Mathematische Grundlagen(1141) SoSe 2012

Kurseinheit 3:

Einsendeaufgaben – Einsendetermin: 14.5.2012

Aufgabe 3.1

Wahr oder falsch?

		wahr	falsch
(1)	Ist V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum mit Basis $v_1, \ldots, v_n$, und ist $z = \sum_{i=1}^{n} a_i v_i$ mit $a_n \neq 0$, so ist $v_1, \ldots, v_{n-1}, z$ eine Basis von V.	☑	☐
(2)	Es gibt einen $\mathbb{R}$-Vektorraum der Dimension 4, der keinen Unterraum der Dimension 3 besitzt.	☐	☑
(3)	Sei $f : \mathrm{M}_{33}(\mathbb{F}_2) \to \mathrm{M}_{23}(\mathbb{F}_2)$ linear, und seien $\mathcal{B}$ eine Basis von $\mathrm{M}_{33}(\mathbb{F}_2)$ und $\mathcal{C}$ eine Basis von $\mathrm{M}_{23}(\mathbb{F}_2)$. Dann ist ${}_{\mathcal{C}}\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(f)$ eine 9×6-Matrix.	☐	☑
(4)	Der Vektorraum der Polynome vom Grad ≤ 3 über $\mathbb{Q}$ ist isomorph zu $\mathrm{M}_{22}(\mathbb{Q})$.	☑	☐
(5)	Sei $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ linear. Dann liegt $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ im Kern von f.	☐	☑
(6)	Sei $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ linear. Dann liegt $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ im Bild von f.	☑	☐
(7)	Sei V ein Vektorraum der Dimension 4, und seien U und W Unterräume der Dimension 3 von V. Dann ist $U \cap W \neq \{0\}$.	☑	☐
(8)	Sei $V = \left\langle \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\rangle \subseteq \mathrm{M}_{22}(\mathbb{R})$. Sei $\mathcal{B}$ eine Basis von V. Sei $A \in V$. Der Koordinatenvektor von A bezüglich $\mathcal{B}$ liegt in $\mathbb{R}^4$.	☑	☐
(9)	Es gibt eine lineare Abbildung $f : \mathrm{M}_{22}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ mit $\mathrm{Kern}(f) = \{0\}$.	☑	☐
(10)	Es gibt eine surjektive, lineare Abbildung $f : \mathbb{R} \to \mathrm{M}_{22}(\mathbb{R})$.	☐	☑

[$\max(0, r - f)$ *Punkte, wobei* r *die Anzahl der richtigen und* f *die Anzahl der falschen Antworten ist. Nicht beantwortete Fragen gehen nicht in die Bewertung ein.*]

Diese Seite bleibt aus technischen Gründen frei!

Aufgabe 3.2

Seien $U_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 2a \\ a \\ b \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R} \right\}$ und $U_2 = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ a \\ b \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R} \right\}$ Teilmengen von $\mathbb{R}^3$.

1. Beweisen Sie, dass U_1 und U_2 Unterräume von $\mathbb{R}^3$ sind.
2. Bestimmen Sie eine Basis von $U_1 \cap U_2$.
3. Bestimmen Sie eine Basis von $U_1 + U_2$, die eine Basis von U_1 und eine Basis von U_2 enthält.

[*2 + 4 + 4 Punkte*]

Aufgabe 3.3

Seien $\mathbb{K}$ ein Körper, $A \in M_{mn}(\mathbb{K})$, und seien $v_1, \ldots, v_r \in \mathbb{K}^n$.

Beweisen Sie:

1. Sind $v_1, \ldots, v_r$ linear abhängig, so sind auch $Av_1, \ldots, Av_r$ linear abhängig.
2. Sind $v_1, \ldots, v_r$ linear unabhängig und ist $\mathrm{Rg}(A) = n$, so sind $Av_1, \ldots, Av_r$ linear unabhängig.

[*4 + 6 Punkte*]

Aufgabe 3.4

Geben Sie jeweils ein Beispiel für einen Vektorraum V und eine lineare Abbildung $f : V \to V$, sodass gilt:

1. $f \circ f = \mathrm{id}_V$, und $f \neq \mathrm{id}_V$.
2. $f \circ f = -\mathrm{id}_V$.
3. $f \circ f = f$, und $f \neq \mathrm{id}_V$.
4. $\mathrm{Kern}(f) = \mathrm{Bild}(f)$, und $V \neq \{0\}$.
5. $\mathrm{Kern}(f) \cap \mathrm{Bild}(f) = \{0\}$, und $V \neq \{0\}$.

Hinweis: Bitte vergessen Sie die Begründungen nicht.

[*2 + 2 + 2 + 2 + 2 Punkte*]

Aufgabe 3.5

Sei V der Vektorraum der Polynome über $\mathbb{R}$ vom Grad ≤ 2. Sei $f : V \to \mathbb{R}^2$ definiert durch $f\left(\sum_{i=0}^{2} a_i T^i\right) = \begin{pmatrix} a_2 \\ a_0 \end{pmatrix}$.

1. Beweisen Sie, dass f linear ist.
2. Bestimmen Sie eine Basis von $\mathrm{Kern}(f)$ und von $\mathrm{Bild}(f)$.
3. Wählen Sie Basen $\mathcal{B}$ von V und $\mathcal{C}$ von $\mathbb{R}^2$ und berechnen Sie ${}_{\mathcal{C}}\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(f)$.

[*2 + 6 + 2 Punkte*]

Aufgabe 3.6

Sei V ein endlich erzeugter Vektorraum der Dimension n, und seien f und g lineare Abbildungen von V nach V.

Beweisen Sie: Wenn $f \circ g = 0$, so folgt $\mathrm{Rg}(f) + \mathrm{Rg}(g) \leq n$.

[*10 Punkte*]