Inhalt Das Prinzip der vollständigen Induktion, das Summenzeichen, das Produktzeichen, Potenzen, rekursive Definitionen

Bezeichnungen
$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$ bezeichne die Menge der *natürlichen* Zahlen. Wir betrachten 0 hier nicht als natürliche Zahl; wir setzen $\mathbb{N}^0 = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$.

1 Das Prinzip der vollständigen Induktion

Sei $n_0 \in \mathbb{N}^0$. Es sei A eine für natürliche Zahlen (und 0, falls $n_0 = 0$) sinnvolle Eigenschaft. Es seien die folgenden zwei Bedingungen erfüllt:
1. *(Induktionsanfang)* A trifft auf n_0 zu.
2. *(Induktionsschritt)* Für alle $n \in \mathbb{N}^0$, $n \geq n_0$ gilt: Trifft A auf n zu, so auch auf $n+1$.

Sind 1. und 2. erfüllt, dann trifft A auf alle $n \in \mathbb{N}^0$, $n \geq n_0$ zu.

Wir betrachten das Induktionsprinzip als *Axiom* für natürliche Zahlen (das wir also nicht beweisen müssen). Mit dem Induktionsprinzip können Behauptungen (z. B. Formeln) für alle natürlichen Zahlen bewiesen werden.

Beispiel Wir wollen $1 + 2 + \ldots + n = \frac{1}{2}n(n+1)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ zeigen.

Beweis durch vollständige Induktion: Die Eigenschaft A treffe auf $n \in \mathbb{N}$ genau dann zu, wenn die obige Formel für n gilt.
Induktionsanfang $n = 1$: Die Formel gilt wegen $1 = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 2$ für $n = 1$.
Induktionsschritt $n \to n+1$: Im Induktionsschritt müssen wir für ein beliebiges $n \in \mathbb{N}$ von der Formel für n auf die Formel für $n+1$ schließen, wir können also $1+2+\ldots+n = \frac{1}{2}n(n+1)$ voraussetzen *(Induktionsvoraussetzung)* und müssen dann $1+2+\ldots+(n+1) = \frac{1}{2}(n+1)(n+2)$ zeigen *(Induktionsbehauptung)*. Wir berechnen also

$$\begin{aligned} 1 + 2 + \ldots + (n+1) &= 1 + 2 + \ldots + n + (n+1) \\ &= \tfrac{1}{2}n(n+1) + (n+1) \quad \textit{(nach Induktionsvoraussetzung)} \\ &= \tfrac{1}{2}(n+1)(n+2), \end{aligned}$$

also gilt die Induktionsbehauptung. Nach dem Induktionsprinzip gilt also die Formel für alle $n \in \mathbb{N}$.

2 Das Summenzeichen

Es seien m, n ganze Zahlen mit $m \leq n$ und $a_m, a_{m+1}, \ldots, a_n$ reelle Zahlen. Wir setzen

$$\sum_{j=m}^{n} a_j := a_m + a_{m+1} + \ldots + a_n.$$

(Dabei steht $\sum$ für „Summenbildung", j durchläuft die ganzen Zahlen von m bis n.) Der Summationsindex j kann durch jeden anderen Buchstaben ersetzt werden, der nicht zu Kollisionen führt, es gilt also beispielsweise

$$\sum_{j=m}^{n} a_j = \sum_{i=m}^{n} a_i = \sum_{k=m}^{n} a_k = \sum_{\mu=m}^{n} a_\mu = \sum_{\nu=m}^{n} a_\nu = \text{usw.}$$

In dem obigen Beispiel können wir statt $1+2+\ldots+n$ auch $\sum\limits_{j=1}^{n} j$ schreiben.

Rechenregeln für das Summenzeichen

$$\sum_{j=m}^{n} a_j = \sum_{j=m-1}^{n-1} a_{j+1} = \ldots = \sum_{j=m-p}^{n-p} a_{j+p} \quad \text{für jedes } p \in \mathbb{N}, \text{ und ebenso} \qquad \text{(a))}$$

$$= \sum_{j=m+1}^{n+1} a_{j-1} = \ldots = \sum_{j=m+p}^{n+p} a_{j-p} \quad \text{für jedes } p \in \mathbb{N} \ \textit{(Indexverschiebung).}$$

Beweis: Jede der obigen Summen ist gleich $a_m + \ldots + a_n$.

b) Die Summe reeller Zahlen hängt nicht von der Reihenfolge der Summanden ab, insbesondere ist $a_m + a_{m+1} + \ldots + a_n = a_n + a_{n-1} + \ldots + a_m$, also gilt

$$\sum_{j=m}^{n} a_j = \sum_{k=0}^{n-m} a_{n-k} = \sum_{i=-n}^{-m} a_{-i}.$$

c) Sind reelle Zahlen $a_1, \ldots, a_m, a_{m+1}, \ldots, a_n$ gegeben, so ist $\sum\limits_{j=1}^{n} a_j = \sum\limits_{j=1}^{m} a_j + \sum\limits_{j=m+1}^{n} a_j$.

