Inhalt Lineare Unabhängigkeit, Basis eines Vektorraumes, Dimension eines Vektorraumes, Anwendung auf lineare Gleichungssysteme

Sei V ein Vektorraum über einem Körper K.

1 Lineare Unabhängigkeit

Definition Endlich viele $v_1, \ldots, v_m \in V$ $(m \in \mathbb{N})$ heißen *linear unabhängig*, falls für alle $a_1, \ldots, a_m \in K$ gilt: Aus $\sum_{i=1}^{m} a_i v_i = 0$ folgt $a_1 = \ldots = a_m = 0$.

Eine Teilmenge M von V heißt *linear unabhängig*, falls M leer ist oder je endlich viele verschiedene Vektoren aus M linear unabhängig sind.

$v_1, \ldots, v_m \in V$ heißen *linear abhängig*, wenn $v_1, \ldots, v_m \in V$ nicht linear unabhängig sind, d. h. es gibt $a_1, \ldots, a_m \in K$, die nicht alle gleich Null sind, mit $\sum_{i=1}^{m} a_i v_i = 0$.

Lemma 1 *$v_1, \ldots, v_m \in V$ sind genau dann linear abhängig, wenn ein $i \in \{1, \ldots, m\}$ existiert mit $v_i \in \operatorname{Lin}(v_1, \ldots, v_{i-1}, v_{i+1}, \ldots, v_m)$.*

Beweis: „$\Rightarrow$“: Sind $v_1, \ldots, v_m$ linear abhängig, so existieren $a_1, \ldots, a_m \in K$ und ein i mit $a_i \neq 0$ und $\sum_{j=1}^{m} a_j v_j = 0$. Dann ist $v_i = -a_i^{-1} \sum_{j \neq i} a_j v_j \in \operatorname{Lin}(v_1, \ldots, v_{i-1}, v_{i+1}, \ldots, v_m)$.
„$\Leftarrow$“: Aus $v_i = \sum_{j \neq i} a_j v_j$ folgt $\sum_{j \neq i} a_j v_j + (-1)v_i = 0$, also sind $v_1, \ldots, v_m$ linear abhängig.

2 Basis eines Vektorraumes

Definition Eine Teilmenge B von V heißt *Basis* von V, falls B linear unabhängig und ein Erzeugendensystem von V ist (also B linear unabhängig und $V = \operatorname{Lin}(B)$).

Für paarweise verschiedene $v_1, \ldots, v_n \in V$ gilt: $\{v_1, \ldots, v_n\}$ ist genau dann eine Basis von V, wenn jedes $v \in V$ *eindeutig* als Linearkombination der $v_1, \ldots, v_n$ darstellbar ist.

Z. B. bilden die Einheitsvektoren $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \ldots, e_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$ eine Basis des K^n.

Lemma 2 *Sei E ein Erzeugendensystem von V und B eine linear unabhängige Teilmenge von V mit $B \subset E$. Jede Menge B' mit $B \subsetneqq B' \subset E$ sei linear abhängig. Dann ist B eine Basis von V.*

Beweis: Zu zeigen ist $V = \operatorname{Lin}(B)$. Wegen $V = \operatorname{Lin}(E)$ genügt es, $E \subset \operatorname{Lin}(B)$ zu zeigen. Sei $v \in E$. Für $v \in B$ ist $v \in \operatorname{Lin}(B)$ trivial. Sei also $v \notin B$. Nach Voraussetzung ist dann $B' := B \cup \{v\}$ linear abhängig, also gibt es $v_1, \ldots, v_m \in B$ und $a_1, \ldots, a_m, a \in K$, die nicht alle Null sind, mit $\sum_{i=1}^{m} a_i v_i + av = 0$. Dann ist $a \neq 0$ (sonst wären $v_1, \ldots, v_m \in B$ linear abhängig). Also ist $v = -a^{-1} \sum_{i=1}^{m} a_i v_i \in \operatorname{Lin}(B)$.

