Das schriftliche Ziehen einer Kubikwurzel

Sobald man die Kubikwurzel aus einer Zahl ziehen soll, greift man automatisch zum Taschenrechner.
*Ist jedoch kein Taschenrechner aufzutreiben, stellt man sich oft folgende Frage: **"Was mache ich jetzt?"***
Antwort:
"Löse das Problem per Hand!"

Ein Beispiel soll die Vorgehensweise erklären!

Das etwas rechenaufwendige "Ziehen" von Kubikwurzeln ("dritte Wurzel") auf schriftlichem Wege läßt sich am einfachsten anhand eines Beispiels erklären. Wer keine Probleme mit der schriftlichen Multiplikation bzw. Division hat, dem sollte dieses Verfahren keine großen Schwierigkeiten bereiten. Das von mir gewählte Beispiel beinhaltet bei der Berechnung zwei Sonderfälle und ist deshalb gut zur Übung geeignet. Wer Mathematik zu seinen Hobby's zählt, ist hier genau auf der richtigen Seite gelandet. Es gibt nämlich nicht mehr viele Menschen, die Kubikwurzeln schriftlich "ziehen" können. Viel Spaß dabei!

Als Beispiel soll die Kubikwurzel aus der Zahl 201745589625 "gezogen" werden.

Also $\sqrt[3]{201745589625} = ?$

Schritt	Anweisung	**Beispiel**
1	Zerlege die Zahl von rechts beginnend in Dreiergruppen.	$\sqrt[3]{201\vert 745\vert 589\vert 625} =$
2	Suche die (ganze) Zahl, deren Kubik die ganz links stehende Zifferngruppe ergibt oder ihr von unten her am nahsten kommt. Setze sie hinter das Gleichheitszeichen, denn sie ist die erste Ziffer der gesuchten Kubikwurzel.	$\sqrt[3]{201\vert 745\vert 589\vert 625} = 5$
3	Schreibe das Kubik der gefundenen Zahl unter die linke Zifferngruppe und ziehe es von ihr ab.	$\sqrt[3]{201\vert 745\vert 589\vert 625} = 5$ $\underline{-125}$ 76

4	Setze die Differenz wie bei der schriftlichen Division unter den Strich und hänge die linke Ziffer der nächsten Dreiergruppe hinten dran.	$\sqrt[3]{201\|745\|589\|625} = 5$ -125 $76\,7$
5	In einer Nebenrechnung wird die so entstandene Zahl (ohne Berücksichtigung des Restes) durch das Dreifache des Quadrates, des bisher ermittelten Wurzelwertes (hier a genannt), dividiert.	$\sqrt[3]{201\|745\|589\|625} = 5$ a -125 $76\,7$ $767 : (3 \cdot a^2) = b + \text{Rest}$ $\Longrightarrow 767 : 75 = 10 + \text{Rest}$ $\Longrightarrow b = 10$
6	Das Ergebnis der Division (hier b genannt) ist die nächste Ziffer der gesuchten Kubikwurzel. Da Ziffern bekanntlich einstellig sind und im Bereich (0...9) liegen, liegt im Beispiel (hier b = 10) ein Sonderfall vor. Es wird Abhilfe geschaffen in dem man b, wann immer b > 9 ist, auf 9 reduziert.	*Sonderfall:* $b > 9$ $\Longrightarrow b = 9$

