Inhalt Stetige Funktionen, Polynome, stetige Funktionen auf Intervallen, Grenzwerte bei Funktionen

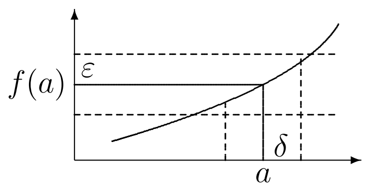
1 Stetige Funktionen

Definition Sei $D \subseteq \mathbb{R}$, $D \neq \emptyset$. Eine Abbildung $f : D \to \mathbb{R}$ heißt *(reelle) Funktion* auf D.

Feststellung *Seien $f, g : D \to \mathbb{R}$ reelle Funktionen auf D und $a \in \mathbb{R}$. Dann sind $f + g : D \to \mathbb{R}$, $(f + g)(x) := f(x) + g(x)$, $af : D \to \mathbb{R}$, $(af)(x) := af(x)$, $fg : D \to \mathbb{R}$, $(fg)(x) := f(x)g(x)$, ebenfalls reelle Funktionen auf D. Gilt $g(x) \neq 0$ für alle $x \in D$, so ist $\frac{f}{g} : D \to \mathbb{R}$, $(\frac{f}{g})(x) := \frac{f(x)}{g(x)}$ auch eine reelle Funktion auf D.*

Anschauliche Vorstellung Eine Funktion f verhält sich stetig, wenn „kleine" Änderungen des Arguments x nur zu „kleinen" Änderungen des Funktionswertes $f(x)$ führen. Insbesondere soll f keine Sprungstellen haben.

Definition Sei $D \subseteq \mathbb{R}$, $a \in D$ und $f : D \to \mathbb{R}$ eine Funktion. f heißt *stetig in a*, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt, so dass für alle $x \in D$ mit $|x - a| < \delta$ gilt: $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$.
Sei $E \subseteq D$, $E \neq \emptyset$. f heißt *stetig auf E*, wenn f in allen $a \in E$ stetig ist.
f heißt *stetig*, wenn f auf D stetig ist.



Anschauliche Deutung f ist *stetig in a*, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt, so dass alle $x \in \,]a - \delta, a + \delta[\, \cap D$ von f in den ε-Streifen um $f(a)$ abgebildet werden.

Beispiele a) *Für $c \in \mathbb{R}$ ist die konstante Funktion $\widehat{c}$ mit $\widehat{c}(x) := c$ für alle $x \in \mathbb{R}$ stetig.*
Beweis: Zu $\varepsilon > 0$ sei $\delta > 0$ beliebig. Es ist $|\widehat{c}(x) - \widehat{c}(a)| = |c - c| = 0 < \varepsilon$.

b) $\mathrm{id} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x$ *ist stetig in jedem $a \in \mathbb{R}$.*
Beweis: Zu $\varepsilon > 0$ sei $\delta := \varepsilon$. Für alle x mit $|x - a| < \delta$ gilt dann $|x - a| < \delta = \varepsilon$.

c) *Jede Funktion $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ ist stetig.*
Beweis: Sei $a \in \mathbb{Z}$, $\varepsilon > 0$. Wir setzen $\delta := \frac{1}{2}$. Für jedes $x \in \mathbb{Z}$ mit $|x - a| < \frac{1}{2}$ ist $x = a$. Also gilt $|f(x) - f(a)| = 0 < \varepsilon$.

d) *Die „Sprungfunktion" $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) := \begin{cases} 0 & \text{für } x < 0 \\ 1 & \text{für } x \geq 0 \end{cases}$ ist in 0* nicht *stetig.*
Beweis: Zu zeigen: $\exists \varepsilon > 0\ \forall \delta > 0\ \exists x \in \mathbb{R} :\ |x| < \delta$ und $|f(x) - f(0)| \geq \varepsilon$. Sei $\varepsilon := \frac{1}{2}$.
Sei $\delta > 0$ beliebig. Es sei $x := -\frac{\delta}{2}$. Dann gilt $|x| < \delta$ und $|f(x) - f(0)| = |0 - 1| = 1 \geq \varepsilon$.

