Inhalt Reelle Folgen, Konvergenz reeller Folgen, Beispiele, Sätze über Konvergenz reeller Folgen, Reihen, absolut konvergente Reihen

1 Reelle Folgen

Sei $a_1, a_2, a_3, \ldots$ eine *Folge* reeller Zahlen, d. h. jedem $n \in \mathbb{N}$ ist eine reelle Zahl a_n zugeordnet; Schreibweise für die Folge: $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ oder $(a_n)_{n\geq 1}$ oder einfach (a_n).

Zum Beispiel kann die Folge $1, 3, 5, 7, \ldots$ der ungeraden Zahlen geschrieben werden als $(2n-1)_{n\in\mathbb{N}}$, die Folge $1, 4, 9, 16, \ldots$ der Quadratzahlen als $(n^2)_{n\in\mathbb{N}}$.

Man betrachtet auch Folgen, bei denen die Indizes nicht bei 1 beginnen, sondern etwa bei 0 oder bei irgendeinem festen $k \in \mathbb{Z}$.
Bei einer reellen Folge $(a_n)_{n\geq k}$ ist jeder ganzen Zahl $n \geq k$ eine reelle Zahl a_n zugeordnet. Die Folge $(a_n)_{n\geq k}$ ist also nichts anderes als die Abbildung $f : \{n \in \mathbb{Z} \mid n \geq k\} \to \mathbb{R}$ mit $f(n) = a_n$.

Bemerkung Eine Folge $(a_n)_{n\geq k}$ ist etwas anderes als die Menge $\{a_n \mid n \geq k\}$ der Folgenglieder, es kommt zusätzlich auf die Reihenfolge der a_n an.

2 Konvergenz reeller Folgen

Motivation Gegeben sei die Folge der Dezimalbrüche einer reellen Zahl a, etwa von $a = \pi$, also

$$\pi_0 = 3,\ \pi_1 = 3{,}1,\ \pi_2 = 3{,}14,\ \pi_3 = 3{,}141,\ \pi_4 = 3{,}1415,\ \pi_5 = 3{,}14159,\ \ldots$$

Man wird sagen, daß diese Folge $(\pi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen π „konvergiert“. Genauer gilt:
Verlangt jemand einen Näherungswert für π mit einem Fehler $\leq \varepsilon = 10^{-3}$, so wählt man etwa $\pi_3 = 3{,}141$ und hat dann $0 \leq \pi - \pi_3 = 0{,}00059\ldots \leq 10^{-3} = \varepsilon$. Für alle $n \geq 3$ gilt dann auch $\pi - \pi_n \leq \pi - \pi_3 \leq \varepsilon$ (wegen $\pi_3 \leq \pi_n$).
Soll der Fehler $< \varepsilon$ (für ein vorgegebenes $\varepsilon > 0$) sein, so bestimme man ein (von ε abhängiges) $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ mit $10^{-n_\varepsilon} < \varepsilon$, dann gilt $0 \leq \pi - \pi_{n_\varepsilon} \leq 10^{-n_\varepsilon} < \varepsilon$, d. h. π_{n_ε} approximiert π mit einem Fehler $< \varepsilon$. Für alle $n \geq n_\varepsilon$ gilt dann auch $0 \leq \pi - \pi_n < \varepsilon$.

Definition Eine reelle Folge $(a_n)_{n\geq k}$ *konvergiert gegen* $a \in \mathbb{R}$, falls es zu jedem $\varepsilon > 0$ einen (von ε abhängigen) Index $n_\varepsilon \in \mathbb{Z}$, $n_\varepsilon \geq k$ gibt, so daß für alle $n \geq n_\varepsilon$ gilt: $|a_n - a| < \varepsilon$.
Wir schreiben dann $a_n \to a$ für $n \to \infty$ oder $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$.
In diesem Fall heißt a *Grenzwert* oder *Limes* der Folge (a_n).
Die Folge (a_n) heißt *konvergent*, falls (a_n) einen Grenzwert besitzt.

