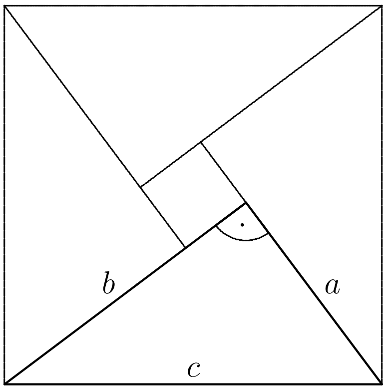
**Inhalt** Der Satz des Pythagoras, Winkel, geometrische Definition von Sinus und Cosinus, Tangens und Cotangens, Additionstheoreme, Graphen von Sinus und Cosinus, Sinus- und Cosinus-Satz

## 1 Der Satz des Pythagoras

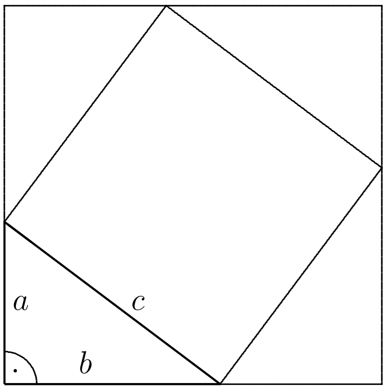
**Satz 1 (Satz des Pythagoras)** *In einem rechtwinkligen Dreieck mit Katheten der Länge $a, b$ und einer Hypotenuse der Länge $c$ gilt $a^2 + b^2 = c^2$.*




Ein indischer Beweis:
Der Flächeninhalt $D$ des rechtwinkligen Dreiecks ist $D = \frac{1}{2}ab$.
Das kleine Quadrat in der Mitte hat den Flächeninhalt $(b-a)^2$, das große Quadrat hat einerseits den Flächeninhalt $c^2$, andererseits den Flächeninhalt

$$4D + (b-a)^2 = 2ab + (b-a)^2.$$

Also ist $c^2 = 2ab + (b-a)^2 = a^2 + b^2$.




Ein anderer Beweis:
Das große Quadrat hat einerseits den Flächeninhalt $(a+b)^2$, andererseits den Flächeninhalt

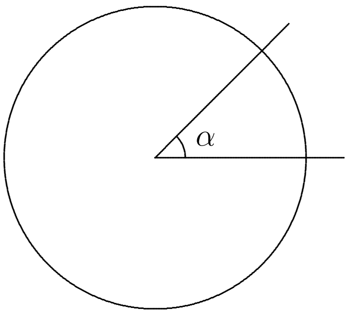
$$c^2 + 4D = c^2 + 4 \cdot \frac{ab}{2},$$

also ist $(a+b)^2 = c^2 + 2ab$, daraus folgt

$$a^2 + b^2 = c^2.$$

## 2 Winkel

Seit den Babyloniern werden Winkel in Grad gemessen: Bei einmaligem Durchlaufen eines Kreises wird ein Winkel von $360°$ zurückgelegt.

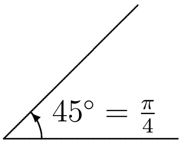


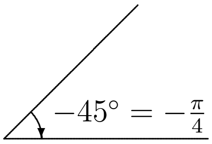

Neben dem Gradmaß wird auch das Bogenmaß zur Angabe eines Winkels benutzt. Ist $\alpha$ ein Winkel, so ist für jeden Kreis das Verhältnis

$$\frac{\text{Länge des zu } \alpha \text{ gehörigen Kreisbogens}}{\text{Radius des Kreises}}$$

gleich, man nennt es *Bogenmaß* von $\alpha$.

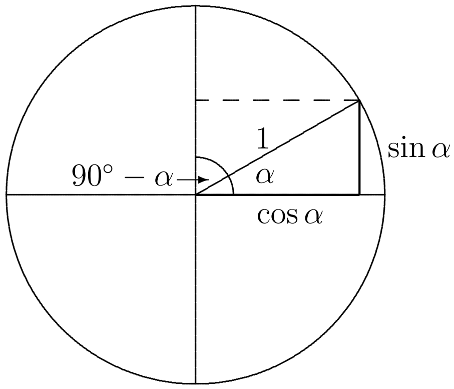
$\pi$ ist definiert als halber Umfang eines Kreises vom Radius $1$, also $\pi \mathrel{\widehat{=}} 180°$.






Man führt noch *orientierte Winkel* ein: Bei einer Linksdrehung gibt man dem Grad- bzw. Bogenmaß ein positives Vorzeichen, bei einer Rechtsdrehung ein negatives Vorzeichen.

## 3 Geometrische Definition von Sinus und Cosinus




Für einen Winkel $\alpha$ im Einheitskreis (= Kreis um 0 mit Radius 1) setzt man

$$\sin\alpha := \text{Gegenkathete}, \quad \cos\alpha := \text{Ankathete}.$$

Den Punkt mit den Koordinaten $(\cos\alpha, \sin\alpha)$ erreicht man also, wenn man auf dem Einheitskreis von $(1, 0)$ aus den Winkel $\alpha$ durchläuft.

