbb{K}}(\mathrm{M}_{mn}(\mathbb{K})) = m \cdot n$.

(c) Sei $n \in \mathbb{N}$, und sei V der Vektorraum der Polynome vom Grad $\leq n$ über $\mathbb{K}$. Da $e_0 = 1, \ldots, e_n = T^n$ eine Basis von V ist (vergleiche Beispiel 7.2.3 (c)), ist $\dim_{\mathbb{K}}(V) = n + 1$.

(d) Sei $A \in \mathrm{M}_{mn}(\mathbb{K})$. Sei $\mathcal{U}$ die Lösungsmenge von $Ax = 0$. In Beispiel 7.2.3 (d) haben wir gesehen, dass es eine Basis von $\mathcal{U}$ gibt, die aus $n - \mathrm{Rg}(A)$ Vektoren besteht. Es folgt $\dim_{\mathbb{K}}(\mathcal{U}) = n - \mathrm{Rg}(A)$.

(e) Wir haben in Beispiel 6.3.9 (e) gezeigt, dass der $\mathbb{K}$-Vektorraum $\mathbb{K}[T]$ nicht endlich erzeugt ist. Es folgt $\dim_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}[T]) = \infty$.

Sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum, wobei $\mathbb{K}$ ein Körper ist.

7.4.3 Vereinbarung: Wenn aus dem Kontext klar ist, über welchem Körper $\mathbb{K}$ ein Vektorraum V definiert ist, dann schreiben wir an Stelle von $\dim_{\mathbb{K}}(V)$ nur $\dim(V)$.

Die folgende Proposition ist ausgesprochen nützlich. Sie besagt, dass wir, wenn wir aus irgendeinem Grund schon die Dimension n eines endlich erzeugten Vektorraums V kennen, ein leichtes Spiel haben, wenn wir zeigen wollen, dass n Vektoren aus V eine Basis von V bilden: Wir müssen nur eine Bedingung nachweisen. Bilden die n Vektoren ein Erzeugendensystem von V, so sind sie automatisch linear unabhängig, und sind sie linear unabhängig, so bilden sie automatisch ein Erzeugendensystem.

7.4.4 Proposition: Sei $\dim(V) = n < \infty$. Dann gilt:

(a) n linear unabhängige Vektoren in V sind schon eine Basis von V.

(b) Ein Erzeugendensystem von V mit n Vektoren ist schon eine Basis von V.

Beweis:

(a) Seien $v_1, \ldots, v_n$ linear unabhängig. Angenommen, $v_1, \ldots, v_n$ ist keine Basis von V. Dann können wir $v_1, \ldots, v_n$ zu einer Basis von V ergänzen und erhalten eine Basis mit $m > n$ Elementen von V. Dies ist ein Widerspruch zu Korollar 7.3.4, denn $\dim(V) = n$.

(b) Sei $v_1, \ldots, v_n$ ein Erzeugendensystem von V. Dann enthält $v_1, \ldots, v_n$ eine Basis von V (Proposition 7.2.8 zur Existenz von Basen endlich erzeugter Vektorräume). Da $\dim(V) = n$, gibt es keine Basis von V mit weniger als n Elementen. $v_1, \ldots, v_n$ muss also schon eine Basis von V sein.

□

7.4.2 Dimensionsformeln

Wir hatten in Abschnitt 6.2 bereits Unterräume von Vektorräumen kennen gelernt. In diesem Abschnitt werden wir untersuchen, in welcher Relation die Dimension eines Vektorraums V zu der Dimension von gewissen seiner Unterräume steht.

Alle Dimensionsformeln in diesem Abschnitt sind weitere Folgerungen aus dem Steinitz'schen Austauschsatz und seinen Folgerungen.

7.4.5 Korollar: (Dimensionsformel für Unterräume)

Sei V ein endlich erzeugter Vektorraum, und sei U ein Unterraum. Dann gilt $\dim(U) \leq \dim(V)$, und es gilt $\dim(U) = \dim(V)$ genau dann, wenn $U = V$ ist.

Beweis: Sei $\dim(V) = n < \infty$, und sei $v_1, \ldots, v_n$ eine Basis von V. Auch U ist endlich erzeugt, denn sonst gäbe es eine unendliche Menge linear unabhängiger Vektoren in U (Korollar 7.3.5), also in V. Dies ist ein Widerspruch, denn V ist endlich erzeugt. Sei $u_1, \ldots, u_m$ eine Basis von U. Diese Vektoren liegen in V, und sie sind in V linear unabhängig. Mit der ersten Folgerung aus dem Steinitz'schen Austauschsatz (Korollar 7.3.5) folgt $m \leq n$. Falls $m = n$, so folgt aus der Proposition 7.4.4 oben, dass $u_1, \ldots, u_n$ eine Basis von V ist, also $U = V$. Falls $U = V$, so gilt offenbar $\dim(U) = \dim(V)$. □

7.4.6 Proposition: (Dimensionsformel für Summe und Durchschnitt)

Sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum, und seien U und W endlichdimensionale Unterräume von V. Dann gilt $\dim(U+W) = \dim(U) + \dim(W) - \dim(U \cap W)$.

Beweis: $U \cap W$ ist ein Unterraum von V, und $U \cap W$ ist in U und in W enthalten. Somit ist $U \cap W$ ein Unterraum von U und von W. Da U und W nach Annahme endlichdimensional sind, ist auch $U \cap W$ endlichdimensional.

Sei $x_1, \ldots, x_r$ eine Basis von $U \cap W$. Da $U \cap W$ ein Unterraum von U ist, können wir $x_1, \ldots, x_r$ durch $u_1, \ldots, u_s$ zu einer Basis von U und durch $w_1, \ldots, w_t$ zu einer Basis von W ergänzen (Basisergänzungssatz, 7.3.6). Wir zeigen, dass $x_1, \ldots, x_r, u_1, \ldots u_s, w_1, \ldots, w_t$ eine Basis von $U + W$ ist.

Sei $u + w \in U + W$. Da $x_1, \ldots, x_r, u_1, \ldots, u_s$ eine Basis von U ist, gibt es Skalare $a_1, \ldots, a_r, a'_1, \ldots, a'_s$, so dass $u = \sum_{i=1}^{r} a_i x_i + \sum_{j=1}^{s} a'_j u_j$, und analog gibt es Skalare $b_1, \ldots, b_r, b'_1, \ldots, b'_t$, so dass $w = \sum_{i=1}^{r} b_i x_i + \sum_{k=1}^{t} b'_k w_k$. Es folgt

$$u + w = \sum_{i=1}^{r} a_i x_i + \sum_{j=1}^{s} a'_j u_i + \sum_{i=1}^{r} b_i x_i + \sum_{k=1}^{t} b'_k w_k = \sum_{i=1}^{r} (a_i + b_i) x_i + \sum_{j=1}^{s} a'_j u_i + \sum_{k=1}^{t} b'_k w_k,$$

das heißt,

$$u + w \in \langle x_1, \ldots, x_r, u_1, \ldots, u_s, w_1, \ldots, w_t \rangle.$$

Seien $a_1, \ldots, a_r, b_1, \ldots, b_s, c_1, \ldots, c_t$ Skalare, so dass

$$\sum_{i=1}^{r} a_i x_i + \sum_{j=1}^{s} b_j u_j + \sum_{k=1}^{t} c_k w_k = 0.$$

Setze

$$v = \sum_{i=1}^{r} a_i x_i + \sum_{j=1}^{s} b_j u_j = -\sum_{k=1}^{t} c_k w_k.$$

Da $\sum_{i=1}^{r} a_i x_i + \sum_{j=1}^{s} b_j u_j \in U$ und $-\sum_{k=1}^{t} c_k w_k \in W$, folgt $v \in U \cap W$. Da $x_1, \ldots, x_r$ eine Basis von $U \cap W$ ist, gibt es Skalare $a'_1, \ldots a'_r$, so dass

$$\sum_{i=1}^{r} a_i x_i + \sum_{j=1}^{s} b_j u_j = v = \sum_{i=1}^{r} a'_i x_i.$$

Da jeder Vektor in U eindeutig als Linearkombination der Vektoren der Basis $x_1, \ldots, x_r, u_1, \ldots, u_s$ geschrieben werden kann, folgt $a_i = a'_i$ für alle $1 \leq i \leq r$ und $b_j = 0$ für alle $1 \leq j \leq s$.

Die Darstellung des Nullvektors $\sum_{i=1}^{r} a_i x_i + \sum_{j=1}^{s} b_j u_j + \sum_{k=1}^{t} c_k w_k = 0$ ist also von der Form

$$\sum_{i=1}^{r} a_i x_i + \sum_{k=1}^{t} c_k w_k = 0.$$

Nun ist aber $x_1, \ldots, x_r, w_1, \ldots, w_t$ eine Basis von W, und es folgt $a_i = 0$ für alle $1 \leq i \leq r$ und $c_k = 0$ für alle $1 \leq k \leq t$.

Die Vektoren $x_1, \ldots, x_r, u_1, \ldots, u_s, w_1, \ldots, w_t$ sind damit ein linear unabhängiges Erzeugendensystem von $U + W$, also eine Basis.

Nun zählen wir die Vektoren in den Basen: $\dim(U+W) = r+s+t$, $\dim(U) = r+s$, $\dim(W) = r + t$ und $\dim(U \cap W) = r$, und es folgt die Behauptung. $\square$

7.4.7 Aufgabe: Sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum der Dimension 4, und seien U und W zwei dreidimensionale Unterräume von V. Bestimmen Sie die möglichen Dimensionen von $U \cap W$. Geben Sie für jeden der möglichen Fälle ein Beispiel.

7.4.8 Aufgabe: Skizzieren Sie, ohne auf technische Details einzugehen, den Beweis der Dimensionsformel für Summe und Durchschnitt von Vektorräumen.

Lösungen der Aufgaben

Lösungen der Aufgaben in 7.1

Aufgabe 7.1.4

Behauptung: Die Vektoren $\begin{pmatrix}1\\0\\-1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-1\\1\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-3\\2\\2\\0\end{pmatrix}$ sind linear unabhängig in $\mathbb{R}^4$.

Beweis: Seien $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}$ so, dass

$$a_1 \begin{pmatrix}1\\0\\-1\\1\end{pmatrix} + a_2 \begin{pmatrix}1\\-1\\1\\3\end{pmatrix} + a_3 \begin{pmatrix}-3\\2\\2\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a_1 + a_2 - 3a_3\\-a_2 + 2a_3\\-a_1 + a_2 + 2a_3\\a_1 + 3a_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix}.$$

Dann ist $\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}$ Lösung des linearen Gleichungssystems

$$\begin{pmatrix}1 & 1 & -3\\0 & -1 & 2\\-1 & 1 & 2\\1 & 3 & 0\end{pmatrix} \begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix}.$$

Wir berechnen den Rang der Koeffizientenmatrix $\begin{pmatrix}1 & 1 & -3\\0 & -1 & 2\\-1 & 1 & 2\\1 & 3 & 0\end{pmatrix}$. Dazu addieren wir die erste Zeile zur dritten und subtrahieren die erste von der vierten.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Wir subtrahieren die dritte von der vierten Zeile.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix},$$

und unser geschultes Auge sieht, dass diese Matrix Rang 3 hat (denn wir werden drei Pivot-Positionen erhalten). Mit dem Kriterium 5.2.14 über die eindeutige Lösbarkeit linearer Gleichungssysteme hat das lineare Gleichungssystem oben genau eine Lösung (denn es hat ja immer den Nullvektor als Lösung). Das heißt, der Nullvektor ist die einzige Lösung von

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 0 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

und es folgt $a_1 = a_2 = a_3 = 0$.

Aufgabe 7.1.5

Behauptung: $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ sind linear unabhängig in $\mathrm{M}_{22}(\mathbb{R})$.

Beweis: Seien $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}$ so, dass

$$\begin{aligned} a_1 \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} + a_2 \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} + a_3 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} a_1 - 2a_2 + a_3 & 3a_1 - a_2 \\ 2a_1 + a_2 + 2a_3 & a_1 + 4a_2 + a_3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Wir erhalten ein lineares Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcrcrcl} a_1 & - & 2a_2 & + & a_3 & = & 0 \\ 3a_1 & - & a_2 & & & = & 0 \\ 2a_1 & + & a_2 & + & 2a_3 & = & 0 \\ a_1 & + & 4a_2 & + & a_3 & = & 0 \end{array}$$

mit Koeffizientenmatrix $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 3 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 4 & 1 \end{pmatrix}$. Wir berechnen den Rang dieser Matrix.

Wir addieren Vielfache der ersten Zeile zu den anderen und erhalten

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 5 & -3 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \end{pmatrix}.$$

Wir subtrahieren die dritte von der vierten Zeile.

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 5 & -3 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

und nun subtrahieren wir das 5-fache der vierten Zeile von der dritten und der zweiten Zeile.

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Dieser Matrix sehen wir an, dass ihre Treppennormalform 3 Pivot-Positionen hat, der Rang der Koeffizientenmatrix ist also 3. Das heißt, das lineare Gleichungssystem hat genau eine Lösung (vergleiche 5.2.14), den Nullvektor. Es folgt $a_1 = a_2 = a_3 = 0$, die Behauptung.

Aufgabe 7.1.7 Seien $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Die Vektoren v_1, v_2 sind linear unabhängig, denn sie sind keine Vielfachen voneinander. Mit demselben Argument sind v_1, v_3 und v_2, v_3 linear unabhängig. Die Vektoren v_1, v_2, v_3 sind nicht linear unabhängig, denn $v_3 = v_1 + v_2$.

Lösungen der Aufgaben in 7.2

Aufgabe 7.2.2 Der Vektorraum U enthält alle skalaren Vielfachen des Polynoms $1 + T + T^2$. Es ist also $U = \{a + aT + aT^2 \mid a \in \mathbb{R}\}$. Die Polynome $1, T, T^2$ sind nicht von der Form $a + aT + aT^2$, sie liegen also gar nicht in U. Die Vektoren einer Basis eines Vektorraums müssen aber immer in dem Vektorraum liegen.

Aufgabe 7.2.9

Sei $V = \mathbb{R}^2$, und sei $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Dann ist v_1, v_2 eine Basis von V. Sei $U = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$. Weder v_1 noch v_2 liegen in U, denn U enthält nur skalare Vielfache von $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Somit kann keine Teilmenge von $\{v_1, v_2\}$ eine Basis von U sein.

Aufgabe 7.2.10

Behauptung: Die Vektoren $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ bilden ein Erzeugendensystem von $\mathbb{F}_2^3$.

Beweis: Sei $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{F}_2^3$. Wir müssen zeigen, dass es $a_1, a_2, a_3, a_4 \in \mathbb{F}_2$ gibt, so dass

$$a_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + a_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + a_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + a_4 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad \text{ist.}$$

Dies führt zu einem linearen Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad \text{über } \mathbb{F}_2,$$

von dem wir nachweisen müssen, dass es eine Lösung besitzt. Wir berechnen den Rang der Koeffizientenmatrix $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Dazu addieren wir die erste Zeile zur dritten.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Dabei rechnen wir in $\mathbb{F}_2$, also $1 + 1 = 0$. Diese Matrix hat Rang 3, denn ihre Treppennormalform hat drei Pivot-Positionen. Der Rang der erweiterten Koeffizientenmatrix kann nicht größer als 3 sein, und es folgt, dass die Koeffizientenmatrix und die erweiterte Koeffizientenmatrix gleichen Rang haben. Mit den Regeln zum Lösen linearer Gleichungssysteme folgt, dass das lineare Gleichungssystem eine Lösung besitzt. Dies zeigt, dass $\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$ ein Erzeugendensystem von $\mathbb{F}_2^3$ ist.

Nun bestimmen wir Vektoren in $\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}\right\}$, die eine Basis von $\mathbb{F}_2^3$ sind.

Es ist $\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$, also $\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} \in \left\langle \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} \right\rangle$. Mit Teil (a) der Proposition 7.2.8, folgt, dass $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$ ein Erzeugendensystem von $\mathbb{F}_2^3$ ist.

Wir untersuchen die Vektoren $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$ auf lineare Unabhängigkeit.

Seien $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{F}_2$, so dass

$$a_1 \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} + a_2 \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} + a_3 \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} \text{ ist.}$$

Dann ist $\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}$ Lösung des linearen Gleichungssystems $\begin{pmatrix}1&0&1\\1&1&1\\1&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$.

Wir berechnen den Rang der Koeffizientenmatrix. Dazu addieren wir die erste Zeile zur zweiten und dritten und erhalten $\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&0\\0&1&1\end{pmatrix}$. Jetzt addieren wir die zweite Zeile zur dritten, also $\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$, und wir sehen, dass der Rang 3 ist, dass die Koeffizientenmatrix also invertierbar ist. Es folgt, dass das lineare Gleichungssystem genau eine Lösung hat, den Nullvektor. Es sind also $a_1 = a_2 = a_3 = 0$, und die Vektoren $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$ sind linear unabhängig.

Es folgt, dass $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$ eine Basis von $\mathbb{F}_2^3$ ist. □

Aufgabe 7.2.12 Sei $v_1, \dots, v_n$ eine Basis von V, und seien $b_1, \dots, b_n \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$.

Behauptung: $b_1v_1, \dots, b_nv_n$ ist eine Basis von V.

Beweis: Wir zeigen zunächst die lineare Unabhängigkeit von $b_1v_1, \dots, b_nv_n$.

Seien $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{K}$, so dass $\sum\limits_{i=1}^{n} a_ib_iv_i = 0$ ist.

Da $v_1, \dots, v_n$ eine Basis von V ist, folgt $a_ib_i = 0$ für alle $1 \leq i \leq n$. Da $b_i \neq 0$, folgt $a_i = 0$ für alle $1 \leq i \leq n$. Es folgt die lineare Unabhängigkeit der Vektoren $b_1v_1, \dots, b_nv_n$.

Nun zeigen wir, dass $b_1v_1, \dots, b_nv_n$ ein Erzeugendensystem von V bildet.

Sei $v \in V$. Da $v_1, \dots, v_n$ eine Basis von V ist, gibt es Skalare $a_1, \dots, a_n$, so dass $v = \sum\limits_{i=1}^{n} a_iv_i$ ist. Da $b_1, \dots, b_n \neq 0$, können wir b_i^{-1} bilden. Dann gilt

$v = \sum\limits_{i=1}^{n} (a_ib_i^{-1})b_iv_i$, das heißt, v ist Linearkombination der Vektoren $b_1v_1, \dots, b_nv_n$.

