Mathematische Grundlagen(1141) SoSe 2012

Kurseinheit 4:

Lösungsvorschläge zu den Einsendeaufgaben

Aufgabe 4.1

(1) Wahr. Dies folgt, wenn wir $a = 1$ und $b = 1$ im binomischen Lehrsatz einsetzen.

(2) Falsch. Ein Gegenbeispiel ist $x = 2$ und $y = -3$.

(3) Falsch. Sei etwa $(a_n) = (\frac{1}{n})$, und sei $(b_n) = ((-1)^n)$. Dann sind (a_n) und $(a_n b_n)$ konvergent, aber (b_n) ist divergent.

(4) Falsch. Seien $(a_n) = ((-1)^n)$ und $(b_n) = ((-1)^{n+1})$. Dann sind (a_n) und (b_n) divergent, aber $(a_n b_n) = (-1)$ ist konvergent.

(5) Wahr. Sei s eine untere Schranke, und sei S eine obere Schranke von B. Dann gilt $s \leq b \leq S$ für alle $b \in B$, also insbesondere auch für alle $a \in A \subseteq B$. Somit ist s eine untere und S eine obere Schranke von A, und A ist beschränkt.

(6) Falsch.Sei etwa $A = [0, 1]$ und $B = \mathbb{R}$. Die Menge A ist beschränkt und in B enthalten, aber B ist nicht beschränkt.

(7) Wahr. Für $n \geq 2$ gilt

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{2^{n+1}}{3^{n+1} - 4} \cdot \frac{3^n - 4}{2^n} = \frac{2 \cdot 3^n - 8}{3^{n+1} - 4} < \frac{3^{n+1} - 4}{3^{n+1} - 4} = 1.$$

Da alle Folgenglieder positiv sind, folgt aus $\frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$, dass $a_{n+1} < a_n$ ist. Somit ist die Folge monoton fallend.

(8) Wahr. Es gilt

$$\begin{aligned} |3x - 7| < 2 \quad &\Leftrightarrow \quad -2 < 3x - 7 < 2 \\ &\Leftrightarrow \quad 5 < 3x < 9 \\ &\Leftrightarrow \quad \tfrac{5}{3} < x < 3 \\ &\Leftrightarrow \quad x \in (\tfrac{5}{3}, 3). \end{aligned}$$

(9) Wahr. Genau dann gilt $(x + 1)(x - 2) < 0$, wenn $x + 1 < 0$ und $x - 2 > 0$ oder $x + 1 > 0$ und $x - 2 < 0$. Der erste Fall impliziert, dass $x < -1$ und $x > 2$ ist. Das ist nicht möglich, also bleibt nur die Alternative, dass $x + 1 > 0$, also $x > -1$ und $x - 2 < 0$, also $x < 2$ ist. Das bedeutet gerade $x \in (-1, 2)$.

(10) Wahr, denn $|x + y + z| \leq |x + y| + |z|$ und damit $|x + y| + |z| - |x + y + z| \geq 0$.

Aufgabe 4.2

1. Für $a, b \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\begin{aligned} (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \cdots + ab^{n-2} + b^{n-1}) &= (a^n + a^{n-1}b + \cdots + ab^{n-1}) \\ &\quad -(a^{n-1}b + \cdots + ab^{n-1} + b^n) \\ &= a^n - b^n. \end{aligned}$$

Somit gilt $na^{n-1} \geq \frac{a^n-b^n}{a-b} \geq nb^{n-1}$ für $a \neq b$ genau dann, wenn

$$na^{n-1} \geq a^{n-1} + a^{n-2}b + \cdots + ab^{n-2} + b^{n-1} \geq nb^{n-1}.$$

Sei $a > b$, und seien $a, b > 0$. Dann gilt $a^s \geq b^s$ für alle $s \in \mathbb{N}_0$.