Satz 1 (Basissatz) *V sei endlich erzeugt. Dann gilt:*
a) *Sind $M \subset V$ linear unabhängig und E ein Erzeugendensystem von V mit $M \subset E$, so existiert eine Basis B von V mit $M \subset B \subset E$.*
Insbesondere (für $M = \emptyset$, $E = V$) folgt: V besitzt eine Basis.
b) *Jede Basis von V ist endlich.*
c) *Je zwei beliebige Basen von V haben gleichviele Elemente.*

Der Beweis des Basissatzes beruht auf folgenden technischen Sätzen:

Satz 2 (Austauschsatz) *Seien E ein Erzeugendensystem von V und M eine endliche linear unabhängige Teilmenge von V. Dann gibt es eine Teilmenge E' von E mit:*
$M \cup E'$ ist ein Erzeugendensystem von V, $M \cap E' = \emptyset$, $|M| = |E \setminus E'|$ und $|M \cup E'| = |E|$. (Das Erzeugendensystem E wird durch $M \cup E'$ ersetzt; dabei wird $E \setminus E'$ gegen M „ausgetauscht“.)

Korollar 1 *Sei E ein endliches Erzeugendensystem von V. Dann hat jede linear unabhängige Teilmenge M von V höchstens $|E|$ Elemente.*

Beweis: Es genügt, $|N| \leq |E|$ für jede *endliche* linear unabhängige Teilmenge N von V zu zeigen. Nach dem Austauschsatz (Satz 2) gibt es ein $E' \subset E$ mit $|N| = |E \setminus E'| \leq |E|$.

Beweis des Basissatzes (Satz 1) mit Hilfe von Korollar 1:
a) V werde von p Elementen erzeugt. Nach Korollar 1 hat dann jede linear unabhängige Teilmenge von V höchstens p Elemente. Sei B mit $M \subset B \subset E$ eine linear unabhängige Teilmenge mit maximaler Elementezahl. Dann ist jedes B' mit $B \subsetneqq B' \subset E$ linear abhängig. Nach Lemma 2 ist B dann eine Basis von V.
b) Jede Basis von V ist linear unabhängig, hat also (nach Korollar 1) höchstens p Elemente.
c) Seien B, B' Basen von V mit n bzw. n' Elementen. Dann wird V von n Elementen erzeugt. Nach Korollar 1 folgt $n' \leq n$. Analog folgt $n \leq n'$, also $n = n'$.

3 Die Dimension eines Vektorraumes

Definition Sei V endlich erzeugt. Nach dem Basissatz (Satz 1) besitzt V eine Basis, und die Anzahl der Elemente einer Basis hängt nicht von der gewählten Basis ab. Diese Anzahl heißt die *Dimension* von V, geschrieben $\dim V$.
Ist V nicht endlich erzeugt, so setzt man $\dim V := \infty$.

Beispiele a) $\dim K^n = n$.
b) Es sei

$$U := \{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \}.$$

U ist ein Untervektorraum von $\mathbb{R}^3$. Es gilt

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in U \Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ -x_1 + 2x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \\ -x_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ x_2 \\ 2x_2 \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Die Vektoren $\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{smallmatrix}\right) \in U$ erzeugen damit U und sind offensichtlich linear unabhängig, bilden also eine Basis von U, daher ist $\dim U = 2$.

Satz 3 *Sei V endlich-dimensional mit $n = \dim V$. Dann gilt:*
a) *Ist B linear unabhängig mit genau n Elementen, so ist B eine Basis von V.*
b) *Ist B ein Erzeugendensystem mit genau n Elementen, so ist B eine Basis von V.*

Satz 4 *Sei V endlich-dimensional und U ein Untervektorraum von V. Dann gilt:*
a) *U ist endlich-dimensional mit $\dim U \leq \dim V$.*
b) *$\dim U = \dim V$ genau dann, wenn $U = V$.*