Da $b_1v_1, \dots, b_nv_n$ auch ein Erzeugendensystem von V ist, bildet $b_1v_1, \dots, b_nv_n$ eine Basis von V. □

Lösungen der Aufgaben in 7.3

Aufgabe 7.3.2

Seien $u_1 = \begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix}, u_2 = \begin{pmatrix}0\\1\\1\\0\end{pmatrix}, u_3 = \begin{pmatrix}0\\0\\1\\1\end{pmatrix}, u_4 = \begin{pmatrix}1\\0\\0\\-1\end{pmatrix}$, und sei $v = \begin{pmatrix}-1\\-1\\1\\1\end{pmatrix}$.

Behauptung: Es ist u_1, u_2, u_3, u_4 eine Basis von $\mathbb{R}^4$.

Beweis: Seien $a_1, a_2, a_3, a_4 \in \mathbb{R}$, so dass

$$a_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + a_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + a_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + a_4 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Dann ist $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{pmatrix}$ eine Lösung von $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Wir bestimmen den Rang der Koeffizientenmatrix A. Dazu subtrahieren wir die erste Zeile von der zweiten und erhalten $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$. Jetzt subtrahieren wir die zweite Zeile von der dritten: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$. Wir subtrahieren die dritte Zeile von der vierten. Dies liefert $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$, und wir sehen, dass diese Matrix den Rang 4 hat. Die Koeffizientenmatrix A ist also invertierbar, und das lineare Gleichungssystem hat genau eine Lösung, den Nullvektor. Es folgt $a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = 0$, und dies zeigt, dass die Vektoren linear unabhängig sind.

Sei $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4$. Der Vektor y liegt genau dann in $\langle u_1, u_2, u_3, u_4 \rangle$ wenn es Skalare $b_1, b_2, b_3, b_4 \in \mathbb{R}$ gibt, so dass

$$b_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + b_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + b_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + b_4 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix} \text{ ist.}$$

Dies ist genau dann der Fall, wenn $\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{pmatrix}$ Lösung des Gleichungssystems

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix} \quad \text{ist.}$$

Da A invertierbar ist, ist dies Gleichungssystem lösbar, und es folgt, dass u_1, u_2, u_3, u_4 ein Erzeugendensystem von $\mathbb{R}^4$ ist. Somit ist u_1, u_2, u_3, u_4 eine Basis von $\mathbb{R}^4$.

Auf die Frage, welche $i \in \{1, 2, 3, 4\}$ wir wählen können, so dass $u_1, \ldots, u_{i-1}$, v, $u_{i+1}, \ldots, u_4$ eine Basis von $\mathbb{R}^4$ ist, gibt der Beweis des Austauschlemmas eine Antwort.

Es ist $v = -u_1 + 0u_2 + u_3 + 0u_4$, und da u_1, u_2, u_3, u_4 eine Basis von $\mathbb{R}^4$ ist, ist die Schreibweise von V als Linearkombination der Vektoren u_1, u_2, u_3, u_4 eindeutig. Nach dem Beweis des Austauschlemmas dürfen wir diejenigen Vektoren austauschen, deren Koeffizienten in der Linearkombination von v nicht Null sind. Es folgt, dass v, u_2, u_3, u_4 und u_1, u_2, v, u_4 Basen von $\mathbb{R}^4$ sind. u_1, v, u_3, u_4 und u_1, u_2, u_3, v sind keine Basen, denn die Vektoren v, u_1, u_3 sind linear abhängig. □

Aufgabe 7.3.8 Die Polynome $p = 1 + T + T^2$ und $q = 2 + T + T^2$ sind keine Vielfachen voneinander. Somit sind sie linear unabhängig. Bevor wir p und q zu einer Basis von V ergänzen, überlegen wir, wie viele Elemente eine solche Basis enthalten muss. Wir haben in Beispiel 7.2.3 gesehen, dass es eine Basis von V (die Standardbasis) gibt, die aus 4 Elementen besteht. Da je zwei Basen gleich viele Elemente haben (Korollar 7.3.7), muss unsere Basis ebenfalls 4 Elemente enthalten.

Mit den Polynomen p und q können wir noch kein Polynom vom Grad 3 linear kombinieren. Zu p und q nehmen wir also noch T^3 hinzu. Da $q - p = 1$, können wir mit p und q alle Polynome vom Grad 0 linear kombinieren, allerdings noch kein Polynom vom Grad 1. Nehmen wir also T noch mit hinzu. Jetzt haben wir 4 Polynome in V, nämlich $1 + T + T^2$, $2 + T + T^2$, T und T^3. Von diesen müssen wir zeigen, dass sie eine Basis von V bilden. Dazu zeigen wir zunächst, dass sie linear unabhängig sind. Dazu seien $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, so dass $a(1 + T + T^2) + b(2 + T + T^2) + cT + dT^3 = 0$ ist. Wir multiplizieren diese Gleichung aus und erhalten $(a + 2b) + (a + b + c)T + (a + b)T^2 + dT^3 = 0$. Rechts des Gleichheitszeichens steht das Nullpolynom, und die Gleichung ist genau dann richtig, wenn $a+2b = 0$,

$a+b+c=0$, $a+b=0$ und $d=0$. Dies ist genau dann der Fall, wenn $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}$ Lösung des homogenen linearen Gleichungssystems $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ist. Wir berechnen den Rang der Koeffizientenmatrix. Dazu subtrahieren wir die dritte Zeile von der ersten und der zweiten und erhalten $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Unser geübtes Auge sieht jetzt schon, dass der Rang dieser Matrix 4 ist. Somit hat das lineare Gleichungssystem genau eine Lösung, den Nullvektor. Dies zeigt, dass $a = b = c = d = 0$ ist, und die Polynome sind linear unabhängig.

Um zu zeigen, dass p, q, T, T^3 ein Erzeugendensystem von V ist, beginnen wir mit einem beliebigen Polynom $a_0 + a_1T + a_2T^2 + a_3T^3$ in V. Wir müssen zeigen, dass es Skalare $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ so gibt, dass $a(1 + T + T^2) + b(2 + T + T^2) + cT + dT^3 = (a + 2b) + (a + b + c)T + (a + b)T^2 + dT^3 = a_0 + a_1T + a_2T^2 + a_3T^3$. Dies ist genau dann der Fall, wenn $a + 2b = a_0$, $a + b + c = a_1$, $a + b = a_2$ und $d = a_3$ ist. Diese Gleichungen sind genau dann erfüllt, wenn $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}$ Lösung des inhomogenen linearen Gleichungssystems $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ ist. Wir wissen schon, dass der Rang der Koeffizientenmatrix 4 ist, somit ist der Rang der erweiterten Koeffizientenmatrix ebenfalls 4. Das lineare Gleichungssystem hat also eine Lösung, und es folgt, dass die Polynome p, q, T, T^3 ein Erzeugendensystem von V sind. Es folgt, dass sie eine Basis von V sind.

Lösungen der Aufgaben in 7.4

Aufgabe 7.4.7

Sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum der Dimension 4, und seien U und W zwei dreidimensionale Unterräume von V.

Da $U+W$ ein Unterraum von V ist, folgt mit der Dimensionsformel für Unterräume, dass $\dim(U+W) \leq 4$ ist. Da U ein Unterraum von $U+W$ ist, folgt wieder mit der Dimensionsformel für Unterräume, dass $3 \leq \dim(U+W)$ ist. Es sind also nur die Fälle $\dim(U+W) \in \{3, 4\}$ möglich. Für diese Fälle liefert die Dimensionsformel für Summe und Durchschnitt:

$$4 = 3 + 3 - \dim(U \cap W) \Rightarrow \dim(U \cap W) = 2$$

$$3 = 3 + 3 - \dim(U \cap W) \Rightarrow \dim(U \cap W) = 3.$$

Sei $V = \mathbb{R}^4$, sei $U = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$, und sei $W = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$. Dann ist $\dim(U) = \dim(W) = 3$. Sei $v = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4$. Dann gilt $v = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ d \end{pmatrix}$, wobei der erste Vektor in der Summe in U und der zweite in W liegt. Es folgt $U + W = \mathbb{R}^4$. Mit der Dimensionsformel folgt $\dim(U \cap W) = 2$.

Sei $U = W = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$. Dann gilt $\dim(U) = \dim(W) = 3 = \dim(U \cap W)$, und $\dim(U + W) = 3$.

Aufgabe 7.4.8 Wir beginnen mit einer Basis $x_1, \ldots, x_r$ von $U \cap W$. Wir ergänzen diese Basis durch Vektoren $u_1, \ldots, u_s$ zu einer Basis von U und durch Vektoren $w_1, \ldots, w_t$ zu einer Basis von W. Da $U \cap W$ ein Unterraum von U und von W ist, gestattet der Basisergänzungssatz diesen Schritt. Dann wird bewiesen, dass $x_1, \ldots, x_r$, $u_1, \ldots, u_s$, $w_1, \ldots, w_t$ eine Basis von $U + W$ ist. Die Formel folgt dann durch Abzählen der Elemente der verschiedenen Basen. Die folgende Skizze veranschaulicht unser Vorgehen:

$$\begin{array}{ccccc}
 & & U+W & & x_1, \ldots, x_r, u_1, \ldots, u_s, w_1, \ldots, w_t \\
 & \diagup & & \diagdown & \\
x_1, \ldots, x_r, u_1, \ldots, u_s \; U & & & & W \; x_1, \ldots, x_r, w_1, \ldots, w_t \\
 & \diagdown & & \diagup & \\
 & & U \cap W & & x_1, \ldots, x_r
\end{array}$$

Kapitel 8

Lineare Abbildungen

8.1 Definition, Beispiele und erste Eigenschaften

Das zentrale Thema in der Linearen Algebra sind Vektorräume und gewisse Abbildungen $f : V \to W$ zwischen $\mathbb{K}$-Vektorräumen V und W. Dabei ist man nicht an allen Abbildungen zwischen V und W interessiert, sondern nur an solchen, die „mitbekommen", dass der Definitionsbereich V und der Wertebereich W ein Vektorraum ist. Ein $\mathbb{K}$-Vektorraum ist durch zwei mathematische Strukturen charakterisiert, die Vektoraddition und die Skalarmultiplikation. Die Abbildungen, die in der Linearen Algebra von Interesse sind, respektieren diese mathematischen Strukturen: Das Bild einer Summe von Vektoren ist die Summe der Bilder der Vektoren, und das Bild eines skalaren Vielfachen eines Vektors ist das skalare Vielfache des Bildvektors. Abbildungen mit diesen Eigenschaften nennen wir lineare Abbildungen. Es folgt die formale Definition:

8.1.1 Definition: Seien V und W Vektorräume über einem Körper $\mathbb{K}$. Eine Abbildung $f : V \to W$ heißt **Vektorraumhomomorphismus** oder **$\mathbb{K}$-lineare Abbildung**, falls

$$\begin{array}{lcll} f(v_1 + v_2) & = & f(v_1) + f(v_2) & \text{für alle } v_1, v_2 \in V, \text{ und} \\ f(av) & = & af(v) & \text{für alle } a \in \mathbb{K} \text{ und für alle } v \in V. \end{array}$$

Falls klar ist, über welchem Körper $\mathbb{K}$ die Vektorräume V und W definiert sind, sagt man an Stelle von $\mathbb{K}$-lineare Abbildung nur lineare Abbildung.

Hier zwei Beispiele für lineare Abbildungen:

8.1.2 Beispiele: (a) Sei $V = \mathbb{K}^n$, und sei $A \in \mathrm{M}_{mn}(\mathbb{K})$ eine Matrix. Dann ist $f_A : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$, definiert durch $f_A(x) = Ax$ für alle $x \in \mathbb{K}^n$, eine lineare Abbildung.

Beweis: Seien $x, y \in \mathbb{K}^n$. Dann gilt $f_A(x+y) = A(x+y) = Ax + Ay$, denn für die Matrizenmultiplikation gilt das Distributivgesetz.

Sei $x \in \mathbb{K}^n$, und sei $a \in \mathbb{K}$. Dann gilt $f_A(ax) = A(ax) = a(Ax)$ mit den Regeln der Skalarmultiplikation für Matrizen. Dies zeigt, dass f_A linear ist. □

(b) Sei $\mathbb{K}$ ein Körper, und sei $V = \{p \in \mathbb{K}[T] \mid \mathrm{Grad}(p) \leq n\}$. Sei $f : \mathbb{K}^{n+1} \to V$ definiert durch $f\begin{pmatrix} a_0 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \sum_{i=0}^{n} a_i T^i$. Dann ist f eine lineare Abbildung.

Beweis: Seien $\begin{pmatrix} a_0 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b_0 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^{n+1}$. Dann gilt

$$f\left(\begin{pmatrix} a_0 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_0 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}\right) = \sum_{i=0}^{n}(a_i + b_i)T^i = \sum_{i=0}^{n} a_i T^i + \sum_{i=0}^{n} b_i T^i = f\begin{pmatrix} a_0 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} + f\begin{pmatrix} b_0 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}.$$

Sei $\begin{pmatrix} a_0 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^{n+1}$, und sei $a \in \mathbb{K}$. Dann gilt

$$f\left(a\begin{pmatrix} a_0 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}\right) = \sum_{i=0}^{n} a a_i T^i = a \sum_{i=0}^{n} a_i T^i = a f\begin{pmatrix} a_0 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix},$$

und dies zeigt, dass f linear ist. □

Jetzt ein Beispiel für Sie:

8.1.3 Aufgabe: Sei $X = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{23}(\mathbb{R})$. Sei $f : \mathrm{M}_{22}(\mathbb{R}) \to \mathrm{M}_{23}(\mathbb{R})$ definiert durch $f(A) = AX$ für alle $A \in \mathrm{M}_{22}(\mathbb{R})$. Beweisen Sie, dass f linear ist.

Leiten wir zunächst aus der Definition zwei einfache Eigenschaften linearer Abbildungen ab:

8.1.4 Bemerkung: Sei $f : V \to W$ eine lineare Abbildung zwischen zwei $\mathbb{K}$-Vektorräumen V und W. Dann gilt:

(a) $f(0) = 0$.

(b) $f(-v) = -f(v)$ für alle $v \in V$.

Beweis:

(a) Die Behauptung ist, dass das Bild des Nullvektors 0_V in V unter einer linearen Abbildung f der Nullvektor 0_W in W ist. Sei $0_\mathbb{K}$ der Skalar 0 in $\mathbb{K}$.

Es gilt $f(0_V) = f(0_\mathbb{K} 0_V) = 0_\mathbb{K} f(0_V)$ mit der zweiten Bedingung für die Linearität von f. Da $0_\mathbb{K} w = 0_W$ für alle $w \in W$, folgt $0_\mathbb{K} f(0_V) = 0_W$, und damit die Behauptung.

(b) Mit den Rechenregeln in Vektorräumen, Proposition 6.1.5, gilt $(-1)v = -v$ für alle Vektoren v eines Vektorraums V. Somit gilt $f(-v) = f((-1)v) = (-1)f(v)$, denn f ist linear. Da $(-1)w = -w$ für alle $w \in W$, folgt die Behauptung.

□

Bijektive lineare Abbildungen (zur Erinnerung an die Begriffe „injektiv“, „surjektiv“, „bijektiv“ verweisen wir auf Definition 1.4.9) sind von besonderem Interesse, und sie werden mit einem speziellen Begriff versehen:

8.1.5 Definition: Sei $f : V \to W$ eine lineare Abbildung. Wenn f bijektiv ist, dann wird f ein **Isomorphismus** genannt. Ist $f : V \to W$ ein Isomorphismus, so nennen wir V und W **isomorph** und schreiben $V \simeq W$.

8.1.6 Beispiele: (a) Sei $V = \mathbb{K}^n$, und sei $A \in \mathrm{M}_{nn}(\mathbb{K})$ eine invertierbare Matrix. Dann ist $f_A : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$ definiert durch $f_A(x) = Ax$ für alle $x \in \mathbb{K}^n$, ein Isomorphismus.

Beweis: Wir wissen mit dem Beispiel 8.1.2 (a) oben bereits, dass f_A linear ist. Mit der Charakterisierung invertierbarer Abbildungen (Korollar 1.4.22) der Kurseinheit 1 reicht es, eine zu f_A inverse Abbildung anzugeben. Für alle $x \in \mathbb{K}^n$ gilt

$$(f_{A^{-1}} \circ f_A)(x) = A^{-1}(Ax) = x, \text{ also } f_{A^{-1}} \circ f_A = \mathrm{id}_{\mathbb{K}^n}.$$

Ferner gilt

$$(f_A \circ f_{A^{-1}})(x) = A(A^{-1}x) = x, \text{ also } f_A \circ f_{A^{-1}} = \mathrm{id}_{\mathbb{K}^n}.$$

Dies zeigt, dass f_A bijektiv, also ein Isomorphismus ist. □

(b) Sei $\mathbb{K}$ ein Körper, und sei $V = \{p \in \mathbb{K}[T] \mid \mathrm{Grad}(p) \leq n\}$. Sei $f : \mathbb{K}^{n+1} \to V$ definiert durch $f\begin{pmatrix} a_0 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \sum_{i=0}^{n} a_i T^i$. Dann ist $f : \mathbb{K}^{n+1} \to V$ ein Isomorphismus.

Beweis: Wieder geben wir die zu f inverse Abbildung an.

Sei $g : V \to \mathbb{K}^{n+1}$ definiert durch $g(\sum_{i=0}^{n} a_i T^i) = \begin{pmatrix} a_0 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$ für alle $\sum_{i=0}^{n} a_i T^i \in V$.

Dann gilt für alle $\sum_{i=0}^{n} a_i T^i \in V$:

$$(f \circ g)(\sum_{i=0}^{n} a_i T^i) = f\begin{pmatrix} a_0 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \sum_{i=0}^{n} a_i T^i, \text{ also } f \circ g = \mathrm{id}_V.$$

Ferner gilt für alle $\begin{pmatrix} a_0 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^{n+1}$:

$$(g \circ f)\begin{pmatrix} a_0 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = g(\sum_{i=0}^{n} a_i T^i) = \begin{pmatrix} a_0 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}, \text{ also } g \circ f = \mathrm{id}_{\mathbb{K}^{n+1}}.$$

Es ist also $g = f^{-1}$, und es folgt, dass f bijektiv ist. □

8.1.7 Aufgabe: Sei $f : \mathrm{M}_{22}(\mathbb{R}) \to \mathrm{M}_{23}(\mathbb{R})$ wie in Aufgabe 8.1.3. Beweisen Sie, dass f nicht surjektiv, also kein Isomorphismus ist.