Bemerkung *Eine Folge (a_n) hat höchstens einen Grenzwert, d. h. konvergiert (a_n) gegen $a \in \mathbb{R}$ und gegen $b \in \mathbb{R}$, so gilt $a = b$.*

Beweis: (a_n) konvergiere gegen a und gegen b. Annahme: $a \neq b$, also $|a-b| > 0$. Es sei $\varepsilon := \frac{1}{2}|a-b|$. Da (a_n) gegen a konvergiert, gibt es ein n_1 mit $|a_n - a| < \varepsilon$ für alle $n \geq n_1$. Da (a_n) gegen b konvergiert, gibt es ein n_2 mit $|a_n - b| < \varepsilon$ für alle $n \geq n_2$. Wir wählen ein $n \geq \max(n_1, n_2)$. Mit der Dreiecksungleichung folgt dann

$$|a-b| = |(a-a_n) + (a_n - b)| \leq |a - a_n| + |a_n - b| < \varepsilon + \varepsilon = |a-b|,$$

also $|a-b| < |a-b|$, Widerspruch! Also war die Annahme $a \neq b$ falsch.

3 Beispiele

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$.

Beweis: Sei $\varepsilon > 0$ vorgegeben. Nach dem Satz von Archimedes gibt es eine natürliche Zahl $n_\varepsilon > \frac{1}{\varepsilon}$, also $\frac{1}{n_\varepsilon} < \varepsilon$. Für alle $n \geq n_\varepsilon$ gilt dann $|\frac{1}{n} - 0| = \frac{1}{n} \leq \frac{1}{n_\varepsilon} < \varepsilon$.

b) Sei $q \in \mathbb{R}$ mit $|q| > 1$. Dann gilt $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{q^n} = 0$.

Beweis: Sei $\varepsilon > 0$ vorgegeben. Wir möchten $|\frac{1}{q^n}| = \frac{1}{|q|^n} < \varepsilon$ für $n \geq n_\varepsilon$ erreichen, also $|q|^n > \frac{1}{\varepsilon}$. Nach der Bernoullischen Ungleichung gilt

$$|q|^n = \big(1 + (|q| - 1)\big)^n \geq 1 + n\big(|q| - 1\big) > n\big(|q| - 1\big).$$

Für $n > \frac{1}{\varepsilon(|q|-1)}$ gilt also $|q|^n > \frac{1}{\varepsilon}$. Wir wählen also ein $n_\varepsilon > \frac{1}{\varepsilon(|q|-1)}$. Für alle $n \geq n_\varepsilon$ gilt dann $|q|^n > n(|q| - 1) \geq n_\varepsilon(|q| - 1) > \frac{1}{\varepsilon}$.

c) Sei $x \in \mathbb{R}$ mit $|x| < 1$. Dann gilt $\lim\limits_{n\to\infty} x^n = 0$.

Beweis: Für $x = 0$ ist die Behauptung klar. Sei jetzt $x \neq 0$ und $q := \frac{1}{x}$. Dann ist $|q| > 1$, also $\lim\limits_{n\to\infty} x^n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{q^n} = 0$ nach b).

d) Sei (π_n) die Folge der Dezimalbrüche von π, s. Seite 1. Dann gilt $\lim\limits_{n\to\infty} \pi_n = \pi$.

Beweis: Sei $\varepsilon > 0$. Wegen $\lim\limits_{n\to\infty} 10^{-n} = 0$ nach b) existiert ein n_ε mit $10^{-n} < \varepsilon$ für alle $n \geq n_\varepsilon$. Für alle $n \geq n_\varepsilon$ gilt dann $|\pi_n - \pi| = \pi - \pi_n \leq 10^{-n} < \varepsilon$.

4 Sätze über Konvergenz reeller Folgen

Definitionen (a_n) sei eine beliebige (nicht unbedingt konvergente) reelle Folge.
(a_n) heißt *nach oben beschränkt*, falls es ein $K \in \mathbb{R}$ gibt mit $a_n \leq K$ für alle $n \in \mathbb{N}$.
(a_n) heißt *nach unten beschränkt*, falls es ein $L \in \mathbb{R}$ gibt mit $L \leq a_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$.
(a_n) heißt *beschränkt*, falls (a_n) nach oben und nach unten beschränkt ist.

