Luise Unger
In LATEX gesetzt von Luise Unger

Mathematische Grundlagen

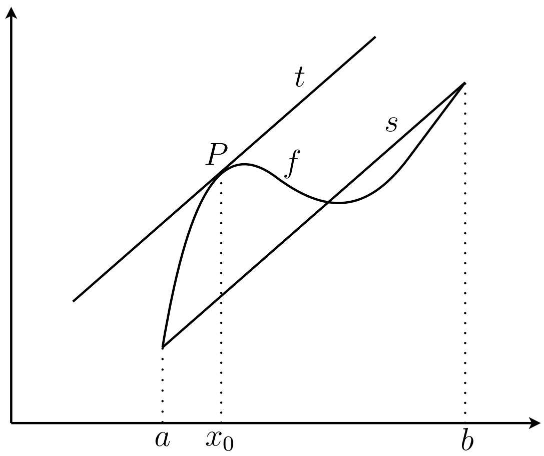
Kurseinheit 6:
Reihen und Summenfunktionen

mathematik
und
informatik

FernUniversität in Hagen

Studierhinweise

In Kapitel 16 beschäftigen wir uns weiterhin mit differenzierbaren Funktionen und beginnen in 16.1 mit einem Satz, dem so genannten Mittelwertsatz, den ich persönlich für einen der ästhetischsten der Analysis halte. Nicht nur, dass er geometrisch interpretiert werden kann und „anschaulich klar“ ist. Er besagt, dass es im Graphen einer differenzierbaren Funktion f einen Punkt P geben muss, in dem die Tangente t parallel zur Sehne s liegt:



Der Mittelwertsatz hat auch einen ganz einfachen Beweis, und viele überraschende Folgerungen. Um nur einige zu nennen: Wenn Sie eine differenzierbare Funktion f gefunden haben, die gleich ihrer Ableitung ist, und wenn Sie darüber hinaus wissen, dass $f(0) = 1$ ist, dann halten Sie die Exponentialfunktion in den Händen. Und: Wenn Sie ein Paar von Funktionen gefunden haben, die die Eigenschaften (SinKos-1) bis (SinKos-5) in 15.3.10 erfüllen, dann haben Sie die Winkelfunktionen sin und cos entdeckt. Oder allgemeiner: Eine differenzierbare Funktion ist durch ihre Ableitung bis auf eine Konstante eindeutig bestimmt. Das will sagen: Wenn $f' = g'$ ist, dann unterscheiden sich der Graph von f und von g nur dadurch, dass wir den einen entlang der y-Achse verschieben und so den anderen bekommen.

Eine weitere Folgerung aus dem Mittelwertsatz ist die so genannte Regel von de l'Hospital, die es oft ermöglicht, Grenzwerte $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}$ zu berechnen, wenn $\lim_{x\to a} f(x) = 0$ und $\lim_{x\to a} g(x) = 0$ sind.

In Abschnitt 16.2 gehen wir das Problem an, wie man Funktionswerte differenzierbarer Funktionen in vielen Fällen näherungsweise berechnen kann. Der Hintergrund ist der, dass sich Polynomfunktionen sehr leicht auswerten lassen, andere Funktionen aber oft nicht. Warum sollte man also nicht versuchen, Funktionen durch Polynomfunktionen zu approximieren? Unter welchen Umständen dies möglich ist, und wie das bewerkstelligt wird, erklären wir in Abschnitt 16.2.2. Das zentrale Ergebnis ist der Satz von Taylor.

In Kapitel 17 greifen wir einen Problemkreis noch einmal auf, den wir bereits in der Kurseinheit 4 angesprochen haben. Wir untersuchen Folgen, allerdings Folgen, die von einer ganz bestimmten Bauart sind. Es handelt sich dabei um so genannte Reihen. Dabei beginnt man mit einer Folge (a_n) und betrachtet dann die Folge (s_n), deren n-tes Folgenglied $\sum_{k=1}^{n} a_n$ ist. Die Folge (s_n) nennt man eine Reihe, und man verwendet dafür das Symbol $\sum_{k=1}^{\infty} a_n$. Mit diesem Symbol wird auch der Grenzwert der Reihe bezeichnet, sofern er existiert. In Abschnitt 17.1 legen wir die Grundlagen für dieses Kapitel. Hier sind ganz besonders wichtig auch die Beispiele, auf die wir in den folgenden Abschnitten unter verschiedenen Gesichtspunkten immer wieder treffen werden. Unter den Beispielen werden wir auf einige treffen, die mit Hilfe des Satzes von Taylor in Kapitel 16 konstruiert werden.

Grenzwerte von Reihen explizit zu berechnen ist oft ein hoffnungsloses Unterfangen. Aber es ist in vielen Fällen möglich, zu entscheiden, ob gegebene Folgen konvergent sind oder nicht. Kriterien, mit deren Hilfe man feststellen kann, ob Reihen konvergent sind oder nicht, werden in Abschnitt 17.2 vorgestellt. Diese Kriterien sollten Sie kennen und in Beispielen anwenden können. Reihen sind Objekte, die in Anwendungen der Mathematik – zum Beispiel in den Wirtschaftswissenschaften – wichtig sind. Sie sind aber auch von großem innermathematischen Interesse. Ein Grund dafür ist, dass viele wichtige Funktionen, etwa die Exponentialfunktion und der Logarithmus, über Reihen definiert werden können. Das führt zu so genannten Summenfunktionen, die in der Form $f : I \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ gegeben sind. Diese Schreibweise ist so zu verstehen, dass x auf den Grenzwert einer Reihe abgebildet wird, nämlich dem der Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. Eine solche Reihe wird Potenzreihe genannt, und damit all das, was wir über Summenfunktionen zeigen werden, überhaupt Sinn macht, müssen wir uns zunächst Gedanken darüber machen, wann Potenzreihen konvergent sind. Das wird in Abschnitt 17.4 geschehen.

Summenfunktionen werden wir dann in Abschnitt 17.5 genauer anschauen. Sie haben viele schöne Eigenschaften, so sind sie beispielsweise stetig und differenzierbar, und ihre Ableitung lässt sich denkbar einfach bestimmen.

Vieles von dem, was wir in dieser Kurseinheit machen, lässt sich auch mit der Fragestellung „Auf der Suche nach den Winkelfunktionen“ erklären. In Abschnitt 15.3.4 hatten wir den Standpunkt eingenommen, einfach mal anzunehmen, dass es ein Paar von Funktionen, genannt sin und cos, gibt, die die Eigenschaften (SinKos-1) bis (SinKos-5) in 15.3.10 erfüllen. Als Folgerung des Mittelwertsatzes zeigen wir dann, dass ein solches Paar von Funktionen, wenn es denn existiert, eindeutig bestimmt ist. In Kapitel 18 sind wir dann endlich so weit, dass wir sin und cos wirklich sauber definieren können – beide werden als Summenfunktionen definiert werden. In Abschnitt 18.1 werden wir auch die Kreiszahl π definieren, allerdings anders, als Sie es vermutlich in der Schule gemacht haben. Von der Schule her kennen Sie π möglicherweise als den Flächeninhalt eines Kreises vom Radius 1, hier werden wir es über die Nullstellen der Kosinusfunktion machen. Den Zusammenhang zwischen π als Nullstelle und π als Flächeninhalt des Einheitskreises können wir in dieser Kurseinheit noch nicht herstellen; das wird erst zu Beginn von Kurseinheit 7 geschehen.

Die Winkelfunktionen gehören in die Klasse der so genannten elementaren Funktionen. Dabei gibt es keine exakte Definition, wann eine Funktion elementar genannt wird und wann nicht. Die elementaren Funktionen sind diejenigen, die für viele Naturwissenschaften wie Physik oder Chemie, aber auch in den Wirtschafts- und Sozialwissenschaften grundlegend sind, und immer wieder in den unterschiedlichsten Zusammenhängen auftreten. Neben den Polynomfunktionen und den rationalen Funktionen zählen den elementaren Funktionen auf jeden Fall die, die wir in Kapitel 18 vorstellen, und die Sie zum Teil schon aus vorherigen Kurseinheiten kennen.

Kapitel 16

Höhere Ableitungen

Für eine differenzierbare Funktion f bekommen wir – durch Betrachtung der Ableitung – eine neue Funktion f'. Der Begriff der Differenzierbarkeit kann auch für f' angewendet werden, sodass wir (bei Differenzierbarkeit von f') die Funktion $(f')'$ bekommen. Die Funktion $(f')'$ wird mit f'' bezeichnet und **zweite Ableitung** von f genannt. Wenn $f''(a)$ existiert, so sagen wir, dass f in a **zwei mal differenzierbar** ist, und die Zahl $f''(a)$ wird **zweite Ableitung von f in** a genannt. Es gibt keine Gründe mit der zweiten Ableitung einer Funktion aufzuhören. Wir können (sofern f'' differenzierbar ist) $f''' = (f'')'$ und so weiter definieren. Diese Notation mit der wiederholten Strich-Setzung wird schnell unübersichtlich, sodass die folgende Abkürzung üblicherweise verwendet wird. Wir setzen

$$\begin{array}{lcl} f^{(1)} & = & f' \text{ und} \\ f^{(k+1)} & = & (f^{(k)})' \text{ für alle } k \geq 1 \end{array}$$

Natürlich ist $f^{(k+1)}$ nur dann definiert, wenn $f^{(k)}$ differenzierbar ist.

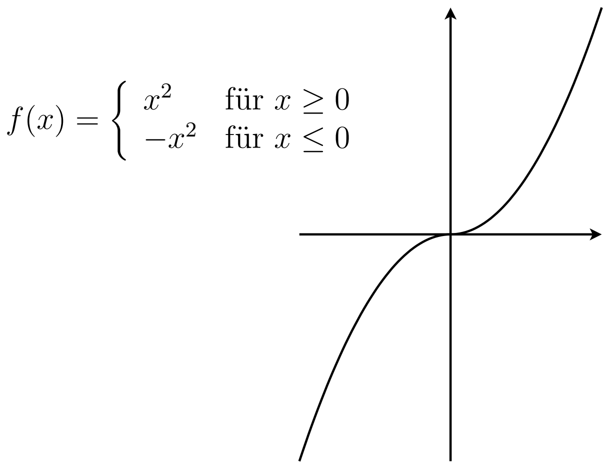
16.0.13 Definition: Für $k \geq 1$ wird $f^{(k)}$ die **k-te Ableitung** von f genannt. Wenn $f^{(k)}(a)$ existiert, so sagen wir, dass f in a k **mal differenzierbar** ist, und die Zahl $f^{(k)}(a)$ wird die **k-te Ableitung von f in** a genannt.

Üblicherweise benutzen wir die Schreibweise $f^{(k)}$ nur für $k \geq 4$ und behalten für kleinere k die Bezeichnung f', f'' und f''' bei.

Die e-Funktion ist ein Beispiel für eine Funktion, die – für jedes $k \in \mathbb{N}$ – k mal differenzierbar ist. Sie ist also beliebig oft differenzierbar. Aber längst nicht jede Funktion ist beliebig oft differenzierbar. Betrachten wir als Beispiel $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definiert durch

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{für } x \geq 0 \\ -x^2 & \text{für } x \leq 0 \end{cases}$$

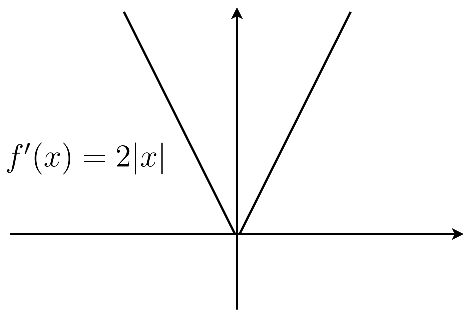
Der Graph von f ist



Es ist $f'(a) = 2a$ für alle $a > 0$ und $f'(a) = -2a$ für alle $a < 0$. Ferner ist

$$f'(0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{f(h)}{h} = 0.$$

Somit ist $f' : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch $f'(x) = 2|x|$. Der Graph von f' ist



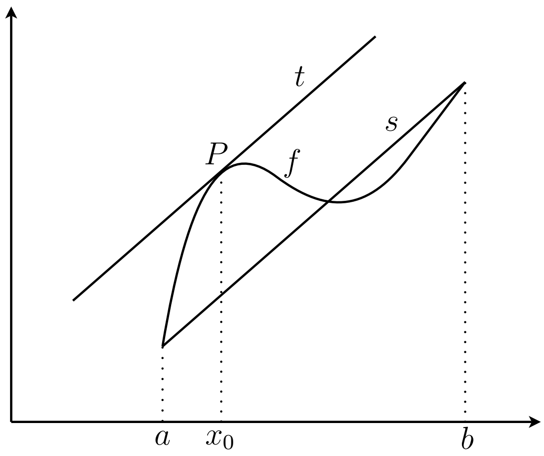
Die Funktion f' ist aber in 0 nicht differenzierbar, das heißt, die zweite Ableitung existiert nicht auf ganz $\mathbb{R}$.

In diesem Kapitel widmen wir uns k mal differenzierbaren Funktionen. Dabei fangen wir bei k klein an: Im ersten Abschnitt untersuchen wir Funktionen, die (mindestens) einmal differenzierbar sind.

16.1 Der Mittelwertsatz

16.1.1 Der Satz von Rolle und der Mittelwertsatz

Der Mittelwertsatz ist wie kaum ein anderer Satz „anschaulich klar“. Er besagt im Wesentlichen, dass es im Graphen einer differenzierbaren Funktion f einen Punkt P geben muss, in dem die Tangente t parallel zur Sehne s liegt:



Genauer:

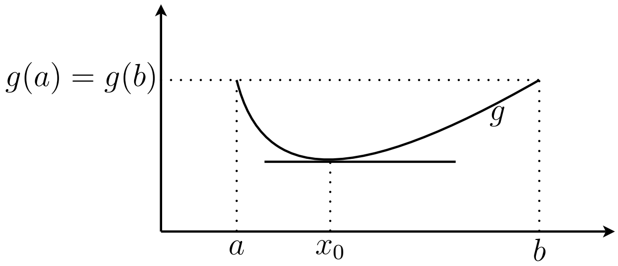
16.1.1 Satz: (Mittelwertsatz der Differentialrechnung)

Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion, die im Inneren des Intervalls $[a, b]$ differenzierbar ist. Dann gibt es mindestens einen Punkt $x_0 \in (a, b)$ an dem

$$f'(x_0) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \text{ oder, was dasselbe ist, } f(b) - f(a) = f'(x_0)(b - a) \text{ ist.}$$

Wir beweisen zuerst einen Spezialfall des Mittelwertsatzes, wenn nämlich $f(a) = f(b)$ ist. Dieser Satz geht auf den französischen Mathematiker Michel Rolle (1652–1719) zurück und ist nach ihm benannt. Den Namen Rolle spricht man (Frankophile mögen es verzeihen) gnadenlos deutsch aus. Also wie die Rolle, auf die man manchmal kommt.

Vorweg eine Skizze zum Satz:



16.1.2 Satz: (Satz von Rolle)

Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion, die im Inneren des Intervalls $[a, b]$ differenzierbar ist. Sei $f(a) = f(b)$. Dann gibt es einen Punkt $x_0 \in (a, b)$, sodass $f'(x_0) = 0$ ist.

Beweis: Ist $f = \hat{c}$ eine konstante Funktion, so ist $f'(x) = 0$ für alle $x \in (a, b)$, und wir sind schon fertig. Wir nehmen also an, dass f keine konstante Funktion ist. Da f stetig ist, gibt es eine Minimalstelle x_1 und eine Maximalstelle x_2 (Korollar 14.2.9) von f in $[a, b]$. Da f nicht konstant ist, ist $f(x_1) < f(x_2)$, und da $f(a) = f(b)$ ist, liegt mindestens einer der Punkte x_1 oder x_2 in (a, b). Mit Proposition 15.1.12 ist die Ableitung von f in einem lokalen Extremum 0. □

Aus diesem Satz folgt nun der Mittelwertsatz:

Beweis des Mittelwertsatzes: Sei $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$g(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a).$$

Dann ist g auf $[a, b]$ stetig und im Inneren von $[a, b]$ differenzierbar. Es gilt $g(a) = f(a)$ und $g(b) = f(b) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(b - a) = f(a)$. Wir können auf g also den Satz von Rolle anwenden, der besagt, dass es ein $x_0 \in (a, b)$ so gibt, dass $g'(x_0) = 0$ ist. Dann ist

$$0 = g'(x_0) = f'(x_0) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a},$$

also $f'(x_0) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$, die Behauptung. □

16.1.2 Folgerungen aus dem Mittelwertsatz

Ich hatte bereits angedeutet, dass man aus dem Verhalten der Ableitung f' einer differenzierbaren Funktion f Rückschlüsse auf das globale Änderungsverhalten von f ziehen kann. So richtig belegt hatte ich diese These bisher noch nicht. Das wird sich jetzt, da wir den Mittelwertsatz zur Verfügung haben, ändern. Erlauben Sie mir eine persönliche Bemerkung. Ich bin immer wieder aufs Neue beeindruckt, dass ein Satz mit einem so einfachen Beweis wie der Mittelwertsatz so wunderschöne, weitreichende Folgerungen haben kann. Aber sehen Sie selbst.

Als erstes halten wir ein Ergebnis fest, dass eine differenzierbare Funktion im Wesentlichen schon durch ihre Ableitung eindeutig bestimmt ist.

16.1.3 Korollar: Sei I ein beliebiges Intervall, und seien $g_1, g_2 : I \to \mathbb{R}$ stetig und im Inneren von I differenzierbar. Sei $g_1'(x) = g_2'(x)$ für alle x im Inneren von I. Dann ist $g_1 = g_2 + \hat{c}$ für eine Konstante $c \in \mathbb{R}$.

Beweis: Wir betrachten die Funktion $f = g_1 - g_2$. Dann ist f stetig und f ist im Inneren von I differenzierbar. Da $g_1' = g_2'$ folgt $f'(x) = g_1'(x) - g_2'(x) = 0$ für alle x im Inneren von I. Seien a, b mit $a < b$ beliebige Punkte in I. Wir wenden den Mittelwertsatz auf $f|_{[a,b]}$ an. Es folgt $f(b) - f(a) = f'(x_0)(b - a)$ für ein x_0 in (a, b). Da aber $f'(x_0) = 0$ ist, folgt $f(a) = f(b)$ für alle $a, b \in I$. Somit ist f eine konstante Funktion, und es gilt $f(x) = g_1(x) - g_2(x) = c \in \mathbb{R}$ für alle $x \in I$. Es folgt $g_1 = g_2 + \hat{c}$. □

Funktionen, deren Ableitungen gleich sind, unterscheiden sich also nur durch eine additive Konstante.

16.1.4 Aufgabe: Folgern Sie aus Korollar 16.1.3, dass eine differenzierbare Funktion $f : I \to \mathbb{R}$, deren Ableitung überall 0 ist, eine konstante Funktion $\hat{c}$ ist.

Wir hatten in 15.3.4 gesehen, dass die e-Funktion die Eigenschaft hat, dass sie und ihre Ableitung gleich sind. Außerdem hatten wir festgestellt, dass auch die Funktionen $c\exp$, $c \in \mathbb{R}$ diese Eigenschaft haben. Daraufhin hatten wir die Frage gestellt, ob es noch mehr Funktionen mit dieser Eigenschaft geben kann. Die Antwort ist „nein“:

16.1.5 Korollar: Ist f differenzierbar und $f'(x) = f(x)$ für alle x, so gibt es eine reelle Zahl c, sodass $f = c\exp$ ist.

Beweis: Sei $g = \frac{f}{\exp}$. Da $\exp(x) \neq 0$ ist, ist g überall dort definiert, wo f definiert ist. Mit der Quotientenregel gilt

$$g'(x) = \frac{\exp(x)f'(x) - f(x)\exp(x)}{\exp^2(x)} = 0 \text{ für alle } x.$$

Die Ableitung von g ist also überall 0, und es folgt, dass g eine konstante Funktion ist (vergleiche Aufgabe 16.1.4). Also $g(x) = c = \frac{f(x)}{\exp(x)}$ für alle x, und somit $f = c\exp$. $\square$

Da $c\exp(0) = c$ für alle $c \in \mathbb{R}$ ist, folgt:

16.1.6 Korollar: (Charakterisierung der e-Funktion)

Die Funktion exp ist die einzige differenzierbare Funktion f mit $f = f'$ und $f(0) = 1$. $\square$

In Abschnitt 15.3.4, als wir auf die Winkelfunktionen Sinus und Cosinus zu sprechen kamen, haben wir angenommen, dass es Funktionen gibt, die die Eigenschaften (SinKos-1) bis (SinKos-5) in 15.3.10 erfüllen. Diese Funktionen haben wir sin und cos genannt, und beispielsweise in 15.3.11 hergeleitet, dass sie differenzierbar sein müssen, und dass $\sin' = \cos$ und $\cos' = -\sin$ sein muss. Eine weitere Folgerung aus 15.3.10 war, dass $\sin(0) = 0$ sein muss, denn aus $\sin(0) = -\sin(0)$ folgt $\sin(0) = 0$. Wir werden jetzt als Folgerung aus dem Mittelwertsatz zeigen, dass – sofern es überhaupt Funktionen gibt, die (SinKos-1) bis (SinKos-5) erfüllen – diese Funktionen eindeutig sind. Wenn wir also irgendein Paar von Funktionen finden, die die Eigenschaften 15.3.10 haben, dann haben wir die üblicherweise am Einheitskreis definierten Winkelfunktionen sin und cos gefunden.

16.1.7 Korollar: (Eindeutigkeit der Winkelfunktionen)

Wenn es Funktionen $\sin, \cos : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gibt, die die Eigenschaften 15.3.10 haben, so sind diese Funktionen eindeutig.

Beweis: Seien sin, cos Funktionen, die (SinKos-1) bis (SinKos-5) erfüllen, und seien s, c zwei weitere Funktionen, für die (SinKos-1) bis (SinKos-5) gilt. Insbesondere gilt dann $c(0) = 1$ und $s(0) = 0$. Wie in Satz 15.3.11 gezeigt wurde, sind s und c differenzierbar, und es gilt $c'(x) = -s(x)$ und $s'(x) = c(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Wir betrachten die Funktion $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definiert durch

$$F(x) = (c(x) - \cos(x))^2 + (s(x) - \sin(x))^2.$$

Es ist

$$F(0) = (c(0) - \cos(0))^2 + (s(0) - \sin(0))^2 = (1 - 1)^2 + (0 + 0)^2 = 0.$$

Die Funktion F ist differenzierbar, und es gilt

$$\begin{aligned} F'(x) &= 2(c(x) - \cos(x))(c'(x) - \cos'(x)) + 2(s(x) - \sin(x))(s'(x) - \sin'(x)) \\ &= 2(c(x) - \cos(x))(-s(x) + \sin(x)) + 2(s(x) - \sin(x))(c(x) - \cos(x)) \\ &= -2(c(x) - \cos(x))(s(x) - \sin(x)) + 2(s(x) - \sin(x))(c(x) - \cos(x)) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Somit ist F konstant (vergleiche Aufgabe 16.1.4). Da $F(0) = 0$, ist F die konstante Funktion $\hat{0}$. Es ist also

$$F(x) = (c(x) - \cos(x))^2 + (s(x) - \sin(x))^2 = 0 \text{ für alle } x \in \mathbb{R},$$

und da für jede reelle Zahl a mit $a \neq 0$ stets $a^2 > 0$ gilt, folgt, dass $c(x) - \cos(x) = 0$ und $s(x) - \sin(x) = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$ sein muss. Das heißt aber gerade $c = \cos$ und $s = \sin$, wie behauptet. □

Als nächstes wenden wir uns der Aufgabe zu, wie man mit Hilfe der Ableitung f' den Graph einer Funktion f näherungsweise skizzieren kann. Wir interessieren uns zunächst dafür, wo die Funktion f (streng) wächst oder (streng) fällt. Darüber gibt das folgende Korollar aus dem Mittelwertsatz Auskunft.

16.1.8 Korollar: Die Funktion f sei auf einem Intervall I stetig und im Inneren von I differenzierbar. Sei x beliebig im Inneren von I. Dann

1. wächst f, wenn $f'(x) \geq 0$, und f wächst streng, wenn $f'(x) > 0$ ist.
2. fällt f, wenn $f'(x) \leq 0$, und f fällt streng, wenn $f'(x) < 0$ ist.

Beweis: Für beliebige zwei Punkte $x_1, x_2 \in I$ mit $x_1 < x_2$ gibt es mit dem Mittelwertsatz ein $x_0 \in (x_1, x_2)$ mit

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(x_0)(x_2 - x_1).$$

Dann gilt:

1. Ist $f'(x) \geq 0$ für alle $x \in (x_1, x_2)$, so gilt $f(x_2) - f(x_1) \geq 0$, und f ist wachsend. Gilt $f'(x) > 0$, so gilt sogar $f(x_1) - f(x_2) > 0$, und f ist streng wachsend.
2. Ist $f'(x) \leq 0$ für alle $x \in (x_1, x_2)$, so gilt $f(x_2) - f(x_1) \leq 0$, und f ist fallend. Gilt $f'(x) < 0$, so gilt sogar $f(x_1) - f(x_2) < 0$, und f ist streng fallend.

