Luise Unger
In LATEX gesetzt von Luise Unger

# Mathematische Grundlagen

Kurseinheit 2:
Matrizen und Vektorräume

mathematik
und
informatik

FernUniversität in Hagen

# Studierhinweise

Nachdem in der ersten Kurseinheit im Wesentlichen Grundlagen festgelegt wurden, geht es in dieser Kurseinheit so richtig mit der Linearen Algebra los. Womit wir bei der Frage wären, worum es bei der Linearen Algebra überhaupt geht.

Dazu beginnen wir allgemeiner, mit dem Begriff „Algebra“.

Das Wort Algebra entstand aus dem Titel eines arabischen Werks, dessen Verfasser, Muhammed ibn Musa Alchwarizmi, im ersten Viertel des 9. Jahrhunderts unserer Zeitrechnung gelebt hat. Aus dem Namen Alchwarizmi leitet sich der in der Informatik und Mathematik übliche Begriff des „Algorithmus“ her. Sie sehen Alchwarizmi hier auf einer sowjetischen Briefmarke, die 1983 zu Ehren seines 1200-jährigen Geburtstags herausgegeben wurde.


Der Titel des Werkes lautete:„Aldschebr walmukabala“. Dabei bedeutet „dschebr“ Wiederherstellung und „mukabala“ Gegenüberstellung, und die Bedeutung dieser Worte ist nach Moritz Cantor (1829–1920, Professor der Geschichte der Mathematik) die folgende:

„Wiederherstellung ist genannt, wenn eine Gleichung derart geordnet wird, dass auf beiden Seiten des Gleichheitszeichens nur positive Glieder sich finden; Gegenüberstellung sodann, wenn Glieder gleicher Natur nach vollzogener Gegenüberstellung nur noch auf der einen Seite vorkommen, wo sie eben im Überschusse vorhanden waren.“

Der Name des Gebietes Algebra verweist also auf die Kunst, Gleichungen zu lösen, und als erste Definition ist das gar nicht schlecht: Algebra ist die mathematische Wissenschaft, die sich mit dem Lösen von Gleichungen beschäftigt.

Natürlich müssen wir spezifizieren, um welche Art von Gleichungen es eigentlich geht. Es gibt in der Mathematik die verschiedensten Formen von Gleichungen, etwa Differentialgleichungen, Integralgleichungen, Funktionalgleichungen und eben auch algebraische Gleichungen. Eine typische algebraische Gleichung ist etwa

$$x^3 - 5x^2 + 11x - 6 = 0,$$

und man fragt sich etwa, für welche Werte von $x$ diese Gleichung eine Lösung besitzt und wie viele Lösungen es gibt.

Die einfachsten algebraischen Gleichungen sind Geradengleichungen. Diese sind von der Form

$$ax + by = r,$$

und da eine Gerade auf lateinisch „linea“ heißt, nennt man eine Geradengleichung auch lineare Gleichung oder auch lineare Gleichung in zwei Unbestimmten $x$ und $y$.

Wir können auch ein System von zwei linearen Gleichungen betrachten, etwa

$$\begin{array}{ccccc} ax & + & by & = & r \qquad (1) \\ cx & + & dy & = & s \qquad (2) \end{array} \quad ,$$

wobei wir annehmen wollen, dass $(a, b) \neq (0, 0)$ und $(c, d) \neq (0, 0)$ sind. Wir fragen uns, für welche Werte von $x$ und $y$ beide Gleichungen eine Lösung haben.

Um diese Frage zu beantworten, versuchen wir das System durch geeignete Umformungen zu lösen. Multiplikation mit $a, b, c, d$ liefert

$$\begin{array}{ccccc} adx & + & bdy & = & dr \qquad (3) \\ bcx & + & bdy & = & bs \qquad (4) \\ acx & + & bcy & = & cr \qquad (5) \\ acx & + & ady & = & as \qquad (6) \end{array}$$

Ziehen wir nun Gleichung (4) von Gleichung (3) und Gleichung (5) von Gleichung (6) ab, so erhalten wir

$$\begin{array}{ccc} (ad - bc)x & = & dr - bs \qquad (7) \\ (ad - bc)y & = & as - cr \qquad (8) \end{array}$$

Wir unterscheiden nun drei Fälle:

(a) $ad - bc \neq 0$.

Dann ist $x = \frac{dr-bs}{ad-bc}$, $y = \frac{as-cr}{ad-bc}$ die eindeutig bestimmte Lösung des Systems der linearen Gleichungen (7) und (8), und dann auch der Gleichungen (1) und (2).

(b) $ad - bc = 0$, und $dr - bs \neq 0$ oder $as - cr \neq 0$. Dann ist das System der Gleichungen (7) und (8) widersprüchlich, und weder das System der Gleichungen (7) und (8) noch das System der Gleichungen (1) und (2) ist lösbar.

(c) $ad-bc = 0$, und $dr-bs = 0 = as-cr$. Da $(a, b) \neq (0, 0)$, können wir annehmen, dass $a \neq 0$ gilt. Dann folgt $c \neq 0$, denn wäre $c = 0$, so folgt aus $ad-bc = 0$ auch $d = 0$, im Widerspruch zu unserer Annahme, dass $(c, d) \neq (0, 0)$ ist. Daher hat das System der linearen Gleichungen (1) und (2) dieselben Lösungen wie das System der linearen Gleichungen (5) und (6). Aber im Fall (c) sind die Geradengleichungen (5) und (6) gleich, und dies zeigt, dass die Lösungen des Systems der linearen Gleichungen (1) und (2) alle Punkte auf der Geraden $ax + by = r$ sind.

Damit haben wir im Vorbeigehen die Theorie von Systemen von zwei linearen Gleichungen mit zwei Unbestimmten erledigt. In der Praxis hat man es jedoch mit Systemen vieler linearer Gleichungen mit Hunderten von Unbestimmten zu tun, und es zeigt sich, dass für die Lösung dieser Art von Problemen eine allgemeine Theorie, die Lineare Algebra, nötig ist.

Allgemein kann man sagen: Eine wichtige Aufgabe der Linearen Algebra ist es, eine systematische Theorie zum Lösen linearer Gleichungssysteme zu entwickeln. Wenn Sie wollen, können Sie dies sogar als eine erste Definition der Linearen Algebra nehmen.

Es folgt eine Übersicht über die einzelnen Kapitel.

Kapitel 4 ist eines der Highlights der Linearen Algebra. Sie lernen in Abschnitt 4.1 ein ganz wichtiges Verfahren kennen – den Gaußalgorithmus – mit dem Sie Matrizen in besonders schöne Form (genannt Treppennormalform) überführen können, ohne dabei wesentliche Eigenschaften der Matrix zu zerstören. Der Gaußalgorithmus ist das wichtigste Werkzeug in der Linearen Algebra, und den müssen Sie beherrschen. In der Virtuellen Universität stellen wir Ihnen Applets zum Einüben des Algorithmus zur Verfügung. Nutzen Sie diese, damit Sie schnell wieder den Kopf frei bekommen für Neues.

Nach Durcharbeiten von Kapitel 4 sollten Sie den Gaußalgorithmus beherrschen, invertierbare Matrizen invertieren können und die Ränge von Matrizen bestimmen können.

In Kapitel 5 untersuchen wir, welche linearen Gleichungssysteme lösbar sind, und wie wir im Falle der Lösbarkeit alle Lösungen finden können. Ein wichtiges Hilfsmittel ist auch hier der Gaußalgorithmus.

Nach Durcharbeiten von Kapitel 5 sollten Sie das Lösen linearer Gleichungssysteme beherrschen, es wird auch in den folgenden Kapiteln weiter benötigt.

In Kapitel 6 kommen wir in den Bereich der „abstrakten“ Linearen Algebra, und wir werden Vektorräume einführen. Aber keine Angst, so abstrakt wird es gar nicht. Wir haben nämlich schon mit Vektorräumen gearbeitet, ohne den Begriff einzuführen. Vektorräume über einem Körper $\mathbb{K}$ sind Mengen, deren Elemente wir addieren dürfen und mit Körperelementen multiplizieren dürfen. Dabei müssen natürlich wieder gewisse Spielregeln gelten. Ein typisches Beispiel für einen Vektorraum über $\mathbb{K}$ ist $\mathrm{M}_{mn}(\mathbb{K})$, und die Regeln sind gerade die, die wir in Kapitel 2 hergeleitet haben. Ein weiteres Beispiel für einen Vektorraum über $\mathbb{K}$ ist die Lösungsmenge eines homogenen linearen Gleichungssystems über $\mathbb{K}$. Wichtig in Kapitel 6 sind auch die weiteren Beispiele.

Nach Durcharbeiten von Kapitel 6 sollten Sie mit folgenden Begriffen umgehen können: Vektorraum, Unterraum, Summe und Durchschnitt von Unterräumen, Erzeugendensystem, Sie sollten das Unterraumkriterium anwenden können und Beispiele für endlich erzeugte Vektorräume und unendlich erzeugte Vektorräume kennen.

# Kapitel 4

# Gaußalgorithmus

## 4.1 Treppennormalformen

Sei $\mathbb{K}$ ein Körper, und sei $A = (a_{ij}) \in \mathrm{M}_{mn}(\mathbb{K})$.

Wir beginnen mit einer zentralen aber etwas technischen Definition. Sie müssen diese nicht auswendig kennen, sollten aber in jedem konkreten Beispiel entscheiden können, ob eine vorgegebene Matrix eine Treppennormalform ist oder nicht.

**4.1.1 Definitionen:** Wir sagen, dass $A \in \mathrm{M}_{mn}(\mathbb{K})$ in **Treppennormalform** ist, wenn $A$ die Nullmatrix ist oder wenn es $r$ Spaltenindizes $j_1 < j_2 < \cdots < j_r$ so gibt, dass für alle $1 \leq i \leq r$ gilt:

(i) $a_{ij_i} = 1$, und

(ii) $a_{lj_i} = 0$ für alle $l \neq i$, und

(iii) $a_{il} = 0$ für alle $l < j_i$, und

(iv) $a_{kl} = 0$ für alle $k > r$ und alle $1 \leq l \leq n$.

Die Indizes $j_1, \ldots, j_r$ einer Matrix in Treppennormalform nennen wir **ausgezeichnete Spaltenindizes**.

Machen wir ein Beispiel, wie eine Matrix $A$ in Treppennormalform in $\mathrm{M}_{58}(\mathbb{R})$

aussehen könnte. Setzen wir $A$ allgemein an,

$$A = \begin{pmatrix} * & * & * & * & * & * & * & * \\ * & * & * & * & * & * & * & * \\ * & * & * & * & * & * & * & * \\ * & * & * & * & * & * & * & * \\ * & * & * & * & * & * & * & * \end{pmatrix},$$

und bestimmen wir, der Definition folgend, die Sternchen.

Zunächst müssen wir gewisse Spaltenindizes auszeichnen, und zwar der Größe nach. Die Folge $2, 3, 5, 7$ ist gestattet, also $j_1 = 2, j_2 = 3, j_3 = 5, j_4 = 7$, und es ist $r = 4$. Bedingung (i) besagt: $a_{1j_1} = a_{12} = 1$, $a_{2j_2} = a_{23} = 1$, $a_{35} = 1$ und $a_{47} = 1$. Also

$$A = \begin{pmatrix} * & 1 & * & * & * & * & * & * \\ * & * & 1 & * & * & * & * & * \\ * & * & * & * & 1 & * & * & * \\ * & * & * & * & * & * & 1 & * \\ * & * & * & * & * & * & * & * \end{pmatrix}.$$

Bedingung (ii) besagt: in jeder ausgezeichneten Spalte stehen oberhalb und unterhalb der 1 nur Nullen. Also

$$A = \begin{pmatrix} * & 1 & 0 & * & 0 & * & 0 & * \\ * & 0 & 1 & * & 0 & * & 0 & * \\ * & 0 & 0 & * & 1 & * & 0 & * \\ * & 0 & 0 & * & 0 & * & 1 & * \\ * & 0 & 0 & * & 0 & * & 0 & * \end{pmatrix}.$$

Bedingung (iii) besagt: alle Einträge in den Zeilen links von den Einträgen 1 sind 0.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & * & 0 & * & 0 & * \\ 0 & 0 & 1 & * & 0 & * & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & * & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & * \\ * & 0 & 0 & * & 0 & * & 0 & * \end{pmatrix}.$$

Bedingung (iv) besagt: alle Zeilen $\begin{pmatrix} a_{k1} & \cdots & a_{kn} \end{pmatrix}$ mit $k > r$ sind Nullzeilen.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & * & 0 & * & 0 & * \\ 0 & 0 & 1 & * & 0 & * & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & * & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Über die verbleibenden Sterne schweigt sich die Definition aus. Sie sind daher beliebige Körperelemente.

**4.1.2 Definition:** Sei $A$ eine Matrix in Treppennormalform mit ausgezeichneten Spaltenindizes $j_1 < j_2 < \cdots < j_r$. Die Paare $(1, j_1), (2, j_2), \ldots (r, j_r)$ nennt man **Pivot-Positionen**. (Gesprochen wird dies: Piv**o**-Positionen, mit langem o und Betonung auf der zweiten Silbe.)

**4.1.3 Aufgabe:** Welche der folgenden Matrizen über $\mathbb{R}$ sind in Treppennormalform? Geben Sie gegebenenfalls die Pivot-Positionen an.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

**4.1.4 Aufgabe:** Geben Sie ein Beispiel für eine Matrix $A \in \mathrm{M}_{64}(\mathbb{R})$ in Treppennormalform, die die Pivot-Positionen $(1, 2)$ und $(2, 4)$ hat.

**4.1.5 Aufgabe:** Listen Sie alle Matrizen in $\mathrm{M}_{22}(\mathbb{F}_2)$ auf. Welche von ihnen sind in Treppennormalform?

**4.1.6 Aufgabe:** Geben Sie ein Beispiel für eine Matrix $A \in \mathrm{M}_{mm}(\mathbb{R})$ in Treppennormalform, die die Pivot-Positionen $(1, 1), (2, 2), \ldots, (m, m)$ hat.

**4.1.7 Aufgabe:** Welche Matrizen $A \in \mathrm{M}_{33}(\mathbb{R})$ in Treppennormalform sind invertierbar?

## 4.2 Der Gaußalgorithmus

In diesem Abschnitt werden wir zeigen, dass jede Matrix durch wiederholtes Anwenden von elementaren Zeilenumformungen in eine Matrix in Treppennormalform überführt werden kann. Wie man dabei strategisch vorgehen kann, wird in dem so genannten „Gaußalgorithmus“ erklärt. Beim Gaußalgorithmus handelt es sich um eine Systematisierung des Eliminationsverfahrens, das Sie möglicherweise in der Schule kennen gelernt haben.

Der Gaußalgorithmus ist nach dem Mathematiker Carl Friedrich Gauß (1777–1855) benannt, der ihn aber weder erfunden (der Algorithmus ist viel älter) noch erstmalig bewiesen hat, der ihn in seinen wissenschaftlichen Arbeiten aber häufig benutzt und somit populär gemacht hat.

Da die allgemeine Beschreibung des Gaußalgorithmus etwas technisch ist, beginnen wir mit einem Beispiel.

**4.2.1 Beispiel:** Sei $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & -1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 4 & 1 & -2 & 5 & -1 \\ 0 & 3 & 6 & 2 & 6 & 8 & 8 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{47}(\mathbb{R})$.

Wir werden $A$ durch elementare Zeilenumformungen in eine Matrix in Treppennormalform überführen.

Wir werden spaltenweise vorgehen, das heißt, wir werden elementare Zeilenumformungen so anwenden, dass die erste Spalte eine Matrix in Treppennormalform ist, dann werden wir elementare Zeilenumformungen so anwenden, dass die Matrix, die aus den ersten beiden Spalten besteht, in Treppennormalform ist, und so weiter.

In unserem Beispiel ist die erste Spalte von $A$ schon eine Matrix in Treppennormalform, und wir gehen gleich zur zweiten.

Der Eintrag an der Stelle $(1,2)$ ist 1, und wir werden $(1,2)$ zu einer Pivot-Position machen. Wir addieren nun das $(-3)$-fache der ersten Zeile zur vierten, und das $(-2)$-fache der ersten Zeile zur dritten. Damit werden die Einträge in der zweiten Spalte unterhalb der 1 in der ersten Zeile 0, also

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & -1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & -6 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 0 & 5 & 5 \end{pmatrix}.$$

Die Matrix, die aus den ersten beiden Spalten von $A_1$ besteht, ist nun in Treppennormalform, und sie hat eine Pivot-Position.

Betrachten wir nun die dritte Spalte. Alle Einträge $a_{i3}$ mit $i \geq 2$ sind 0. Also ist schon die Matrix, die aus den ersten drei Spalten von $A_1$ besteht, in Treppennormalform mit einer Pivot-Position.

Wir betrachten nun die vierte Spalte von $A_1$. Der Eintrag an der Stelle $(2,4)$ ist 0, aber es gibt in der vierten Spalte noch Einträge $a_{i4}$ mit $i > 1$, die nicht 0 sind, etwa der Eintrag 3 an der Stelle $(3,4)$ in $A_1$. Wir werden $(2,4)$ zu einer Pivot-Position machen. Dazu vertauschen wir die zweite und die dritte Zeile von $A_1$ und erhalten

$$A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & -1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & -6 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 0 & 5 & 5 \end{pmatrix}.$$

Nun haben wir ein von 0 verschiedenes Element an der Position $(2, 4)$. Wir multiplizieren die zweite Zeile von $A_2$ mit $\frac{1}{3}$ und erhalten

$$A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & -1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 0 & 5 & 5 \end{pmatrix}$$

Wir verfahren nun so, wie wir es im Fall der zweiten Spalte getan haben. Wir addieren das $(-5)$-fache der zweiten Zeile zur vierten und die zweite Zeile zur ersten und erhalten

$$A_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 10 & 0 & 10 \end{pmatrix}.$$

Die Matrix, die aus den ersten vier Spalten von $A_4$ besteht, ist in Treppennormalform mit Pivot-Positionen $(1, 2)$ und $(2, 4)$. In der fünften Spalte von $A_4$ gibt es noch Einträge $a_{i5}$ mit $i > 2$, etwa das Element $a_{35} = 1$. Wir machen $(3, 5)$ zu einer Pivot-Position, indem wir das $(-10)$-fache der dritten Zeile zur vierten, und das Doppelte der dritten Zeile zur zweiten addieren. Damit erhalten wir

$$A_5 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Die Matrix, die aus den ersten fünf Spalten von $A_5$ besteht, ist nun in Treppennormalform, und da es in der sechsten und siebten Spalte von $A_5$ kein Element $a_{ik}$ mit $i > 3$ und $a_{ik} \neq 0$ gibt, ist $A_5$ in Treppennormalform.

Das, was wir in diesem Beispiel vorgeführt haben, werden wir jetzt formalisieren.

**Gaußalgorithmus:**

Sei $A = (a_{ij}) \in \mathrm{M}_{mn}(\mathbb{K})$. Angenommen, die Matrix, die aus den ersten $t-1$ Spalten von $A$ besteht, ist schon in Treppennormalform mit $r - 1$ Pivot-Positionen. (Der Fall $t - 1 = 0 = r - 1$ ist möglich.) Wir betrachten die $t$-te Spalte von $A$.

Fall 1: Es ist $a_{it} = 0$ für alle $i \geq r$.

Dann ist die Matrix, die aus den ersten $t$ Spalten von $A$ besteht, schon in Treppennormalform. Setze $\tilde{A} = A$.

Fall 2: Es ist $a_{rt} \neq 0$.

Multipliziere die $r$-te Zeile mit $a_{rt}^{-1}$ und addiere für alle $1 \leq i \leq m$, $i \neq r$, das $-a_{it}$-fache der $r$-ten Zeile zur $i$-ten Zeile.

Die resultierende Matrix, die wir $\tilde{A}$ nennen, hat die gleichen ersten $t-1$ Spalten wie $A$, und die $t$-te Spalte ist $\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$, wobei die 1 in der $r$-ten Zeile steht. Die Matrix, die aus den ersten $t$ Spalten von $\tilde{A}$ besteht, ist damit in Treppennormalform mit $r$ Pivotpositionen.

Fall 3: Es ist $a_{rt} = 0$, aber es gibt ein $a_{it} \neq 0$ für ein $i > r$.

Vertausche die $r$-te und die $i$-te Zeile. Diese Matrix hat die gleichen ersten $t-1$ Spalten wie $A$, und sie ist eine Matrix wie in Fall 2. Verfahre mit dieser Matrix wie im Fall 2.

In allen drei möglichen Fällen erhalten wir eine Matrix $\tilde{A}$, so dass die Matrix der ersten $t$ Spalten von $\tilde{A}$ in Treppennormalform ist.