Seien nun $r, s \in \mathbb{N}_0$ mit $r \geq s$. Dann ist $a^{r-s} > 0$, und da $a^s \geq b^s$, folgt $a^r = a^{r-s}a^s \geq a^{r-s}b^s$. Da $b^s > 0$ und $a^{r-s} \geq b^{r-s}$, folgt auch $a^{r-s}b^s \geq b^{r-s}b^s = b^r$. Somit gilt

$$a^r \geq a^{r-s}b^s \geq b^r \text{ für alle } r, s \in \mathbb{N}_0 \text{ mit } r \geq s.$$

Insbesondere gilt für $r = n-1$ und alle $0 \leq i \leq n-1$:

$$a^{n-1} \geq a^{n-1-i}b^i \geq b^{n-1}.$$

Es folgt

$$\begin{aligned}
na^{n-1} &= \underbrace{a^{n-1} + \cdots + a^{n-1}}_{n \text{ mal}} \\
&\geq a^{n-1} + a^{n-2}b + \cdots + ab^{n-1} + b^n \\
& \text{ denn jeder Summand ist } \leq a^{n-1} \\
&\geq \underbrace{b^{n-1} + \cdots + b^{n-1}}_{n \text{ mal}} \\
& \text{ denn jeder Summand ist } \leq a^{n-1-i}b^i \text{ für ein } 0 \leq i \leq n-1 \\
&= nb^{n-1}.
\end{aligned}$$

2. Für $a = 1$ und $b = -2$ und $n = 3$ gilt $na^{n-1} = 3 < 12 = nb^{n-1}$. Für $n = 3$, $a = 1$ und $b = -2$ ist die Formel in 1. also nicht richtig.

Aufgabe 4.3

Wenn $x < -a^2$ ist, dann ist $\sqrt{a^2 + x}$ nicht definiert. Sei also $x \geq -a^2$.

Dann ist $\sqrt{a^2 + x}$ definiert und ≥ 0. Weiter gilt $a + \frac{x}{2a} \geq a - \frac{a^2}{2a} = \frac{a}{2} > 0$. Somit gilt $\sqrt{a^2 + x} \leq a + \frac{x}{2a}$ genau dann, wenn gilt:

$$(\sqrt{a^2 + x})^2 = a^2 + x \leq (a + \frac{x}{2a})^2 = a^2 + x + \frac{x^2}{4a^2}.$$

Diese Ungleichung ist aber immer erfüllt, denn $\frac{x^2}{4a^2} = (\frac{x}{2a})^2 \geq 0$. Somit gilt die Ungleichung für alle $x \geq -a^2$. Genau dann ist die Ungleichung eine Gleichung, wenn $\frac{x^2}{4a^2} = 0$, wenn also $x = 0$ gilt.

Aufgabe 4.4

Angenommen, es gibt $x, y \in \mathbb{R}$, sodass die Gleichung $\frac{1}{x+y} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$ erfüllt ist. Dann sind $x \neq 0$ und $y \neq 0$, und es gilt

$$\begin{aligned}
\tfrac{1}{x+y} = \tfrac{1}{x} + \tfrac{1}{y} &\Leftrightarrow xy(x+y)\tfrac{1}{x+y} = x\tfrac{1}{x}y(x+y) + xy\tfrac{1}{y}(x+y) \\
&\Leftrightarrow xy = y(x+y) + x(x+y) = x^2 + 2xy + y^2 \quad (*) \\
&\Leftrightarrow xy = (x+y)^2
\end{aligned}$$

Die Gleichung $(*)$ ist aber auch äquivalent zu $-3xy = x^2 - 2xy + y^2 = (x-y)^2$. Da Quadratzahlen immer ≥ 0 sind, folgt $xy \geq 0$ und $-3xy \geq 0$. Da xy entweder positiv oder negativ ist (denn $xy \neq 0$, da jeder Faktor $\neq 0$ ist), folgt ein Widerspruch. Unsere Annahmen, es gäbe $x, y \in \mathbb{R}$ mit $\frac{1}{x+y} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$ ist also falsch.

