1 Aussagenlogik

Eine *Aussage* ist ein vollständiger Satz, der prinzipiell wahr oder falsch ist (ohne dass das praktisch feststellbar sein muss). Jede Aussage hat also einen Wahrheitswert, W (wahr) oder F (falsch).

Negation, Konjunktion, Disjunktion

Aus gegebenen Aussagen $P, Q, \ldots$ kann man neue bilden.
Die *Negation* von P, nicht P (geschrieben $\neg P$), ist genau dann wahr, wenn P falsch ist.
Die *Konjunktion* von P, Q, P und Q $(P \wedge Q)$, ist genau dann wahr, wenn P und Q wahr sind.
Die *Disjunktion* von P, Q, P oder Q $(P \vee Q)$, ist genau dann wahr, wenn P wahr oder Q wahr ist. Dabei wird „oder“ im nichtausschließenden Sinn verwendet: $P \vee Q$ ist also auch dann wahr, wenn P, Q beide wahr sind.

Implikation, Äquivalenz

Die *Implikation* „Wenn P, dann Q“ $(P \Rightarrow Q)$ ist falsch, wenn P wahr und Q falsch ist, sonst immer wahr. Bei falschem P ist also $P \Rightarrow Q$ stets wahr.
Die *Äquivalenz* $P \Leftrightarrow Q$ ist genau dann wahr, wenn P, Q denselben Wahrheitswert haben.
Diese Vereinbarungen lassen sich in Wahrheitstafeln festhalten:

P	$\neg P$
W	F
F	W

P	Q	$P \wedge Q$
W	W	W
W	F	F
F	W	F
F	F	F

P	Q	$P \vee Q$
W	W	W
W	F	W
F	W	W
F	F	F

P	Q	$P \Rightarrow Q$
W	W	W
W	F	F
F	W	W
F	F	W

P	Q	$P \Leftrightarrow Q$
W	W	W
W	F	F
F	W	F
F	F	W

Äquivalente Aussageformen

Entsteht R aus $P_1, \ldots, P_n$ durch Anwendungen von $\neg, \wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow$, so heißt R eine *Aussageform*. Zwei Aussageformen R, S (die beide aus $P_1, \ldots, P_n$ entstanden sind) heißen *äquivalent* $(R \sim S)$, falls jede Kombination von Wahrheitswerten für $P_1, \ldots, P_n$ zum selben Wahrheitswert für R und S führt.

Beispiele $\neg(P \wedge Q) \sim (\neg P) \vee (\neg Q)$, $\neg(P \vee Q) \sim (\neg P) \wedge (\neg Q)$, $(P \Rightarrow Q) \sim (\neg P) \vee Q$.

Eine Aussageform, die immer wahr ist, heißt *Tautologie*, eine, die immer falsch ist, *Antinomie*. Zum Beispiel ist $P \vee (\neg P)$ eine Tautologie, $P \wedge (\neg P)$ eine Antinomie.

All- und Existenzaussagen

Für jedes x aus einem Universum (oder Grundbereich) U sei $P(x)$ eine Aussage.
Die *Allaussage* „Für alle x gilt $P(x)$“ $(\forall x\ P(x))$ ist genau dann wahr, wenn für jedes a aus U die Aussage $P(a)$ wahr ist.
Die *Existenzaussage* „Es gibt ein x mit $P(x)$“ $(\exists x\ P(x))$ ist genau dann wahr, wenn für mindestens ein a aus U die Aussage $P(a)$ wahr ist.

Entstehen R, S aus $P_1(x), \ldots, P_n(x)$ durch Anwendungen von $\neg, \wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow, \forall, \exists$, so heißen R, S *äquivalent*, falls für jede Wahl von $P_1(x), \ldots, P_n(x)$ die Aussagen R, S denselben Wahrheitswert haben.

Beispiele $\neg\big(\forall x\ P(x)\big) \sim \exists x\ \big(\neg P(x)\big)$, $\neg\big(\exists x\ P(x)\big) \sim \forall x\ \big(\neg P(x)\big)$.

2 Mengen

Eine *Menge* ist eine Zusammenfassung von Objekten zu einem Ganzen.
Gehört x zu einer Menge M, sagt man „x ist *Element* von M" (geschrieben $x \in M$).
Gehört x nicht zu M, schreibt man $x \notin M$.