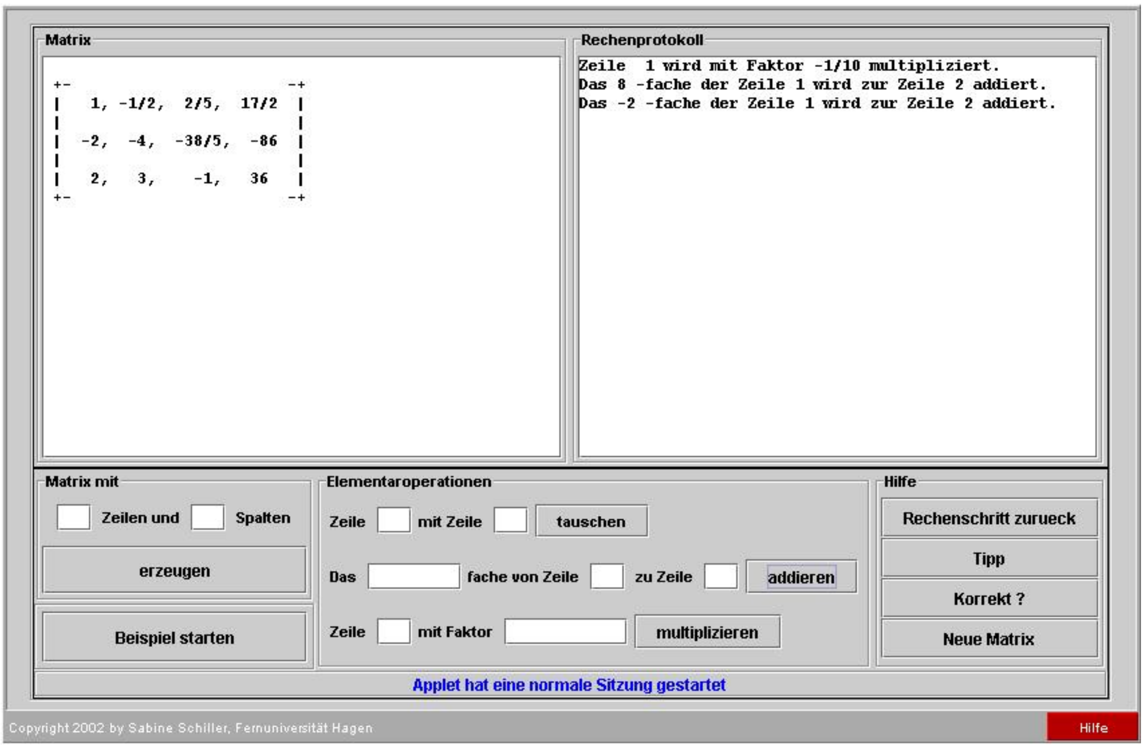
Wir wenden nun den Algorithmus auf die $(t+1)$-te Spalte von $\tilde{A}$ an, und da $A$ nur endlich viele Spalten hat, erhalten wir nach maximal $n$ Schritten eine Matrix die in Treppennormalform ist. $\square$

Der Gaußalgorithmus ist das wichtigste Handwerkszeug in der Linearen Algebra, und den müssen Sie beherrschen. Dabei ist es nicht nötig, den abstrakten Algorithmus oben auswendig zu lernen, Sie müssen nur wissen, wie es geht, wie Sie also eine Matrix mit Hilfe von elementaren Zeilenumformungen in eine Matrix in Treppennormalform überführen können. Als Training einige Aufgaben:

**4.2.2 Aufgabe:** Überführen Sie die Matrizen $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ und $B =$

$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 & -2 \\ 2 & 1 & -4 & 3 \\ 2 & 3 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ durch elementare Zeilenumformungen in Treppennormalform.

Sie werden vermutlich schon festgestellt haben, dass man sich bei der Durchführung des Gaußalgorithmus' beliebig gut verrechnen kann. Wir stellen Ihnen daher ein Applet zur Verfügung, mit dem Sie zufällige Matrizen in Treppennormalform überführen können. Allerdings müssen Sie wieder online sein.




Sie müssen nur angeben, wie viele Zeilen und Spalten die Matrix haben soll, und dann welche elementaren Zeilenumformungen vorgenommen werden sollen, die fehleranfälligen Rechnungen werden dann durch den Computer ausgeführt.

**4.2.3 Aufgabe:** Rechnen Sie mit dem "Ubungstool in der VU so viele Beispiele, bis Sie den Gaußalgorithmus sicher beherrschen.

Jetzt können wir unseren ersten wichtigen Satz beweisen:

**4.2.4 Satz:** (Existenz von Treppennormalformen)

Sei $A \in \mathrm{M}_{mn}(\mathbb{K})$. Dann gibt es Elementarmatrizen $E_1, \ldots, E_s \in \mathrm{M}_{mm}(\mathbb{K})$, so dass

$E_s E_{s-1} \cdots E_2 E_1 A$ eine Matrix in Treppennormalform ist.

**Beweis:** Mit Hilfe des Gaußalgorithmus können wir $A$ durch endlich viele elementare Zeilenumformungen in eine Matrix in Treppennormalform überführen. In Abschnitt 3.2.2 haben wir gesehen, dass jede dieser elementaren Zeilenumfomungen durch Multiplikation von links mit einer Elementarmatrix realisiert werden kann. Es gibt also endlich viele Elementarmatrizen $E_1, \ldots, E_s$, so dass $E_s E_{s-1} \cdots E_2 E_1 A$ eine Matrix in Treppennormalform ist. $\square$

## 4.3 Transformationsmatrix des Gaußalgorithmus

Sei $A \in \mathrm{M}_{mn}(\mathbb{K})$. In Satz 4.2.4 haben wir gesehen, dass es Elementarmatrizen $E_1, \ldots, E_s$ so gibt, dass $E_s E_{s-1} \cdots E_2 E_1 A$ eine Matrix in Treppennormalform ist. In der Regel ist man nicht an den Elementarmatrizen $E_1, \ldots, E_s$ interessiert sondern an dem Produkt $S = E_s E_{s-1} \cdots E_2 E_1$, so dass $SA = T$ in Treppennormalform ist. Müssen wir dafür alle Elementarmatrizen bestimmen und das Produkt mühsam berechnen? Nein, müssen wir nicht, und die Begründung dafür ist ganz einfach: Wenn $E_s E_{s-1} \cdots E_2 E_1 A = T$ ist ($T$ in Treppennormalform), dann gilt auch $E_s E_{s-1} \cdots E_2 E_1 I_m A = T$. Dabei ist $I_m$ die $m \times m$-Einheitsmatrix. Die letzte Gleichung können wir folgendermaßen klammern: $(E_s E_{s-1} \cdots E_2 E_1 I_m)A = T$. Interpretieren wir den linken Faktor, also $(E_s E_{s-1} \cdots E_2 E_1 I_m)$. Bei diesem werden dieselben elementaren Zeilenumformungen auf $I_m$ angewendet, wie sie auf $A$ angewendet wurden, um $A$ in eine Matrix in Treppennormalform zu überführen. Wenn wir also simultan auf $A$ und auf $I_m$ die elementaren Zeilenumformungen, die der Gaußalgorithmus vorschreibt, anwenden, so erhalten wir eine Matrix $S$, die ein Produkt von Elementarmatrizen ist, und für die $SA = T$ ist.

Um die Arbeit gering zu halten, ist es zweckmäßig, $A$ und $I_m$ in eine Matrix zu schreiben (durch einen Strich getrennt), also

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} A & | & I_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} & | & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & | & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} & | & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

zu betrachten, und dann $A$ durch elementare Zeilenumformungen in eine Treppennormalform zu überführen, dabei aber rechts des Strichs dieselben Umformungen durchzuführen. Wir erhalten dann eine Matrix $\bar{A}' = \begin{pmatrix} T & | & S \end{pmatrix}$, wobei $T$ eine Treppennormalform ist, und $S$ ist eine Matrix, so dass $SA = T$ ist.

**4.3.1 Aufgabe:** Berechnen Sie eine invertierbare Matrix $S$, so dass $SA$ eine Matrix in Treppennormalform ist. Dabei ist $A$ die Matrix aus Beispiel 4.2.1, also

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & -1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 4 & 1 & -2 & 5 & -1 \\ 0 & 3 & 6 & 2 & 6 & 8 & 8 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{47}(\mathbb{R}).$$

Auch zur Berechnung einer invertierbaren Matrix $S$, für die $SA = T$ in Treppennormalform ist, gibt es in der virtuellen Universität ein "Ubungstool, mit dem Sie das oben vorgestellte Verfahren üben können.

## 4.4 Eindeutigkeit der Treppennomalform

Ist es möglich, dass eine Matrix durch verschiedene elementare Zeilenumformungen in Matrizen in verschiedenen Treppennormalformen überführt werden kann? Die Frage ist vielleicht etwas abstrakt, also machen wir ein Beispiel.

Dazu betrachten wir noch einmal das Beispiel 4.2.1 von oben. Sei

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & -1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & -6 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 0 & 5 & 5 \end{pmatrix}.$$

Um $A_2$ zu berechnen, hatten wir in $A_1$ die zweite und die dritte Zeile vertauscht. Was wäre geschehen, wenn wir die zweite und die vierte Zeile vertauscht hätten, was uns der Gaußalgorithmus erlaubt hätte, und dann weitergemacht hätten? Wäre eine Matrix mit einer anderen Treppennormalform rausgekommen? Versuchen wir es, und berechnen wir gleichzeitig, ob sich auch das Produkt der Elementarmatrizen ändert.

$$\bar{B} = \left(\begin{array}{ccccccc|cccc} 0 & 1 & 2 & -1 & 2 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 1 & -2 & 5 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 6 & 2 & 6 & 8 & 8 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Wie im Beispiel oben addieren wir das $(-3)$-fache der ersten Zeile zur vierten und das $(-2)$-fache der ersten zur dritten Zeile:

$$\bar{B}_1 = \left(\begin{array}{ccccccc|cccc} 0 & 1 & 2 & -1 & 2 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & -6 & 3 & -3 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 0 & 5 & 5 & -3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

Die bisherigen Schritte entsprechen denen im Beispiel oben. Nun vertauschen wir die zweite und die vierte Zeile:

$$\bar{B}_2 = \left(\begin{array}{ccccccc|cccc} 0 & 1 & 2 & -1 & 2 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 0 & 5 & 5 & -3 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & -6 & 3 & -3 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Wir multiplizieren die zweite Zeile mit $\frac{1}{5}$:

$$\bar{B}_3 = \left(\begin{array}{ccccccc|cccc} 0 & 1 & 2 & -1 & 2 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & \frac{-3}{5} & 0 & 0 & \frac{1}{5} \\ 0 & 0 & 0 & 3 & -6 & 3 & -3 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Wir addieren die zweite Zeile zur ersten und das $(-3)$-fache der zweiten zur dritten:

$$\bar{B}_4 = \left(\begin{array}{ccccccc|cccc} 0 & 1 & 2 & 0 & 2 & 2 & 2 & \frac{2}{5} & 0 & 0 & \frac{1}{5} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & \frac{-3}{5} & 0 & 0 & \frac{1}{5} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -6 & 0 & -6 & \frac{-1}{5} & 0 & 1 & \frac{-3}{5} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Wir multiplizieren die dritte Zeile mit $\frac{-1}{6}$:

$$\bar{B}_5 = \left(\begin{array}{ccccccc|cccc} 0 & 1 & 2 & 0 & 2 & 2 & 2 & \frac{2}{5} & 0 & 0 & \frac{1}{5} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & \frac{-3}{5} & 0 & 0 & \frac{1}{5} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & \frac{1}{30} & 0 & \frac{-1}{6} & \frac{1}{10} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Im Finale addieren wir das $(-2)$-fache der dritten Zeile zur ersten und das $(-1)$-fache der dritten zur vierten:

$$\bar{B}_6 = \left(\begin{array}{ccccccc|cccc} 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 2 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & \frac{-3}{5} & 0 & 0 & \frac{1}{5} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & \frac{1}{30} & 0 & \frac{-1}{6} & \frac{1}{10} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{-1}{30} & 1 & \frac{1}{6} & \frac{-1}{10} \end{array}\right).$$

Wir stellen fest: die Treppennormalform ist die, die wir auch oben ausgerechnet hatten, aber das Produkt der Elementarmatrizen, die die Zeilenumformungen bewirkten, ist ein anderes.

Dass die Treppennormalformen gleich sind, ist die Aussage des folgenden Satzes. Den schwierigen Teil des Beweises schicken wir als Lemma voraus. Der Beweis des Lemmas ist ziemlich technisch – es ist nicht schlimm, wenn Sie ihn beim ersten Durcharbeiten überspringen.

**4.4.1 Lemma:** Seien $T, T' \in \mathrm{M}_{mn}(\mathbb{K})$ Matrizen in Treppennormalform. Sei $G$ eine invertierbare Matrix in $\mathrm{M}_{mm}(\mathbb{K})$ mit $GT = T'$. Dann gilt $T = T'$.

**Beweis:** Wir beweisen die Behauptung mit Induktion nach $n$, der Anzahl der Spalten von $T$ und $T'$.

Sei $n = 1$, das heißt, $T$ und $T'$ sind Spalten. Da $T$ und $T'$ Matrizen in Treppennormalform sind, gilt $T, T' \in \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$.

Fall 1: $T = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$. Dann gilt $G \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$, und $T$ und $T' = GT$ stimmen überein.

Fall 2: $T = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$. Dann gilt $G^{-1}T' = T = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$. Es folgt, dass $T'$ keine Nullspalte ist (sonst wäre $T$ auch eine), und dies impliziert $T' = T$. Der Induktionsanfang ist daher richtig.

Sei nun $n \geq 1$. Für den Induktionsschritt nehmen wir an: Wenn $S, S' \in \mathrm{M}_{mn}(\mathbb{K})$ Matrizen in Treppennormalform sind, und wenn es eine invertierbare Matrix $G \in \mathrm{M}_{mm}(\mathbb{K})$ mit $GS = S'$ gibt, dann stimmen $S$ und $S'$ überein.

Seien nun $T = (t_{ij}) \in \mathrm{M}_{m,n+1}(\mathbb{K})$ und $T' = (t'_{ij}) \in \mathrm{M}_{m,n+1}(\mathbb{K})$ Matrizen in Treppennormalform, und sei $G \in \mathrm{M}_{mm}(\mathbb{K})$ invertierbar mit $GT = T'$.

Dann sind $T$ und $T'$ von der Form

$$T = \begin{pmatrix} & | & t_{1,n+1} \\ S & | & \vdots \\ & | & t_{m,n+1} \end{pmatrix} \text{ und } T' = \begin{pmatrix} & | & t'_{1,n+1} \\ S' & | & \vdots \\ & | & t'_{m,n+1} \end{pmatrix},$$

und $S$ und $S'$ sind Matrizen in $\mathrm{M}_{mn}(\mathbb{K})$ in Treppennormalform. Es gilt $GS = S'$, und mit der Annahme folgt, dass $S$ und $S'$ gleich sind. Wir müssen also nur zeigen, dass die $(n+1)$-ten Spalten von $T$ und $T'$ übereinstimmen.

Seien $(1, j_1), \ldots, (r, j_r)$ die Pivot-Positionen von $T$, und seien $(1, j'_1), \ldots, (r', j_{r'})$ die Pivot-Positionen von $T'$.

Wenn $T$ die Nullmatrix ist, dann ist auch $T'$ die Nullmatrix, und wir sind fertig. Wir müssen also annehmen, dass $T$ mindestens eine Pivot-Position hat.

Fall 1: Es ist $j_r \leq n$, das heißt, $T$ hat an der Stelle $(r, n+1)$ keine Pivot-Position.

Dann ist $T = \begin{pmatrix} & \mid & t_{1,n+1} \\ & \mid & \vdots \\ S & \mid & t_{r,n+1} \\ & \mid & 0 \\ & \mid & \vdots \\ & \mid & 0 \end{pmatrix}$, und es ist $T' = \begin{pmatrix} & \mid & t'_{1,n+1} \\ & \mid & \vdots \\ S & \mid & t'_{r,n+1} \\ & \mid & t'_{r+1,n+1} \\ & \mid & \vdots \\ & \mid & t'_{m,n+1} \end{pmatrix}$.

Sei $G = \begin{pmatrix} g_{11} & \cdots & g_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ g_{m1} & \cdots & g_{mm} \end{pmatrix}$.

Wir werden nun die ersten $r$ Spalten von $G$ berechnen. Dazu sei $i \in \{1, \ldots, r\}$. Wir berechnen die $j_i$-te Spalte von $T'$. Diese stimmt mit der $j_i$-ten Spalte von $T$ überein und beide enthalten in der $i$-ten Zeile eine 1 und sonst nur Nullen. Es folgt

$$\begin{pmatrix} g_{i1} & \cdots & g_{im} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t_{1j_i} \\ \vdots \\ t_{mj_i} \end{pmatrix} = \sum_{k=1}^{m} g_{ik} t_{kj_i} = 0 + \cdots + 0 + g_{ii} \cdot 1 + 0 + \cdots + 0 = g_{ii} = t'_{ij_i} = 1.$$

Für $l \neq i$, $l \in \{1, \ldots, m\}$ gilt

$$\begin{pmatrix} g_{l1} & \cdots & g_{lm} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t_{1j_i} \\ \vdots \\ t_{mj_i} \end{pmatrix} = \sum_{k=1}^{m} g_{lk} t_{kj_i} = 0 + \cdots + 0 + g_{li} \cdot 1 + 0 + \cdots + 0 = g_{li} = t'_{lj_i} = 0.$$

Wir sehen also: Für alle $1 \leq i \leq r$ und alle $1 \leq l \leq m$ gilt $g_{li} = \begin{cases} 1, & \text{falls } i = l \\ 0, & \text{falls } i \neq l \end{cases}$.

Nun berechnen wir die letzte Spalte von $T'$. Für alle $1 \leq l \leq m$ gilt

$$t'_{l,n+1} = \sum_{i=1}^{m} g_{li} t_{i,n+1} = \sum_{i=1}^{r} g_{li} t_{i,n+1} + \sum_{i=r+1}^{m} g_{li} t_{i,n+1} = t_{l,n+1},$$

denn $g_{li} = 0$ für alle $l \neq i$ und $1 \leq i \leq r$ und $t_{i,n+1} = 0$ für alle $i \geq r+1$, da $T$ in Treppennormalform ist. Die letzten Spalten von $T$ und $T'$ stimmen also überein.

Fall 2: Es ist $j_{r'} \leq n$, das heißt, $T'$ hat an der Stelle $(r, n+1)$ keine Pivot-Position.

Es gilt $G^{-1}T' = T$, und wenn wir $G$ und $G^{-1}$ sowie $T$ und $T'$ die Rollen tauschen lassen, so folgt wie im Fall 1, dass $T' = T$ ist.

Fall 3: Es ist $j_r = n + 1 = j_{r'}$.

Dann hat $S$ genau $r-1$ Pivot-Positionen und $S'$ hat $r'-1$ Pivot-Positionen. Da $S = S'$ folgt $r-1 = r'-1$, also $r = r'$. Die letzte Spalten von $T$ und $T'$ haben also in der $r$-ten Zeile eine 1 hat, und alle anderen Einträge sind 0. Es gilt also $T = T'$. □

Zugegeben, der Beweis des Lemmas war trickreich. Aber der Beweis des folgenden Satzes wird damit ganz kurz.

**4.4.2 Satz:** (Eindeutigkeit der Treppennormalform)

Sei $A \in \mathrm{M}_{mn}(\mathbb{K})$, und seien $T, T' \in \mathrm{M}_{mn}(\mathbb{K})$ Matrizen in Treppennormalform, die beide aus $A$ durch elementare Zeilenumformungen hervorgehen. Dann gilt $T = T'$.

**Beweis:** Sei $E_s E_{s-1} \cdots E_2 E_1 A = T$, und sei $F_t F_{t-1} \cdots F_2 F_1 A = T'$, wobei die Matrizen $E_1, \ldots, E_s, F_1, \ldots, F_t$ Elementarmatrizen sind. Sei $E = E_s E_{s-1} \cdots E_2 E_1$, und sei $F = F_t F_{t-1} \cdots F_2 F_1$. Als Produkte invertierbarer Matrizen sind $E$ und $F$ invertierbar (vergleiche Proposition 2.3.12), und es gilt $A = E^{-1}T = F^{-1}T'$. Es folgt $FE^{-1}T = T'$. Sei $G = FE^{-1}$. Die Matrix $G$ ist invertierbar, denn $G$ ist das Produkt der beiden invertierbaren Matrizen $F$ und $E^{-1}$, und es ist $GT = T'$. Wir sind also in der Situation des Lemmas, und es folgt $T = T'$. □

**4.4.3 Definition:** Sei $T \in \mathrm{M}_{mn}(\mathbb{K})$ eine Matrix in Treppennormalform, die aus $A \in \mathrm{M}_{mn}(\mathbb{K})$ durch elementare Zeilenumformungen hervorgeht. Dann wird $T$ die **Treppennormalform zu** $A$ genannt.

**4.4.4 Aufgabe:** In 4.1.5 haben Sie alle Matrizen in $\mathrm{M}_{22}(\mathbb{F}_2)$ bestimmt. Bestimmen Sie nun für alle $A \in \mathrm{M}_{22}(\mathbb{F}_2)$ die Treppennormalform.

Als Folgerung aus Satz 4.4.2 und Bemerkung 3.3.3 erhalten wir:

**4.4.5 Korollar:** Seien $A, B \in \mathrm{M}_{mn}(\mathbb{K})$. Dann gilt: $A$ und $B$ sind genau dann zeilenäquivalent, wenn sie dieselbe Treppennormalform haben.

**Beweis:** Hier ist eine Äquivalenz von Aussagen zu zeigen, und wie in Abschnitt 1.2.5 bereits diskutiert, zerlegen wir den Beweis in den Beweis von zwei Teilaussagen, nämlich:

**Behauptung:** Wenn $A$ und $B$ zeilenäquivalent sind, so haben sie dieselbe Treppennormalform.

**Beweis:** Sei $A$ zeilenäquivalent zu $B$, und sei $B$ zeilenäquivalent zu der Matrix $T$ in Treppennormalform. Mit Bemerkung 3.3.3 folgt, dass $A$ zeilenäquivalent zu $T$ ist, dass also $A$ und $B$ dieselbe Treppennormalform haben.

**Behauptung:** Wenn $A$ und $B$ dieselbe Treppennormalform $T$ haben, dann sind $A$ und $B$ zeilenäquivalent.

**Beweis:** Sei $A$ zeilenäquivalent zu $T$, und sei $B$ zeilenäquivalent zu $T$. Mit Bemerkung 3.3.1 folgt, dass $T$ zeilenäquivalent zu $B$ ist, und mit Bemerkung 3.3.3 folgt, dass $A$ zeilenäquivalent zu $B$ ist. □

**4.4.6 Aufgabe:** Fassen Sie alle Matrizen in $\mathrm{M}_{22}(\mathbb{F}_2)$ zusammen, die zeilenäquivalent sind. Dabei haben Sie in Aufgabe 4.4.4 schon fast alle Vorarbeiten geleistet.

