Mathematische Grundlagen(1141) SoSe 2012

Kurseinheit 4:

Einsendeaufgaben – Einsendetermin: 29.5.2012

Aufgabe 4.1

Seien $x, y, z \in \mathbb{R}$, und sei $n \in \mathbb{N}$.

Wahr oder falsch?

		wahr	falsch
(1)	Es ist $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$.	☐	☐
(2)	Wenn $x^2 < y^2$, dann gilt $x < y$.	☐	☐
(3)	Wenn zwei der drei Folgen (a_n), (b_n) und $(a_n b_n)$ konvergent sind, dann ist auch die dritte konvergent.	☐	☐
(4)	Wenn zwei der drei Folgen (a_n), (b_n) und $(a_n b_n)$ divergent sind, dann ist auch die dritte divergent.	☐	☐
(5)	Seien $A, B \subseteq \mathbb{R}$, sei $A \subseteq B$, und sei $A \neq \emptyset$. Wenn B beschränkt ist, dann ist auch A beschränkt.	☐	☐
(6)	Seien $A, B \subseteq \mathbb{R}$, sei $A \subseteq B$, und sei $A \neq \emptyset$. Wenn A beschränkt ist, dann ist auch B beschränkt.	☐	☐
(7)	Die Folge $(a_n) = (\frac{2^n}{3^n-4})_{n\geq 2}$ ist monoton.	☐	☐
(8)	Die Menge der $x \in \mathbb{R}$, die die Ungleichung $\lvert 3x-7\rvert < 2$ erfüllen, ist ein Intervall.	☐	☐
(9)	Die Menge der $x \in \mathbb{R}$, die die Ungleichung $(x+1)(x-2) < 0$ erfüllen, ist ein Intervall.	☐	☐
(10)	Es gilt $\lvert\lvert x+y\rvert + \lvert z\rvert - \lvert x+y+z\rvert\rvert = \lvert x+y\rvert + \lvert z\rvert - \lvert x+y+z\rvert$.	☐	☐

[$\max(0, r-f)$ *Punkte, wobei* r *die Anzahl der richtigen und* f *die Anzahl der falschen Antworten ist. Nicht beantwortete Fragen gehen nicht in die Bewertung ein.*]

Diese Seite bleibt aus technischen Gründen frei!

Aufgabe 4.2

1. Beweisen Sie: Für alle $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a > b$ und $a, b > 0$ und alle $n \in \mathbb{N}$ gilt
$$na^{n-1} \geq \frac{a^n - b^n}{a - b} \geq nb^{n-1}.$$
Hinweis: $a - b$ ist ein Faktor von $a^n - b^n$.
2. Beweisen Sie, dass diese Formel im Allgemeinen falsch ist, wenn wir auf die Bedingung $a, b > 0$ verzichten.

[*8 + 2 Punkte*]

Aufgabe 4.3

Sei $a \in \mathbb{R}$ mit $a > 0$. Untersuchen Sie, für welche $x \in \mathbb{R}$ die Wurzel $\sqrt{a^2 + x}$ definiert und die Ungleichung
$$\sqrt{a^2 + x} \leq a + \frac{x}{2a}$$
erfüllt ist. Für welche $x \in \mathbb{R}$ ist diese Ungleichung eine Gleichung?

[*10 Punkte*]

Aufgabe 4.4

Beweisen Sie, dass es keine reellen Zahlen $x, y \in \mathbb{R}$ gibt, die die Gleichung $\frac{1}{x+y} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$ erfüllen. (Oder, mit anderen Worten: Bruchrechnung kann so gemein sein!)

[*10 Punkte*]

Aufgabe 4.5

Sei (a_n) eine reelle Folge, die wie folgt definiert ist: Es ist $a_1 \in \mathbb{R}$ mit $0 < a_1 < \frac{1}{2}$, und für alle $n \geq 1$ gilt $a_{n+1} = a_n - \frac{1}{2}a_n^{n+1}$.

Beweisen Sie, dass (a_n) konvergent ist.

[*10 Punkte*]

Aufgabe 4.6

Beweisen Sie mit Definition 12.1.8, dass die folgenden Folgen konvergent sind:

1. $(a_n) = (\frac{n+1}{2n-1})$,
2. $(a_n) = (\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$.

[*5 + 5 Punkte*]