□

Ist f auf dem offenen Intervall (a, b) differenzierbar, so können höchstens die Nullstellen von f' Stellen lokaler Extrema von v sein (vergleiche 15.1.12). Ob sie es wirklich sind, muss aber in jedem Fall einzeln geprüft werden. Aufgrund des folgenden Ergebnisses ist die Prüfung aber ganz einfach:

16.1.9 Korollar: Sei $f : I \to \mathbb{R}$. Wenn f auf einer δ-Umgebung $U_\delta(x_0)$ von $x_0 \in I$ differenzierbar ist, und wenn $f'(x_0) = 0$ ist, so ist

1. x_0 Stelle eines lokalen Maximums, wenn $f'(x) > 0$ für alle $x < x_0$ und $f'(x) < 0$ für alle $x > x_0$ und $x \in U_\delta(x_0)$.
2. x_0 Stelle eines lokalen Minimums, wenn $f'(x) < 0$ für alle $x < x_0$ und $f'(x) > 0$ für alle $x > x_0$ und $x \in U_\delta(x_0)$.

Beweis:

1. Ist $f'(x) > 0$ für alle $x < x_0$ und $f'(x) < 0$ für alle $x > x_0$ und $x \in U_\delta(x_0)$, so folgt mit Korollar 16.1.8, dass f auf $(x_0 - \delta, x_0]$ streng wächst und auf $[x_0, x_0 + \delta)$ streng fällt. Somit ist x_0 ein lokales Maximum.
2. Die zweite Behauptung wird analog zur ersten bewiesen.

□

Noch einfacher ist ein Test auf lokale Extrema, wenn f' in x_0 differenzierbar ist:

16.1.10 Korollar: Sei $f : I \to \mathbb{R}$, und sei f auf einer δ-Umgebung $U_\delta(x_0)$ von $x_0 \in I$ differenzierbar. Sei $f'(x_0) = 0$, und sei f' in x_0 differenzierbar. Dann gilt:

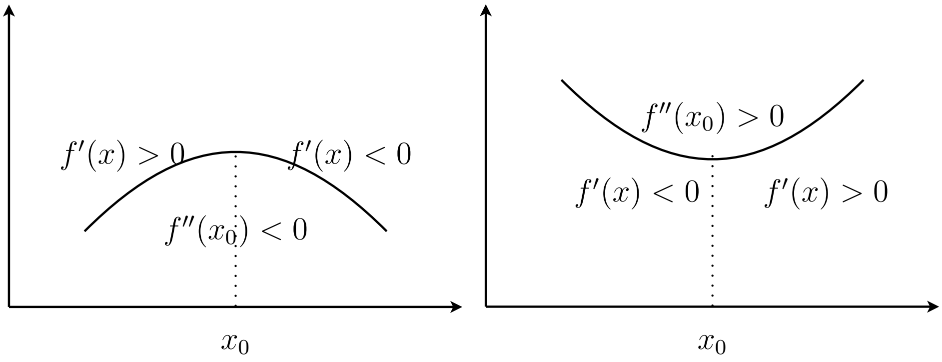
1. Wenn $f''(x_0) < 0$ ist, dann ist x_0 Stelle eines lokalen Maximums.
2. Wenn $f''(x_0) > 0$ ist, dann ist x_0 Stelle eines lokalen Minimums.

Beweis:

1. Nach Definition ist $f''(x_0) = (f')'(x_0) = \lim\limits_{h\to 0} \frac{f'(x_0+h)-f'(x_0)}{h}$. Da $f'(x_0) = 0$, bedeutet dies
$$f''(x_0) = (f')'(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f'(x_0+h)}{h}.$$
Sei $f''(x_0) < 0$. Dann muss $\frac{f'(x_0+h)}{h}$ negativ sein, wenn h gegen 0 geht. Daher muss $f'(x_0+h)$ positiv sein für $h < 0$ und $h \to 0$, und $f'(x_0+h)$ muss negativ sein für $h > 0$ und $h \to 0$. Mit Korollar 16.1.8 folgt, dass f auf einem Intervall $(x_0 - \delta, x_0]$ links von x_0 streng wächst und auf einem Intervall $[x_0, x_0 + \delta)$ streng monoton fällt. Somit ist x_0 ein lokales Maximum.
2. Diese Behauptung wird analog bewiesen.

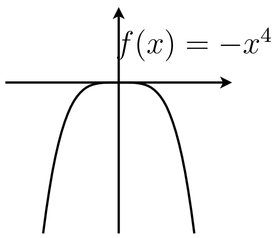
□

Die folgende Skizze veranschaulicht das Verhalten einer differenzierbaren Funktion in der Nähe eines lokalen Extremums.

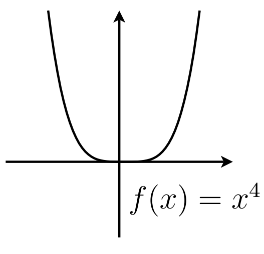


Darüber, was geschieht, wenn $f'(x_0) = 0$ und $(f')'(x_0) = 0$ ist, macht Korollar 16.1.10 keine Aussage. Und es gibt in der Tat Funktionen, die diese Eigenschaft haben, und bei denen f ein lokales Minimum, ein lokales Maximum oder nichts von beidem ist. Folgende Beispiele verdeutlichen dies:

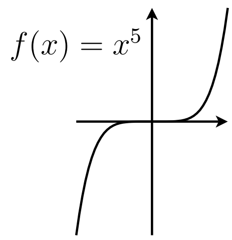
16.1.11 Beispiele: 1. Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto -x^4$. Dann gilt $f'(0) = 0$ und $(f')'(0) = 0$. An der Stelle 0 hat f ein lokales Maximum.



2. Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^4$. Dann gilt $f'(0) = 0$ und $(f')'(0) = 0$. An der Stelle 0 hat f ein lokales Minimum.



3. Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^5$. Dann gilt $f'(0) = 0$ und $(f')'(0) = 0$. An der Stelle 0 hat f weder ein lokales Minimum noch ein lokales Maximum.



16.1.12 Aufgabe: Sei $f : [-1,1] \to \mathbb{R}$, $x \mapsto (1+x)\sqrt{1-x^2}$. Bestimmen Sie die lokalen Minima und Maxima von f und die Intervalle, in denen f wächst beziehungsweise fällt. Skizzieren Sie den Graph von f.

16.1.3 Die Regel von de l'Hospital

Diese Regel ist nach dem französischen Mathematiker Guillaume François Antoine Marquis de L'Hospital (1661-1704), der sie allerdings nicht selbst entdeckte, sondern aus einem Kurs seines Lehrers Johann Bernoulli übernahm und 1696 in seinem Buch „Analyse des infiniment petits pour l'intelligence des lignes courbes", dem ersten Lehrbuch der Differentialrechnung, veröffentlichte. Der Name de l'Hospital wird übrigens im Gegensatz zu dem Namen Rolle französisch ausgesprochen, also „Lopital".

Wir beginnen mit einer Verallgemeinerung des Mittelwertsatzes. Wenn die Funktion g in der folgenden Proposition die Funktion $g = \mathrm{id}$ ist, dann ist die Aussage gerade die des Mittelwertsatzes 16.1.1.

16.1.13 Proposition: Seien f und g auf dem Intervall $I = [a,b]$ stetig und auf (a,b) differenzierbar. Dann gibt es ein $x_0 \in (a,b)$, sodass gilt:

$$(f(b) - f(a))g'(x_0) = (g(b) - g(a))f'(x_0).$$

Beweis: Sei $h : [a,b] \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$h(x) = f(x)(g(b) - g(a)) - g(x)(f(b) - f(a)).$$

Dann ist h auf $[a,b]$ stetig und auf (a,b) differenzierbar. Weiter ist

$$h(a) = f(a)(g(b) - g(a)) - g(a)(f(b) - f(a)) = f(a)g(b) - g(a)f(b) = h(b).$$

Mit dem Satz von Rolle 16.1.2 gibt es ein $x_0 \in (a,b)$ mit $h'(x_0) = 0$. Dies bedeutet

$$0 = f'(x_0)(g(b) - g(a)) - g'(x_0)(f(b) - f(a)),$$

also $(f(b) - f(a))g'(x_0) = (g(b) - g(a))f'(x_0)$. $\square$

Bei der Regel von de l'Hospital geht es darum, den Grenzwert $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$ zu bestimmen, wenn Zähler und Nenner für x gegen a gegen Null streben.

16.1.14 Satz: (Regel von de l'Hospital)

Seien f und g auf einem offenen Intervall I definierte Funktionen, und sei $a \in I$. Seien $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$ und $\lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$.

Falls $\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ existiert, so existiert $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$, und es gilt

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Beweis: Die Annahme, dass $\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ existiert, beinhaltet zwei Voraussetzungen:

(1) Es gibt ein Intervall $(a-\delta, a+\delta)$, sodass $f'(x)$ und $g'(x)$ für alle $x \in (a-\delta, a+\delta)$ definiert sind, eventuell mit Ausnahme von $x = a$.

(2) In dem Intervall $(a-\delta, a+\delta)$ ist $g'(x) \neq 0$, wieder mit der möglichen Ausnahme von $x = a$.

Die Funktionen f und g müssen in a nicht definiert sein. Wir definieren $f(a) = g(a) = 0$ (wobei wir möglicherweise die ursprünglichen Werte von f und g in a entsprechend abändern). Dann sind f und g in a stetig. Sei $x \in (a, a+\delta)$. Dann sind f und g auf $[a, x]$ stetig und in (a, x) differenzierbar und f und g erfüllen die Voraussetzungen des Mittelwertsatzes 16.1.1 und der Proposition 16.1.13. Es ist $g(x) \neq 0$, denn sonst gäbe es ein $x_0 \in (a, x)$ mit

$$g'(x_0) = \frac{g(x) - g(a)}{x - a} = \frac{0 - 0}{x - a} = 0,$$

ein Widerspruch zu (2). Jetzt wenden wir Proposition 16.1.13 auf f und g an und erhalten eine Zahl $a_x \in (a, x)$ mit

$$(f(x) - 0)g'(a_x) = (g(x) - 0)f'(a_x)$$

oder, was dasselbe ist,

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(a_x)}{g'(a_x)}.$$

Wenn x gegen a strebt, so strebt a_x gegen a, denn $a_x \in (a, x)$. Da $\lim\limits_{y\to a}\frac{f'(y)}{g'(y)}$ existiert, folgt

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a}\frac{f'(a_x)}{g'(a_x)} = \lim_{y\to a}\frac{f'(y)}{g'(y)}.$$

$\square$

Ein Beispiel zur Benutzung der Regel von de l'Hospital: Es ist

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(x)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{1} = 0,$$

denn $\sin(0) = \sin(-0) = -\sin(0)$ mit 15.3.10. Also ist $\sin(0) = 0$, denn 0 ist die einzige reelle Zahl, die gleich ihrer negativen Zahl ist. Manchmal müssen wir die Regel von de l'Hospital auch mehrmals anwenden, um einen Grenzwert zu bestimmen. Als Beispiel: Es ist

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(\frac{x}{2})}{1-\cos(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{2}\sin(\frac{x}{2})}{\sin(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{4}\cos(\frac{x}{2})}{\cos(x)} = \frac{1}{4}.$$

Dabei haben wir die Regel von de l'Hospital erst auf $f(x) = 1 - \cos(\frac{x}{2})$ und $g(x) = 1 - \cos(x)$ und dann auf $f'(x) = \frac{1}{2}\sin(\frac{x}{2})$ und $g'(x) = \sin(x)$ angewendet.

16.1.15 Aufgabe: Was ist falsch bei folgender Anwendung der Regel von de l'Hospital?

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^3+x-2}{x^2-3x+2} = \lim_{x\to 1} \frac{3x^2+1}{2x-3} = \lim_{x\to 1} \frac{6x}{2} = 3$$

Berechnen Sie $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^3+x-2}{x^2-3x+2}$.

16.1.16 Aufgabe: Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte.

1. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos(x)}{x^2}$
2. $\lim\limits_{x\to 0} \left(\frac{1}{\sin(x)} - \frac{1}{x}\right)$

16.2 Approximationen von Funktionen durch Polynomfunktionen

Die Exponential- und Logarithmusfunktion, Sinus und Kosinus gehören zu der Klasse der so genannten **elementaren Funktionen**. So elementar sind sie aber gar nicht – schon gar nicht, wenn wir ihre Funktionswerte ausrechnen wollen. Eine Polynomfunktion

$$\tilde{p} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \tilde{p}(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n$$

auszurechnen ist hingegen einfach.

In diesem Abschnitt werden wir wichtige Ergebnisse beweisen, die es für viele Funktionen f ermöglichen, $f(x)$ mit Hilfe von Polynomfunktionen näherungsweise zu berechnen.

16.2.1 Taylorpolynome

Als Aufgalopp schauen wir uns Polynomfunktionen erst noch einmal genauer an. Sei
$$\tilde{p} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \tilde{p}(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n$$
eine Polynomfunktion. Für unsere Zwecke ist es wichtig zu beobachten, dass die Koeffizienten a_i durch die Funktionswerte von $\tilde{p}$ und ihren Ableitungen in 0 ausgedrückt werden können. Zunächst bemerken wir

$$\tilde{p}(0) = a_0.$$

Differenzieren wir $\tilde{p}$, so erhalten wir

$$\tilde{p}'(x) = a_1 + 2a_2 x + \cdots + n a_n x^{n-1},$$

also
$$\tilde{p}'(0) = \tilde{p}^{(1)}(0) = a_1.$$
Differenzieren wir noch einmal, so erhalten wir

$$\tilde{p}''(x) = 2a_2 + 3 \cdot 2a_3 x + \cdots + n(n-1)a_n x^{n-2},$$

also
$$\tilde{p}''(0) = \tilde{p}^{(2)}(0) = 2a_2.$$
Allgemein haben wir

$$\tilde{p}^{(k)}(0) = k! a_k, \text{ beziehungsweise } a_k = \frac{\tilde{p}^{(k)}(0)}{k!}.$$

(Für die Definition von $k!$ erinnern wir an 12.5.8.) Definieren wir $0! = 1$ und $\tilde{p}^{(0)} = p$, so gilt diese Formel auch für $k = 0$.

Nehmen wir nun an, wir hätten mit einem Polynom in $x - a$, $a \in \mathbb{R}$ angefangen, also einer Funktion

$$\tilde{p} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \tilde{p}(x) = a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + \cdots + a_n(x-a)^n.$$

Analoge Überlegungen wie die, die wir gerade angestellt haben, zeigen, dass

$$a_k = \frac{\tilde{p}^{(k)}(a)}{k!}$$

gilt.

Jetzt fangen wir ganz allgemein an. Sei f eine beliebige Funktion, und sei $a \in \mathbb{R}$, sodass $f^{(1)}(a), \ldots, f^{(n)}(a)$ alle existieren. Für alle $0 \leq k \leq n$ setzen wir

$$a_k = \frac{f^{(k)}(a)}{k!},$$

und wir definieren

$$P_{n,a}(x) = a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + \cdots + a_n(x-a)^n.$$

16.2.1 Definition: Die Polynomfunktion $P_{n,a}$ wird das **n-te Taylorpolynom von f in a** genannt.

16.2.2 Aufgabe: Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch $f(x) = x^5 + x^3 + x$. Berechnen Sie die zugehörigen Taylorpolynome $P_{4,0}$ und $P_{4,1}$.

Aufgabe 16.2.2 zeigt bereits, dass ein n-tes Taylorpolynom von f in a gar nicht den Grad n zu haben braucht. Es kann ja durchaus der Koeffizient $a_n = 0$ sein. Allerdings ist das Taylorpolynom $P_{n,a}$ einer Funktion f die einzige Polynomfunktion vom Grad $\leq n$ mit $P_{n,a}^{(k)}(a) = f^{(k)}(a)$ für alle $0 \leq k \leq n$.

Mit dem Namen Taylorpolynom wird der britische Mathematiker Brook Taylor (1685–1731) geehrt.

Die Koeffizienten von $P_{n,a}$ einer Funktion f scheinen in ziemlich komplizierter Weise von f abzuhängen. Aber die meisten der elementaren Funktionen haben sehr einfache Taylorpolynome.

16.2.3 Beispiel: Betrachten wir die Sinusfunktion (vergleiche Abschnitt 15.3.4). Da $\sin(-x) = -\sin(x)$, folgt $\sin(0) = -\sin(0)$, also $\sin(0) = 0$. Damit gilt:

$$\begin{array}{rcl} \sin(0) & = & 0, \\ \sin^{(1)}(0) & = & \cos(0) = 1, \\ \sin^{(2)}(0) & = & -\sin(0) = 0, \\ \sin^{(3)}(0) & = & -\cos(0) = -1, \\ \sin^{(4)}(0) & = & \sin(0) = 0. \end{array}$$

Von diesem Punkt an wiederholen sich die Ableitungen in einem Viererzyklus. Die Zahlen

$$a_k = \frac{\sin^{(k)}(0)}{k!}$$

sind somit

$$0, 1, 0, -\frac{1}{3!}, 0, \frac{1}{5!}, 0, -\frac{1}{7!}, 0, \frac{1}{9!} \ldots$$

Damit ist das $(2n+1)$-te Taylorpolynom $P_{2n+1,0}$ von sin in 0:

$$P_{2n+1,0}(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

Weiter ist $P_{2n+1,0} = P_{2n+2,0}$, denn $a_{2n+2} = 0$.

16.2.4 Aufgabe: Berechnen Sie das $2n$-te Taylorpolynom $P_{2n,0}$ von cos in 0.

16.2.5 Beispiel: Das Taylorpolynom $P_{n,0}$ für exp ist besonders einfach zu berechnen. Da $\exp^{(k)}(0) = \exp(0) = 1$ für alle k ist, folgt

$$P_{n,0}(x) = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}.$$

16.2.6 Beispiel: Hier untersuchen wir das Taylorpolynom des natürlichen Logarithmus ln. Dieses muss in einem Punkt $a > 0$ berechnet werden, denn ln ist für $x \leq 0$ nicht definiert. Wir wählen $a = 1$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
\ln^{(1)}(x) &= \tfrac{1}{x}, & \ln^{(1)}(1) &= 1 \\
\ln^{(2)}(x) &= -\tfrac{1}{x^2}, & \ln^{(2)}(1) &= -1 \\
\ln^{(3)}(x) &= \tfrac{2}{x^3}, & \ln^{(3)}(1) &= 2 \text{ und allgemein} \\
\ln^{(k)}(x) &= \tfrac{(-1)^{k-1}(k-1)!}{x^k}, & \ln^{(k)}(1) &= (-1)^{k-1}(k-1)!
\end{aligned}$$

Das n-te Taylorpolynom von ln in 1 ist somit

$$P_{n,1}(x) = (x-1) - \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{3} + \cdots + \frac{(-1)^{n-1}(x-1)^n}{n}.$$

Manchmal ist es handlicher, die Funktion $f(x) = \ln(1+x)$ zu untersuchen. In diesem Fall können wir $a = 0$ wählen, und wir bekommen ein viel schöneres Taylorpolynom. Es ist

$$f^{(k)}(x) = \ln^{(k)}(1+x), \text{ also } f^{(k)}(0) = \ln^{(k)}(1) = (-1)^{k-1}(k-1)!.$$

Damit ist das n-te Taylorpolynom vom Grad n von f in 0:

$$P_{n,0}(x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots + \frac{(-1)^{n-1}x^n}{n}.$$

16.2.2 Der Satz von Taylor

In diesem Abschnitt untersuchen wir Funktionen f, für die $f^{(1)}(a), \ldots, f^{(n+1)}(a)$ alle existieren. Für eine solche Funktion existiert das Taylorpolynom $P_{n,a}$ vom Grad n in a. (Nebenbei, es existiert auch $P_{n+1,a}$, aber das soll uns an dieser Stelle nicht interessieren.)

Wir betrachten die Funktion $R_{n,a}$, die durch $R_{n,a}(x) = f(x) - P_{n,a}(x)$ definiert ist. Für alle x gilt dann

$$f(x) = P_{n,a}(x) + R_{n,a}(x).$$

Mit anderen Worten, f ist die Summe einer Polynomfunktion (nämlich $P_{n,a}$) und einer „Restfunktion“ (nämlich $R_{n,a}$). Die Zahl $R_{n,a}(x)$ ist so wichtig, dass sie gleich einen Namen bekommt:

16.2.7 Definition: Sei f eine Funktion, für die $P_{n,a}(x)$ existiert, und sei $f(x) = P_{n,a}(x) + R_{n,a}(x)$. Dann wird $R_{n,a}(x)$ das **Restglied** genannt.

Betrachten wir noch einmal die Gleichung

$$f(x) = P_{n,a}(x) + R_{n,a}(x),$$

und stellen wir uns vor, f sei eine Funktion, für die $f(x)$ ganz schwer zu berechnen ist. Der Funktionswert $P_{n,a}(x)$ ist ganz einfach zu berechnen, denn $P_{n,a}$ ist eine Polynomfunktion. Unser Wunsch wird es sein, dass, wenn n groß wird, das Restglied $R_{n,a}(x)$ klein wird. Dann könnten wir es einfach vernachlässigen, und $f(x)$ näherungsweise durch $P_{n,a}(x)$ bestimmen. Für manche Funktionen f kann man das wirklich machen. Als ersten Schritt brauchen wir aber eine Formel für $R_{n,a}(x)$, die wir leicht abschätzen können. Und genau darum geht es im Satz von Taylor, der in diesem Abschnitt im Mittelpunkt steht.

Der Beweis des Satzes von Taylor ist nicht schwer, aber er ist clever und ungewohnt. Daher möchte ich schon hier auf einige ungewohnte Dinge eingehen.

Wir werden Funktionen f betrachten, für die $f^{(1)}, \ldots, f^{(n+1)} : [a, x] \to \mathbb{R}$ definiert sind. Das ist das erste ungewohnte Detail. Bisher war x immer unsere Variable, hier ist x ein Intervallende, an dem wir im Laufe des Beweises nicht rütteln werden. Die Zahl x ist also nicht mehr variabel sondern fest.

Für alle $t \in [a, x]$ können wir

$$f(x) = P_{n,t}(x) + R_{n,t}(x) = f(t) + \frac{f^{(1)}(t)}{1!}(x-t) + \cdots + \frac{f^{(n)}(t)}{n!}(x-t)^n + R_{n,t}(x)$$

bilden. Wir bezeichnen $R_{n,t}(x)$ mit $S(t)$. Dann wird durch

$$S : [a,x] \to \mathbb{R}, t \mapsto R_{n,t}(x) = f(x) - P_{n,t}(x) \text{ für alle } t \in [a,x]$$

eine Funktion definiert. Berechnen wir S an den Intervallenden, also $S(a)$ und $S(x)$:

$$\begin{aligned} S(a) &= R_{n,a}(x) \text{ und} \\ S(x) &= R_{n,x}(x) = f(x) - [f(x) + \tfrac{f^{(1)}(x)}{1!}(x-x) + \cdots + \tfrac{f^{(n)}(x)}{n!}(x-x)^n] = 0. \end{aligned}$$

Wir werden die Funktion S differenzieren. Geht das überhaupt? Nun ja, für alle $t \in [a,x]$ ist

$$S(t) = f(x) - [f(t) + \frac{f^{(1)}(t)}{1!}(x-t) + \cdots + \frac{f^{(n)}(t)}{n!}(x-t)^n].$$

Die Differentiationsregeln in 15.2 helfen weiter. Wir wollen eine Summe differenzieren, also geht das (wenn es überhaupt geht) summandenweise. Da $f(x)$ eine Konstante ist (S ist eine Funktion in der Variablen t), ist $(f(x))' = 0$. Die Ableitung von $f(t)$ ist $f'(t)$. Die anderen Summanden sind von der Form $\dfrac{f^{(k)}(t)}{k!}(x-t)^k$. Mit der Kettenregel ist $((x-t)^k)' = k(x-t)^{k-1}(-1)$, und mit der Produktregel folgt

$$\begin{aligned} \left(\tfrac{f^{(k)}(t)}{k!}(x-t)^k\right)' &= \tfrac{f^{(k)}(t)}{k!}k(x-t)^{k-1}(-1) + \tfrac{f^{(k+1)}(t)}{k!}(x-t)^k \\ &= -\tfrac{f^{(k)}(t)}{(k-1)!}(x-t)^{k-1} + \tfrac{f^{(k+1)}(t)}{k!}(x-t)^k. \end{aligned}$$

Da wir verlangt haben, dass $f^{(n+1)}$ auf $[a,x]$ definiert ist, existiert die Ableitung eines jeden Summanden von S, das heißt, S ist differenzierbar.

16.2.8 Satz: (Satz von Taylor)

Sei f eine Funktion, für die $f', \ldots, f^{(n+1)}$ auf $[a,x]$ definiert ist. Sei

$$f(x) = P_{n,a}(x) + R_{n,a}(x).$$

Für das Restglied $R_{n,a}(x)$ gilt dann:

1. Es gibt ein $t_1 \in (a,x)$ mit $R_{n,a}(x) = \frac{f^{(n+1)}(t_1)}{n!}(x-t_1)^n(x-a)$.
2. Es gibt ein $t_0 \in (a,x)$ mit $R_{n,a}(x) = \frac{f^{(n+1)}(t_0)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$.