Sind Inverse zu Isomorphismen wieder Isomorphismen?

8.1.8 Proposition: Sei $f : V \to W$ ein Isomorphismus. Dann ist f^{-1} ein Isomorphismus.

Beweis: Die Abbildung f^{-1} ist bijektiv, denn f ist die zu f^{-1} inverse Abbildung. Wir müssen also nur zeigen, dass f^{-1} linear ist.

Dazu seien $w, w' \in W$. Da f bijektiv ist, gibt es $v, v' \in V$, so dass $w = f(v)$ und $w' = f(v')$ ist. Dann gilt $f^{-1}(w) = v$ und $f^{-1}(w') = v'$, und es folgt:

$$\begin{array}{rcll} f^{-1}(w+w') & = & f^{-1}(f(v)+f(v')) & \\ & = & f^{-1}(f(v+v')), & \text{denn } f \text{ ist linear} \\ & = & v+v', & \text{denn } f^{-1}\circ f = \mathrm{id}_V \\ & = & f^{-1}(w)+f^{-1}(w'). & \end{array}$$

Sei $a \in \mathbb{K}$, und sei $w \in W$. Sei $w = f(v)$, also $f^{-1}(w) = v$. Dann gilt

$$\begin{array}{rcll} f^{-1}(aw) & = & f^{-1}(af(v)) & \\ & = & f^{-1}(f(av)), & \text{denn } f \text{ ist linear} \\ & = & av & \\ & = & af^{-1}(w). & \end{array}$$

Es folgt, dass f^{-1} linear ist. □

In Abschnitt 1.4.3 haben wir die Komposition von Abbildungen definiert. Kompositionen linearer Abbildungen sind linear, wie die folgende Proposition aussagt:

8.1.9 Proposition: Seien $f : U \to V$ und $g : V \to W$ lineare Abbildungen zwischen $\mathbb{K}$-Vektorräumen U, V und W. Dann ist $g \circ f : U \to W$ linear.

Beweis: Seien $u, u' \in U$. Dann gilt

$$\begin{array}{rcll} (g\circ f)(u+u') & = & g(f(u+u')) & \\ & = & g(f(u)+f(u')), & \text{denn } f \text{ ist linear} \\ & = & g(f(u))+g(f(u')), & \text{denn } g \text{ ist linear} \\ & = & (g\circ f)(u)+(g\circ f)(u'). & \end{array}$$

Sei $a \in \mathbb{K}$, und sei $u \in U$.

$$\begin{array}{rcll} (g\circ f)(au) & = & g(f(au)) & \\ & = & g(af(u)), & \text{denn } f \text{ ist linear} \\ & = & ag(f(u)), & \text{denn } g \text{ ist linear} \\ & = & a(g\circ f)(u). & \end{array}$$

Somit ist $g \circ f$ linear. □

Kompositionen von Isomorphismen sind Isomorphismen:

8.1.10 Korollar: Seien $f : U \to V$ und $g : V \to W$ Isomorphismen zwischen $\mathbb{K}$-Vektorräumen U, V und W. Dann ist $g \circ f : U \to W$ ein Isomorphismus.

Beweis: Mit Proposition 8.1.9 wissen wir, dass $g \circ f$ linear ist. Da f und g bijektiv sind, folgt mit Proposition 1.4.16, dass $g \circ f$ bijektiv ist. □

8.1.11 Aufgabe: Sei $f : V \to W$ linear und sei $v = \sum_{i=1}^{n} a_i v_i$, wobei $v_i \in V$ und $a_i \in \mathbb{K}$ sind, für alle $1 \leq i \leq n$. Beweisen Sie, dass $f\left(\sum_{i=1}^{n} a_i v_i\right) = \sum_{i=1}^{n} a_i f(v_i)$ gilt.

8.2 Isomorphe Vektorräume

In Definition 8.1.5 hatten wir $\mathbb{K}$-Vektorräume V und W isomorph genannt, wenn es eine bijektive lineare Abbildung – also einen Isomorphismus – von V nach W gibt.

Wenn $f : V \to W$ linear ist, dann respektiert f die Vektorraumstruktur in V und W, denn das Bild einer Summe von Vektoren ist die Summe der Bilder, und das Bild eines skalaren Vielfachen eines Vektors ist das skalare Vielfache des Bildvektors. Ist f zusätzlich bijektiv, dann gehen auch keine Informationen über die Elemente der beteiligten Mengen verloren. Verschiedene Elemente in V werden, wenn man f auf sie anwendet, in W nicht auf dasselbe Element abgebildet, (denn f ist injektiv), und jedes Element in W „kommt her“, das heißt, ist Bild von einem Element aus V (denn f ist surjektiv). Da Inverse von Isomorphismen Isomorphismen sind, können wir mit Hilfe von strukturerhaltenden Abbildungen zwischen V und W hin und her springen. In der Mathematik sieht man isomorphe Strukturen als „im Wesentlichen gleich“ an.

Wenn Sie sich die Philosophie des „im Wesentlichen gleich“ zu eigen machen, dann drängen sich sofort zwei Fragen auf.

8.2.1 Frage: (a) Welche endlich erzeugten Vektorräume sind im Wesentlichen gleich, also isomorph?

(b) Gibt es unter denjenigen endlich erzeugten Vektorräumen, die im Wesentlichen gleich sind, einen ganz besonders schönen, einfachen, der, quasi als Prototyp, alle Phänomene widerspiegelt, die in zu ihm isomorphen Vektorräumen auftreten können?

Wir werden beide Fragen in diesem Abschnitt noch nicht vollständig beantworten können. Zentral ist für die Antwort das folgende Ergebnis.

8.2.2 Satz: (Struktur endlich erzeugter Vektorräume)

Sei V ein endlich erzeugter $\mathbb{K}$-Vektorraum, und sei $v_1, \ldots, v_n$ eine Basis von V, die wir mit $\mathcal{B}$ bezeichnen. Sei $\kappa_\mathcal{B} : V \to \mathbb{K}^n$ definiert durch $\kappa_\mathcal{B}(v) = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$ für alle $v = \sum_{i=1}^{n} a_i v_i \in V$. Dann ist $\kappa_\mathcal{B}$ ein Isomorphismus.

Das Symbol κ ist der griechische Buchstabe „kappa“, der dem k entspricht.

Bevor wir in den Beweis dieses Satzes einsteigen, machen wir uns erst einmal klar, wie die Abbildung $\kappa_\mathcal{B}$ definiert ist. Wir starten mit einer beliebigen Basis $v_1, \ldots, v_n$ von V. Mit Proposition 7.2.7 über die Charakterisierung von Basen wissen wir, dass jedes Element $v \in V$ auf eindeutige Weise als Linearkombination der Vektoren $v_1, \ldots, v_n$ geschrieben werden kann. Damit ist $\kappa_\mathcal{B}$ zumindest schon einmal eine Abbildung, und das Bild eines Vektors $v \in V$ unter $\kappa_\mathcal{B}$ ist gerade der Vektor, der aus den Koeffizienten der Linearkombination $v = \sum_{i=1}^{n} a_i v_i$ besteht.

8.2.3 Aufgabe: Sei V der Vektorraum der Polynome vom Grad ≤ 2 über $\mathbb{R}$. Sei $\mathcal{B}$ die Standardbasis $1, T, T^2$ von V. Beweisen Sie, dass $2 + T + T^2, 2 + T^2, 1 + T$ ebenfalls eine Basis von V ist. Diese Basis bezeichnen wir mit $\mathcal{C}$. Sei $p = a_0 + a_1T + a_2T^2 \in V$.Berechnen Sie $\kappa_\mathcal{B}(a_0 + a_1T + a_2T^2)$ und $\kappa_\mathcal{C}(a_0 + a_1T + a_2T^2)$.

Kommen wir nun zum Beweis von Satz 8.2.2.

Beweis: Wir haben uns oben bereits davon überzeugt, dass $\kappa_\mathcal{B}$ eine Abbildung von V nach $\mathbb{K}^n$ ist.

Wir müssen noch zeigen, dass $\kappa_\mathcal{B}$ bijektiv und linear ist. Wir beginnen mit der Linearität.

Seien $v = \sum_{i=1}^{n} a_i v_i$ und $w = \sum_{i=1}^{n} b_i v_i$ in V. Dann gilt

$$\begin{aligned} \kappa_\mathcal{B}(v + w) &= \kappa_\mathcal{B}\left(\sum_{i=1}^{n} a_i v_i + \sum_{i=1}^{n} b_i v_i\right) = \kappa_\mathcal{B}\left(\sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i) v_i\right) = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ \vdots \\ a_n + b_n \end{pmatrix} \\ &= \kappa_\mathcal{B}(v) + \kappa_\mathcal{B}(w). \end{aligned}$$

Sei $a \in \mathbb{K}$, und sei $v = \sum_{i=1}^{n} a_i v_i \in V$. Dann gilt

$$\kappa_{\mathcal{B}}(av) = \kappa_{\mathcal{B}}\left(\sum_{i=1}^{n} aa_i v_i\right) = \begin{pmatrix} aa_1 \\ \vdots \\ aa_n \end{pmatrix} = a\kappa_{\mathcal{B}}(v).$$

Somit ist $\kappa_{\mathcal{B}}$ linear.

Sei $x = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^n$. Sei $v = \sum_{i=1}^{n} a_i v_i \in V$. Dann gilt $\kappa_{\mathcal{B}}(v) = x$. Jeder Vektor in $\mathbb{K}^n$ besitzt also ein Urbild unter $\kappa_{\mathcal{B}}$, und es folgt, dass $\kappa_{\mathcal{B}}$ surjektiv ist.

Seien v und w in V, so dass $\kappa_{\mathcal{B}}(v) = \kappa_{\mathcal{B}}(w)$ gilt. Da $\mathcal{B}$ eine Basis ist, gibt es eindeutig gestimmte Skalare $a_1, \ldots, a_n$ und $b_1, \ldots, b_n$ mit $v = \sum_{i=1}^{n} a_i v_i$ und $w = \sum_{i=1}^{n} b_i v_i$. Da $\kappa_{\mathcal{B}}(v) = \kappa_{\mathcal{B}}(w)$ gilt $a_i = b_i$ für alle $1 \leq i \leq n$, also $v = w$. Somit ist $\kappa_{\mathcal{B}}$ injektiv. Es folgt, dass $\kappa_{\mathcal{B}}$ ein Isomorphismus ist. $\square$

8.2.4 Definition: Sei V ein endlich erzeugter $\mathbb{K}$-Vektorraum, und sei $v_1, \ldots, v_n$ eine Basis $\mathcal{B}$ von V. Sei $\kappa_{\mathcal{B}}$ die in Satz 8.2.2 definierte Abbildung. Sei $v \in V$. Dann wird $\kappa_{\mathcal{B}}(v)$ der **Koordinatenvektor** von v bezüglich der Basis $\mathcal{B}$ genannt.

8.2.5 Beispiele: (a) Sei $V = \mathbb{K}^n$, und sei $e_1, \ldots, e_n$ die Standardbasis von $\mathbb{K}^n$. Sei $v = x_1 e_1 + \cdots + x_n e_n$. Der Koordinatenvektor von v ist dann $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$.

(b) Sei V der Vektorraum der Polynome vom Grad ≤ 2 über $\mathbb{R}$. In Aufgabe 8.2.3 haben Sie gezeigt, dass $\begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ der Koordinatenvektor von $p = \sum_{i=0}^{2} a_i T^i$ bezüglich der Standardbasis $1, T, T^2$ von V ist, und dass $\begin{pmatrix} -a_0 + a_1 + 2a_2 \\ a_0 - a_1 - a_2 \\ a_0 - 2a_2 \end{pmatrix}$ der Koordinatenvektor von p bezüglich der Basis $2 + T + T^2, 2 + T^2, 1 + T$ von V ist.

Als Folgerung aus Satz 8.2.2 können wir eine partielle Antwort auf unsere Frage 8.2.1 geben:

8.2.6 Korollar: Seien V und W endlich erzeugt Vektorräume über $\mathbb{K}$. Dann gilt:

(a) Wenn V und W dieselbe Dimension haben, dann sind V und W isomorph.

(b) Wenn V die Dimension n hat, dann ist V isomorph zu $\mathbb{K}^n$.

Beweis:

(a) Seien V und W Vektorräume über $\mathbb{K}$ mit $\dim(V) = \dim(W) = n$. Dann gibt es Basen $\mathcal{B}$ von V und $\mathcal{C}$ von W, so dass $\kappa_{\mathcal{B}} : V \to \mathbb{K}^n$ und $\kappa_{\mathcal{C}} : W \to \mathbb{K}^n$ Isomorphismen sind. Mit Proposition 8.1.8 ist $\kappa_{\mathcal{C}}^{-1} : \mathbb{K}^n \to W$ ein Isomorphismus, und mit Korollar 8.1.10 ist $\kappa_{\mathcal{C}}^{-1} \circ \kappa_{\mathcal{B}} : V \to W$ ein Isomorphismus. Es folgt die Behauptung.

(b) Da V und $\mathbb{K}^n$ dieselbe Dimension haben, folgt die Behauptung aus (a).

□

Wir wissen jetzt, dass je zwei endlich erzeugte $\mathbb{K}$-Vektorräume derselben Dimension isomorph sind. Gilt die Umkehrung, oder, anders ausgedrückt, ist es möglich, dass endlich erzeugte Vektorräume isomorph sind, wenn ihre Dimensionen verschieden sind? Das Gefühl sagt „nein“, und das Gefühl ist richtig. Beweisen werden wir das aber erst im nächsten Abschnitt.

8.3 Kern und Bild

Seien V und W Vektorräume über $\mathbb{K}$, und sei $f : V \to W$ eine lineare Abbildung. In diesem Zusammenhang treten zwei interessante Unterräume von W beziehungsweise von V auf, das Bild von f, das wir bereits in 1.4.6 definiert hatten, und der Kern von f, den wir noch definieren werden. Mit diesen Unterräumen werden wir uns im Folgenden beschäftigen.

8.3.1 Das Bild einer linearen Abbildung

Zur Erinnerung die Definition für das Bild einer linearen Abbildung.

8.3.1 Definition: Sei $f : V \to W$ eine lineare Abbildung. Das **Bild von** f ist die Menge $\mathrm{Bild}(f) := \{w \in W \mid \text{es gibt ein } v \in V \text{ mit } f(v) = w\}$.

Genau dann ist $f : V \to W$ surjektiv, wenn $\mathrm{Bild}(f) = W$ ist. Wenn f nicht surjektiv ist, dann ist $\mathrm{Bild}(f)$ nur eine Teilmenge von W. Allerdings eine mit Struktur:

8.3.2 Bemerkung: Sei $f : V \to W$ eine lineare Abbildung. Dann ist $\mathrm{Bild}(f)$ ein Unterraum von W.

Beweis: Wir benutzen zum Beweis das Unterraumkriterium.

Da f linear ist, gilt mit Bemerkung 8.1.4, dass $f(0) = 0$ ist. Somit liegt der Nullvektor von W im Bild von f.

Seien $w, w' \in \mathrm{Bild}(f)$. Dann gibt es ein $v \in V$ mit $f(v) = w$ und ein $v' \in V$ mit $f(v') = w'$. Dann folgt $w + w' = f(v) + f(v') = f(v + v')$, also $w + w' \in \mathrm{Bild}(f)$.

Sei a ein Skalar, und sei $w \in \mathrm{Bild}(f)$. Sei $v \in V$ mit $f(v) = w$. Dann gilt $aw = af(v) = f(av)$, also $aw \in \mathrm{Bild}(f)$.

Mit dem Unterraumkriterium folgt, dass $\mathrm{Bild}(f)$ ein Unterraum von W ist. $\square$

8.3.3 Beispiel: Sei $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{32}(\mathbb{R})$, und sei

$$f_A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3, f_A(x) = Ax \text{ für alle } x \in \mathbb{R}^2.$$

Wir wollen das Bild von f_A bestimmen. Es gilt

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in \mathrm{Bild}(f_A) \quad &\Leftrightarrow \quad \text{es gibt } \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \text{ mit } A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \\
&\Leftrightarrow \quad \text{das Gleichungssystem } A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \text{ hat eine Lösung} \\
&\Leftrightarrow \quad \mathrm{Rg}(A) = \mathrm{Rg}(A'), \text{ wobei } A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & | & a \\ 1 & 1 & | & b \\ 2 & 1 & | & c \end{pmatrix} \text{ ist.}
\end{aligned}$$

Zur Berechnung der Ränge überführen wir $A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & | & a \\ 1 & 1 & | & b \\ 2 & 1 & | & c \end{pmatrix}$ in Treppennormalform. Wir subtrahieren die erste Zeile von der zweiten und das Doppelte der ersten

Zeile von der dritten.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & | & a \\ 0 & 1 & | & b-a \\ 0 & 1 & | & c-2a \end{pmatrix}$$

Wir subtrahieren die zweite Zeile von der dritten

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & | & a \\ 0 & 1 & | & b-a \\ 0 & 0 & | & c-a-b \end{pmatrix},$$

das heißt, $\mathrm{Rg}(A) = \mathrm{Rg}(A')$ genau dann, wenn $c - a - b = 0$ ist. Dies zeigt

$$\mathrm{Bild}(f_A) = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid c - a - b = 0 \right\}.$$

Zur Berechnung des Bildes einer linearen Abbildung ist folgendes Ergebnis hilfreich:

8.3.4 Proposition: Sei V ein endlich erzeugter $\mathbb{K}$-Vektorraum, und sei $f : V \to W$ eine lineare Abbildung. Sei $v_1, \ldots, v_n$ eine Basis von V. Dann ist $f(v_1), \ldots, f(v_n)$ ein Erzeugendensystem von $\mathrm{Bild}(f)$. Insbesondere ist $\mathrm{Bild}(f)$ endlich erzeugt.