## 4.5 Der Rang einer Matrix

**4.5.1 Definitionen:** Sei $A \in \mathrm{M}_{mn}(\mathbb{K})$, und sei $T$ die Treppennormalform zu $A$. Die Anzahl der Pivot-Positionen in der Treppennormalform zu $A$ nennt man den **Rang von** $A$ und bezeichnet ihn mit $\mathrm{Rg}(A)$.

**4.5.2 Aufgabe:** Benutzen Sie das Resultat von Aufgabe 4.4.6, um die Ränge aller Matrizen in $\mathrm{M}_{22}(\mathbb{F}_2)$ zu bestimmen.

**4.5.3 Aufgabe:** Berechnen Sie den Rang von $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 2 & 6 & -3 & -3 \\ 3 & 10 & -6 & -5 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{34}(\mathbb{R})$.

Weitere Beispiele können Sie mit dem Matrizentaschenrechner konstruieren und Ihre Rechnungen überprüfen lassen.

Mit Hilfe unserer bisherigen Ergebnisse und dem Begriff des Ranges läßt sich unsere in Abschnitt 2.3 gestellte Frage, welche quadratischen Matrizen invertierbar sind, befriedigend beantworten.

**4.5.4 Proposition:** (Invertierbare Matrizen)

Sei $A \in \mathrm{M}_{mm}(\mathbb{K})$. Die folgenden Aussagen sind äquivalent:

(a) $A$ ist invertierbar.

(b) Die Treppennormalform zu $A$ ist $I_m$.

(c) Der Rang von $A$ ist $m$.

(d) $A$ ist ein Produkt von Elementarmatrizen.

**Beweis:** Hier haben wir die Äquivalenz von vier Aussagen zu beweisen. Wir werden das durch einen Ringschluss (vergleiche Abschnitt 1.2.5) machen, das heißt wir werden zeigen, dass aus Aussage (a) die Aussage (b) folgt, dass aus (b) die Aussage (c) folgt, dass aus (c) die Aussage (d) folgt, und dass aus (d) die Aussage (a) folgt.

**(a) ⇒ (b)** Wenn $A$ invertierbar ist, dann gibt es eine invertierbare Matrix $C$ in $\mathrm{M}_{mm}(\mathbb{K})$ mit $CA = I_m$. Sei $T$ die Treppennormalform zu $A$. Dann gibt es Elementarmatrizen $E_1, \ldots, E_s$, so dass $E_s \cdots E_1 A = T$ ist. Die Elementarmatrizen sind invertierbar, und mit Proposition 2.3.12 folgt, dass das Produkt $E = E_s \cdots E_1$ invertierbar ist. Es folgt $A = C^{-1} I_m = E^{-1} T$, also $EC^{-1} I_m = T$. Da $EC^{-1} = G$ als Produkt invertierbarer Matrizen invertierbar ist, folgt mit Lemma 4.4.1 $I_m = T$, denn $I_m$ ist eine Matrix in Treppennormalform.

**(b) ⇒ (c)** Das folgt aus der Definition des Ranges.

**(c) ⇒ (d)** Sei $\mathrm{Rg}(A) = m$. Dann ist $A$ zeilenäquivalent zu einer Matrix in Treppennormalform, die $m$ Pivotpositionen hat. Diese Matrix kann nur die Einheitsmatrix $I_m$ sein. Somit ist $A$ zeilenäquivalent zu $I_m$, und es gibt Elementarmatrizen $E_1, \ldots, E_s$, so dass $E_s \cdots E_1 I_m = A$ ist. Es folgt $E_s \cdots E_1 = A$, die Behauptung (d).

**(d) ⇒ (a)** Elementarmatrizen sind invertierbar, und daher ist $A$ als Produkt von Elementarmatrizen invertierbar.

□

Wie sich die Ränge von Produkten von Matrizen abschätzen lassen, ist Inhalt der folgenden Proposition.

**4.5.5 Proposition:** (Ränge von Matrizen)

Sei $A \in \mathrm{M}_{mn}(\mathbb{K})$. Dann gilt:

(a) Wenn $P \in \mathrm{M}_{mm}(\mathbb{K})$ invertierbar ist, so gilt $\mathrm{Rg}(A) = \mathrm{Rg}(PA)$.

(b) Wenn $A = A'A''$, so gilt $\mathrm{Rg}(A) \leq \mathrm{Rg}(A')$.

(c) Wenn $Q \in \mathrm{M}_{nn}(\mathbb{K})$ invertierbar ist, so gilt $\mathrm{Rg}(A) = \mathrm{Rg}(AQ)$.

**Beweis:**

(a) Sei $EA = T$ die Treppennormalform zu $A$, und sei $F(PA) = T'$ die Treppennormalform zu $PA$. Dann gilt $A = E^{-1}T$, und durch Einsetzen in die zweite Gleichung erhalten wir $(FPE^{-1})T = T'$. Da $FPE^{-1}$ invertierbar ist, folgt mit Lemma 4.4.1 $T = T'$, also $\mathrm{Rg}(A) = \mathrm{Rg}(PA)$.

(b) Sei $E$ invertierbar, so dass $EA' = T$ die Treppennormalform zu $A'$ ist. Sei $\mathrm{Rg}(A') = r'$. Mit (a) gilt $\mathrm{Rg}(A) = \mathrm{Rg}(A'A'') = \mathrm{Rg}(EA'A'')$. Die Matrix $EA'$ hat $r'$ Zeilen, die nicht Nullzeilen sind, und somit hat $EA'A''$ maximal $r'$ Zeilen, die nicht Nullzeilen sind. Es folgt $\mathrm{Rg}(A) = \mathrm{Rg}(EA'A'') \leq r' = \mathrm{Rg}(A')$.

(c) Es gilt

$$\begin{array}{rcll} \mathrm{Rg}(A) & = & \mathrm{Rg}((AQ)Q^{-1}) & \\ & \leq & \mathrm{Rg}(AQ) & \text{mit (b)} \\ & \leq & \mathrm{Rg}(A) & \text{mit (b).} \end{array}$$

Diese Ungleichungskette kann nur erfüllt sein, wenn alle Abschätzungen $\leq$ Gleichungen sind, es gilt also $\mathrm{Rg}(A) = \mathrm{Rg}(AQ)$.

□

**Bemerkung:** In (b) gilt auch $\mathrm{Rg}(A) \leq \mathrm{Rg}(A'')$, aber das können wir an dieser Stelle noch nicht beweisen. Für einen Beweis muss ich Sie auf Korollar 9.3.3 vertrösten.

Diese Proposition hat die nützliche Folgerung, die besagt, dass wenn $CA = I_m$ für $m \times m$ Matrizen $A$ und $C$ erfüllt ist, schon automatisch $AC = I_m$ gelten muss, dass also $C$ invers zu $A$ ist (und dann natürlich auch $A$ invers zu $C$ ist).

**4.5.6 Korollar:** Seien $A, C \in \mathrm{M}_{mm}(\mathbb{K})$, und sei $CA = I_m$. Dann sind $C$ und $A$ invertierbar, und es gilt $C = A^{-1}$.

**Beweis:** Seien $A, C \in \mathrm{M}_{mm}(\mathbb{K})$, und sei $CA = I_m$. Mit Proposition 4.5.5 (b) gilt $m = \mathrm{Rg}(I_m) \leq \mathrm{Rg}(C)$, also $m \leq \mathrm{Rg}(C)$. Da $C$ maximal den Rang $m$ hat, folgt $m = \mathrm{Rg}(C)$. Mit Proposition 4.5.4 gilt, dass $C$ invertierbar ist. Wir multiplizieren die Gleichung $CA = I_m$ von links mit $C^{-1}$ und erhalten $C^{-1}CA = C^{-1}$, also $A = C^{-1}$. Da $C^{-1}$ invertierbar ist, ist auch $A$ invertierbar. Es folgt $AC = C^{-1}C = I_m$. Aus $CA = I_m$ und $AC = I_m$ folgt $C = A^{-1}$. □

Auch unsere in Abschnitt 2.3 gestellte Frage, wie man die inverse Matrix zu einer invertierbaren Matrix $A \in \mathrm{M}_{mm}(\mathbb{K})$ berechnen kann, können wir jetzt beantworten. Mit Hilfe des Gaußalgorithmus überführen wir $A$ in die Einheitsmatrix. Das Produkt $E = E_s \cdots E_1$ der zugehörigen Elementarmatrizen, für die $E_s \cdots E_1 A = I_m$ gilt, ist eine $m \times m$-Matrix, und sie erfüllt die Gleichung $EA = I_m$.

Mit Korollar 4.5.6 gilt $E = A^{-1}$, und in Abschnitt 4.3 haben wir gesehen, wie wir $E$ ohne explizite Berechnung der Elementarmatrizen und ohne Matrizenmultiplikationen berechnen können.

**4.5.7 Aufgabe:** Untersuchen Sie, ob folgende Matrizen über $\mathbb{R}$ invertierbar sind und bestimmen Sie gegebenenfalls die inversen Matrizen.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \\ 4 & 1 & 8 \end{pmatrix} \text{ und } B = \begin{pmatrix} 6 & 3 & -4 \\ -4 & 1 & -6 \\ 1 & 2 & -5 \end{pmatrix}$$

# Lösungen der Aufgaben

## Lösungen der Aufgaben in 4.1

**Aufgabe 4.1.3** Die Matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ ist in Treppennormalform. Die Pivot-Position ist $(1,1)$.

Die Matrix $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ist nicht in Treppennormalform, denn der Eintrag an der Stelle $(1,4)$ ist nicht Null.

$C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ist ebenfalls nicht in Treppennormalform, denn die zweite Zeile ist eine Nullzeile. Es gibt also keinen Spaltenindex $j_2$ mit $c_{2,j_2} = 1$. Um in Treppennormalform zu sein, müssten dann aber die zweite und die dritte Zeile Nullzeilen sein.

Die Matrix $D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ ist in Treppennormalform. Die Pivot-Positionen sind $(1,1)$ und $(2,5)$.

**Aufgabe 4.1.4** Setzen wir die gesuchte Matrix wieder allgemein an, also

$$A = \begin{pmatrix} * & * & * & * \\ * & * & * & * \\ * & * & * & * \\ * & * & * & * \\ * & * & * & * \\ * & * & * & * \end{pmatrix},$$

und bestimmen wir die Sternchen. Da $(1,2)$ und $(2,4)$ Pivot-Positionen sind, sind die Einträge an der Stelle $(1,2)$ und $(2,4)$ Eins.

$$A = \begin{pmatrix} * & 1 & * & * \\ * & * & * & 1 \\ * & * & * & * \\ * & * & * & * \\ * & * & * & * \\ * & * & * & * \end{pmatrix}.$$

In den Spalten unterhalb und oberhalb der Einsen gibt es nur die Einträge 0.

$$A = \begin{pmatrix} * & 1 & * & 0 \\ * & 0 & * & 1 \\ * & 0 & * & 0 \\ * & 0 & * & 0 \\ * & 0 & * & 0 \\ * & 0 & * & 0 \end{pmatrix}.$$

In den Zeilen links von den Einsen sind alle Einträge 0.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & * & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ * & 0 & * & 0 \\ * & 0 & * & 0 \\ * & 0 & * & 0 \\ * & 0 & * & 0 \end{pmatrix}.$$

Alle Zeilen unterhalb der zweiten sind Nullzeilen.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & * & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Das Sternchen an der Stelle $(1,3)$ kann ein beliebiges Element in $\mathbb{R}$ sein.

**Aufgabe 4.1.5** Die folgenden Matrizen liegen in $\mathrm{M}_{22}(\mathbb{F}_2)$:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Wir gehen diese Matrizen nun einzeln durch:

Die Nullmatrix ist nach Definition in Treppennormalform.

Die Matrix $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ist in Treppennormalform.

Die Matrix $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ist in Treppennormalform.

Die Matrix $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ ist nicht in Treppennormalform, denn die erste Zeile ist eine Nullzeile.

Die Matrix $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ist nicht in Treppennormalform, denn die erste Zeile ist eine Nullzeile.

Die Matrix $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ist in Treppennormalform.

Die Matrix $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ ist nicht in Treppennormalform, denn unterhalb einer Pivot-Position muss Null stehen.

Die Matrix $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ist in Treppennormalform.

Die Matrix $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ ist nicht in Treppennormalform, denn die Folge der ausgezeichneten Spaltenindizes ist nicht aufsteigend.

Die Matrix $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ist nicht in Treppennormalform, denn unterhalb einer Pivot-Position muss Null stehen.

Die Matrix $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ ist nicht in Treppennormalform, denn die erste Zeile ist eine Nullzeile.

Die Matrix $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ ist nicht in Treppennormalform, denn unterhalb einer Pivot-Position muss Null stehen.

Die Matrix $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ ist nicht in Treppennormalform, denn unterhalb einer Pivot-Position muss Null stehen.

Die Matrix $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ist nicht in Treppennormalform, denn über einer Pivot-Position muss Null stehen.

Die Matrix $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ ist nicht in Treppennormalform, denn die Folge der ausgezeichneten Spaltenindizes muss aufsteigend sein.

Die Matrix $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ ist nicht in Treppennormalform, denn unterhalb einer Pivot-Position muss Null stehen.

Fassen wir zusammen: In $\mathrm{M}_{22}(\mathbb{F})$ gibt es genau 5 Matrizen in Treppennormalform, nämlich $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

**Aufgabe 4.1.6** Sei $A \in \mathrm{M}_{mm}(\mathbb{R})$ in Treppennormalform mit Pivot-Positionen $(1,1) \cdots (m,m)$. Dann sind alle Diagonalelemente 1, und oberhalb und unterhalb der Einsen sind alle Einträge 0. Dann ist $A$ die $m \times m$-Einheitsmatrix.

**Aufgabe 4.1.7** Sei $A \in \mathrm{M}_{33}(\mathbb{R})$ eine Matrix in Treppennormalform. Wenn $A$ nicht die $3 \times 3$-Einheitsmatrix ist, dann besitzt $A$ eine Nullzeile, genauer, die letzte Zeile von $A$ ist eine Nullzeile. Dann gilt für alle Matrizen $X \in \mathrm{M}_{33}(\mathbb{R})$, dass die Matrix $AX$ in der letzten Zeile eine Nullzeile hat. $A$ ist also nicht invertierbar.

Wenn $A$ hingegen die $3 \times 3$-Einheitsmatrix ist, dann ist $A$ invertierbar. Wir haben also bewiesen:

Die einzige invertierbare Matrix in Treppennormalform in $\mathrm{M}_{33}(\mathbb{R})$, die invertierbar ist, ist die $3 \times 3$-Einheitsmatrix.

# Lösungen der Aufgaben in 4.2

**Aufgabe 4.2.2** Sei $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$. Wir addieren das $(-2)$-fache der ersten Zeile zur zweiten und das $(-3)$-fache der ersten Zeile zur dritten.

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -1 \\ 0 & 3 & -4 & 4 \\ 0 & 7 & -7 & 6 \end{pmatrix}$$

Wir multiplizieren die zweite Zeile mit $\frac{1}{3}$.

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & \frac{-4}{3} & \frac{4}{3} \\ 0 & 7 & -7 & 6 \end{pmatrix}$$

Wir addieren das Doppelte der zweiten Zeile zur ersten und das $(-7)$-fache der zweiten Zeile zur dritten.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{5}{3} \\ 0 & 1 & \frac{-4}{3} & \frac{4}{3} \\ 0 & 0 & \frac{7}{3} & \frac{-10}{3} \end{pmatrix}$$

Wir multiplizieren die dritte Zeile mit $\frac{3}{7}$.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{5}{3} \\ 0 & 1 & \frac{-4}{3} & \frac{4}{3} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{-10}{7} \end{pmatrix}$$

Wir addieren das $(\frac{-1}{3})$-fache der dritten Zeile zur ersten und das $(\frac{4}{3})$-fache der dritten Zeile zur zweiten.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{15}{7} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{-4}{7} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{-10}{7} \end{pmatrix},$$

und das Resultat ist eine Matrix in Treppennormalform.

Sei $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 & -2 \\ 2 & 1 & -4 & 3 \\ 2 & 3 & 2 & -1 \end{pmatrix}$.

Wir vertauschen die erste und dritte Zeile von $B$.

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -4 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & -2 \end{pmatrix}$$

Wir multiplizieren die erste Zeile mit $\frac{1}{2}$.

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{3}{2} & 1 & \frac{-1}{2} \\ 2 & 1 & -4 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & -2 \end{pmatrix}$$

Wir subtrahieren das Doppelte der ersten Zeile von der zweiten.

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{3}{2} & 1 & \frac{-1}{2} \\ 0 & -2 & -6 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & -2 \end{pmatrix}$$

Wir multiplizieren die zweite Zeile mit $\frac{-1}{2}$.

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{3}{2} & 1 & \frac{-1}{2} \\ 0 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & 3 & -2 \end{pmatrix}$$

Wir subtrahieren die zweite Zeile von der dritten.

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{3}{2} & 1 & \frac{-1}{2} \\ 0 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Wir addieren das $(\frac{-3}{2})$-fache der zweiten Zeile zur ersten

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{-7}{2} & \frac{5}{2} \\ 0 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

und haben $B$ in eine Matrix in Treppennormalform überführt.

**Aufgabe 4.2.3** Ohne Lösung. Das Applet gibt Ihnen Tipps, wenn Sie nicht weiter wissen und überprüft auf Anfrage Ihr Ergebnis.

# Lösungen der Aufgaben in 4.3

**Aufgabe 4.3.1** Wir führen dieselben elementaren Zeilenumformungen wie im Lehrtext durch.

$$\bar{A} = \left(\begin{array}{ccccccc|cccc} 0 & 1 & 2 & -1 & 2 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 1 & -2 & 5 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 6 & 2 & 6 & 8 & 8 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Wir addieren das $(-3)$-fache der ersten Zeile zur vierten und das $(-2)$-fache der ersten zur dritten Zeile:

$$\bar{A}_1 = \left(\begin{array}{ccccccc|cccc} 0 & 1 & 2 & -1 & 2 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & -6 & 3 & -3 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 0 & 5 & 5 & -3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

Wir vertauschen die zweite und die dritte Zeile:

$$\bar{A}_2 = \left(\begin{array}{ccccccc|cccc} 0 & 1 & 2 & -1 & 2 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & -6 & 3 & -3 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 0 & 5 & 5 & -3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

Wir teilen die zweite Zeile durch 3.

$$\bar{A}_3 = \left(\begin{array}{ccccccc|cccc} 0 & 1 & 2 & -1 & 2 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & -1 & \frac{-2}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 0 & 5 & 5 & -3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

Wir addieren das $(-5)$-fache der zweiten Zeile zur vierten und die zweite zur ersten.

$$\bar{A}_4 = \left(\begin{array}{ccccccc|cccc} 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 2 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & -1 & \frac{-2}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 10 & 0 & 10 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{-5}{3} & 1 \end{array}\right).$$

Wir addieren das $(2)$-fache der dritten Zeile zur zweiten und das $(-10)$-fache der dritten zur vierten Zeile.

$$\bar{A}_5 = \left(\begin{array}{ccccccc|cccc} 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 2 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & \frac{-2}{3} & 2 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & -10 & \frac{-5}{3} & 1 \end{array}\right).$$

Links in der Matrix $\bar{A}_5$ steht eine Treppennormalform $T$, und rechts ein Produkt $S$ von Elementarmatrizen mit $SA = T$. Da Elementarmatrizen invertierbar sind, ist das Produkt von Elementarmatrizen ebenfalls invertierbar.

# Lösungen der Aufgaben in 4.4

**Aufgabe 4.4.4** Die folgenden Matrizen liegen in $\mathrm{M}_{22}(\mathbb{F}_2)$:

$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$
$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$

Die Treppennormalform zu $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ist $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, denn diese Matrix ist bereits in Treppennormalform. Mit demselben Argument ist $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ die Treppennormalform zu $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ die Treppennormalform zu $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ die Treppennormalform zu $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ die Treppennormalform zu $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Die Treppennormalform zu $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ ist $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, die zu $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ist $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, die zu $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ ist $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, die zu $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ ist $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, die zu $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ist $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, die zu $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ ist $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, die zu $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ ist $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, die zu $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ ist $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, die zu $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ist $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, die zu $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ ist $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ und die zu $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ ist $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

**Aufgabe 4.4.6** Wir müssen diejenigen Matrizen zusammenfassen, die zur selben Treppennormalform zeilenäquivalent sind. Diese sind dann zueinander zeilenäquivalent.

Zeilenäquivalent zur Nullmatrix ist nur die Nullmatrix.

Zeilenäquivalent zu $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ sind $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Zeilenäquivalent zu $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ sind $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Zeilenäquivalent zu $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ sind $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Zeilenäquivalent zu $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ sind $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

# Lösungen der Aufgaben in 4.5

**Aufgabe 4.5.2** Wir benutzen die Ergebnisse von Aufgabe 4.4.6.

Die Nullmatrix hat keine Pivot-Positionen. Ihr Rang ist daher 0.

Die Matrix $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ hat eine Pivot-Position. Die Ränge der Matrizen $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ sind daher 1.

Die Matrix $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ hat eine Pivot-Position. Die Ränge der Matrizen $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$,

$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ sind daher 1.

Die Matrix $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ hat eine Pivot-Position. Die Ränge der Matrizen $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ sind daher 1.

Die Matrix $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ hat zwei Pivot-Positionen. Die Ränge der Matrizen $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ sind daher 2.

**Aufgabe 4.5.3** Sei $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 2 & 6 & -3 & -3 \\ 3 & 10 & -6 & -5 \end{pmatrix}$. Zur Bestimmung von $\mathrm{Rg}(A)$ überführen wir $A$ in Treppennormalform. Wir addieren das $(-2)$-fache der ersten Zeile zur zweiten und das $(-3)$-fache der ersten Zeile zur dritten.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -3 & -1 \\ 0 & 4 & -6 & -2 \end{pmatrix}$$

Wir subtrahieren das Doppelte der zweiten Zeile von der dritten.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Wir subtrahieren die zweite Zeile von der ersten.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Nun teilen wir die zweite Zeile durch 2 und erhalten die Treppennormalform $T$ zu $A$.