Beweis: Sei $S : [a,x] \to \mathbb{R}$ definiert durch $t \mapsto R_{n,t}(x) = f(x) - P_{n,t}(x)$ für alle $t \in [a,x]$. Für alle $t \in [a,x]$ gilt

$$S(t) = f(x) - [f(t) + \frac{f^{(1)}(t)}{1!}(x-t) + \cdots + \frac{f^{(n)}(t)}{n!}(x-t)^n].$$

Wir haben oben gesehen, dass S differenzierbar auf $[a, x]$ ist. Wir benutzen die oben hergeleiteten Formeln für die Ableitungen der Summanden und erhalten:

$$\begin{aligned} S'(t) &= -f'(t) - \left[-f'(t) + \tfrac{f''(t)}{1!}(x-t)\right] - \left[-\tfrac{f''(t)}{1!}(x-t) + \tfrac{f^{(3)}(t)}{2!}(x-t)^2\right] \\ &\quad - \cdots - \left[-\tfrac{f^{(n)}(t)}{(n-1)!}(x-t)^{n-1} + \tfrac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n\right] \end{aligned}$$

Bis auf den letzten Summanden heben sich in dieser Summe alle Summanden auf, und es folgt

$$S'(t) = -\frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n.$$

Jetzt wenden wir den Mittelwertsatz 16.1.1 auf die Funktion S an. Dieser besagt, dass es ein $t_1 \in (a, x)$ so gibt, dass

$$\frac{S(x) - S(a)}{x - a} = S'(t_1) = -\frac{f^{(n+1)}(t_1)}{n!}(x - t_1)^n$$

ist. Oben haben wir bereits $S(x) = 0$ und $S(a) = R_{n,a}(x)$ ausgerechnet. Einsetzen liefert

$$-\frac{R_{n,a}(x)}{x-a} = -\frac{f^{(n+1)}(t_1)}{n!}(x-t_1)^n, \text{ also } R_{n,a}(x) = \frac{f^{(n+1)}(t_1)}{n!}(x-t_1)^n(x-a).$$

Dies ist die erste Formel für das Restglied.

Die zweite Formel erhalten wir, indem wir Proposition 16.1.13 auf S anwenden, wobei die Rolle der Funktion g aus 16.1.13 durch $g : [a, x] \to \mathbb{R}$, $t \mapsto (x - t)^{n+1}$ eingenommen wird. Es gibt also ein $t_0 \in (a, x)$, sodass gilt:

$$\frac{S(x) - S(a)}{g(x) - g(a)} = \frac{S'(t_0)}{g'(t_0)} = \frac{-\frac{f^{(n+1)}(t_0)}{n!}(x-t_0)^n}{-(n+1)(x-t_0)^n}.$$

Es folgt

$$\frac{R_{n,a}(x)}{(x-a)^{n+1}} = \frac{f^{(n+1)}(t_0)}{(n+1)!}, \text{ also } R_{n,a}(x) = \frac{f^{(n+1)}(t_0)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}.$$

Das ist die zweite Formel für das Restglied. □

Wir haben im Satz von Taylor angenommen, dass $a \leq x$ ist. Ein analoger Beweis zeigt, dass der Satz auch richtig ist, wenn $f', \ldots, f^{(n+1)}$ auf $[x, a]$ definiert sind. Dann können wir den Satz von Taylor etwas allgemeiner formulieren:

16.2.9 Korollar: (Satz von Taylor, allgemeine Fassung)

Sei f eine Funktion, für die $f', \ldots, f^{(n+1)}$ auf einem abgeschlossenen Intervall I, das a enthält, definiert ist. Sei $x \in I$, und sei

$$f(x) = P_{n,a}(x) + R_{n,a}(x).$$

Für das Restglied $R_{n,a}(x)$ gilt dann:

1. Es gibt ein t_1 zwischen a und x mit $R_{n,a}(x) = \frac{f^{(n+1)}(t_1)}{n!}(x - t_1)^n(x - a)$.
2. Es gibt ein t_0 zwischen a und x mit $R_{n,a}(x) = \frac{f^{(n+1)}(t_0)}{(n+1)!}(x - a)^{n+1}$.

Die in Satz 16.2.8 hergeleiteten Formeln für das Restglied werden nach berühmten Mathematikern benannt:

16.2.10 Definition: Die Darstellung $R_{n,a}(x) = \frac{f^{(n+1)}(t_1)}{n!}(x - t_1)^n(x - a)$ wird **Cauchy-Form**, die Darstellung $R_{n,a}(x) = \frac{f^{(n+1)}(t_0)}{(n+1)!}(x - a)^{n+1}$ **Lagrange-Form** des Restgliedes genannt.

Joseph-Louis de Lagrange (1736–1813) war ein französischer Mathematiker und Astronom, der in Turin geboren und in Paris Professor an der École polytechnique war. Er wird französisch ausgesprochen, also Lagrangsch.

16.2.11 Beispiel: Wir betrachten die Exponentialfunktion $\exp : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ und untersuchen, wie gut die Funktion auf diesem Intervall durch seine Taylorpolynome $P_{n,0}$ approximiert wird. Dazu werden wir die Restglieder betragsmäßig abschätzen, wobei wir die Lagrange-Form des Restgliedes verwenden werden. Wir haben oben bereits die Taylorpolynome berechnet. Es ist

$$\exp(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\exp(t_0)$$

für ein $t_0 \in (-1, 1)$. Es ist $R_{n,0}(x) = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\exp(t_0)$. Die Exponentialfunktion ist streng monoton wachsend, und es folgt $|\exp(x)| \leq |\exp(1)| = e$ für alle $x \in [-1, 1]$. In 12.5.9 haben wir gesehen, dass $e \leq 3$ ist. Es folgt

$$|R_{n,0}(x)| \leq \frac{3}{(n+1)!}|x|^{n+1}.$$

Nun ist $|x| \leq 1$, und es folgt $|x|^{n+1} \leq 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$ (vergleiche Beispiel 4. in 12.1.11). Es gilt also

$$|R_{n,0}(x)| \leq \frac{3}{(n+1)!}.$$

Für $n = 10$ ist $\frac{3}{(n+1)!} < \frac{1}{2} \cdot 10^{-6}$ (nicht nachrechnen, sondern glauben). Das heißt, durch das Taylorpolynom vom Grad 10 in 0 wird $\exp(x)$ für $x \in [-1, 1]$ bis auf einen Fehler, der betragsmäßig kleiner als $\frac{1}{2} \cdot 10^{-6}$ ist, berechnet.

Jetzt, da wir Formeln für das Restglied haben, können wir uns daran setzen, das Restglied abzuschätzen.

16.2.12 Korollar: Sei I ein Intervall, und sei $f : I \to \mathbb{R}$ so, dass $f^{(1)}, \ldots, f^{(n+1)}$ existieren. Sei $a \in I$. Angenommen, es gibt ein $K \geq 0$, sodass

$$|f^{(n+1)}(t)| \leq K \text{ für alle } t \in I$$

gilt. Dann folgt

$$|R_{n,a}(x)| \leq \frac{K}{(n+1)!}|x - a|^{n+1} \text{ für alle } x \in I.$$

Beweis: Die Behauptung folgt unmittelbar aus dem Satz von Taylor. □

Die Voraussetzung von 16.2.12 ist immer erfüllt, wenn I ein abgeschlossenes Intervall ist, und wenn $f^{(n+1)}$ stetig ist, denn mit dem Satz vom Minimum und Maximum, Korollar 14.2.9, nimmt $f^{(n+1)}$ auf I ihr Maximum und Minimum an. Gilt speziell $I = [a - \delta, a + \delta]$, so ist $|x - a| \leq \delta$ für alle $x \in [a - \delta, a + \delta]$, und es folgt

$$|R_{n,a}(x)| \leq \frac{K}{(n+1)!}\delta^{n+1} \text{ für alle } x \in I,$$

wobei $K = \max\{|f^{(n+1)}(t)| \mid t \in [a - \delta, a + \delta]\}$ ist.

Von besonderem Interesse ist der Satz von Taylor für Funktionen f, die auf einem Intervall unendlich oft differenzierbar sind. Dann können wir $f(x) = P_{n,a}(x) + R_{n,a}(x)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ bilden. Ist $(R_{n,a}(x))$ eine Nullfolge, so wird $R_{n,a}(x)$ für große n sehr klein, und wir können $f(x)$ durch $P_{n,a}(x)$ mit beliebiger Genauigkeit approximieren. Es ist daher von Interesse, Kriterien dafür herzuleiten, wann $(R_{n,a}(x))$ eine Nullfolge ist. Das nehmen wir jetzt in Angriff.

16.2.13 Lemma: Für alle $a \in \mathbb{R}$ gilt $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{a^n}{n!} = 0$.

Beweis: Die Behauptung ist richtig, wenn $a = 0$ ist. Sei also $a \neq 0$. Wir nehmen an, dass $a > 0$ ist. Für alle $n_0 \geq 2a$ ist

$$\frac{a^{n_0+1}}{(n_0+1)!} = \frac{a}{n_0+1} \cdot \frac{a^{n_0}}{n_0!} < \frac{1}{2}\frac{a^{n_0}}{n_0!}.$$

Mit Induktion nach k folgt

$$\frac{a^{n_0+k}}{(n_0+k)!} < \frac{1}{2^k}\frac{a^{n_0}}{n_0!}.$$

Sei $\varepsilon > 0$ vorgegeben. Sei k so groß, dass

$$\frac{a^{n_0}}{n_0!\varepsilon} < 2^k$$

ist. Dann gilt

$$0 < \frac{a^{n_0+k}}{(n_0+k)!} < \frac{1}{2^k}\frac{a^{n_0}}{n_0!} < \varepsilon.$$

Somit ist $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a^n}{n!} = 0$. Ist $a < 0$, so ist $-a > 0$; wegen $\frac{a^n}{n!} = (-1)^n \frac{(-a)^n}{n!}$ folgt auch in diesem Fall $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a^n}{n!} = 0$. □

16.2.14 Proposition: Sei I ein Intervall, und sei $f : I \to \mathbb{R}$ eine Funktion für die $f^{(n)}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ existiert. Sei $a \in I$. Seien α und K Konstanten, sodass $|f^{(n)}(t)| \leq \alpha K^n$ für alle $t \in I$ und alle $n \in \mathbb{N}$ gilt. Dann ist $(R_{n,a}(x))$ eine Nullfolge.

Beweis: Unter den gegebenen Voraussetzungen gilt

$$|f(x) - P_{n,a}(x)| = |R_{n,a}(x)| \leq \alpha \frac{|x-a|^{n+1}K^{n+1}}{(n+1)!} \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Mit Lemma 16.2.13 ist $(\frac{|x-a|^{n+1}K^{n+1}}{(n+1)!})$ eine Nullfolge, und somit ist $(\alpha\frac{|x-a|^{n+1}K^{n+1}}{(n+1)!})$ eine Nullfolge. Es folgt, dass $(R_{n-a}(x))$ eine Nullfolge ist. □

16.2.15 Beispiele: Wir untersuchen hier die Funktionen, deren Taylorpolynome wir in Abschnitt 16.2.1 bereits berechnet haben. Diese Funktionen betrachten wir auf einem abgeschlossenen Intervall I, welches 0 enthält.

1. Die Taylorpolynome von sin in 0 sind gegeben durch

   $$P_{2n-1,0}(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!},$$

   also

   $$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + (-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\cos(t_0).$$

   Das Restglied ist $R_{2n-1,0}(x) = (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\cos(t_0)$. Da cos auf I beschränkt ist, gibt es eine Konstante α mit $|\cos(t_0)| < \alpha$ für alle $t_0 \in I$. Mit 16.2.14 (und $K = 1$) folgt, dass die Folge der Restglieder eine Nullfolge ist.

2. Die Taylorpolynome von cos in 0 sind gegeben durch

$$P_{2n-2,0}(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-2}}{(2n-2)!}.$$

also

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-2}}{(2n-2)!} + (-1)^n\frac{x^{2n}}{2n!}\cos(t_0)$$

mit $R_{2n-2,0}(x) = (-1)^n\frac{x^{2n}}{2n!}\cos(t_0)$. Wie im Fall für sin folgt, dass die Folge der Restglieder eine Nullfolge ist.

3. Es ist

$$\exp(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\exp(t_0)$$

mit Restglied $R_{n,0}(x) = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\exp(t_0)$. Wie in den vorherigen Beispielen ist die Folge der Restglieder eine Nullfolge.

4. Sei $f : I \to \mathbb{R}$ definiert durch $f(x) = \ln(1+x)$ Die Taylorpolynome dieser Funktion sind

$$P_{n,0}(x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots + \frac{(-1)^{n-1}x^n}{n}.$$

Es ist $f^{(n+1)}(t) = (-1)^n\frac{n!}{(1+t)^{n+1}}$. Das Restglied ist somit

$$R_{n,0}(x) = (-1)^n\frac{x^{n+1}}{n+1}\frac{1}{(1+t_0)^{n+1}}.$$

Hier können wir nicht auf Proposition 16.2.14 zurückgreifen. Wenn aber $0 \leq x \leq 1$ gilt, wir also die Funktion auf $[0,1]$ einschränken, so können wir das Restglied abschätzen, und es gilt

$$|R_{n,0}(x)| = \left|(-1)^n\frac{x^{n+1}}{n+1}\frac{1}{(1+t_0)^{n+1}}\right| = \left|\frac{x^{n+1}}{n+1}\right|\cdot\left|\frac{1}{(1+t_0)^{n+1}}\right| < \left|\frac{x^{n+1}}{n+1}\right| \leq \frac{1}{n+1}.$$

Auch in dieser Situation konvergiert die Folge der Restglieder gegen 0.

16.2.16 Aufgabe: Sei $f : [-1,1] \to \mathbb{R}$ definiert durch $x \mapsto e^{e^x}$. Bestimmen Sie das dritte Taylorpolynom von f in 0 und finden Sie eine Abschätzung für das Restglied.

16.2.3 Folgerungen aus dem Satz von Taylor

Dass der Satz von Taylor nicht nur für die näherungsweise Berechnung von $n+1$ Mal differenzierbaren Funktionen von Interesse ist, werden Sie in diesem Abschnitt sehen. Alle hier aufgeführten Ergebnisse sind Folgerungen aus dem Satz von Taylor.

16.2.17 Korollar: Sei I ein Intervall, und sei $f : I \to \mathbb{R}$ eine Funktion, sodass $f^{(1)}, \ldots, f^{(n+1)}$ existieren. Gilt $f^{(n+1)}(x) = 0$ für alle $x \in I$, so ist f eine Polynomfunktion.

Beweis: Unter den gegebenen Voraussetzungen ist $R_{n,a}(x) = 0$ für alle $x \in I$. Es folgt $f(x) = P_{n,a}(x)$, und da das Taylorpolynom eine Polynomfunktion ist, folgt die Behauptung. □

Im letzten Abschnitt haben wir untersucht (vergleiche 16.1.9 und 16.1.10), wie wir entscheiden können, welches die lokalen Minima oder Maxima von Funktionen sind. Kritische Punkte (also mögliche Extrema) sind Punkte x, für die $f'(x) = 0$ gilt. Das folgende Korollar greift diese Frage noch einmal auf.

16.2.18 Korollar: Sei I ein Intervall, und sei $f : I \to \mathbb{R}$ so, dass $f^{(1)}, \ldots, f^{(n+1)}$ existieren. Sei $f^{(n+1)}$ stetig. Sei $x_0 \in I$.

Gilt $f'(x_0) = \cdots = f^{(n)}(x_0) = 0$ und $f^{(n+1)}(x_0) \neq 0$, so ist x_0

1. Stelle eines lokalen Minimums, falls n ungerade und $f^{(n+1)}(x_0) > 0$ ist.
2. Stelle eines lokalen Maximums, falls n ungerade und $f^{(n+1)}(x_0) < 0$ ist.
3. kein lokales Extremum, falls n gerade ist.

Beweis: Sei $f^{(n+1)}(x_0) > 0$. Da $f^{(n+1)}$ stetig ist, gibt es (vergleiche 14.1.8) ein $\delta > 0$, sodass
$$f^{(n+1)}(x) > 0 \text{ für alle } x \in U_\delta(x_0)$$
ist. Mit dem Satz von Taylor und der Voraussetzung gilt
$$f(x) = f(x_0) + R_{n,x_0}(x) \text{ für alle } x \in U_\delta(x_0).$$

Angenommen, n ist ungerade. Dann ist $n+1$ gerade, also gibt es mit dem Satz von Taylor ein $t_0 \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ mit
$$R_{n,x_0}(x) = \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(t_0)(x - x_0)^{n+1}.$$

Es sind $\frac{1}{(n+1)!} > 0$, $f^{(n+1)}(t_0) > 0$ und $(x - x_0)^{n+1} \geq 0$ (denn $n+1$ ist gerade). Somit ist $R_{n,x_0}(x) \geq 0$, und es folgt $f(x) \geq f(x_0)$ für alle $x \in U_\delta(x_0)$. Somit ist x_0 Stelle eines lokalen Minimums.

Angenommen, n ist gerade. Dann ist $n+1$ ungerade, und es ist $(x - x_0)^{n+1} \geq 0$ für alle $x \geq x_0$ und $(x - x_0)^{n+1} < 0$ für alle $x < x_0$. Es folgt

$$R_{n,x_0}(x) = \begin{cases} \geq 0 & \text{für } x \geq x_0 \\ < 0 & \text{für } x < x_0. \end{cases}$$

Somit ist x_0 kein lokales Extremum.

Der Fall $f^{(n+1)}(x_0) < 0$ wird analog bewiesen. □

In Proposition 11.2.72 haben wir gezeigt, dass $\sqrt{2}$ eine irrationale Zahl ist. Mit Hilfe von Wurzeln haben wir weitere irrationale Zahlen konstruiert. Als Folgerung aus dem Satz von Taylor erhalten wir, dass auch die Euler'sche Zahl e irrational ist.

16.2.19 Korollar: Die Euler'sche Zahl e ist irrational.

Beweis: Mit dem Satz von Taylor gilt für jedes n:

$$e = \exp(1) = 1 + \frac{1}{1!} + \cdots + \frac{1}{n!} + R_{n,0}(1),$$

wobei $R_{n,0}(1) = \dfrac{\exp(t_0)}{(n+1)!}$ für ein $t_0 \in (0,1)$ ist. In 12.5.9 haben wir gesehen, dass $e \leq 3$ ist. Da die Exponentialfunktion streng monoton wachsend ist, folgt

$$0 < R_{n,0}(1) < \frac{3}{(n+1)!}.$$

Angenommen, e ist eine rationale Zahl, also $e = \frac{a}{b}$ für natürliche Zahlen a und b. Wähle $n > \max(b, 3)$. Dann gilt

$$\frac{a}{b} = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} \cdots + \frac{1}{n!} + R_{n,0}(1),$$

also

$$\frac{n!a}{b} = n! + n! + \frac{n!}{2!} + \cdots + \frac{n!}{n!} + n!R_{n,0}(1).$$

Alle Terme dieser Gleichung – mit Ausnahme von $n!R_{n,0}(1)$ – sind ganze Zahlen (die linke Seite, weil wir $n > b$ angenommen haben). Dann muss auch $n!R_{n,0}(1)$ eine ganze Zahl sein. Es gilt aber

$$0 < R_{n,0}(1) < \frac{3}{(n+1)!},$$

also

$$0 < n!R_{n,0}(1) < \frac{3}{(n+1)} < \frac{3}{4} < 1,$$

was für eine ganze Zahl nicht möglich ist. $\square$

Lösungen der Aufgaben

Lösungen der Aufgaben in 16.1

Aufgabe 16.1.4

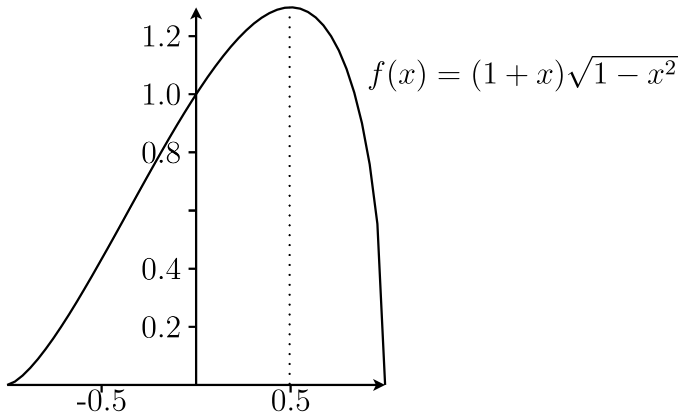
Sei $f : I \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion, deren Ableitung überall 0 ist. Auch die konstante Funktion $\hat{0}$ hat diese Eigenschaft. Mit Korollar 16.1.3 folgt $f = \hat{0} + \hat{c}$ für ein $c \in \mathbb{R}$. Somit ist $f = \hat{c}$, die konstante Funktion $x \mapsto c$.

Aufgabe 16.1.12

Die Nullstellen von f sind -1 und 1, zwischen ihnen ist $f(x) > 0$. Für $|x| < 1$ ist

$$f'(x) = \frac{-2x^2 - x + 1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

Die Nullstellen von f' erhalten wir, indem wir diejenigen Nullstellen von $-2x^2 - x + 1$ bestimmen, die in $(-1, 1)$ liegen. Als einzige Nullstelle finden wir $x_0 = \frac{1}{2}$. Auf $(-1, \frac{1}{2})$ ist $f'(x) > 0$, hier wächst f streng. Auf $(\frac{1}{2}, 1)$ ist $f'(x) < 0$, hier fällt f streng. Weiter ist $f(0) = 1$, und wir erhalten näherungsweise als Graph von f:



Aufgabe 16.1.15

Auf den Grenzwert $\lim\limits_{x\to 1} \frac{3x^2+1}{2x-3}$ können wir die Regel von de l'Hospital nicht anwenden, denn $\lim\limits_{x\to 1}(3x^2+1) = 4 \neq 0$ und $\lim\limits_{x\to 1}(2x-3) = -1 \neq 0$.

Die erste Anwendung der Regel von de l'Hospital war allerdings richtig, und es folgt

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^3+x-2}{x^2-3x+2} = \lim_{x\to 1} \frac{3x^2+1}{2x-3} = \frac{4}{-1} = -4.$$

Aufgabe 16.1.16

1. Es gilt

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(x)}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{2x} = \frac{1}{2} \lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = \frac{1}{2},$$

   denn $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$ mit 15.3.10.

2. Es ist

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 0} \left(\tfrac{1}{\sin(x)} - \tfrac{1}{x}\right) &= \lim_{x\to 0} \frac{x-\sin(x)}{x\sin(x)} \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(x)}{x\cos(x)+\sin(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x(-\sin(x))+2\cos(x)} = 0. \end{aligned}$$

Lösungen der Aufgaben in 16.2

Aufgabe 16.2.2

Wir berechnen zunächst $f^{(1)}, \dots, f^{(4)}$. Es sind

$$\begin{aligned} f^{(1)} &= 5x^4+3x^2+x \\ f^{(2)} &= 20x^3+6x \\ f^{(3)} &= 60x^2+6 \\ f^{(4)} &= 120x. \end{aligned}$$

Die Koeffizienten von $P_{4,0}$ bezeichnen wir mit $a_0, \dots, a_4$ und die von $P_{4,1}$ mit $b_0, \dots, b_4$.

Es sind

$$\begin{aligned} a_0 &= \tfrac{f^{(0)}(0)}{0!} = \tfrac{0}{1} = 0 \\ a_1 &= \tfrac{f^{(1)}(0)}{1!} = \tfrac{1}{1} = 1 \\ a_2 &= \tfrac{f^{(2)}(0)}{2!} = \tfrac{0}{2} = 0 \\ a_3 &= \tfrac{f^{(3)}(0)}{3!} = \tfrac{6}{6} = 1 \\ a_4 &= \tfrac{f^{(4)}(0)}{4!} = \tfrac{0}{24} = 0 \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} b_0 &= \tfrac{f^{(0)}(1)}{0!} = \tfrac{3}{1} = 3 \\ b_1 &= \tfrac{f^{(1)}(1)}{1!} = \tfrac{9}{1} = 9 \\ b_2 &= \tfrac{f^{(2)}(1)}{2!} = \tfrac{26}{2} = 13 \\ b_3 &= \tfrac{f^{(3)}(1)}{3!} = \tfrac{66}{6} = 11 \\ b_4 &= \tfrac{f^{(4)}(1)}{4!} = \tfrac{120}{24} = 5. \end{aligned}$$

Es folgt

$$P_{4,0} = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 = x + x^3$$

und

$$\begin{aligned} P_{4,1} &= b_0 + b_1(x-1) + b_2(x-1)^2 + b_3(x-1)^3 + b_4(x-1)^4 \\ &= 3 + 9(x-1) + 13(x-1)^2 + 11(x-1)^3 + 5(x-1)^4 \\ &= 3 + 9(x-1) + 13(x^2 - 2x + 1) + 11(x^3 - 3x^3 + 3x - 1) \\ &\quad +5(x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x + 1) \\ &= 1 - 4x + 10x^2 - 9x^3 + 5x^4. \end{aligned}$$

Aufgabe 16.2.4

Es gilt:

$$\begin{aligned} \cos(0) &= 1, \\ \cos^{(1)}(0) &= -\sin(0) = 0, \\ \cos^{(2)}(0) &= -\cos(0) = -1, \\ \cos^{(3)}(0) &= \sin(0) = 0, \\ \sin^{(4)}(0) &= \cos(0) = 1. \end{aligned}$$

Von diesem Punkt an wiederholen sich die Ableitungen in einem Viererzyklus. Die Zahlen

$$a_k = \frac{\cos^{(k)}(0)}{k!}$$

sind somit

$$1, 0, -\frac{1}{2!}, 0, \frac{1}{4!}, 0, -\frac{1}{6!}, 0, \frac{1}{8!} \dots$$

Damit ist das Taylorpolynom $P_{2n,0}$ vom Grad $2n$ von cos in 0:

$$P_{2n,0}(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}.$$

Aufgabe 16.2.16

Es sind

$$f(x) = e^{e^x}, f'(x) = e^x e^{e^x}, f''(x) = e^{e^x} e^x(1+e^x), f'''(x) = e^{e^x} e^x(1+e^x)^2 + e^{e^x} e^x e^x,$$

also

$$f(0) = e, f'(0) = e, f''(0) = 2e, f'''(0) = 5e.$$

Damit ist $P_{3,0}(x) = e + ex + ex^2 + \frac{5e}{6}x^3$.