Bemerkung (a_n) ist beschränkt $\iff$ Es gibt ein $C \in \mathbb{R}$ mit $|a_n| \leq C$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Satz 1 *Jede konvergente reelle Folge ist beschränkt.*

Beweis: (a_n) konvergiere gegen a. Zu $\varepsilon := 1$ gibt es dann ein n_1 mit $|a_n - a| < 1$ für alle $n \geq n_1$. Für alle $n \geq n_1$ gilt dann $|a_n| \leq |a_n - a| + |a| \leq 1 + |a|$. Es sei $C := \max(1 + |a|, |a_1|, \ldots, |a_{n_1-1}|)$. Dann gilt $|a_n| \leq C$ für alle $n \in \mathbb{N}$, denn für $n \geq n_1$ gilt $|a_n| \leq 1 + |a| \leq C$, und für die restlichen $a_1, \ldots, a_{n_1-1}$ gilt $|a_i| \leq C$ nach Definition von C.

Rechenregeln für konvergente Folgen
(a_n) konvergiere a, (b_n) konvergiere gegen b. Sei $c \in \mathbb{R}$ beliebig. Dann gilt:
(i) $(a_n + b_n)$ konvergiert gegen $a + b$.
(ii) (ca_n) konvergiert gegen ca.
(iii) $(a_n b_n)$ konvergiert gegen ab.
(iv) Falls alle $b_n \neq 0$ sind und $b \neq 0$ ist, dann konvergiert $(\frac{a_n}{b_n})$ gegen $\frac{a}{b}$.

Beweis zu (i): Sei $\varepsilon > 0$. Da (a_n) gegen a, (b_n) gegen b konvergiert, gibt es n_1, n_2 mit $|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$ für alle $n \geq n_1$ und $|b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2}$ für alle $n \geq n_2$. Es sei $n_\varepsilon := \max(n_1, n_2)$. Für alle $n \geq n_\varepsilon$ gilt dann (nach der Dreiecksungleichung)

$$|(a_n + b_n) - (a + b)| \leq |a_n - a| + |b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

(ii) ist ähnlich leicht zu zeigen.
Beweis zu (iii): Nach Satz 1 sind beide Folgen beschränkt, es gibt also $A, B > 0$ mit $|a_n| \leq A,\ |b_n| \leq B$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Wegen $a_n b_n - ab = a_n(b_n - b) + a_n b - ab$ gilt

$$|a_n b_n - ab| \leq |a_n| \cdot |b_n - b| + |a_n b - ab| \leq A \cdot |b_n - b| + |a_n b - ab|.$$

Sei nun $\varepsilon > 0$. Wegen $b_n \to b$ für $n \to \infty$ gibt es ein n_1 mit $|b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2A}$ für alle $n \geq n_1$. Nach (ii) konvergiert $(a_n b)$ gegen ab, also existiert ein n_2 mit $|a_n b - ab| < \frac{\varepsilon}{2}$ für alle $n \geq n_2$. Sei $n_\varepsilon := \max(n_1, n_2)$. Für alle $n \geq n_\varepsilon$ gilt dann

$$|a_n b_n - ab| < A \cdot \frac{\varepsilon}{2A} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

(iv) beweisen wir jetzt nicht (ist ähnlich wie (iii), nur etwas schwieriger).

Satz 2 *Die Folge (a_n) konvergiere gegen a, die Folge (b_n) gegen b. Für alle $n \in \mathbb{N}$ gelte $a_n \leq b_n$. Dann folgt $a \leq b$.*

Beweis: Sei $c_n := b_n - a_n$. Dann konvergiert (c_n) gegen $c := b - a$ (nach Rechenregel (i)). Annahme: $a > b$, also $c < 0$. Da (c_n) gegen c konvergiert, gibt es zu $\varepsilon := \frac{|c|}{2}$ ein n_ε mit $|c_n - c| < \frac{|c|}{2}$, also $-\frac{|c|}{2} < c_n - c < \frac{|c|}{2}$ für alle $n \geq n_\varepsilon$. Für $n \geq n_\varepsilon$ folgt

$$c_n < c + \frac{|c|}{2} = c + \frac{-c}{2} = \frac{c}{2} < 0.$$

Das ist ein Widerspruch zu $c_n \geq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Bemerkung Für konvergente Folgen $(a_n), (b_n)$ folgt aus $a_n < b_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ im allgemeinen *nicht* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n < \lim\limits_{n\to\infty} b_n$, z. B. gilt $0 < \frac{1}{n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$, aber $\lim\limits_{n\to\infty} 0 = 0 = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n}$.