Beweis: a) Sei $n := \dim V$. Nach Korollar 1 sind je $n+1$ Vektoren in V linear abhängig, insbesondere sind je $n+1$ Vektoren in U linear abhängig. Sei

$$m := \min\{k \mid \text{Je } k+1 \text{ Vektoren in } U \text{ sind linear abhängig}\}.$$

Dann ist $m \leq n$, und es existieren m linear unabhängige Vektoren in U (sonst läge $m-1$ in $\{k \mid \text{Je } k+1 \text{ Vektoren in } U \text{ sind linear abhängig}\}$). Sei $B = \{u_1, \ldots, u_m\} \subset U$ linear unabhängig. Nach Definition von m ist jede Menge B' mit $B \subsetneqq B' \subset U$ linear abhängig. Nach Lemma 2 ist B dann eine Basis von U, also gilt $\dim U = m \leq n = \dim V$.

b) Zu zeigen ist: Aus $\dim U = \dim V$ folgt $U = V$. Sei also $\dim U = \dim V$. Sei B eine Basis von U. Da B linear unabhängig ist, ist (nach a) des Basissatzes (Satz 1)) B in einer Basis B' von V enthalten. Da B, B' wegen $\dim U = \dim V$ gleichviele Elemente haben, ist $B = B'$, also ist B eine Basis von V, also $U = V$.

4 Anwendung auf lineare Gleichungssysteme

Sei V ein endlich-dimensionaler K-Vektorraum.

Definition Für $M \subset V$ heißt $\operatorname{rang} M := \dim \operatorname{Lin}(M)$ der *Rang* von M.

Satz 5 (Rangkriterium für lineare Gleichungssysteme)
Sei G $\sum_{j=1}^{n} x_j v_j = w$ ein lineares Gleichungssystem mit m Gleichungen in n Unbekannten über K (also $v_1, \ldots, v_n, w \in K^m$). Dann sind äquivalent:
(i) *G ist lösbar.*
(ii) *$w \in \operatorname{Lin}(v_1, \ldots, v_n)$.*
(iii) *$\operatorname{rang}\{v_1, \ldots, v_n, w\} = \operatorname{rang}\{v_1, \ldots, v_n\}$.*

Beweis: G ist lösbar $\iff$ Es gibt $x_1, \ldots, x_n \in K$ mit $w = \sum_{j=1}^{n} x_j v_j \iff w \in \operatorname{Lin}(v_1, \ldots, v_n)$.
Damit ist (i) äquivalent zu (ii).
(ii)$\Rightarrow$(iii): Ist $w \in \operatorname{Lin}(v_1, \ldots, v_n)$, so ist $\operatorname{Lin}(v_1, \ldots, v_n, w) = \operatorname{Lin}(v_1, \ldots, v_n)$, also $\operatorname{rang}\{v_1, \ldots, v_n, w\} = \operatorname{rang}\{v_1, \ldots, v_n\}$.
(iii)$\Rightarrow$(ii): Aus $\operatorname{rang}\{v_1, \ldots, v_n, w\} = \operatorname{rang}\{v_1, \ldots, v_n\}$ folgt nach Aussage b) von Satz 4 $\operatorname{Lin}(v_1, \ldots, v_n, w) = \operatorname{Lin}(v_1, \ldots, v_n)$, insbesondere $w \in \operatorname{Lin}(v_1, \ldots, v_n)$.

Korollar 2 *Für das obige Gleichungssystem sind äquivalent:*
(i) *G ist* universell lösbar, *d. h. G ist für jedes $w \in K^m$ lösbar.*
(ii) $\operatorname{rang}\{v_1, \ldots, v_n\} = m$.

Beweis: (i) besagt: $K^m = \operatorname{Lin}(v_1, \ldots, v_n)$. Nach Aussage b) von Satz 4 ist dies äquivalent zu $m = \dim K^m = \dim \operatorname{Lin}(v_1, \ldots, v_n) = \operatorname{rang}\{v_1, \ldots, v_n\}$.