Für die Abschätzung berechnen wir $f^{(4)}(x) = e^{e^x+x}(e^{3x} + 6e^{2x} + 7e^x + 1)$. Mit der Lagrange-Form des Restgliedes gibt es ein $t_0 \in (-1, 1)$ mit

$$R_{3,0}(x) = \frac{f^{(4)}(t_0)}{4!} x^4 \leq \frac{e^{e+1}(e^3 + 6e^2 + 7e + 1)}{4!}.$$

Kapitel 17

Reihen

17.1 Definitionen, Beispiele, erste Eigenschaften

Reihen sind Folgen spezieller Bauart, sodass gegenüber den Ergebnissen von Kapitel 12 nichts grundsätzlich Neues zu erwarten ist. Doch es ist zweckmäßig, die Konvergenzkriterien der speziellen Bauart entsprechend umzuformulieren. Wir beginnen mit der Definition einer Reihe.

17.1.1 Definition: Sei (a_n) eine Folge. Die Folge

$$(s_n) \text{ mit } s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + \cdots + a_n$$

wird **Reihe** genannt und mit $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ bezeichnet. Die a_n heißen **Glieder** der Reihen, und die s_n werden **Partialsummen** der Reihe genannt.

Eine Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ ist also nichts anderes als eine neue Schreibweise für eine Folge, nämlich die Folge der Partialsummen $s_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k$. Der Summationsindex hat keine Bedeutung. Es ist $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ dasselbe wie $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ oder $\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_i$ oder wie auch immer wir den Index nennen möchten. Manchmal werden wir den Summationsindex auch bei 0 oder einem beliebigen $n_0 \in \mathbb{N}_0$ beginnen lassen. Der Folge $(a_n)_{n \geq n_0}$ wird die Reihe $\sum\limits_{n=n_0}^{\infty} a_n$ zugeordnet.

17.1.2 Definition: Wir sagen, dass eine Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ **konvergent** ist, wenn die Folge $(s_n) = (\sum\limits_{k=1}^{n} a_k)$ konvergent ist.

Ist $\lim\limits_{n\to\infty}(s_n) = s$, so schreiben wir $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = s$. Ist $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ nicht konvergent, so sagen wir, dass $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ **divergent** ist.

ACHTUNG: Das Symbol $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ tritt in zweifacher Bedeutung auf: zum einen als Bezeichnung der Folge der Partialsummen (s_n), zum anderen – im Falle der Konvergenz – als Grenzwert der Folge der Partialsummen.

17.1.3 Aufgabe: Beweisen Sie, dass $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1$ ist.

Hinweis: Für alle $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 0\}$ ist $\frac{1}{x(x+1)} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}$.

17.1.4 Aufgabe: Sei $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergent. Beweisen Sie:

1. Für alle $n_0 \geq 1$ konvergiert $\sum\limits_{k=n_0+1}^{\infty} a_k$, und es gilt $\sum\limits_{k=n_0+1}^{\infty} a_k = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n - \sum\limits_{k=1}^{n_0} a_k$.
2. Es ist $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sum\limits_{k=n+1}^{\infty} a_k \right) = 0$.

Wir haben bereits Reihen in Kapitel 12 kennengelernt.

17.1.5 Beispiele:

1. Im ersten Beispiel in 12.5.4 haben wir gesehen, dass die Folge $(s_n) = (\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2})$ konvergent ist. Ohne Beweis habe ich verraten, dass $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = \frac{1}{6}\pi^2$ ist. In unserer neuen Schreibweise bedeutet dies also
$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{1}{6}\pi^2.$$
2. Im zweiten Beispiel in 12.5.4 haben wir gezeigt, dass die Folge $(s_n) = (\sum\limits_{k=0}^{n} \frac{1}{k!})$ konvergent ist, und in Proposition 12.5.9 wurde bewiesen, dass ihr Grenzwert die Euler'sche Zahl e ist. Wir wissen also $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} = e$.
3. Die Reihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n$ ist divergent, denn die Folge ihrer Partialsummen ist

$(1, 0, 1, 0, \dots)$, und diese Folge ist divergent.

4. Im zweiten Beispiel in 12.3.3 haben wir bewiesen, dass die Folge

$$(s_n) = (\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}) = (1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$$

divergent ist.

17.1.6 Definition: Die Reihe $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ wird **harmonische Reihe** genannt.

Wir werden jetzt eine weitere wichtige Reihe definieren:

17.1.7 Definition: Sei $q \in \mathbb{R}$. Die Reihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} q^n$ wird **geometrische Reihe** genannt.

Um zu überprüfen, für welche $q \in \mathbb{R}$ die geometrische Reihe konvergiert, untersuchen wir ihre Partialsummen.

17.1.8 Proposition: Für alle $q \in \mathbb{R}$, $q \notin \{0, 1\}$, und alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}.$$

Beweis: Wir beweisen die Behauptung mit Induktion nach n. Im Induktionsanfang sei $n = 1$. Dann ist $1 + q = \frac{1-q^2}{1-q}$, wegen $1 - q^2 = (1 + q)(1 - q)$ eine wahre Aussage. Im Induktionsschritt nehmen wir an, dass für ein $n \geq 1$ die Aussage $\sum\limits_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$ gilt. Dann folgt

$$\sum_{k=0}^{n+1} q^k = \sum_{k=0}^{n} q^k + q^{n+1} = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} + q^{n+1}$$

$$= \frac{1 - q^{n+1} + q^{n+1}(1 - q)}{1 - q} = \frac{1 - q^{n+1} + q^{n+1} - q^{n+2}}{1 - q}$$

$$= \frac{1 - q^{n+2}}{1 - q} = \frac{1 - q^{(n+1)+1}}{1 - q}.$$

Mit dem Prinzip der vollständigen Induktion folgt die Behauptung. □

17.1.9 Korollar: Die geometrische Reihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} q^n$ divergiert für alle $|q| \geq 1$, und sie konvergiert für alle $|q| < 1$ gegen $\sum\limits_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q}$.

Beweis: Für $q = 1$ ist $\sum\limits_{k=0}^{n} q^k = (n+1)$, und diese Folge divergiert, denn sie ist unbeschränkt. Für $q = -1$ ist $\sum\limits_{n=0}^{\infty} q^n = \sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n$, und diese Folge divergiert, wie wir in 17.1.5.3 gezeigt haben. Sei $|q| > 1$. Angenommen, $\sum\limits_{n=0}^{\infty} q^n$ ist konvergent. Dann existiert der Grenzwert

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} q^k &= \lim_{n\to\infty} \tfrac{1-q^{n+1}}{1-q} = \lim_{n\to\infty} \left(\tfrac{1}{1-q} - \tfrac{1}{1-q} q^{n+1}\right) \\ &= \tfrac{1}{1-q} - \tfrac{1}{1-q} \lim_{n\to\infty} q^{n+1},\end{aligned}$$

ein Widerspruch, denn in Beispiel 12.3.3.4 haben wir gezeigt, dass die Folge (q^n) für $|q| > 1$ divergent ist. Dieser Widerspruch zeigt, dass die Reihe $\sum\limits_{k=0}^{\infty} q^n$ für alle $|q| \geq 1$ divergent ist.

Sei $|q| < 1$. Dann gilt

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} q^k &= \lim_{n\to\infty} \tfrac{1-q^{n+1}}{1-q} = \lim_{n\to\infty} \left(\tfrac{1}{1-q} - \tfrac{1}{1-q} q^{n+1}\right) \\ &= \tfrac{1}{1-q} - \tfrac{1}{1-q} \lim_{n\to\infty} q^{n+1} = \tfrac{1}{1-q},\end{aligned}$$

denn (q^{n+1}) ist eine Nullfolge (vergleiche 12.1.11.4). □

Auch im letzten Abschnitt, im Zusammenhang mit dem Satz von Taylor, haben wir bereits Reihen betrachtet. Dazu sei I ein Intervall, und sei $f : I \to \mathbb{R}$ eine Funktion, für die $f^{(n)}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ existiert. Sei $a \in I$. Für alle $k \in \mathbb{N}_0$ sei $b_k = \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$. Dann ist $(b_n)_{n\geq 0}$ eine reelle Folge, und

$$\sum_{k=0}^{\infty} b_k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$$

ist eine Reihe. Diese Reihe erhält einen speziellen Namen:

17.1.10 Definition: Sei $f : I \to \mathbb{R}$ eine Funktion für die $f^{(n)}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ existiert. Sei $a \in I$. Die Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$$

wird **Taylorreihe von f im Entwicklungspunkt** a genannt.

Wann konvergiert die Taylorreihe von f im Entwicklungspunkt a gegen $f(x)$? Darüber gibt die folgende Proposition Auskunft.

17.1.11 Proposition: Sei I ein Intervall, und sei $f : I \to \mathbb{R}$ eine Funktion für die $f^{(n)}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ existiert. Sei $a \in I$.

Genau dann gilt
$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k = f(x),$$
wenn die Folge $(R_{n,a}(x))$ eine Nullfolge ist.

Beweis: Für alle n ist $f(x) - R_{n,a}(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$. Ist $(R_{n,a}(x))$ eine Nullfolge, so existiert $\lim\limits_{n\to\infty}(f(x)-R_{n,a}(x))$. Also existiert auch $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$ und es gilt
$$f(x) = \lim_{n\to\infty}(f(x) - R_{n,a}(x)) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k.$$

Existiert umgekehrt der Grenzwert $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$, und ist dieser $f(x)$, so existiert $\lim\limits_{n\to\infty}(f(x) - R_{n,a}(x))$, und es gilt
$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k = f(x) - \lim_{n\to\infty} R_{n,a}(x),$$
und es folgt, dass $(R_{n,a}(x))$ eine Nullfolge ist. $\square$

Dieses Ergebnis liefert – zusammen mit unseren Untersuchungen im letzten Kapitel – viele weitere Beispiele konvergenter Reihen.

17.1.12 Beispiele: (Konvergente Taylorreihen)

1. Die Reihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ konvergiert für alle $x \in \mathbb{R}$, und es gilt
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = \exp(x).$$
Diese Reihe ist nämlich die Taylorreihe von exp im Entwicklungspunkt 0, und wir haben in 16.2.15 gezeigt, dass die Folge der Restglieder eine Nullfolge ist.

17.1.13 Definition: Die Reihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ wird **Exponentialreihe** genannt.

2. Die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}$ konvergiert für alle $x \in [0,1]$ und es gilt

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} = \ln(1+x).$$

Diese Reihe ist nämlich die Taylorreihe von f, $x \mapsto \ln(1+x)$, im Entwicklungspunkt 0, und wir haben in 16.2.15 gezeigt, dass die Folge der Restglieder für alle $x \in [0,1]$ eine Nullfolge ist.

17.1.14 Definition: Die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}$ wird **Logarithmusreihe** genannt.

3. Setzen wir $x = 1$ in der Logarithmusreihe, so erhalten wir

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = \ln(2).$$

17.1.15 Definition: Die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ wird **alternierende harmonische Reihe** genannt.

Im Gegensatz zur harmonischen Reihe $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$, die, wie wir in 17.1.5 gesehen haben, divergent ist, ist die alternierende harmonische Reihe konvergent.

Kommen wir zu ersten Eigenschaften konvergenter Reihen.

17.1.16 Proposition: Ist $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergent, so ist die Folge der Partialsummen beschränkt, und (a_n) ist eine Nullfolge.

Beweis: Sei $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergent. Da der Grenzwert von $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ der Grenzwert der Partialsummen (s_n) von $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ ist, folgt mit Proposition 12.2.7, dass die Folge (s_n) beschränkt ist.

Für alle k ist $a_k = s_k - s_{k-1}$. Aus der Konvergenz von (s_n) folgt, dass (s_n) eine Cauchyfolge ist. Also gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein n_0, sodass $|s_n - s_m| < \varepsilon$ für alle $n, m > n_0$ gilt. Wenden wir dies mit $n = k$ und $m = k-1$ an, so folgt $|a_k| < \varepsilon$ für alle $k \geq n_0 + 1$. Somit ist (a_n) eine Nullfolge. $\square$

17.1.17 Aufgabe: Beweisen Sie, dass die Umkehrung von Proposition 17.1.16 nicht gilt. Mit anderen Worten, finden Sie eine Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, deren Folge der Partialsummen beschränkt ist, und die nicht konvergent ist, und eine Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$, für die (b_n) eine Nullfolge ist, und die nicht konvergiert.

Sind alle Glieder einer Reihe nicht negativ, so gilt jedoch:

17.1.18 Proposition: Ist $a_n \geq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$, so ist $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ genau dann konvergent, wenn die Folge der Partialsummen beschränkt ist.

Beweis: Sind alle $a_n \geq 0$, so ist die Folge (s_n) der Partialsummen monoton wachsend. Ist (s_n) zusätzlich beschränkt, so folgt mit dem Monotonieprinzip 12.5.2, dass (s_n), also $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergent ist. Die umgekehrte Richtung ist gerade 17.1.16. □

Von eher theoretischen Interesse ist das folgende Konvergenzkriterium von Cauchy:

17.1.19 Proposition: (Cauchy-Kriterium für Reihen)

Eine Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ ist genau dann konvergent, wenn es für alle $\varepsilon > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ so gibt, dass für alle $n, m \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\text{Ist } n > m \geq n_0, \text{ so ist } |a_{m+1} + \cdots + a_n| < \varepsilon.$$

Beweis: Sei (s_n) die Folge der Partialsummen. Es ist $|s_n - s_m| = |a_{m+1} + \cdots + a_n|$, also ist dies die uns schon bekannte Aussage, dass (s_n) genau dann konvergiert, wenn (s_n) eine Cauchyfolge ist (vergleiche 12.5.16). □

Aus gegebenen konvergenten Reihen können wir durch Summenbildung und skalare Multiplikation neue konvergente Reihen bilden.

17.1.20 Proposition: (Rechenregeln für konvergente Reihen)

Seien $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ und $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ konvergente Reihen. Dann gilt

1. Die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$ ist konvergent, und $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n + \sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$.

2. Ist $c \in \mathbb{R}$, so konvergiert $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c a_n$, und $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c a_n = c \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$.

Beweis:

1. Seien $s_n = \sum\limits_{n=1}^{n}(a_n + b_n)$, $t_n = \sum\limits_{n=1}^{n} a_n$ und $u_n = \sum\limits_{n=1}^{n} b_n$. Dann gilt $s_n = t_n + u_n$. Mit den Rechenregeln für konvergente Folgen 12.4.12 folgt, dass (s_n) konvergiert, und dass $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = \lim\limits_{n\to\infty} t_n + \lim\limits_{n\to\infty} u_n$ gilt. Das ist aber gerade die Behauptung.

2. Der Beweis ist analog.

□

Seien $\sum\limits_{k=0}^{\infty} b_k$ und $\sum\limits_{l=0}^{\infty} c_l$ Reihen. Multiplizieren wir die n-ten Partialsummen, so erhalten wir

$$\begin{aligned}\left(\sum_{k=0}^{n} b_k\right)\left(\sum_{l=0}^{n} c_l\right) &= b_0c_0 + (b_0c_1 + b_1c_0) + (b_0c_2 + b_1c_1 + b_2c_0) + \\ &\quad \cdots + (b_0c_n + b_1c_{n-1} + \cdots + b_{n-1}c_1 + b_nc_0) \\ &= \sum_{k=0}^{n} b_kc_{n-k}.\end{aligned}$$

Für alle $n \in \mathbb{N}$ sei $d_n = \sum\limits_{k=0}^{n} b_kc_{n-k}$, also $\left(\sum\limits_{k=0}^{\infty} b_k\right)\left(\sum\limits_{l=0}^{\infty} c_l\right) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} d_n$.

Anders als bei Folgen muss $\sum\limits_{n=0}^{\infty} d_n$ nicht konvergieren, selbst wenn $\sum\limits_{k=0}^{\infty} b_k$ und $\sum\limits_{l=0}^{\infty} c_l$ beide konvergent sind! Der folgende Satz besagt, dass dieses Phänomen allerdings nicht auftritt, wenn wir eine zusätzliche Eigenschaft der Reihen fordern: Die Reihe der Absolutbeträge der Glieder muss konvergent sein. In einer solchen Situation gilt:

17.1.21 Satz: (Cauchy-Produkt von Reihen)

Seien $\sum\limits_{k=0}^{\infty} b_k$ und $\sum\limits_{l=0}^{\infty} c_l$ konvergente Reihen mit den Grenzwerten B beziehungsweise C. Sei $d_n = \sum\limits_{k=0}^{n} b_kc_{n-k}$.

Wenn zusätzlich $\sum\limits_{k=0}^{\infty} |b_k|$ und $\sum\limits_{l=0}^{\infty} |c_l|$ konvergent sind, so sind $\sum\limits_{n=0}^{\infty} d_n$ und $\sum\limits_{n=0}^{\infty} |d_n|$ konvergent, und es gilt $\sum\limits_{n=0}^{\infty} d_n = B \cdot C$.

Der Beweis dieses Satzes ist sehr technisch, daher werden wir auf ihn verzichten.

17.2 Konvergenzkriterien für Reihen

Das interessanteste Problem für Reihen ist sicherlich, ihre Genzwerte zu berechnen, wenn sie denn existieren. Dies ist aber meist sehr schwierig und in vielen Fällen unmöglich. Betrachten Sie etwa die alternierende harmonische Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = \ln(2).$$

Auf deren Grenzwert wäre sicherlich keiner von uns durch Raten gestoßen. Für $k = 3$ und $k = 5$ ist bis heute nicht bekannt, ob es eine geschlossene Formel für den Grenzwert der konvergenten Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^k}$ gibt.

Wir werden uns daher hier dem bescheideneren Ziel zuwenden, wie man entscheiden kann, ob eine gegebene Reihe konvergiert oder nicht. Diese Fragestellung ist für die Analysis vor allem deshalb wichtig, weil viele wichtige Funktionen mit Hilfe von Reihen definiert werden. Da will man zumindest sicher sein, dass diese Reihen konvergieren.

17.2.1 Das Majoranten-Kriterium

17.2.1 Satz: (Majorantenkriterium)

Sei $|a_n| \le b_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Falls $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ konvergiert, so konvergieren auch $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ und $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$, und es gilt $\left|\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n\right| \le \sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$.

Beweis: Beachten Sie, dass die Annahme bedeutet, dass $b_n \ge 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ ist. Wegen

$$|a_{m+1} + \cdots + a_n| \le |a_{m+1}| + \cdots + |a_n| \le b_{m+1} + \cdots + b_n = |b_{m+1} + \cdots + b_n|$$

folgt die Konvergenz der Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ direkt mit dem Cauchy-Kriterium 17.1.19. Für $s_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k$ und $t_n = \sum\limits_{k=1}^{n} b_k$ folgt analog $|s_n| \le t_n$, also gilt mit dem Vergleichssatz 12.4.1 $\left|\lim\limits_{n\to\infty} s_n\right| \le \lim\limits_{n\to\infty} t_n$. □

17.2.2 Definition: Wenn die Folgen (a_n) und (b_n) die Voraussetzungen des Majorantenkriteriums erfüllen, so sagen wir, dass $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ eine **Majorante** für $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ ist.

17.2.3 Beispiel: Wir wollen die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^k}$ für $k \geq 3$ auf Konvergenz untersuchen. Wir wissen bereits, dass die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ konvergiert (vergleiche 17.1.5). Da $\frac{1}{n^k} \leq \frac{1}{n^2}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt, ist $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ eine Majorante für $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^k}$. Somit ist $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^k}$ konvergent.

Wir können eine kleine Verallgemeinerung von Satz 17.2.1 beweisen. Gilt die Annahme des Majorantenkriteriums nur ab einem gewissen $n_0 > 1$, also $|a_n| \leq b_n$ für alle $n \geq n_0$, so folgt ebenfalls ebenfalls die Konvergenz von $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$. Dann ist nämlich das Endstück $\sum\limits_{n=n_0}^{\infty} b_n$ eine Majorante für $\sum\limits_{n=n_0}^{\infty} a_n$, und es folgt, dass $\sum\limits_{n=n_0}^{\infty} a_n$ konvergent ist. Dann folgt (siehe auch Aufgabe 17.1.4)

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{n_0-1} a_n + \sum_{n=n_0}^{\infty} a_n.$$

Formulieren wir diese Überlegung explizit:

17.2.4 Korollar: (Majorantenkriterium, allgemeiner Fall)

Ist $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ eine konvergente Reihe mit nicht negativen Gliedern, und gilt fast immer $b_n \geq |a_n|$, so sind $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ und $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ konvergent. □

17.2.5 Aufgabe: Sei $|q| < 1$. Beweisen Sie, dass $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2+q^n}{2^n+n^2}$ konvergent ist, und geben Sie eine Abschätzung für den Grenzwert.

17.2.2 Das Quotienten- und das Wurzelkriterium

17.2.6 Satz: (Quotientenkriterium)

Ist mit einer festen, positiven Zahl $q < 1$ fast immer $\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} \leq q$, so folgt dass $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ und $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ konvergent sind. Gilt jedoch fast immer $\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} \geq 1$, so ist $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ divergent.

Beweis: Ist ab einem $n_0 \in \mathbb{N}$ immer $\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} \leq q$ für eine feste, positive Zahl $q < 1$, so ist $a_n \neq 0$ für $n \geq n_0$, und es gilt für alle $n > n_0$

$$\frac{|a_{n_0+1}|}{|a_{n_0}|} \cdot \frac{|a_{n_0+2}|}{|a_{n_0+1}|} \cdots \frac{|a_n|}{|a_{n-1}|} = \frac{|a_n|}{|a_{n_0}|} \leq q^{n-n_0} = \frac{q^n}{q^{n_0}}.$$

Es folgt

$$|a_n| \leq \frac{|a_{n_0}|}{q^{n_0}} q^n.$$

Da $\frac{|a_{n_0}|}{q^{n_0}}$ nicht von n abhängt, also eine Konstante ist, ist $\sum\limits_{n=n_0}^{\infty} \frac{|a_{n_0}|}{q^{n_0}} q^n$ konvergent und eine Majorante für $\sum\limits_{n=n_0}^{\infty} a_n$. Es folgt mit dem Majorantenkriterium, dass $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergent ist.

Ist ab einem gewissen n_0 immer $\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} \geq 1$, so ist $(|a_n|)$ eine monoton wachsende Folge positiver Zahlen, kann also keine Nullfolge sein. Dann ist auch (a_n) keine Nullfolge, das heißt, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ ist divergent (vergleiche 17.1.16). □

17.2.7 Aufgabe: Geben Sie ein Beispiel für eine Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, sodass $\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} < 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$ ist, aber $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ ist divergent. Warum widerspricht dieses Beispiel nicht dem Quotientenkriterium?

17.2.8 Aufgabe: Geben Sie ein Beispiel für eine konvergente Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, für die es kein positives $q < 1$ mit $\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} < q$ gibt.

17.2.9 Satz: (Wurzelkriterium)

Ist mit einer festen, positiven Zahl $q < 1$ fast immer $\sqrt[n]{|a_n|} \leq q$, so folgt, dass $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ und $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ konvergent sind. Gilt jedoch fast immer (oder auch nur unendlich oft) $\sqrt[n]{|a_n|} \geq 1$, so sind $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ und $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ divergent.

Beweis: Gilt $\sqrt[n]{|a_n|} \leq q$ für alle $n \geq n_0$, $n_0 \geq 1$, so ist $|a_n| \leq q^n$ für alle $n \geq n_0$. Dann ist $\sum\limits_{n \geq n_0}^{\infty} q^n$ eine Majorante von $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ und $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$, und es folgt, dass $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ und $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ konvergent sind.

Gilt hingegen unendlich oft $\sqrt[n]{|a_n|} \geq 1$, so folgt, dass unendlich oft $|a_n| \geq 1$ ist. Damit ist $(|a_n|)$ – und dann auch (a_n) – keine Nullfolge. Folglich sind $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ und $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ divergent. □

Auch hier ist WICHTIG: Es reicht nicht zu zeigen, dass $\sqrt[n]{|a_n|} < 1$ für fast alle n gilt.

17.2.10 Beispiel: Sei $a_n = \frac{1}{n}$. Dann gilt

$$\sqrt[n]{|a_n|} = \sqrt[n]{\frac{1}{n}} = \frac{1}{\sqrt[n]{n}} < 1.$$

Wir wissen aber, dass $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ divergent ist.

17.2.11 Aufgabe: Beweisen Sie mit dem Wurzelkriterium, dass die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n}$ konvergent ist.

Besonders handlich sind die folgenden Spezialfälle des Quotienten- und Wurzelkriteriums:

17.2.12 Korollar: Konvergiert die Wurzelfolge $(\sqrt[n]{|a_n|})$ oder die Quotientenfolge $(\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|})$ gegen einen Grenzwert α, so sind die Reihen $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ und $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ konvergent, wenn $\alpha < 1$ und divergent, wenn $\alpha > 1$. Im Fall $\alpha = 1$ lässt sich nichts Allgemeines aussagen.

Beweis: Konvergiert $(\sqrt[n]{|a_n|})$ gegen $\alpha < 1$, so gilt fast immer $\sqrt[n]{|a_n|} < \alpha + \frac{1-\alpha}{2} < 1$. Mit $q = \alpha + \frac{1-\alpha}{2}$ folgt die Behauptung aus dem Wurzelkriterium. Konvergiert $(\sqrt[n]{|a_n|})$ aber gegen $\alpha > 1$, so ist fast immer $\sqrt[n]{|a_n|} \geq 1$, und das Wurzelkriterium sichert, dass $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ und $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ divergent sind. Der Beweis im Quotientenfall verläuft völlig analog. □

Die harmonische Reihe und die alternierende harmonische Reihe liefern ein Beispiel dafür, dass sich im Fall der Konvergenz gegen $\alpha = 1$ wirklich nichts Allgemeines aussagen lässt. Die Wurzelfolge und die Quotientenfolge der Glieder beider Reihen konvergieren gegen 1. Die harmonische Reihe ist divergent, die alternierende harmonische Reihe ist konvergent.