Die Sprungfunktion ist in jedem $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$ stetig.
Beweis: Sei $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$. Sei $\varepsilon > 0$ gegeben. Wir setzen $\delta := |a|$. Sei $x \in \mathbb{R}$ mit $|x - a| < \delta$, also $-|a| < x - a < |a|$. Ist $a > 0$, so ist $x - a > -a$, also $x > 0$ und damit $|f(x) - f(a)| = |1 - 1| = 0 < \varepsilon$. Ist $a < 0$, so ist $x - a < |a| = -a$, also $x < 0$ und damit $|f(x) - f(a)| = |0 - 0| = 0 < \varepsilon$.

Satz 1 (Folgenkriterium) *Sei $a \in D \subseteq \mathbb{R}$. Sei $f : D \to \mathbb{R}$ gegeben. Dann gilt:*
$f : D \to \mathbb{R}$ stetig in a $\iff$ Für jede *Folge (x_n) in D mit $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ gilt $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = f(a)$.*

Beweis: „$\Rightarrow$“: Sei f stetig in a und (x_n) eine Folge in D mit $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$. Sei $\varepsilon > 0$. Da f in a stetig ist, gibt es ein $\delta > 0$, so dass für alle $x \in D$ mit $|x-a| < \delta$ gilt: $|f(x)-f(a)| < \varepsilon$. Wegen $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ gibt es zu δ ein n_0, so dass für alle $n \geq n_0$ gilt: $|x_n - a| < \delta$. Für alle $n \geq n_0$ folgt dann $|f(x_n) - f(a)| < \varepsilon$. Also konvergiert $\big(f(x_n)\big)$ gegen $f(a)$.
„$\Leftarrow$“: *Annahme:* f ist *nicht* stetig in a. Dann gibt es ein $\varepsilon > 0$, so dass es zu jedem $\delta > 0$ ein $x \in D$ gibt mit $|x-a| < \delta$ und $|f(x) - f(a)| \geq \varepsilon$. Insbesondere gibt es zu jedem $n \in \mathbb{N}$ ein $x_n \in D$ mit $|x_n - a| < \frac{1}{n}$ und $|f(x_n) - f(a)| \geq \varepsilon$. Dann konvergiert $\big(f(x_n)\big)$ nicht gegen $f(a)$. Wegen $|x_n - a| < \frac{1}{n}$ konvergiert (x_n) gegen a, Widerspruch zur Voraussetzung!

Aus den Rechenregeln für konvergente Folgen ergeben sich mit dem Folgenkriterium

Rechenregeln für stetige Funktionen *Seien $a \in D \subseteq \mathbb{R}$, $\alpha \in \mathbb{R}$ und $f, g : D \to \mathbb{R}$ stetig in a. Dann sind auch $f+g$, αf, $f \cdot g$ und $\frac{f}{g}$, falls $g(x) \neq 0$ für $x \in D$, stetig in a. Außerdem gilt die* Kettenregel*: Ist $h : E \to \mathbb{R}$ mit $f(D) \subseteq E$ stetig in $f(a)$, so ist $h \circ f$ stetig in a.*

Beweis der Kettenregel: Sei (x_n) eine beliebige Folge in D mit $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$. Da f in a stetig ist, konvergiert $(f(x_n))$ gegen $f(a)$ (nach Folgenkriterium). Da h in $f(a)$ stetig ist, konvergiert $(h(f(x_n)))$ gegen $h(f(a))$. Das Folgenkriterium liefert: $h \circ f$ ist stetig in a.

2 Polynome

Definition Eine *Polynomfunktion* (kurz: *Polynom*) ist eine Funktion der Form $P : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto P(x) := \sum\limits_{k=0}^{n} a_k x^k$ mit $n \in \mathbb{N}^0$ und $a_k \in \mathbb{R}$ für $k \in \{0, 1, \ldots, n\}$.