7a	Nun hänge die verbleibenden zwei Ziffern der nächsten Dreiergruppe an die unter dem Strich stehende Zahl dran. In einer weiteren Nebenrechnung (s. rechts) wird ein Wert berechnet, der kleiner als die Zahl unter dem Strich sein muß. Ist dieses der Fall, ist b gleichzeitig die nächste Ziffer der gesuchten Kubikwurzel. Im Beispiel ist es allerdings nicht der Fall, womit wir es wieder mit einem Sonderfall zu tun haben. b muß auf die nächstniedrigere (ganze) Zahl (hier von 9 auf 8) reduziert werden. Achtung: Dieser Vorgang kann sich bis zu dreimal (in Ausnahmefällen) wiederholen!	$\sqrt[3]{201\vert 745\vert 589\vert 625} = 5$ -125 $76\,745$ *Nebenrechnung:* $(b^2 + 3\cdot a\cdot b\cdot 10 + 3\cdot a^2\cdot 100)\cdot b \overset{?}{\leq} 76745$ *Hier:* 81 $+135$ $+75$ $8931 \cdot 9$ 80379 $80379 > 76745 \Longrightarrow b = b - 1$ $\Longrightarrow b = 8$
7b	Schritt 7a wird mit dem neuen b (jetzt 8) wiederholt. Da der in der Nebenrechnung berechnete Wert nun tatsächlich kleiner ist als der Wert, der unter dem Strich steht, ist b auch die nächste Ziffer der gesuchten Kubikwurzel. Setze also b hinter a.	$\sqrt[3]{201\vert 745\vert 589\vert 625} = 58$ -125 $76\,745$ *Nebenrechnung:* $(b^2 + 3\cdot a\cdot b\cdot 10 + 3\cdot a^2\cdot 100)\cdot b \overset{?}{\leq} 76745$ *Jetzt:* 64 $+120$ $+75$ $8764 \cdot 8$ 70112 $70112 < 76745 \Longrightarrow b = 8$

8	Der Wert, den man aus der vorherigen Nebenrechnung erhält, wird jetzt (wie in Schritt 3) von der unter dem Strich stehenden Zahl abgezogen. Es folgt Schritt 4: Setze die Differenz wie bei der schriftlichen Division unter den Strich und hänge die linke Ziffer der nächsten Dreiergruppe hinten dran. Es folgt Schritt 5: In einer Nebenrechnung wird die so entstandene Zahl (ohne Berücksichtigung des Restes) durch das Dreifache des Quadrates, des bisher ermittelten Wurzelwertes (hier a genannt), dividiert.	$\sqrt[3]{201\vert 745\vert 589\vert 625} = 58$ a -125 $76\,745$ $-70\,112$ $6\,633\,5$ $66335 : (3 \cdot a^2) = b + \text{Rest}$ $\Longrightarrow 66335 : 10092 = 6 + \text{Rest}$ $\Longrightarrow b = 6$
9	Das Ergebnis dieser Division wird wieder b genannt. Da b nicht größer als 9 ist, liegt auch nicht der in Schritt 6 vorkommende Sonderfall vor. Es folgt Schritt 7a: Nun hänge die verbleibenden zwei Ziffern der nächsten Dreiergruppe an die unter dem Strich stehende Zahl dran. In einer weiteren Nebenrechnung (s. rechts) wird ein Wert berechnet, der kleiner als die Zahl unter dem Strich sein muß. Da es diesmal der Fall ist, wird Schritt 7b übersprungen. b ist also die nächste Ziffer der gesuchten Kubikwurzel und wird somit an a gehängt.	$\sqrt[3]{201\vert 745\vert 589\vert 625} = 586$ -125 $76\,745$ $-70\,112$ $6\,633\,589$ *Nebenrechnung:* $(b^2 + 3 \cdot a \cdot b \cdot 10 + 3 \cdot a^2 \cdot 100) \cdot b \overset{?}{\leq} 6633589$ *Hier:* 36 $+\ 1044$ $+10092$ $1019676 \cdot 6$ 6118056 $6118056 < 6633589 \Longrightarrow b = 6$