17.2.13 Aufgabe: Untersuchen Sie, für welche $r \in \mathbb{R}$ die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} nr^n$ konvergiert.

17.2.14 Beispiele: Wir betrachten die Reihen $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$ und $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$, auf die wir im letzten Kapitel bei der Untersuchung der Taylor-Polynome von sin und cos gestoßen sind (vergleiche Beispiele 16.2.15). Unter der Annahme, dass es Funktionen sin und cos gibt, die die Eigenschaften (SinKos-1) bis (SinKos-5) aus 15.3.10 erfüllen, haben wir die Taylorreihen im Entwicklungspunkt 0 von cos und sin berechnet, und gesehen, dass diese gerade die hier betrachteten Reihen sind. Mit Hilfe von Restgliedabschätzungen konnten wir zeigen, dass die Folgen der Restglieder gegen 0 konvergieren, und die Reihen somit für alle $x \in \mathbb{R}$ konvergieren. Zu Erinnerung: Das alles geschah unter der Annahme, dass solche Funktionen wirklich existieren, was wir bisher noch nicht bewiesen haben. In diesem Beispiel gehen wir anders vor. Wir stellen uns auf den Standpunkt, die Reihen $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$ und $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$ wären einfach vom Himmel gefallen, und mit Hilfe von Korollar 17.2.12 werden wir zeigen, dass sie für alle $x \in \mathbb{R}$ konvergieren.

1. Sei $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n = \sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$. Sei $x \in \mathbb{R}$. Es sind

$$a_{n+1} = (-1)^{n+1} \frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!} \text{ und } a_n = (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}.$$

Es folgt

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left|\frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!} \cdot \frac{(2n)!}{x^{2n}}\right| = \frac{x^2}{(2n+1)(2n+2)}.$$

Für $n \to \infty$ strebt die rechte Seite gegen 0, also $\lim\limits_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = 0$. Mit Korollar 17.2.12 folgt, dass $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$ für alle $x \in \mathbb{R}$ konvergiert.

17.2.15 Definition: Die Reihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$ wird **Kosinusreihe** genannt.

2. Sei $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n = \sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$. Völlig analog zeigt man, dass

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{x^2}{(2n+2)(2n+3)}$$

ist, also $\lim\limits_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = 0$. Es folgt, dass $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$ für alle $x \in \mathbb{R}$ konvergiert.

17.2.16 Definition: Die Reihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$ wird **Sinusreihe** genannt.

Wir verwenden Korollar 17.2.12 um die Konvergenz einer weiteren wichtigen Reihe zu beweisen. Dazu erinnern wir an die Definition 11.2.60 von Binomialkoeffizienten $\binom{n}{k}$, die wir für natürliche Zahlen n und ganze Zahlen $k \geq 0$ mit $n \geq k$ definiert hatten. Diese Definition werden wir jetzt verallgemeinern.

17.2.17 Definition: Sei $n \in \mathbb{N}$. Für $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{N}_0$ definieren wir $\binom{\alpha}{0} = 1$ und

$$\binom{\alpha}{n} = \frac{\alpha \cdot (\alpha - 1) \cdots (\alpha - n + 1)}{n!}$$

Ist $\alpha \in \mathbb{N}_0$ und $\alpha \geq n$, so wird $\binom{\alpha}{n}$ wie in Definition 11.2.60 definiert, wobei $\binom{0}{0} = 1$ gesetzt wird. Ist $\alpha < n$, so setzen wir $\binom{\alpha}{n} = 0$. Die Zahlen $\binom{\alpha}{n}$ werden **Binomialkoeffizienten** genannt.

Ist α eine natürliche Zahl und $\alpha \geq n$, so sind die Definitionen 17.2.17 und 11.2.60 gleich.

Mit Hilfe der Binomialkoeffizienten definieren wir nun eine Reihe:

17.2.18 Definition: Für alle $\alpha \in \mathbb{R}$ und alle $x \in \mathbb{R}$ wird

$$\sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n$$

Binomialreihe genannt.

Wie steht es mit der Konvergenz der Binomialreihe? Darüber gibt die folgende Proposition Auskunft.

17.2.19 Proposition: (Konvergenzverhalten der Binomialreihe)

Ist $\alpha \notin \mathbb{N}_0$, so konvergiert die Binomialreihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n$ für alle $|x| < 1$, und sie divergiert für alle $|x| > 1$.

Beweis: Sei $\alpha \notin \mathbb{N}_0$. Sei $a_n = \binom{\alpha}{n} x^n$. Für $x = 0$ ist die Binomialreihe konvergent, und ihr Grenzwert ist 0. Für alle $x \neq 0$ gilt

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\binom{\alpha}{n+1} x^{n+1}}{\binom{\alpha}{n} x^n} = \frac{\alpha - n}{n+1} x = \frac{\frac{\alpha}{n} - 1}{1 + \frac{1}{n}} x.$$

Somit gilt $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = -x$, und mit dem Betragssatz 12.4.7 folgt $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = |x|$. Korollar 17.2.12 liefert die Konvergenz der Binomialreihe für $|x| < 1$ und die Divergenz für $|x| > 1$. □

Für alle $p \in \mathbb{N}_0$ und alle $x \in \mathbb{R}$ ist die Binomialreihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \binom{p}{n} x^n$ das Polynom $(1+x)^p$ (vergleichen Sie mit dem binomischen Lehrsatz 11.2.62). Sie konvergiert deshalb für alle $x \in \mathbb{R}$.

Im Fall der Konvergenz der Binomialreihe mit $\alpha \notin \mathbb{N}_0$ können wir für $x \in [0,1)$ sogar den Grenzwert berechnen, was wir jetzt in Angriff nehmen wollen. Wir untersuchen die Taylorreihe (vergleiche 17.1.10) der Funktion $f : [0,\infty) \to \mathbb{R}$, $x \mapsto (1+x)^\alpha$ im Entwicklungspunkt 0. Die n-te Ableitung von f ist

$$f^{(n)}(x) = \alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)(1+x)^{\alpha-n}, \text{ also } \frac{f^{(n)}(0)}{n!} = \binom{\alpha}{n}.$$

Die Taylorreihe von f im Entwicklungspunkt 0 ist somit die Binomialreihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n$. Proposition 17.1.11 gibt Auskunft darüber, wann $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n$ gegen $(1+x)^\alpha$ konvergiert. Das ist genau dann der Fall, wenn die Folge der Restglieder $(R_{n,0}(x))$ eine Nullfolge ist. Berechnen wir also die Restglieder. Für alle $\alpha \notin \mathbb{N}_0$ gilt mit dem Satz von Taylor 16.2.8 für ein $t_0 \in (0,1)$:

$$R_{n,0}(x) = \frac{f^{n+1}(t_0)}{(n+1)!} x^{n+1} = \binom{\alpha}{n+1} x^{n+1} (1+t_0)^{\alpha-(n+1)}$$

Es folgt $1 + t_0 > 1$. Ist $n+1 > \alpha$, so ist der Exponent $\alpha - (n+1) < 0$, und da die allgemeine Potenz für negative Exponenten streng monoton fallend ist (vergleiche Satz 13.2.33), folgt $0 < (1+t_0)^{\alpha-(n+1)} < 1^{\alpha-(n+1)} = 1$. Für alle $n+1 > \alpha$ haben wir also die Abschätzung

$$0 < (1+t_0)^{\alpha-(n+1)} < 1.$$

Wenn also für irgendein $x \geq 0$ die Folge der Zahlen $(\binom{\alpha}{n} x^n)$ gegen 0 konvergiert, dann konvergiert auch die Folge der Restglieder $(R_{n,0}(x))$ gegen 0 (vergleiche Proposition 12.4.9). In Proposition 17.2.19 haben wir aber gezeigt, dass die Reihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n$ für alle $|x| < 1$ konvergiert. In diesem Fall muss dann $(\binom{\alpha}{n} x^n)$ eine Nullfolge sein.

Fassen wir unsere Überlegungen zusammen, so erhalten wir:

17.2.20 Proposition: Für alle $x \in [0,1)$ und $\alpha \notin \mathbb{N}_0$ gilt $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n = (1+x)^\alpha$.□

Dieses Ergebnis können wir noch verbessern, denn es gilt sogar $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n = (1+x)^\alpha$ für alle $|x| < 1$. Das könnten wir durch weitere, mühsame Restgliedabschätzungen beweisen, werden wir aber auf 17.5.14 verschieben, wo wir dieses Ergebnis sehr viel leichter mit anderen Methoden bekommen werden.

17.2.3 Alternierende Reihen

Wir wissen bereits, dass die alternierende harmonische Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ konvergent ist, und dass ihr Grenzwert $\ln(2)$ ist. Bewiesen haben wir das, indem wir die Taylorreihe von f, $x \mapsto \ln(1+x)$, berechnet haben und gezeigt haben, dass sie für $x = 1$ konvergiert. Was wäre gewesen, wenn wir einfach mit dieser Reihe konfrontiert gewesen wären, ohne all diese Details zu wissen, und wenn wir nur wissen wollten, ob sie konvergiert oder nicht? Das Majorantenkriterium hilft nicht weiter, denn $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |\frac{(-1)^n}{n}|$ ist divergent. Auch das Quotienten- und das Wurzelkriterium geben keine Antwort auf diese Frage. Aber es gibt ein Kriterium, das oft für den Fall, dass die Glieder einer Reihe wechselnde Vorzeichen haben, geeignet ist.

17.2.21 Definition: Eine Reihe, deren Glieder wechselnde Vorzeichen haben, wird **alternierende Reihe** genannt.

17.2.22 Satz: (Leibniz-Kriterium)

Ist (b_n) eine monoton fallende Nullfolge, so konvergiert die alternierende Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} b_n$.

Beweis: Da (b_n) eine monoton fallende Nullfolge ist, sind alle Folgenglieder ≥ 0. Für alle $k \in \mathbb{N}$ sei $a_k = (-1)^{k-1} b_k$. Wir zeigen, dass die Folge (s_i) der Partialsummen konvergent ist. Dazu betrachten wir zunächst die Folge (s_{2n}) der Partialsummen mit geraden Indizes. Dazu sei n gerade. Dann gilt für alle $n > 1$:

$$\begin{aligned} s_n &= s_{n-2} + a_{n-1} + a_n \\ &= s_{n-2} + (-1)^{n-2} b_{n-1} + (-1)^{n-1} b_n \\ &= s_{n-2} + (b_{n-1} - b_n), \text{ denn } n \text{ ist gerade} \\ &\geq s_{n-2}, \text{ denn } (b_n) \text{ ist monoton fallend.} \end{aligned}$$

Somit ist (s_{2n}) monoton wachsend, und analog wird gezeigt, dass (s_{2n-1}) monoton fallend ist. Außerdem gilt für alle geraden n die Abschätzung

$$s_n = s_{n-1} + a_n = s_{n-1} + (-1)^{n-1} b_n = s_{n-1} - b_n \leq s_{n-1}.$$

Da $s_{n-1} \leq s_1$ (denn die Folge der Partialsummen mit ungeradem Index ist monoton fallend), folgt, dass (s_{2n}) als monoton wachsende, beschränkte Folge konvergent ist. Sei $s = \lim\limits_{n\to\infty} s_{2n}$.

Für ungerade $n > 1$ gilt analog die Abschätzung

$$s_n = s_{n-1} + a_n = s_{n-1} + (-1)^{n-1} b_n = s_{n-1} + b_n \geq s_{n-1} \geq s_2.$$

Somit ist (s_{2n-1}) monoton fallend und beschränkt, also ebenfalls konvergent. Sei $\tilde{s} = \lim\limits_{n\to\infty} s_{2n-1}$. Dann gilt

$$s - \tilde{s} = \lim_{n\to\infty} (s_{2n} - s_{2n-1}) = \lim_{n\to\infty} b_{2n} = 0, \text{ also } s = \tilde{s}.$$

Dann konvergiert auch die aus (s_{2n}) und (s_{2n-1}) „gemischte“ Folge (s_n) gegen s, denn zu jedem $\varepsilon > 0$ liegen fast alle s_n in $U_\varepsilon(s)$. $\square$

Leibniz (1646–1716) war deutscher Philosoph und Mathematiker.

Beim Leibnizkriterium ist es egal, ob das erste Glied positiv oder negativ ist. Das sollen Sie aber selbst beweisen.

17.2.23 Aufgabe: Beweisen Sie: Ist (b_n) eine monoton fallende Nullfolge, so konvergiert die alternierende Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n b_n$.

Um das Leibniz-Kriterium anzuwenden, ist folgende Bemerkung manchmal hilfreich.

17.2.24 Bemerkung: Sei (a_n) eine Folge mit $a_n > 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt:

(a_n) ist genau dann monoton wachsend und unbeschränkt, wenn $(\frac{1}{a_n})$ eine monoton fallende Nullfolge ist.

Beweis:

- $\Rightarrow$ Sei $\varepsilon > 0$ vorgegeben. Da (a_n) unbeschränkt und monoton wachsend ist, gibt es ein n_0, sodass $a_n > \frac{1}{\varepsilon}$ für alle $n \geq n_0$ gilt. Es folgt $\frac{1}{a_n} < \varepsilon$ für alle $n \geq n_0$, das heißt, $(\frac{1}{a_n})$ ist eine Nullfolge. Da (a_n) monoton wachsend ist, ist $(\frac{1}{a_n})$ monoton fallend.

$\Leftarrow$ Nach Annahme ist $\frac{1}{a_n} > 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Sei $(\frac{1}{a_n})$ monoton fallend. Dann ist (a_n) monoton wachsend. Sei $G \in \mathbb{R}$, $G > 0$. Dann gilt $\frac{1}{G} > 0$, und es gibt ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $0 < \frac{1}{a_n} < \frac{1}{G}$ für alle $n \geq n_0$. Dann gilt $a_n > G$ für alle $n \geq n_0$, das heißt, (a_n) ist unbeschränkt.

□

17.2.25 Aufgabe: Beweisen Sie, dass $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\ln(n)}$ konvergent ist.

17.3 Absolute Konvergenz

17.3.1 Definition: Eine Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ heißt **absolut konvergent**, wenn $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ konvergent ist.

17.3.2 Beispiel: Die alternierende harmonische Reihe ist konvergent, aber nicht absolut konvergent.

17.3.3 Aufgabe: Beweisen Sie, dass folgende Aussagen äquivalent sind.

1. Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ist absolut konvergent.
2. Es gibt ein $K \in \mathbb{R}$ mit $\sum_{k \in M} |a_k| \leq K$ für alle endlichen Teilmengen M von $\mathbb{N}$.

Absolute Konvergenz einer Reihe ist eine stärkere Eigenschaft als Konvergenz, wie das folgende Ergebnis zeigen wird.

17.3.4 Proposition: Ist $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ absolut konvergent, so ist $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergent.

Beweis: Sei $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ absolut konvergent. Dann ist $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ konvergent und eine Majorante für $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Es folgt, dass $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergent ist. □

Bei endlichen Summen ist das Ergebnis nicht von der Reihenfolge der Summanden abhängig, bei Reihen ist das aber nicht der Fall. Wir werden hier sehen, dass der zusätzlichen Annahme der absoluten Konvergenz, auch für Reihen die Reihenfolge ihrer Glieder irrelevant ist. Dass wir in einer Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ die Glieder umordnen, können wir formal wie folgt ausdrücken:

17.3.5 Definition: Ist $\pi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ eine bijektive Abbildung, so heißt $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_{\pi(n)}$ eine **Umordnung** von $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$.

Die Glieder der Folge $(a_{\pi(n)})$ sind dieselben wie die von (a_n), treten nur in einer anderen Reihenfolge auf.

17.3.6 Satz: (Umordnung absolut konvergenter Reihen)

Falls $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ absolut konvergent ist, so konvergiert jede Umordnung $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_{\pi(n)}$, und es gilt $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_{\pi(n)}$.

Beweis: Sei $s_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k$ die n-te Partialsumme von $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, und sei $s = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ der Grenzwert von (s_n). Wähle $\varepsilon > 0$. Dann gibt es ein n_0, sodass die folgenden beiden Eigenschaften gelten:

1. $|s_{n_0} - s| < \frac{\varepsilon}{2}$, und
2. $\sum\limits_{i=n_0+1}^{\infty} |a_i| < \frac{\varepsilon}{2}$.

Letzteres gilt, da $\sum\limits_{i=n_0+1}^{\infty} |a_i| = \sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n| - \sum\limits_{i=1}^{n_0} |a_i|$ ist. Die Summe $\sum\limits_{i=1}^{n_0} |a_i|$ ist die n_0-te Partialsumme von $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$, und die Folge der n-ten Partialsummen konvergiert gegen $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$. Die Differenz kann somit, für $n \to \infty$, beliebig klein, also auch kleiner als $\frac{\varepsilon}{2}$ gemacht werden.

Sei $\pi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ bijektiv, und sei $t_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_{\pi(k)}$ die n-te Partialsumme von $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_{\pi(k)}$.

Wähle n_1 so, dass $\{1, \ldots, n_0\} \subseteq \{\pi(1), \ldots, \pi(n_1)\}$ ist. Das ist möglich, denn π ist bijektiv, und daher existiert ein n_1 mit $\{\pi^{-1}(1), \ldots, \pi^{-1}(n_0)\} \subseteq \{1, \ldots, n_1\}$. So ein n_1 erfüllt $\{1, \ldots, n_0\} \subseteq \{\pi(1), \ldots, \pi(n_1)\}$.

Für $n \geq n_1$ betrachten wir

$$|t_n - s_{n_0}| = \left| \sum_{k=1}^{n} a_{\pi(k)} - \sum_{k=1}^{n_0} a_k \right|.$$

Alle Summanden von $\sum\limits_{k=1}^{n_0} a_k$ heben sich gegen Summanden von $\sum\limits_{k=1}^{n} a_{\pi(k)}$ weg, denn $\{1, \ldots, n_0\} \subseteq \{\pi(1), \ldots, \pi(n_1)\}$. Die Summanden von $|t_n - s_{n_0}|$ sind also gewisse

a_i mit $i > n_0$. Sei $J = \{\pi(1), \dots \pi(n)\} \setminus \{1, \dots, n_0\}$. Dies ist die Menge der Indizes von Summanden a_i in $|t_n - s_{n_0}|$. Dann gilt

$$|t_n - s_{n_0}| = \left|\sum_{i \in J} a_i\right| \leq \sum_{i \in J} |a_i|.$$

Bei der Abschätzung haben wir die Dreiecksungleichung 11.2.23 verwendet. Sei $r = \max J$. Es folgt

$$|t_n - s_{n_0}| \leq \sum_{i \in J} |a_i| \leq \sum_{i=n_0+1}^{r} |a_i| \leq \sum_{i=n_0+1}^{\infty} |a_i| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Damit folgt für alle $n \geq n_1$:

$$|t_n - s| = |t_n - s_{n_0} + s_{n_0} - s| \leq |t_n - s_{n_0}| + |s_{n_0} - s| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Somit konvergiert (t_n) gegen s, das heißt, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_{\pi(n)}$ konvergiert, und $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_{\pi(n)} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = s$. □

Zugegeben, ein ziemlich technischer Beweis. In ihm haben wir die absolute Konvergenz der Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ zwingend benötigt, denn der folgende Satz, den ich nur zitieren und nicht beweisen werde, zeigt, dass man völlig den Boden unter den Füßen verliert, wenn man nur konvergente, aber nicht absolut konvergente Reihen umordnet.

17.3.7 Satz: (Umordnungssatz von Riemann)

Sei $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ eine konvergente aber nicht absolut konvergente Reihe. Dann gilt:

1. Es gibt eine Umordnung $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_{\pi(n)}$ von $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, die divergent ist.

2. Zu jeder reellen Zahl $c \in \mathbb{R}$ gibt es eine Umordnung $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_{\pi(n)}$ von $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ mit $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_{\pi(n)} = c$.

Georg Friedrich Bernhard Riemann (1826 – 1866) war ein deutscher Mathematiker, der trotz seines kurzen Lebens auf vielen Gebieten der Analysis und mathematischen Physik bahnbrechend wirkte.

17.4 Potenzreihen

Die in der Taylor'schen Entwicklung einer Funktion f auftretende Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)(a)}}{n!}(x-a)^n \text{ ist von der Form } \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n$$

für gewisse Zahlen $a_n \in \mathbb{R}$.

17.4.1 Definition: Eine Reihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n$ wird **Potenzreihe mit Mittelpunkt** a und **Koeffizienten** a_n genannt.

Insbesondere hat eine Potenzreihe mit Mittelpunkt 0 die Gestalt $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. Da man eine Potenzreihe mit Mittelpunkt a immer durch Substitution $y = x - a$ in die Form $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n y^n$ bringen kann, beschränkt man sich gewöhnlich auf Potenzreihen mit Mittelpunkt 0. So werden wir hier auch verfahren.

Beispiele für Potenzreihen haben wir schon reichlich gesehen. Die Exponentialreihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$, die Logarithmusreihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}$, die geometrische Reihe $\sum\limits_{k=0}^{\infty} x^n$, die Sinusreihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$, die Kosinusreihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$ und die Binomialreihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n$ liefern Beispiele für Potenzreihen.

Wir wollen eine Potenzreihe als Funktion in x auffassen. Dazu müssen wir zunächst wissen, für welche Werte sie überhaupt konvergiert. Der erste Schritt in diese Richtung ist:

17.4.2 Lemma: Falls eine Potenzreihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ für $x = x_0$ konvergiert, dann konvergiert sie auch für alle x mit $|x| < |x_0|$, und zwar absolut.

Beweis: Für $x_0 = 0$ ist nichts zu zeigen. Sei also $x_0 \neq 0$. Da $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x_0^n$ konvergiert, ist $(a_n x_0^n)$ eine Nullfolge, also beschränkt. Es existiert also ein K mit $|a_n x_0^n| \leq K$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$. Sei $|x| < |x_0|$, also $|\frac{x}{x_0}| < 1$. Wir schreiben nun

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x_0^n \left(\frac{x}{x_0}\right)^n .$$

Jetzt wenden wir das Majorantenkriterium an. Es gilt

$$|a_n x^n| = |a_n x_0^n| \left|\frac{x}{x_0}\right|^n \leq K \left|\frac{x}{x_0}\right|^n ,$$

und $\sum\limits_{n=0}^{\infty} K \left|\frac{x}{x_0}\right|^n = K \sum\limits_{n=0}^{\infty} \left|\frac{x}{x_0}\right|^n$ ist konvergent, da $\left|\frac{x}{x_0}\right| < 1$, und da die geometrische Reihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \left|\frac{x}{x_0}\right|^n$ für $\left|\frac{x}{x_0}\right| < 1$ konvergiert. Somit konvergiert $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ für alle x mit $|x| < |x_0|$ absolut. □

Dieses Lemma hat eine schöne Anwendung. Wir haben in Beispiel 16.2.15 (in Verbindung mit 17.1.12) gezeigt, dass die Logarithmusreihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}$ für alle $x \in [0,1]$ und in 17.2.19, dass die Binomialreihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n$, $\alpha \notin \mathbb{N}_0$, für alle $x \in [0,1)$ konvergiert. Die Beweise waren mühsame Restgliedabschätzungen. Etwas kraftlos hatten wir uns nicht mehr bemüht, das Konvergenzverhalten dieser Reihen im Intervall $(-1,0)$ zu untersuchen. Aus gutem Grund, wir bekommen es nämlich mit Lemma 17.4.2 quasi in den Schoß geworfen. Da beide Reihen für alle $0 \leq x \leq 1$ beziehungsweise $0 \leq x < 1$ konvergieren, sichert Lemma 17.4.2, dass sie auch für alle $-1 < x \leq 0$ konvergieren. Wir halten fest:

17.4.3 Beobachtung: (Konvergenz der Logarithmus- und der Binomialreihe)

1. Die Logarithmusreihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}$ konvergiert für alle $-1 < x \leq 1$.
2. Die Binomialreihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n$, $\alpha \notin \mathbb{N}_0$, konvergiert für alle $-1 < x < 1$.

Eine Potenzreihe konvergiert immer für $x = 0$. Konvergiert sie für ein $x_0 \neq 0$, so wissen wir, dass sie auch auf dem gesamten Intervall $(-|x_0|, |x_0|)$ absolut konvergiert. Diese Beobachtung führt zum Begriff des Konvergenzradius einer Potenzreihe.

17.4.4 Definition: Sei $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ eine Potenzreihe, und sei

$$M = \{x \geq 0 \mid \sum_{n=0}^{\infty} |a_n x^n| \text{ konvergiert}\}.$$

Ist M beschränkt, so wird $R = \sup M$ der **Konvergenzradius** von $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ genannt. Ist M nicht beschränkt, so sagen wir, dass der Konvergenzradius der Reihe ∞ ist.

Dass der Konvergenzradius einer Potenzreihe ∞ ist, bedeutet gerade, dass die Potenzreihe für alle $x \in \mathbb{R}$ absolut konvergiert.

17.4.5 Beispiele: (Konvergenzradien)

1. Die Binomialreihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n$, $\alpha \notin \mathbb{N}_0$ hat den Konvergenzradius 1. Wir haben nämlich in 17.2.19 gezeigt, dass sie für $|x| > 1$ divergiert und für $|x| < 1$ konvergiert. Somit ist $\sup\{x \geq 0 \mid \sum\limits_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n \text{ konvergiert}\} = 1$.

2. Die geometrische Reihe $\sum\limits_{k=0}^{\infty} x^k$ hat ebenfalls den Konvergenzradius 1, wie wir in 17.1.9 gezeigt haben.

3. Die Exponentialreihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ hat den Konvergenzradius ∞, denn sie konvergiert für alle $x \in \mathbb{R}$.

4. Die Sinusreihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$ und die Kosinusreihen $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$ haben beide beide den Konvergenzradius ∞.