Zwei Mengen M, N heißen *gleich* ($M = N$), wenn sie dieselben Elemente enthalten, d. h. für alle x gilt: $x \in M \iff x \in N$.

Bezeichnungen
Ist $P(x)$ für alle x eines Universums U eine Aussage, so bezeichnet $M = \{x \in U \mid P(x)\}$ die Menge aller $x \in U$, für die $P(x)$ wahr ist.
Besteht M genau aus den Elementen $a_1, \ldots, a_n$, schreibt man $M = \{a_1, \ldots, a_n\}$.
Die Menge, die *kein* Element enthält, heißt *leere Menge*, bezeichnet mit $\emptyset$.

Definition Seien M, N Mengen. M heißt *Teilmenge* von N (geschrieben $M \subset N$), falls jedes Element von M auch Element von N ist, d. h. $\forall x \; (x \in M \;\Rightarrow\; x \in N)$.
Es gilt: $M = N \iff M \subset N$ und $N \subset M$.

Durchschnitt und Vereinigung von Mengen
$M \cap N := \{x \mid x \in M \text{ und } x \in N\}$ heißt *Durchschnitt* der Mengen M, N.
$M \cup N := \{x \mid x \in M \text{ oder } x \in N\}$ heißt *Vereinigung* von M, N.

3 Abbildungen

Eine *Abbildung* $f : M \to N$ ist gegeben durch eine Menge M (den *Definitionsbereich* von f), eine Menge N (den *Wertebereich* von f) und eine Zuordnungsvorschrift, die jedem $x \in M$ genau ein $y \in N$ zuordnet; man schreibt $f(x) = y$ oder $x \mapsto f(x) = y$.
Zwei Abbildungen $f : M \to N,\; g : P \to Q$ heißen *gleich*, wenn $M = P,\; N = Q$ und $f(x) = g(x)$ für alle $x \in M$ gilt.

Beispiele
a) Sei $\mathbb{R}_+ := \{x \mid x \in \mathbb{R},\; x \geq 0\}$. Durch $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R},\; f(x) :=$ ein $y \in \mathbb{R}$ mit $y^2 = x$, wird *keine* Abbildung definiert, weil die Zuordnungsvorschrift nicht eindeutig ist, da etwa für $x = 1$ sowohl $1^2 = 1$ als auch $(-1)^2 = 1$ gilt.
b) Durch $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R},\; f(x) :=$ dasjenige $y \in \mathbb{R}$ mit $y \geq 0$ und $y^2 = x$ für $x \in \mathbb{R}_+$, wird eine Abbildung definiert, denn zu jedem $x \in \mathbb{R}_+$ gibt es genau ein $y \in \mathbb{R}$ mit $y \geq 0$ und $y^2 = x$.

Komposition von Abbildungen
Für Abbildungen $f : M \to N,\; g : N \to P$ sei $g \circ f : M \to P,\; x \mapsto (g \circ f)(x) := g\big(f(x)\big)$.

Injektive, surjektive, bijektive Abbildungen
Eine Abbildung $f : M \to N$ heißt *injektiv*, falls für alle $x, x' \in M$ aus $x \neq x'$ notwendig $f(x) \neq f(x')$ folgt. Äquivalent dazu ist: Für alle $x, x' \in M$ folgt aus $f(x) = f(x')$ notwendig $x = x'$.
Eine Abbildung $f : M \to N$ heißt *surjektiv*, falls zu jedem $y \in N$ ein $x \in M$ mit $f(x) = y$ existiert.
Eine Abbildung $f : M \to N$ heißt *bijektiv*, falls f injektiv und surjektiv ist.
Äquivalent dazu ist: Zu jedem $y \in N$ gibt es *genau* ein $x \in M$ mit $f(x) = y$.
Ist $f : M \to N$ bijektiv, so heißt die Abbildung

$$f^{-1} : N \to M,\; f^{-1}(y) := \text{dasjenige } x \in M \text{ mit } f(x) = y$$

die *Umkehrabbildung* von f.