d) $\sum\limits_{j=m}^{n} a_j + \sum\limits_{j=m}^{n} b_j = \sum\limits_{j=m}^{n} (a_j + b_j)$ für alle reellen Zahlen $a_m, \ldots, a_n, b_m, \ldots, b_n$.

e) $c \cdot \sum\limits_{j=m}^{n} a_j = \sum\limits_{j=m}^{n} (c a_j)$ für alle reellen Zahlen c. *(Allgemeines Distributivgesetz)*

Konvention über leere Summen

Sind m, n ganze Zahlen mit $m > n$, so setzt man $\sum\limits_{j=m}^{n} a_j := 0$ *(leere Summe).*

(Es ist also z. B. $\sum\limits_{j=1}^{0} a_j = 0$.)

3 Das Produktzeichen

Es seien m, n ganze Zahlen mit $m \leq n$ und $a_m, a_{m+1}, \ldots, a_n$ reelle Zahlen. Wir setzen

$$\prod_{j=m}^{n} a_j := a_m \cdot a_{m+1} \cdot \ldots \cdot a_n.$$

Der Index j kann durch andere Buchstaben $\neq a, m, n$ ersetzt werden.

Beispiel Für $n \in \mathbb{N}$ definieren wir $n! := \prod\limits_{j=1}^{n} j = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n$.

Rechenregeln für das Produktzeichen

a) *Indexverschiebung:* $\prod\limits_{j=m}^{n} a_j = \prod\limits_{j=m-p}^{n-p} a_{j+p} = \prod\limits_{j=m+p}^{n+p} a_{j-p}$ für $p \in \mathbb{N}$, insbesondere gilt $\prod\limits_{j=m}^{n} a_j = \prod\limits_{j=0}^{n-m} a_{j+m}$.

b) Das Produkt reeller Zahlen hängt nicht von der Reihenfolge der Faktoren ab, insbesondere ist $a_m \cdot a_{m+1} \cdot \ldots \cdot a_n = a_n \cdot a_{n-1} \cdot \ldots \cdot a_m$, also gilt

$$\prod_{j=m}^{n} a_j = \prod_{k=0}^{n-m} a_{n-k} = \prod_{i=-n}^{-m} a_{-i}.$$

c) Für reelle Zahlen $a_1, \ldots, a_m, a_{m+1}, \ldots, a_n$ gilt $\prod\limits_{j=1}^{n} a_j = \big(\prod\limits_{j=1}^{m} a_j\big) \cdot \big(\prod\limits_{j=m+1}^{n} a_j\big)$.

d) $\big(\prod\limits_{j=m}^{n} a_j\big) \cdot \big(\prod\limits_{j=m}^{n} b_j\big) = \prod\limits_{j=m}^{n} (a_j b_j)$ für alle reellen Zahlen $a_m, \ldots, a_n, b_m, \ldots, b_n$.

Konvention über leere Produkte

Sind m, n ganze Zahlen mit $m > n$, so setzt man $\prod\limits_{j=m}^{n} a_j := 1$ *(leeres Produkt)*.

(Insbesondere setzt man $0! := \prod\limits_{j=1}^{0} j = 1$.)

4 Potenzen

Für eine reelle Zahl a und $n \in \mathbb{N}^0$ definieren wir $a^n := \prod\limits_{j=1}^{n} a$, also $a^0 = 1$ und $a^n = a \cdot \ldots \cdot a$ (mit n Faktoren a) für $n \in \mathbb{N}$.

Rechenregeln für Potenzen

Mit den Rechenregeln für das Produktzeichen erhält man folgende Rechenregeln:

$$a^{m+n} = \prod_{j=1}^{m+n} a \overset{c)}{=} \big(\prod_{j=1}^{m} a\big) \cdot \big(\prod_{j=m+1}^{m+n} a\big) \overset{a)}{=} a^m \cdot \prod_{j=1}^{n} a = a^m \cdot a^n,$$

$$(ab)^n = \prod_{j=1}^{n} (ab) \overset{d)}{=} \big(\prod_{j=1}^{n} a\big) \cdot \big(\prod_{j=1}^{n} b\big) = a^n \cdot b^n,$$

$$(a^m)^n = \prod_{j=1}^{n} a^m = \prod_{j=1}^{n} \big(\prod_{k=1}^{m} a\big) = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{mn \text{ Faktoren}} = a^{mn}.$$

Binomialkoeffizienten

Es seien $k, n \in \mathbb{N}^0$ mit $k \leq n$. Wir definieren $\binom{n}{k} := \dfrac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$.