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{-3}{2} & \frac{-1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Die Matrix $T$ hat zwei Pivot-Positionen, und nach Definition 4.5.1 gilt $\mathrm{Rg}(A) = 2$.

**Aufgabe 4.5.7** In beiden Fällen müssen wir die Matrizen in Treppennormalform $T$ und $T'$ überführen und dabei die Produkte von Elementarmatrizen $E$ und $F$ berechnen, für die $EA = T$ und $FB = T'$ gilt.

Wir schreiben $A$ und $I_3$ in eine Matrix

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & 8 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Wir addieren das $(-2)$-fache der ersten Zeile zur zweiten und das $(-4)$-fache der ersten Zeile zur dritten.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -4 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Wir vertauschen die zweite und die dritte Zeile.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -4 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & -2 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

Wir addieren die zweite Zeile zur dritten.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -4 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -6 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

Wir addieren das Doppelte der dritten Zeile zur ersten.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -11 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -4 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -6 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

Wir multiplizieren die letzte Zeile mit $-1$.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -11 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -4 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 6 & -1 & -1 \end{array}\right)$$

Somit ist $A$ invertierbar, und die zu $A$ inverse Matrix ist die rechts des Striches, also $A^{-1} = \begin{pmatrix} -11 & 2 & 2 \\ -4 & 0 & 1 \\ 6 & -1 & -1 \end{pmatrix}$. Beachten Sie, dass wir mit Korollar 4.5.6 nicht mehr überprüfen müssen, ob auch $AA^{-1} = I_3$ gilt.

Wir schreiben $B$ und $I_3$ in eine Matrix.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 6 & 3 & -4 & 1 & 0 & 0 \\ -4 & 1 & -6 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -5 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Wir vertauschen die erste und die dritte Zeile.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 & | & 0 & 0 & 1 \\ -4 & 1 & -6 & | & 0 & 1 & 0 \\ 6 & 3 & -4 & | & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Wir addieren das 4-fache der ersten Zeile zur zweiten und das $(-6)$-fache der ersten Zeile zur dritten.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 & | & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 9 & -26 & | & 0 & 1 & 4 \\ 0 & -9 & 26 & | & 1 & 0 & -6 \end{pmatrix}$$

Wir addieren die zweite Zeile zur dritten, und erhalten

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 & | & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 9 & -26 & | & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & | & 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Damit ist $B$ zeilenäquivalent zu einer Matrix mit einer Nullzeile. Die Treppennormalform zu $B$ ist daher nicht die Einheitsmatrix und $B$ ist nicht invertierbar.

# Kapitel 5

# Lineare Gleichungssysteme

## 5.1 Definitionen und Beispiele

Wir nehmen in diesem Abschnitt wieder an, dass $\mathbb{K}$ ein Körper ist.

**5.1.1 Definitionen:** Ein **lineares Gleichungssystem** über $\mathbb{K}$ mit $m$ Zeilen und $n$ Unbestimmten $x_1, \ldots, x_n$ hat die Form

$$\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \ldots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \ldots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots & & \ldots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \ldots & + & a_{mn}x_n & = & b_m \end{array}$$

mit $a_{ij}, b_i \in \mathbb{K}$ für alle $1 \leq i \leq m$ und $1 \leq j \leq n$. Wir nennen $A = (a_{ij}) \in \mathrm{M}_{mn}(\mathbb{K})$ die **Koeffizientenmatrix des linearen Gleichungssystems**.

Wenn wir ein lineares Gleichungssystem wie oben gegeben haben, so setzen wir

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \text{ und } b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{m1}(\mathbb{K}).$$

Das lineare Gleichungssystem schreiben wir dann als Matrizenprodukt $Ax = b$.

**5.1.2 Definition:** Eine **Lösung eines linearen Gleichungssystems** $Ax = b$ ist ein

$$\lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{n1}(\mathbb{K}) \text{ mit } A\lambda = b.$$

Der griechische Buchstabe $\lambda$, gesprochen „lambda“, entspricht dem $l$, wie Lösung.

Welche Phänomene können bei der Bestimmung von Lösungen linearer Gleichungssysteme auftreten? Einige Beispiele sollen diese Frage beleuchten.

**5.1.3 Beispiel:** (a) Wenn $Ax = b$ ein lineares Gleichungssystem ist, dann hat dieses nicht zwangsläufig Lösungen. Betrachten wir etwa das lineare Gleichungssystem über $\mathbb{R}$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Es gibt kein $\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{21}(\mathbb{R})$, das die Gleichung $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ erfüllt, und es folgt, dass dieses lineare Gleichungssystem keine Lösung besitzt.

(b) Manchmal haben lineare Gleichungssysteme genau eine Lösung. In folgendem Beispiel über $\mathbb{R}$ ist dies etwa der Fall:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Da die Matrix $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ die Einheitsmatrix ist, erfüllt nur $\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ die Gleichung $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Es gibt also genau eine Lösung $\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix}$, nämlich $\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

(c) Manchmal haben lineare Gleichungssysteme mehr als eine Lösung. Betrachten Sie etwa folgendes Beispiel über $\mathbb{R}$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Es ist $\lambda = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ eine Lösung, denn $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$. Wenn $s \in \mathbb{R}$ eine beliebige reelle Zahl ist, dann ist $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s \\ -s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, und es folgt

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \left[ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} s \\ -s \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s \\ -s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Somit ist $\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}s\\-s\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1+s\\1-s\end{pmatrix}$ für alle $s \in \mathbb{R}$ eine Lösung. Dieses lineare Gleichungssystem hat also unendlich viele Lösungen.

Welche linearen Gleichungssysteme Lösungen haben, wie viele Lösungen es gibt, und wie man die Lösungen eines linearen Gleichungssystems bestimmen kann, ist Inhalt dieses Kapitels.

**5.1.4 Definitionen:** Wir nennen die $m \times (n+1)$-Matrix

$$A' = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$

die **erweiterte Koeffizientenmatrix** des linearen Gleichungssystems $Ax = b$.

Ist $b = \begin{pmatrix}0\\\vdots\\0\end{pmatrix}$, so nennen wir das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ **homogen**. Ist $b \neq \begin{pmatrix}0\\\vdots\\0\end{pmatrix}$, so nennen wir das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ **inhomogen**.

Zu jedem linearen Gleichungssystem $Ax = b$ gibt es das **zugehörige homogene Gleichungssystem** $Ax = 0$. Dabei bezeichnet 0 die Spalte $\begin{pmatrix}0\\\vdots\\0\end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{m1}(\mathbb{K})$.

**5.1.5 Aufgabe:** Sei $A = \begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\1 & 0 & 1\end{pmatrix}$, und sei $b = \begin{pmatrix}47\\11\end{pmatrix}$. Wie sehen die Gleichungen des linearen Gleichungssystems $Ax = b$ aus, wie die erweiterte Koeffizientenmatrix und wie das zugehörige homogene Gleichungssystem?

## 5.2 Struktur der Lösungsmenge eines linearen Gleichungssystems

Seien $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{mn}(\mathbb{K})$ und $b = \begin{pmatrix}b_1\\\vdots\\b_m\end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{m1}(\mathbb{K})$.

Sei $\mathcal{L} \subseteq \mathrm{M}_{n1}(\mathbb{K})$ die Menge der Lösungen des linearen Gleichungssystems $Ax = b$. Beachten Sie, dass der Fall $\mathcal{L} = \emptyset$ möglich ist, denn auch die leere Menge ist eine Teilmenge von $\mathrm{M}_{n1}(\mathbb{K})$.

Sei $\mathcal{U} \subseteq \mathrm{M}_{n1}(\mathbb{K})$ die Menge aller Lösungen des zugehörigen homogenen linearen Gleichungssystems $Ax = 0$. Im Gegensatz zu inhomogenen linearen Gleichungssystemen haben homogene lineare Gleichungssysteme immer mindestens eine Lösung, denn es ist $\lambda = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ immer eine Lösung von $Ax = 0$.

Mit $A'$ bezeichnen wir die erweiterte Koeffizientenmatrix $\begin{pmatrix} A & | & b \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{m(n+1)}(\mathbb{K})$ des linearen Gleichungssystems $Ax = b$.

In der folgenden Proposition werden wir den Aufbau der Lösungsmenge $\mathcal{L}$ von $Ax = b$ genauer unter die Lupe nehmen.

**5.2.1 Proposition:** Sei $\lambda_0$ eine Lösung von $Ax = b$. Sei

$$\lambda_0 + \mathcal{U} := \{\lambda_0 + u \mid u \in \mathcal{U}\} \subseteq \mathrm{M}_{n1}(K).$$

Dann gilt $\mathcal{L} = \lambda_0 + \mathcal{U}$.

**Beweis:** Sei $\lambda_0$ eine Lösung von $Ax = b$. Zu zeigen ist eine Gleichheit von Mengen, nämlich der Mengen $\mathcal{L}$ und $\lambda_0 + \mathcal{U}$. Wie die Definition 1.3.1 der Gleichheit von Mengen vorschreibt, müssen wir in zwei Schritten vorgehen und $\mathcal{L} \subseteq \lambda_0 + \mathcal{U}$ und $\lambda_0 + \mathcal{U} \subseteq \mathcal{L}$ beweisen.

1. **Behauptung:** Es gilt $\mathcal{L} \subseteq \lambda_0 + \mathcal{U}$.

   Sei $\lambda' \in \mathcal{L}$. Wir müssen zeigen, dass es ein $u \in \mathcal{U}$ gibt mit $\lambda' = \lambda_0 + u$.

   Setze $u = \lambda' - \lambda_0$. Dann liegt $u \in \mathcal{U}$, denn $Au = A(\lambda' - \lambda_0) = A\lambda' - A\lambda_0 = b - b = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$.

   Ferner gilt $\lambda' = \lambda_0 + u$, es gilt also $\mathcal{L} \subseteq \lambda_0 + \mathcal{U}$.

2. **Behauptung:** Es gilt $\lambda_0 + \mathcal{U} \subseteq \mathcal{L}$.

   Sei $u \in \mathcal{U}$. Zu zeigen ist, dass $\lambda_0 + u$ eine Lösung von $Ax = b$ ist.

   Es gilt $A(\lambda_0 + u) = A\lambda_0 + Au = b + 0 = b$. Damit liegt $\lambda_0 + u$ in $\mathcal{L}$, und es gilt $\lambda_0 + \mathcal{U} \subseteq \mathcal{L}$.

Es folgt $\mathcal{L} = \lambda_0 + \mathcal{U}$, die Behauptung. □

**5.2.2 Aufgabe:** Sei $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{34}(\mathbb{R})$. Sei $\mathcal{U}$ die Menge aller Lösungen von $Ax = 0$, und sei $\mathcal{L}$ die Menge aller Lösungen von $Ax = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Untersuchen Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind. Begründen Sie Ihre Antworten.

(a) $\mathcal{L} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \mathcal{U}$ (b) $\mathcal{L} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \mathcal{U}$ (c) $\mathcal{L} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \mathcal{U}$ (d) $\mathcal{L} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \mathcal{U}$

Proposition 5.2.1 besagt also, dass wir nur zwei Dinge wissen müssen, wenn wir die Lösungsmenge $\mathcal{L}$ eines linearen Gleichungssystems $Ax = b$ bestimmen wollen – sofern es überhaupt Lösungen gibt. Zum Einen irgendeine Lösung $\lambda_0$ von $Ax = b$ und zum Anderen die Lösungsmenge $\mathcal{U}$ des zugehörigen homogenen linearen Gleichungssystems $Ax = 0$. Die Lösungsmenge $\mathcal{L}$ ergibt sich dann durch $\mathcal{L} = \lambda_0 + \mathcal{U}$. Wir werden im Folgenden zeigen, wie $\lambda_0$ und $\mathcal{U}$ berechnet werden können.

Wie ändert sich die Menge aller Lösungen $\mathcal{L}$ von $Ax = b$, wenn wir $A$ und $b$ mit einer invertierbaren Matrix multiplizieren? Gar nicht, wie folgende Proposition zeigt.

**5.2.3 Proposition:** Sei $A \in \mathrm{M}_{mn}(\mathbb{K})$, und sei $\mathcal{L}$ die Menge aller Lösungen von $Ax = b$. Sei $P \in \mathrm{M}_{mm}(\mathbb{K})$ invertierbar, und sei $\mathcal{L}'$ die Menge aller Lösungen von $(PA)x = Pb$. Dann gilt $\mathcal{L} = \mathcal{L}'$.

**Beweis:** Hier sind wieder zwei Behauptungen zu beweisen, nämlich $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{L}'$ und $\mathcal{L}' \subseteq \mathcal{L}$.

1. **Behauptung:** $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{L}'$.

   Sei $\lambda \in \mathcal{L}$. Dann gilt $A\lambda = b$, und es folgt $(PA)\lambda = P(A\lambda) = Pb$. Damit ist $\lambda$ eine Lösung des linearen Gleichungssystems $(PA)x = Pb$, also $\lambda \in \mathcal{L}'$.

2. **Behauptung:** $\mathcal{L}' \subseteq \mathcal{L}$.

   Sei $\lambda' \in \mathcal{L}'$, also $PA\lambda' = Pb$. Die Matrix $P$ ist nach Voraussetzung invertierbar, und es gilt $A\lambda' = P^{-1}PA\lambda' = P^{-1}Pb = b$. Da $\lambda'$ auch eine Lösung von $Ax = b$ ist, folgt $\lambda' \in \mathcal{L}$ und damit $\mathcal{L}' \subseteq \mathcal{L}$.

□

Als Folgerung aus Proposition 5.2.3 erhalten wir:

**5.2.4 Korollar:** Seien $A' = \begin{pmatrix} A & | & b \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{m(n+1)}(\mathbb{K})$ und $B' = \begin{pmatrix} B & | & c \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{m(n+1)}(\mathbb{K})$ die erweiterten Koeffizientenmatrizen der linearen Gleichungssysteme $Ax = b$ und $Bx = c$. Wenn $A'$ und $B'$ zeilenäquivalent sind, dann haben $Ax = b$ und $Bx = c$ dieselben Lösungen.

**Beweis:** Seien $A'$ und $B'$ zeilenäquivalent.

Es gibt Elementarmatrizen $E_1, \dots, E_s \in \mathrm{M}_{mm}(\mathbb{K})$ mit $E_s \cdot \dots \cdot E_1 A' = B'$. Als Produkt von Elementarmatrizen ist $P = E_s \cdot \dots \cdot E_1$ invertierbar. Es sind $PA = B$ und $Pb = c$, denn auf $b$ werden dieselben elementaren Zeilenumformungen wie auf $A$ angewendet. Somit gilt

$$P \begin{pmatrix} A & | & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} PA & | & Pb \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B & | & c \end{pmatrix},$$

und $\begin{pmatrix} B & | & c \end{pmatrix}$ ist die erweiterte Koeffizientenmatrix des linearen Gleichungssystems $PAx = Pb$. Aus Proposition 5.2.3 folgt die Behauptung. □

Wir werden uns Korollar 5.2.4 später zu Nutze machen und die erweiterte Koeffizientenmatrix $A'$ eines linearen Gleichungssystems $Ax = b$ mit Hilfe elementarer Zeilenumformungen in Treppennormalform $T' = \begin{pmatrix} T & | & d \end{pmatrix}$ überführen. Dabei ist $T$ die Treppennormalform von $A$. Korollar 5.2.4 stellt sicher, dass die Lösungsmengen von $Ax = b$ und $Tx = d$ gleich sind. An der Matrix $T'$ werden wir die Menge der Lösungen von $Tx = d$ quasi ablesen können. Doch dazu später.

Wir hatten in Beispiel 5.1.3 gesehen, dass es lineare Gleichungssysteme gibt, die keine Lösungen haben. Mit dieser Problematik beschäftigt sich die folgende Proposition.

**5.2.5 Proposition:** Sei $A \in \mathrm{M}_{mn}(\mathbb{K})$, und sei $Ax = b$ ein lineares Gleichungssystem mit erweiterter Koeffizientenmatrix $A'$. Genau dann hat $Ax = b$ mindestens eine Lösung, wenn $\mathrm{Rg}(A) = \mathrm{Rg}(A')$ ist.

**Beweis:** Hier ist die Äquivalenz von zwei Aussagen zu zeigen, und wir zerlegen die Aussage in zwei Teilaussagen, die wir dann einzeln beweisen werden (vergleichen Sie mit den Überlegungen in Abschnitt 1.2.5).

**Behauptung:** Wenn $Ax = b$ mindestens eine Lösung hat, so gilt $\mathrm{Rg}(A) = \mathrm{Rg}(A')$.

**Beweis:** Wir beweisen die Aussage durch Kontraposition (vergleiche Abschnitt 1.2.5), das heißt, wir zeigen: $\mathrm{Rg}(A) \neq \mathrm{Rg}(A') \Rightarrow Ax = b$ hat keine Lösung.

Sei $\operatorname{Rg}(A) = r$. Sei $E$ das Produkt von Elementarmatrizen, so dass $EA = T = \left(t_{ij}\right) \in \mathrm{M}_{mn}(\mathbb{K})$ die Treppennormalform zu $A$ ist. Die letzten $m - r$ Zeilen von $T$ sind Nullzeilen. Dann gilt

$$EA' = \left( \begin{array}{c|c} & d_1 \\ T & \vdots \\ & d_m \end{array} \right) = \left( \begin{array}{ccc|c} t_{11} & \cdots & t_{1n} & d_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ t_{r1} & \cdots & t_{rn} & d_r \\ 0 & \cdots & 0 & d_{r+1} \\ \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & d_m \end{array} \right).$$

Da $\operatorname{Rg}(A) \neq \operatorname{Rg}(A')$, folgt $\operatorname{Rg}(A) < \operatorname{Rg}(A')$, und es gibt ein $d_i$ mit $i > r$ und $d_i \neq 0$. Das Gleichungssystem $EAx = Eb$ hat dann keine Lösung, denn kein $\lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{n1}(\mathbb{K})$ erfüllt die Gleichung $0 \cdot \lambda_1 + \cdots + 0 \cdot \lambda_n = d_i$. Da die Lösungsmenge von $EAx = Eb$ mit der Lösungsmenge von $Ax = b$ übereinstimmt, besitzt auch $Ax = b$ keine Lösung.

**Behauptung:** Wenn $\operatorname{Rg}(A) = \operatorname{Rg}(A')$ ist, so hat $Ax = b$ mindestens eine Lösung.

**Beweis:** Sei $r = \operatorname{Rg}(A) = \operatorname{Rg}(A')$. Sei $E$ invertierbar, so dass $EA = T$ die Treppennormalform zu $A$ ist. Seien $(1, j_1), \ldots, (r, j_r)$ die Pivot-Positionen von $T$. Sei $\mathcal{T} = \{j_1, \ldots, j_r\}$. Wir bestimmen explizit eine Lösung von $Tx = Eb$. Mit Proposition 5.2.3 ist dies dann auch eine Lösung von $Ax = b$.

Sei $Eb = \begin{pmatrix} d_1 \\ \vdots \\ d_r \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{m1}(\mathbb{K})$ die Spalte rechts des Striches in der Treppennormalform von $A'$. Definiere $\lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{n1}(\mathbb{K})$ durch

$$\lambda_i = \begin{cases} 0, & \text{falls } i \notin \mathcal{T} \\ d_s, & \text{falls } i = j_s \text{ für ein } 1 \leq s \leq r. \end{cases}$$

Wir berechnen nun $T\lambda$. Da die letzten $m - r$ Zeilen von $T$ Nullzeilen sind, sind die Einträge in den letzten $m - r$ Zeilen von $T\lambda$ ebenfalls 0. Wir betrachten nun die $s$-te Zeile von $T$, wobei $1 \leq s \leq r$ ist.

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} t_{sk}\lambda_k &= \sum_{k\in\mathcal{T}} t_{sk}\lambda_k + \sum_{k\notin\mathcal{T}} t_{sk}\lambda_k \\
&= t_{sj_s}\lambda_{j_s} + 0 \qquad\qquad \text{denn } t_{sk} = 0 \text{ für alle } k \in \mathcal{T}, k \neq j_s \\
&= d_s,
\end{aligned}$$

denn es ist $\lambda_{j_s} = d_s$, und $t_{sj_s} = 1$. Somit ist $\lambda$ Lösung von $Tx = Eb$, also auch von $Ax = b$. □

**5.2.6 Aufgabe:** Untersuchen Sie, ob die folgenden linearen Gleichungssysteme über $\mathbb{R}$ (mindestens) eine Lösung haben.

(a) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$

(b) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$

(c) $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \end{pmatrix}.$

(d) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 4 & 6 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$

**5.2.7 Aufgabe:** Sei $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 7 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{33}(\mathbb{R})$. In welcher Beziehung müssen $a, b$ und $c$ stehen, so dass das lineare Gleichungssystem $Ax = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ (mindestens) eine Lösung hat?

Der Beweis der Proposition 5.2.5 war konstruktiv. In dem Fall, dass $\mathrm{Rg}(A) = \mathrm{Rg}(A')$ gilt, wurde explizit eine Lösung von $Ax = b$ bestimmt. Stellen wir dieses Ergebnis noch einmal gesondert heraus:

**5.2.8 Korollar:** Sei $T \in \mathrm{M}_{mn}(\mathbb{K})$ eine Matrix in Treppennormalform mit $\mathrm{Rg}(T) = r$. Sei

$$T' = \begin{pmatrix} t_{11} & \cdots & t_{1n} & | & d_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & | & \vdots \\ t_{r1} & \cdots & t_{rn} & | & d_r \\ 0 & \cdots & 0 & | & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & | & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & | & 0 \end{pmatrix}.$$

die erweiterte Koeffizientenmatrix des linearen Gleichungssystems $Tx = d$. Seien $(1, j_1), \ldots, (r, j_r)$ die Pivot-Positionen von $T$, und sei $\mathcal{T} = \{j_1, \ldots, j_r\}$. Sei $\lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{n1}(\mathbb{K})$ definiert durch $\lambda_i = \begin{cases} 0, & \text{falls } i \notin \mathcal{T} \\ d_s, & \text{falls } i = j_s \text{ für ein } 1 \leq s \leq r. \end{cases}$

Dann ist $\lambda$ eine Lösung von $Tx = d$. □

Korollar 5.2.8 liefert eine Formel für eine Lösung linearer Gleichungssysteme, die Lösungen besitzen. Das Schöne ist, dass wir uns diese Formel gar nicht merken müssen, denn deren Analyse liefert eine ganz einfache Regel, wie man eine solche Lösung in jedem gegebenen Beispiel bestimmen kann:

**5.2.9 Merkregel:** Sei $T$ eine Matrix in Treppennormalform, und sei $Tx = d$ ein lineares Gleichungssystem mit erweiterter Koeffizientenmatrix $T'$. Sei $\mathrm{Rg}(T) = \mathrm{Rg}(T')$.