Beispiele
a) $f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto x^2$ ist nicht injektiv (da z. B. $(-1)^2 = 1^2$ gilt) und nicht surjektiv (da z. B. kein $x \in \mathbb{R}$ mit $x^2 = -1$ existiert).
b) $f_2 : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R},\ x \mapsto x^2$ ist injektiv (denn aus $x_1^2 = x_2^2$ mit $x_1, x_2 \geq 0$ folgt $x_1 = x_2$), aber nicht surjektiv (da kein $x \in \mathbb{R}_+$ mit $x^2 = -1$ existiert).
c) $f_3 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+,\ x \mapsto x^2$ ist nicht injektiv (wegen $(-1)^2 = 1^2$), aber surjektiv, denn zu jedem $y \in \mathbb{R}_+$ gibt es ein $x \in \mathbb{R}$ mit $x^2 = y$.
d) $f_4 : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+,\ x \mapsto x^2$ ist injektiv und surjektiv, also bijektiv.

4 Summen und Produkte reeller Zahlen

Man kann reelle Zahlen addieren, subtrahieren, multiplizieren und durch reelle Zahlen $\neq 0$ dividieren, so dass die üblichen Rechenregeln gelten.
Für reelle Zahlen $a_1, \ldots, a_m$ sind $a_1 + \ldots + a_m$ und $a_1 \cdot \ldots \cdot a_m$ unabhängig von der Beklammerung und der Reihenfolge. Man setzt

$$\sum_{i=1}^{m} a_i := a_1 + \ldots + a_m \quad \text{und} \quad \prod_{i=1}^{m} a_i := a_1 \cdot \ldots \cdot a_m.$$

5 Vollständige Induktion

Prinzip der vollständigen Induktion

Sei P eine für natürliche Zahlen sinnvolle Eigenschaft. P genüge folgenden Bedingungen:
Induktionsanfang $n = 1$: *1 hat die Eigenschaft P.*
Induktionsschritt $n \to n + 1$: *Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt: Hat n die Eigenschaft P, so hat auch $n + 1$ die Eigenschaft P.*
Dann hat jede natürliche Zahl die Eigenschaft P.

Variante des Induktionsprinzips: Induktionsanfang bei einem $n_0 \in \mathbb{Z}$, Induktionsschritt $n \to n + 1$ für alle $n \geq n_0$, die Behauptung gilt für alle $n \geq n_0$.

Beispiele
a) Sei $q \in \mathbb{R},\ q \neq 1$. *Behauptung:* Für alle $n \in \mathbb{N}^0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$ gilt $\displaystyle\sum_{i=0}^{n} q^i = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$.

Beweis durch vollständige Induktion: Induktionsanfang $n = 0$: $\sum\limits_{i=0}^{0} q^i = q^0 = 1 = \frac{1-q}{1-q}$.
Induktionsschritt $n \to n + 1$: Sei $n \in \mathbb{N}^0$ beliebig. Es gelte die Behauptung für n, also $\sum\limits_{i=0}^{n} q^i = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$ *(Induktionsvoraussetzung).* Mit der Induktionsvoraussetzung folgt

$$\sum_{i=0}^{n+1} q^i = \sum_{i=0}^{n} q^i + q^{n+1} = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} + q^{n+1} = \frac{1 - q^{n+1} + (1 - q)q^{n+1}}{1 - q} = \frac{1 - q^{n+2}}{1 - q}.$$

Nach dem Induktionsprinzip gilt dann die Behauptung für alle $n \in \mathbb{N}^0$.

b) *Behauptung:* Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i(i+1)} = \frac{n}{n+1}$.

Beweis durch vollständige Induktion: $n = 1$: $\sum\limits_{i=1}^{1} \frac{1}{i(i+1)} = \frac{1}{2} = \frac{1}{1+1}$.

$n \to n + 1$: Mit der Induktionsvoraussetzung $\sum\limits_{i=1}^{n} \frac{1}{i(i+1)} = \frac{n}{n+1}$ folgt:

$\sum\limits_{i=1}^{n+1} \frac{1}{i(i+1)} = \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{1}{i(i+1)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} = \frac{n}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} = \frac{n(n+2)+1}{(n+1)(n+2)} = \frac{(n+1)^2}{(n+1)(n+2)} = \frac{n+1}{n+2}$.