Aufgabe 4.5

Wir beweisen mit Induktion nach n, dass $0 < a_{n+1} < a_n < \frac{1}{2}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.

Sei $n = 1$. Nach Annahme gilt $0 < a_1 < \frac{1}{2}$. Es folgt

$$a_2 = a_1 - \frac{1}{2}a_1^2 = a_1(1 - \frac{1}{2}a_1) < a_1(1-0) < \frac{1}{2}.$$

Beim ersten Ungleichungszeichen haben wir $a_1 > 0$, also $\frac{1}{2}a_1 > 0$ verwendet. Außerdem gilt

$$a_2 = a_1 - \frac{1}{2}a_1^2 = a_1(1 - \frac{1}{2}a_1) > a_1(1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}) = \frac{3}{4}a_1 > 0.$$

Dabei haben wir beim ersten Ungleichungszeichen $a_1 < \frac{1}{2}$ benutzt.

Es gilt also $0 < a_2 < a_1 < \frac{1}{2}$, der Induktionsanfang.

Für den Induktionsschritt nehmen wir an, dass die Ungleichung $0 < a_{n+1} < a_n < \frac{1}{2}$ für ein $n \geq 1$ gilt. Es folgt

$$a_{n+2} = a_{n+1}(1 - \frac{1}{2}a_{n+1}^{n+1}) < a_{n+1}(1-0) = a_{n+1} < \frac{1}{2},$$

wobei wir beim ersten Ungleichungszeichen die Abschätzung $0 < a_{n+1}$ und beim zweiten die Abschätzung $a_{n+1} < \frac{1}{2}$ verwendet haben. Weiter gilt

$$a_{n+2} = a_{n+1}(1 - \frac{1}{2}a_{n+1}^{n+1}) > a_{n+1}(1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}) = \frac{3}{4}a_{n+1} > 0,$$

wobei wir beim ersten Ungleichungszeichen die Abschätzung $a_{n+1} < \frac{1}{2}$, also $a_{n+1}^{n+1} < \frac{1}{2}$, und beim zweiten die Abschätzung $a_{n+1} > 0$ verwendet haben. Es folgt $0 < a_{n+2} < a_{n+1} < \frac{1}{2}$, und mit dem Prinzip der vollständigen Induktion gilt die Abschätzung $0 < a_{n+1} < a_n < \frac{1}{2}$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Somit ist die Folge monoton fallend und beschränkt. Mit dem Monotonieprinzip folgt, dass (a_n) konvergent ist.

Aufgabe 4.6

1. Für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 1$ gilt

$$\left|a_n - \frac{1}{2}\right| = \left|\frac{n+1}{2n-1} - \frac{1}{2}\right| = \left|\frac{2n+2-(2n-1)}{2(2n-1)}\right| = \frac{3}{4n-3} \leq \frac{3}{2n}.$$

   Sei $\varepsilon > 0$. Sei $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $n_0 > \frac{3}{2\varepsilon}$. Für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq n_0$ gilt dann

$$\left|a_n - \frac{1}{2}\right| \leq \frac{3}{2n} \leq \frac{3}{2n_0} < \varepsilon.$$

   Es folgt, dass (a_n) gegen $\frac{1}{2}$ konvergiert.

2. Sei $\varepsilon > 0$. Sei $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $n_0 > \frac{1}{\varepsilon^2} - 1$. Dann gilt für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq n_0$ die Abschätzung
$$\frac{1}{\varepsilon} < \sqrt{n_0 + 1} \leq \sqrt{n+1} < \sqrt{n+1} + \sqrt{n},$$
und es folgt
$$\begin{aligned} |\sqrt{n+1} - \sqrt{n} - 0| &= \left|\tfrac{(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}\right| \\ &= \left|\tfrac{n+1-n}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}\right| = \left|\tfrac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}\right| < \varepsilon. \end{aligned}$$
Es folgt, dass (a_n) gegen 0 konvergiert.