Monotone Folgen
Eine Folge (a_n) heißt *monoton wachsend*, falls $a_{n+1} \geq a_n$ für alle n gilt.
Eine Folge (a_n) heißt *monoton fallend*, falls $a_{n+1} \leq a_n$ für alle n gilt.
Gilt $a_{n+1} > a_n$ (bzw. $a_{n+1} < a_n$) für alle n, so heißt (a_n) *streng monoton wachsend* (bzw. *streng monoton fallend*).

Satz 3 *Jede monoton wachsende, nach oben beschränkte Folge (a_n) konvergiert, und zwar gegen* $\sup\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$.
Analog gilt: Jede monoton fallende, nach unten beschränkte Folge (a_n) konvergiert gegen $\inf\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$.

Beweis (für monoton wachsende Folgen): Es ist $\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ nach oben beschränkt, also existiert $a := \sup\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$. Zunächst gilt $a_n \leq a$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Sei $\varepsilon > 0$ vorgegeben. Wegen $a - \varepsilon < a$ ist $a - \varepsilon$ keine obere Schranke von $\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$, also existiert ein $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ mit $a - \varepsilon < a_{n_\varepsilon}$. Da (a_n) monoton wachsend ist, folgt $a - \varepsilon < a_{n_\varepsilon} \leq a_n \leq a$ für alle $n \geq n_\varepsilon$, also $-\varepsilon < a_n - a \leq 0 < \varepsilon$ und damit $|a_n - a| < \varepsilon$ für alle $n \geq n_\varepsilon$.

Cauchy-Folgen
Problem: Wie erkennt man Konvergenz einer Folge, ohne den Grenzwert zu kennen?
Konvergiert (a_n) gegen a, so wird $|a_n - a_m| = |(a_n - a) + (a - a_m)| \leq |a_n - a| + |a_m - a|$ klein für genügend große n, m. Dies motiviert die folgende Definition.

Definition Eine Folge (a_n) heißt *Cauchy-Folge*, falls es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ gibt mit $|a_n - a_m| < \varepsilon$ für alle $n, m \geq n_0$.

Satz 4 (Cauchy-Kriterium)
Für jede Folge (a_n) *gilt:* (a_n) *konvergiert* $\iff$ (a_n) *ist Cauchy-Folge.*

Beweis zu „$\Rightarrow$“: (a_n) konvergiere gegen a. Sei $\varepsilon > 0$ gegeben. Es gibt ein n_0 mit $|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$ für alle $n \geq n_0$. Für alle $n, m \geq n_0$ gilt dann $|a_n - a_m| = |(a_n - a) + (a - a_m)| \leq |a_n - a| + |a_m - a| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$. Also ist (a_n) eine Cauchy-Folge.
Der Beweis zu „$\Leftarrow$“ ist schwieriger; es geht Satz 3 ein.

5 Reihen

Sei $(a_j)_{j\geq 0}$ eine Folge reeller Zahlen. Unter der *unendlichen Reihe* $\sum\limits_{j=0}^{\infty} a_j$ versteht man die Folge $(s_n)_{n\geq 0}$, wobei $s_n := \sum\limits_{j=0}^{n} a_j$ für $n \geq 0$ die n-te *Partialsumme* der Reihe ist.
Die Reihe $\sum\limits_{j=0}^{\infty} a_j$ heißt *konvergent*, falls die Folge (s_n) der Partialsummen konvergiert; man setzt dann $\sum\limits_{j=0}^{\infty} a_j := \lim\limits_{n\to\infty} s_n$.

