Mathematische Grundlagen(1141) SoSe 2012

Kurseinheit 7:

Lösungsvorschläge zu den Einsendeaufgaben

Aufgabe 7.1

(1) Falsch. Die Wahrheitstafel der Formel ist

A	B	$A \leftrightarrow B$	$\neg A \wedge B$	$(A \leftrightarrow B) \wedge (\neg A \wedge B)$
1	1	1	0	0
1	0	0	0	0
0	1	0	1	0
0	0	1	0	0

Es gibt keine Bewertung von A und B, sodass die Formel die Bewertung 1 hat. Somit ist die Formel nicht erfüllbar.

(2) Falsch. Die Formel ist nicht erfüllbar. Somit ist sie auch nicht tautologisch.

(3) Wahr. Es gibt eine Bewertung von A und B, sodass die Formel die Bewertung 0 hat. Somit ist sie falsifizierbar.

(4) Wahr. Für alle Bewertungen von A und B hat die Formel die Bewertung 0. Es folgt, dass sie widerspruchsvoll ist.

(5) Wahr, denn sie haben dieselben Wahrheitstafeln.

(6) Wahr, denn $|a_n|$ ist immer größer oder gleich 0. Ist G negativ, so kann die Aussage nicht erfüllt werden.

(7) Wahr. Angenommen, es gibt so eine Folge. Ab einem gewissen n_0 gilt dann $a_n \leq G$ für alle $n \geq n_0$, und zwar unabhängig davon, was G ist. Insbesondere muss auch $a_{n_0} \leq G$ für alle $G \in \mathbb{R}$ gelten. Diese Ungleichung kann aber für $G < a_{n_0}$ nicht erfüllt werden.

(8) Wahr. Die Formel $A \wedge B$ hat genau dann die Bewertung 1, wenn A und B beide die Bewertung 1 haben. Dann hat aber auch $(B \to A)$ die Bewertung 1.

(9) Wahr. Es ist $F'(x) = \frac{1}{2}(1 - \cos^2(x) + \sin^2(x))$. Da $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$, also $1 - \cos^2(x) = \sin^2(x)$, folgt die Behauptung.

(10) Wahr, denn es ist $F' = f$.

Aufgabe 7.2

1. Sei $f(x) = \ln(x)$, also $f'(x) = \frac{1}{x}$. Sei $g'(x) = x^3$, also $g(x) = \frac{1}{4}x^4$. Dann ist $x^3 \ln(x) = f(x)g'(x)$, und es folgt

$$\begin{aligned}
\int_a^b x^3 \ln(x) dx &= \tfrac{1}{4}x^4 \ln(x)\Big|_a^b - \tfrac{1}{4}\int_a^b \tfrac{1}{x} \cdot x^4 dx = \tfrac{1}{4}x^4 \ln(x)\Big|_a^b - \tfrac{1}{4}\int_a^b x^3 dx \\
&= \tfrac{1}{4}x^4 \ln(x)\Big|_a^b - \tfrac{1}{4} \cdot \tfrac{1}{4}x^4\Big|_a^b \\
&= \tfrac{1}{4}x^4(\ln(x) - \tfrac{1}{4})\Big|_a^b .
\end{aligned}$$

2. Sei $f(x) = x$, also $f'(x) = 1$. Sei $g'(x) = \exp(-x)$, also $g(x) = -\exp(-x)$. Dann gilt $x\exp(-x) = f(x)g'(x)$, und es folgt

$$\int_a^b x \exp(-x) dx = -x\exp(-x)|_a^b + \int_a^b \exp(-x) dx = -\exp(x)(x+1)|_a^b.$$

3. Sei $f(x) = \sin(3x)$, also $f'(x) = 3\cos(3x)$, und sei $g'(x) = \exp(2x)$, also $g(x) = \frac{1}{2}\exp(2x)$. Dann gilt $\exp(2x)\sin(3x) = f(x)g'(x)$, und es folgt

$$\int_a^b \exp(2x)\sin(3x) dx = \frac{1}{2}\exp(2x)\sin(3x)|_a^b - \frac{3}{2}\int_a^b \cos(3x)\exp(2x) dx.$$