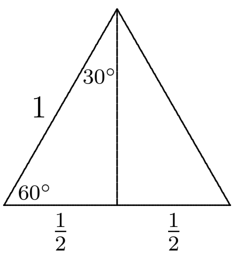
Aus der Zeichnung erkennt man: $\sin(90° - \alpha) = \cos\alpha$, $\cos(90° - \alpha) = \sin\alpha$.

Nach dem Satz des Pythagoras (Satz 1) gilt $(\cos\alpha)^2 + (\sin\alpha)^2 = 1$, insbesondere gilt $-1 \leq \cos\alpha, \sin\alpha \leq 1$.

Da sich die Funktionswerte nach vollen Kreisdurchläufen wiederholen, gilt

$$\sin(\alpha \pm 2\pi) = \sin\alpha, \ \cos(\alpha \pm 2\pi) = \cos\alpha.$$

**Spezielle Werte** Für $\alpha = 45°$ ist $90° - \alpha = \alpha$, also $1 = (\cos\alpha)^2 + (\sin\alpha)^2 = 2(\sin\alpha)^2$ und damit $\sin 45° = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\sqrt{2} = \cos 45°$.



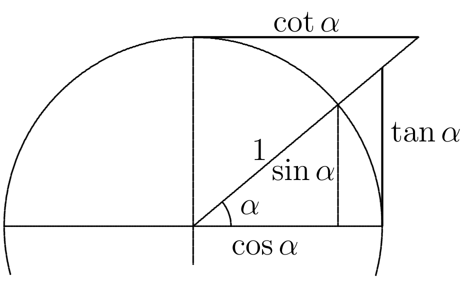

$\sin 30°$, $\cos 30°$ kann man am gleichseitigen Dreieck ablesen:

$$\sin 30° = \frac{1}{2} = \cos 60°,$$
$$\sin 60° = \sqrt{1 - (\tfrac{1}{2})^2} = \tfrac{1}{2}\sqrt{3} = \cos 30°.$$

Man erhält folgende Tabelle:

| | $0°$ | $30°$ | $45°$ | $60°$ | $90°$ |
|---|---|---|---|---|---|
| sin | 0 | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{2}\sqrt{2}$ | $\frac{1}{2}\sqrt{3}$ | 1 |
| cos | 1 | $\frac{1}{2}\sqrt{3}$ | $\frac{1}{2}\sqrt{2}$ | $\frac{1}{2}$ | 0 |

## 4 Tangens und Cotangens




Man setzt

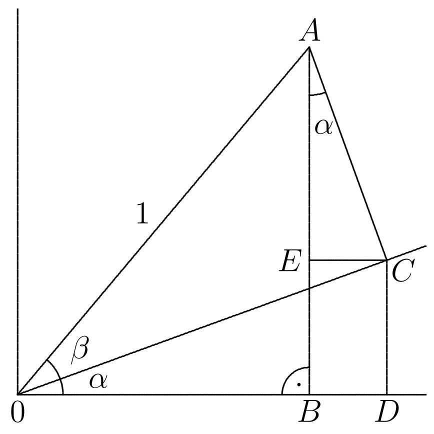
$$\tan\alpha := \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}, \quad \text{falls } \cos\alpha \neq 0,$$
$$\cot\alpha := \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}, \quad \text{falls } \sin\alpha \neq 0.$$

Die nebenstehende Skizze zeigt die geometrische Bedeutung von $\tan\alpha, \cot\alpha$. (Das ergibt sich aus einem Strahlensatz.)

## 5 Additionstheoreme für Sinus und Cosinus

**Satz 2 (Additionstheoreme)** *Für alle* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ *gilt*

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta, \;\; \cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta.$$




Begründung der ersten Gleichung:
Wir tragen $\alpha+\beta$ von der $x$-Achse aus ab und wählen $\overline{0A} = 1$; gesucht ist dann $\sin(\alpha+\beta) = \overline{AB}$.
Wir fällen von $A$ das Lot auf den freien Schenkel von $\alpha$, es entsteht $C$. Von $C$ aus fällen wir Lote auf die $x$-Achse und $AB$, so entstehen $D$ und $E$. Es gilt

$$\sin\beta = \overline{AC}, \;\; \cos\beta = \overline{0C}.$$

Der Winkel $\sphericalangle EAC$ ist $\alpha$. Also gilt

$$\begin{aligned} \overline{CD} &= \overline{0C}\sin\alpha = \cos\beta\sin\alpha, \\ \overline{AE} &= \overline{AC}\cos\alpha = \sin\beta\cos\alpha. \end{aligned}$$

Daraus folgt $\sin(\alpha+\beta) = \overline{AB} = \overline{EB} + \overline{AE} = \overline{CD} + \overline{AE} = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$.
Die zweite Gleichung wird ähnlich bewiesen, man benutzt $\cos(\alpha+\beta) = \overline{0B} = \overline{0D} - \overline{EC}$.