Aus dem Cauchy-Kriterium (Satz 4, angewandt auf (s_n)) erhält man leicht:

Satz 5 (Cauchy-Kriterium für Reihen)
$\sum\limits_{j=0}^{\infty} a_j$ *konvergiert genau dann, wenn die Folge* (s_n) *der Partialsummen eine Cauchy-Folge ist, d. h. zu jedem* $\varepsilon > 0$ *existiert ein* $n_0 \in \mathbb{N}$ *mit* $|\sum\limits_{j=m+1}^{n} a_j| < \varepsilon$ *für alle* $n > m \geq n_0$.

Beispiele
a) *Geometrische Reihe:* Für $|x| < 1$ konvergiert $\sum\limits_{j=0}^{\infty} x^j$, und zwar ist $\sum\limits_{j=0}^{\infty} x^j = \dfrac{1}{1-x}$.
Beweis: Für $n \in \mathbb{N}^0$ ist $s_n = \sum\limits_{j=0}^{n} x^j = \frac{1-x^{n+1}}{1-x} = \frac{1}{1-x} - \frac{x^{n+1}}{1-x}$. Wegen $|x| < 1$ gilt $x^{n+1} \to 0$ für $n \to \infty$, also $\frac{x^{n+1}}{1-x} \to 0$ für $n \to \infty$. Damit ist $\sum\limits_{j=0}^{\infty} x^j = \lim\limits_{n\to\infty} s_n = \frac{1}{1-x}$.

b) $\sum\limits_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j(j+1)} = 1.$
Beweis: Wegen $\frac{1}{j(j+1)} = \frac{1}{j} - \frac{1}{j+1}$ gilt $\sum\limits_{j=1}^{n} \frac{1}{j(j+1)} = \sum\limits_{j=1}^{n} \left(\frac{1}{j} - \frac{1}{j+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1} \to 1$ für $n \to \infty$.

c) Folgerung $\sum\limits_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j^2}$ konvergiert.
Beweis mit dem Cauchy-Kriterium (Satz 5): $\sum\limits_{j=m+1}^{n} \frac{1}{j^2} \leq \sum\limits_{j=m+1}^{n} \frac{1}{j(j-1)} = \sum\limits_{j=m}^{n-1} \frac{1}{j(j+1)}$ wird $< \varepsilon$ für genügend große m, n, da $\sum\limits_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j(j+1)}$ nach b) konvergiert.

d) $\sum\limits_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j}$ ist *divergent*, d. h. nicht konvergent.
Beweis: Wäre $\sum\limits_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j}$ konvergent, so gäbe es zu $\varepsilon := \frac{1}{2}$ ein n_0 mit $\sum\limits_{j=m+1}^{n} \frac{1}{j} < \frac{1}{2}$ für alle

$n > m \geq n_0$. Für $m := n_0 + 1$ und $n := 2m$ wäre insbesondere $\sum\limits_{j=m+1}^{2m} \frac{1}{j} < \frac{1}{2}$. Es ist aber

$$\sum_{j=m+1}^{2m} \frac{1}{j} = \frac{1}{m+1} + \ldots + \frac{1}{2m} \geq \frac{1}{2m} + \ldots + \frac{1}{2m} = m\frac{1}{2m} = \frac{1}{2},$$

Widerspruch!

Lemma *Konvergiert die Reihe* $\sum\limits_{j=0}^{\infty} a_j$, *so konvergiert die Folge* (a_j) *gegen* 0.

Beweis: Sei $\varepsilon > 0$. Nach dem Cauchy-Kriterium für Reihen (Satz 5) gibt es ein n_0 mit $|\sum\limits_{j=m+1}^{n} a_j| < \varepsilon$ für alle $n > m \geq n_0$. Für alle $m \geq n_0$ und $n := m+1$ ist inbesondere $|a_{m+1}| < \varepsilon$. Also ist $|a_j| < \varepsilon$ für alle $j \geq n_0 + 1$. Damit konvergiert (a_j) gegen 0.

Beispiel: Für $|x| \geq 1$ divergiert $\sum\limits_{j=0}^{\infty} x^j$ (denn für $|x| \geq 1$ konvergiert (x^j) nicht gegen 0.)