**Schritt 1:** Streiche alle Nullzeilen der erweiterten Koeffizientenmatrix $T'$.

**Schritt 2:** Füge Nullzeilen so ein, dass die Matrix links des Striches quadratisch wird und die Pivot-Elemente Diagonalelemente werden.

Dann steht rechts des Striches eine Lösung $\lambda_0$ von $Tx = b$.

**5.2.10 Aufgabe:** Finden Sie jeweils eine Lösung derjenigen linearen Gleichungssysteme in Aufgabe 5.2.6, die eine Lösung besitzen.

Fassen wir zusammen, was wir bisher über die Struktur der Lösungsmenge linearer Gleichungssysteme bewiesen haben:

**5.2.11 Satz:** (Die Struktur der Lösungsmenge eines linearen Gleichungssystems)

Sei $A \in \mathrm{M}_{mn}(\mathbb{K})$, und sei $Ax = b$ ein lineares Gleichungssystem mit erweiterter Koeffizientenmatrix $A'$. Sei $\mathcal{L}$ die Menge aller Lösungen von $Ax = b$, und sei $\mathcal{U}$

die Menge aller Lösungen des zugehörigen homogenen Gleichungssystems $Ax = 0$. Dann gilt:

(a) $Ax = b$ hat genau dann (mindestens) eine Lösung, wenn $\mathrm{Rg}(A) = \mathrm{Rg}(A')$ ist.

(b) Wenn $\lambda_0$ eine Lösung von $Ax = b$ ist, so gilt $\mathcal{L} = \lambda_0 + \mathcal{U}$.

(c) Wenn $T' = \begin{pmatrix} T & \mid & d \end{pmatrix}$ die Treppennormalform zu $A'$ ist, dann sind die Lösungsmengen von $Ax = b$ und $Tx = d$ gleich.

**Beweis:**

(a) Diese Aussage wurde in Proposition 5.2.5 bewiesen.

(b) Diese Aussage ist Proposition 5.2.1.

(c) Diese Aussage folgt aus Korollar 5.2.4, denn $A'$ und $T'$ sind zeilenäquivalent.

□

Bisher können wir also entscheiden, ob ein lineares Gleichungssystem $Ax = b$ (mindestens) eine Lösung hat oder nicht. Falls es mindestens eine Lösung hat, so können wir mit Hilfe von Korollar 5.2.8 beziehungsweise Merkregel 5.2.9 eine Lösung angeben. Was noch fehlt zur Bestimmung der Lösungsmenge eines linearen Gleichungssystems, ist eine Möglichkeit, die Menge aller Lösungen $\mathcal{U}$ des zugehörigen homogenen Gleichungssystems zu bestimmen. Dieser Aufgabe werden wir uns jetzt widmen. Wir beginnen mit einer einfachen Beobachtung:

**5.2.12 Bemerkung:** Sei $Ax = 0$ ein homogenes lineares Gleichungssystem, und sei $T$ die Treppennormalform von $A \in \mathrm{M}_{mn}(\mathbb{K})$. Dann ist $A' = \begin{pmatrix} A & \mid & 0 \end{pmatrix}$ die erweiterte Koeffizientenmatrix von $Ax = 0$, und $A'$ ist zeilenäquivalent zu $T' = \begin{pmatrix} T & \mid & 0 \end{pmatrix}$.

**Beweis:** Wenn wir den Gaußalgorithmus auf $A'$ anwenden, dann gehen wir spaltenweise vor. Die ersten $m$ Spalten in der Treppennormalform zu $A'$ sind also die ersten $m$ Spalten in der Treppennormalform zu $A$. Diese ist nach Annahme die Matrix $T$. Die letzte Spalte von $A'$ ist nach Definition der erweiterten Koeffizientenmatrix eine Nullspalte. Durch elementare Zeilenumformungen wird diese nicht geändert, und es folgt die Behauptung, denn $T'$ ist eine Matrix in Treppennormalform. □

Aus dieser Bemerkung und aus Satz 5.2.11 (c) folgt, dass die Lösungsmenge $\mathcal{U}$ von $Ax = 0$ dieselbe ist wie die von $Tx = 0$, sofern $T$ die Treppennormalform von

$A$ ist. Wir werden uns daher darauf beschränken, die Lösungsmengen homogener linearer Gleichungssysteme der Form $Tx = 0$ zu beschreiben, wobei $T$ eine Matrix in Treppennormalform ist.

**5.2.13 Proposition:** Sei $T \in \mathrm{M}_{mn}(\mathbb{K})$ eine Matrix in Treppennormalform mit Pivot-Positionen $(1, j_1), \ldots, (r, j_r)$. Sei $\mathcal{T} = \{j_1, \ldots j_r\}$. Die Lösungsmenge $\mathcal{U}$ von $Tx = 0$ ist

$$\mathcal{U} = \{ \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} \mid u_k \text{ beliebig für alle } k \notin \mathcal{T}, \text{ und } u_{j_s} = -\sum_{k \notin \mathcal{T}} t_{sk} u_k \text{ für alle } j_s \in \mathcal{T} \}.$$

**Beweis:** Hier ist wieder eine Gleichheit von Mengen zeigen. Wir zerlegen den Beweis in zwei Schritte. Zunächst zeigen wir, dass jedes Element der rechten Menge eine Lösung von $Tx = 0$ ist, und dann zeigen wir, dass jede Lösung von $Tx = 0$ ein Element der rechten Menge ist.

Sei $u = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{n1}(\mathbb{K})$ definiert durch

$$u_i = \begin{cases} u_i \in \mathbb{K} \text{ beliebig}, & \text{falls } i \notin \mathcal{T} \\ -\sum\limits_{k \notin \mathcal{T}} t_{sk} u_k, & \text{falls } i = j_s \text{ für ein } 1 \le s \le r. \end{cases}$$

Wir berechnen $Tu$. Die letzten $m - r$ Zeilen von $T$ sind Nullzeilen, daher sind die letzten $m - r$ Zeilen von $Tu$ ebenfalls Nullzeilen. Sei $1 \le s \le r$. Wir multiplizieren die $s$-te Zeile von $T$ mit $u$ und erhalten:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n} t_{sk} u_k &= \sum_{k \in \mathcal{T}} t_{sk} u_k + \sum_{k \notin \mathcal{T}} t_{sk} u_k \\ &= t_{sj_s} u_{j_s} + \sum_{k \notin \mathcal{T}} t_{sk} u_k, \text{ denn } t_{sk} = 0 \text{ für alle } k \in \mathcal{T}, k \ne j_s \\ &= -\sum_{k \notin \mathcal{T}} t_{sk} u_k + \sum_{k \notin \mathcal{T}} t_{sk} u_k \\ &= 0. \end{aligned}$$

Es gilt also $u \in \mathcal{U}$.

Sei umgekehrt $z = \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix}$ eine Lösung von $Tx = 0$. Dann gilt für alle $1 \le s \le r$

$$\sum_{k=1}^{n} t_{sk} z_k = \sum_{k \in \mathcal{T}} t_{sk} z_k + \sum_{k \notin \mathcal{T}} t_{sk} z_k = 1 \cdot z_{j_s} + \sum_{k \notin \mathcal{T}} t_{sk} z_k = 0,$$

und es folgt $z_{j_s} = -\sum_{k \notin \mathcal{T}} t_{sk} z_k$ für alle $1 \leq s \leq r$. Die Einträge $z_k$ für $k \notin \mathcal{T}$ sind beliebige Elemente in $\mathbb{K}$. Es gilt also

$$\mathcal{U} = \{u \in \mathrm{M}_{n1}(\mathbb{K}) \mid u_k \text{ beliebig für alle } k \notin \mathcal{T}, \text{ und } u_{js} = -\sum_{k \notin \mathcal{T}} t_{sk} u_k \text{ für alle } j_s \in \mathcal{T}\}.$$

□

Bevor wir uns die in Proposition 5.2.13 beschriebene Menge genauer ansehen, nehmen wir noch rasch eine Folgerung mit:

**5.2.14 Korollar:** (Eindeutige Lösung von linearen Gleichungssystemen)

Sei $Ax = b$ mit $A \in \mathrm{M}_{mn}(\mathbb{K})$ ein lineares Gleichungssystem, das eine Lösung $\lambda$ besitzt. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

(a) $\lambda$ ist die einzige Lösung von $Ax = b$.

(b) $\mathrm{Rg}(A) = n$.

**Beweis:** Sei $\mathcal{L}$ die Lösungsmenge von $Ax = b$. Wir wissen mit Satz 5.2.11, dass $\mathcal{L} = \lambda + \mathcal{U}$, wobei $\mathcal{U}$ die Lösungsmenge von $Tx = 0$ ist, und $T$ die Treppennormalform zu $A$ ist. Dann gilt: $\mathcal{L} = \{\lambda\} \Leftrightarrow \mathcal{U} = \{0\}$. Dies ist äquivalent dazu, dass

$$\begin{aligned}\mathcal{U} &= \{u \in \mathrm{M}_{n1}(\mathbb{K}) \mid u_k \text{ beliebig für alle } k \notin \mathcal{T}, \text{ und } u_{js} = -\sum_{k \notin \mathcal{T}} t_{sk} u_k \text{ für alle } j_s \in \mathcal{T}\} \\ &= \{0\}\end{aligned}$$

ist, dass also $\{1, \cdots, n\} = \mathcal{T}$ gilt, also $\mathrm{Rg}(A) = n$ ist. □

Betrachten wir nun in einem Beispiel, wie die Lösungsmenge $\mathcal{U}$ eines homogenen linearen Gleichungssystems $Tx = 0$, $T$ in Treppennormalform, die wir in Proposition 5.2.13 bestimmt haben, aussieht.

**5.2.15 Beispiel:** Sei $T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{46}(\mathbb{R})$. Die Pivot-Positionen sind $(1,2)$, $(2,3)$ und $(3,5)$, also $\mathcal{T} = \{2,3,5\}$. Sei $u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \\ u_6 \end{pmatrix}$ eine Lösung von

$Tx = 0$. Diejenigen Einträge in $u$, deren Indizes nicht in $\mathcal{T}$ liegen, dürfen wir beliebig wählen. In diesem Beispiel können also $u_1$, $u_4$ und $u_6$ frei gewählt werden. Die Einträge $u_2$, $u_3$ und $u_5$ müssen wir berechnen. Wie sie berechnet werden, besagt Proposition 5.2.13: Es sind $u_2 = -t_{11}u_1 - t_{14}u_4 - t_{16}u_6$, $u_3 = -t_{21}u_1 - t_{24}u_4 - t_{26}u_6$ und $u_5 = -t_{31}u_1 - t_{34}u_4 - t_{36}u_6$. Wir schreiben jetzt alle Einträge von $u$ etwas übersichtlicher:

$$\begin{array}{lcllllll}
u_1 & = & 1 \cdot u_1 & + & 0 \cdot u_4 & + & 0 \cdot u_6 \\
u_2 & = & -t_{11}u_1 & - & t_{14}u_4 & - & t_{16}u_6 \\
u_3 & = & -t_{21}u_1 & - & t_{24}u_4 & - & t_{26}u_6 \\
u_4 & = & 0 \cdot u_1 & + & 1 \cdot u_4 & + & 0 \cdot u_6 \\
u_5 & = & -t_{31}u_1 & - & t_{34}u_4 & - & t_{36}u_6 \\
u_6 & = & 0 \cdot u_1 & + & 0 \cdot u_4 & + & 1 \cdot u_6.
\end{array}$$

Da $T$ eine Matrix in Treppennormalform ist, sind die Einträge $t_{ij}$ unterhalb der Einsen 0, wir haben also

$$\begin{array}{lcllllll}
u_1 & = & 1 \cdot u_1 & + & 0 \cdot u_4 & + & 0 \cdot u_6 \\
u_2 & = & 0 \cdot u_1 & - & t_{14}u_4 & - & t_{16}u_6 \\
u_3 & = & 0 \cdot u_1 & - & t_{24}u_4 & - & t_{26}u_6 \\
u_4 & = & 0 \cdot u_1 & + & 1 \cdot u_4 & + & 0 \cdot u_6 \\
u_5 & = & 0 \cdot u_1 & + & 0 \cdot u_4 & - & t_{36}u_6 \\
u_6 & = & 0 \cdot u_1 & + & 0 \cdot u_4 & + & 1 \cdot u_6.
\end{array}$$

In Matrixschreibweise ist $u = u_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + u_4 \begin{pmatrix} 0 \\ -t_{14} \\ -t_{24} \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + u_6 \begin{pmatrix} 0 \\ -t_{16} \\ -t_{26} \\ 0 \\ -t_{36} \\ 1 \end{pmatrix}$, wobei $u_1$, $u_4$ und $u_6$ beliebige Elemente in $\mathbb{R}$ sind. Da $u_1$, $u_4$ und $u_6$ beliebig sind, können wir sie durch $-u_1$, $-u_4$ und $-u_6$ ersetzen, und erhalten als allgemeine Lösung von $Tx = 0$ die Matrix $u = u_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + u_4 \begin{pmatrix} 0 \\ t_{14} \\ t_{24} \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + u_6 \begin{pmatrix} 0 \\ t_{16} \\ t_{26} \\ 0 \\ t_{36} \\ -1 \end{pmatrix}$ mit $u_1, u_4, u_6 \in \mathbb{R}$. Setzen wir die konkreten Zahlen von $T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ ein, so gilt

$$\mathcal{U} = \left\{ a \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \\ 0 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix} \mid a, b, c \in \mathbb{R} \right\}.$$

Wie Sie in diesem Beispiel gesehen haben, verbirgt sich hinter der Formel für $\mathcal{U}$ in Proposition 5.2.13 wieder eine Merkregel, mit der wir uns die Indizes, die die Lösungsmenge eines homogenen linearen Gleichungssystems beschreiben, gar nicht merken müssen, und die es ermöglicht, die Lösungsmenge $\mathcal{U}$ von $Tx = 0$ ($T$ in Treppennormalform) sehr einfach zu bestimmen.

**5.2.16 Merkregel:** Sei $T \in \mathrm{M}_{mn}(\mathbb{K})$ eine Matrix in Treppennormalform, und sei $\mathcal{U}$ die Lösungsmenge von $Tx = 0$.

**Schritt 1:** Streiche alle Nullzeilen in $T$.

**Schritt 2:** Füge Nullzeilen so ein, dass die Matrix quadratisch wird, und die Pivot-Elemente Diagonalelemente werden.

**Schritt 4:** Ersetze die Nullelemente auf der Diagonalen durch $-1$.

**Schritt 5:** Betrachte die Spalten $S_1, \cdots, S_{n-r}$, in denen wir $-1$ eingefügt haben.

Dann ist $\mathcal{U} = \{a_1 S_1 + \cdots + a_{n-r} S_{n-r} \mid a_1, \ldots, a_{n-r} \in \mathbb{K}\}$ die Lösungsmenge des homogenen linearen Gleichungssystems $Tx = 0$.

Bevor Sie selbst Beispiele rechnen müssen, machen wir noch einen Moment Pause und analysieren die einzelnen Schritte. In Schritt 1 streichen wir alle Nullzeilen von $T$. Es überleben also nur die Zeilen, in denen Pivot-Positionen auftreten. Nach Schritt 1 hat die Matrix also $\mathrm{Rg}(T)$ Zeilen. In Schritt 2 fügen wir $n - \mathrm{Rg}(T)$ Nullzeilen so ein, dass die Matrix quadratisch wird und die Pivot-Elemente auf der Diagonalen stehen. In Schritt 4 ersetzen wir die Nullelemente auf der Diagonalen durch $-1$. Wir ersetzen also $n - \mathrm{Rg}(T)$ Nullen durch $-1$, die übrigen Einträge in diesen Zeilen sind 0. Somit erhalten wir im fünften Schritt $n - \mathrm{Rg}(T)$ Spalten $S_1, \ldots, S_{n-\mathrm{Rg}(T)}$. Schreiben wir die Spalten $S_1, \ldots, S_{n-\mathrm{Rg}(T)}$ in eine Matrix $B$, so ist $\mathrm{Rg}(B) = n - \mathrm{Rg}(T)$, denn die $n - \mathrm{Rg}(T)$ eingefügten $-1$ stehen in verschiedenen

Zeilen, deren übrigen Einträge Null sind. Die Treppennormalform der $n \times \mathrm{Rg}(T)$-Matrix $B$ ist damit $\begin{pmatrix} 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 \\ 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$. Die Spalten $S_1, \dots, S_{n-\mathrm{Rg}(T)}$ sind selbst Lösungen des linearen Gleichungssystems: ein $S_i$, $1 \leq i \leq n - \mathrm{Rg}(T)$, liegt in $\mathcal{U}$, wir müssen nur als Koeffizienten $a_k = 0$ für alle $k \neq i$ und $a_i = 1$ setzen. Ist $A$ eine Matrix mit Treppennormalform $T$, so gilt $\mathrm{Rg}(A) = \mathrm{Rg}(T)$, und die linearen Gleichungssysteme $Ax = 0$ und $Tx = 0$ haben dieselben Lösungen. Unsere Überlegungen beweisen:

**5.2.17 Proposition:** Sei $A \in \mathrm{M}_{mn}(\mathbb{K})$, und sei $r = \mathrm{Rg}(A)$. Sei $\mathcal{U}$ die Lösungsmenge von $Ax = 0$. Dann gibt es $n - r$ Lösungen $S_1, \dots, S_{n-r}$ von $Ax = 0$, so dass $\mathcal{U} = \{a_1 S_1 + \dots + a_{n-r} S_{n-r} \mid a_1, \dots, a_{n-r} \in \mathbb{K}\}$ ist. Die Matrix $B$, deren Spalten $S_1, \dots, S_{n-r}$ sind, hat den Rang $n - r$. $\square$

**5.2.18 Aufgabe:** Berechnen Sie die Lösungsmengen der zugehörigen homogenen linearen Gleichungssysteme in Aufgabe 5.2.6.

**5.2.19 Aufgabe:** Bestimmen Sie die Lösungsmengen derjenigen linearen Gleichungssysteme in Aufgabe 5.2.6, die mindestens eine Lösung besitzen.

## 5.3 Zusammenfassung

In Abschnitt 5.2 haben wir gezeigt, wann genau lineare Gleichungssysteme Lösungen besitzen und wie diese berechnet werden können. Wir fassen hier unsere Ergebnisse noch einmal zusammen.

Sei $A \in \mathrm{M}_{mn}(\mathbb{K})$, und sei $Ax = b$ ein lineares Gleichungssystem. Sei $A'$ die erweiterte Koeffizientenmatrix von $Ax = b$.

$Ax = b$ hat genau dann mindestens eine Lösung, falls $\mathrm{Rg}(A) = \mathrm{Rg}(A')$ ist.

$Ax = b$ hat genau dann genau eine Lösung, wenn $\mathrm{Rg}(A) = \mathrm{Rg}(A') = n$ ist.

$Ax = b$ hat genau dann mehr als eine Lösung, wenn $\mathrm{Rg}(A) = \mathrm{Rg}(A')$ und $\mathrm{Rg}(A) \neq n$ ist.

Im Fall $\mathrm{Rg}(A) = \mathrm{Rg}(A')$ können wir die Lösungsmenge $\mathcal{L}$ von $Ax = b$ wie folgt berechnen. Dabei kombinieren wir die Merkregeln 5.2.9 und 5.2.16.

**Schritt 0:** Berechne die Treppennormalform $T' = \begin{pmatrix} T & | & d \end{pmatrix}$ von $A' = \begin{pmatrix} A & | & b \end{pmatrix}$. Ist $\mathrm{Rg}(T') > \mathrm{Rg}(T)$, so ist $\mathrm{Rg}(A') > \mathrm{Rg}(A)$, und $Ax = b$ hat keine Lösung. Anderenfalls fahren wir mit Schritt 1 fort.

**Beispiel:** Wir suchen alle Lösungen des folgenden linearen Gleichungssystems über $\mathbb{R}$.

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcr} 2x_1 & + & 2x_2 & + & 6x_3 & & & + & 4x_5 & = & 12 \\ x_1 & + & x_2 & + & 3x_3 & + & x_4 & + & 3x_5 & = & 8 \\ 2x_1 & + & x_2 & + & 3x_3 & + & 4x_4 & + & 6x_5 & = & 15 \\ & & 2x_2 & + & 6x_3 & + & 3x_4 & + & 7x_5 & = & 16 \end{array}$$

Wir bestimmen die erweiterte Koeffizientenmatrix $A'$.

$$A' = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 6 & 0 & 4 & | & 12 \\ 1 & 1 & 3 & 1 & 3 & | & 8 \\ 2 & 1 & 3 & 4 & 6 & | & 15 \\ 0 & 2 & 6 & 3 & 7 & | & 16 \end{pmatrix}, \text{ und es ist } b = \begin{pmatrix} 12 \\ 8 \\ 15 \\ 16 \end{pmatrix}.$$

Links des Striches steht die Koeffizientenmatrix $A$. Das lineare Gleichungssystem hat jetzt die Form $Ax = b$. Wir wenden auf $A'$ elementare Zeilenumformungen so an, dass $A$ in Treppennormalform überführt wird. Wenn $\mathrm{Rg}(A) = \mathrm{Rg}(A')$, so erhalten wir auf diese Weise schon die Treppennormalform zu $A'$. In unserem Beispiel ist das der Fall, die Treppennormalform $T'$ zu $A'$ ist

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & | & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 2 & | & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & | & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix},$$

und links des Striches steht die Treppennormalform $T$ zu $A$. Wir fahren fort mit Schritt 1.

