Mathematische Grundlagen(1141) SoSe 2012

Kurseinheit 1:

Einsendeaufgaben – Einsendetermin: 16.4.2012

Aufgabe 1.1

Wahr oder falsch?

		wahr	falsch
(1)	Wenn X eine echte Teilmenge einer Menge Y ist, dann gibt es keine bijektive Abbildung von X nach Y.	☐	☐
(2)	Sind X und Y endliche Mengen, und ist $\lvert X\rvert > \lvert Y\rvert$, so ist jede Abbildung von X nach Y surjektiv.	☐	☐
(3)	Ist X eine endliche Menge, so gibt es keine bijektive Abbildung von X nach $X \times X$.	☐	☐
(4)	Invers zu $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$ ist $\begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.	☐	☐
(5)	Sei X eine Menge, und seien $f : X \to X$ und $g : X \to X$ Abbildungen. Dann gilt $\mathrm{Bild}(g \circ f) \subseteq \mathrm{Bild}(g)$.	☐	☐
(6)	Seien $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$ und $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = x^3$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Dann gilt $(f \circ g)(x) = x^5$ für alle $x \in \mathbb{R}$.	☐	☐
(7)	Sei $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}_0$, $f(x) = x - 1$ für alle $x \in \mathbb{N}$, und sei $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $g(x) = x+1$ für alle $x \in \mathbb{N}$. Dann ist $f \circ g$ definiert, und $(f \circ g)(x) = x$ für alle $x \in \mathbb{N}$.	☐	☐
(8)	Seien X und Y Mengen, und sei $\lvert X \times Y\rvert = p$, wobei p eine Primzahl ist. Dann enthält X oder Y genau ein Element.	☐	☐
(9)	Seien X und Y Mengen. Wenn $X \cup Y = X \cap Y$, so folgt $X = Y$.	☐	☐
(10)	Seien L, M, N Mengen. Dann gilt $L \times (M \times N) = (L \times M) \times N$.	☐	☐

Hinweis: Kreuzen Sie „Wahr“ an, wenn Sie die angegebene Aussage beweisen können, und „Falsch“, wenn Sie ein Beispiel konstruieren können, so dass die Aussage nicht erfüllt ist. Bitte schicken Sie Ihre Begründungen nicht ein, sondern senden Sie diese Seite (mit den Kreuzchen) mit den Lösungen der anderen Aufgaben zurück.

[max(*0*, $r - f$) *Punkte, wobei* r *die Anzahl der richtigen und* f *die Anzahl der falschen Antworten ist. Nicht beantwortete Fragen gehen nicht in die Bewertung ein.*]

Diese Seite bleibt aus technischen Gründen frei!

Aufgabe 1.2

Seien $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ und $\mathcal{C}$ Aussagen. Beweisen Sie, dass folgende Aussagen logisch äquivalent sind:

1. $(\mathcal{A} \wedge \mathcal{B}) \Rightarrow \mathcal{C}$ und $(\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{C}) \vee (\mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{C})$ sind äquivalent.
2. $(\mathcal{A} \vee \mathcal{B}) \Rightarrow \mathcal{C}$ und $(\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{C}) \wedge (\mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{C})$ sind äquivalent.

[*5 + 5 Punkte*]

Aufgabe 1.3

Beweisen Sie folgende Formeln mit vollständiger Induktion:

1. Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{(2k-1)(2k+1)} = \frac{n}{2n+1}$.
2. Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $\sum\limits_{k=1}^{n} 2 \cdot 3^{k-1} = 3^n - 1$.

[*5 + 5 Punkte*]

Aufgabe 1.4

Bestimmen Sie alle Matrizen $A \in \mathrm{M}_{22}(\mathbb{R})$, für die $A \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} A$ gilt.

[*10 Punkte*]

Aufgabe 1.5

Sei $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ definiert durch $f(z) = |z|$ für alle $z \in \mathbb{Z}$. Dabei ist $|z| = z$, falls $z \geq 0$, und $|z| = -z$, falls $z < 0$.

1. Untersuchen Sie, ob f surjektiv beziehungsweise injektiv ist.
2. Sei $U = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$. Bestimmen Sie $f(U) := \{f(u) \mid u \in U\}$, und bestimmen Sie die Menge der Urbilder der Elemente in $f(U)$.
3. Sei $V = \{-10, -5, 0, 10, 15\}$. Sei W die Menge der Urbilder der Elemente in V unter f. Bestimmen Sie die Elemente in W und in $f(W) := \{f(w) \mid w \in W\}$.

[*2 + 4 + 4 Punkte*]

Aufgabe 1.6

Sei $\mathbb{K}$ ein Körper, und sei $A \in \mathrm{M}_{nn}(\mathbb{K})$ eine Matrix, sodass $AB = BA$ für alle $B \in \mathrm{M}_{nn}(\mathbb{K})$ gilt. Beweisen Sie, dass $A = aI_n$ für ein $a \in \mathbb{K}$ ist.

[*10 Punkte*]