Inhalt Der Begriff der Differenzierbarkeit, Rechenregeln, Kurvendiskussion

1 Der Begriff der Differenzierbarkeit

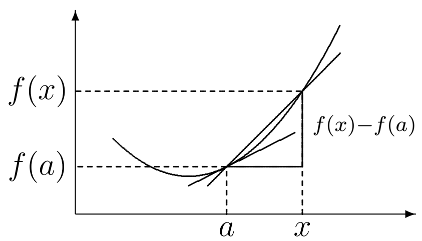
Sei $D \subseteq \mathbb{R}$, $a \in D$ ein Häufungspunkt von D, d. h. es gibt eine Folge (x_n) in D mit $x_n \neq a$ für alle n und $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$.
Sei etwa $D = I$ ein Intervall mit mehr als einem Punkt und $a \in I$.

Definition
$f : D \to \mathbb{R}$ heißt *differenzierbar in a* $:\Longleftrightarrow \lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ existiert

$$\Longleftrightarrow \exists b \in \mathbb{R} : \lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = b$$

$$\Longleftrightarrow \exists b \in \mathbb{R}\ \forall \text{ Folgen } (x_n) \text{ in } D\setminus\{a\} \text{ mit } \lim_{n\to\infty} x_n = a \text{ gilt: } \lim_{n\to\infty} \frac{f(x_n)-f(a)}{x_n-a} = b.$$

b ist dann eindeutig bestimmt. Bezeichnung: $b = f'(a) = \frac{df}{dx}(a)$.



Anschaulich gibt der Differenzenquotient $\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ die Steigung der Geraden durch die Punkte $(a, f(a))$ und $(x, f(x))$ an. Wenn $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = b$ existiert, so ist b die Steigung der „Tangenten" $f(a) + b(x-a)$ von f im Punkt $(a, f(a))$.

$f : D \to \mathbb{R}$ heißt *differenzierbar*, wenn f in allen $a \in D$ differenzierbar ist. Dann heißt $f' : D \to \mathbb{R}$, $x \mapsto f'(x)$ die *Ableitung* von f.

Beispiele a) *Für $c \in \mathbb{R}$ ist $\widehat{c} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto c$ differenzierbar mit $\widehat{c}'(a) = 0$ für alle $a \in \mathbb{R}$.*
Beweis: Für $x \neq a$ gilt $\dfrac{\widehat{c}(x)-\widehat{c}(a)}{x-a} = \dfrac{c-c}{x-a} = 0 \to 0$ für $x \to a$.

b) $\mathrm{id} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x$ *ist differenzierbar mit* $\mathrm{id}'(a) = 1$ *für alle* $a \in \mathbb{R}$.
Beweis: Für $x \neq a$ gilt $\dfrac{\mathrm{id}(x)-\mathrm{id}(a)}{x-a} = \dfrac{x-a}{x-a} = 1 \to 1$ für $x \to a$.

c) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^2$ *ist differenzierbar mit* $f'(a) = 2a$ *für alle* $a \in \mathbb{R}$.
Beweis: Für $x \neq a$ ist $\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} = \dfrac{x^2-a^2}{x-a} = \dfrac{(x+a)(x-a)}{x-a} = x + a \to 2a$ für $x \to a$.

d) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto |x|$ *ist in* 0 *nicht differenzierbar.*
Beweis: Für $x \neq 0$ ist $\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = \dfrac{|x|}{x} = \begin{cases} 1 & \text{für } x > 0 \\ -1 & \text{für } x < 0 \end{cases}$.
Dann existiert $\lim\limits_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0}$ nicht, denn für die Folgen $(x_n), (y_n)$ mit $x_n := \frac{1}{n}$ und $y_n := -\frac{1}{n}$ gilt $x_n \to 0$, $y_n \to 0$, aber $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{f(x_n)-f(0)}{x_n-0} = 1$, $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{f(y_n)-f(0)}{y_n-0} = -1$.

Satz 1 *Ist $f : D \to \mathbb{R}$ in $a \in D$ differenzierbar, so ist f in a stetig, also $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$.*

Beweis: Da f in a differenzierbar ist, gibt es eine in a stetige Funktion $F : D \to \mathbb{R}$ mit $F(x) = \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ für $x \neq a$. Es gilt $f(x) = F(x)\cdot(x-a) + f(a)$ für alle $x \in D$. Also ist f in a stetig.