17.4.6 Aufgabe: Beweisen Sie, dass die Potenzreihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} n! x^n$ den Konvergenzradius 0 hat.

17.4.7 Proposition: Hat eine Potenzreihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ den Konvergenzradius R, so konvergiert sie für alle x mit $|x| < R$, und sie divergiert für alle x mit $|x| > R$.

Beweis: Sei $|x| < R$. Dann gibt es ein x_0 mit $0 < |x| < x_0 < R$. Nach Definition konvergiert die Potenzreihe für x_0, und mit Lemma 17.4.2 konvergiert sie für x.

Sei nun $|x| > R$. Angenommen, $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ konvergiert. Mit Lemma 17.4.2 folgt, dass $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n y^n$ für alle $|y| < |x|$ absolut konvergiert. Wir wählen ein y mit $R < y < |x|$. Das liefert einen Widerspruch zur Definition von R. $\square$

Dieses Ergebnis legt die folgende Definition nahe.

17.4.8 Definition: Hat eine Potenzreihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ den Konvergenzradius $R \in \mathbb{R}$, so sagen wir, dass $(-R, R)$ das **Konvergenzintervall** der Potenzreihe ist. Für $R = \infty$, wird $\mathbb{R}$ als das Konvergenzintervall der Potenzreihe definiert.

Zur Berechnung des Konvergenzradius einer Potenzreihe benötigen wir noch zwei Begriffe.

17.4.9 Definition: Eine Zahl α heißt **Häufungswert** einer Folge (a_n), wenn in jeder ε-Umgebung $U_\varepsilon(\alpha)$ von α unendlich viele Folgenglieder liegen.

Ist (a_n) konvergent, so ist der Grenzwert $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ der einzige Häufungswert von (a_n). Ist (a_n) eine beschränkte Folge, etwa $a_n \in [a,b] = I$ für alle $n \in \mathbb{N}$, dann sichert das Auswahlprinzip 12.5.13 von Bolzano-Weierstraß, dass (a_n) eine konvergente Teilfolge besitzt. Deren Grenzwert liegt wieder in I (vergleiche Lemma 14.2.7), und er ist ein Häufungwert von (a_n). Sei H die Menge aller Häufungswerte. Dann ist H beschränkt, denn $H \subseteq I$, besitzt also ein Infimum α und ein Supremum α'. A priori müssen das Infimum und das Supremum einer Menge ja nicht zu der Menge gehören. In unserer Situation ist das aber der Fall:

17.4.10 Beobachtung: α und α' sind Häufungswerte von (a_n), liegen also in H.

Beweis: Sei $\alpha = \inf H$. Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es ein $\beta \in H$, mit $\alpha \leq \beta < \alpha + \varepsilon$. Ist $\alpha = \beta$, so sind wir schon fertig, denn dann gilt $\alpha \in H$. Sei also $\alpha < \beta$. Dann gibt es eine δ-Umgebung von β, die zwischen α und $\alpha + \varepsilon$ liegt, also ein $\delta > 0$ mit $\alpha < \beta - \delta < \alpha + \varepsilon$. Da in $U_\delta(\beta)$ unendlich viele a_n liegen, muss dies erst recht für $U_\varepsilon(\alpha)$ zutreffen, und α ist ebenfalls ein Häufungswert von H. Analog wird gezeigt, dass α' ein Häufungswert von (a_n) ist. $\square$

Unsere Überlegungen zeigen, dass eine beschränkte Folge immer einen größten und einen kleinsten Häufungswert beitzt, nämlich $\sup H$ und $\inf H$.

17.4.11 Definition: Sei (a_n) eine beschränkte Folge. Der größte Häufungswert wird **Limes superior** genannt und mit $\limsup a_n$ bezeichnet. Der kleinste Häufungswert wird **Limes inferior** genannt und mit $\liminf a_n$ bezeichnet.

In der Regel ist es schwierig, den Limes superior und Limes inferior einer beschränkten Folge (a_n) zu bestimmen. Ist (a_n) allerdings konvergent, so stimmen alle Begriffe überein und es gilt $\liminf a_n = \lim\limits_{n\to\infty} a_n = \limsup a_n$. Mit dem Begriff des Limes superior folgt aus dem Wurzelkriterium 17.2.9:

17.4.12 Bemerkung: Sei $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ eine Reihe, und sei $(\sqrt[n]{|a_n|})$ beschränkt. Sei $\limsup \sqrt[n]{|a_n|} = a$. Ist $a < 1$, so ist $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ absolut konvergent, und ist $a > 1$, so ist $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ divergent.

Beweis: Sei $\alpha < 1$, und sei $q = \alpha + \frac{1-\alpha}{2}$. Dann ist $q < 1$, und fast alle $\sqrt[n]{|a_n|}$ sind kleiner als q. Mit dem Wurzelkriterium ist $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ absolut konvergent. Sei $\alpha > 1$. Sei $q = \alpha - \frac{\alpha-1}{2}$. Dann ist $q > 1$, und unendlich oft ist $\sqrt[n]{|a_n|} \geq q$. Mit dem

Wurzelkriterium folgt, dass $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ divergent ist. $\square$

Das folgende Kriterium zeigt, dass man den Konvergenzradius unmittelbar aus den Koeffizienten der Potenzreihe bestimmen kann.

17.4.13 Satz: (Konvergenzkriterium von Cauchy-Hadamard)

Sei $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ eine Potenzreihe.

1. Ist $(\sqrt[n]{|a_n|})$ beschränkt, und ist $\limsup \sqrt[n]{|a_n|} = a \neq 0$, so ist $R = \dfrac{1}{\limsup \sqrt[n]{|a_n|}}$.
2. Ist $(\sqrt[n]{|a_n|})$ beschränkt, und ist $\limsup \sqrt[n]{|a_n|} = 0$, so ist $R = \infty$.
3. Ist $(\sqrt[n]{|a_n|})$ unbeschränkt, so ist $R = 0$.

Beweis:

1. Sei $\limsup \sqrt[n]{|a_n|} = a \neq 0$, und sei $|x| < \frac{1}{a}$. Dann gilt $a|x| < 1$. Es ist
$$a|x| = |x| \limsup \sqrt[n]{|a_n|} = \limsup |x| \sqrt[n]{|a_n|} = \limsup \sqrt[n]{|a_n||x|^n} < 1,$$
und mit Bemerkung 17.4.12 folgt, dass $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ konvergent ist. Ist $|x| > \frac{1}{a}$, so folgt $a|x| = \limsup \sqrt[n]{|a_n||x|^n} > 1$. Wieder mit Bemerkung 17.4.12 ist $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ divergent.
2. Sei $\limsup \sqrt[n]{|a_n|} = a = 0$. Dann gilt $a|x| = \limsup \sqrt[n]{|a_n||x|^n} = 0 < 1$ für allle $x \in \mathbb{R}$, und es folgt, dass $R = \infty$ ist.
3. Sei $(\sqrt[n]{|a_n|})$ unbeschränkt und $x > 0$. Dann ist $(\sqrt[n]{|a_n x^n|}) = (|x| \sqrt[n]{|a_n|})$ unbeschränkt, und die Reihe ist mit dem Wurzelkriterium divergent. Somit gilt $R = 0$.

$\square$

Jacques Salomon Hadamard (1865 – 1963) war ein französischer Mathematiker, der zur Abwechslung in einer Mischform von deutsch und französisch ausgesprochen wird. Das H wird gesprochen (die deutsche Komponente) und das d am Ende nicht (der französische Einfluss).

17.4.14 Beispiel: Wir betrachten noch einmal die Logarithmusreihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}$, von der wir mit Beobachtung 17.4.3 wissen, dass sie für alle $-1 < x \leq 1$ konvergiert. Allerdings kennen wir noch nicht ihren Konvergenzradius. Zur Berechnung verwenden wir Satz 17.4.13. Es ist $\limsup \sqrt[n]{\frac{1}{n}} = \limsup \frac{1}{\sqrt[n]{n}} = 1$, denn wir haben in 12.1.11.3 gezeigt, dass $(\sqrt[n]{n})$ gegen 1 konvergiert. Somit gilt $R = 1$.

17.4.15 Aufgabe: Beweisen Sie, dass die Potenzreihen $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ und $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_n \cdot n \cdot x^{n-1}$ denselben Konvergenzradius haben.

17.5 Potenzreihen und Summenfunktionen

Fassen wir noch einmal die Potenzreihen mit ihren Konvergenzradien zusammen, die wir in den letzten Abschnitten genauer untersucht haben.

17.5.1 Tabelle: (Konvergente Reihen)

Bezeichnung	Definition	Konvergenzradius
Binomialreihe	$\sum\limits_{n=0}^{\infty}\binom{\alpha}{n}x^n$	$R = 1$
Exponentialreihe	$\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$	$R = \infty$
Logarithmusreihe	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}$	$R = 1$
Geometrische Reihe	$\sum\limits_{k=0}^{\infty} x^n$	$R = 1$
Sinusreihe	$\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$	$R = \infty$
Kosinusreihe	$\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}$	$R = \infty$

Auf die meisten dieser Reihen waren wir durch Taylorentwicklungen von unendlich oft differenzierbaren Funktionen im Entwicklungspunkt 0 gestoßen. Hier werden wir den umgekehrten Weg gehen. Wir werden Funktionen untersuchen, die durch eine Potenzreihe definiert werden. Genauer:

17.5.2 Definition: Sei $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ eine Potenzreihe mit Konvergenzradius $R > 0$ und Konvergenzintervall K. Sei $f : K \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \text{ für alle } x \in K.$$

Dann wird f die zu $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ gehörende **Summenfunktion** genannt.

Es ist auch üblich, eine Summenfunktion f selbst als Potenzreihe zu bezeichnen.

In diesem Abschnitt werden wir die analytischen Eigenschaften von Summenfunktionen, wie Stetigkeit und Differenzierbarkeit untersuchen. Wir beginnen mit einem Lemma.

17.5.3 Lemma: Sei $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ eine Potenzreihe mit Konvergenzradius $R > 0$. Sei $\alpha \in \mathbb{R}$ mit $0 < \alpha < R$. Dann gibt es Zahlen $q \in (0, 1)$ und $c > 0$, sodass gilt:

$$|a_n x^n| \leq c q^n \text{ für alle } n \text{ und alle } x \text{ mit } |x| \leq \alpha.$$

Beweis: Wir wählen ein β mit $\alpha < \beta < R$ und setzen $q = \frac{\alpha}{\beta}$. Dann ist $q \in (0, 1)$. Da $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n \beta^n$ konvergiert, ist $(a_n \beta^n)$ eine Nullfolge. Konvergente Folgen sind beschränkt, also gibt es $c > 0$ mit $|a_n \beta^n| \leq c$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$. Für alle $|x| \leq \alpha$ gilt dann

$$|a_n x^n| \leq |a_n \alpha^n| = |a_n \beta^n| q^n \leq c q^n.$$

□

Dieses Lemma besagt gerade, dass wir im Bereich $|x| \leq \alpha$ die Potenzreihe durch eine konvergente geometrische Reihe $c \sum\limits_{n=0}^{\infty} q^n = \sum\limits_{n=0}^{\infty} c q^n = c \frac{1}{1-q}$ abschätzen können.

17.5.4 Satz: (Summenfunktionen sind stetig)

Sei $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ eine Potenzreihe mit Konvergenzradius $R > 0$ und Konvergenzintervall K. Dann ist die zugehörige Summenfunktion $f : K \to \mathbb{R}$ stetig.

Beweis: Sei $x_0 \in K$. Um zu zeigen, dass f in x_0 stetig ist, wählen wir ein α mit $|x_0| < \alpha < R$. Dann gibt es mit Lemma 17.5.3 ein $c > 0$ und ein $q \in (0, 1)$ mit $|a_n x^n| \leq c q^n$ für alle $|x| \leq \alpha$ und alle $n \in \mathbb{N}_0$.

Sei (x_n) eine Folge mit Grenzwert x_0. Da $x_0 \in (-\alpha, \alpha)$, liegen fast alle x_n in $(-\alpha, \alpha)$. Wir wählen ein $N \in \mathbb{N}$, sodass $x_n \in (-\alpha, \alpha)$ für alle $n > N$.

Es folgt

$$\begin{aligned}
|f(x_n) - f(x_0)| &= \left|\sum_{k=0}^{\infty} a_k x_n^k - \sum_{k=0}^{\infty} a_k x_0^k\right| \\
&= \left|\sum_{k=0}^{N-1} a_k (x_n^k - x_0^k) + \sum_{k=N}^{\infty} a_k x_n^k - \sum_{k=N}^{\infty} a_k x_0^k\right| \\
&\leq \sum_{k=0}^{N-1} |a_k||x_n^k - x_0^k| + \sum_{k=N}^{\infty} |a_k x_n^k| + \sum_{k=N}^{\infty} |a_k x_0^k| \\
&\leq \sum_{k=0}^{N-1} |a_k||x_n^k - x_0^k| + \sum_{k=N}^{\infty} c q^k + \sum_{k=N}^{\infty} c q^k \\
&= \sum_{k=0}^{N-1} |a_k||x_n^k - x_0^k| + 2c \sum_{k=N}^{\infty} q^k.
\end{aligned}$$

Es ist $\lim\limits_{N \to \infty} 2c \sum\limits_{k=N}^{\infty} q^k = 0$ (vergleiche Aufgabe 17.1.4), denn $2c \sum\limits_{k=0}^{\infty} q^k$ ist konvergent. Für große N kann also $2c \sum\limits_{k=N}^{\infty} q^k$ beliebig klein gemacht werden.

Für festes N ist die Funktion $x \mapsto \sum\limits_{k=0}^{N-1} |a_k||x^k - x_0^k|$ stetig, also

$$\lim_{n \to \infty} \left(\sum_{k=0}^{N-1} |a_k||x_n^k - x_0^k| \right) = \sum_{k=0}^{N-1} |a_k||x_0^k - x_0^k| = 0.$$

Für große n kann daher auch $\sum\limits_{k=0}^{N-1} |a_k||x_n^k - x_0^k|$ beliebig klein gemacht werden. Es folgt $\lim\limits_{n \to \infty} f(x_n) = f(x_0)$, das heißt, f ist stetig in x_0. □

Summenfunktionen sind auch differenzierbar, und die Ableitung erhalten wir durch gliedweise Differentiation. Das ist Inhalt des folgenden Satzes. Der Beweis geht mit einer Index-Orgie einher. Sollten Sie zurzeit kein Interesse an Index-Orgien haben, können Sie ihn problemlos überspringen.

17.5.5 Satz: (Summenfunktionen sind differenzierbar)

Sei $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ eine Potenzreihe mit Konvergenzradius $R > 0$ und Konvergenzintervall K. Dann ist die zugehörige Summenfunktion $f : K \to \mathbb{R}$ differenzierbar.

Dabei gilt für alle $x \in K$:

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot n \cdot x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+1}(n+1)x^n.$$

Die Reihen $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ und $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \cdot n \cdot x^{n-1}$ haben denselben Konvergenzradius.

Beweis: Sei $x \in K$. Wir müssen den Differenzenquotienten $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ untersuchen. Da h gegen 0 strebt, können wir annehmen, dass $x + h \in K$ liegt. Es gilt

$$\begin{aligned}
\frac{f(x+h) - f(x)}{h} &= \frac{f(x+h)}{h} - \frac{f(x)}{h} \\
&= \frac{1}{h}\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x+h)^n - \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right) \\
&= \frac{1}{h}\sum_{n=0}^{\infty} a_n((x+h)^n - x^n) \\
&= \frac{1}{h}\sum_{n=1}^{\infty} a_n((x+h)^n - x^n), \text{ denn } a_0((x+h)^0 - x^0) = 0 \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} a_n \frac{(x+h)^n - x^n}{h}.
\end{aligned}$$

Den Bruch $\frac{(x+h)^n - x^n}{h}$ schauen wir uns jetzt genauer an. Mit dem Binomischen Lehrsatz 11.2.62 gilt

$$(x+h)^n = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} h^j x^{n-j} = x^n + \binom{n}{1} h x^{n-1} + \cdots + \binom{n}{n-1} h^{n-1} x + h^n,$$

also

$$(x+h)^n - x^n = \sum_{j=1}^{n} \binom{n}{j} h^j x^{n-j} = nhx^{n-1} + \binom{n}{2} h^2 x^{n-2} + \ldots \binom{n}{n-1} h^{n-1} x + h^n.$$

Es folgt

$$\begin{aligned}
\tfrac{(x+h)^n-x^n}{h} &= \tfrac{1}{h}\left[nhx^{n-1}+\tbinom{n}{2}h^2n^{n-2}+\ldots\tbinom{n}{n-1}h^{n-1}x+h^n\right]\\
&= nx^{n-1}+\left[\tbinom{n}{2}hx^{n-2}+\ldots\tbinom{n}{n-1}h^{n-2}x+h^{n-1}\right]\\
&= nx^{n-1}+h\left[\tbinom{n}{2}h^0x^{n-2}+\ldots\tbinom{n}{n-1}h^{n-3}x+h^{n-2}\right]\\
&= nx^{n-1}+h\textstyle\sum\limits_{j=2}^{n}\tbinom{n}{j}h^{j-2}x^{n-j}.
\end{aligned}$$

Somit gilt

$$\begin{aligned}
\tfrac{f(x+h)-f(x)}{h} &= \textstyle\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n\left(nx^{n-1}+h\sum\limits_{j=2}^{n}\tbinom{n}{j}h^{j-2}x^{n-j}\right)\\
&= \textstyle\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n\cdot n\cdot x^{n-1}+h\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sum\limits_{j=2}^{n}a_n\tbinom{n}{j}h^{j-2}x^{n-j}\\
&\qquad \text{da } \tbinom{n}{j}=0 \text{ für } n=1, \text{ folgt}\\
&= \textstyle\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n\cdot n\cdot x^{n-1}+h\sum\limits_{n=2}^{\infty}\sum\limits_{j=2}^{n}a_n\tbinom{n}{j}h^{j-2}x^{n-j}\\
&\qquad \text{mit } g(h):=\textstyle\sum\limits_{n=2}^{\infty}\sum\limits_{j=2}^{n}a_n\tbinom{n}{j}h^{j-2}x^{n-j}\\
&= \textstyle\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n\cdot n\cdot x^{n-1}+hg(h).
\end{aligned}$$

Unser Ziel ist es zu zeigen, dass $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n\cdot n\cdot x^{n-1}$ ist. Wir haben das geschafft, wenn wir wissen, dass $\lim\limits_{h\to 0}hg(h)=0$ ist. Dazu reicht es zu zeigen, dass $g(h)$ beschränkt ist. Das zu beweisen werden wir jetzt in Angriff nehmen.

Sei $h_0=\frac{R-|x|}{2}$. Dann gilt $|h_0|+|x|<R$. Für alle $|h|<h_0$ gilt

$$|g(h)|=\left|\sum_{n=2}^{\infty}\sum_{j=2}^{n}a_n\binom{n}{j}h^{j-2}x^{n-j}\right|\leq\sum_{n=2}^{\infty}\sum_{j=2}^{n}|a_n|\binom{n}{j}|h|^{j-2}|x|^{n-j}$$

$$\leq\sum_{n=2}^{\infty}\sum_{j=2}^{n}|a_n|\binom{n}{j}|h_0|^{j-2}|x|^{n-j}=\sum_{n=2}^{\infty}|a_n|\sum_{j=2}^{n}\binom{n}{j}|h_0|^{j-2}|x|^{n-j}$$

$$\leq \frac{1}{h_0^2} \sum_{n=2}^{\infty} |a_n| \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} |h_0|^j |x|^{n-j} = \frac{1}{h_0^2} \sum_{n=2}^{\infty} |a_n|(|x| + |h_0|)^n.$$

Da $|h_0| + |x| < R$, ist $\sum\limits_{n=2}^{\infty} |a_n|(|x| + |h_0|)^n$ und somit auch $\frac{1}{|h_0|^2} \sum\limits_{n=2}^{\infty} |a_n|(|x| + |h_0|)^n$ konvergent, also beschränkt. Es folgt, dass $|g(h)|$ beschränkt ist. Damit gilt

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot n \cdot x^{n-1} + \lim_{h \to 0} hg(h) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot n \cdot x^{n-1} = f'(x).$$

Dass $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ und $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \cdot n \cdot x^{n-1}$ denselben Konvergenzradius haben, wurde in Aufgabe 17.4.15 gezeigt. Ferner ist $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_{n+1}(n+1)x^n$ nur eine andere Schreibweise, bei der der Laufindex bei 0 beginnt, für $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \cdot n \cdot x^{n-1}$, die Reihen sind also gleich. □

Mit Induktion nach k folgt aus Satz 17.5.5, dass die k-te Ableitung einer Summenfunktion für jedes $k \in \mathbb{N}$ existiert. Somit gilt:

17.5.6 Korollar: Summenfunktionen sind unendlich oft differenzierbar, und für $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ gilt

$$f^{(k)}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+k)(n+k-1) \cdots (n+1) a_{n+k} x^n.$$

17.5.7 Aufgabe: Beweisen Sie Korollar 17.5.6.

Setzen wir $x = 0$ in der k-ten Ableitung einer Summenfunktion $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, so erhalten wir

$$f^{(k)}(0) = k(k-1) \cdots 1 a_k, \text{ also } a_k = \frac{f^{(k)}(0)}{k!}.$$

Das kennen wir. Das ist gerade der k-te Koeffizient in der Taylorreihe von f im Entwicklungspunkt 0 (vergleiche 17.1.10). Somit gilt:

17.5.8 Korollar: Jede Potenzreihe ist die Taylorentwicklung ihrer Summenfunktion im Entwicklungspunkt 0. □

Für die nächste Folgerung brauchen wir noch eine Definition.

17.5.9 Definition: Eine Funktion F heißt **Stammfunktion** zu f auf einem Intervall I, wenn $F'(x) = f(x)$ für alle $x \in I$ ist.

Seien F und G Stammfunktionen einer Funktion f auf einem Intervall I. Dann gilt $F'(x) = G'(x) = f(x)$ für alle $x \in I$, und mit Korollar 16.1.3 folgt, dass $F = G + \hat{c}$ für eine Konstante c ist. Halten wir dies fest:

17.5.10 Bemerkung: Zwei Stammfunktionen F und G einer Funktion f auf einem Intervall I unterscheiden sich nur durch eine konstante Funktion. $\square$

Betrachten wir die Summenfunktion $F(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$. Gliedweise Differentiation liefert $F'(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. Ferner haben F und f dasselbe Konvergenzintervall K. Somit ist F eine Stammfunktion zu f. Es gilt also:

17.5.11 Korollar: Die Summenfunktion f einer Potenzreihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ besitzt auf ihrem Konvergenzintervall K eine Stammfunktion. Eine solche ist etwa die Funktion $F : K \to \mathbb{R}, F(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$. $\square$

Als Anwendung dieser Ergebnisse untersuchen wir noch einmal zwei Potenzreihen, für die unsere bisherigen Ergebnisse derzeit noch unbefriedigend sind.

Zunächst greifen wir noch einmal ein Problem auf, das wir in Beispiel 4 in 16.2.15 (vergleiche auch Beispiel 2 in 17.1.12) quasi nur zur Hälfte gelöst haben. In Bemerkung 17.4.3 haben wir hergeleitet, dass die Logarithmusreihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}$ den Konvergenzradius 1 hat. In 16.2.15 hatten wir gezeigt, dass diese Reihe auf dem Intervall $[0, 1]$ gegen $\ln(1 + x)$ konvergiert. Wohin konvergiert diese Reihe auf dem Intervall $(-1, 0)$? Diese Frage lässt sich jetzt ganz elegant beantworten, und zwar ohne mühevolle Restgliedabschätzungen.

Die Ableitung des natürlichen Logarithmus ist $\ln'(1+x) = \frac{1}{1+x}$ (vergleiche 15.3.5). Für alle $|x| < 1$ ist $\frac{1}{1+x}$ der Grenzwert der Potenzreihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n$. Für alle $|x| < 1$ gilt also die Gleichung

$$\ln'(1 + x) = \frac{1}{1 + x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n.$$

Eine Stammfunktion von $\ln'(1+x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n$ auf $(-1,1)$ ist

$$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1}.$$

Auch $\ln(1+x)$ ist eine Stammfunktion von $\ln'(1+x)$. Da sich Stammfunktionen nur durch eine Konstante unterscheiden, gibt es ein $c \in \mathbb{R}$ mit $\ln(1+x) = F(x)+c$. In diese Gleichung setzen wir 0 ein und erhalten $0 = \ln(1) = F(0) + c$, also $c = 0$, denn $F(0) = 0$. Damit gilt:

17.5.12 Proposition: Für alle $|x| < 1$ ist $\ln(1+x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} = \sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}$.

Ein zweites unvollständiges Beispiel betraf die Binomialreihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\binom{\alpha}{n}x^n$. Auch von dieser wissen wir mit Bemerkung 17.4.3, dass sie den Konvergenzradius 1 hat, und in Proposition 17.2.20 wurde gezeigt, dass sie für alle $x \in [0,1)$ gegen $(1+x)^\alpha$ konvergiert. Wieder ist die Frage, wohin diese Reihe für $x \in (-1,0)$ konvergiert. Um das zu beantworten, brauchen wir noch ein kleines Lemma über Binomialkoeffizienten.

17.5.13 Lemma: Für alle $\alpha \in \mathbb{R}$ und alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt $\binom{\alpha-1}{n} + \binom{\alpha-1}{n-1} = \binom{\alpha}{n}$.

