Studienvorkurs Mathematik 1011A108
M. Schulte: Vortrag 1: Mengen und Abbildungen

Inhalt Mengen, Teilmengen, Vereinigung, Durchschnitt, Differenz von Mengen, geordnete Paare und das direkte Produkt von Mengen.
Abbildungen, Komposition von Abbildungen, injektive, surjektive, bijektive Abbildungen, Bilder von Teilmengen des Definitionsbereichs, Bilder von Teilmengen des Wertebereichs

1 Mengen

Eine *Menge* ist (nach Georg Cantor) eine Zusammenfassung von Objekten unserer Anschauung oder unseres Denkens zu einem Ganzen. Für jede Menge M und jedes Objekt x steht prinzipiell fest, ob x zu M gehört oder nicht (ohne dass man effektiv entscheiden können muss, welcher Fall vorliegt).

Gehört x zu M, sagt man, x sei *Element von* M und schreibt $x \in M$. Andernfalls sagt man, x sei kein Element von M und schreibt $x \notin M$.

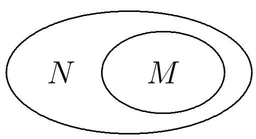
Zwei Mengen M, N heißen *gleich* $(M = N)$, wenn sie dieselben Elemente besitzen, wenn also für jedes Objekt x gilt: $x \in M$ genau dann, wenn $x \in N$.

Bezeichnungen Sind $x_1, x_2, x_3, \ldots$ endlich oder unendlich viele Objekte, so bezeichnen wir die Menge dieser Objekte mit $\{x_1, x_2, x_3, \ldots\}$. Ist E eine für beliebige Objekte sinnvolle Eigenschaft, so bezeichnen wir die Menge aller Objekte mit der Eigenschaft E mit $\{x \mid x \text{ hat } E\}$.

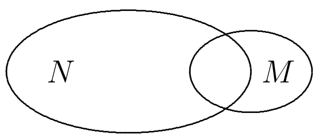
Beispiele von Mengen $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$ Menge der *natürlichen Zahlen*,
$\mathbb{N}^0 = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$ Menge der *nicht-negativen ganzen Zahlen*,
$\mathbb{Z} = \{0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, \ldots\}$ Menge der *ganzen Zahlen*,
$\mathbb{Q} = \{\frac{p}{q} \mid p, q \in \mathbb{Z},\ q \neq 0\}$ Menge der *rationalen Zahlen* (Brüche ganzer Zahlen),
$\mathbb{R} =$ Menge der *reellen Zahlen*.

Die Menge, die kein Element enthält, heißt *leere Menge* und wird mit $\emptyset$ bezeichnet. Für jedes Objekt x gilt also $x \notin \emptyset$.

1.1 Teilmengen



$M \subseteq N$

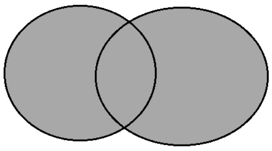


$M \not\subseteq N$

Definition Sind M, N Mengen, so heißt M *Teilmenge von* N, geschrieben $M \subseteq N$, wenn jedes Element von M auch Element von N ist. Man sagt auch: M ist *enthalten in* N oder N *umfasst* M und schreibt $N \supseteq M$.
Ist M keine Teilmenge von N, so schreibt man $M \not\subseteq N$.

Bemerkung Für beliebige Mengen M, N, P gilt:
$M \subseteq M$; $\emptyset \subseteq M$; $M \subseteq N,\ N \subseteq P \Rightarrow M \subseteq P$;
$M = N \iff M \subseteq N$ und $N \subseteq M$.

1.2 Vereinigung von Mengen



$M \cup N$

Definition Sind M, N Mengen, so heißt

$$M \cup N := \{x \mid x \in M \text{ oder } x \in N\}$$

die *Vereinigung* von M und N. (Der Doppelpunkt in := besagt, dass das Objekt links durch den Ausdruck rechts definiert wird.)

Allgemeiner: Ist $I \neq \emptyset$ und für jedes $i \in I$ eine Menge M_i gegeben, so heißt

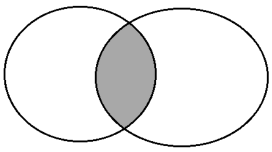
$$\bigcup_{i \in I} M_i := \{x \mid \text{Es gibt ein } i \in I \text{ mit } x \in M_i\}$$

Vereinigung der $M_i,\ i \in I$. Ist speziell $I = \{1, \ldots, n\}$ mit $n \in \mathbb{N}$, so schreibt man auch

$$M_1 \cup \ldots \cup M_n := \bigcup_{i=1}^{n} M_i := \bigcup_{i \in \{1,\ldots,n\}} M_i.$$

Es gilt: $M \cup N = N \cup M, \quad M \cup (N \cup P) = (M \cup N) \cup P, \quad M \subseteq N \iff M \cup N = N.$

1.3 Durchschnitt von Mengen



$M \cap N$

Definition Sind M, N Mengen, so heißt

$$M \cap N := \{x \mid x \in M \text{ und } x \in N\}$$

der *Durchschnitt* von M und N.