**Schritt 1:** Streiche alle Nullzeilen der erweiterten Koeffizientenmatrix $T'$.

**Beispiel:** $T' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & | & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 2 & | & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & | & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix}$, dieser Schritt liefert $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & | & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 2 & | & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & | & 2 \end{pmatrix}$.

**Schritt 2:** Füge Nullzeilen so ein, dass die Matrix links des Striches quadratisch wird, und die Pivot-Elemente Diagonalelemente werden.

**Beispiel:** Dieser Schritt liefert in unserem Beispiel $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & | & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 2 & | & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & | & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix}$.

**Schritt 3:** Rechts des Striches steht eine spezielle Lösung $\lambda_0$ des linearen Gleichungssystems.

**Beispiel:** $\begin{pmatrix}1\\5\\0\\2\\0\end{pmatrix}$ ist eine spezielle Lösung von $\begin{pmatrix}1&0&0&0&0\\0&1&3&0&2\\0&0&0&1&1\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\\x_5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\5\\2\\0\end{pmatrix}$ und auch von $Ax=b$.

**Schritt 4:** Ersetze die Nullelemente auf der Diagonalen durch $-1$.

**Beispiel:** Wir erhalten $\begin{pmatrix}1&0&0&0&0&|&1\\0&1&3&0&2&|&5\\0&0&-1&0&0&|&0\\0&0&0&1&1&|&2\\0&0&0&0&-1&|&0\end{pmatrix}$.

**Schritt 5:** Betrachte die Spalten $S_1,\dots,S_{n-r}$, in denen wir $-1$ eingefügt haben.

**Beispiel:** $S_1=\begin{pmatrix}0\\3\\-1\\0\\0\end{pmatrix}, S_2=\begin{pmatrix}0\\2\\0\\1\\-1\end{pmatrix}$.

**Schritt 6:** Es ist $\mathcal{U}=\{a_1S_1+\cdots+a_{n-r}S_{n-r}\mid a_1,\dots,a_{n-r}\in\mathbb{K}\}$ die Lösungsmenge des zugehörigen homogenen Gleichungssystems.

**Beispiel:** $\mathcal{U}=\left\{a_1\begin{pmatrix}0\\3\\-1\\0\\0\end{pmatrix}+a_2\begin{pmatrix}0\\2\\0\\1\\-1\end{pmatrix}\mid a_1,a_2\in\mathbb{R}\right\}$.

**Schritt 7:** $\lambda+\mathcal{U}=\{\lambda+a_1S_1+\cdots+a_{n-r}S_{n-r}\mid a_1,\dots,a_{n-r}\in\mathbb{K}\}$ ist die Lösungsmenge von $Tx=d$, also von $Ax=b$.

**Beispiel:** $\lambda+\mathcal{U}=\left\{\begin{pmatrix}1\\5\\0\\2\\0\end{pmatrix}+a_1\begin{pmatrix}0\\3\\-1\\0\\0\end{pmatrix}+a_2\begin{pmatrix}0\\2\\0\\1\\-1\end{pmatrix}\mid a_1,a_2\in\mathbb{R}\right\}$.

**5.3.1 Aufgabe:** Lösen Sie folgendes lineare Gleichungssystem.

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} x_1 & - & 3x_2 & + & 4x_3 & - & 2x_4 & = & 5 \\ & & 2x_2 & - & 6x_3 & + & x_4 & = & 2 \\ & & x_2 & - & 3x_3 & & & = & 4 \end{array}$$

# Lösungen der Aufgaben

## Lösung der Aufgabe in 5.1

**Aufgabe 5.1.5** Sei $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, und sei $b = \begin{pmatrix} 47 \\ 11 \end{pmatrix}$. Die Gleichungen des linearen Gleichungssystems $Ax = b$ sind

$$\begin{array}{ccccccc} x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & = & 47 \\ x_1 & & & + & x_3 & = & 11. \end{array}$$

Die erweiterte Koeffizientenmatrix ist

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \mid & 47 \\ 1 & 0 & 1 & \mid & 11 \end{pmatrix},$$

und das zugehörige homogene Gleichungssystem lautet

$$\begin{array}{ccccccc} x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & = & 0 \\ x_1 & & & + & x_3 & = & 0, \end{array}$$

beziehungsweise in der Kurzschreibweise

$$Ax = 0.$$

## Lösungen der Aufgaben in 5.2

**Aufgabe 5.2.2** Die Aussage (a) ist wahr, denn $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ist Lösung des gegebenen linearen Gleichungssystems.

Die Aussage (b) ist wahr, denn $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ ist Lösung des gegebenen linearen Gleichungssystems.

Die Aussage (c) ist falsch, denn für alle $u \in \mathcal{U}$ ist $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + u$ keine Lösung des gegebenen linearen Gleichungssystems.

Die Aussage (d) ist falsch, denn für alle $u \in \mathcal{U}$ ist $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + u$ keine Lösung des gegebenen linearen Gleichungssystems.

**Aufgabe 5.2.6** In allen Fällen müssen wir die Ränge von $A'$ berechnen und mit den Rängen von $A$ vergleichen.

(a) Es ist $A' = \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 1 \end{array}\right)$. Wir überführen $A'$ mit dem Gaußalgorithmus in Treppennormalform. Da der Gaußalgorithmus die Spalten von links nach rechts abarbeitet, steht in der Treppennormalform $T'$ von $A'$ links des Striches die Treppennormalform von $A$.

Wir subtrahieren die zweite Zeile von der ersten und der dritten Zeile und erhalten

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 0 & -3 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Wir addieren das Dreifache der dritten Zeile zur zweiten und subtrahieren das Dreifache der dritten Zeile von der ersten. Dies liefert

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Wir teilen die erste Zeile durch 2 und multiplizieren die dritte Zeile mit $-1$.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Links des Striches steht die Treppennormalform von $A$ und es ist $\mathrm{Rg}(A) = 3$. Es ist auch $\mathrm{Rg}(A') = 3$. Somit hat das lineare Gleichungssystem mindestens eine Lösung.

(b) Es ist $A' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & | & 1 \\ 1 & 2 & | & 1 \\ 1 & 0 & | & 1 \end{pmatrix}$. Wir subtrahieren die erste Zeile von der zweiten und erhalten

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & | & 1 \\ 0 & 1 & | & 0 \\ 1 & 0 & | & 1 \end{pmatrix}$$

Wir vertauschen die erste und die dritte Zeile:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & | & 1 \\ 0 & 1 & | & 0 \\ 1 & 1 & | & 1 \end{pmatrix}.$$

Wir subtrahieren die erste Zeile von der dritten und die zweite Zeile von der dritten. Dies ergibt

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & | & 1 \\ 0 & 1 & | & 0 \\ 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix}.$$

Links des Striches steht die Treppennormalform von $A$. Es ist $\mathrm{Rg}(A) = \mathrm{Rg}(A') = 2$, und es folgt, dass das lineare Gleichungssystem eine Lösung besitzt.

(c) Die Treppennormalform von $A'$ ist $\begin{pmatrix} 1 & \frac{3}{2} & 2 & | & 1 \end{pmatrix}$. Offenbar ist $\mathrm{Rg}(A) = \mathrm{Rg}(A') = 1$, und es folgt, dass das lineare Gleichungssystem eine Lösung hat.

(d) Es ist $A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & | & 1 \\ 1 & 3 & 2 & | & 1 \\ 4 & 6 & 6 & | & 1 \end{pmatrix}$. Wir subtrahieren die erste Zeile von der zweiten und das 4-fache der ersten Zeile von der dritten. Dies liefert:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & | & 1 \\ 0 & 3 & 1 & | & 0 \\ 0 & 6 & 2 & | & -3 \end{pmatrix}.$$

Wir subtrahieren das Doppelte der zweiten Zeile von der dritten:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & | & 1 \\ 0 & 3 & 1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & -3 \end{pmatrix}.$$

Wir sehen schon, dass $\mathrm{Rg}(A) = 2$ und $\mathrm{Rg}(A') = 3$ ist. Somit hat das lineare Gleichungssystem keine Lösung.

Zum späteren Gebrauch formen wir die Matrix $A'$ noch so um, dass links des Striches die Treppennormalform von $A$ steht. Dazu teilen wir die zweite Zeile durch 3:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & | & 1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & -3 \end{pmatrix}.$$

**Aufgabe 5.2.7** Die erweiterte Koeffizientenmatrix $A' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & | & a \\ 3 & 4 & 7 & | & b \\ 1 & 2 & 3 & | & c \end{pmatrix}$ und $A$ müssen denselben Rang haben. Wir beginnen, $A'$ in Treppennormalform zu überführen. Wir subtrahieren das 3-fache der ersten Zeile von der zweiten und die erste Zeile von der dritten. Dies liefert:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & | & a \\ 0 & 1 & 1 & | & b-3a \\ 0 & 1 & 1 & | & c-a \end{pmatrix}.$$

Wir subtrahieren die zweite Zeile von der dritten und erhalten

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & | & a \\ 0 & 1 & 1 & | & b-3a \\ 0 & 0 & 0 & | & 2a-b+c \end{pmatrix}.$$

Die Matrix $A$ hat denselben Rang wie die Matrix links des Striches, also den Rang 2. Die Matrix $A'$ hat genau dann den Rang 2, wenn $2a-b+c=0$ ist. Das lineare Gleichungssystem hat also genau dann eine Lösung, wenn $2a-b+c=0$ ist.

**Aufgabe 5.2.10** Die linearen Gleichungssysteme in (a), (b) und (c) haben Lösungen. Wir bestimmen jeweils eine Lösung mit Hilfe der Merkregel 5.2.9.

(a) **Schritt 1:** Streiche alle Nullzeilen der erweiterten Koeffizientenmatrix $T'$.

Hier gibt es keine Zeile, die wir streichen könnten, und wir gehen gleich zu Schritt 2.

**Schritt 2:** Füge Nullzeilen so ein, dass die Matrix links des Striches quadratisch wird, und die Pivot-Elemente Diagonalelemente werden. Dies liefert

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & | & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & | & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix}.$$

Dann ist $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ eine Lösung von $Ax = b$.

(b) **Schritt 1:** Streiche alle Nullzeilen der erweiterten Koeffizientenmatrix $T'$. Dies liefert

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & | & 1 \\ 0 & 1 & | & 0 \end{pmatrix}$$

**Schritt 2:** Füge Nullzeilen so ein, dass die Matrix links des Striches quadratisch wird, und die Pivot-Elemente Diagonalelemente werden.

Dieser Schritt ist hier nicht nötig, die Matrix hat schon die gewünschte Form. Dann ist $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ eine Lösung von $Ax = b$.

(c) **Schritt 1:** Streiche alle Nullzeilen der erweiterten Koeffizientenmatrix $T'$.

Hier gibt es keine Zeile, die wir streichen könnten, und wir gehen gleich zu Schritt 2.

**Schritt 2:** Füge Nullzeilen so ein, dass die Matrix links des Striches quadratisch wird, und die Pivot-Elemente Diagonalelemente werden. Dieser Schritt liefert

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{3}{2} & 2 & | & 1 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix}.$$

Es ist $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ eine Lösung von $Ax = b$.

**Aufgabe 5.2.18** Wir verfahren in allen Fällen wie in Merkregel 5.2.16. Wir haben die Treppennormalformen der Matrizen bereits in Aufgabe 5.2.6 berechnet, es sind die Matrizen links des Striches in $T'$.

(a) Es ist $T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

**Schritt 1:** Streiche alle Nullzeilen in $T$.

Hier gibt es keine Zeile, die wir streichen könnten, und wir gehen gleich zu Schritt 2.

**Schritt 2:** Füge Nullzeilen so ein, dass die Matrix quadratisch wird, und die Pivot-Elemente Diagonalelemente werden. Dieser Schritt liefert

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

**Schritt 4:** Ersetze die Nullelemente auf der Diagonalen durch $-1$.

Wir erhalten
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

**Schritt 5:** Betrachte die Spalten $S_1, \cdots, S_{n-r}$, in denen wir $-1$ eingefügt haben.

Dieser Schritt liefert die Spalte $\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Dann ist $\mathcal{U} = \left\{ a \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \mid a \in \mathbb{R} \right\}$ die Lösungsmenge des homogenen linearen Gleichungssystems $Tx = 0$.

(b) Es ist $T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

**Schritt 1:** Streiche alle Nullzeilen in $T$. Dieser Schritt liefert
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

**Schritt 2:** Füge Nullzeilen so ein, dass die Matrix quadratisch wird, und die Pivot-Elemente Diagonalelemente werden.

Hier ist nichts zu tun, die Matrix hat schon die gewünschte Form.

**Schritt 4:** Ersetze die Nullelemente auf der Diagonalen durch $-1$.

Hier ist nichts zu ersetzen.

**Schritt 5:** Betrachte die Spalten $S_1, \cdots, S_{n-r}$, in denen wir $-1$ eingefügt haben.

Auch hier ist nichts zu tun.

Es ist $\mathcal{U} = \{0\}$ die Lösungsmenge des homogenen linearen Gleichungssystems $Tx = 0$.

(c) Es ist $T = \begin{pmatrix} 1 & \frac{3}{2} & 2 \end{pmatrix}$.

**Schritt 1:** Streiche alle Nullzeilen in $T$.

Hier ist nichts zu streichen.

**Schritt 2:** Füge Nullzeilen so ein, dass die Matrix quadratisch wird, und die Pivot-Elemente Diagonalelemente werden. Dieser Schritt liefert

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{3}{2} & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

**Schritt 4:** Ersetze die Nullelemente auf der Diagonalen durch $-1$. Wir erhalten

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{3}{2} & 2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

**Schritt 5:** Betrachte die Spalten $S_1, \cdots, S_{n-r}$, in denen wir $-1$ eingefügt haben.

Dieser Schritt liefert die Spalten $\begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Dann ist $\mathcal{U} = \left\{ a_1 \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + a_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \mid a_1, a_2 \in \mathbb{R} \right\}$ die Lösungsmenge des homogenen linearen Gleichungssystems $Tx = 0$.

(d) Es ist $T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

**Schritt 1:** Streiche alle Nullzeilen in $T$. Dieser Schritt liefert

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

**Schritt 2:** Füge Nullzeilen so ein, dass die Matrix quadratisch wird, und die Pivot-Elemente Diagonalelemente werden. Wir erhalten

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

**Schritt 4:** Ersetze die Nullelemente auf der Diagonalen durch $-1$. Es folgt

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

**Schritt 5:** Betrachte die Spalten $S_1, \cdots, S_{n-r}$, in denen wir $-1$ eingefügt haben.

Dieser Schritt liefert $\begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{3} \\ -1 \end{pmatrix}$.

Dann ist $\mathcal{U} = \left\{ a \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{3} \\ -1 \end{pmatrix} \mid a \in \mathbb{R} \right\}$ die Lösungsmenge des homogenen linearen Gleichungssystems $Tx = 0$.

**Aufgabe 5.2.19** In Aufgabe 5.2.6 haben wir gezeigt, dass die linearen Gleichungssysteme in den Fällen (a), (b) und (c) Lösungen besitzen. Alle benötigten Rechenschritte (Berechnung einer Lösung und Berechnung der Lösungsmenge des zugehörigen homogenen linearen Gleichungssystems) haben wir in den Aufgaben 5.2.10 und 5.2.18 auch bereits durchgeführt. Wir müssen die Ergebnisse jetzt nur noch zusammensetzen.

(a) Es ist $\mathcal{L} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \left\{ a \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \mid a \in \mathbb{R} \right\}$.

(b) Es ist $\mathcal{L} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \{0\}$.

(c) Es ist $\mathcal{L} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \left\{ a_1 \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + a_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \mid a_1, a_2 \in \mathbb{R} \right\}$.

# Lösung der Aufgabe in 5.3

**Aufgabe 5.3.1** Um die Lösungsmenge des linearen Gleichungssystems

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} x_1 & - & 3x_2 & + & 4x_3 & - & 2x_4 & = & 5 \\ & & 2x_2 & - & 6x_3 & + & x_4 & = & 2 \\ & & x_2 & - & 3x_3 & & & = & 4 \end{array}$$

zu bestimmen, betrachten wir die erweiterte Koeffizientenmatrix

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 & -2 & | & 5 \\ 0 & 2 & -6 & 1 & | & 2 \\ 0 & 1 & -3 & 0 & | & 4 \end{pmatrix}.$$

Links des Striches steht die Koeffizientenmatrix $A$. Wir überführen $A$, beziehungsweise $A'$ in Treppennormalform. Dazu vertauschen wir die zweite und die dritte Zeile:

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 & -2 & | & 5 \\ 0 & 1 & -3 & 0 & | & 4 \\ 0 & 2 & -6 & 1 & | & 2 \end{pmatrix},$$

addieren das 3-fache der zweiten Zeile zur ersten und subtrahieren das Doppelte der zweiten Zeile von der dritten. Wir erhalten

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -5 & -2 & | & 17 \\ 0 & 1 & -3 & 0 & | & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & | & -6 \end{pmatrix}.$$

Wir addieren das Doppelte der letzten Zeile zur ersten und erhalten die Treppennormalform $T'$ von $A'$, sowie die Treppennormalform $T$ zu $A$ links des Striches.

$$T' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -5 & 0 & | & 5 \\ 0 & 1 & -3 & 0 & | & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & | & -6 \end{pmatrix} \text{ und } T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -5 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Mit der Merkregel bestimmen wir die Lösungsmenge von $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -5 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ -6 \end{pmatrix}$.

Wir streichen alle Nullzeilen in $T'$: Ach so, es gibt nichts zu streichen.

Wir fügen Nullzeilen so ein, dass die Matrix links des Striches quadratisch ist und die Pivot-Positionen Diagonalelemente werden.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -5 & 0 & | & 5 \\ 0 & 1 & -3 & 0 & | & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & | & -6 \end{pmatrix}$$

Eine spezielle Lösung ist damit $\lambda = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 0 \\ -6 \end{pmatrix}$.

Wir ersetzen das Nullelement auf der Diagonalen durch $-1$.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -5 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & -3 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -6 \end{array}\right)$$

Wir betrachten die Spalte, in der wir $-1$ eingefügt haben.

$$\begin{pmatrix} -5 \\ -3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Dann ist $\mathcal{U} = \left\{ a \begin{pmatrix} -5 \\ -3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \mid a \in \mathbb{R} \right\}$ und $\mathcal{L} = \left\{ \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 0 \\ -6 \end{pmatrix} + a \begin{pmatrix} -5 \\ -3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \mid a \in \mathbb{R} \right\}$.

# Kapitel 6

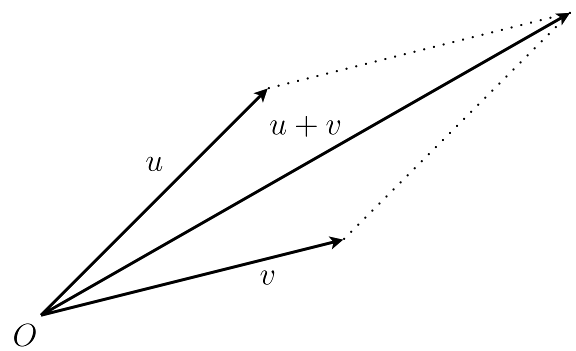
# Vektorräume

## 6.1 Definitionen und Beispiele

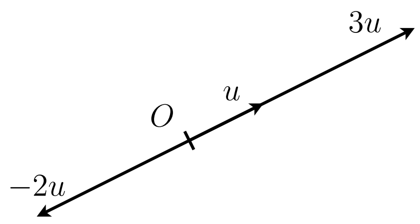
### 6.1.1 Einführung: Vektoren im $\mathbb{R}^2$

Bei vielen physikalischen Anwendungen erscheinen gewisse Größen, die nur einen Messwert besitzen, etwa Temperatur oder Geschwindigkeit. Diese werden durch reelle Zahlen dargestellt und **Skalare** genannt. Andere Größen besitzen einen „Wert“ und eine „Richtung“, etwa Kraft oder Beschleunigung. Diese Größen können mit Pfeilen einer bestimmten Länge und Richtung von einem Bezugspunkt $O$ dargestellt werden, und sie werden **Vektoren** genannt. Solche Vektoren können addiert und mit Skalaren multipliziert werden. Dabei sind folgende Regeln zu beachten:

**Vektoraddition** Die Summe $u + v$ von zwei Vektoren $u$ und $v$ wird durch das sogenannte **Parallelogramm-Gesetz** gefunden: $u + v$ ist die Diagonale des Parallelogramms, das mit $u$ und $v$ gebildet wird, wie in der folgenden Abbildung dargestellt wird.



**Skalarmultiplikation** Das Skalarprodukt $ru$ eines Vektors $u$ mit einem Skalar $r$ ist die Multiplikation des Wertes von $u$ (zur Erinnerung, $u$ wird durch seinen Wert und seine Richtung gegeben) mit $r$. Die Richtung bleibt gleich, wenn $r > 0$ ist, und sie wechselt, wenn $r < 0$ ist. Dies wird in folgender Skizze gezeigt.