Beweis:

$$\begin{aligned}\binom{\alpha-1}{n} + \binom{\alpha-1}{n-1} &= \frac{(\alpha-1)\cdots(\alpha-n)}{n!} + \frac{n(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} = \frac{(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)(\alpha-n)+n(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}\\ &= \frac{(\alpha-n+n)(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} = \binom{\alpha}{n}.\end{aligned}$$

□

17.5.14 Proposition: Für alle $|x| < 1$ ist $(1+x)^\alpha = \sum\limits_{n=0}^{\infty}\binom{\alpha}{n}x^n$.

Beweis: Für alle $|x| < 1$ seien $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty}\binom{\alpha}{n}x^n$ und $g(x) = (1+x)^\alpha$. Wir wissen, dass $f(x) = g(x)$ für alle $x \in [0,1)$ ist. Für alle $|x| < 1$ ist

$$f'(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)\binom{\alpha}{n+1}x^{n+1} = \sum_{n=0}^{\infty}\alpha\binom{\alpha-1}{n}x^n.$$

Es folgt

$$\begin{aligned}(1+x)f'(x) &= (1+x)\left(\alpha+\alpha\binom{\alpha-1}{1}x+\alpha\binom{\alpha-1}{2}x^2+\alpha\binom{\alpha-1}{3}x^3+\cdots\right)\\ &= \alpha+\alpha\left[\binom{\alpha-1}{1}+\binom{\alpha-1}{0}\right]x+\cdots+\alpha\left[\binom{\alpha-1}{n}+\binom{\alpha-1}{n-1}\right]x^n+\cdots\\ &= \alpha+\alpha\binom{\alpha}{1}x+\alpha\binom{\alpha}{2}x^2+\cdots=\alpha\sum_{n=0}^{\infty}\binom{\alpha}{n}x^n.\end{aligned}$$

Es folgt $(1+x)f'(x)=\alpha f(x)$ für alle $|x|<1$. Andererseits gilt $(1+x)g'(x)=\alpha g(x)$ für alle $|x|<1$. Da die Behauptung sicher für $\alpha=0$ richtig ist, können wir $\alpha\neq 0$ annehmen und den Quotienten $\frac{\alpha f(x)}{\alpha g(x)}=\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f'(x)}{g'(x)}$ bilden. Es folgt $f'(x)g(x)-f(x)g'(x)=0$. Mit der Quotientenregel 15.2.1 folgt $\left(\frac{f}{g}\right)'=0$. Somit ist $\frac{f}{g}$ eine konstante Funktion (vergleiche Aufgabe 16.1.4), also $\frac{f(x)}{g(x)}=c$ alle $|x|<1$. Wir setzen 0 ein und erhalten $c=1$. Somit gilt $f(x)=g(x)$ für alle $x\in(-1,1)$. $\square$

Lösungen der Aufgaben

Lösungen der Aufgaben in 17.1

Aufgabe 17.1.3

Mit dem Hinweis ergibt sich für die n-te Partialsumme s_n:

$$s_n = \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right).$$

In dieser Summe heben sich fast alle Summanden weg, und es folgt

$$s_n = 1 - \frac{1}{n+1}.$$

Der Grenzwert der Folge (s_n) ist 1, denn $(\frac{1}{n+1})$ ist eine Nullfolge. Es folgt damit $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1$, die Behauptung.

Aufgabe 17.1.4

1. Sei s_n die n-te Partialsumme von $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$. Für alle $n \geq n_0$ gilt

   $$s_n = \sum_{k=1}^{n_0} a_k + \sum_{k=n_0+1}^{n} a_k, \text{ also } \sum_{k=n_0+1}^{n} a_k = s_n - \sum_{k=1}^{n_0} a_k.$$

   Die rechte Seite konvergiert, also auch die linke, und es folgt

   $$\sum_{k=n_0+1}^{\infty} a_k = \lim_{n\to\infty} \left(\sum_{k=n_0+1}^{n} a_k \right) = \lim_{n\to\infty} s_n - \sum_{k=1}^{n_0} a_k = \sum_{n=1}^{\infty} a_n - \sum_{k=1}^{n_0} a_k.$$

2. Für alle n gilt

   $$\sum_{k=n+1}^{\infty} a_k = \sum_{n=1}^{\infty} a_n - \sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{n=1}^{\infty} a_n - s_n.$$

Die rechte Seite konvergiert, also auch die linke, und es folgt

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=n+1}^{\infty} a_k\right) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n - \lim_{n\to\infty} s_n = 0.$$

Aufgabe 17.1.17

Sei $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n$. Wir haben in Beispiel 17.1.5 gesehen, dass die Folge ihrer Partialsummen $(1, 0, 1, 0, \ldots)$ ist, das heißt, die Folge der Partialsummen ist beschränkt. Allerdings ist die Reihe nicht konvergent.

Sei $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ die harmonische Reihe (vergleiche 17.1.6). Diese ist divergent, aber die Folge ihrer Glieder ist $(\frac{1}{n})$. Dies ist eine Nullfolge.

Lösungen der Aufgaben in 17.2

Aufgabe 17.2.5

Für alle $n \in \mathbb{N}$ ist $q^n < 1$. Es folgt

$$0 \le \frac{2+q^n}{2^n+n^2} \le \frac{3}{2^n}.$$

Da die geometrische Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ konvergent ist (vergleiche 17.1.9), ist $3\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{3}{2^n}$ konvergent, und $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{3}{2^n} = \frac{3}{1-\frac{1}{2}} = 6$. Somit ist $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{3}{2^n}$ eine Majorante für $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2+q^n}{2^n+n^2}$, und es folgt, dass $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2+q^n}{2^n+n^2}$ konvergent ist mit Grenzwert

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2+q^n}{2^n+n^2} \le 6.$$

Aufgabe 17.2.7

Die harmonische Reihe liefert ein Beispiel. Es ist

$$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}} = \frac{n}{n+1} < 1.$$

Wir wissen, dass die harmonische Reihe divergiert. Dies ist kein Gegenbeispiel zum Quotientenkriterium,denn in dem wird gefordert, dass es eine **feste**, positive Zahl

$q < 1$ gibt, für die $\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} \leq q$ für fast alle n gilt. Da $(\frac{n}{n+1})$ gegen 1 konvergiert, kann es so ein q nicht geben.

Aufgabe 17.2.8

Sei $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$. Diese Reihe konvergiert. Es gilt

$$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \frac{\frac{1}{(n+1)^2}}{\frac{1}{n^2}} = \frac{n^2}{n^2 + 2n + 1}.$$

Da

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{n^2 + 2n + 1} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1 + \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2}} = 1,$$

gibt es kein $0 < q < 1$ mit $\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} < q$ für fast alle n.

Aufgabe 17.2.11

Es ist

$$\sqrt[n]{\left|\frac{1}{n^n}\right|} = \frac{1}{n} \text{ und } \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0.$$

Für $q = \frac{1}{2} < 1$ ist $\sqrt[n]{\left|\frac{1}{n^n}\right|} = \frac{1}{n} \leq q$ für fast alle n, und mit dem Wurzelkriterium folgt, dass die Reihe konvergent ist.

Aufgabe 17.2.13

Behauptung: Die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} nr^n$ konvergiert genau dann, wenn $|r| < 1$ ist.

Beweis: Es ist

$$\frac{(n+1)r^{n+1}}{nr^r} = r\frac{n+1}{n},$$

also

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)r^{n+1}}{nr^r} = r \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} = r.$$

Ist $|r| < 1$, so konvergiert die Reihe mit 17.2.12, und ist $|r| > 1$, so divergiert sie mit demselben Ergebnis. Es bleiben also die Fälle $r = \pm 1$ zu untersuchen. In beiden Fällen ist die Folge der Glieder keine Nullfolge, also mit Proposition 17.1.16 nicht konvergent.

Aufgabe 17.2.23

Mit dem Leibnitz-Kriterium konvergiert $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} b_n$. Somit konvergiert auch $-\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} b_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n b_n$.

Aufgabe 17.2.25

Der natürlich Logarithmus ist streng monoton wachsend und unbeschränkt, und es ist $\ln(n) > 0$ für alle $n \geq 2$. Mit Bemerkung 17.2.24 ist $(\frac{1}{\ln(n)})_{n\geq 2}$ eine monoton fallende Nullfolge. Mit dem Leibniz-Kriterium ist $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\ln(n)}$ konvergent.

Lösungen der Aufgabe in 17.3

Aufgabe 17.3.3

Behauptung: Folgende Aussagen sind äquivalent.

1. Die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ ist absolut konvergent.
2. Es gibt ein $K \in \mathbb{R}$ mit $\sum\limits_{k\in M} |a_k| \leq K$ für alle endlichen Teilmengen M von $\mathbb{N}$.

Beweis:

$1 \Rightarrow 2$ Sei $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ absolut konvergent mit $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n| = K$. Sei M eine endliche Teilmenge von $\mathbb{N}$, und sei $n = \max M$. Dann gilt

$$\sum_{k\in M} |a_k| \leq \sum_{k=1}^{n} |a_k|.$$

Es ist $\sum\limits_{k=1}^{n} |a_k| = s_n$ ist die n-te Partialsumme von $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$, und die Folge (s_n) ist monoton steigend. Somit gilt $s_n \leq K$, also $\sum\limits_{k\in M} |a_k| \leq K$.

$2 \Rightarrow 1$ Sei s_n die n-te Partialsumme von $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$. Nach Annahme gilt $s_n \leq K$, denn für alle gegebenen n ist $M = \{1, \ldots, n\}$ eine endliche Teilmenge von $\mathbb{N}$. Somit ist (s_n) beschränkt und monoton wachsend. Aus dem Monotonieprinzip 12.5.2 folgt, dass $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ konvergent ist.

Lösung der Aufgaben in 17.4

Aufgabe 17.4.6

Wir benutzen das Quotientenkriterium. Es ist

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)!x^{n+1}}{n!x^n} = (n+1)x.$$

Für $n > \frac{2}{|x|}$ ist $|(n+1)x| > 2$, also ist die Reihe für alle $x \neq 0$ divergent.

Aufgabe 17.4.15

Da $1 = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = \limsup \sqrt[n]{n}$, folgt

$$\limsup(\sqrt[n]{|a_n|n}) = \limsup(\sqrt[n]{|a_n|}\,\sqrt[n]{n}) = \limsup(\sqrt[n]{|a_n|})\limsup(\sqrt[n]{n}) = \limsup(\sqrt[n]{|a_n|}).$$

Es folgt, dass die Konvergenzradien der Potenzreihen gleich sind.

Lösung der Aufgabe in 17.5

Aufgabe 17.5.7

Behauptung: Für $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ gilt $f^{(k)}(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty}(n+k)\cdots(n+1)a_{n+k}x^n$.

Beweis: Wir beweisen die Behauptung mit Induktion nach k. Der Induktionsanfang, also der Fall $k = 1$ ist gerade Satz 17.5.5.

In der Induktionsannahme nehmen wir an, die Behauptung gelte für ein $k \geq 1$, Es folgt

$$\begin{aligned} f^{(k+1)} &= (f^{(k)}(x))' = \left(\sum_{n=0}^{\infty}(n+k)\cdots(n+1)a_{n+k}x^n\right)' \\ &= \sum_{n=1}^{\infty}(n+k)\cdots(n+1)na_{n+k}x^{n-1} \text{ mit Satz 17.5.5} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}(n+k+1)\cdots(n+1)a_{n+k+1}x^n. \end{aligned}$$

Kapitel 18

Elementare Funktionen

Vorweg: Es gibt keine exakte Definition, wann eine Funktion elementar genannt wird und wann nicht. Die elementaren Funktionen sind diejenigen, die für viele Naturwissenschaften wie Physik oder Chemie, aber auch in den Wirtschafts- und Sozialwissenschaften grundlegend sind, und immer wieder in den unterschiedlichsten Zusammenhängen auftreten. Zu den elementaren Funktionen zählen auf jeden Fall die, die wir in diesem Kapitel vorstellen, und die Sie zum Teil schon kennen.

18.1 Trigonometrische Funktionen

Wir hatten in Abschnitt 15.3.4 angenommen, dass es zwei Funktionen gibt, die die Eigenschaften (SinKos-1) bis (SinKos-5) in 15.3.10 erfüllen. In Korollar 16.1.7 hatten wir gesehen, dass ein Paar von Funktionen, das (SinKos-1) bis (SinKos-5) erfüllt, eindeutig bestimmt ist. Schuldig geblieben sind wir einen Beweis dafür, dass ein solches Paar von Funktionen wirklich gibt. Mit unseren Kenntnissen über Summenfunktionen ist das aber jetzt ganz einfach.

18.1.1 Satz: (Existenz der Winkelfunktionen)

Seien $\sin, \cos : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$\sin(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \text{ und } \cos(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}.$$

Dann erfüllen sin und cos die Eigenschaften (SinKos-1) bis (SinKos-5) in 15.3.10.

Beweis: Wir überprüfen die in 15.3.10 angegebenen Eigenschaften.

(SinKos-1) Das Konvergenzintervall der Funktionen ist $\mathbb{R}$ (vergleiche 17.2.14) und als Summenfunktionen sind sie stetig (vergleiche 17.5.4).

(SinKos-2) Es sind

$$\sin(-x) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{(-x)^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{-x^{2n+1}}{(2n+1)!} = -\sin(x)$$

und

$$\cos(-x) = \cos(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{(-x)^{2n}}{(2n)!} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} = \cos(x).$$

(SinKos-4) Es ist $\frac{\sin(x)}{x} = \sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n+1)!} = 1 + \sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n+1)!}$, also $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$.

(SinKos-5) Es ist $\cos(0) = 1$, wie man einfach durch Einsetzen von 0 in $\cos(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$ zeigt.

(SinKos-3) Als Summenfunktionen sind sin und cos differenzierbar, und gliedweise Differentiation ergibt $\sin'(x) = \cos(x)$ und $\cos'(x) = -\sin(x)$. Sei $y \in \mathbb{R}$ fest, und sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$\begin{aligned} f(x) \quad = \quad & [\sin(x+y) - \sin(x)\cos(y) - \cos(x)\sin(y)]^2 \\ & + [\cos(x+y) - \cos(x)\cos(y) + \sin(x)\sin(y)]^2. \end{aligned}$$

Dann ist f differenzierbar (beachten Sie, dass y als Konstante betrachtet wird), und es gilt (wie Sie in einer länglichen Rechnung, in der aber nichts außer den Rechenregegeln der Differentialrechnung eingeht, verifizieren können), dass $f'(x) = 0$ ist. Es folgt, dass f eine konstante Funktion ist. Mit (SinKos-5) ist $\cos(0) = 1$, und mit (SinKos2) gilt $\sin(0) = \sin(-0) = -\sin(0)$, also $\sin(0) = 0$. Wir setzen 0 in f ein und erhalten

$$f(0) = [\sin(y) - \sin(y)]^2 + [\cos(y) - \cos(y)]^2 = 0.$$

Somit ist f die konstante Funktion $\hat{0}$, also

$$\begin{aligned} f(x) \quad = \quad & [\sin(x+y) - \sin(x)\cos(y) - \cos(x)\sin(y)]^2 \\ & + [\cos(x+y) - \cos(x)\cos(y) + \sin(x)\sin(y)]^2 = 0 \end{aligned}$$

für alle $x \in \mathbb{R}$. Weil die Summe von zwei Quadratzahlen genau dann 0 ist, wenn jeder Summand 0 ist, folgt

$$\sin(x+y) - \sin(x)\cos(y) - \cos(x)\sin(y) = 0$$

und

$$\cos(x+y) - \cos(x)\cos(y) + \sin(x)\sin(y) = 0,$$

also die Additionstheoreme

$$\sin(x+y) = \sin(x)\cos(y) + \cos(x)\sin(y)$$

und

$$\cos(x+y) = \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y).$$

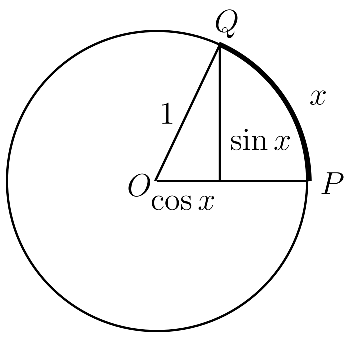
□

18.1.2 Korollar: (Trigonometrischer Pythagoras)

Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$.

Beweis: Wir setzen $y = -x$ in der Formel $\cos(x+y) = \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y)$ und benutzen (SinKos-1) und (SinKos-5). □

„Klar" ist Korollar 18.1.2, wenn man bei Sinus und Kosinus an folgendes Bild denkt:



Mit dieser Skizze ist auch das folgende Korollar „klar".

18.1.3 Korollar: (sin und cos sind beschränkt)

Für alle $x \in \mathbb{R}$ sind $|\sin(x)| \leq 1$ und $|\cos(x)| \leq 1$.

Beweis: Zahlen, die betragsmäßig größer als 1 sind, können den trigonometrischen Pythagoras nicht erfüllen. □

18.1.4 Aufgabe: Beweisen Sie die Formeln $\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x)$ und $\cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x)$.

Wir werden jetzt die Graphen von Sinus und Kosinus untersuchen und beginnen mit folgender Beobachtung.

18.1.5 Proposition: Im Intervall $[0,2]$ hat die Funktion cos genau eine Nulllstelle.

Beweis: Wir wissen, dass $\cos(0) = 1$ ist. Wir zeigen zunächst, dass $\cos(2) < -\frac{1}{3}$ ist. Dazu benutzen wir den Satz von Taylor 16.2.8 beziehungsweise die Restglieduntersuchungen in den Beispielen 16.2.15. Es gilt

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!}\cos(t_0) \leq 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!}|\cos(t_0)| \leq 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!}.$$

Für $x = 2$ ergibt sich

$$\cos(2) \leq 1 - 2 + \frac{16}{24} = -\frac{1}{3}.$$

Da $\cos(0) = 1$ und $\cos(2) < -\frac{1}{3}$, folgt aus dem Nullstellensatz 14.2.2, dass es im Intervall $[0,2]$ mindestens eine Nullstelle von cos gibt.

Als nächstes zeigen wir, dass $\sin(x) > 0$ für alle $x \in (0,2]$ ist. Dazu benutzen wir wieder die Beispiele 16.2.15. Es gilt

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!}\cos(t_0') = x(1 - \frac{x^3}{3!x}\cos(t_0')) = x(1 - \frac{x^2}{3!}\cos(t_0')).$$

Für alle $0 < x \leq 2$ ist $1 - \frac{x^2}{6}\cos(t_0') > 0$, also $\sin(x) = x(1 - \frac{x^2}{6}\cos(t_0')) > 0$.

Da $\cos'(x) = -\sin(x) < 0$ für alle $0 < x \leq 2$, folgt mit Korollar 16.1.8, dass cos auf $[0,2]$ streng monoton fallend ist. Daher hat cos auf $[0,2]$ nicht mehr als eine Nullstelle. □

Jetzt definieren wir die Kreiszahl π.

18.1.6 Definition: Die einzige Nullstelle von cos im Intervall $[0,2]$ wird mit $\frac{\pi}{2}$ bezeichnet, und π wird die **Kreiszahl** genannt.

Man kann zeigen, dass π irrational ist. Näherungsweise ist $\pi = 3{,}14159265\ldots$.

Als Folgerung aus Proposition 18.1.5 und den Additionstheoremen (SinKos-3) 15.3.10 erhalten wir:

18.1.7 Korollar: Es sind

$$\begin{array}{llllll} \sin(0) = 0, & \sin(\frac{\pi}{2}) = 1, & \sin(\pi) = 0, & \sin(\frac{3}{2}\pi) = -1, & \sin(2\pi) = 0 & \text{und} \\ \cos(0) = 1, & \cos(\frac{\pi}{2}) = 0, & \cos(\pi) = -1, & \cos(\frac{3}{2}\pi) = 0, & \cos(2\pi) = 1. & \end{array}$$

Beweis: Wir wissen bereits, dass $\sin(0) = 0$, $\cos(0) = 1$ und $\cos(\frac{\pi}{2}) = 0$ ist. Mit dem trigonometrischen Pythagoras ist

$$\sin^2(\frac{\pi}{2}) = 1 - \cos^2(\frac{\pi}{2}) = 1 - 0 = 1,$$

und da wir im Beweis von Proposition 18.1.5 gezeigt haben, dass $\sin(x) > 0$ für alle $x \in (0, 2]$ ist, folgt $\sin(\frac{\pi}{2}) = 1$.

Die verbleibenden Aussagen beweisen wir mit den Additionstheoremen.

$$\begin{array}{lcl}
\sin(\pi) & = & \sin(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}) = \sin(\frac{\pi}{2})\cos(\frac{\pi}{2}) + \cos(\frac{\pi}{2})\sin(\frac{\pi}{2}) = 0 \\
\cos(\pi) & = & \cos(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}) = \cos^2(\frac{\pi}{2}) - \sin^2(\frac{\pi}{2}) = -1 \\
\sin(\frac{3}{2}\pi) & = & \sin(\frac{\pi}{2} + \pi) = \sin(\frac{\pi}{2})\cos(\pi) + \cos(\frac{\pi}{2})\sin(\pi) = \cos(\pi) = -1 \\
\cos(\frac{3}{2}\pi) & = & \cos(\frac{\pi}{2} + \pi) = \cos(\frac{\pi}{2})\cos(\pi) - \sin(\frac{\pi}{2})\sin(\pi) = 0 \\
\sin(2\pi) & = & \sin(\pi + \pi)\sin(\pi)\cos(\pi) + \cos(\pi)\sin(\pi) = 0 \\
\cos(2\pi) & = & \cos(\pi + \pi) = \cos^2(\pi) - \sin^2(\pi) = 1.
\end{array}$$

□

Dies Korollar erlaubt uns jetzt, die restlichen Eigenschaften der Winkelfunktionen sin und cos herzuleiten, insbesondere ihre 2π-Periodizität und ihre Nullstellen.

18.1.8 Korollar: Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt

$$\begin{array}{lclclcl}
\sin(x + 2\pi) & = & \sin(x) & \text{und} & \cos(x + 2\pi) & = & \cos(x), \\
\sin(x + \pi) & = & -\sin(x) & \text{und} & \cos(x + \pi) & = & -\cos(x), \\
\sin(x + \frac{\pi}{2}) & = & \cos(x) & \text{und} & \cos(x + \frac{\pi}{2}) & = & -\sin(x).
\end{array}$$

Die Nullstellen von sin und cos sind

$$\{x \in \mathbb{R} \mid \sin(x) = 0\} = \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\} \text{ und } \{x \in \mathbb{R} \mid \cos(x) = 0\} = \{(k + \frac{1}{2})\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}.$$

Beweis: Mit den Additionstheoremen gilt

$$\begin{aligned}
\sin(x + 2\pi) &= \sin(x)\underbrace{\cos(2\pi)}_{=1} + \cos(x)\underbrace{\sin(2\pi)}_{=0} = \sin(x), \\
\cos(x + 2\pi) &= \cos(x)\underbrace{\cos(2\pi)}_{=1} - \sin(x)\underbrace{\sin(2\pi)}_{=0} = \cos(x).
\end{aligned}$$

Analog ergibt sich

$$\begin{aligned}
\sin(x + \pi) &= \sin(x)\cos(\pi) + \cos(x)\sin(\pi) = -\sin(x), \\
\cos(x + \pi) &= \cos(x)\cos(\pi) - \sin(x)\sin(\pi) = -\cos(x),
\end{aligned}$$

sowie

$$\begin{aligned}\sin(x+\tfrac{\pi}{2}) &= \sin(x)\cos(\tfrac{\pi}{2})+\cos(x)\sin(\tfrac{\pi}{2}) = \cos(x),\\ \cos(x+\tfrac{\pi}{2}) &= \cos(x)\cos(\tfrac{\pi}{2})-\sin(x)\sin(\tfrac{\pi}{2}) = -\sin(x).\end{aligned}$$

Die Nullstellen von sin und cos ergeben sich wie folgt. Nach Definition von $\frac{\pi}{2}$ und wegen $\cos(x) > 0$ auf $[0, \frac{\pi}{2})$ (Beweis von Proposition 18.1.5) sowie $\cos(-x) = \cos(x)$ ist $\cos(x) > 0$ auf $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. Somit sind $\pm\frac{\pi}{2}$ die einzigen Nullstelllen von cos im Intervall $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. Aus der Beziehung $\cos(x+\pi) = -\cos(x)$ folgt die Nullstellenverteilung der Kosinus-Funktion. Die entsprechende Aussage über die Sinus-Funktion folgt aus der Beziehung $\cos(x) = -\sin(x - \frac{\pi}{2})$. □

18.1.9 Definition: Eine Funktion f heißt **periodisch mit Periode** $p \neq 0$ (kurz p-**periodisch**), wenn $f(x+p) = f(x)$ für alle x in ihrem Definitionsbereich ist.

Korollar 18.1.8 besagt gerade, dass die Sinus- und Kosinus-Funktion 2π-periodische Funktionen sind. Aus 18.1.8 folgt auch, dass sin nur auf $\{\frac{\pi}{2} + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$ und cos nur auf $\{2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$ den Wert 1 annehmen. Damit ist 2π die kleinste positive Periode von sin und cos.

18.1.10 Aufgabe: Beweisen Sie, dass sin auf dem Intervall $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ streng monoton wächst und auf $[\frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi]$ streng monoton fällt, und dass cos auf dem Intervall $[0, \pi]$ streng monoton fällt und auf dem Intervall $[\pi, 2\pi]$ streng monoton wächst.

Fassen wir unsere Kenntnisse über Sinus und Kosinus noch einmal zusammen.

18.1.11 Satz: (Sinus und Kosinus)

Definitionen: $\sin(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$ und $\cos(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$ mit $x \in \mathbb{R}$.

Ableitungen: $\sin' = \cos$ und $\cos' = -\sin$.