Beweis: Sei $w \in \mathrm{Bild}(f)$. Dann gibt es ein $v \in V$ mit $f(v) = w$. Da $v_1, \ldots, v_n$ eine Basis von V ist, gibt es Skalare $a_1, \ldots, a_n$, so dass $v = \sum_{i=1}^{n} a_i v_i$ ist. Es folgt

$$w = f(v) = f\left(\sum_{i=1}^{n} a_i v_i\right) = \sum_{i=1}^{n} a_i f(v_i).$$

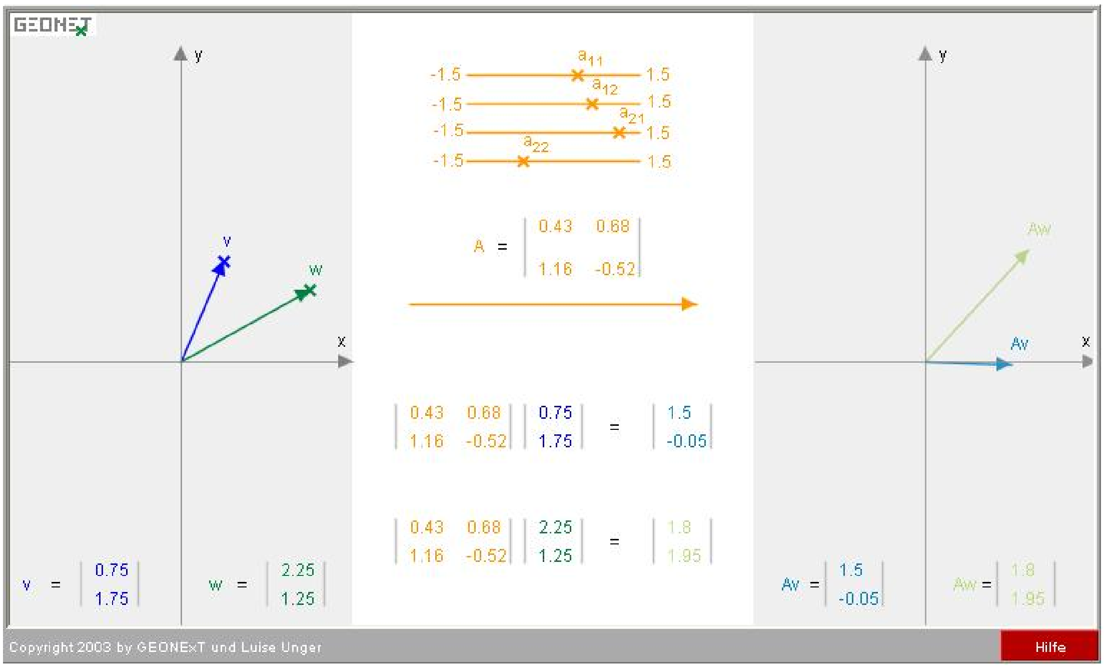
Somit ist w eine Linearkombination von $f(v_1), \ldots, f(v_n)$, und dies zeigt, dass $f(v_1), \ldots, f(v_n)$ ein Erzeugendensystem von $\mathrm{Bild}(f)$ ist. □

Als Folgerung erhalten wir:

8.3.5 Korollar: Sei V ein endlich erzeugter $\mathbb{K}$-Vektorraum, und sei $f : V \to W$ eine lineare Abbildung. Sei $v_1, \ldots, v_n$ eine Basis von V. Genau dann ist f surjektiv, wenn $f(v_1), \ldots, f(v_n)$ ein Erzeugendensystem von W ist. □

8.3.6 Aufgabe: Sei $f : \mathrm{M}_{22}(\mathbb{R}) \to \mathrm{M}_{23}(\mathbb{R})$ wie in den Aufgaben 8.1.3 und 8.1.7. Bestimmen Sie eine Basis von $\mathrm{Bild}(f)$.

Das folgende Applet veranschaulicht Proposition 8.3.4 für den Fall, dass $V = W = \mathbb{R}^2$ ist, und dass $f : V \to W$ dadurch definiert ist, dass $f(x) = Ax$ für eine 2×2-Matrix A ist.



Im linken Teil des Applets sehen Sie V und zwei Vektoren, die Sie verändern können, wenn Sie die Spitzen der Vektoren mit gedrückter Maustaste bewegen. Rechts sehen Sie die Bilder der Vektoren. Verändern Sie die Einträge in der Matrix so (mit gedrückter Maustaste die Kreuze auf den Linien bewegen), dass Sie sehen, dass $f(v), f(w)$ keine Basis von $\mathrm{Bild}(f)$ ist.

8.3.2 Der Kern einer linearen Abbildung

8.3.7 Definition: Sei $f : V \to W$ eine lineare Abbildung. Der **Kern** von f ist die Menge $\mathrm{Kern}(f) := \{v \in V \mid f(v) = 0\}$.

Genau dann ist $\mathrm{Kern}(f) = V$, wenn f alle Elemente in V auf den Nullvektor in W abbildet. Andernfalls ist $\mathrm{Kern}(f)$ nur eine Teilmenge von V. Allerdings wieder eine mit Struktur:

8.3.8 Bemerkung: Der Kern einer linearen Abbildung $f : V \to W$ ist ein Unterraum von V.

Beweis: Zum Beweis benutzen wir das Unterraumkriterium.

Da f linear ist, gilt $f(0) = 0$ (vergleiche Bemerkung 8.1.4). Somit liegt der Nullvektor aus V in Kern(f).

Seien $v, v' \in \mathrm{Kern}(f)$. Dann gilt $f(v + v') = f(v) + f(v') = 0 + 0 = 0$, also $v + v' \in \mathrm{Kern}(f)$.

Sei a ein Skalar, und sei $v \in \mathrm{Kern}(f)$. Dann gilt $f(av) = af(v) = a0 = 0$, also $av \in \mathrm{Kern}(f)$. Mit dem Unterraumkriterium folgt die Behauptung. $\square$

8.3.9 Beispiel: Wie in Beispiel 8.3.3 sei $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, und sei $f_A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, mit $f_A(x) = Ax$ für alle $x \in \mathbb{R}^2$. Wir wollen den Kern von f_A bestimmen. Es gilt

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \in \mathrm{Kern}(f_A) \quad &\Leftrightarrow \quad A \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &\Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \text{ist Lösung des Gleichungssystems } A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Wir haben in Beispiel 8.3.3 ausgerechnet, dass $\mathrm{Rg}(A) = 2$ ist, das homogene lineare Gleichungssystem hat also genau eine Lösung. Diese muss der Nullvektor sein, und wir sehen, dass $\mathrm{Kern}(f_A) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ ist.

Während das Bild einer linearen Abbildung $f : V \to W$ ein Kriterium dafür liefert, ob f surjektiv ist (f surjektiv $\Leftrightarrow \mathrm{Bild}(f) = W$), liefert der Kern von f ein wichtiges Kriterium dafür, ob f injektiv ist.

8.3.10 Proposition: Sei $f : V \to W$ eine lineare Abbildung. Genau dann ist f injektiv, wenn $\mathrm{Kern}(f) = \{0\}$ ist.

Beweis:

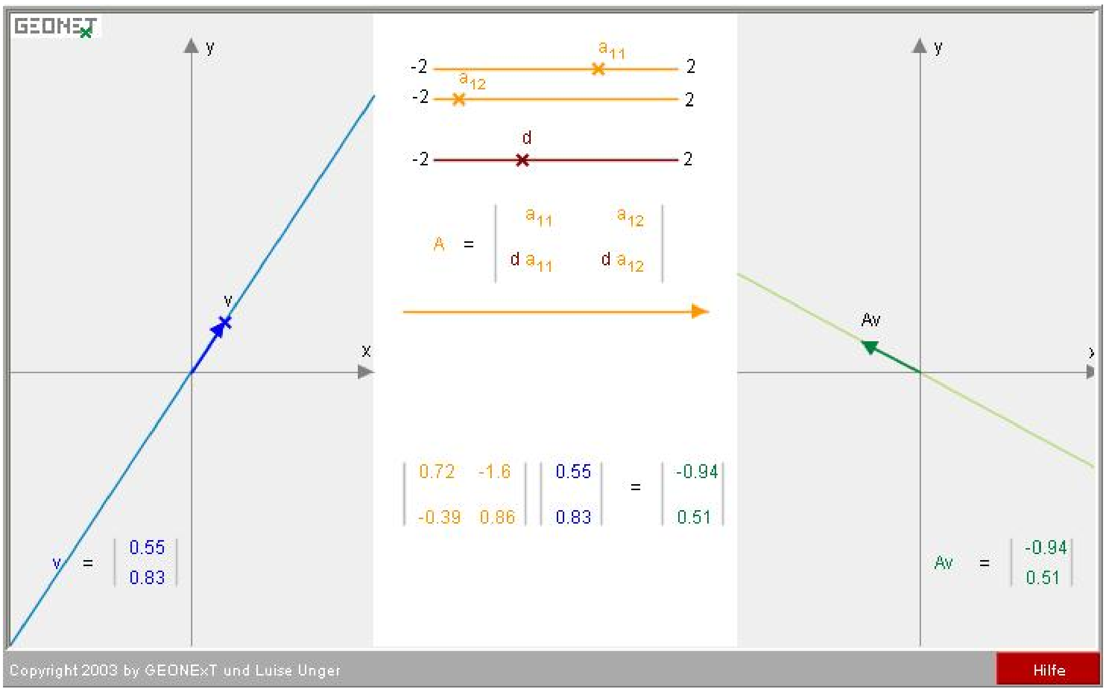
$\Rightarrow$ Sei f injektiv. Da f linear ist, gilt $f(0) = 0$. Da f injektiv ist, gibt es kein $v \neq 0$ mit $f(v) = 0$. Nur für den Nullvektor gilt $f(0) = 0$. Es folgt $\mathrm{Kern}(f) = \{0\}$.

$\Leftarrow$ Sei $\mathrm{Kern}(f) = \{0\}$. Seien $v, v' \in V$ mit $f(v) = f(v')$. Dann gilt $0 = f(v) - f(v') = f(v - v')$, das heißt, $v - v'$ liegt im Kern von f. Da $\mathrm{Kern}(f) = \{0\}$, folgt $v - v' = 0$, also $v = v'$. Dies zeigt, dass f injektiv ist.

$\square$

8.3.11 Aufgabe: Sei $f : \mathrm{M}_{22}(\mathbb{R}) \to \mathrm{M}_{23}(\mathbb{R})$ wie in den Aufgaben 8.1.3 und 8.1.7. Untersuchen Sie, ob f injektiv ist.

Wieder etwas zum Anschauen. Das folgende Applet skizziert im linken Teil den Vektorraum $V = \mathbb{R}^2$ und einen Unterraum $U = \langle v \rangle$ der Dimension 1, also eine Gerade durch den Ursprung. Im rechten Teil sehen Sie $W = \mathbb{R}^2$ und den Unterraum $\langle f(v) \rangle$. Dabei ist $f : V \to W$ gegeben durch $f(x) = Ax$, für alle $x \in V$. Die Abbildung f ist nicht injektiv, sie muss also einen Kern haben, der nicht $\{0\}$ ist. Machen Sie sich auf die Suche nach Kern(f), indem Sie U durch Ziehen an v verändern.



8.3.3 Der Rangsatz

Der Rangsatz ist eine weitere Dimensionsformel. Er stellt einen Zusammenhang her zwischen der Dimension des Kernes und der Dimension des Bildes einer linearen Abbildung. Zunächst jedoch eine Definition:

8.3.12 Definition: Sei $f : V \to W$ eine lineare Abbildung. Der **Rang** von f wird mit $\mathrm{Rg}(f)$ bezeichnet, und er ist definiert durch $\mathrm{Rg}(f) = \dim(\mathrm{Bild}(f))$.

Sei $f : V \to W$ eine lineare Abbildung, und sei V endlich erzeugt, $\dim(V) = n$.

Dann ist auch Kern(f) endlich erzeugt, denn Kern(f) ist ein Unterraum von V. Sei $v_1, \ldots, v_r$ eine Basis von Kern(f). Dann sind $v_1, \ldots, v_r$ linear unabhängig in V. Der Basisergänzungssatz (vergleiche 7.3.6) erlaubt uns, $v_1, \ldots, v_r$ durch Vektoren $v_{r+1}, \ldots, v_n$ zu einer Basis von V zu ergänzen.

Der Rangsatz ist eine einfache Folgerung aus dem folgenden Ergebnis:

8.3.13 Satz: Sei V ein endlich erzeugter Vektorraum, und sei $f : V \to W$ eine lineare Abbildung. Sei $v_1, \ldots, v_r$ eine Basis von Kern(f), und sei $v_1, \ldots, v_r, v_{r+1}, \ldots, v_n$ eine Basis von V. Dann ist $f(v_{r+1}), \ldots, f(v_n)$ eine Basis von Bild(f).

Beweis: Wir zeigen zuerst, dass $f(v_{r+1}), \ldots, f(v_n)$ ein Erzeugendensystem von Bild(f) ist. Dazu sei $w \in$ Bild(f). Dann gibt es ein $v \in V$ mit $f(v) = w$. Da $v_1, \ldots, v_r, v_{r+1}, \ldots, v_n$ eine Basis von V ist, gibt es Skalare $a_1, \ldots, a_r, a_{r+1}, \ldots, a_n$ mit $v = \sum_{i=1}^{r} a_i v_i + \sum_{i=r+1}^{n} a_i v_i$. Dabei liegt $\sum_{i=1}^{r} a_i v_i$ im Kern von f. Dann gilt

$$w = f(v) = f\left(\sum_{i=1}^{r} a_i v_i + \sum_{i=r+1}^{n} a_i v_i\right) = f\left(\sum_{i=1}^{r} a_i v_i\right) + f\left(\sum_{i=r+1}^{n} a_i v_i\right) = \sum_{i=r+1}^{n} a_i f(v_i).$$

Da jedes $w \in$ Bild(f) eine Linearkombination der Vektoren $f(v_{r+1}), \ldots, f(v_n)$ ist, folgt, dass $f(v_{r+1}), \ldots, f(v_n)$ ein Erzeugendensystem von Bild(f) ist.

Wir zeigen jetzt, dass $f(v_{r+1}), \ldots, f(v_n)$ linear unabhängig in Bild(f) sind.

Dazu seien $a_{r+1}, \ldots, a_n$ Skalare, so dass $a_{r+1} f(v_{r+1}) + \cdots + a_n f(v_n) = 0$ ist. Da f linear ist, gilt $f(a_{r+1} v_{r+1} + \cdots + a_n v_n) = 0$, und es folgt, dass $a_{r+1} v_{r+1} + \cdots + a_n v_n$ im Kern von f liegt. Dann gibt es Skalare $a_1, \ldots, a_r$ mit

$$a_1 v_1 + \cdots + a_r v_r = a_{r+1} v_{r+1} + \cdots + a_n v_n,$$

denn $v_1, \ldots, v_r$ ist eine Basis von Kern(f). Es folgt

$$a_1 v_1 + \cdots + a_r v_r - a_{r+1} v_{r+1} - \cdots - a_n v_n = 0,$$

und da $v_1, \ldots, v_r, v_{r+1}, \ldots, v_n$ eine Basis von V ist, folgt, dass alle Skalare $a_1, \ldots, a_n$ Null sind. Somit sind $f(v_{r+1}), \ldots, f(v_n)$ linear unabhängig. □

8.3.14 Korollar: (Rangsatz)

Sei V ein endlich erzeugter Vektorraum, und sei $f : V \to W$ eine lineare Abbildung. Dann gilt $\dim(V) = \dim(\mathrm{Kern}(f)) + \mathrm{Rg}(f)$.

Beweis: Sei $n = \dim(V)$, und sei $r = \dim(\mathrm{Kern}(f))$. Satz 8.3.13 besagt, dass $\dim(\mathrm{Bild}(f)) = n - r$ ist, und es folgt die Behauptung. □

8.3.15 Aufgabe: Sei $f : \mathrm{M}_{nn}(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ definiert durch $f(a_{ij}) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$. Die Abbildung f ordnet also jeder Matrix in $\mathrm{M}_{nn}(\mathbb{K})$ die Summe ihrer Diagonalelemente zu. Beweisen Sie, dass f linear ist, und berechnen Sie die Dimension des Kerns von f.

8.3.16 Aufgabe: Sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum der Dimension 17, und sei W ein $\mathbb{K}$-Vektorraum der Dimension 8. Sei $f : V \to W$ eine lineare Abbildung. Welche Dimension hat $\mathrm{Kern}(f)$, wenn f surjektiv ist?

Der Rangsatz hat folgende nützliche Folgerung:

8.3.17 Korollar: Seien V und W endlich erzeugte Vektorräume derselben Dimension, und sei $f : V \to W$ linear. Die Abbildung f ist genau dann surjektiv, wenn sie injektiv ist.

Beweis: Sei $n = \dim(V) = \dim(W)$. Dann gilt

$$\begin{aligned} f \text{ ist injektiv} &\Leftrightarrow \mathrm{Kern}(f) = \{0\} \text{ mit Proposition 8.3.10} \\ &\Leftrightarrow \mathrm{Rg}(f) = n \text{ mit dem Rangsatz} \\ &\Leftrightarrow \dim(\mathrm{Bild}(f)) = \dim(W) \\ &\Leftrightarrow \mathrm{Bild}(f) = W \text{ mit der Dimensionsformel 7.4.5 für Unterräume} \\ &\Leftrightarrow f \text{ ist surjektiv.} \end{aligned}$$

□

Aus folgendem Grund ist diese Folgerung ausgesprochen nützlich. Wenn wir zeigen wollen, dass eine lineare Abbildung f zwischen zwei endlich erzeugten Vektorräumen derselben Dimension ein Isomorphismus ist, dann müssen wir nur überprüfen, ob f injektiv oder ob f surjektiv ist. Wenn eine dieser Eigenschaften gilt, wird die, die wir nicht nachgewiesen haben, automatisch erfüllt sein.

Eine weitere Folgerung aus Satz 8.3.13 ist:

8.3.18 Korollar: Sei V ein endlich erzeugter Vektorraum, und sei $f : V \to W$ eine lineare Abbildung. Sei $v_1, \ldots, v_n$ eine Basis von V. Dann gilt:

(a) Genau dann ist f injektiv, wenn $f(v_1), \ldots, f(v_n)$ eine Basis von $\mathrm{Bild}(f)$ ist.

(b) Genau dann ist f surjektiv, wenn $f(v_1), \ldots, f(v_n)$ ein Erzeugendensystem von W ist.

(c) Genau dann ist f bijektiv, wenn $f(v_1), \ldots, f(v_n)$ eine Basis von W ist.

Beweis:

(a)

$$
\begin{aligned}
f \text{ ist injektiv} \quad &\Leftrightarrow \quad \operatorname{Kern}(f) = \{0\} \text{ mit Proposition 8.3.10} \\
&\Leftrightarrow \quad f(v_1), \ldots, f(v_n) \text{ ist eine Basis von } \operatorname{Bild}(f) \text{ mit Satz 8.3.13.}
\end{aligned}
$$

(b) Diese Behauptung ist Korollar 8.3.5.