Um das rechte Integral zu bestimmen, wenden wir erneut partielle Integration an und setzen $f(x) = \cos(3x)$, also $f'(x) = -3\sin(3x)$ und $g'(x) = \exp(2x)$, also $g(x) = \frac{1}{2}\exp(2x)$. Es folgt

$$\begin{aligned}
\int_a^b \exp(2x)\sin(3x) dx &= \tfrac{1}{2}\exp(2x)\sin(3x)|_a^b \\
&\quad -\tfrac{3}{2}(\tfrac{1}{2}\exp(2x)\cos(3x)|_a^b + \tfrac{3}{2}\int_a^b \exp(2x)\sin(3x) dx) \\
&= \tfrac{1}{2}\exp(2x)\sin(3x)|_a^b - \tfrac{3}{4}\exp(2x)\cos(3x)|_a^b \\
&\quad -\tfrac{9}{4}\int_a^b \exp(2x)\sin(3x) dx.
\end{aligned}$$

Wir bringen den Summanden $-\frac{9}{4}\int_a^b \exp(2x)\sin(3x) dx$ auf die andere Seite und erhalten

$$\frac{13}{4}\int_a^b \exp(2x)\sin(3x) dx = \frac{1}{4}\exp(2x)(2\sin(3x) - 3\cos(3x))|_a^b,$$

also

$$\int_a^b \exp(2x)\sin(3x) dx = \frac{1}{13}\exp(2x)(2\sin(3x) - 3\cos(3x))|_a^b.$$

Aufgabe 7.3

1. Sei $g(x) = 2 - 3x$. Dann gilt $g'(x) = -3$, also $-\frac{1}{3}g'(x) = 1$. Sei $f(u) = u^4$. Dann ist $-\frac{1}{3}f(g(x))g'(x) = (2-3x)^4$, und es folgt

$$\begin{aligned}\int_a^b (2-3x)^4 dx &= -\tfrac{1}{3}\int_a^b f(g(x))g'(x)dx = -\tfrac{1}{3}\int_{g(a)}^{g(b)} f(u)du \\ &= -\tfrac{1}{3}\int_{2-3a}^{2-3b} u^4 du = -\tfrac{1}{3}\cdot\tfrac{1}{5}u^5\Big|_{2-3a}^{2-3b} \\ &= -\tfrac{1}{15}((2-3b)^5 - (2-3a)^5).\end{aligned}$$

2. Sei $g(x) = 2x+1$. Dann gilt $g'(x) = 2$, also $\frac{1}{2}g'(x) = 1$. Sei $f(u) = \frac{1}{\sqrt{u}}$. Es folgt $\frac{1}{\sqrt{2x+1}} = \frac{1}{2}f(g(x))g'(x)$, also

$$\begin{aligned}\int_0^4 \tfrac{1}{\sqrt{2x+1}}dx &= \tfrac{1}{2}\int_0^4 f(g(x))g'(x)dx = \tfrac{1}{2}\int_{g(0)}^{g(4)} f(u)du \\ &= \tfrac{1}{2}\int_1^9 u^{-\frac{1}{2}}du = \tfrac{1}{2}\cdot 2u^{\frac{1}{2}}\Big|_1^9 \\ &= 3 - 1 = 2.\end{aligned}$$

3. Sei $g(x) = \sqrt{x}$. Dann gilt $g'(x) = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$, also $2g'(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$. Sei $f(u) = \cos(u)$. Dann gilt $2f(g(x))g'(x) = \frac{\cos(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}$, und es folgt

$$\begin{aligned}\int_a^b \tfrac{\cos(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}dx &= 2\int_a^b f(g(x))g'(x)dx = 2\int_{\sqrt{a}}^{\sqrt{b}} \cos(u)du \\ &= 2\sin(u)\Big|_{\sqrt{a}}^{\sqrt{b}} = 2(\sin(\sqrt{b}) - \sin(\sqrt{a})).\end{aligned}$$

4. Sei $g(x) = \frac{x^2}{2}$. Dann ist $g'(x) = x$. Sei $f(u) = \sin(u)$. Dann gilt $f(g(x))g'(x) = x\sin(\frac{x^2}{2})$. Es sind $g(0) = 0$ und $g(\sqrt{\pi}) = \frac{\pi}{2}$. Es folgt

$$\begin{aligned}\int_0^{\sqrt{\pi}} x\sin(\tfrac{x^2}{2})dx &= \int_0^{\sqrt{\pi}} f(g(x))g'(x)dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(u)du \\ &= -\cos(u)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = -(\cos(\tfrac{\pi}{2}) - \cos(0)) = 1.\end{aligned}$$