Allgemeiner: Ist $I \neq \emptyset$ und M_i für jedes $i \in I$ eine Menge, so heißt

$$\bigcap_{i \in I} M_i := \{x \mid \text{Für alle } i \in I \text{ gilt } x \in M_i\}$$

Durchschnitt der $M_i,\ i \in I$. Für $I = \{1, \ldots, n\}$ schreibt man auch

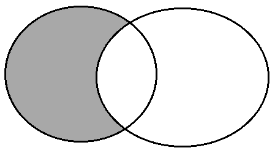
$$M_1 \cap \ldots \cap M_n := \bigcap_{i=1}^{n} M_i := \bigcap_{i \in \{1,\ldots,n\}} M_i.$$

Es gilt: $M \cap N = N \cap M, \quad M \cap (N \cap P) = (M \cap N) \cap P, \quad M \subseteq N \iff M \cap N = M.$

Proposition $M \cap (N \cup P) = (M \cap N) \cup (M \cap P)$, $M \cup (N \cap P) = (M \cup N) \cap (M \cup P)$.

Beweis der ersten Gleichung: „$\subseteq$“: Sei $x \in M \cap (N \cup P)$, also $x \in M$ und $x \in N \cup P$. Dann ist $x \in M$ und es gilt eine der Aussagen $x \in N$, $x \in P$, also ist $x \in M \cap N$ oder $x \in M \cap P$, d. h. $x \in (M \cap N) \cup (M \cap P)$.
„$\supseteq$“: Sei $x \in (M \cap N) \cup (M \cap P)$, also $x \in M \cap N$ oder $x \in M \cap P$. In jedem Fall ist $x \in M$ und es gilt eine der Aussagen $x \in N$, $x \in P$, also $x \in M$ und $x \in N \cup P$, d. h. $x \in M \cap (N \cup P)$.

1.4 Die mengentheoretische Differenz



Definition Für Mengen M, N heißt

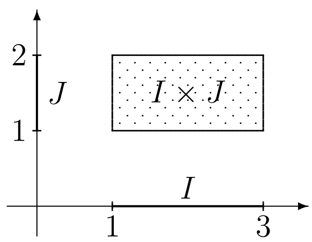
$$M \setminus N := \{x \mid x \in M \text{ und } x \notin N\}$$

die *(mengentheoretische) Differenz* von M, N oder das *Komplement von N in M*.

1.5 Geordnete Paare und das direkte Produkt von Mengen

Objekte x, y kann man zu einem *(geordneten) Paar* (x, y) zusammenfügen. Zwei solche Paare $(x, y), (x', y')$ heißen *gleich*, wenn $x = x'$ und $y = y'$ gilt.
Das Paar (x, y) ist etwas anderes als die Menge $\{x, y\}$, z. B. ist $(0, 1) \neq (1, 0)$, aber für die Mengen gilt $\{0, 1\} = \{1, 0\}$ (da beide Mengen dieselben Elemente enthalten).

Definition Sind M, N Mengen, so heißt $M \times N := \{(x, y) \mid x \in M \text{ und } y \in N\}$ *direktes* oder *kartesisches Produkt* von M, N.



Man kann (nach Wahl eines Koordinatensystems) Punkte der Ebene mit Paaren reeller Zahlen identifizieren.
Für $I = [1, 3] := \{x \in \mathbb{R} \mid 1 \leq x \leq 3\}$ und $J = [1, 2] := \{x \in \mathbb{R} \mid 1 \leq x \leq 2\}$ ist

$$I \times J = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid 1 \leq x \leq 3,\ 1 \leq y \leq 2\}$$

in der nebenstehenden Skizze veranschaulicht.

2 Abbildungen

Eine *Abbildung* $f : M \to N$ ist gegeben durch eine Menge M (den *Definitionsbereich* von f), eine Menge N (den *Wertebereich* von f) und eine Zuordnungsvorschrift, die jedem $x \in M$ genau ein Element $y \in N$ zuordnet; man schreibt $y = f(x)$ oder $x \mapsto f(x) = y$.
Zwei Abbildungen $f : M \to N,\ g : P \to Q$ heißen *gleich*, wenn $M = P,\ N = Q$ und $f(x) = g(x)$ für alle $x \in M$ gilt.

