Mathematische Grundlagen (01141) **WS 2008/09**

Klausur am 14.02.2009:

Aufgabenstellungen

Die Lösungen aller Aufgaben müssen Sie begründen.

Aufgabe 1

Beweisen Sie mit vollständiger Induktion, dass $\sum_{k=1}^{n} k \cdot k! = (n+1)! - 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.

[*10 Punkte*]

Aufgabe 2

Bestimmen Sie die Lösungsmenge des folgenden linearen Gleichungssystems über $\mathbb{R}$:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 5 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

[*10 Punkte*]

Aufgabe 3

Sei V der Vektorraum der Polynome vom Grad ≤ 2 über $\mathbb{R}$, und sei $W = M_{22}(\mathbb{R})$.

Sei $f : V \to W$ definiert durch $f(a_0 + a_1T + a_2T^2) = \begin{pmatrix} a_0 + a_1 & 2a_2 \\ -a_2 & a_1 - a_0 \end{pmatrix}$ für alle $a_0 + a_1T + a_2T^2 \in V$.

1. Beweisen Sie, dass f linear ist.
2. Bestimmen Sie eine Basis von $\mathrm{Bild}(f)$.
3. Wählen Sie Basen $\mathcal{B}$ von V und $\mathcal{C}$ von W und bestimmen Sie ${}_{\mathcal{C}}\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(f)$.

[*4 + 6 + 6 Punkte*]

Aufgabe 4

Beweisen Sie, dass die Folge $(\frac{\sin(n)}{n})$ konvergent ist, und bestimmen Sie ihren Grenzwert.

[*4 Punkte*]

Aufgabe 5

Finden Sie alle Stellen, in denen die Funktion $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$, definiert durch $f(x) = \cos(x) - \cos^2(x)$ für alle $x \in [-\pi, \pi]$ ein lokales Minimum oder Maximum annimmt. (Hinweis: Für $x = \frac{\pi}{3}$ gilt $\cos(x) = \frac{1}{2}$.)

[*12 Punkte*]

Aufgabe 6

Beweisen Sie, dass die Funktion $f : [0, 3] \to \mathbb{R}$, definiert durch $f(x) = 2^x - x - 3$ für alle $x \in [0, 3]$, mindestens eine Nullstelle besitzt.

[*6 Punkte*]

Aufgabe 7

Seien $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ und $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n$ Reihen mit $a_i > 0$ und $b_i > 0$ für alle $i \in \mathbb{N}$. Die Folge $(\frac{a_n}{b_n})$ sei konvergent.

Beweisen Sie: Ist $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n$ konvergent, so ist auch $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ konvergent.

[*12 Punkte*]

Aufgabe 8

Sei $0 < a < b$ mit $a, b \in \mathbb{R}$. Berechnen Sie $\int\limits_a^b x^2 \ln(x) dx$.

[*6 Punkte*]

Aufgabe 9

Beweisen Sie, dass die prädikatenlogische Formel

$$\alpha = \forall x \forall y (P(x, y) \to P(y, x))$$

weder widerspruchsvoll noch tautologisch ist. Benutzen Sie dafür Interpretationen mit dem Universum $U = \mathbb{Z}$.

[*4 Punkte*]