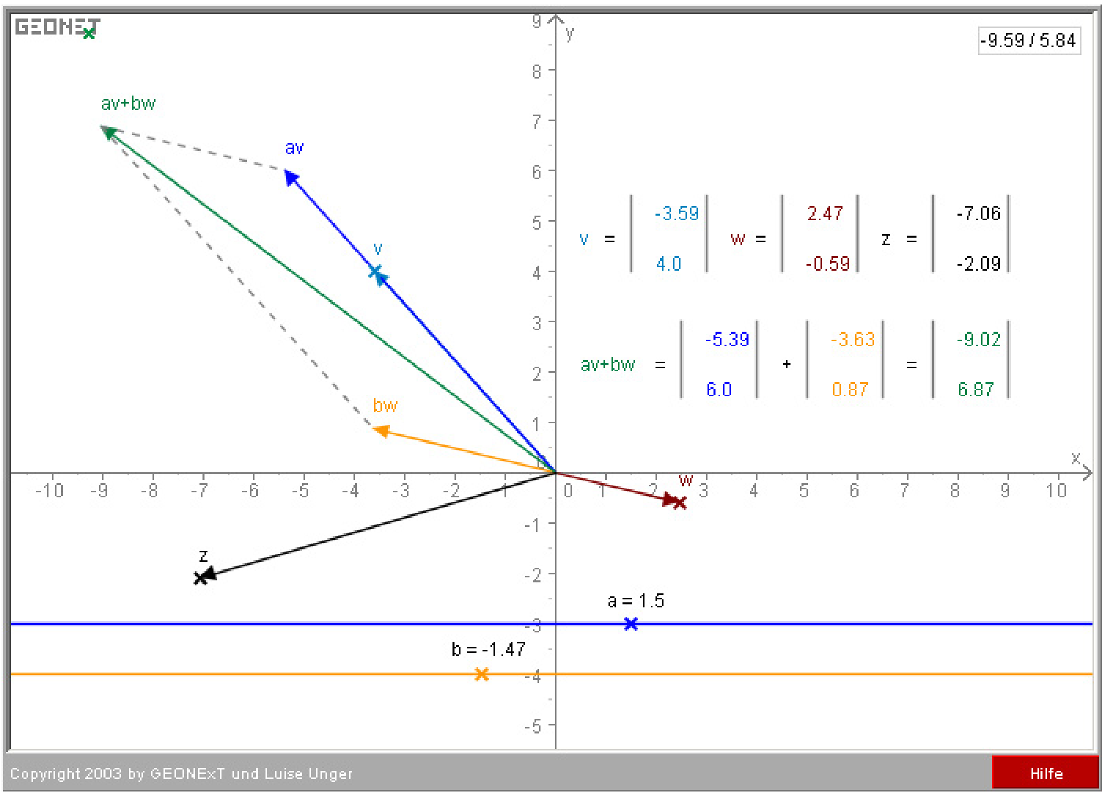

Vermutlich sind Sie aus dem Mittelstufenunterricht mit der Darstellung von Punkten in der Ebene durch geordnete Paare von reellen Zahlen vertraut. Wir verwenden zur Darstellung von Punkten der Ebene Spalten. Ein Punkt mit den Koordinaten $a$ auf der $x$-Achse und $b$ auf der $y$-Achse wird mit $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ bezeichnet. Nehmen wir als Bezugspunkt $O$ für Vektoren den Koordinatenursprung $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, den wir mit 0 bezeichnen, so ist jeder Vektor eindeutig bestimmt durch die Koordinaten seines Endpunktes. Dann gestaltet sich die Vektoraddition und Skalarmultiplikation wie folgt:

**Vektoraddition** Wenn $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$ die Endpunkte der Vektoren $u$ und $v$ sind, dann ist $\begin{pmatrix} a+c \\ b+d \end{pmatrix}$ der Endpunkt des Vektors $u + v$.

**Skalarmultiplikation** Wenn $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ Endpunkt des Vektors $u$ ist, dann ist $\begin{pmatrix} ra \\ rb \end{pmatrix}$ Endpunkt des Vektors $ru$.

Mathematisch identifizieren wir einen Vektor $u$ mit seinem Endpunkt $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ und schreiben $u = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$.

In der virtuellen Universität finden Sie ein Applet, mit dem Sie mit der Addition und Skalarmultiplikation von Vektoren in der Ebene experimentieren können. Als Appetithappen sehen Sie hier einen Screenshot.




**6.1.1 Aufgabe:** Experimentieren Sie mit dem Applet. Sie können die Vektoren $v$, $w$ und $z$ bewegen, indem Sie die Endpunkte anklicken und mit gedrückter Maustaste ziehen. Analog können Sie die Skalare $a$ und $b$ variieren. Angezeigt wird die Summe $av + bw$.

Wählen Sie $v$ und $w$, und und verändern Sie die Skalare $a$ und $b$ so, dass $av+bw = z$ gilt.

## 6.1.2 Definition von Vektorräumen

Die Menge der Vektoren in der reellen Zahlenebene ist ein typisches Beispiel für eine mathematische Struktur, die im Zentrum der Linearen Algebra steht, die so genannten Vektorräume. Diese werden wir in diesem Abschnitt definieren und im folgenden Abschnitt weitere Beispiele vorstellen.

**6.1.2 Definition:** Sei $\mathbb{K}$ ein Körper. Ein **$\mathbb{K}$-Vektorraum** $V$ ist eine Menge $V$ mit einer Verknüpfung

$$+ : V \times V \to V,\ (v, w) \mapsto v + w \text{ für alle } v, w \in V,$$

genannt **Vektoraddition** oder kurz **Addition**, und einer Abbildung

$$\cdot : \mathbb{K} \times V \to V,\ (a, v) \mapsto a \cdot v,\ \text{ für alle } a \in\ \mathbb{K} \text{ und alle } v \in V,$$

genannt **Skalarmultiplikation**, so dass folgende Axiome gelten:

(i) **Addition:**

  (a) Es gilt $v + w = w + v$ für alle $v, w \in V$.

  (b) Es gilt $(u + v) + w = u + (v + w)$ für alle $u, v, w \in V$.

  (c) Es gibt ein Element $0 \in V$, so dass $0 + v = v + 0 = v$ für alle $v \in V$ gilt.

  (d) Zu jedem $v \in V$ gibt es ein $v' \in V$, so dass $v + v' = v' + v = 0$ ist.

(ii) **Skalarmultiplikation:**

  (a) Für alle $a, b \in \mathbb{K}$ und alle $v \in V$ gilt $(ab) \cdot v = a \cdot (b \cdot v)$, und

  (b) für $1 \in \mathbb{K}$ und alle $v \in V$ gilt $1 \cdot v = v$.

(iii) **Distributivgesetze:** Für alle $a, b \in \mathbb{K}$ und $v_1, v_2 \in V$ gilt

  (a) $a \cdot (v_1 + v_2) = a \cdot v_1 + a \cdot v_2$, und

  (b) $(a + b) \cdot v_1 = a \cdot v_1 + b \cdot v_1$.

Statt $\mathbb{K}$-Vektorraum $V$ sagt man auch **Vektorraum über** $\mathbb{K}$. Ist $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, so wird $V$ ein **reeller Vektorraum** genannt. Die Elemente in $V$ werden **Vektoren** genannt, die in $\mathbb{K}$ **Skalare**.

Mit der in Abschnitt 1.5 entwickelten Terminologie ist $+$ eine Verknüpfung auf $V$, die kommutativ und assoziativ ist, die ein neutrales Element besitzt (das mit 0 bezeichnet wird), und für die jedes Element $v \in V$ bezüglich $+$ invertierbar ist.

**6.1.3 Notation:** Wir bezeichnen das zu $v$ inverse Element mit $-v$, und statt $u + (-v)$ schreiben wir $u - v$. An Stelle von $a \cdot v$ mit $a \in \mathbb{K}$ und $v \in V$ schreiben wir $av$.

Hier gleich einige Bemerkungen. In einem Vektorraum sind zwei mathematische Strukturen, die des Körpers $\mathbb{K}$ und die in $V$, miteinander verwoben. In beiden Strukturen kann man addieren; also gibt es zwei verschiedene „+“-Zeichen: eins für Skalare und eins für Vektoren. Ebenso gibt es zwei Nullelemente: das Nullelement in $\mathbb{K}$ und den Nullvektor in $V$. Schließlich gibt es auch zwei verschiedene Multiplikationen: die in $\mathbb{K}$ und die Skalarmultiplikation. Wir verwenden aber nur ein $+$-Zeichen und ein $\cdot$-Zeichen und nur ein Zeichen für die verschiedenen Nullelemente. Das mag zu Beginn wie Schikane aussehen, ist es aber nicht. Sobald Sie sich etwas an das Arbeiten in Vektorräumen gewöhnt haben, würde Ihnen der Gebrauch verschiedener Symbole lästig werden. Und Sie werden sich schnell daran gewöhnen. Beachten Sie bitte auch, dass keine Verknüpfung $\cdot : V \times V \to V$ definiert ist.

**6.1.4 Aufgabe:** Wahr oder falsch? Begründen Sie Ihre Antwort.

1. $\mathbb{R}$ ist ein Vektorraum über $\mathbb{Q}$.
2. $\mathbb{Q}$ ist ein Vektorraum über $\mathbb{R}$.
3. Die Menge $M := \left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R}, b \geq 0 \right\}$ ist mit der in Abschnitt 6.1.1 eingeführten Vektoraddition und Skalarmultiplikation ein $\mathbb{R}$-Vektorraum. Skizzieren Sie $M$.
4. Sei $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ mit $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ ein fest gewählter Vektor der Ebene. Dann ist $M := \left\{ a \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mid a \in \mathbb{R} \right\}$ mit der in Abschnitt 6.1.1 eingeführten Vektoraddition und Skalarmultiplikation ein $\mathbb{R}$-Vektorraum. Skizzieren Sie $M$.

Leiten wir zunächst aus den Vektorraumaxiomen einige Rechenregeln her.

**6.1.5 Proposition:** (Rechenregeln in Vektorräumen)

Sei $V$ ein $\mathbb{K}$-Vektorraum. Dann gilt:

(a) $0v = 0$ für alle $v \in V$.

(b) $a0 = 0$ für alle $a \in \mathbb{K}$ und für $0 \in V$.

(c) $(-a)v = -av = a(-v)$ für alle $a \in \mathbb{K}$ und alle $v \in V$.

**Beweis:** Das Schwierigste an diesem Beweis ist, die verschiedenen neutralen und inversen Elemente in $\mathbb{K}$ und $V$, die wir gleich benannt haben, auseinanderzuhalten.

(a) Da eine Multiplikation von Vektoren nicht definiert ist, ist klar, wie die Aussage $0v = 0$ zu verstehen ist. Die Null links des Gleichheitszeichens ist die Null in $\mathbb{K}$. Da die Skalarmultiplikation Vektoren in Vektoren überführt, ist die Null rechts des Gleichheitszeichens der Nullvektor. Verbal ausgedrückt bedeutet die Aussage

$$0v = 0 \text{ für alle } v \in V$$

also: „Wenn wir einen beliebigen Vektor $v$ mit dem neutralen Element der Addition in $\mathbb{K}$ multiplizieren, so erhalten wir den Nullvektor".

Und das werden wir jetzt beweisen.

$$\begin{aligned} 0v &= (0+0)v && \text{denn } 0+0=0 \text{ in } \mathbb{K} \\ &= 0v+0v && \text{mit dem zweiten Distributivgesetz.} \end{aligned}$$

Wir addieren nun auf beiden Seiten das zu $0v$ inverse Element in $V$.

$$\begin{aligned} & 0v-0v &&= 0v+0v-0v \\ \Rightarrow\ & 0 &&= 0v, \end{aligned}$$

die Behauptung.

(b) Wieder formulieren wir Aussage (b) erst einmal verbal:

„Wenn wir den Nullvektor mit einem beliebigen Körperelement multiplizieren, erhalten wir den Nullvektor".

Sei $a \in \mathbb{K}$. Dann gilt

$$\begin{aligned} a0 &= a(0+0) && \text{denn } 0+0=0 \text{ in } V \\ &= a0+a0 && \text{mit dem ersten Distributivgesetz.} \end{aligned}$$

Wieder addieren wir auf beiden Seiten das additive Inverse zu $a0$ in $V$ und erhalten $0 = a0 - a0 = a0 + a0 - a0 = a0$, die Behauptung.

(c) Wieder formulieren wir die beiden zu beweisenden Aussagen zunächst verbal. Die Behauptung des ersten Gleichheitszeichens ist: „$(-a)v$ ist das in $V$ zu $av$ inverse Element", und die Behauptung des zweiten Gleichheitszeichens ist „$a(-v)$ ist das in $V$ zu $av$ inverse Element". Auf geht's:

$$(-a)v + av = (-a+a)v = 0v = 0 \text{ mit zweitem Distributivgesetz und (a)}$$

und

$$a(-v) + av = a(-v+v) = a0 = 0 \text{ mit erstem Distributivgesetz und (b).}$$

□

### 6.1.3 Beispiele

**Die Vektorräume $\mathrm{M}_{mn}(\mathbb{K})$**

Sei $\mathbb{K}$ ein Körper und seien $m, n \in \mathbb{N}$. Dann ist $\mathrm{M}_{mn}(\mathbb{K})$ ein $\mathbb{K}$-Vektorraum.

Den Beweis für diese Aussage haben wir in Kurseinheit 1 erbracht. Die Axiome der Addition sind Proposition 2.1.10, die Axiome der Skalarmultiplikation sind Proposition 2.2.3, (a) und (d), und die Distributivgesetze sind Proposition 2.2.3, (b) und (c).

Denken Sie bitte an die Warnung von oben. Selbst wenn $m = n$ ist, vergessen wir, wenn wir an $\mathrm{M}_{nn}(\mathbb{K})$ als $\mathbb{K}$-Vektorraum denken, dass wir Matrizen multiplizieren können. Eine Multiplikation von Vektoren ist nicht definiert.

**Die Vektorräume $\mathbb{K}^n$**

Sei $\mathbb{K}$ ein Körper, und sei $n \in \mathbb{N}$. Mit $\mathbb{K}^n$ bezeichnen wir $\mathrm{M}_{n1}(\mathbb{K})$, also die Menge der Spalten mit Einträgen in $\mathbb{K}$. Wie in $\mathrm{M}_{n1}(\mathbb{K})$ ist in $\mathbb{K}^n$ die Addition und Skalarmultiplikation definiert. Somit ist $\mathbb{K}^n$ ein Vektorraum über $\mathbb{K}$.

Einen Spezialfall haben wir oben in 6.1.1 bereits gesehen: Die reelle Zahlenebene ist der Vektorraum $\mathbb{R}^2$.

**6.1.6 Aufgabe:** Geben Sie ein Beispiel für einen Vektorraum mit genau 4 Elementen.

**Lösungsmengen homogener linearer Gleichungssysteme**

Sei $A \in \mathrm{M}_{mn}(\mathbb{K})$, und sei $\mathcal{U}$ die Lösungsmenge des homogenen linearen Gleichungssystems $Ax = 0$ über $\mathbb{K}$. Es ist $\mathcal{U}$ eine Teilmenge von $\mathbb{K}^n$, und Lösungen von $Ax = 0$ werden wie Vektoren addiert und mit Skalaren multipliziert. Wir zeigen jetzt, dass $\mathcal{U}$ ein Vektorraum über $\mathbb{K}$ ist.

Seien $\lambda, \lambda' \in \mathcal{U}$ Lösungen von $Ax = 0$. Dann gilt

$$A(\lambda + \lambda') = A\lambda + A\lambda' = 0 + 0 = 0,$$

und wir sehen, dass auch $\lambda + \lambda'$ eine Lösung von $Ax = 0$ ist. Somit ist $+$ eine Verknüpfung auf $\mathcal{U}$.

Sei $\lambda$ eine Lösung von $Ax = 0$, und sei $a \in \mathbb{K}$. Dann gilt $A(a\lambda) = a(A\lambda) = a0 = 0$, also ist auch $a\lambda$ eine Lösung von $Ax = 0$. Es folgt, dass

$$\begin{array}{rccc} \cdot: & \mathbb{K} \times \mathcal{U} & \to & \mathcal{U} \\ & (a, \lambda) & \mapsto & a\lambda \end{array}$$

eine Abbildung von $\mathbb{K} \times \mathcal{U}$ nach $\mathcal{U}$ ist.

Da Lösungen von $Ax = 0$ Vektoren in $\mathbb{K}^n$ sind, und da die Addition in $\mathbb{K}^n$ assoziativ und kommutativ ist, folgt, dass auch die Addition in $\mathcal{U}$ assoziativ und kommutativ ist. Auch der Nullvektor in $\mathbb{K}^n$ liegt in $\mathcal{U}$ und bildet das neutrale Element der Addition in $\mathcal{U}$. Mit $\lambda \in \mathcal{U}$ ist auch $-\lambda \in \mathcal{U}$. Somit ist jedes $\lambda \in \mathcal{U}$ invertierbar. Es gelten also die Axiome der Addition in Definition 6.1.2.

Da die Elemente aus $\mathcal{U}$ Elemente in $\mathbb{K}^n$ sind, folgt, dass die Axiome der Skalarmultiplikation und die Distributivgesetze gelten. Somit ist $\mathcal{U}$ ein $\mathbb{K}$-Vektorraum.

### Der Vektorraum der Polynome über $\mathbb{K}$

**6.1.7 Definitionen:** Sei $\mathbb{K}$ ein Körper. Ein **Polynom über** $\mathbb{K}$ in der Unbestimmten $T$ hat die Form

$$a_0T^0 + a_1T + a_2T^2 + \cdots + a_nT^n = \sum_{i=0}^{n} a_iT^i.$$

Die Elemente $a_0, \ldots, a_n$ liegen in $\mathbb{K}$, sie werden die **Koeffizienten** von $\sum_{i=0}^{n} a_iT^i$ genannt. Sind alle Koeffizienten 0, so wird das Polynom das **Nullpolynom** genannt und mit 0 bezeichnet. Die Menge aller Polynome über $\mathbb{K}$ wird mit $\mathbb{K}[T]$ bezeichnet.

In der Schule haben Sie wahrscheinlich mit Polynomen gearbeitet, allerdings wird die Unbestimmte da in der Regel mit $x$ bezeichnet. Sie werden vermutlich in die Unbestimmte Zahlen eingesetzt und beispielsweise Nullstellen von quadratischen Gleichungen berechnet haben. Wir werden in diesem Kurs nicht in Polynome einsetzen, insbesondere werden wir Polynome nicht als Funktionen betrachten.

Wir definieren jetzt eine Addition von Polynomen. Dazu seien $\sum_{i=0}^{n} a_iT^i$ und $\sum_{i=0}^{m} b_iT^i$ Polynome in $\mathbb{K}[T]$. Beachten Sie, dass $m$ und $n$ verschieden sein können. Falls $m < n$, so setzen wir $b_{m+1} = \cdots = b_n = 0$, falls $n < m$, so lassen wir $a$ und $b$ die Rollen tauschen. In beiden Fällen können wir annehmen, dass die Polynome die

Form $\sum_{i=0}^{n} a_i T^i$ und $\sum_{i=0}^{n} b_i T^i$ haben. Wir definieren

$$\sum_{i=0}^{n} a_i T^i + \sum_{i=0}^{n} b_i T^i = \sum_{i=0}^{n} (a_i + b_i) T^i.$$

Dann ist $+$ eine Verknüpfung auf $\mathbb{K}[T]$. Diese Verknüpfung ist kommutativ, denn es gilt für alle Polynome

$$\sum_{i=0}^{n} a_i T^i + \sum_{i=0}^{n} b_i T^i = \sum_{i=0}^{n} (a_i + b_i) T^i = \sum_{i=0}^{n} (b_i + a_i) T^i = \sum_{i=0}^{n} b_i T^i + \sum_{i=0}^{n} a_i T^i.$$

Da die Addition in $\mathbb{K}$ assoziativ ist, ist auch die Addition in $\mathbb{K}[T]$ assoziativ. Es gibt ein neutrales Element der Addition, nämlich das Nullpolynom. Ist $\sum_{i=0}^{n} a_i T^i$ in $\mathbb{K}[T]$, so ist auch $\sum_{i=0}^{n} (-a_i) T^i$ in $\mathbb{K}[T]$, und es ist $\sum_{i=0}^{n} (-a_i) T^i$ invers zu $\sum_{i=0}^{n} a_i T^i$. Somit sind alle Axiome der Addition in der Definition 6.1.2 erfüllt.

Wir definieren jetzt eine Skalarmultiplikation. Dazu sei $\sum_{i=0}^{n} a_i T^i$ in $\mathbb{K}[T]$, und sei $r \in \mathbb{K}$. Wir definieren

$$r \left( \sum_{i=0}^{n} a_i T^i \right) = \sum_{i=0}^{n} r a_i T^i.$$

Dann gelten die Gesetze der Skalarmultiplikation und die Distributivgesetze in der Definition 6.1.2, und es folgt, dass $\mathbb{K}[T]$ ein $\mathbb{K}$-Vektorraum ist.

**6.1.8 Notation:** Bei Polynomen schreibt man in der Regel nicht alle Koeffizienten explizit aus. Ein Summand $0T^i$ in einem Polynom wird meistens weggelassen, und an Stelle von $1T^i$ schreibt man nur $T^i$. Weiter schreibt man an Stelle von $a_0 T^0$ nur $a_0$.

Als Beispiel: Statt $3T^0 + 1T + 0T^2 + 17T^3$ schreiben wir $3 + T + 17T^3$.

**6.1.9 Aufgabe:** Seien $1+T+T^2$ und $T+T^3+T^4$ in $\mathbb{F}_2[T]$. Bilden Sie die Summe dieser Polynome.

**6.1.10 Definition:** Sei $p = \sum_{i=0}^{n} a_i T^i$ ein Polynom in $\mathbb{K}[T]$, und sei $p$ nicht das Nullpolynom. Dann gibt es einen Koeffizienten $a_i$, der nicht 0 ist. Sei $m$ der größte Index, so dass der Koeffizient $a_m \neq 0$ ist. (Dann ist $m$ auch die höchste Potenz von $T$, die in $p$ vorkommt, wenn wir alle Summanden der Form $0T^i$ wegstreichen.) Wir nennen $m$ den **Grad** von $p$ und schreiben $\mathrm{Grad}(p) = m$. Wenn $p = 0$ das Nullpolynom ist, dann definieren wir $\mathrm{Grad}(0) = -\infty$.

Zur Erinnerung, das Symbol ist die mathematische Abkürzung für „unendlich“.

**6.1.11 Aufgabe:** Seien $p$ und $q$ Polynome in $\mathbb{K}[T]$ vom Grad $m$. Gilt $\mathrm{Grad}(p+q) = m$? Begründen Sie Ihre Antwort.

