

Klausur am 32. Dezember 2007:

Aufgabenstellungen

---

Die Lösungen der folgenden Aufgaben müssen Sie begründen.

### Aufgabe 1

Gegeben sei das folgende lineare Gleichungssystem über  $\mathbb{R}$ .

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

1. Bestimmen Sie die Treppennormalform der erweiterten Koeffizientenmatrix.
2. Bestimmen Sie die Lösungsmenge  $\mathcal{L}$  des linearen Gleichungssystems.

[8 + 4 = 12 Punkte]

### Aufgabe 2

Sei  $V$  der Vektorraum der Polynome vom Grad  $\leq 2$  über  $\mathbb{R}$ . Sei  $f : V \rightarrow V$  definiert durch  $f(a + bT + cT^2) = (a + c) + bT^2$  für alle  $a + bT + cT^2 \in V$ .

1. Beweisen Sie, dass  $f$  linear ist.
2. Wählen Sie eine Basis  $\mathcal{B}$  von  $V$  und berechnen Sie  ${}_B M_B(f)$ .
3. Bestimmen Sie  $\text{Rg}(f)$ .

[4 + 4 + 2 = 10 Punkte]

**Aufgabe 3**

Sei  $U = \{2a + 3b + bT + aT^2 \mid a, b \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathbb{R}[T]$ .

1. Beweisen Sie, dass  $U$  ein Unterraum von  $\mathbb{R}[T]$  ist.
2. Bestimmen Sie eine Basis von  $U$ .

[6 + 8 = 14 Punkte]

**Aufgabe 4**

Beweisen Sie mit vollständiger Induktion, dass für alle  $n \in \mathbb{N}$  folgende Formel gilt.

$$\sum_{i=1}^n (4i - 3) = n(2n - 1)$$

[8 Punkte]

**Aufgabe 5**

Beweisen Sie, dass die Folge  $(a_n)$  mit  $a_n = \sqrt{n} - \sqrt{n-1}$  für alle  $n \in \mathbb{N}$  konvergent ist und bestimmen Sie den Grenzwert der Folge.

Hinweis: Mit der dritten binomischen Formel gilt  $(\sqrt{n} - \sqrt{n-1})(\sqrt{n} + \sqrt{n-1}) = 1$ .

[8 Punkte]

**Aufgabe 6**

Beweisen Sie, dass folgende Reihen konvergent sind.

1.  $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{4} + \frac{1}{n}\right)^n$
2.  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}$
3.  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2}{3^n}$

[4 + 4 + 4 = 12 Punkte]

**Aufgabe 7**

Geben Sie den maximalen Definitionsbereich  $D \subseteq \mathbb{R}$  für die durch  $f(x) = \tan(\frac{\pi x}{x^2-1})$  gegebene Funktion an. In welchen Punkten ist  $f$  stetig?

Hinweis: Die Nullstellen einer quadratischen Gleichung  $x^2 + px + q$  sind  $x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{(\frac{p}{2})^2 - q}$ .

[8 Punkte]

**Aufgabe 8**

Sei  $n \geq 2, n \in \mathbb{N}$  fest gewählt. Sei  $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  definiert durch  $f(x) = x^n \exp(-x)$ .

Beweisen Sie, dass  $f$  in  $x_0 = n$  ein lokales Maximum hat.

[8 Punkte]