Rechenregeln für konvergente Reihen

Konvergieren die Reihen $\sum\limits_{j=0}^{\infty} a_j$ und $\sum\limits_{j=0}^{\infty} b_j$, und sind $a, b \in \mathbb{R}$, so konvergiert auch die Reihe $\sum\limits_{j=0}^{\infty}(aa_j + bb_j)$, und es gilt $\sum\limits_{j=0}^{\infty}(aa_j + bb_j) = a \cdot \sum\limits_{j=0}^{\infty} a_j + b \cdot \sum\limits_{j=0}^{\infty} b_j$.

Beweis: Für die Partialsummen $s_n = \sum\limits_{j=0}^{n} a_j$ und $t_n = \sum\limits_{j=0}^{n} b_j$ gilt $\sum\limits_{j=0}^{n}(aa_j + bb_j) = as_n + bt_n$. Die Behauptung folgt also aus den Rechenregeln für Folgen.

6 Absolut konvergente Reihen

Eine Reihe $\sum\limits_{j=0}^{\infty} a_j$ heißt *absolut konvergent*, falls die Reihe $\sum\limits_{j=0}^{\infty} |a_j|$ konvergiert.

Lemma *Aus der absoluten Konvergenz einer Reihe folgt die Konvergenz der Reihe.*

Beweis mit dem Cauchy-Kriterium für Reihen (Satz 5): Sei $\sum\limits_{j=0}^{\infty} |a_j|$ konvergent. Ist $\varepsilon > 0$ gegeben, so existiert ein n_0 mit $\sum\limits_{j=m+1}^{n} |a_j| < \varepsilon$ für alle $n > m \geq n_0$. Für alle $n > m \geq n_0$ gilt dann auch $|\sum\limits_{j=m+1}^{n} a_j| \leq \sum\limits_{j=m+1}^{n} |a_j| < \varepsilon$. Nach dem Cauchy-Kriterium ist also $\sum\limits_{j=0}^{\infty} a_j$ konvergent.

Satz 6 (Majoranten-Kriterium für absolute Konvergenz)

Seien (a_n) *und* (b_n) *Folgen, es gebe ein* k *mit* $|a_n| \leq b_n$ *für alle* $n \geq k$. *Dann gilt: Ist* $\sum\limits_{j=0}^{\infty} b_j$ *konvergent, so ist* $\sum\limits_{j=0}^{\infty} a_j$ *absolut konvergent, also insbesondere konvergent.*

(Die Reihe $\sum b_j$ heißt *Majorante* von $\sum a_j$.)

Beweis: Sei $\varepsilon > 0$. Da $\sum\limits_{j=0}^{\infty} b_j$ konvergiert, gibt es ein n_0 mit $\sum\limits_{j=m+1}^{n} b_j < \varepsilon$ für alle $n > m \geq n_0$. Für alle $n > m \geq \max(n_0, k)$ gilt dann $\sum\limits_{j=m+1}^{n} |a_j| \leq \sum\limits_{j=m+1}^{n} b_j < \varepsilon$. Nach dem Cauchy-Kriterium (Satz 5) ist also $\sum\limits_{j=0}^{\infty} |a_j|$ konvergent.

Satz 7 (Quotienten-Kriterium für absolute Konvergenz)
Es gebe ein $q \in \mathbb{R}$ *mit* $0 \leq q < 1$ *und* $|a_{j+1}| \leq q|a_j|$ *für alle* $j \in \mathbb{N}^0$. *Dann ist die Reihe* $\sum_{j=0}^{\infty} a_j$ *absolut konvergent.*

Beweis: Aus $|a_{j+1}| \leq q|a_j|$ folgt (durch Induktion) $|a_j| \leq q^j|a_0|$ für alle $j \in \mathbb{N}^0$. Die Reihe $\sum_{j=0}^{\infty} |a_0|q^j = |a_0| \cdot \sum_{j=0}^{\infty} q^j$ ist (als geometrische Reihe) konvergent. Nach dem Majoranten-Kriterium (Satz 6) ist also $\sum_{j=0}^{\infty} a_j$ absolut konvergent.