Für $1 \leq k \leq n$ folgt also (durch Kürzen von $(n-k)!$)

$$\binom{n}{k} = \frac{1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n}{k! \cdot 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot (n-k)} = \frac{(n-k+1) \cdot \ldots \cdot n}{k!} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)}{1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot k}.$$

Spezialfälle: $\binom{n}{0} = \dfrac{n!}{0! \cdot n!} = 1$, $\binom{n}{n} = \dfrac{n!}{n! \cdot 0!} = 1$, $\binom{n}{1} = \dfrac{n!}{1! \cdot (n-1)!} = n$.

Nach Definition gilt: $\binom{n}{k} = \dfrac{n!}{(n-k)! \cdot k!} = \dfrac{n!}{(n-k)! \cdot \big(n-(n-k)\big)!} = \binom{n}{n-k}$.

Behauptung *Für alle $k, n \in \mathbb{N}$ mit $k \leq n$ gilt* $\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} = \binom{n+1}{k}$.

Beweis:

$$\begin{aligned}\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} &= \frac{n!}{k!\cdot(n-k)!} + \frac{n!}{(k-1)!\cdot\big(n-(k-1)\big)!}\\ &= \frac{n!\cdot(n-k+1)}{k!\cdot(n-k+1)!} + \frac{n!\cdot k}{k!\cdot(n-k+1)!}\\ &= \frac{n!\cdot\big((n-k+1)+k\big)}{k!\cdot(n-k+1)!} = \frac{(n+1)!}{k!\cdot(n+1-k)!} = \binom{n+1}{k}.\end{aligned}$$

Satz (Binomischer Lehrsatz)
Für alle reellen Zahlen a, b und alle $n \in \mathbb{N}^0$ gilt

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k.$$

Beweis durch vollständige Induktion nach n:
Induktionsanfang: Für $n = 0$ ist $(a+b)^0 = 1$ und $\sum\limits_{k=0}^{0} \binom{0}{k} a^{0-k} b^k = \binom{0}{0} a^0 b^0 = 1$.
Induktionsschritt $n \to n+1$: Es gelte die *Induktionsvoraussetzung*

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k.$$

Mit der obigen Behauptung folgt dann

$$(a+b)^{n+1} = (a+b)^n \cdot (a+b) = \Big(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k\Big) \cdot (a+b)$$

$$\begin{aligned}&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k+1} b^k + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^{k+1}\\ &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n+1-k} b^k + \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} a^{n-(k-1)} b^k && \text{(Indexverschiebung)}\\ &= a^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} a^{n+1-k} b^k + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k-1} a^{n+1-k} b^k + b^{n+1}\\ &= a^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \Big[\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}\Big] a^{n+1-k} b^k + b^{n+1}\\ &= a^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n+1}{k} a^{n+1-k} b^k + b^{n+1} && \text{(nach obiger Behauptung)}\\ &= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} a^{n+1-k} b^k.\end{aligned}$$

5 Rekursive Definitionen

Man kann einen Ausdruck $f(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}^0$ wie folgt definieren:
1. Man definiert $f(0)$.
2. Man definiert $f(n+1)$, wobei man $f(n), f(n-1), \ldots, f(0)$ als bereits definiert benutzt.

Beispiel 1: Fibonacci-Zahlen
Fibonacci (1180–1250) formulierte folgendes Problem:

> *Jemand sperrt ein Kaninchenpaar in ein allseitig ummauertes Gehege, um zu erfahren, wieviele Nachkommen dieses eine Paar in einem Jahr haben wird. Dabei bringe jedes Kaninchenpaar monatlich ein neues Paar zur Welt, und die Paare gebären vom zweiten Monat nach ihrer Geburt.*

Für die ersten zwölf Monate erhält man $1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144$ Paare. Kepler (1571–1630) fand hinter diesen Zahlen die Rekursionsformel $f_{n+1} = f_n + f_{n-1}$. Bei Start mit $f_0 = 0,\ f_1 = 1$ erhält man die obige Folge.

Beispiel 2: Rekursive Definition des Summenzeichens
Man kann das Summenzeichen $\sum\limits_{j=1}^{n} a_j$ (und das Produktzeichen) ohne „Pünktchen“ rekursiv definieren durch: $\sum\limits_{j=1}^{0} a_j := 0, \quad \sum\limits_{j=1}^{n+1} a_j := \sum\limits_{j=1}^{n} a_j + a_{n+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}^0$.

Beispiel 3: Rekursive Berechnung der Binomialkoeffizienten
Die Binomialkoeffizienten können mit $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$ und $\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}$ für alle $n \in \mathbb{N}^0$ und $1 \leq k \leq n$ rekursiv berechnet werden, z. B. gilt
$\binom{4}{2} = \binom{3}{2} + \binom{3}{1} = \binom{2}{2} + \binom{2}{1} + \binom{2}{1} + \binom{2}{0} = 1 + 2\binom{2}{1} + 1 = 2 + 2\left(\binom{1}{1} + \binom{1}{0}\right) = 2 + 2(1+1) = 6\,.$