2 Rechenregeln für differenzierbare Funktionen

Satz 2 *Seien* $f, g : D \to \mathbb{R}$ *in* a *differenzierbar und* $c \in \mathbb{R}$*. Dann gilt:*
a) *(Summenregel)* $f + g$ *ist in* a *differenzierbar mit* $(f+g)'(a) = f'(a) + g'(a)$.
b) *(Konstantenregel)* cf *ist in* a *differenzierbar mit* $(cf)'(a) = cf'(a)$.
c) *(Produktregel)* fg *ist in* a *differenzierbar mit* $(fg)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$.
d) *(Quotientenregel) Ist* $g(x) \neq 0$ *für alle* $x \in D$*, so ist* $\frac{f}{g}$ *in* a *differenzierbar mit*

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{g(a)^2}.$$

e) *(Kettenregel) Sei* $h : E \to \mathbb{R}$ *mit* $f(D) \subseteq E$ *in* $f(a)$ *differenzierbar. Dann ist* $h \circ f$ *in* a *differenzierbar mit* $(h \circ f)'(a) = h'(f(a)) \cdot f'(a)$.

Beweis: a) Für $x \neq a$ gilt $\frac{(f+g)(x)-(f+g)(a)}{x-a} = \frac{f(x)+g(x)-f(a)-g(a)}{x-a} = \frac{f(x)-f(a)}{x-a} + \frac{g(x)-g(a)}{x-a} \to f'(a) + g'(a)$ für $x \to a$.

b) Für $x \neq a$ gilt $\frac{(cf)(x)-(cf)(a)}{x-a} = \frac{c \cdot f(x) - c \cdot f(a)}{x-a} = c \cdot \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \to cf'(a)$ für $x \to a$.

c) Für $x \neq a$ gilt

$$\frac{f(x)g(x) - f(a)g(a)}{x-a} = \frac{f(x)-f(a)}{x-a} g(a) + f(x) \frac{g(x)-g(a)}{x-a} \to f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$$

für $x \to a$ (wegen $f(x) \to f(a)$ für $x \to a$).

d) Wir behandeln zunächst $\frac{1}{g}$. Für $x \neq a$ gilt

$$\frac{(\frac{1}{g})(x) - (\frac{1}{g})(a)}{x-a} = \frac{1}{g(x)g(a)} \cdot \frac{g(a)-g(x)}{x-a} = -\frac{1}{g(x)g(a)} \cdot \frac{g(x)-g(a)}{x-a} \to -\frac{1}{g(a)^2} \cdot g'(a)$$

für $x \to a$. Nach der Produktregel ist dann $\frac{f}{g} = f \cdot \frac{1}{g}$ in a differenzierbar mit

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = f'(a)\frac{1}{g(a)} + f(a)\left(\frac{1}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)}{g(a)} - f(a) \cdot \frac{g'(a)}{g(a)^2} = \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{g(a)^2}.$$

e) Sei $b := f(a)$. Da h in b differenzierbar ist, gibt es eine in b stetige Funktion H mit $H(y) = \frac{h(y)-h(b)}{y-b}$ für $y \neq b$, $H(b) = h'(b)$. Es gilt $h(y) - h(b) = H(y) \cdot (y-b)$ für alle $y \in E$. Dann folgt (durch Einsetzen von $f(x)$)

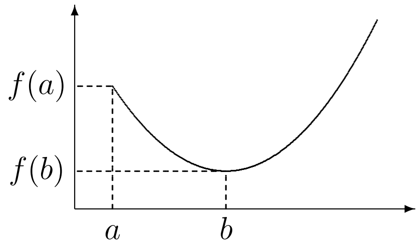
$$\frac{h(f(x)) - h(b)}{x-a} = H(f(x)) \cdot \frac{f(x)-b}{x-a} \to h'(b) \cdot f'(a) \quad \text{für } x \to a,$$

da $H(f(x)) \to H(f(a)) = h'(b)$ für $x \to a$ nach der Kettenregel für stetige Funktionen.

Anwendung der Produktregel *Für alle* $n \in \mathbb{N}$ *ist* $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^n$ *differenzierbar mit* $f_n'(x) = nx^{n-1}$ *für alle* $x \in \mathbb{R}$.
Beweis durch vollständige Induktion: $n = 1$: $f_1'(x) = (\mathrm{id})'(x) = 1$.
$n \to n+1$: Es ist $f_{n+1}(x) = x \cdot x^n = x \cdot f_n(x)$. Mit der Produktregel (und der Induktionsvoraussetzung) folgt $f_{n+1}'(x) = 1 \cdot f_n(x) + x \cdot f_n'(x) = x^n + x \cdot nx^{n-1} = (n+1)x^n$.