(c) Genau dann ist f surjektiv, wenn $W = \operatorname{Bild}(f)$ ist. Die Behauptung folgt jetzt aus (a).

□

Wenn f also ein Isomorphismus ist, so überführt f eine Basis von V in eine Basis von W. Es folgt, dass V und W dieselbe Dimension haben. Die Korollare 8.3.18 (c) und 8.2.6 beantworten damit vollständig die Frage 8.2.1, die wir zu Beginn des letzten Abschnitts gestellt haben.

8.3.19 Satz: (Struktursatz endlich erzeugter Vektorräume)

Seien V und W endlich erzeugte Vektorräume über einem Körper $\mathbb{K}$.

(a) Genau dann sind V und W isomorph, wenn sie dieselbe Dimension haben.

(b) Ist $\dim(V) = n$, so ist V isomorph zu $\mathbb{K}^n$.

□

8.3.20 Beispiel: Der Vektorraum $\mathrm{M}_{mn}(\mathbb{K})$ hat die Dimension mn. Es folgt, dass $\mathrm{M}_{mn}(\mathbb{K})$ und $\mathbb{K}^{mn}$ isomorph sind.

8.3.21 Aufgabe: Seien V und W endlich erzeugte $\mathbb{K}$-Vektorräume, und sei $f : V \to W$ linear. Beweisen Sie:

(a) Wenn f injektiv ist, dann gilt $\dim(V) \leq \dim(W)$.

(b) Wenn f surjektiv ist, dann gilt $\dim(V) \geq \dim(W)$.

Im Folgenden werden wir den Rang einer Komposition von linearen Abbildungen untersuchen.

8.3.22 Proposition: Seien V, W und X endlich erzeugte $\mathbb{K}$-Vektorräume, und seien $f : V \to W$ und $g : W \to X$ lineare Abbildungen. Dann gilt $\operatorname{Rg}(g \circ f) \leq \operatorname{Rg}(g)$ und $\operatorname{Rg}(g \circ f) \leq \operatorname{Rg}(f)$.

Beweis: Um die erste Ungleichung zu beweisen, zeigen wir, dass $\operatorname{Bild}(g \circ f)$ ein Unterraum von $\operatorname{Bild}(g)$ ist. Dazu sei $x \in \operatorname{Bild}(g \circ f)$. Dann gibt es ein $v \in V$

mit $x = (g \circ f)(v) = g(f(v))$. Somit gilt $x \in \mathrm{Bild}(g)$, denn $f(v)$ ist ein Urbild von x unter g. Damit ist $\mathrm{Bild}(g \circ f)$ ein Unterraum von $\mathrm{Bild}(g)$, und mit der Dimensionsformel für Unterräume, Korollar 7.4.5, folgt, dass $\mathrm{Rg}(g \circ f) \leq \mathrm{Rg}(g)$ ist.

Um die zweite Ungleichung zu beweisen, zeigen wir, dass $\mathrm{Kern}(f)$ ein Unterraum von $\mathrm{Kern}(g \circ f)$ ist. Dazu sei $v \in \mathrm{Kern}(f)$. Dann gilt $f(v) = 0$, also $g(f(v)) = (g \circ f)(v) = 0$. Es ist also $v \in \mathrm{Kern}(g \circ f)$. Es folgt, dass $\mathrm{Kern}(f)$ ein Unterraum von $\mathrm{Kern}(g \circ f)$ ist. Es gilt daher $\dim(\mathrm{Kern}(f)) \leq \dim(\mathrm{Kern}(g \circ f))$. Mit dem Rangsatz, Korollar 8.3.14, folgt

$$\mathrm{Rg}(g \circ f) = \dim(V) - \dim(\mathrm{Kern}(g \circ f)) \leq \dim(V) - \dim(\mathrm{Kern}(f)) = \mathrm{Rg}(f),$$

die Behauptung. □

8.4 Lineare Abbildungen und Basen

Seien M und N Mengen. Wenn wir eine Abbildung von M nach N definieren wollen, dann müssen wir für JEDES Element $m \in M$ angeben, was das Bild von m unter dieser Abbildung ist. Wenn f und g zwei Abbildungen von M nach N sind, und wenn wir überprüfen wollen, ob die Abbildungen gleich sind, dann müssen wir für JEDES Element $m \in M$ überprüfen, ob $f(m) = g(m)$ ist.

Der folgende Satz besagt, dass die oben beschriebene Situation deutlich stressfreier ist, wenn $M = V$ und $N = W$ endlich erzeugte $\mathbb{K}$-Vektorräume sind, und wenn wir nur an linearen Abbildungen interessiert sind. Wenn nämlich $v_1, \ldots, v_n$ eine Basis von V ist, und wenn wir eine lineare Abbildung $f : V \to W$ definieren wollen, dann reicht es völlig aus, wenn wir vorschreiben, was die Bilder $f(v_1), \ldots, f(v_n)$ sein sollen. Jede weitere lineare Abbildung $g : V \to W$, die nur auf den „Stützstellen" $v_1, \ldots, v_n$ mit f übereinstimmt – also $f(v_i) = g(v_i)$ für alle $1 \leq i \leq n$ – muss schon gleich f sein, also $f(v) = g(v)$ für alle $v \in V$.

Machen wir das präziser:

8.4.1 Satz: (Beschreibung linearer Abbildungen durch die Bilder einer Basis)

Seien V und W Vektorräume über einem Körper $\mathbb{K}$. Sei $v_1, \ldots, v_n$ eine Basis von V, und seien $w_1, \ldots, w_n$ beliebige Vektoren in W. Dann gibt es genau eine lineare Abbildung $f : V \to W$ mit $f(v_i) = w_i$ für alle $1 \leq i \leq n$.

Beweis: Wir werden zunächst die Existenz und dann die Eindeutigkeit von f zeigen. In beiden Fällen werden wir eine etwas allgemeinere Aussage beweisen.

Existenz:

Behauptung: Wenn $v_1, \ldots, v_r$ linear unabhängig sind, dann gibt es für beliebige $w_1, \ldots, w_r$ mindestens eine lineare Abbildung $f : V \to W$ mit $f(v_i) = w_i$ für alle $1 \leq i \leq r$.

Beweis: Wir ergänzen $v_1, \ldots, v_r$ durch Vektoren $v_{r+1}, \ldots, v_n$ zu einer Basis von V und wählen $w_{r+1}, \ldots, w_n$ in W beliebig. Wir müssen $f(v)$ für alle $v \in V$ definieren.

Dazu sei $v \in V$. Da $v_1, \ldots, v_n$ eine Basis von V ist, gibt es Skalare $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{K}$, so dass sich v eindeutig als Linearkombination $v = \sum_{i=1}^{n} a_i v_i$ der Vektoren $v_1, \ldots, v_n$ schreiben lässt. Wir definieren nun die Abbildung $f : V \to W$ durch $f(v) = f\left(\sum_{i=1}^{n} a_i v_i\right) = \sum_{i=1}^{n} a_i w_i$. Wir müssen zeigen, dass f linear ist.

Dazu seien $v = \sum_{i=1}^{n} a_i v_i$ und $v' = \sum_{i=1}^{n} a_i' v_i$ Vektoren in V. Dann gilt

$$
\begin{aligned}
f(v + v') &= f\left(\sum_{i=1}^{n} a_i v_i + \sum_{i=1}^{n} a_i' v_i\right) \\
&= f\left(\sum_{i=1}^{n} (a_i + a_i') v_i\right) \\
&= \sum_{i=1}^{n} (a_i + a_i') w_i \text{ nach Definition von } f \\
&= \sum_{i=1}^{n} a_i w_i + \sum_{i=1}^{n} a_i' w_i \\
&= f\left(\sum_{i=1}^{n} a_i v_i\right) + f\left(\sum_{i=1}^{n} a_i' v_i\right) \text{ nach Definition von } f \\
&= f(v) + f(v').
\end{aligned}
$$

Sei nun a ein Skalar, und sei $v = \sum_{i=1}^{n} a_i v_i \in V$.

Dann gilt

$$\begin{aligned} f(av) &= f\left(a\sum_{i=1}^{n} a_i v_i\right) &&= f\left(\sum_{i=1}^{n} a a_i v_i\right) \\ &= \sum_{i=1}^{n} a a_i w_i &&= a\sum_{i=1}^{n} a_i w_i \\ &= af\left(\sum_{i=1}^{n} a_i v_i\right) &&= af(v). \end{aligned}$$

Dies zeigt, dass f linear ist.

Eindeutigkeit:

Behauptung: Wenn $v_1, \ldots, v_s$ ein Erzeugendensystem von V ist, dann gibt es für beliebige $w_1, \ldots, w_s$ höchstens eine lineare Abbildung $f : V \to W$ mit $f(v_i) = w_i$ für alle $1 \leq i \leq s$.

Beweis: Seien f und g lineare Abbildungen von V nach W mit $f(v_i) = w_i = g(v_i)$ für alle $1 \leq i \leq s$. Wir müssen zeigen, dass f und g nicht nur auf diesen wenigen Vektoren übereinstimmen, sondern auf allen Vektoren $v \in V$.

Dazu sei $v \in V$. Da $v_1, \ldots, v_s$ ein Erzeugendensystem von V ist, gibt es Skalare $a_1, \ldots, a_s$, so dass $v = \sum_{i=1}^{s} a_i v_i$ ist. Daraus ergibt sich

$$\begin{aligned} f(v) &= f\left(\sum_{i=1}^{s} a_i v_i\right) &&= \sum_{i=1}^{s} a_i f(v_i), \quad \text{denn } f \text{ ist linear} \\ &= \sum_{i=1}^{s} a_i g(v_i) &&= g\left(\sum_{i=1}^{s} a_i v_i\right), \quad \text{denn } g \text{ ist linear} \\ &= g(v). \end{aligned}$$

Dies zeigt $f = g$. □

In Kombination mit dem Basisergänzungssatz 7.3.6 und Satz 8.3.13 ist Satz 8.4.1 hilfreich, wenn wir lineare Abbildungen mit vorgegebenen Eigenschaften konstruieren wollen. Ein Beispiel:

8.4.2 Beispiel: Sei $V = \mathrm{M}_{22}(\mathbb{R})$, und sei W der Vektorraum der Polynome vom Grad ≤ 2 über $\mathbb{R}$. Wir wollen eine lineare Abbildung $f : V \to W$ definieren, so dass $\mathrm{Kern}(f) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\rangle$ ist.

Wir werden eine Basis $\mathcal{B}$ von V so konstruieren, dass sie unseren Vorgaben entspricht. Dazu wählen wir zunächst einmal die Matrizen $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ als

Basiselemente von V. Diese Basiselemente werden wir gleich nach $0 \in W$ schicken. Nun ergänzen wir $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ zu einer Basis von V. Wir versuchen es mit den Matrizen $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Diese vier Matrizen überprüfen wir auf lineare Unabhängigkeit. Dazu seien $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ mit

$$a\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + d\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+c & b+d \\ b & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Es folgt $a = b = 0$, und damit $c = d = 0$. Somit sind die Matrizen linear unabhängig. Da $\mathrm{M}_{22}(\mathbb{R})$ die Dimension 4 hat, und da 4 linear unabhängige Vektoren in einem Vektorraum der Dimension 4 bereits eine Basis bilden (vergleiche 7.4.4), ist $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ eine Basis von V.

Jetzt definieren wir f mit den gewünschten Eigenschaften. Wir setzen $f\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 0$ und $f\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = 0$. Jetzt müssen wir entscheiden, auf welche Polynome die beiden anderen Basiselemente abgebildet werden sollen. Mit dem Rangsatz muss $\dim(\mathrm{Kern}(f)) + \dim(\mathrm{Bild}(f)) = 4$ gelten, und da unsere Forderung an f war, dass $\dim(\mathrm{Kern}(f)) = 2$ ist, folgt, dass wir die verbleibenden Basismatrizen auf linear unabhängige Polynome abgebilden müssen. Also zum Beispiel $f\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 1$ und $f\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = T^2$.

Die lineare Abbildung $f : V \to W$, die durch $f\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 0$, $f\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = 0$, $f\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 1$ und $f\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = T^2$ definiert ist, hat damit die geforderten Eigenschaften.

Wenn wir eine geschlossene Formel für f angeben wollen, gehen wir wie folgt vor: Wir starten mit einer Matrix $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \in V$ und schreiben diese Matrix als Linearkombination der Matrizen unserer Basis. Das geschieht entweder durch scharfes Hinsehen oder durch das Lösen eines linearen Gleichungssystems. Also

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = a_{22}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + a_{21}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + (a_{11} - a_{22})\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + (a_{12} - a_{21})\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Jetzt wenden wir f auf diese Gleichung an und benutzen, dass f linear ist:

$$\begin{aligned} f\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} &= a_{22} f\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + a_{21} f\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ &\quad +(a_{11}-a_{22}) f\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + (a_{12}-a_{21})\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= a_{11} - a_{22} + (a_{12}-a_{21})T^2. \end{aligned}$$

8.4.3 Aufgabe: V der Vektorraum der Polynome vom Grad ≤ 2 über $\mathbb{R}$. Definieren Sie eine lineare Abbildung $f : V \to \mathrm{M}_{22}(\mathbb{R})$ mit $\mathrm{Bild}(f) = \left\langle \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\rangle$.

8.4.4 Aufgabe: Definieren Sie eine lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit $\mathrm{Kern}(f) = \mathrm{Bild}(f)$.

8.4.5 Aufgabe: Definieren Sie eine lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit $f \circ f = f$, wobei $f \neq 0$ und $f \neq \mathrm{id}_{\mathbb{R}^2}$ ist.

8.4.6 Korollar: Seien V und W Vektorräume über $\mathbb{K}$. Sei $\dim(V) = \dim(W) = n < \infty$. Dann gibt es zu jeder Basis $v_1, \ldots, v_n$ von V und jeder Basis $w_1, \ldots, w_n$ von W genau eine lineare Abbildung $f : V \to W$ mit $f(v_i) = w_i$ für alle $1 \leq i \leq n$. Diese Abbildung ist ein Isomorphismus.

Beweis: Dass es genau eine lineare Abbildung f mit diesen Eigenschaften gibt, folgt aus der Beschreibung linearer Abbildungen durch die Bilder einer Basis, Satz 8.4.1. Dass f ein Isomorphismus ist, ergibt sich aus Teil (c) des Korollars 8.3.18. $\square$

Indem wir $V = W$ setzen, erhalten wir:

8.4.7 Korollar: Je zwei Basen eines endlich erzeugten Vektorraums V können durch genau eine lineare Abbildung ineinander überführt werden. Diese Abbildung ist ein Isomorphismus. $\square$

8.4.8 Definition: Sei V ein endlich erzeugter Vektorraum, und seien $\mathcal{B}$ und $\mathcal{B}'$ zwei Basen von V. Sei f der Isomorphismus, der $\mathcal{B}$ in $\mathcal{B}'$ überführt. Dann wird f **Basistransformation** oder **Basiswechsel von $\mathcal{B}$ nach $\mathcal{B}'$** genannt.

Wenn f die Basistransformation von $\mathcal{B}$ nach $\mathcal{B}'$ ist, dann ist f^{-1} die Basistransformation von $\mathcal{B}'$ nach $\mathcal{B}$.

Lösungen der Aufgaben

Lösungen der Aufgaben in 8.1

Aufgabe 8.1.3

Seien $A, B \in \mathrm{M}_{22}(\mathbb{R})$. Dann gilt $f(A+B) = (A+B)X = AX+BX = f(A)+f(B)$.

Sei $A \in \mathrm{M}_{22}(\mathbb{R})$, und sei $a \in \mathbb{R}$. Dann gilt $f(aA) = (aA)X = a(AX) = af(A)$.

Es folgt, dass f linear ist.

Aufgabe 8.1.7

Angenommen, f wäre surjektiv. Dann gibt es für jede Matrix $B \in \mathrm{M}_{23}(\mathbb{R})$ eine Matrix $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{22}(\mathbb{R})$ mit

$$AX = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+b & 2a & 3a+b \\ c+d & 2c & 3c+d \end{pmatrix} = B.$$

Insbesondere trifft dies für die Matrix $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ zu. Wir vergleichen die Einträge in AX und B. Es folgt $2a = 2c = 0$, also $a = c = 0$. Da $a + b = 1$ ist, folgt $b = 1$. Dann ist aber der Eintrag an der Stelle $(1, 3)$ in AX nicht Null, so wie in B. Das ist ein Widerspruch, und es folgt, dass $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ nicht im Bild von f liegt. Somit ist f nicht surjektiv, also kein Isomorphismus.

Aufgabe 8.1.11

Sei $f : V \to W$ linear und sei $v = \sum_{i=1}^{n} a_i v_i$, wobei $v_i \in V$ und $a_i \in \mathbb{K}$ sind, für alle $1 \leq i \leq n$.

Behauptung: $f\left(\sum_{i=1}^{n} a_i v_i\right) = \sum_{i=1}^{n} a_i f(v_i)$.

Beweis: Wir beweisen die Behauptung mit Induktion nach n. Für $n = 1$ folgt $f(a_1 v_1) = a_1 f(v_1)$ aus der Definition für lineare Abbildungen.

Sei nun $n > 1$. Für den Induktionsschritt nehmen wir an, dass

$f\left(\sum_{i=1}^{n-1} a_i v_i\right) = \sum_{i=1}^{n-1} a_i f(v_i)$ für alle $v_1, \ldots, v_{n-1} \in V$ und alle $a_1, \ldots, a_{n-1} \in \mathbb{K}$ gilt.