Beispiele a) Sei $\mathbb{R}_+ := \{x \mid x \in \mathbb{R},\ x \geq 0\}$. Durch $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R},\ x \mapsto$ ein $y \in \mathbb{R}$ mit $y^2 = x$ wird *keine* Abbildung definiert, weil die Zuordnungsvorschrift nicht eindeutig ist, da etwa für $x = 1$ sowohl $1^2 = 1$ als auch $(-1)^2 = 1$ gilt.
b) Durch $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R},\ x \mapsto$ dasjenige $y \in \mathbb{R}$ mit $y \geq 0$ und $y^2 = x$ für $x \in \mathbb{R}_+$ wird eine Abbildung definiert, denn zu jedem $x \in \mathbb{R}_+$ gibt es genau ein $y \in \mathbb{R}$ mit $y \geq 0$ und $y^2 = x$.
c) Für eine Menge M heißt die Abbildung $\mathrm{id}_M : M \to M,\ x \mapsto x$ *Identität* auf M.
d) Ist $f : M \to N$ eine Abbildung und $M' \subseteq M$, so heißt $f|_{M'} : M' \to N,\ x \mapsto f(x)$ die *Einschränkung* von f auf M'. Die Einschränkung von id_M auf M', also die Abbildung $M' \to M,\ x \mapsto x$, heißt *kanonische Injektion* von M' in M.

2.1 Die Komposition von Abbildungen

Für Abbildungen $f : M \to N,\ g : N' \to P$ mit $f(x) \in N'$ für alle $x \in M$ heißt $g \circ f : M \to P$ mit $(g \circ f)(x) := g(f(x))$ für alle $x \in M$ *Komposition* von g mit f.
Für jedes $f : M \to N$ gilt $f \circ \mathrm{id}_M = f = \mathrm{id}_N \circ f$. Sind $f : M \to N,\ g : N \to P,\ h : P \to Q$ Abbildungen, so gilt $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$.

2.2 Injektive, surjektive, bijektive Abbildungen

Eine Abbildung $f : M \to N$ heißt *injektiv*, falls für alle $x_1, x_2 \in M$ gilt: $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$. Äquivalent dazu ist: Für alle $x_1, x_2 \in M$ gilt: $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$.
Eine Abbildung $f : M \to N$ heißt *surjektiv*, falls zu jedem $y \in N$ ein $x \in M$ mit $f(x) = y$ existiert.
Eine Abbildung $f : M \to N$ heißt *bijektiv*, falls f injektiv und surjektiv ist.
Äquivalent dazu ist: Zu jedem $y \in N$ gibt es *genau ein* $x \in M$ mit $f(x) = y$.
Ist $f : M \to N$ bijektiv, so heißt die Abbildung

$$f^{-1} : N \to M,\ f^{-1}(y) := \text{dasjenige } x \in M \text{ mit } f(x) = y$$

die *Umkehrabbildung* von f.

Beispiele a) $f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto x^2$ ist nicht injektiv (da z. B. $(-1)^2 = 1^2$ gilt) und nicht surjektiv (da z. B. kein $x \in \mathbb{R}$ mit $x^2 = -1$ existiert).
b) Sei $\mathbb{R}_+ := \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}$. $f_2 : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R},\ x \mapsto x^2$ ist injektiv (denn aus $x_1^2 = x_2^2$ mit $x_1, x_2 \geq 0$ folgt $x_1 = x_2$), aber nicht surjektiv (da kein $x \in \mathbb{R}_+$ mit $x^2 = -1$ existiert).
c) $f_3 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+,\ x \mapsto x^2$ ist nicht injektiv (wegen $(-1)^2 = 1^2$), aber surjektiv, denn zu jedem $y \in \mathbb{R}_+$ gibt es ein $x \in \mathbb{R}$ mit $x^2 = y$.
d) $f_4 : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+,\ x \mapsto x^2$ ist injektiv und surjektiv, also bijektiv.

2.3 Bilder von Teilmengen des Definitionsbereichs

Sei $f : M \to N$ eine Abbildung. Für eine Teilmenge M' von M heißt

$$f(M') = \{f(x) \mid x \in M'\} = \{y \mid \text{Es gibt ein } x \in M' \text{ mit } f(x) = y\}$$

das *Bild* von M' unter f. Speziell heißt $f(M)$ die *Bildmenge* von f.
Offenbar ist $f : M \to N$ genau dann surjektiv, wenn $f(M) = N$ ist.
Für $M_1, M_2 \subseteq M$ gilt $f(M_1 \cup M_2) = f(M_1) \cup f(M_2)$, $f(M_1 \cap M_2) \subseteq f(M_1) \cap f(M_2)$.

2.4 Urbilder von Teilmengen des Wertebereichs

Sei $f : M \to N$ eine Abbildung. Für eine Teilmenge N' von N heißt

$$f^{-1}(N') := \{x \in M \mid f(x) \in N'\}$$

das *Urbild* von N' unter f. (Manche Autoren schreiben $\overset{-1}{f}(N')$ statt $f^{-1}(N')$.)
Es ist $f(f^{-1}(N')) = N' \cap f(M)$. Für $N_1, N_2 \subseteq N$ gilt $f^{-1}(N_1 \cup N_2) = f^{-1}(N_1) \cup f^{-1}(N_2)$, $f^{-1}(N_1 \cap N_2) = f^{-1}(N_1) \cap f^{-1}(N_2)$.