Folgerung *Jede Polynomfunktion* $P : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto P(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k x^k$ *ist differenzierbar mit* $P'(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} k a_k x^{k-1}$.

3 Kurvendiskussion



Definition Sei $a \in D \subseteq \mathbb{R}$. $f : D \to \mathbb{R}$ hat in a ein *lokales Minimum*, wenn es ein $\varepsilon > 0$ gibt, so dass $f(a) \leq f(x)$ für alle $x \in \,]a - \varepsilon, a + \varepsilon[\, \cap D$.
f hat in a ein *lokales Maximum*, wenn es ein $\varepsilon > 0$ gibt, so dass $f(x) \leq f(a)$ für alle $x \in \,]a-\varepsilon, a+\varepsilon[\, \cap D$.

In der Skizze hat f in a ein lokales Maximum und in b ein lokales Minimum.

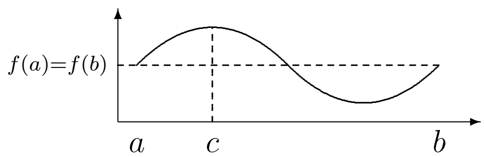
Satz 3 *Sei I ein Intervall mit den Endpunkten a, b, $a < b$. In $c \in \,]a, b[$ habe f ein lokales Minimum oder Maximum, und f sei differenzierbar in c. Dann gilt $f'(c) = 0$.*

Beweis: f habe in c ein lokales Minimum. Dann gibt es ein $\varepsilon > 0$ mit $f(c) \leq f(x)$ für alle $x \in \,]c - \varepsilon, c + \varepsilon[\, \cap I$. Ohne Einschränkung gelte $]c - \varepsilon, c + \varepsilon[\, \subseteq I$. Für alle $x \in \,]c, c + \varepsilon[$ gilt

$$\frac{f(x) - f(c)}{x - c} \geq 0.$$

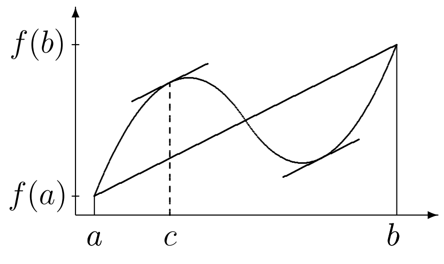
Also ist $f'(c) = \lim\limits_{x \to c} \frac{f(x)-f(c)}{x-c} \geq 0$. Für alle $x \in \,]c - \varepsilon, c[$ gilt $\frac{f(x)-f(c)}{x-c} \leq 0$. Es folgt $f'(c) = \lim\limits_{x \to c} \frac{f(x)-f(c)}{x-c} \leq 0$. Also ist $f'(c) = 0$. Im Fall eines lokalen Maximums betrachte man $-f$.

Bemerkung Aus $f'(c) = 0$ für $c \in \,]a, b[$ folgt *nicht*, dass f in c ein lokales Minimum oder Maximum hat. Für $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^3$ ist $f'(0) = 0$, aber f hat in 0 kein lokales Minimum oder Maximum.



Satz 4 (Satz von Rolle) *Seien $a < b$, $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig auf $[a, b]$ und differenzierbar auf $]a, b[$. Gilt $f(a) = f(b)$, so existiert (mindestens) ein $c \in]a, b[$ mit $f'(c) = 0$.*

Beweis: 1. Fall: f ist konstant, also $f(x) = f(a)$ für alle $x \in [a, b]$. Dann gilt $f'(c) = 0$ für jedes $c \in \,]a, b[$.
2. Fall: Es gibt ein x mit $f(x) < f(a) = f(b)$. Es gibt ein $c \in [a, b]$ mit $f(c) = \inf f([a, b])$ (nach dem Satz vom Minimum und Maximum). Wegen $f(x) < f(a) = f(b)$ ist $c \neq a, b$, also ist $c \in \,]a, b[$. In c hat f ein (lokales) Minimum. Also gilt $f'(c) = 0$.
3. Fall: Es gibt ein x mit $f(x) > f(a) = f(b)$. Es gibt ein $c \in [a, b]$ mit $f(c) = \sup f([a, b])$. Wegen $f(x) > f(a) = f(b)$ ist $c \neq a, b$, also $c \in \,]a, b[$. In c hat f ein (lokales) Maximum. Es folgt $f'(c) = 0$.