10	Schritt 10 ist genau wie Schritt 8: "Der Wert, den man aus der vorherigen Nebenrechnung erhält, wird jetzt (wie in Schritt 3) von der unter dem Strich stehenden Zahl abgezogen. Es folgt Schritt 4: Setze die Differenz wie bei der schriftlichen Division unter den Strich und hänge die linke Ziffer der nächsten Dreiergruppe hinten dran. Es folgt Schritt 5: In einer Nebenrechnung wird die so entstandene Zahl (ohne Berücksichtigung des Restes) durch das Dreifache des Quadrates, des bisher ermittelten Wurzelwertes (hier a genannt), dividiert."	$\sqrt[3]{201\vert 745\vert 589\vert 625} = 586$ a -125 $76\,745$ $-70\,112$ $6\,633\,589$ $-6\,118\,056$ $515\,533\,6$ $5155336 : (3 \cdot a^2) = b + \text{Rest}$ $\Longrightarrow 5155336 : 1030188 = 5 + \text{Rest}$ $\Longrightarrow b = 5$

<table>
<tr>
<td>11</td>
<td>Schritt 11 ist genau wie Schritt 9:
"Das Ergebnis dieser Division wird wieder b genannt.
Da b nicht größer als 9 ist, liegt auch nicht der in Schritt 6 vorkommende Sonderfall vor.
Es folgt Schritt 7a:
Nun hänge die verbleibenden zwei Ziffern der nächsten Dreiergruppe an die unter dem Strich stehende Zahl dran.
In einer weiteren Nebenrechnung (s. rechts) wird ein Wert berechnet, der kleiner als die Zahl unter dem Strich sein muß.
Da es diesmal der Fall ist, wird Schritt 7b übersprungen.
b ist also die nächste Ziffer der gesuchten Kubikwurzel und wird somit an a gehängt."</td>
<td>$$\begin{array}{r} \sqrt[3]{201|745|589|625} = 5865 \\ -125 \\ \hline 76\,745 \\ -70\,112 \\ \hline 6\,633\,589 \\ -6\,118\,056 \\ \hline 515\,533\,625 \end{array}$$
Nebenrechnung:
$$(b^2 + 3\cdot a\cdot b\cdot 10 + 3\cdot a^2\cdot 100)\cdot b \overset{?}{\leq} 515533625$$
Hier:
$$\begin{array}{r} 25 \\ +\quad 8790 \\ +1030188 \\ \hline 103106725 \cdot 5 \\ \hline \underline{\underline{515533625}} \end{array}$$
$$515533625 = 515533625 \Longrightarrow b = 5$$</td>
</tr>
<tr>
<td>12</td>
<td>Es folgt wieder Schritt 8: Der Wert, den man aus der vorherigen Nebenrechnung erhält, wird jetzt (wie in Schritt 3) von der unter dem Strich stehenden Zahl abgezogen.
Das Ergebnis dieser Subtraktion ist "zufällig" Null.
In solch einem Fall bricht der ganze Vorgang ab, und man ist an das Ende der Berechnung gelangt. Das gilt allerdings nur, wenn keine relevanten Dreiergruppen mehr folgen (siehe unten).
Die Kubikwurzel von 201745589625 ist also exakt 5865.</td>
<td>$$\begin{array}{r} \sqrt[3]{201|745|589|625} = \underline{\underline{5865}} \\ -125 \\ \hline 76\,745 \\ -70\,112 \\ \hline 6\,633\,589 \\ -6\,118\,056 \\ \hline 515\,533\,625 \\ -515\,533\,625 \\ \hline \underline{\underline{0}} \end{array}$$</td>
</tr>
</table>

A

In den meisten Fällen bricht jedoch der Vorgang nie ab, und man würde eine irrationale Zahl erhalten, an der man dann theoretisch unendlich lange rechnen könnte.

$$
\begin{array}{r}
\sqrt[3]{30,|000|000|000} = 3{,}107\ldots \\
-\ 27 \\ \hline
3\ \ 000 \\
-\ 2\ \ 791 \\ \hline
209\ 000 \\
-\ 000\ 000 \\ \hline
209\ 000\ 000 \\
-\ 202\ 266\ 043 \\ \hline
6\ 733\ 957 \\
\vdots
\end{array}
$$

Eingefügte Dreiergruppen.
Es handelt sich solange um relevante Dreiergruppen, wie Stellen nach dem Komma erwünscht sind. D.h. die Anzahl relevanter Dreiergruppen stimmt mit der Anzahl der Stellen nach dem Komma der Lösung überein.
Die Lösung ist eine irrationale Zahl, d.h. man könnte die Prozedur unendlich lange fortsetzen.