**Folgerung 1** $\cos\alpha = \sin(\alpha + \frac{\pi}{2})$ *für alle* $\alpha \in \mathbb{R}$.

Beweis: Nach dem Additionstheorem für sin (Satz 2) gilt

$$\sin(\alpha + \frac{\pi}{2}) = \sin\alpha\cos\frac{\pi}{2} + \cos\alpha\sin\frac{\pi}{2} = 0 + \cos\alpha \cdot 1 = \cos\alpha.$$

**Folgerung 2** $\sin(-\alpha) = -\sin\alpha, \;\; \cos(-\alpha) = \cos\alpha$ *für alle* $\alpha \in \mathbb{R}$.

Beweis: Aus den Additionstheoremen (Satz 2) folgt

$$0 = \sin 0 = \sin\big(\alpha + (-\alpha)\big) = \sin\alpha\cos(-\alpha) + \cos\alpha\sin(-\alpha), \tag{1}$$
$$1 = \cos 0 = \cos\big(\alpha + (-\alpha)\big) = \cos\alpha\cos(-\alpha) - \sin\alpha\sin(-\alpha). \tag{2}$$

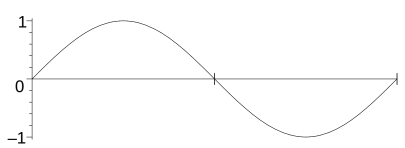
Man multipliziert (1) mit $\sin(-\alpha)$, (2) mit $\cos(-\alpha)$, addiert und erhält

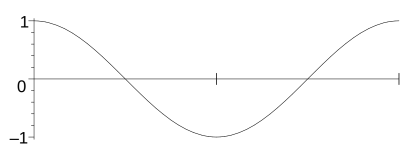
$$\cos(-\alpha) = \cos\alpha\big(\sin^2(-\alpha) + \cos^2(-\alpha)\big) = \cos\alpha \cdot 1 = \cos\alpha.$$

Multipliziert man (1) mit $\cos(-\alpha)$, (2) mit $\sin(-\alpha)$ und subtrahiert, so erhält man

$$-\sin(-\alpha) = \sin\alpha\big(\cos^2(-\alpha) + \sin^2(-\alpha)\big) = \sin\alpha.$$

## 6 Graphen von Sinus und Cosinus in $[0, 2\pi]$

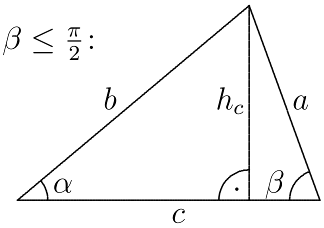


## 7 Sinus- und Cosinus-Satz

**Satz 3 (Sinus-Satz)** *In jedem Dreieck verhalten sich zwei Seiten zueinander wie die Sinuswerte der gegenüberliegenden Winkel.*

Für $\beta \leq \frac{\pi}{2}$:

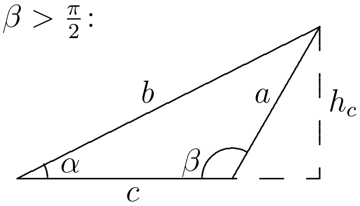



Begründung: Zu zeigen ist z. B. $\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{a}{b}$.
Wir drücken die Höhe $h_c$ auf zwei Weisen aus:

$$h_c = b\sin\alpha = a\sin\beta.$$

Daraus folgt $\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{a}{b}$.

Für $\beta > \frac{\pi}{2}$:



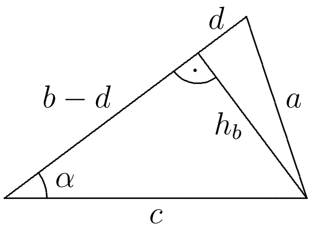

Für $\beta > \frac{\pi}{2}$ gilt:

$$h_c = b\sin\alpha = a\sin(\pi - \beta).$$

Nach Additionstheorem (Satz 2) und Folgerung 2 ist

$$\sin(\pi - \beta) = 0 + (-1)\sin(-\beta) = \sin\beta.$$

**Satz 4 (Cosinus-Satz)** *In jedem Dreieck ist das Quadrat über einer Seite gleich der Summe der Quadrate über den beiden anderen Seiten, vermindert um das doppelte Produkt aus diesen beiden Seiten und dem Cosinus des eingeschlossenen Winkels.*




Begründung für das spitzwinklige Dreieck ($\gamma \leq \frac{\pi}{2}$):
Mit dem Satz des Pythagoras (Satz 1) folgt

$$\begin{aligned} a^2 &= h_b^2 + d^2 = h_b^2 + \big(b - (b-d)\big)^2 \\ &= h_b^2 + (b-d)^2 + b^2 - 2b(b-d) \\ &= c^2 + b^2 - 2b(b-d). \end{aligned}$$

Es ist $b - d = c\cos\alpha$, also gilt

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha.$$

Für das stumpfwinklige Dreieck argumentiert man ähnlich.