Satz 5 (Mittelwertsatz) *Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig auf $[a, b]$ und differenzierbar auf $]a, b[$. Dann gibt es (mindestens) ein $c \in \,]a, b[$ mit*

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c).$$

Beweis: Wir betrachten die Hilfsfunktion $h : [a, b] \to \mathbb{R}$ mit $h(x) := f(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x - a)$. h ist stetig auf $[a, b]$ und differenzierbar auf $]a, b[$. Es gilt

$$h(a) = f(a), \; h(b) = f(b) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(b - a) = f(a).$$

Nach dem Satz von Rolle gibt es ein $c \in \,]a, b[$ mit $h'(c) = 0$. Es ist $h'(x) = f'(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$. Es folgt $0 = h'(c) = f'(c) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

Im Folgenden sei I ein Intervall mit mehr als einem Punkt. $\overset{\circ}{I}$ sei das Intervall ohne die Endpunkte (also z. B. $\overset{\circ}{I} =]a, b[$ für $I = [a, b]$).

Satz 6 *Sei $f : I \to \mathbb{R}$ stetig und in $\overset{\circ}{I}$ differenzierbar mit $f'(x) = 0$ für alle $x \in \overset{\circ}{I}$. Dann ist f eine konstante Funktion.*

Beweis: Seien $x, y \in I$ mit $x < y$ beliebig. Nach dem Mittelwertsatz gibt es ein $c \in]x, y[$ mit $\frac{f(y)-f(x)}{y-x} = f'(c) = 0$. Also gilt $f(y) = f(x)$.

Satz 7 *Sei $f : I \to \mathbb{R}$ stetig und in $\overset{\circ}{I}$ differenzierbar. Dann gilt:*

(1) *Ist $f'(x) \geq 0$ für alle $x \in \overset{\circ}{I}$, so ist f monoton wachsend, d. h. für alle $x, y \in I$ mit $x \leq y$ ist $f(x) \leq f(y)$.*

(2) *Ist $f'(x) \leq 0$ für alle $x \in \overset{\circ}{I}$, so ist f monoton fallend, d. h. für alle $x, y \in I$ mit $x \leq y$ ist $f(x) \geq f(y)$.*

Beweis zu (1): Seien $x, y \in I$ mit $x < y$. Nach dem Mittelwertsatz existiert ein $c \in]x, y[$ mit $\frac{f(y)-f(x)}{y-x} = f'(c) \geq 0$. Wegen $y - x > 0$ folgt $f(y) - f(x) \geq 0$, also $f(y) \geq f(x)$.

Satz 8 *Sei $f : I \to \mathbb{R}$ stetig und in $\overset{\circ}{I}$ differenzierbar. Es sei $c \in \overset{\circ}{I}$. Dann gilt:*

(1) *Gilt $f'(x) \leq 0$ für $x < c$, $x \in \overset{\circ}{I}$ und $f'(x) \geq 0$ für $x > c$, $x \in \overset{\circ}{I}$, so hat f in c ein absolutes Minimum, d. h. $f(c) \leq f(x)$ für alle $x \in I$.*

(2) *Gilt $f'(x) \geq 0$ für $x < c$, $x \in \overset{\circ}{I}$ und $f'(x) \leq 0$ für $x > c$, $x \in \overset{\circ}{I}$, so hat f in c ein absolutes Maximum, d. h. $f(c) \geq f(x)$ für alle $x \in I$.*

Beweis zu (1): f ist in $\{x \in I \mid x \leq c\}$ monoton fallend und in $\{x \in I \mid x \geq c\}$ monoton wachsend. Für $x \leq c$ ist also $f(x) \geq f(c)$, für $x \geq c$ ist $f(x) \geq f(c)$. Damit hat f in c ein absolutes Minimum.

Beispiel Sei $h :]0, \infty[\to \mathbb{R}$, $h(x) := x + \dfrac{1}{x}$. Dann ist h differenzierbar mit $h'(x) = 1 - \dfrac{1}{x^2}$. Für $0 < x < 1$, also $\dfrac{1}{x^2} > 1$, ist $h'(x) = 1 - \dfrac{1}{x^2} < 0$. Für $x > 1$, also $\dfrac{1}{x^2} < 1$, ist $h'(x) = 1 - \dfrac{1}{x^2} > 0$. Nach Satz 8 hat h in 1 ein absolutes Minimum. Es ist $h(1) = 2$.