Da das Produkt stetiger Funktionen stetig ist, sind mit id auch die Funktionen $x \mapsto x^2$, $x \mapsto x^3, \ldots, x \mapsto x^k$ (für alle $k \in \mathbb{N}$) stetig. Auch konstante Funktionen, reelle Vielfache und Summen stetiger Funktionen sind stetig. Daraus folgt

Satz 2 *Polynomfunktionen sind stetig auf $\mathbb{R}$.*

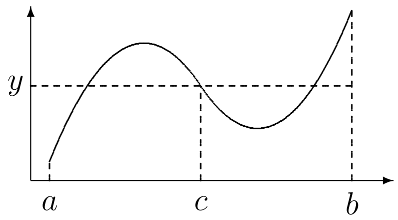
3 Stetige Funktionen auf Intervallen

Satz 3 *Sei $a \in D \subseteq \mathbb{R}$, sei $f : D \to \mathbb{R}$ stetig in a. Ist $f(a) > 0$, so gibt es ein $\delta > 0$, so dass für alle $x \in \,]a-\delta, a+\delta[\, \cap D$ gilt: $f(x) > 0$.*
Ist $f(a) < 0$, so gibt es ein $\delta > 0$, so dass $f(x) < 0$ für alle $x \in \,]a-\delta, a+\delta[\, \cap D$ gilt.

Beweis: Sei $f(a) > 0$. Es sei $\varepsilon := \frac{1}{2} f(a)$. Da f in a stetig ist, gibt es ein $\delta > 0$, so dass für alle $x \in \,]a-\delta, a+\delta[\, \cap D$ gilt: $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$. Für solche x ist $-\varepsilon < f(x) - f(a) < \varepsilon$, es folgt $f(x) > f(a) - \varepsilon = 2\varepsilon - \varepsilon = \varepsilon > 0$.
Der Fall $f(a) < 0$ wird durch Betrachtung von $-f$ auf den Fall $f(a) > 0$ zurückgeführt.

Satz 4 (Nullstellensatz) *Seien $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Es sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig mit $f(a) < 0$ und $f(b) > 0$. Dann gibt es ein $c \in \,]a, b[$ mit $f(c) = 0$.*

Beweis: Sei $N := \{x \in [a,b] \mid f(x) \leq 0\}$. Es existiert $c := \sup N$. Es ist $c \in [a,b]$.
Annahme: $f(c) < 0$. Wegen $f(b) > 0$ ist $c \neq b$. Nach Satz 3 existiert ein $\delta > 0$ mit $f(x) < 0$ für $x \in \,]c-\delta, c+\delta[\, \cap [a,b]$. Insbesondere existiert ein $x' > c$ in $[a,b]$ mit $f(x') < 0$. Dann ist $x' \in N$ und $x' > c$. Also ist c keine obere Schranke von N, Widerspruch!
Annahme: $f(c) > 0$. Wegen $f(a) < 0$ ist $c \neq a$. Es gibt wieder ein $\delta > 0$, so dass für $x \in \,]c-\delta, c+\delta[\, \cap [a,b]$ gilt: $f(x) > 0$. Wir wählen ein $x' \in \,]c-\delta, c[\, \cap [a,b]$. Für jedes $x \in N$ ist $x \leq c$. In $[x', c]$ ist $f > 0$, also ist $x \notin [x', c]$ und damit $x < x'$. Also ist x' eine obere Schranke von N. Wegen $x' < c$ ist das ein Widerspruch zu $c = \sup N$. Also ist $f(c) = 0$.



Satz 5 (Zwischenwertsatz) *Seien $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Es sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig. Dann gibt es zu jedem $y \in \,]f(a), f(b)[$ (bzw. $y \in \,]f(b), f(a)[$) ein $c \in \,]a, b[$ mit $f(c) = y$.*

Beweis: Es gelte etwa $f(a) < f(b)$. Es sei $g(x) := f(x) - y$. Dann ist g stetig mit $g(a) < 0$, $g(b) > 0$. Nach dem Nullstellensatz (Satz 4) gibt es ein $c \in \,]a, b[$ mit $g(c) = 0$, also $f(c) = y$.

