Mathematische Grundlagen(1141) SoSe 2012

Kurseinheit 5:

Einsendeaufgaben – Einsendetermin: 11.6.2012

Aufgabe 5.1

Seien f, g Funktionen mit geeigneten Definitionsbereichen.

Wahr oder falsch?

		wahr	falsch
(1)	Wenn $f(x) = x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ für $x \neq 0$, dann ist $$f'(x) = 2x \sin\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right).$$	☐	☐
(2)	Wenn $f(x) = (\frac{x}{1+x})^5$ ist, dann ist $f'(x) = \frac{5x^4}{(1+x)^6}$.	☐	☐
(3)	Wenn $f(x) = x\sqrt{3-2x^2}$ ist, dann ist $f'(x) = \frac{3-4x^2}{\sqrt{3-2x^2}}$.	☐	☐
(4)	Wenn $f(x) = \exp(\exp(x))$ ist, dann ist $f'(x) = \exp(x + \exp(x))$.	☐	☐
(5)	Es gibt kein $x \in \mathbb{R}$, das die Gleichung $\exp(x) - 3\exp(-x) = 2$ erfüllt.	☐	☐
(6)	Wenn $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ existiert und $\lim\limits_{x\to a} g(x)$ nicht existiert, dann kann auch $\lim\limits_{x\to a}(f+g)(x)$ nicht existieren.	☐	☐
(7)	Wenn $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ existiert und $\lim\limits_{x\to a} g(x)$ nicht existiert, dann kann auch $\lim\limits_{x\to a}(fg)(x)$ nicht existieren.	☐	☐
(8)	Seien $a, b \in \mathbb{R}$, und sei $a, b \neq 0$. Dann existiert $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin(ax)}{\sin(bx)}$ nicht. (Hinweis: (SinKos-4))	☐	☐
(9)	$\lim\limits_{x\to 1} \frac{1}{x-1}$ existiert nicht.	☐	☐
(10)	Sei $f : \mathbb{R}\setminus\{0\}$ definiert durch $x \mapsto \frac{\lvert x\rvert}{2x}$. Dann existiert $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\lvert x\rvert}{2x}$ nicht.	☐	☐

[max(*0*, $r - f$) *Punkte, wobei* r *die Anzahl der richtigen und* f *die Anzahl der falschen Antworten ist. Nicht beantwortete Fragen gehen nicht in die Bewertung ein.*]

Diese Seite bleibt aus technischen Gründen frei!

Aufgabe 5.2

Sei $g : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ eine stetige, beschränkte Funktion. Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x) = \begin{cases} xg(x) & \text{für } x \neq 0, \\ 0 & \text{für } x = 0. \end{cases}$$

Beweisen Sie, dass f für alle $x \in \mathbb{R}$ stetig ist.

[*10 Punkte*]

Aufgabe 5.3

Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{falls } |x| \leq 1, \\ \frac{1-x}{2}, & \text{falls } |x| > 1. \end{cases}$$

1. Beweisen Sie, dass f für alle $a \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$ stetig ist.
2. Beweisen Sie mit dem $\varepsilon - \delta$-Kriterium, dass f in -1 stetig ist.
3. Beweisen Sie mit Der Definition der Stetigkeit, dass f in 1 nicht stetig ist.

[*4 + 4 + 2 Punkte*]

Aufgabe 5.4

Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$. Sei $f : [a, b] \to [a, b]$ eine stetige Funktion.

Beweisen Sie, dass es ein $x_0 \in [a, b]$ so gibt, dass $f(x_0) = x_0$ ist.

(Ein solches x_0 nennt man einen **Fixpunkt** von f.)

[*10 Punkte*]

Aufgabe 5.5

Die Funktionen $\sinh, \cosh : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sind definiert durch $\sinh(x) = \frac{\exp(x)-\exp(-x)}{2}$ und $\cosh(x) = \frac{\exp(x)+\exp(-x)}{2}$. Sie werden „sinus hyperbolicus“ und „cosinus hyperbolicus“ genannt.

1. Beweisen Sie, dass sinh und cosh differenzierbar sind.
2. Berechnen Sie die Ableitungen von sinh und cosh.
3. Beweisen Sie: $\cosh(x + y) = \cosh(x)\cosh(y) + \sinh(x)\sinh(y)$ für alle $x, y \in \mathbb{R}$.
4. Beweisen Sie: $\sinh(x + y) = \cosh(x)\sinh(y) + \sinh(x)\cosh(y)$ für alle $x, y \in \mathbb{R}$.
5. Beweisen Sie: $\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

[*2 + 2 + 2 + 2 + 2 Punkte*]

Aufgabe 5.6

Bestimmen Sie möglichst große Intervalle, auf denen die Funktion

$$f : \mathbb{R} \setminus \{1\} \to \mathbb{R}, x \mapsto \frac{x^4}{x^3 - 1}$$

monoton wachsend beziehungsweise monoton fallend ist. Bestimmen Sie die lokalen Extrema von f.

[*10 Punkte*]