Sei $v = \sum_{i=1}^{n} a_i v_i$. Dann gilt

$$
\begin{aligned}
f\left(\sum_{i=1}^{n} a_i v_i\right) &= f\left(\sum_{i=1}^{n-1} a_i v_i + a_n v_n\right) \\
&= f\left(\sum_{i=1}^{n-1} a_i v_i\right) + f(a_n v_n), \text{ denn } f \text{ ist linear} \\
&= \sum_{i=1}^{n-1} a_i f(v_i) + a_n f(v_n), \text{ denn } f \text{ ist linear} \\
& \text{ und mit Induktionsvoraussetzung} \\
&= \sum_{i=1}^{n} a_i f(v_i).
\end{aligned}
$$

□

Lösung der Aufgabe in 8.2

Aufgabe 8.2.3

Wir zeigen, dass $2 + T + T^2, 2 + T^2, 1 + T$ ein Erzeugendensystem von V ist. Dazu sei $p = a_0 + a_1 T + a_2 T^2 \in V$. Genau dann gibt es Skalare $a, b, c \in \mathbb{R}$, so dass

$$a(2+T+T^2)+b(2+T^2)+c(1+T) = (2a+2b+c)+(a+c)T+(a+b)T^2 = a_0+a_1T+a_2T^2$$

ist, wenn $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ Lösungsmenge des inhomogenen linearen Gleichungssystems

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \text{ ist.}$$

Wir beginnen, die Treppennormalform der erweiterten Koeffizientenmatrix, also der Matrix $\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 & | & a_0 \\ 1 & 0 & 1 & | & a_1 \\ 1 & 1 & 0 & | & a_2 \end{pmatrix}$, zu berechnen. Dazu subtrahieren wir das Doppelte der zweiten Zeile von der ersten und die zweite Zeile von der dritten:

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 & | & a_0 - 2a_1 \\ 1 & 0 & 1 & | & a_1 \\ 0 & 1 & -1 & | & a_2 - a_1 \end{pmatrix}.$$

Jetzt subtrahieren wir das Doppelte der dritten Zeile von der ersten:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & | & a_0 - 2a_2 \\ 1 & 0 & 1 & | & a_1 \\ 0 & 1 & -1 & | & a_2 - a_1 \end{pmatrix}.$$

Wir vertauschen die erste und die zweite Zeile, und dann die zweite und die dritte Zeile:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & | & a_1 \\ 0 & 1 & -1 & | & a_2 - a_1 \\ 0 & 0 & 1 & | & a_0 - 2a_2 \end{pmatrix}.$$

Da die Ränge der Koeffizientenmatrix und der erweiterten Koeffizientenmatrix gleich sind, hat das lineare Gleichungssystem eine Lösung. Somit ist $2+T+T^2, 2+T^2, 1+T$ ein Erzeugendensystem von V. Der Vektorraum V hat die Dimension 3. Da 3 Vektoren eines Vektorraums der Dimension 3, die ein Erzeugendensystem bilden, schon eine Basis sind (vergleiche Proposition 7.4.4), ist $2+T+T^2, 2+T^2, 1+T$ eine Basis von V.

Um $\kappa_{\mathcal{C}}(a_0 + a_1T + a_2T^2)$ zu berechnen, überführen wir nun die erweiterte Koeffizientenmatrix in Treppennormalform.

Wir addieren die letzte Zeile von $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & | & a_1 \\ 0 & 1 & -1 & | & a_2 - a_1 \\ 0 & 0 & 1 & | & a_0 - 2a_2 \end{pmatrix}$ zur zweiten und subtrahieren sie von der ersten. Wir erhalten

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & -a_0 + a_1 + 2a_2 \\ 0 & 1 & 0 & | & a_0 - a_1 - a_2 \\ 0 & 0 & 1 & | & a_0 - 2a_2 \end{pmatrix}.$$

Rechts des Striches steht die eindeutige Lösung des linearen Gleichungssystems, und es folgt $\kappa_{\mathcal{C}}(a_0 + a_1T + a_2T^2) = \begin{pmatrix} -a_0 + a_1 + 2a_2 \\ a_0 - a_1 - a_2 \\ a_0 - 2a_2 \end{pmatrix}$. Bezüglich der Basis $\mathcal{B}$ ist

$\kappa_{\mathcal{B}}(a_0 + a_1T + a_2T^2) = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$.

Lösungen der Aufgaben in 8.3

Aufgabe 8.3.6 Es ist $E_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $E_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $E_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $E_{22} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ eine Basis von $\mathrm{M}_{22}(\mathbb{R})$. Wir bilden

$$\begin{aligned}
f(E_{11}) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
f(E_{12}) &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
f(E_{21}) &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \\
f(E_{22}) &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Mit Proposition 8.3.4 ist $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ein Erzeugendensystem von $\mathrm{Bild}(f)$. Wir untersuchen die Matrizen auf lineare Unabhängigkeit. Dazu seien a, b, c, d Skalare, so dass gilt:

$$\begin{aligned}
a\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} + d\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} a+b & 2a & 3a+b \\ c+d & 2c & 3c+d \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Es folgt $2a = 2c = 0$, also $a = c = 0$. Indem wir in die erste Spalte einsetzen, ergibt sich $b = d = 0$. Es folgt, dass die Matrizen linear unabhängig sind. Somit bilden sie eine Basis von $\mathrm{Bild}(f)$.

Aufgabe 8.3.11 Wir untersuchen, ob $\mathrm{Kern}(f) = \left\{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right\}$ gilt. Sei also $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{Kern}(f)$. Dann gilt

$$f\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+b & 2a & 3a+b \\ c+d & 2c & 3c+d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Es folgt, dass nur die Nullmatrix im Kern von f liegt. Mit Proposition 8.3.10 ist f injektiv.

Aufgabe 8.3.15 Sei $f : \mathrm{M}_{nn}(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ definiert durch $f(a_{ij}) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$.

Behauptung: Die Abbildung f ist linear und $\dim(\mathrm{Kern}(f)) = n^2 - 1$.

Beweis: Seien $A = (a_{ij}), B = (b_{ij}) \in \mathrm{M}_{nn}(\mathbb{K})$. Dann gilt

$$f(A+B) = f\left((a_{ij} + b_{ij})\right) = \sum_{i=1}^{n}(a_{ii} + b_{ii}) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} + \sum_{i=1}^{n} b_{ii} = f(A) + f(B).$$

Sei $A \in \mathrm{M}_{nn}(\mathbb{K})$, und sei $a \in \mathbb{K}$. Es gilt

$$f(aA) = f\left((aa_{ij})\right) = \sum_{i=1}^{n} aa_{ii} = a\sum_{i=1}^{n} a_{ii} = af(A).$$

Es folgt, dass f linear ist.

Die Abbildung f ist surjektiv, denn zu $a \in \mathbb{K}$ sei A_a die $n \times n$-Matrix, die an der Stelle $(1,1)$ den Eintrag a hat und sonst nur 0. Dann gilt $f(A_a) = a$. Es ist $\mathbb{K}$ ein $\mathbb{K}$-Vektorraum der Dimension 1, und $\mathrm{M}_{nn}(\mathbb{K})$ ist ein $\mathbb{K}$-Vektorraum der Dimension n^2. Mit dem Rangsatz folgt die Behauptung. □

Aufgabe 8.3.16

Sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum der Dimension 17, und sei W ein $\mathbb{K}$-Vektorraum der Dimension 8. Sei $f : V \to W$ linear. Wenn f surjektiv ist, so gilt $\dim(\mathrm{Bild}(f)) = 8$, und mit dem Rangsatz folgt $\dim(\mathrm{Kern}(f)) = 9$.

Aufgabe 8.3.21

Behauptung: Seien V und W endlich erzeugte $\mathbb{K}$-Vektorräume, und sei $f : V \to W$ linear.

(a) Wenn f injektiv ist, dann gilt $\dim(V) \leq \dim(W)$.

(b) Wenn f surjektiv ist, dann gilt $\dim(V) \geq \dim(W)$.

Beweis:

(a) Sei f injektiv. Mit Proposition 8.3.10 gilt $\mathrm{Kern}(f) = \{0\}$. Es folgt mit dem Rangsatz

$$\dim(V) = \mathrm{Rg}(f) = \dim(\mathrm{Bild}(f)) \leq \dim(W),$$

wobei die letzte Ungleichung gilt, da $\mathrm{Bild}(f)$ ein Unterraum von W ist.

(b) Sei f surjektiv. Dann gilt $\mathrm{Bild}(f) = W$, und es folgt aus dem Rangsatz $\dim(V) = \dim(W) + \dim(\mathrm{Kern}(f))$, also $\dim(V) \geq \dim(W)$.

□

Lösungen der Aufgaben in 8.4

Aufgabe 8.4.3 Sei $1, T, T^2$ die Standardbasis von V. Wir definieren $f(1) = f(T) = f(T^2) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Mit Proposition 8.3.4 ist $f(1), f(T), f(T^2)$ ein Erzeugendensystem von Bild(f), also $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ eine Basis von Bild(f). Es folgt Bild$(f) = \left\langle \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\rangle$, wie gefordert. Wenn wir eine geschlossene Formel für f haben wollen, so setzen wir

$$f(a_0 + a_1 T + a_2 T^2) = a_0 f(1) + a_1 f(T) + a_2 f(T^2) = \begin{pmatrix} 0 & a_0 + a_1 + a_2 \\ a_0 + a_1 + a_2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 8.4.4 Wir beginnen mit der Standardbasis e_1, e_2 in $\mathbb{R}^2$. Da Kern(f) = Bild(f) sein soll, muss mit dem Rangsatz dim(Kern(f)) = dim(Bild(f)) = 1 gelten. Wir schicken also unser Basiselement e_1 auf $0 \in \mathbb{R}^2$. Wenn wir e_2 auf ein Element $v \neq 0$, schicken, so hat die so definierte lineare Abbildung Kern$(f) = \langle e_1 \rangle$, und Bild$(f) = \langle v \rangle$. Wenn also Kern$(f)$ = Bild(f) gelten soll, so müssen wir $f(e_2) = e_1$ definieren.

Wenn wir eine geschlossene Formel für f haben wollen, so setzen wir

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = f(xe_1 + ye_2) = xf(e_1) + yf(e_2) = ye_1 = \begin{pmatrix} y \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 8.4.5 Wir beginnen mit der Standardbasis e_1, e_2 in $\mathbb{R}^2$. Wir schicken e_1 auf e_1, also $f(e_1) = e_1$, und e_2 auf 0, also $f(e_2) = 0$. Dann gilt $(f \circ f)(e_1) = f(f(e_1)) = f(e_1) = e_1$ und $(f \circ f)(e_2) = f(f(e_2)) = f(0) = 0$, denn f ist linear. Da f und $f \circ f$ auf einer Basis übereinstimmen, sind sie gleich.

Wenn wir eine geschlossene Formel für f haben wollen, so setzen wir

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = f(xe_1 + ye_2) = xf(e_1) + yf(e_2) = xe_1 = \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Kapitel 9

Lineare Abbildungen und Matrizen

Wir beginnen dieses Kapitel mit einer etwas technischen Notation. Dazu sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum, und sei $v_1, \dots, v_n$ eine Basis von V. Einige von Ihnen werden sich möglicherweise schon gewundert haben, dass ich Basen nicht als Mengen schreibe, also $\{v_1, \dots, v_n\}$. Viele Autoren machen das, kommen aber dann regelmäßig ins Schwimmen, und zwar jetzt. Das Problem, das auftaucht, ist, dass es bei Basen von Vektorräumen oft wichtig ist, in welcher Reihenfolge die Basisvektoren auftauchen. Die Mengenschreibweise respektiert nicht die Reihenfolge der Elemente, die Menge $\left\{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right\}$ ist dieselbe wie $\left\{\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right\}$, denn sie enthalten dieselben Elemente. Ein Weg aus der Zwickmühle ist, neue Klammern und einen neuen Begriff einzuführen: den eines Systems von Vektoren.

9.0.9 Definition: Sei V ein Vektorraum, und sei $n \in \mathbb{N}$. Ein **System** von n Vektoren in V ist ein Ausdruck der Form $(v_1, \dots, v_n)$ mit $v_i \in V$ für alle $1 \leq i \leq n$. Zwei Systeme von n Vektoren $(v_1, \dots, v_n)$ und $(w_1, \dots, w_n)$ in V heißen **gleich**, wenn $v_i = w_i$ für alle $1 \leq i \leq n$ gilt.

9.0.10 Beispiel: Die Mengen $\left\{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right\}$ und $\left\{\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right\}$ sind gleich, aber die Systeme $\left(\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right)$ und $\left(\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right)$ sind verschieden.

Wir werden im Folgenden die System-Schreibweise bei Basen benutzen.

9.1 Der Vektorraum $\mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V, W)$

Unsere bisherigen Standardbeispiele von endlich erzeugten Vektorräumen waren der Vektorraum $\mathbb{K}^n$, der Vektorraum $\mathrm{M}_{mn}(\mathbb{K})$, der Vektorraum der Polynome vom Grad $\leq n$ über $\mathbb{K}$ und die Lösungsmenge $\mathcal{U}$ eines homogenen linearen Gleichungssystems über $\mathbb{K}$. In diesem Abschnitt wird ein neuer Vektorraum hinzukommen: der Vektorraum der linearen Abbildungen zwischen zwei endlich erzeugten $\mathbb{K}$-Vektorräumen V und W.

9.1.1 Definition: Seien V und W Vektorräume über einem Körper K. Wir bezeichnen mit $\mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V, W)$ die Menge der linearen Abbildungen von V nach W.

Seien $f, g \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V, W)$. Wir definieren die Summe von f und g durch $f + g : V \to W$, $(f + g)(v) = f(v) + g(v)$ für alle $v \in V$.

Sei $f \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V, W)$, und sei $a \in \mathbb{K}$. Wir definieren eine Abbildung af durch $af : V \to W$, $(af)(v) = af(v)$ für alle $v \in V$.

9.1.2 Proposition: $\mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V, W)$ ist ein $\mathbb{K}$-Vektorraum.

Beweis: Wir zeigen zunächst, dass $+$ eine Verknüpfung auf $\mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V, W)$ ist. Seien $f, g \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V, W)$.

Es ist $f + g$ eine Abbildung von V nach W, und wir müssen zeigen, dass $f + g$ linear ist.

Seien $v, v' \in V$. Dann gilt

$$(f+g)(v+v') = f(v+v')+g(v+v') = f(v)+f(v')+g(v)+g(v') = (f+g)(v)+(f+g)(v').$$

Sei $k \in \mathbb{K}$, und sei $v \in V$. Dann gilt

$$(f + g)(kv) = f(kv) + g(kv) = kf(v) + kg(v) = k(f(v) + g(v)) = k((f + g)(v)).$$

Dies zeigt, dass $f + g$ linear ist.

Seien $a \in \mathbb{K}$ und $f \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V, W)$. Dann ist af eine Abbildung von V nach W. Sie ist linear, denn für alle $v, v' \in V$ gilt

$$(af)(v + v') = af(v + v') = af(v) + af(v') = (af)(v) + (af)(v'),$$

und für alle $k \in \mathbb{K}$ und $v \in V$ gilt

$$(af)(kv) = af(kv) = kaf(v) = k(af)(v).$$

Somit ist $\cdot : \mathbb{K} \times \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V, W) \to \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V, W)$, $(a, f) \mapsto af$ eine Skalarmultiplikation.

Wir überprüfen nun die Vektorraumaxiome.

Addition: Seien $f, g, h \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V, W)$. Dann gilt für alle $v \in V$:

$$\begin{aligned}((f+g)+h)(v) &= (f+g)(v) + h(v) = f(v) + g(v) + h(v) \\ &= f(v) + ((g+h)(v)) = (f + (g+h))(v),\end{aligned}$$

also $(f+g)+h = f+(g+h)$, und die Addition ist assoziativ. Weiter gilt

$$(f+g)(v) = f(v) + g(v) = g(v) + f(v) = (g+f)(v) \text{ für alle } v \in V,$$

also $f + g = g + f$, und es gilt das Kommutativgesetz.

Die Abbildung $0 : V \to W$, $0(v) = 0$ ist linear, und sie ist das neutrale Element der Addition.

Zu $f \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V, W)$ ist $-f : V \to W$ definiert durch $(-f)(v) = -f(v)$ invers. Somit gelten in $\mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V, W)$ die Gesetze der Addition.

Skalarmultiplikation: Seien $a, b \in \mathbb{K}$, und sei $f \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V, W)$. Für alle $v \in V$ gilt

$$((ab)f)(v) = (ab)f(v) = a(bf(v)) = (a(bf))(v),$$

also $(ab)f = a(bf)$. Für $1 \in \mathbb{K}$ und alle $f \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V, W)$ ist

$$(1f)(v) = 1(f(v)) = f(v),$$

das heißt, $1f = f$, und die Gesetze der Skalarmultiplikation gelten.

Distributivgesetze: Seien $a, b \in \mathbb{K}$ und seien $f, g \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V, W)$. Dann gelten für alle $v \in V$

$$\begin{aligned}(a(f+g))(v) &= a((f+g)(v)) = a(f(v) + g(v)) = af(v) + ag(v) \\ &= (af)(v) + (ag)(v),\end{aligned}$$

und

$$((a+b)f)(v) = (a+b)f(v) = af(v) + bf(v) = (af + bf)(v),$$

die Distributivgesetze.

$\square$

9.1.3 Definition: Der Vektorraum $\mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V, W)$ wird **Homomorphismenraum** von V nach W genannt.

Was ist die Dimension von $\mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V, W)$? Und überhaupt, ist $\mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V, W)$ endlich erzeugt, wenn V und W es sind? Mit diesen Fragen werden wir uns jetzt beschäftigen. Die Antworten vorweg: Wenn V und W endlich erzeugt sind mit $\dim(V) = n$ und $\dim(W) = m$, dann ist auch $\mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V, W)$ endlich erzeugt, und es gilt $\dim(\mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V, W)) = m \cdot n$. Diese Dimensionsformel werden wir über einen Umweg beweisen: Wir werden zeigen, dass die Vektorräume $\mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V, W)$ und $\mathrm{M}_{mn}(\mathbb{K})$ isomorph sind. Da isomorphe Vektorräume dieselbe Dimension haben (vergleiche Satz 8.3.19), folgt $\dim(\mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V, W)) = \dim(\mathrm{M}_{mn}(\mathbb{K})) = mn$.

So weit der rote Faden. Wenn es richtig ist, dass $\mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V, W)$ und $\mathrm{M}_{mn}(\mathbb{K})$ isomorph sind, dann muss es einen Isomorphismus geben, der jeder linearen Abbildung von V nach W eine Matrix zuordnet. Eine solche Zuordnung werden wir als ersten Schritt machen.

Für den Rest dieses Abschnitts wollen wir nun annehmen, dass V und W zwei endlich erzeugte $\mathbb{K}$-Vektorräume sind, dass $\mathcal{B} = (v_1, \ldots, v_n)$ eine Basis von V und $\mathcal{C} = (w_1, \ldots, w_m)$ eine Basis von W ist.