Spezielle Werte:

$$\begin{array}{lllll} \sin(\frac{-\pi}{2}) = -1 & \sin(0) = 0 & \sin(\frac{\pi}{2}) = 1 & \sin(\pi) = 0 & \sin(\frac{3}{2}\pi) = -1 \\ \cos(0) = 1 & \cos(\frac{\pi}{2}) = 0 & \cos(\pi) = -1 & \cos(\frac{3}{2}\pi) = 0 & \cos(2\pi) = 1. \end{array}$$

Wertebereich: $\mathrm{Bild}(\sin) = \mathrm{Bild}(\cos) = [-1, 1]$

Monotonie:

$\sin|_{[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]}$ streng monoton wachsend, $\sin|_{[\frac{\pi}{2},\frac{3}{2}\pi]}$ streng monoton fallend
$\cos|_{[0,\pi]}$ streng monoton fallend, $\cos|_{[\pi,2\pi]}$ streng monoton wachsend

Wichtige Gleichungen:

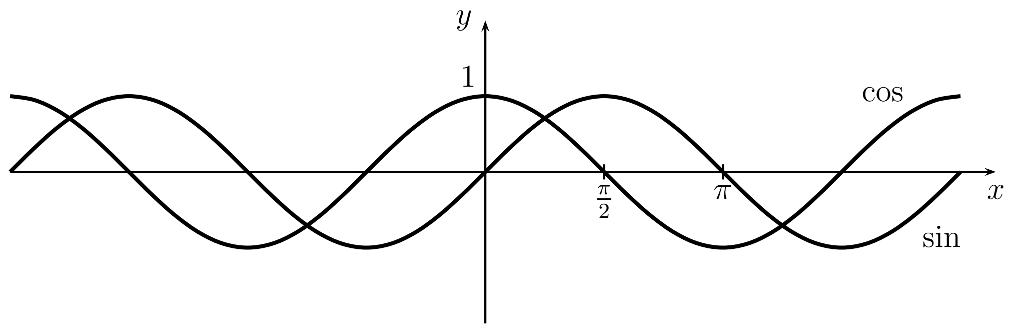
$$\begin{aligned}
&\sin(-x) = -\sin(x) \text{ und } \cos(-x) = \cos(x)\\
&\sin(x+y) = \sin(x)\cos(y) + \cos(x)\sin(y)\\
&\cos(x+y) = \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y)\\
&\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1
\end{aligned}$$

Nullstellen:

$$\begin{aligned}
&\{x \in \mathbb{R} \mid \sin(x) = 0\} = \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}\\
&\{x \in \mathbb{R} \mid \cos(x) = 0\} = \{(k + \tfrac{1}{2})\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}
\end{aligned}$$

Periodizität: sin und cos haben die kleinste positive Periode 2π.

Unsere Untersuchungen der Sinus- und Kosinus-Funktion ergeben folgende Kurvenverläufe:



Mit Hilfe der Sinus- und Kosinus-Funktion werden werden die so genannten Tangens- und Kotangens-Funktion erklärt.

18.1.12 Definition: Die Tangens- und Kotangens-Funktionen tan und cot werden definiert durch

$$\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)} \text{ und } \cot(x) = \frac{\cos(x)}{\sin(x)} = \frac{1}{\tan(x)}.$$

Die Definitionsbereiche sind für alle $x \in \mathbb{R}$ definiert, in denen der Kosinus beziehungsweise der Sinus nicht 0 sind, also

$$\text{Definitionsbereich des Tangens: } \mathbb{R} \setminus \{(k + \frac{1}{2})\pi \mid k \in \mathbb{Z}\} \text{ und}$$

$$\text{Definitionsbereich des Kotangens: } \mathbb{R} \setminus \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}.$$

Für diese Funktionen gilt:

18.1.13 Satz: (Tangens und Kotangens)

Definition:

$$\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)} \text{ für alle } x \in \mathbb{R} \setminus \{(k+\tfrac{1}{2})\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$$

$$\cot(x) = \frac{\cos(x)}{\sin(x)} = \frac{1}{\tan(x)} \text{ für alle } x \in \mathbb{R} \setminus \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$$

Ableitungen: $\tan'(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}$ und $\cot'(x) = -\frac{1}{\sin^2(x)}$.

Wertebereich: $\mathrm{Bild}(\tan) = \mathrm{Bild}(\cot) = \mathbb{R}$.

Wichtige Gleichungen: $\tan'(x) = 1 + \tan^2(x)$ und $\cot'(x) = -(1 + \cot^2(x))$.

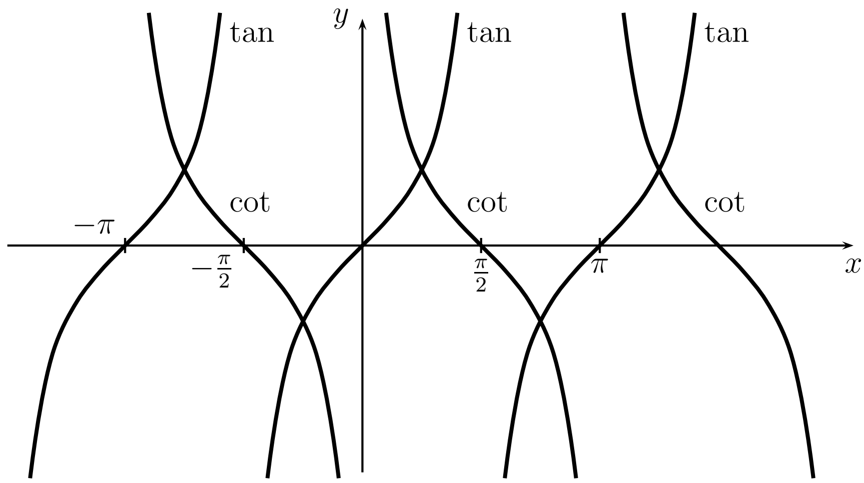
Monotonie:

$$\begin{array}{l} \tan|_{((k-\frac{1}{2})\pi,(k+\frac{1}{2})\pi)} \text{ streng monoton wachsend, für alle } k \in \mathbb{Z} \\ \cot|_{(k\pi,(k+1)\pi)} \text{ streng monoton fallend, für alle} k \in \mathbb{Z} \end{array}$$

Periodizität: tan und cot haben die kleinste positive Periode π.

18.1.14 Aufgabe: Beweisen Sie Satz 18.1.13.

Es ergeben sich folgende Kurvenverläufe:



18.2 Zyklometrische Funktionen

Die Einschränkung der Funktion sin auf das Intervall $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ ist stetig und streng monoton wachsend von -1 bis 1. Somit existiert die Umkehrfunktion

$$(\sin|_{[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]})^{-1} : [-1, 1] \to [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}].$$

Diese Funktion ist ebenfalls streng monoton wachsend (vergleiche Proposition 13.1.11).

Die Einschränkung der Funktion cos auf $[0, \pi]$ ist stetig und fällt streng monoton von 1 bis -1. Also existiert die Umkehrfunktion $(\cos|_{[0,\pi]})^{-1} : [-1, 1] \to [0, \pi]$, und diese ist ebenfalls streng monoton fallend.

Die Einschränkung von tan auf $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ ist stetig und streng monoton wachsend. Ihr Wertebereich ist $\mathbb{R}$. Somit existiert $(\tan|_{(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})})^{-1} : \mathbb{R} \to (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ und ist streng monoton wachsend.

Die Einschränkung von cot auf das Intervall $(0, \pi)$ ist stetig und streng monoton fallend. Ihr Wertebereich ist $\mathbb{R}$. Wieder existiert die Umkehrfunktion $(\cot|_{(0,\pi)})^{-1} : \mathbb{R} \to (0, \pi)$, und sie ist streng monoton fallend.

Diese Umkehrfunktionen erhalten eine spezielle Bezeichnung.

18.2.1 Definition: Die folgenden Funktionen werden **zyklometrische Funktionen** genannt:

Arkussinus $\arcsin : [-1, 1] \to [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, $\arcsin(x) = (\sin|_{[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]})^{-1}(x)$

Arcuskosinus $\arccos : [-1, 1] \to [0, \pi]$, $\arccos(x) = (\cos|_{[0,\pi]})^{-1}(x)$.

Arcustangens $\arctan : \mathbb{R} \to (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, $\arctan(x) = (\tan|_{(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})})^{-1}(x)$

Arcuskotangens $\mathrm{arccot} : \mathbb{R} \to (0, \pi)$, $\mathrm{arccot}(x) = (\cot|_{(0,\pi)})^{-1}(x)$

Zwischen diesen Funktionen gelten folgende Beziehungen:

18.2.2 Bemerkung: Es gilt $\arccos(x) = \frac{\pi}{2} - \arcsin(x)$ für alle $x \in [-1, 1]$ und $\mathrm{arccot}(x) = \frac{\pi}{2} - \arctan(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

Beweis:

1. Sei $x \in [-1, 1]$, und sei $y = \frac{\pi}{2} - \arcsin(x)$. Wegen $\arcsin(x) \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ folgt $y \in [0, \pi]$. Um $y = \arccos(x)$ zu zeigen, reicht es zu beweisen, dass gilt:

$$\cos(y) = \cos(\arccos(x)) = x.$$

Mit den Additionstheoremen gilt

$$\begin{aligned}\cos(y) &= \cos(\tfrac{\pi}{2} - \arcsin(x)) \\ &= \cos(\tfrac{\pi}{2})\cos(-\arcsin(x)) - \sin(\tfrac{\pi}{2})\sin(-\arcsin(x)) \\ &= 0 - \sin(-\arcsin(x)) = \sin(\arcsin(x)) = x.\end{aligned}$$

2. Sei $x \in \mathbb{R}$, und sei $y = \frac{\pi}{2} - \arctan(x)$. Wegen $\arctan(x) \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ folgt $\frac{\pi}{2} - \arctan(x) \in (0, \pi)$. Um $y = \operatorname{arccot}(x)$ zu zeigen, reicht es zu beweisen, dass gilt:

$$\cot(y) = \cot(\operatorname{arccot}(x)) = x.$$

Wieder mit den Additionstheoremen gilt

$$\begin{aligned}\cot(y) &= \cot(\tfrac{\pi}{2} - \arctan(x)) = \frac{\cos(\frac{\pi}{2} - \arctan(x))}{\sin(\frac{\pi}{2} - \arctan(x))} \\ &= \frac{\cos(\frac{\pi}{2})\cos(-\arctan(x)) - \sin(\frac{\pi}{2}\sin(-\arctan(x))}{\sin(\frac{\pi}{2})\cos(-\arctan(x)) + \cos(\frac{\pi}{2})\sin(-\arctan(x))} \\ &= \frac{-\sin(-\arctan(x))}{\cos(-\arctan(x))} = \frac{\sin(\arctan(x))}{\cos(\arctan(x))} \\ &= \tan(\arctan(x)) = x.\end{aligned}$$

□

Mit Bemerkung 18.2.2 genügt es, die Funktionen arcsin und arctan genauer zu untersuchen.

18.2.3 Satz: (Arcussinus und Arcustangens)

Ableitungen:

$\arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ für alle $x \in (-1, 1)$. Nicht differenzierbar für $x = \pm 1$.
$\arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2}$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

Spezielle Werte:

$$\begin{aligned}&\arcsin(0) = 0, \quad \arcsin(\pm 1) = \pm\tfrac{\pi}{2}, \\ &\arctan(0) = 0, \quad \arctan(\pm 1) = \pm\tfrac{\pi}{4}.\end{aligned}$$

Beweis:

Ableitungen: Sei $x \in (-1, 1)$. Mit der Regel für die Differenzierbarkeit der Umkehrfunktion 15.2.4 folgt

$$\arcsin'(x) = \frac{1}{\sin'(\arcsin(x))} = \frac{1}{\cos(\arcsin(x))}.$$

Mit dem trigonometrischen Pythagoras gilt

$$\begin{aligned} & 1 = \sin^2(\arcsin(x)) + \cos^2(\arcsin(x)) \\ \Rightarrow \quad & \cos^2(\arcsin(x)) = 1 - \sin^2(\arcsin(x)) = 1 - x^2 \\ \Rightarrow \quad & \cos(\arcsin(x)) = \sqrt{1-x^2}, \end{aligned}$$

denn $\cos(y) > 0$ für alle $y \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, und $\arcsin(x) \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. Einsetzen liefert $\arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$. Für $x = \pm 1$ ist arcsin wegen $\sin'(\pm\frac{\pi}{2}) = 0$ nicht differenzierbar.

Wir berechnen jetzt die Ableitung von arctan. Wegen $\tan'(y) = 1+\tan^2(y) \neq 0$ (vergleiche Satz 18.1.13) ist arctan für alle $y \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ differenzierbar, und es gilt für alle $x \in \mathbb{R}$:

$$\arctan'(x) = \frac{1}{\tan'(\arctan(x))} = \frac{1}{1+\tan^2(\arctan(x))} = \frac{1}{1+x^2}.$$

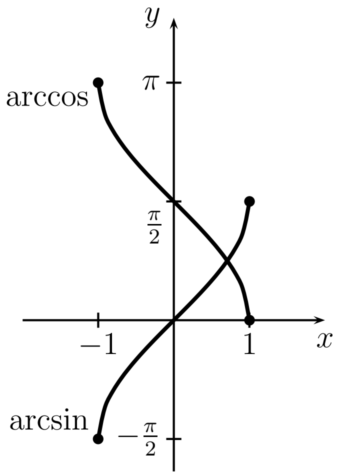
Spezielle Werte: Wir wissen bereits, dass $\sin(0) = 0$, $\sin(\frac{\pi}{2}) = 1$, $\sin(-\frac{\pi}{2}) = -1$ und $\tan(0) = \frac{\sin(0)}{\cos(0)}$ gelten. Weiter gilt

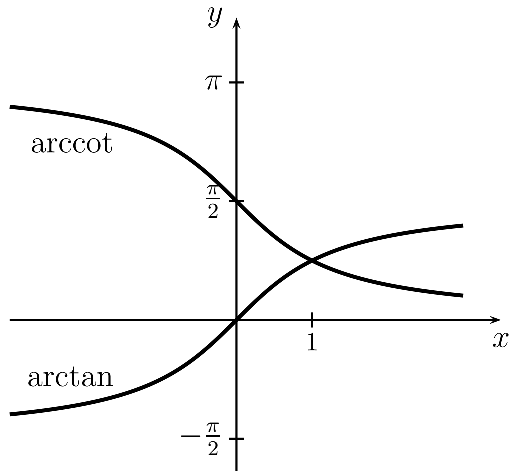
$$\begin{aligned} \tan(\pm\tfrac{\pi}{4}) &= \frac{\sin(\pm\frac{\pi}{4})}{\cos(\pm\frac{\pi}{4})} = \frac{\sin(\pm(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4})}{\cos(\pm(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4})} \\ &= \frac{\sin(\pm\frac{\pi}{2})\cos(\pm\frac{\pi}{4}) - \cos(\pm\frac{\pi}{2})\sin(\pm\frac{\pi}{4})}{\cos(\pm\frac{\pi}{4})} \\ &= \sin(\pm\tfrac{\pi}{2}) = \pm 1. \end{aligned}$$

Es folgt $\arcsin(0) = \arcsin(\sin(0)) = 0$, $\arcsin(1) = \arcsin(\sin(\frac{\pi}{2})) = \frac{\pi}{2}$, $\arcsin(-1) = \arcsin(\sin(\frac{-\pi}{2})) = -\frac{\pi}{2}$ $\arctan(0) = \arctan(\tan(0) = 0$ und $\arctan(\pm 1) = \arctan(\tan(\pm\frac{\pi}{4})) = \pm\frac{\pi}{4}$.

$\square$

Die folgenden Skizzen zeigen die Kurvenverläufe der zyklometrischen Funktionen.





18.3 Exponentialfunktion, Logarithmus und allgemeine Potenz

Die Exponentialfunktion, den Logarithmus und die allgemeine Potenz haben wir in den Abschnitten 13.2.4,13.2.5 und 13.2.3 schon im Detail besprochen, und im letzten Kapitel haben wir auch ihre Reihendarstellungen diskutiert. Der Vollständigkeit halber fassen wir hier noch einmal die wesentlichen Ergebnisse zusammen.

18.3.1 Satz: (Exponentialfunktion)

Definition: $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist definiert durch $\exp(x) = e^x$.

Reihendarstellung: $\exp(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

Ableitung: $\exp' = \exp$

Spezielle Werte: $\exp(0) = 1$ und $\exp(1) = e$

Wertebereich: Es gilt

$$\begin{aligned}
&0 < \exp(x) < 1 \text{ für alle } x \in (-\infty, 0)\\
&1 < \exp(x) < \infty \text{ für alle } x \in (0, \infty)\\
&\mathrm{Bild}(\exp) = \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

Monotonie: exp ist streng monoton wachsend.

Wichtige Gleichungen: $\exp(x) \cdot \exp(-x) = 1$ und $\exp(x + y) = \exp(x) \cdot \exp(y)$.

18.3.2 Satz: (Natürlicher Logarithmus)

Definition: $\ln : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ ist die Umkehrabbildung von exp.

Reihendarstellung: $\ln(1 + x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n$ für alle $x \in (-1, 1)$.

Ableitung: $\ln'(x) = \frac{1}{x}$ für alle $x \in (0, \infty)$.

Spezielle Werte: $\ln(1) = 0$ und $\ln(e) = 1$.

Wertebereich: Es gilt

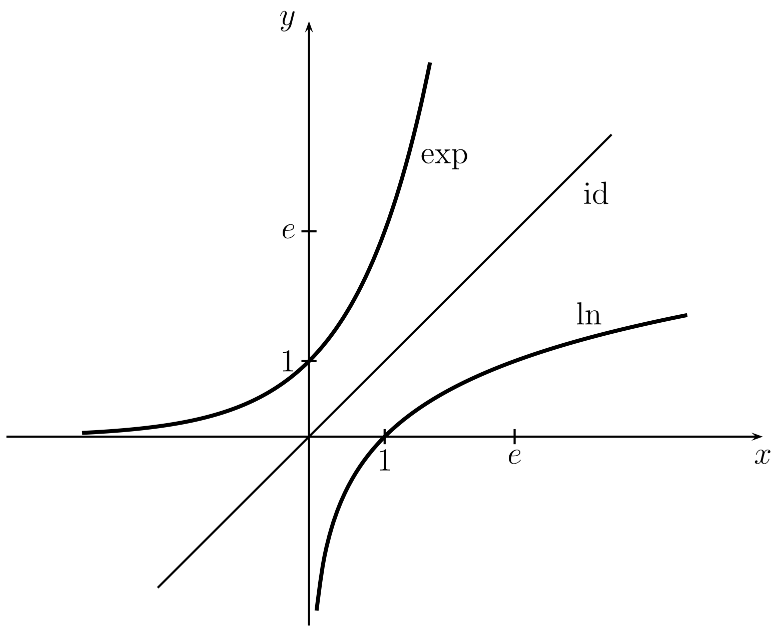
$$\begin{array}{l} \ln(x) < 0 \text{ für alle } x \in (0, 1) \\ \ln(x) > 0 \text{ für alle } x \in (1, \infty) \\ \mathrm{Bild}((0, \infty)) = \mathbb{R}. \end{array}$$

Monotonie: ln ist streng monoton wachsend.

Wichtige Gleichungen:

$$\begin{array}{l} \ln(\frac{1}{x}) = -\ln(x) \\ \ln(\frac{x}{y}) = \ln(x) - \ln(y) \\ \ln(xy) = \ln(x) + \ln(y) \\ \ln(x^\alpha) = \alpha \ln(x) \end{array}$$

Die folgende Grafik skizziert den Verlauf der Exponentialfunktion und ihrer Umkehrfunktion ln.



18.3.3 Satz: (Allgemeine Potenz)

Sei $\alpha \in \mathbb{R}$.

Definition: $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^\alpha$

Reihendarstelllung: $(1 + x)^\alpha = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n$ für alle $x \in (-1, 1)$.

Ableitung: $f'(x) = \alpha x^{\alpha-1}$ für alle $x > 0$.

Wertebereich: $\mathrm{Bild}(f) = (0, \infty)$ für $a \neq 0$ und $\mathrm{Bild}(f) = \{1\}$ für $a = 0$.

Monotonie:

Für $\alpha > 0$ ist f streng monoton wachsend.
Für $\alpha < 0$ ist f streng monoton falllend.
Für $\alpha = 0$ ist f die konstante Funktion $\hat{1}$.

Auch die Exponential- und Logarithmusfunktion zur Basis a werden zu den elementaren Funktionen gezählt. Diese und die allgemeine Potenz (bei positivem Exponenten) lassen sich, wie wir gesehen haben, durch die Exponentialfunktion und den natürlichen Logarithmus ausdrücken.

18.3.4 Proposition: Sei $a > 0$. Dann gilt:

1. Für alle $x > 0$ ist $x^a = \exp(a \ln(x))$.
2. Für alle $x \in \mathbb{R}$ ist $\exp_a(x) = \exp(x \ln(a))$.
3. Sei $a \neq 1$. Für alle $x > 0$ ist $\log_a(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(a)}$.

Lösungen der Aufgaben

Lösungen der Aufgaben in 18.1

Aufgabe 18.1.4

Wir benutzen die Additionstheoreme. Es sind

$$\sin(2x) = \sin(x+x) = \sin(x)\cos(x) + \cos(x)\sin(x) = 2\sin(x)\cos(x)$$

und

$$\cos(2x) = \cos(x+x) = \cos(x)\cos(x) - \sin(x)\sin(x) = \cos^2(x) - \sin^2(x).$$

Aufgabe 18.1.10

Im Beweis von Korollar 18.1.8 wurde gezeigt, dass $\cos(x) > 0$ für alle $x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ ist. Da $\cos(x+\pi) = -\cos(x)$, folgt damit $\cos(x) < 0$ für alle $x \in (\frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi)$.

Da $\cos(x) = \sin(x + \frac{\pi}{2})$, folgt $\sin(x) > 0$ für alle $x \in (0, \pi)$ und $\sin(x) < 0$ für alle $x \in (\pi, 2\pi)$.

Da $\sin' = \cos$, folgt dass sin auf dem Intervall $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ streng monoton wächst und auf dem Intervall $[\frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi]$ streng monoton fällt, und da $\cos' = -\sin$, ergibt sich analog, dass cos auf $[0, \pi]$ streng monoton fällt und auf $[\pi, 2\pi]$ streng monoton wächst.

Aufgabe 18.1.14

Ableitungen: Mit der Quotientenregel gilt

$$\begin{aligned}
\tan'(x) &= \left(\frac{\sin(x)}{\cos(x)}\right)' = \frac{\sin'(x)\cos(x) - \sin(x)\cos'(x)}{\cos^2(x)} = \frac{\cos^2(x) + \sin^2(x)}{\cos^2(x)} \\
&= \frac{1}{\cos^2(x)}
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}\cot'(x) &= \left(\frac{\cos(x)}{\sin(x)}\right)' = \frac{\cos'(x)\sin(x) - \cos(x)\sin'(x)}{\sin^2(x)} = \frac{-\sin^2(x) - \cos^2(x)}{\sin^2(x)} \\ &= -\frac{1}{\sin^2(x)}.\end{aligned}$$

Wertebereich: Wir zeigen, dass tan weder nach oben noch nach unten beschränkt ist. Sei (x_n) eine Folge in $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, die gegen $\frac{\pi}{2}$ konvergiert. Dann konvergiert $(\sin(x_n))$ gegen 1 und $(\cos(x_n))$ konvergiert gegen 0. Somit können bei $n \to \infty$ die Folgenglieder $\frac{\sin(x_n)}{\cos(x_n)}$ beliebig groß gemacht werden, das heißt, tan ist nach oben nicht beschränkt. Sei (x_n) eine Folge in $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, die gegen $-\frac{\pi}{2}$ konvergiert. Dann konvergiert $(\sin(x_n))$ gegen -1 und $(\cos(x_n))$ konvergiert gegen 0. Es folgt, dass bei $n \to \infty$ die Folgenglieder $\frac{\sin(x_n)}{\cos(x_n)}$ beliebig klein gemacht werden kann, dass also $(\tan(x_n))$ nicht nach unten beschränkt ist. Da das Bild von tan ein Intervall ist, denn tan ist stetig, folgt $\mathrm{Bild}(\tan) = \mathbb{R}$. Analog wird gezeigt, dass $\mathrm{Bild}(\cot) = \mathbb{R}$ ist.

Wichtige Gleichungen: Es gilt

$$\tan'(x) = \frac{\cos^2(x) + \sin^2(x)}{\cos^2(x)} = 1 + \frac{\cos^2(x)}{\sin^2(x)} = 1 + \tan^2(x)$$

und

$$\cot'(x) = -\frac{\sin^2(x) + \cos^2(x)}{\sin^2(x)} = -\left(1 + \frac{\cos^2(x)}{\sin^2(x)}\right) = -(1 + \cot^2(x)).$$

Monotonie: Es ist $\tan'(x) = \frac{1}{\cos^2(x)} > 0$, und es folgt, dass tan streng monoton wachsend ist. Es ist $\cot'(x) = -\frac{1}{\sin^2(x)} < 0$, und es folgt, dass cot streng monoton fallend ist.

Periodizität: Es gilt

$$\tan(x + \pi) = \frac{\sin(x + \pi)}{\cos(x + \pi)} = \frac{-\sin(x)}{-\cos(x)} = \tan(x)$$

und

$$\cot(x + \pi) = \frac{\cos(x + \pi)}{\sin(x + \pi)} = \frac{-\cos(x)}{-\sin(x)} = \cot(x).$$

Somit ist π eine Periode von tan und cot. Sei p die kleinste positive Periode von tan. Dann gilt $\frac{\sin(x+p)}{\cos(x+p)} = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$, also $\sin(x+p)\cos(x) - \sin(x)\cos(x+p) = \sin(p) = 0$. Die kleinste positive Zahl mit dieser Eigenschaft ist π. Analog für cot.