Ohne Beweis erwähnen wir den Satz vom Minimum und Maximum:

Satz 6 *Seien $a, b \in \mathbb{R}$, $a \leq b$. Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig. Dann nimmt f Infimum und Supremum an, d. h. es gibt $c, d \in [a, b]$ mit $f(c) = \inf f([a, b])$ und $f(d) = \sup f([a, b])$.*

4 Grenzwerte bei Funktionen

Seien $D \subseteq \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$. Es wird nicht mehr $a \in D$ verlangt, aber:

Voraussetzung a ist ein *Häufungspunkt* von D, d. h. es gibt eine Folge (x_n) in D mit $x_n \neq a$ für alle n und $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$.
Sei z. B. $D = I$ ein Intervall mit mehr als einem Punkt, $a \in I$ oder a ein Randpunkt von I.

Definition Sei $f : D \to \mathbb{R}$ eine Funktion. $b \in \mathbb{R}$ heißt *Grenzwert von f in a*, wenn es eine in a stetige Funktion $F : D \cup \{a\} \to \mathbb{R}$ gibt mit $F(x) = f(x)$ für alle $x \in D$, $x \neq a$ und $F(a) = b$.

Satz 7 *Ist b Grenzwert von f in a, so ist b eindeutig bestimmt.*

Schreibweise $b = \lim\limits_{x\to a} f(x)$ oder $f(x) \to b$ für $x \to a$.

Beweis: Seien b, c Grenzwerte von f in a. Dann gibt es in a stetige Funktionen $F, G : D \cup \{a\} \to \mathbb{R}$ mit $F(x) = f(x) = G(x)$ für alle $x \in D$, $x \neq a$ und $F(a) = b$, $G(a) = c$.
Annahme: $b \neq c$, etwa $b < c$. Sei $H := G - F$. Dann ist H in a stetig mit $H(a) = c - b > 0$. Nach Satz 3 gibt es ein $\delta > 0$ mit $H(x) > 0$ für alle $x \in \,]a - \delta, a + \delta[\, \cap D$. Da (nach Voraussetzung) eine Folge (x_n) in $D \setminus \{a\}$ mit $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ existiert, gibt es ein n mit $x_n \in \,]a - \delta, a + \delta[$. Dann ist $H(x_n) > 0$, also $G(x_n) > F(x_n)$, Widerspruch zu $x_n \in D \setminus \{a\}$.

Beispiele a) *Sei $a \in D$, a Häufungspunkt von D. Dann gilt:*
f stetig in a $\iff$ $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$.
Beweis: „$\Rightarrow$“: $F := f$ erfüllt die Bedingung der Definition.
„$\Leftarrow$“: Es gibt eine in a stetige Funktion $F : D \to \mathbb{R}$ mit $F(x) = f(x)$ für $x \in D \setminus \{a\}$ und $F(a) = f(a)$, also ist $F = f$.

b) Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) := 0$ für $x \neq 0$, $f(x) := 1$ für $x = 0$. Dann ist $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$.
Beweis: $\widehat{0} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto 0$ ist stetig und $\widehat{0}(x) = f(x)$ für alle $x \neq 0$.

c) Sei f die Sprungfunktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) := 0$ für $x < 0$, $f(x) := 1$ für $x \geq 0$. Dann hat f in 0 keinen Grenzwert.
Beweis: Annahme: Es gibt eine in 0 stetige Funktion $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $F(x) = f(x)$ für alle $x \neq 0$. Für die Folgen $(\frac{1}{n})$, $(-\frac{1}{n})$ gilt dann (nach dem Folgenkriterium)

$$F(0) = \lim_{n\to\infty} F(\tfrac{1}{n}) = \lim_{n\to\infty} f(\tfrac{1}{n}) = 1, \quad F(0) = \lim_{n\to\infty} F(-\tfrac{1}{n}) = \lim_{n\to\infty} f(-\tfrac{1}{n}) = 0,$$

also $1 = 0$, Widerspruch!

Ohne Beweis notieren wir noch:

Satz 8 $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b \iff$ *Für* jede *Folge (x_n) in $D \setminus \{a\}$ mit $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ gilt $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = b$.*