Sei $f : V \to W$ eine lineare Abbildung. Mit Satz 8.4.1 wissen wir, dass f eindeutig dadurch bestimmt ist, wie f die Basiselemente in $\mathcal{B}$ abbildet. Die Bilder $f(v_1), \ldots, f(v_n)$ besitzen eindeutig bestimmte Koordinatenvektoren (vergleiche Definition 8.2.4) $\begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^m$ bezüglich der Basis $\mathcal{C}$. Zur Erinnerung an die Konstruktion der Koordinatenvektoren von $f(v_1), \ldots, f(v_n)$: Wir schreiben einen Vektor $f(v_i)$, $1 \leq i \leq n$ als Linearkombination der Vektoren in $\mathcal{C}$, also $f(v_i) = a_{1i}w_1 + \cdots + a_{mi}w_m$ und schreiben die Koeffizienten in einen Spaltenvektor, also $\begin{pmatrix} a_{1i} \\ \vdots \\ a_{mi} \end{pmatrix}$. Wir fassen die Koordinatenvektoren $\begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^m$ jetzt spaltenweise zu einer $m \times n$-Matrix zusammen.

9.1.4 Definition: Seien V und W endlich erzeugte $\mathbb{K}$-Vektorräume, sei $\mathcal{B} = (v_1, \ldots, v_n)$ eine Basis von V, und sei $\mathcal{C} = (w_1, \ldots, w_m)$ eine Basis von W. Sei $f : V \to W$ eine lineare Abbildung.

Die $m \times n$-Matrix, deren Spalten die Koordinatenvektoren von $f(v_1), \ldots, f(v_n)$ bezüglich $\mathcal{C}$ sind, wird die **Matrixdarstellung** von f bezüglich $\mathcal{B}$ und $\mathcal{C}$ genannt und mit ${}_{\mathcal{C}}\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(f)$ bezeichnet.

Unsere Überlegungen bei der Konstruktion der Matrixdarstellung von f bezüglich der Basen $\mathcal{B}$ und $\mathcal{C}$ zeigen:

9.1.5 Beobachtung: Durch die Zuordnung $f \mapsto {}_{\mathcal{C}}\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(f)$ wird eine Abbildung ${}_{\mathcal{C}}\mathrm{M}_{\mathcal{B}} : \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V, W) \to \mathrm{M}_{mn}(\mathbb{K})$ definiert.

9.1.6 Beispiele: (a) Sei $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ definiert durch $f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + y \\ 3x + y - z \end{pmatrix}$ für alle $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$.

Als Basis $\mathcal{B}$ wählen wir die Standardbasis $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ von $\mathbb{R}^3$, und als Basis $\mathcal{C}$ die Standardbasis $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ von $\mathbb{R}^2$. Wir berechnen die Matrixdarstellung von f bezüglich dieser Basen.

$$f(e_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = 1 \cdot e_1 + 3 \cdot e_2$$

$$f(e_2) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 1 \cdot e_1 + 1 \cdot e_2$$

$$f(e_3) = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} = 0 \cdot e_1 - 1 \cdot e_2$$

Die Matrixdarstellung bezüglich dieser Basen ist damit

$${}_{\mathcal{C}}\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

(b) In diesem Beispiel nehmen wir dieselbe Abbildung wie in (a), wählen aber andere Basen.

Sei $\mathcal{B}' = \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$. Als Basis $\mathcal{C}'$ wählen wir $\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$. Dann gilt

$$f\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\4\end{pmatrix} = 1\cdot\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix} + 3\cdot\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$$

$$f\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix} + \frac{3}{2}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$$

$$f\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix} + \frac{5}{2}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}.$$

Die Matrixdarstellung von f bezüglich der Basen $\mathcal{B}'$ und $\mathcal{C}'$ ist dann

$${}_{\mathcal{C}'}\mathrm{M}_{\mathcal{B}'}(f) = \begin{pmatrix}1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ 3 & \frac{3}{2} & \frac{5}{2}\end{pmatrix}.$$

Diese Beispiele zeigen, dass es viele Matrixdarstellungen einer linearen Abbildung f gibt. Sie sind von den gewählten Basen abhängig, und auch von der Reihenfolge der Elemente einer Basis.

(c) Sei $V = \{p \in K[T] \mid \mathrm{Grad}(p) \leq n\}$, und sei $f : V \to V$ definiert durch $f(\sum_{i=0}^{n} a_i T^i) = \sum_{i=1}^{n} i a_i T^{i-1}$ für alle $\sum_{i=0}^{n} a_i T^i \in V$.

Wir wählen in V die Basis $e_0 = 1 = T^0, e_1 = T, \ldots, e_i = T^i, \ldots, e_n = T^n$ und bezeichnen sie mit $\mathcal{B}$. Dann ist $f(e_0) = 0$ und $f(e_i) = iT^{i-1} = ie_{i-1}$. Dann gilt

$${}_{\mathcal{B}}\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix}0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 2 & \cdots & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0\\ & \vdots & & \ddots & & \vdots & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & n-2 & 0\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & n-1\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}.$$

9.1.7 Aufgabe: Sei $\mathcal{B}$ die Standardbasis von $\mathbb{R}^3$, und sei $\mathcal{B}'$ die Basis $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ von $\mathbb{R}^3$.

Sei $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definiert durch $f\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2x-3y+4z\\5x-y+2z\\4x+7y\end{pmatrix}$ für alle $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$.

Berechnen Sie ${}_{\mathcal{B}}\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(f)$ und ${}_{\mathcal{B}'}\mathrm{M}_{\mathcal{B}'}(f)$.

9.1.8 Aufgabe: Sei V ein endlich erzeugter $\mathbb{K}$-Vektorraum, und sei $\mathcal{B}$ eine Basis von V. Sei id_V die identische Abbildung auf V. Bestimmen Sie ${}_{\mathcal{B}}\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(\mathrm{id}_V)$.

Wir kommen nun zum Hauptergebnis dieses Kapitels:

9.1.9 Satz: (Darstellung linearer Abbildungen durch Matrizen)

Seien V und W endlich erzeugte $\mathbb{K}$-Vektorräume, sei $\mathcal{B} = (v_1, \ldots, v_n)$ eine Basis von V, und sei $\mathcal{C} = (w_1, \ldots, w_m)$ eine Basis von W. Dann ist die Abbildung ${}_{\mathcal{C}}\mathrm{M}_{\mathcal{B}} : \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V, W) \to \mathrm{M}_{mn}(\mathbb{K})$, die jeder linearen Abbildung f die Matrixdarstellung von f bezüglich der Basen $\mathcal{B}$ und $\mathcal{C}$ zuordnet, ein Isomorphismus.

Beweis: Wir zeigen zunächst, dass die Abbildung ${}_{\mathcal{C}}\mathrm{M}_{\mathcal{B}}$ linear ist. Seien $f, g \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V, W)$. Sei $(a_{ij}) = {}_{\mathcal{C}}\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(f)$, und sei $(b_{ij}) = {}_{\mathcal{C}}\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(g)$. Dann gilt

$$\begin{aligned}(f+g)(v_j) &= f(v_j) + g(v_j)\\ &= a_{1j}w_1 + a_{2j}w_2 + \cdots + a_{mj}w_m + b_{1j}w_1 + b_{2j}w_2 + \cdots + b_{mj}w_m\\ &= (a_{1j}+b_{1j})w_1 + (a_{2j}+b_{2j})w_2 + \cdots + (a_{mj}+b_{mj})w_m,\end{aligned}$$

für alle $1 \leq j \leq n$, und es folgt ${}_{\mathcal{C}}\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(f+g) = {}_{\mathcal{C}}\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(f) + {}_{\mathcal{C}}\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(g)$.

Sei $a \in \mathbb{K}$, und sei $f \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V, W)$. Dann gilt

$$\begin{aligned}(af)(v_j) &= af(v_j)\\ &= a(a_{1j}w_1 + a_{2j}w_2 + \cdots + a_{mj}w_m)\\ &= aa_{1j}w_1 + aa_{2j}w_2 + \cdots + aa_{mj}w_m,\end{aligned}$$

für alle $1 \leq j \leq n$, und es folgt ${}_{\mathcal{C}}\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(af) = a \cdot {}_{\mathcal{C}}\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(f)$.

Somit ist ${}_{\mathcal{C}}\mathrm{M}_{\mathcal{B}}$ linear.

Es bleibt zu zeigen, dass ${}_{\mathcal{C}}\mathrm{M}_{\mathcal{B}}$ bijektiv ist. Dazu sei $A = (a_{ij}) \in \mathrm{M}_{mn}(\mathbb{K})$, und seien $\mathcal{B}$ und $\mathcal{C}$ die gewählten Basen von V und W. Dann wird durch

$$f_A(v_j) = a_{1j}w_1 + a_{2j}w_2 + \cdots + a_{mj}w_m, \text{ für alle } 1 \leq j \leq n,$$

eindeutig eine lineare Abbildung $f_A : V \to W$ definiert. Jeder $m \times n$-Matrix A können wir also eine lineare Abbildung f_A zuordnen, und wir definieren nun eine Abbildung von $\mathrm{M}_{mn}(\mathbb{K})$ nach $\mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V, W)$:

$$F : \mathrm{M}_{mn}(\mathbb{K}) \to \mathrm{Hom}_K(V, W) \text{ durch } F(A) = f_A \text{ für alle } A \in \mathrm{M}_{mn}(\mathbb{K}).$$

Sei $A \in \mathrm{M}_{mn}(\mathbb{K})$. Dann ist ${}_{\mathcal{C}}\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(f_A) = A$. Umgekehrt sei $f \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V, W)$, und sei ${}_{\mathcal{C}}\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(f)$ die Matrixdarstellung von f bezüglich der Basen $\mathcal{B}$ und $\mathcal{C}$. Dann gilt $f_{{}_{\mathcal{C}}\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(f)} = f$. Dies zeigt, dass ${}_{\mathcal{C}}\mathrm{M}_{\mathcal{B}}$ invertierbar ist. Da invertierbare Abbildungen bijektiv sind (vergleiche Proposition 1.4.21), folgt, dass ${}_{\mathcal{C}}\mathrm{M}_{\mathcal{B}}$ ein Isomorphismus ist. □

Da isomorphe Vektorräume dieselbe Dimension haben, folgt:

9.1.10 Korollar: (Dimensionsformel für Homomorphismenräume)

Wenn V und W endlich erzeugte $\mathbb{K}$-Vektorräume sind, so gilt $\dim(\mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V, W)) = \dim(V) \cdot \dim(W)$.

9.2 Koordinatenvektoren und Matrixdarstellungen

Seien V und W endlich erzeugte $\mathbb{K}$-Vektorräume. Sei $\mathcal{B} = (v_1, \ldots, v_n)$ eine Basis von V, und sei $\mathcal{C} = (w_1, \ldots, w_m)$ eine Basis von W.

In Satz 8.2.2 hatten wir einen Isomorphismus $\kappa_{\mathcal{B}}$ von V nach $\mathbb{K}^n$ definiert. Dieser Isomorphismus ordnet jedem Vektor $v \in V$ seinen Koordinatenvektor $\kappa_{\mathcal{B}}(v)$ bezüglich $\mathcal{B}$ zu. Analog haben wir einen Isomorphismus $\kappa_{\mathcal{C}}$, der jedem Vektor $w \in W$ seinen Koordinatenvektor $\kappa_{\mathcal{C}} \in \mathbb{K}^m$ bezüglich $\mathcal{C}$ zuordnet.

In Satz 9.1.9 haben wir einen Isomorphismus ${}_{\mathcal{C}}\mathrm{M}_{\mathcal{B}}$ definiert, der jeder linearen Abbildung $f \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V, W)$ ihre Matrixdarstellung ${}_{\mathcal{C}}\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(f)$ bezüglich $\mathcal{B}$ und $\mathcal{C}$ zuordnet.

Wie vertragen sich diese Konstruktionen? Ganz hervorragend! Wenn wir die Matrixdarstellung ${}_{\mathcal{C}}\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(f)$ mit dem Koordinatenvektor $\kappa_{\mathcal{B}}(v)$ eines Vektors $v \in V$ multiplizieren, erhalten wir den Koordinatenvektor $\kappa_{\mathcal{C}}(f(v))$ von $f(v)$. Dies ist gerade die Aussage der folgenden Proposition.

9.2.1 Proposition: Seien V und W endlich erzeugte $\mathbb{K}$-Vektorräume, und seien $\mathcal{B}$ und $\mathcal{C}$ Basen von V beziehungsweise W. Sei $f : V \to W$ eine lineare Abbildung. Dann gilt ${}_{\mathcal{C}}\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(f)\kappa_{\mathcal{B}}(v) = \kappa_{\mathcal{C}}(f(v))$ für alle $v \in V$.

Beweis: Sei $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$, und sei $\mathcal{C} = (w_1, \dots, w_m)$.

Sei $A = (a_{ij}) \in \mathrm{M}_{mn}(\mathbb{K})$ die Matrix von f bezüglich der Basen $\mathcal{B}$ und $\mathcal{C}$.

Sei $v = \sum_{j=1}^{n} a_j v_j$. Der Koordinatenvektor von v bezüglich $\mathcal{B}$ ist $\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$.

Nach Definition der Matrixdarstellung einer Abbildung ist

$$f(v) = f(\sum_{j=1}^{n} a_j v_j) = \sum_{j=1}^{n} a_j f(v_j) = \sum_{j=1}^{n} a_j (\sum_{i=1}^{m} a_{ij} w_i)$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} a_{ij} a_j w_i = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} a_j w_i$$

$$= \left(\sum_{j=1}^{n} a_{1j} a_j \right) w_1 + \cdots + \left(\sum_{j=1}^{n} a_{mj} a_j \right) w_m.$$

Der Koordinatenvektor von $f(v)$ ist damit $\begin{pmatrix} \sum_{j=1}^{n} a_{1j} a_j \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^{n} a_{mj} a_j \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$, die Behauptung. $\square$

9.2.2 Aufgabe: Seien $v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$ Vektoren in $\mathbb{R}^3$, und sei $V = \langle v_1, v_2 \rangle$. Sei $\mathcal{B}$ die Basis von V, die aus den Vektoren v_1, v_2 besteht.

Bestimmen Sie den Koordinatenvektor von $\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 7 \end{pmatrix}$ bezüglich dieser Basis.

Sei $f : V \to \mathbb{R}^2$ die lineare Abbildung, die durch $f(v_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ und $f(v_2) = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ definiert wird.

Bestimmen Sie den Koordinatenvektor von $f\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 7 \end{pmatrix}$ bezüglich der Standardbasis $\mathcal{E}$ von $\mathbb{R}^2$.

Wenden wir nun Proposition 9.2.1 auf Elemente im Kern von f an. Ist $v \in \mathrm{Kern}(f)$, so ist der Koordinatenvektor von $\kappa_{\mathcal{C}}(f(v))$ der Nullvektor in W. Somit ist der Koordinatenvektor $\kappa_{\mathcal{B}}(v)$ eine Lösung des homogenen linearen Gleichungssystems ${}_{\mathcal{C}}\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(f)x = 0$. Ist umgekehrt $\lambda \in \mathbb{K}^n$ eine Lösung von ${}_{\mathcal{C}}\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(f)x = 0$, so liegt der Vektor $v \in V$ mit $\kappa_{\mathcal{B}}(v) = \lambda$ im Kern von f. Die Abbildung, die jeden Vektor in $\mathrm{Kern}(f)$ auf seinen Koordinatenvektor bezüglich $\mathcal{B}$ abbildet, ist somit eine bijektive Abbildung von $\mathrm{Kern}(f)$ in die Menge $\mathcal{U}$ der Lösungen von ${}_{\mathcal{C}}\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(f)x = 0$. Diese Abbildung ist auch linear, denn $\kappa_{\mathcal{B}}$ ist linear. Es folgt:

9.2.3 Korollar: Sei $f : V \to W$ eine lineare Abbildung zwischen endlich erzeugten $\mathbb{K}$-Vektorräumen. Sei $\mathcal{B}$ eine Basis von V, und sei $\mathcal{C}$ eine Basis von W. Sei $\mathcal{U}$ die Lösungsmenge des homogenen linearen Gleichungssystems ${}_{\mathcal{C}}\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(f)x = 0$. Dann sind $\mathrm{Kern}(f)$ und $\mathcal{U}$ isomorph. Insbesondere gilt $\dim(\mathrm{Kern}(f)) = \dim(\mathcal{U})$. □

Die Dimension von $\mathcal{U}$ kennen wir aber. In Beispiel 7.4.2 (d) haben wir gesehen, dass $\dim(\mathcal{U}) = n - \mathrm{Rg}({}_{\mathcal{B}}\mathrm{M}_{\mathcal{C}}(f))$ ist. Es gilt mit dem Rangsatz 8.3.14 auch $\dim(\mathrm{Kern}(f)) = n - \mathrm{Rg}(f)$, und es folgt:

9.2.4 Korollar: Sei $f : V \to W$ eine lineare Abbildung zwischen endlich erzeugten $\mathbb{K}$-Vektorräumen. Sei $\mathcal{B}$ eine Basis von V, und sei $\mathcal{C}$ eine Basis von W. Dann gilt $\mathrm{Rg}(f) = \mathrm{Rg}({}_{\mathcal{C}}\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(f))$. □

Es war also kein Zufall, dass wir die Begriffe „Rang einer Matrix“ und „Rang einer linearen Abbildung“ gleich genannt haben.

Nehmen wir noch eine weitere Folgerung mit:

9.2.5 Korollar: Sei $A \in \mathrm{M}_{mn}(\mathbb{K})$. Seien $v_1, \ldots, v_n$ die Spalten von A. Dann gilt $\mathrm{Rg}(A) = \dim\langle v_1, \ldots, v_n\rangle$.

Beweis: Sei $\mathcal{B}$ die Standardbasis von $\mathbb{K}^n$, und sei $\mathcal{C}$ die Standardbasis von $\mathbb{K}^m$. Sei $f : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$ definiert durch $f(x) = Ax$ für alle $x \in \mathbb{K}^n$. Dann ist $A = {}_{\mathcal{C}}\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(f)$.

Wenn wir A mit den Standardbasisvektoren in $\mathbb{K}^n$ multiplizieren, so erhalten wir $v_1, \ldots, v_n$. Es ist also $\mathrm{Bild}(f) = \langle v_1, \ldots, v_n \rangle$ (vergleiche Proposition 8.3.4). Mit Korollar 9.2.4 folgt die Behauptung. □

Bleiben wir einen Moment in der Terminologie von Korollar 9.2.5.

Es ist $\dim\langle v_1, \ldots, v_n \rangle$ die maximale Anzahl der linear unabhängigen Spalten der Matrix A, und in der Literatur wird diese Zahl oft der Spaltenrang einer Matrix genannt. Es ist $\mathrm{Rg}(A)$ die maximale Anzahl der linear unabhängigen Zeilen von A, und diese Zahl wird oft der Zeilenrang genannt. Korollar 9.2.5 wird dann formuliert als: Bei jeder Matrix sind Zeilenrang und Spaltenrang gleich.