5. Sei $g(x) = x^2$. Dann ist $g'(x) = 2x$, also $\frac{1}{2}g'(x) = x$. Sei $f(u) = \frac{1}{1+u^2}$. Dann gilt $\frac{1}{2}f(g(x))g'(x) = \frac{x}{1+x^4}$, und es folgt

$$\begin{aligned}\int_a^b \tfrac{x}{1+x^4}dx &= \tfrac{1}{2}\int_a^b f(g(x))g'(x)dx = \tfrac{1}{2}\int_{a^2}^{b^2} \tfrac{1}{1+u^2}du \\ &= \tfrac{1}{2}\arctan(u)\Big|_{a^2}^{b^2} = \tfrac{1}{2}(\arctan(b^2) - \arctan(a^2)).\end{aligned}$$

Aufgabe 7.4

Es gilt

$$
\begin{array}{lll}
& (A \wedge B) \leftrightarrow \neg C & \\
\approx & ((A \wedge B) \rightarrow \neg C) \wedge (\neg C \rightarrow (A \wedge B)) & \text{ersetzen } \leftrightarrow \\
\approx & (\neg(A \wedge B) \vee \neg C) \wedge (\neg\neg C \vee (A \wedge B)) & \text{ersetzen } \rightarrow \\
\approx & (\neg(A \wedge B) \vee \neg C) \wedge (C \vee (A \wedge B)) & \text{Negationsregel} \\
\approx & ((\neg A \vee \neg B) \vee \neg C) \wedge (C \vee (A \wedge B)) & \text{De Morgan} \\
\approx & (\neg A \vee \neg B \vee \neg C) \wedge (C \vee (A \wedge B)) & \text{überflüssige Klammern weglassen.}
\end{array}
$$

Diese Formel ist in Negationsnormalform. Wir überführen sie in konjunktive Normalform.

$$
\begin{array}{lll}
& (\neg A \vee \neg B \vee \neg C) \wedge (C \vee (A \wedge B)) & \\
\approx & (\neg A \vee \neg B \vee \neg C) \wedge ((A \wedge B) \vee C) & \text{Kommutativgesetz} \\
\approx & (\neg A \vee \neg B \vee \neg C) \wedge ((A \vee C) \wedge (B \vee C)) & \text{Distributivgesetz} \\
\approx & (\neg A \vee \neg B \vee \neg C) \wedge (A \vee C) \wedge (B \vee C) & \text{überflüssige Klammern weglassen.}
\end{array}
$$

Diese Formel ist in konjunktiver Normalform. Somit ist $(\neg A \vee \neg B \vee \neg C) \wedge (C \vee (A \wedge B))$ eine Negationsnormalform, und $(\neg A \vee \neg B \vee \neg C) \wedge (A \vee C) \wedge (B \vee C)$ ist eine konjunktive Normalform der Formel $(A \wedge B) \leftrightarrow \neg C$.

Aufgabe 7.5

Das Universum sei $\mathbb{Z}$.

1. Sei $P(x)$ die Aussage $x > 0$, und sei $Q(y)$ die Aussage $y < 0$. Sei $R(x, y)$ die Aussage $x + y = 0$. Die Formel α besagt dann, dass es zu jeder positiven ganzen Zahl x eine negative ganze Zahl y so gibt, dass $x + y = 0$ ist. Mit dieser Interpretation ist die Aussage also wahr.

   Sei $P(x)$ die Aussage „x ist gerade“, und sei $Q(y)$ die Aussage „y ist ungerade“. Sei $R(x, y)$ die Aussage „$x + y$ ist gerade“. Mit dieser Interpretation ist die Aussage falsch, denn die Summe einer geraden und einer ungeraden Zahl ist immer ungerade.

2. Sei $P(x)$ die Aussage $x = 0$, und sei $Q(x, y)$ die Aussage $xy = 0$. Mit dieser Interpretation ist die Formel β richtig, denn das Produkt zweier ganzer Zahlen ist nur dann 0, wenn einer der Faktoren 0 ist.

   Sei $P(x)$ die Aussage „x ist gerade“, und sei $Q(x, y)$ die Aussage $xy = 15$. Mit dieser Interpretation ist die Formel falsch, denn 15 hat keinen Teiler, der gerade ist.

Aufgabe 7.6

1. $\forall x(E(x) \wedge \exists y(M(y) \wedge m(x, y)) \rightarrow H(x))$
2. $\forall x(E(x) \wedge H(x) \rightarrow \neg(\exists y(E(y) \wedge m(x, y))))$
3. $\forall x \forall y(E(x) \wedge E(y) \wedge m(x, y) \wedge m(y, x) \rightarrow \neg(H(x) \vee H(y)))$