Die Lösung kann natürlich auch eine rationale Zahl sein, die zum Beispiel zwei Stellen hinter dem Komma besitzt. Dieses setzt allerdings voraus, daß die Zahl unter der Wurzel (Radikand) selbst eine rationale Zahl mit mehreren Dezimalen hinter dem Komma ist.

$$
\begin{array}{r}
\sqrt[3]{627,|222|016} = \underline{\underline{8{,}56}} \\
-\ 512 \\ \hline
115\ \ \ 222 \\
-\ 102\ \ \ 125 \\ \hline
13\ \ \ 097\ 016 \\
-\ 13\ \ \ 097\ 016 \\ \hline
\underline{\underline{0}}
\end{array}
$$

Einteilung in Dreiergruppen vom Komma nach rechts weg. (relevante Dreiergruppen)

Die Lösung ist eine rationale Zahl, da die Prozedur an einer Stelle abbricht, an der keine relevanten Dreiergruppen mehr folgen.

Oder aber der Radikand selbst ist irrational, wobei dann jeder selbst wissen muß, wie genau er die Lösung haben will bzw. mit welcher Genauigkeit er den Radikanden angibt.
In solchen Fällen werden die Zahlen hinter dem Komma von links her in Dreiergruppen eingeteilt.
Es müssen jedoch immer Dreiergruppen sein, d. h. eventuelles Auffüllen mit Nullen ist angesagt (siehe Beispiele rechts).

$$
\begin{array}{r}
\sqrt[3]{3,|141|592|653|589|800} = 1{,}46457\ldots \\
-\ 1 \\ \hline
2\ \ 141 \\
-\ 1\ \ 744 \\ \hline
397592 \\
-\ 368136 \\ \hline
29456653 \\
-\ 25649344 \\ \hline
3707\ 309\ 589 \\
-\ 3216\ 042\ 125 \\ \hline
491\ 267\ 464\ 800 \\
-\ 450\ 421\ 180\ 993 \\ \hline
40\ 846\ 283\ 807 \\
\vdots
\end{array}
$$

Durch das Anhängen von von Nullen erzeugte Dreiergruppe.
Sie ist für die Berechnung relevant.

Die Kubikwurzel der transzendent, irrationalen Zahl Pi ist logischerweise ebenfalls irrational, da unendlich viele relevante Dreiergruppen existieren, die durch die Rechenprozedur alle abgearbeitet werden müßten, um eine exakte Lösung zu erhalten.
Die Berechnung wurde hier jedoch auf nur fünf Stellen hinter dem Komma beschränkt.
Das Ergebnis ist übrigens genauer als bei einem Taschenrechner, der mit einer Rechengenauigkeit von elf Dezimalen hinter dem Komma arbeitet.

<table>
<tr>
<td>B</td>
<td>Ist der Radikand eine ganze Zahl, bricht der Berechnungsvorgang jedoch nicht wie im ersten Beispiel ab, so bekommt der Radikand am Ende ein Komma und es werden Dreiergruppen die aus Nullen bestehen hinten angehängt. An dieser Stelle bekommt auch die Lösung ein Komma.</td>
<td>

$$\sqrt[3]{12|345} = 23$$

$$\begin{array}{r} -\ 8 \\ \hline 4\,345 \\ -\ 4\,167 \\ \hline 178 \end{array}$$