9.2.6 Aufgabe: Seien V ein n-dimensionaler und W ein m-dimensionaler Vektorraum, und sei $f : V \to W$ linear. Sei $A \in \mathrm{M}_{mn}(\mathbb{K})$ eine Matrixdarstellung von f bezüglich Basen von V und von W. Beweisen Sie:

Genau dann ist f surjektiv, wenn $\mathrm{Rg}(A) = m$ ist.

9.3 Matrizenprodukt und Komposition

Seien V, W und X Vektorräume über einem Körper $\mathbb{K}$, und seien $f : V \to W$ und $g : W \to X$ lineare Abbildungen. Die folgende Proposition erklärt den Zusammenhang zwischen Matrixdarstellungen von $g \circ f$ und Matrixdarstellungen von f und von g.

9.3.1 Proposition: (Matrizenmultiplikation und Komposition linearer Abbildungen)

Seien V, W und X endlich erzeugte Vektorräume, und seien $f : V \to W$ und $g : W \to X$ lineare Abbildungen. Sei $\mathcal{B}$ eine Basis von V, $\mathcal{C}$ eine Basis von W, und sei $\mathcal{D}$ eine Basis von X. Dann gilt

$$_{\mathcal{D}}\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(g \circ f) = {}_{\mathcal{D}}\mathrm{M}_{\mathcal{C}}(g)\,{}_{\mathcal{C}}\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(f).$$

Beweis: Seien $\mathcal{B} = (v_1, \ldots, v_n)$, $\mathcal{C} = (w_1, \ldots, w_m)$ und $\mathcal{D} = (x_1, \ldots, x_r)$.

Sei ${}_{\mathcal{C}}\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(f) = (a_{ij}) \in \mathrm{M}_{mn}(\mathbb{K})$, und sei ${}_{\mathcal{D}}\mathrm{M}_{\mathcal{C}}(g) = (b_{ki}) \in \mathrm{M}_{rm}(\mathbb{K})$.

Es ist ${}_{\mathcal{D}}\mathrm{M}_{\mathcal{C}}(g)\,{}_{\mathcal{C}}\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(f) \in \mathrm{M}_{rn}(\mathbb{K})$, und der Eintrag an der Stelle (k, j) in der Matrix ${}_{\mathcal{D}}\mathrm{M}_{\mathcal{C}}(g)\,{}_{\mathcal{C}}\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(f) = C$ ist $c_{kj} = \sum_{i=1}^{m} b_{ki} a_{ij}$.

Um die Matrixdarstellung ${}_{\mathcal{D}}\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(g\circ f)$ von $g\circ f$ zu bestimmen, müssen wir $(g\circ f)(v_j)$ für alle $1 \leq j \leq n$ bestimmen, und die Vektoren $(g \circ f)(v_1), \ldots, (g \circ f)(v_n)$ als Linearkombinationen der Basisvektoren $x_1, \ldots, x_r$ von X schreiben. Der Eintrag an der Stelle (k, j) von ${}_{\mathcal{D}}\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(g\circ f)$ ist der Koeffizient von x_k in der Linearkombination von $(g \circ f)(v_j)$.

Es sind $f(v_j) = \sum\limits_{i=1}^{m} a_{ij} w_i$, und $g(w_i) = \sum\limits_{k=1}^{r} b_{ki} x_k$, also

$$(g \circ f)(v_j) = g\left(\sum_{i=1}^{m} a_{ij} w_i\right) = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} g(w_i) = \sum_{i=1}^{m} a_{ij}\left(\sum_{k=1}^{r} b_{ki} x_k\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{r} a_{ij} b_{ki} x_k = \sum_{k=1}^{r}\left(\sum_{i=1}^{m} b_{ki} a_{ij}\right) x_k.$$

□

9.3.2 Aufgabe: Sei $f : V \to W$ ein Isomorphismus zwischen endlich erzeugten $\mathbb{K}$-Vektorräumen. Seien $\mathcal{B}$ und $\mathcal{C}$ Basen von V und von W.

Beweisen Sie, dass ${}_{\mathcal{C}}\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(f)^{-1} = {}_{\mathcal{B}}\mathrm{M}_{\mathcal{C}}(f^{-1})$ ist.

Bringen wir zum Ende des Kapitels (und zum Ende des Kurses) die Sprache noch einmal auf einen ganz alten Hut, nämlich Proposition 4.5.5. In dieser Proposition hatten wir Folgendes gezeigt: Wenn eine $m \times n$-Matrix A das Produkt von zwei Matrizen A' und A'' ist, also $A = A'A''$, dann gilt $\mathrm{Rg}(A) \leq \mathrm{Rg}(A')$. Dieses Ergebnis ist irgendwie unbefriedigend, denn wie ist es mit den Rängen von A und A''? Stehen die auch in irgendeiner Relation? Ja, und zwar ist das eine Folgerung aus Proposition 8.3.22 und Proposition 9.3.1.

9.3.3 Korollar: Seien $A' \in \mathrm{M}_{ms}(\mathbb{K})$ und $A'' \in \mathrm{M}_{sn}(\mathbb{K})$, und sei $A = A'A''$. Dann gilt $\mathrm{Rg}(A) \leq \mathrm{Rg}(A')$ und $\mathrm{Rg}(A) \leq \mathrm{Rg}(A'')$.

Beweis: Seien V, W und X Vektorräume über $\mathbb{K}$ mit $\dim(V) = n$, $\dim(W) = s$ und $\dim(X) = m$. Seien $\mathcal{B}$ eine Basis von V, $\mathcal{C}$ eine Basis von W und $\mathcal{D}$ eine Basis von X. Sei $f : V \to W$ eine lineare Abbildung mit ${}_{\mathcal{C}}\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(f) = A''$, und sei $g : W \to X$ eine lineare Abbildung mit ${}_{\mathcal{D}}\mathrm{M}_{\mathcal{C}}(g) = A'$. Mit Proposition 9.3.1 gilt $A = {}_{\mathcal{D}}\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(g \circ f)$, also $\mathrm{Rg}(A) = \mathrm{Rg}(g \circ f)$ mit Korollar 9.2.4. Weiter gilt $\mathrm{Rg}(f) = \mathrm{Rg}(A'')$ und $\mathrm{Rg}(g) = \mathrm{Rg}(A')$. Mit Proposition 8.3.22 folgt die Behauptung. □

Lösungen der Aufgaben

Lösungen der Aufgaben in 9.1

Aufgabe 9.1.7 Sei $\mathcal{B}$ die Standardbasis e_1, e_2, e_3 von $\mathbb{R}^3$, und sei $\mathcal{B}'$ die Basis $e_1' = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, e_2' = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, e_3' = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ von $\mathbb{R}^3$.

Sei $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definiert durch $f \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x - 3y + 4z \\ 5x - y + 2z \\ 4x + 7y \end{pmatrix}$ für alle $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$.

Zur Berechnung von ${}_{\mathcal{B}}\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(f)$ müssen wir $f(e_i)$ für alle $1 \leq i \leq 3$ berechnen und diese Vektoren als Linearkombination von e_1, e_2, e_3 schreiben.

$$\begin{aligned}
f \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix} &&= 2e_1 + 5e_2 + 4e_3 \\
f \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 7 \end{pmatrix} &&= -3e_1 - 1e_2 + 7e_3 \\
f \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} &&= 4e_1 + 2e_2 + 0e_3
\end{aligned}$$

Die Koeffizienten der i-ten Zeile werden zur i-ten Spalte von ${}_{\mathcal{B}}\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(f)$, und wir erhalten

$${}_{\mathcal{B}}\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 5 & -1 & 2 \\ 4 & 7 & 0 \end{pmatrix}.$$

Zur Berechnung von ${}_{\mathcal{B}'}\mathrm{M}_{\mathcal{B}'}(f)$ müssen wir $f(e_i')$ für alle $1 \leq i \leq 3$ berechnen und diese Vektoren als Linearkombination von e_1', e_2', e_3' schreiben.

$$f\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\6\\11\end{pmatrix} = 11e_1' - 5e_2' - 3e_3'$$

$$f\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\4\\11\end{pmatrix} = 11e_1' - 7e_2' - 5e_3'$$

$$f\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\5\\4\end{pmatrix} = 4e_1' + 1e_2' - 3e_3'$$

Wir erhalten

$${}_{\mathcal{B}'}\mathrm{M}_{\mathcal{B}'}(f) = \begin{pmatrix}11 & 11 & 4\\-5 & -7 & 1\\-3 & -5 & -3\end{pmatrix}.$$

Aufgabe 9.1.8 Wenn $n = \dim(V)$ ist, so ist ${}_{\mathcal{B}}\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(\mathrm{id}_V) = I_n$.

Lösungen der Aufgaben in 9.2

Aufgabe 9.2.2

Seien $v_1 = \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$ und $v_2 = \begin{pmatrix}1\\0\\3\end{pmatrix}$ Vektoren in $\mathbb{R}^3$, und sei $V = \langle v_1, v_2 \rangle$. Sei $\mathcal{B}$ die Basis von V, die aus den Vektoren v_1, v_2 besteht.

Gesucht ist der Koordinatenvektor von $\begin{pmatrix}3\\-2\\7\end{pmatrix}$ bezüglich dieser Basis.

Es ist $\begin{pmatrix}3\\-2\\7\end{pmatrix} = -2 \cdot \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} + 3 \cdot \begin{pmatrix}1\\0\\3\end{pmatrix}$, und es folgt $\kappa_{\mathcal{B}}\begin{pmatrix}3\\-2\\7\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-2\\3\end{pmatrix}$.

Sei $f : V \to \mathbb{R}^2$ die lineare Abbildung, die durch $f(v_1) = \begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$ und $f(v_2) = \begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}$ definiert wird.

Gesucht ist der Koordinatenvektor von $f\begin{pmatrix}3\\-2\\7\end{pmatrix}$ bezüglich der Standardbasis $\mathcal{E}$ von $\mathbb{R}^2$.

Sei $e_1 = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ die Standardbasis von $\mathbb{R}^2$. Es sind $f(v_1) = \begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix} = 1 \cdot e_1 - 1 \cdot e_2$ und $f(v_2) = \begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix} = -1 \cdot e_1 + 2 \cdot e_2$, also $A = {}_{\mathcal{E}}\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix}1 & -1\\-1 & 2\end{pmatrix}$.

Es ist $a = \begin{pmatrix}-2\\3\end{pmatrix}$ der Koordinatenvektor von $\begin{pmatrix}3\\-2\\7\end{pmatrix}$ bezüglich $\mathcal{B}$. Es folgt, dass $\begin{pmatrix}1 & -1\\-1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-5\\8\end{pmatrix}$ der Koordinatenvektor von $f\begin{pmatrix}3\\-2\\7\end{pmatrix}$ bezüglich der Standardbasis von $\mathbb{R}^2$ ist.

Aufgabe 9.2.6 Es gilt:

$$\begin{aligned} f \text{ ist surjektiv } &\Leftrightarrow \mathrm{Bild}(f) = W \Leftrightarrow \mathrm{Rg}(f) = m \\ &\Leftrightarrow \mathrm{Rg}(A) = m. \end{aligned}$$

Lösung der Aufgabe in 9.3

Aufgabe 9.3.2

Sei $n = \dim(V) = \dim(W)$. Es gilt $f \circ f^{-1} = \mathrm{id}_W$ und $f^{-1} \circ f = \mathrm{id}_V$. Mit Proposition 9.3.1 folgt:

$${}_{\mathcal{C}}\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(f)\,{}_{\mathcal{B}}\mathrm{M}_{\mathcal{C}}(f^{-1}) = {}_{\mathcal{C}}\mathrm{M}_{\mathcal{C}}(\mathrm{id}_W) = I_n \text{ und } {}_{\mathcal{B}}\mathrm{M}_{\mathcal{C}}(f^{-1})\,{}_{\mathcal{C}}\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(f) = {}_{\mathcal{B}}\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(\mathrm{id}_V) = I_n.$$

Es folgt ${}_{\mathcal{C}}\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(f)^{-1} = {}_{\mathcal{B}}\mathrm{M}_{\mathcal{C}}(f^{-1})$, die Behauptung.

Kapitel 10

Abstrakte versus konkrete Lineare Algebra

Im Zentrum des Interesses bei der Beschäftigung mit Linearer Algebra stehen endlich erzeugte Vektorräume und lineare Abbildungen zwischen ihnen.

In Satz 8.2.2 haben wir gesehen, dass jeder endlich erzeugte $\mathbb{K}$-Vektorraum der Dimension n isomorph zu $\mathbb{K}^n$ ist. Wenn wir eine Basis in V gewählt haben, entspricht jede Aussage über Vektoren in V einer Aussage über die Koordinatenvektoren in $\mathbb{K}^n$. Damit lassen sich alle Probleme für $\mathbb{K}$-Vektorräume in Probleme der $\mathbb{K}$-Vektorräume $\mathbb{K}^n$ transformieren. Sie werden damit letzten Endes auf algebraische Probleme für die Koordinaten a_i zurückgeführt, etwa das Lösen von linearen Gleichungen oder linearen Gleichungssystemen. Statt „abstrakt" mit Vektoren zu rechnen, rechnet man „konkret" mit Zahlen, und für diese konkreten Probleme kann man Algorithmen zu deren Lösung entwickeln, wie etwa den Gaußalgorithmus.

Das, was hier über Vektorräume gesagt wurde, gilt analog auch für lineare Abbildungen zwischen ihnen. Seien V und W endlich erzeugte $\mathbb{K}$-Vektorräume, sei $\mathcal{B} = (v_1, \ldots, v_n)$ eine Basis von V, und sei $\mathcal{C} = (w_1, \ldots, w_m)$ eine Basis von W. Sei $f : V \to W$ eine lineare Abbildung und $A = (a_{ij}) = {}_{\mathcal{C}}\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(f) \in \mathrm{M}_{mn}(\mathbb{K})$ die Matrix zu f bezüglich der Basen $\mathcal{B}$ und $\mathcal{C}$. Wichtige Eigenschaften von f lassen sich an A ablesen, wie etwa die Dimensionen des Bildes und des Kerns von f, und das Produkt von A mit dem Koordinatenvektor eines Vektors $v \in V$ ist der Koordinatenvektor von $f(v)$. Durch Festlegung von Basen in V und W lassen sich Probleme für lineare Abbildungen von V nach W auf Probleme von Matrizen und Multiplikation von Vektoren $a \in \mathbb{K}^n$ mit Matrizen $A \in \mathrm{M}_{mn}(\mathbb{K})$ zurückführen. Statt „abstrakt" mit linearen Abbildungen zu arbeiten, können wir „konkret" mit

Matrizen arbeiten.

Angesichts der Tatsache, dass man mit Hilfe von Basen und Koordinaten alle Probleme über endlich erzeugte Vektorräume auf Probleme über die Vektorräume $\mathbb{K}^n$ und Matrizen in $\mathrm{M}_{mn}(\mathbb{K})$ zurückführen kann, stellt sich die Frage, warum wir eine allgemeine abstrakte Theorie der Vektorräume entwickeln müssen und nicht einfach nur die Vektorräume $\mathbb{K}^n$ betrachten. Auf diese Frage gibt es mehrere Antworten.

(a) In der Mathematik treten in natürlicher Weise an vielen Stellen Vektorräume auf, die nicht von der Form $\mathbb{K}^n$ sind. Beispiele sind etwa Polynome, Lösungsmengen homogener linearer Gleichungssysteme und Vektorräume von Funktionen in der Analysis.

(b) Jeder endlich erzeugte Vektorraum ist zwar isomorph zu einem $\mathbb{K}^n$, aber nur isomorph, nicht gleich.

(c) Wenn wir eine Basis $\mathcal{B}$ von V gewählt haben, dann haben wir den Isomorphismus $\kappa_{\mathcal{B}} : V \to \mathbb{K}^n$. Aber der Isomorphismus hängt von der Basis ab, es gibt so viele Isomorphismen $\kappa_{\mathcal{B}}$ wie Basen $\mathcal{B}$.

(d) Jeder endlich erzeugte Vektorraum hat zwar eine Basis, aber im Allgemeinen ist eine solche weder gegeben noch besonders ausgezeichnet. Die Wahl einer Basis von V enthält ein Moment der Willkür.

(e) Angenommen, wir würden uns nur auf die Vektorräume $\mathbb{K}^n$ mit $n \in \mathbb{N}$ und die durch Matrizen $A \in \mathrm{M}_{mn}(\mathbb{K})$ definierten Abbildungen $f_A : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$ mit $f_A(x) = Ax$ für alle $x \in \mathbb{K}^n$ beschränken. Das wäre zwar sehr konkret, aber viel zu eingeschränkt. Denn der Kern einer solchen Abbildung f_A ist zwar ein Unterraum von $\mathbb{K}^n$, aber kein $\mathbb{K}^r$ für ein $r \in \mathbb{N}$, sondern nur isomorph zu einem solchen. Wir hätten dann keine Kerne oder Bilder, und auch keine Unterräume, und das sind nun einmal grundlegende Begriffe, ohne die die Lineare Algebra nicht denkbar ist.

Fazit: Wir müssen sowohl die „abstrakte“ Lineare Algebra der Vektorräume als auch den mehr „konkreten“ Matrizenkalkül entwickeln, und wir müssen stets in der Lage sein, von der einen Betrachtungsweise zur anderen überzugehen.

Die folgende Tabelle fasst die Beziehungen zwischen der Vektorraumtheorie und dem Matrizenkalkül, wie wir sie kennen gelernt haben, zusammen.

lineare Abbildung	Matrix (Satz 9.1.9)
Komposition linearer Abbildungen	Matrizenprodukt (Proposition 9.3.1)
Isomorphismus	invertierbare Matrix (Aufgabe 9.3.2)
inverser Isomorphismus	inverse Matrix (Aufgabe 9.3.2)
identische Abbildung	Einheitsmatrix (Aufgabe 9.1.8)
$\mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V, W)$	$\mathrm{M}_{mn}(\mathbb{K})$ (Satz 9.1.9)
Rang einer linearen Abbildung	Rang einer Matrix (Korollar 9.2.4)
Kern einer linearen Abbildung	Lösungsmenge eines homogenen linearen Gleichungssystems (Korollar 9.2.3)
Menge der Urbilder eines Vektors	Lösungsmenge eines inhomogenen linearen Gleichungssystems (Korollar 9.2.1)
Vektor	Koordinatenvektor (Satz 8.2.2)