Da die Prozedur an dieser Stelle nicht abbricht, man das Ergebnis aber etwas genauer haben möchte, fügt man an den Radikanden ein Komma und anschließend soviele Dreiergruppen mit Nullen an, wie man in der Lösung Stellen hinter dem Komma haben möchte. Hinter der 23 erscheint dann natürlich auch ein Komma.

$$\sqrt[3]{12|345,|000|000} = 23{,}11\ldots$$

$$\vdots$$

$$178\ 0 : 1587 = 1 + \text{Rest}$$

$$\vdots$$

Noch etwas:

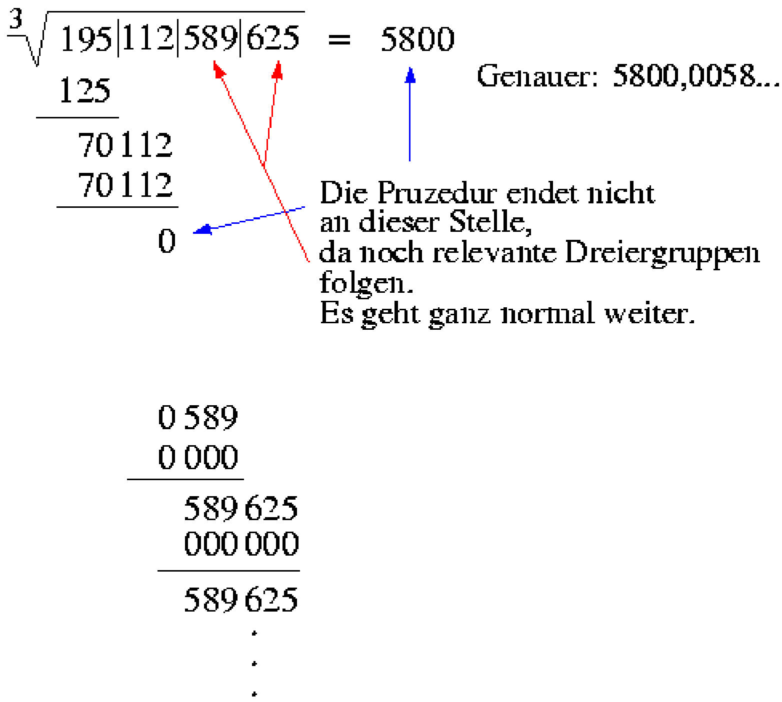
$$\sqrt[3]{12|345,|000|000} = 23{,}1$$

$$\vdots$$

a

In den Rechnungen ist nicht mit a = 23,1 zu rechnen, sondern das Komma wird nicht berücksichtigt. Somit wird mit a = 231 gerechnet.

</td>
</tr>
</table>

C	Hier noch ein Spezialfall: Bei einer Differenz erhalten wir eine Null, es gibt jedoch noch weitere relevante Dreiergruppe im Radikanden. Frage: "Bricht der Berechnungsvorgang jetzt ab, und ich habe schon die Lösung?" Antwort: "Nein! Es muß weitergerechnet werden, bis alle noch folgenden relevanten Dreiergruppen abgearbeitet sind." Das Beispiel rechts zeigt einen solchen Fall. Alle Dreiergruppen vor dem Komma sind für die Berechnung relevant. Alle Dreiergruppen hinter dem Komma, die Ziffern ungleich Null besitzen, sind für die Berechnung relevant. Dreiergruppen hinter dem Komma, die nur aus Nullen bestehen, sind nur dann relevant, wenn sie zur Berechnung einer weiteren Dezimalen in der Lösung benötigt werden.	

Warum das Ganze so gut funktioniert und auf welchen mathematischen Beziehungen es aufgebaut ist, hänge ich vielleicht irgendwann einmal hinten dran. Aber aus Zeitgründen wird dieser Teil vorläufig weggelassen. Ich bitte dieses zu entschuldigen! Sollte irgendjemand ein effizienteres Verfahren kennen, so fühle er sich frei mir einmal davon zu berichten.