## 6.2 Unterräume

In diesem Abschnitt sei $V$ ein Vektorraum über einem Körper $\mathbb{K}$.

**6.2.1 Definition:** Eine Teilmenge $U \neq \emptyset$ eines $\mathbb{K}$-Vektorraums $V$ heißt **Unterraum von** $V$, wenn $U$ mit der Addition und der Skalarmultiplikation in $V$ einen Vektorraum bildet.

**6.2.2 Aufgabe:** Warum ist $\mathbb{F}_2$ kein Unterraum von $\mathbb{R}$?

Ein Vektorraum $V$ hat immer die Unterräume $U = V$ und $U = \{0\}$. In Aufgabe 6.1.4 haben Sie gesehen, dass $\mathbb{Q}$ ein Unterraum von $\mathbb{R}$ ist, und dass Geraden durch den Koordinatenursprung Unterräume von $\mathbb{R}^2$ sind.

Noch ein Beispiel: Sei $A \in \mathrm{M}_{mn}(\mathbb{K})$, und sei $\mathcal{U}$ die Lösungsmenge von $Ax = 0$. Dann ist $\mathcal{U}$ eine nicht leere Teilmenge von $\mathbb{K}^n$, denn der Nullvektor liegt immer in $\mathcal{U}$. Wir haben oben in Abschnitt 6.1.3 gesehen, dass $\mathcal{U}$ mit der Addition und Skalarmultiplikation in $\mathbb{R}^n$ ein Vektorraum ist. Somit ist $\mathcal{U}$ ein Unterraum von $\mathbb{R}^n$.

Weitere Beispiele für Unterräume werden wir gleich untersuchen. Bevor wir uns aber den Beispielen zuwenden, leiten wir zunächst ein sehr nützliches Kriterium her, das uns die Arbeit, zu entscheiden, ob eine Teilmenge von $V$ ein Unterraum von $V$ ist oder nicht, sehr erleichtert.

**6.2.3 Proposition:** (Unterraumkriterium)

Sei $U$ eine Teilmenge eines Vektorraums $V$ über $\mathbb{K}$. Folgende Aussagen sind äquivalent:

(i) $U$ ist ein Unterraum von $V$.

(ii) Es gelten folgende Regeln:

  (a) Das Nullelement aus $V$ liegt in $U$, und

  (b) für alle $u_1, u_2 \in U$ gilt $u_1 + u_2 \in U$, und

  (c) für alle $a \in \mathbb{K}$ und alle $u \in U$ gilt $au \in U$.

**Beweis:** Den Beweis dieser Äquivalenzaussage unterteilen wir in zwei Teilbeweise (vergleiche Abschnitt 1.2.5).

**(i)⇒(ii)** Sei $U$ ein Unterraum von $V$. Dann enthält $U$ ein neutrales Element $0_U$ der Addition. Wir zeigen, dass dies schon das neutrale Element $0_V$ der Addition in $V$ ist.

Da $U$ ein Vektorraum ist, gilt $00_U = 0_U$ mit Rechenregel (a) in der Proposition 6.1.5. Da aber $0_U \in V$, denn $U \subseteq V$, gilt wieder mit Rechenregel (a) (für $V$), dass $00_U = 0_V$ ist, also $00_U = 0_U = 0_V$. Die neutralen Elemente in $U$ und in $V$ stimmen also überein, und es gilt Bedingung (a) in (ii). Die Bedingungen (b) und (c) in (ii) sind erfüllt, da $U$ ein $\mathbb{K}$-Vektorraum ist.

**(ii)⇒(i)** Wir nehmen an, dass die Bedingungen (a), (b) und (c) in (ii) gelten. Wir müssen aus diesen die Vektorraumaxiome für $U$ herleiten.

Die Skalarmultiplikation ist eine Abbildung von $\mathbb{K} \times U$ nach $U$; dies ist Bedingung (c).

Die Axiome der Skalarmultiplikation und die Distributivgesetze gelten für alle Skalare in $\mathbb{K}$ und alle Vektoren in $U$, denn sie gelten schon in $V$. Es bleibt zu zeigen, dass die Axiome der Addition gelten.

Durch die Bedingung (b) ist sichergestellt, dass $+$ eine Verknüpfung auf $U$ ist. Das Assoziativgesetz und das Kommutativgesetz gelten in $U$, denn sie gelten schon in $V$. Die Existenz eines neutralen Elementes in $U$ sichert Bedingung (a). Sei $u \in U$. Mit Bedingung (c) folgt $(-1)u \in U$, und mit den Rechenregeln 6.1.5 folgt $(-1)u = -(1u)$, denn $u \in V$. Da $u$ in $V$ liegt, gilt $1u = u$, und es folgt $-u \in U$. Jedes Element in $U$ hat also ein inverses Element. Es gelten also auch die Gesetze der Addition in $U$.

□

**6.2.4 Aufgabe:** Es ist $\mathbb{F}_2^2 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$. Bestimmen Sie alle Unterräume von $\mathbb{F}_2^2$.

**6.2.5 Beispiel:** Sei $V = \mathbb{K}[T]$ der Vektorraum der Polynome über einem Körper $\mathbb{K}$, und sei $n \in \mathbb{N}$. Sei $U = \{p \in \mathbb{K}[T] \mid \mathrm{Grad}(p) \leq n\}$.

**Behauptung:** $U$ ist ein Unterraum von $V$.

**Beweis:** Wir benutzen zum Beweis das Unterraumkriterium. Das Nullpolynom liegt in $U$, denn $\mathrm{Grad}(0) = -\infty < n$.

Seien $p, q \in U$. Da $\mathrm{Grad}(p) \leq n$ und $\mathrm{Grad}(q) \leq n$ folgt $\mathrm{Grad}(p+q) \leq n$, und es folgt $p + q \in U$.

Sei $p \in U$ und sei $a \in \mathbb{K}$. Da Multiplikation mit Skalaren den Grad nicht vergrößert, folgt $ap \in U$. Mit dem Unterraumkriterium folgt die Behauptung. $\square$

**6.2.6 Aufgabe:** Sei $X \in \mathrm{M}_{nn}(\mathbb{K})$ eine vorgegebene Matrix, und sei $U = \{A \in \mathrm{M}_{nn}(\mathbb{K}) \mid AX = XA\}$. Beweisen Sie mit dem Unterraumkriterium, dass $U$ ein Unterraum von $\mathrm{M}_{nn}(\mathbb{K})$ ist.

Aus Unterräumen eines Vektorraums können wir weitere Unterräume konstruieren, wie die folgenden Propositionen zeigen.

**6.2.7 Proposition:** (Durchschnitt von Unterräumen)

Sei $V$ ein $\mathbb{K}$-Vektorraum, und seien $U$ und $W$ Unterräume von $V$. Dann ist $U \cap W$ ein Unterraum von $V$.

**Beweis:** Bevor Sie in den Beweis einsteigen, sollten Sie vielleicht noch einmal die Definition 1.3.3 für den Durchschnitt von Mengen konsultieren.

Wir benutzen zum Beweis das Unterraumkriterium.

Da $U$ und $W$ Unterräume von $V$ sind, gilt $0 \in U$ und $0 \in W$. Es folgt $0 \in U \cap W$, die erste Forderung des Unterraumkriteriums.

Seien $x, y \in U \cap W$. Dann liegen $x$ und $y$ in $U$, und da $U$ ein Unterraum von $V$ ist, folgt $x + y \in U$. Es sind auch $x$ und $y$ in $W$, also $x + y \in W$. Es folgt $x + y \in U \cap W$.

Sei $x \in U \cap W$, und sei $a \in \mathbb{K}$. Dann gilt $x \in U$ und $x \in W$, also $ax \in U$ und $ax \in W$. Es folgt $ax \in U \cap W$.

Mit dem Unterraumkriterium ist $U \cap W$ ein Unterraum von $V$. $\square$

**6.2.8 Aufgabe:** Seien $U = \left\{ a \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \mid a \in \mathbb{R} \right\}$ und $W = \left\{ b \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \mid b \in \mathbb{R} \right\}$.

Warum ist $U \cup W$ kein Unterraum von $\mathbb{R}^2$?

**6.2.9 Definition:** Sei $V$ ein Vektorraum über $\mathbb{K}$, und seien $U$ und $W$ Unterräume von $V$. Die **Summe** $U + W$ ist die Menge $U + W := \{u + w \mid u \in U \text{ und } w \in W\}$.

**6.2.10 Aufgabe:** Sei $V$ ein Vektorraum über $\mathbb{K}$, und seien $U$ und $W$ Unterräume von $V$. Beweisen Sie, dass $U \cup W$ eine Teilmenge von $U + W$ ist.

**6.2.11 Proposition:** Sei $V$ ein Vektorraum über $\mathbb{K}$, und seien $U$ und $W$ Unterräume von $V$. Dann ist $U + W$ ein Unterraum von $V$.

**Beweis:** Wieder benutzen wir das Unterraumkriterium.

Es ist $0 = 0 + 0 \in U + W$, denn $0 \in U$ und $0 \in W$.

Seien $u + w$ und $u' + w'$ in $U + W$ mit $u, u' \in U$ und $w, w' \in W$. Dann gilt $(u + w) + (u' + w') = (u + u') + (w + w') \in U + W$, denn $u + u' \in U$ und $w + w' \in W$.

Sei $u + w \in U + W$ mit $u \in U$ und $w \in W$. Sei $a \in \mathbb{K}$. Dann gilt $a(u + w) = au + aw \in U + W$, denn $au \in U$ und $aw \in W$.

Mit dem Unterraumkriterium folgt die Behauptung. $\square$

## 6.3 Endlich erzeugte Vektorräume

**6.3.1 Definition:** Sei $V$ ein $\mathbb{K}$-Vektorraum, seien $v_1, \ldots, v_m \in V$ und $a_1, \ldots, a_m \in \mathbb{K}$. Dann heißt

$$a_1 v_1 + \cdots + a_m v_m = \sum_{i=1}^{m} a_i v_i$$

eine **Linearkombination** der Vektoren $v_1, \ldots, v_m$. Die Skalare $a_1, \ldots, a_m$ werden **Koeffizienten** der Linearkombination genannt.

**6.3.2 Definition:** Sei $S$ eine nicht leere Teilmenge von $V$. Die Menge aller Linearkombinationen von endlich vielen Vektoren in $S$ wird die **lineare Hülle von** $S$ oder **Erzeugnis von** $S$ genannt, und mit $\langle S \rangle$ bezeichnet. Für $S = \emptyset$ definieren wir das Erzeugnis von $\emptyset$ durch $\langle \emptyset \rangle := \{0\}$.

Wenn $S = \{v_1, \ldots, v_m\}$ eine endliche Menge von Vektoren ist, so schreiben wir an Stelle von $\langle \{v_1, \ldots, v_m\} \rangle$ nur $\langle v_1, \ldots, v_m \rangle$.

**6.3.3 Aufgabe:** Seien $u = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, v = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, w = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$. Untersuchen Sie, ob $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ in $\langle u, v, w \rangle$ liegt.

Lineare Hüllen sind wieder Vektorräume, wie die folgende Proposition zeigt.

**6.3.4 Proposition:** (Struktur linearer Hüllen)

Wenn $S$ Teilmenge eines $\mathbb{K}$-Vektorraums $V$ ist, dann ist $\langle S\rangle$ ein Unterraum von $V$.

**Beweis:** Falls $S = \emptyset$ so ist $\langle\emptyset\rangle = \{0\}$, und $\{0\}$ ist ein Vektorraum. Falls $S = \emptyset$ sind wir damit schon fertig. Wir können also annehmen, dass $S \neq \emptyset$ ist.

Zum Beweis, dass $\langle S\rangle$ ein Unterraum ist, benutzen wir das Unterraumkriterium.

Sei $s_1 \in S$. Dann ist $0s_1 = 0$ eine Linearkombination von Elementen in $S$, der Nullvektor liegt also in $\langle S\rangle$.

Seien $s = \sum_{i=1}^{m} a_i s_i$ und $s' = \sum_{j=1}^{r} b_j s'_j$ Linearkombinationen endlich vieler Vektoren in $S$. Dann ist $s + s' = \sum_{i=1}^{m} a_i s_i + \sum_{j=1}^{r} b_j s'_j$ eine Linearkombination von Vektoren $s_1, \dots, s_m, s'_1, \dots s'_r \in S$, die Summe von $s$ und $s'$ liegt also in $\langle S\rangle$.

Sei $a \in \mathbb{K}$, und sei $s = \sum_{i=1}^{m} a_i s_i$ in $\langle S\rangle$. Dann gilt $as = a\sum_{i=1}^{m} a_i s_i = \sum_{i=1}^{m} a a_i s_i$, und dies ist eine Linearkombination von Vektoren $s_1, \dots, s_m$ in $S$.

Mit dem Unterraumkriterium folgt, dass $\langle S\rangle$ ein Unterraum von $V$ ist. □

**6.3.5 Definition:** Der Vektorraum $\langle S\rangle$ wird der durch $S$ **erzeugte Unterraum** von $V$ genannt.

**6.3.6 Definition:** Sei $V$ ein $\mathbb{K}$-Vektorraum, und sei $S \subseteq V$, so dass $\langle S\rangle = V$ ist. Dann wird $S$ ein **Erzeugendensystem** von $V$ genannt.

Jeder Vektorraum $V$ besitzt ein Erzeugendensystem. Man kann zum Beispiel immer $S = V$ nehmen. Aber manchmal geht es auch mit weniger.

**6.3.7 Beispiel:** Sei $V = \mathbb{R}^3$, und seien $v_1 = \begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix}3\\1\\4\end{pmatrix}$, $v_3 = \begin{pmatrix}2\\3\\1\end{pmatrix}$.

**Behauptung:** Die Vektoren $v_1, v_2, v_3$ bilden ein Erzeugendensystem von $\mathbb{R}^3$.

**Beweis:** Sei $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$. Die Behauptung ist, dass es $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}$ gibt, so dass

$$a_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + a_2 \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} + a_3 \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \text{ ist.}$$

Dann ist $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ eine Lösung des linearen Gleichungssystems $A \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, wobei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \\ 2 & 4 & 1 \end{pmatrix} \text{ ist.}$$

Wir beginnen, $A$ in Treppennormalform zu überführen, um den Rang von $A$ zu bestimmen. Wir subtrahieren die erste Zeile von der zweiten und das Doppelte der ersten Zeile von der dritten. Dies liefert

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & -2 & -3 \end{pmatrix}.$$

Jetzt subtrahieren wir die zweite Zeile von der dritten und erhalten

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}.$$

Jetzt sehen wir, dass der Rang 3 ist, denn durch weitere elementare Zeilenumformungen werden wir drei Pivot-Positionen erhalten. Mit Proposition 4.5.4 folgt, dass $A$ invertierbar ist, und

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = A^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

Für alle $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ gibt es also $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}$, so dass

$$a_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + a_2 \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} + a_3 \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \text{ ist.}$$

□

**6.3.8 Definition:** Sei $V$ ein $\mathbb{K}$-Vektorraum. $V$ heißt **endlich erzeugt**, wenn es eine endliche Menge $\{v_1, \ldots, v_m\}$ von Vektoren in $V$ gibt, so dass $V = \langle v_1, \ldots, v_m \rangle$ ist.

In unserer Terminologie oben sind die endlich erzeugten Vektorräume also gerade diejenigen, die ein endliches Erzeugendensystem besitzen. In der Linearen Algebra ist man hauptsächlich an endlich erzeugten Vektorräumen interessiert, und diese werden wir in der folgenden Kurseinheit näher untersuchen. Wir schließen mit einigen Beispielen.

**6.3.9 Beispiele:** (a) **Behauptung:** Der Vektorraum $V = \mathbb{K}^n$ ist endlich erzeugt.

**Beweis:** Für alle $1 \leq i \leq n$ sei $e_i \in \mathbb{K}^n$ der Vektor, der in der $i$-ten Zeile eine 1 hat, und dessen übrige Einträge 0 sind, also $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$, $e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ und so weiter. Sei $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^n$. Dann gilt

$$x = x_1 e_1 + \cdots + x_n e_n = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i.$$

Jeder Vektor $x$ in $\mathbb{K}^n$ ist also eine Linearkombination der Vektoren $e_1, \ldots, e_n$, und dies zeigt, dass $\mathbb{K}^n$ endlich erzeugt ist. $\square$

(b) **Behauptung:** Der Vektorraum $V = \mathrm{M}_{mn}(\mathbb{K})$ ist endlich erzeugt.

**Beweis:** Seien $E_{ij}$ mit $1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n$ die Matrizen in $\mathrm{M}_{mn}(\mathbb{K})$, die an der Stelle $(i, j)$ eine 1 haben, und deren übrige Einträge 0 sind. Sei

$$A = (a_{ij}) = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{mn}(K).$$

Dann gilt

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} = \sum_{j=1}^{n} \left( \sum_{i=1}^{m} a_{ij} E_{ij} \right) = \sum_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}} a_{ij} E_{ij}.$$

Jede Matrix in $\mathrm{M}_{mn}(\mathbb{K})$ ist also Linearkombination der Matrizen $E_{ij}$, also ist $\mathrm{M}_{mn}(\mathbb{K})$ endlich erzeugt. $\square$

(c) **Behauptung:** Sei $n \in \mathbb{N}$, und sei $V$ der Vektorraum der Polynome vom Grad $\leq n$ über $\mathbb{K}$. Dann ist $V$ endlich erzeugt.

**Beweis:** Seien $e_0 = 1$ und $e_i = T^i$ für alle $1 \leq i \leq n$. Sei $\sum_{i=0}^{n} a_i T^i \in V$. Dann gilt $\sum_{i=0}^{n} a_i T^i = \sum_{i=0}^{n} a_i e_i$, und dies zeigt, dass jedes Polynom in $V$ eine Linearkombination der Polynome $e_0, \ldots, e_n$ ist. Somit ist $V$ endlich erzeugt. $\square$

(d) **Behauptung:** Sei $A \in \mathrm{M}_{mn}(\mathbb{K})$, und sei $\mathcal{U}$ die Lösungsmenge von $Ax = 0$. Sei $r = \mathrm{Rg}(A)$. Dann gibt es $n - r$ Vektoren $S_1, \ldots, S_{n-r}$ in $\mathcal{U}$, so dass $\mathcal{U} = \langle S_1, \ldots, S_{n-r} \rangle$ ist. Insbesondere ist $\mathcal{U}$ endlich erzeugt.

**Beweis:** Die Aussage ist gerade Proposition 5.2.17. $\square$

(e) **Behauptung:** Der Vektorraum $V = \mathbb{K}[T]$ ist nicht endlich erzeugt.

**Beweis:** Angenommen, $\mathbb{K}[T]$ wäre endlich erzeugt. Dann gibt es endlich viele Polynome $p_1, \ldots, p_m$, so dass jedes Polynom in $\mathbb{K}[T]$ eine Linearkombination der Polynome $p_1, \ldots, p_m$ ist. Sei $r$ das Maximum der Grade der Polynome $p_1, \ldots, p_m$, und sei $q = \sum_{i=1}^{m} a_i p_i$ eine Linearkombination der Polynome $p_1, \ldots, p_m$. Dann ist der Grad von $q$ kleiner oder gleich $r$. Polynome vom Grad größer als $r$ lassen sich also nicht als Linearkombination der Polynome $p_1, \ldots, p_m$ schreiben, ein Widerspruch. Dieser Widerspruch zeigt, dass wir unsere Annahme, $\mathbb{K}[T]$ sei endlich erzeugt, verwerfen müssen, und schließen, dass $\mathbb{K}[T]$ nicht endlich erzeugt ist. $\square$

# Lösungen der Aufgaben

## Lösungen der Aufgaben in 6.1

### Aufgabe 6.1.1

Ohne Lösung.

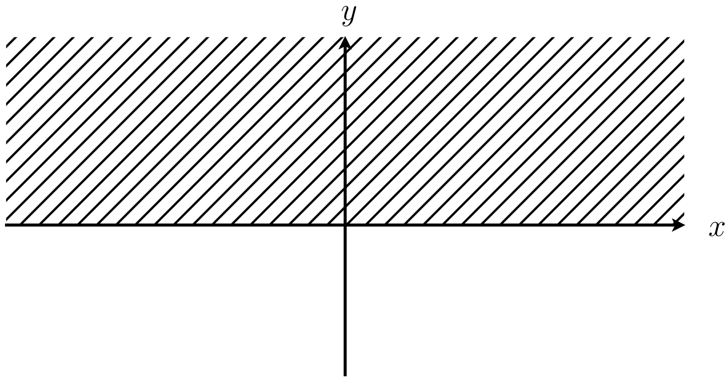
### Aufgabe 6.1.4

1. Wahr. Es ist $+$ eine Verknüpfung auf $\mathbb{R}$, und das Produkt $qr$ mit $q \in \mathbb{Q}$ und $r \in \mathbb{R}$ liegt in $\mathbb{R}$. Dass alle anderen Axiome gelten, wissen wir schon aus Schulzeiten.

2. Falsch. Es geht nur eine Kleinigkeit schief. Wenn $q \in \mathbb{Q}$, $q \neq 0$, und wenn $r \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, dann liegt $rq$ nicht in $\mathbb{Q}$. Es folgt, dass die Skalarmultiplikation keine Abbildung von $\mathbb{R} \times \mathbb{Q}$ nach $\mathbb{Q}$ ist.

3. Falsch. Wäre $M$ ein Vektorraum über $\mathbb{R}$, so würde die Skalarmultiplikation mit Elementen in $\mathbb{R}$ wieder ein Element in $M$ liefern. Dies ist aber hier nicht der Fall. Beispielsweise gilt $-1 \in \mathbb{R}$ und $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in M$. Es ist aber $(-1)\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \notin M$.

   $M$ ist die obere Halbebene, also die Menge der schraffierten Punkte:




4. Wahr. Seien $v, w \in M$. Dann gilt $v = \begin{pmatrix} rx_1 \\ rx_2 \end{pmatrix}$ und $w = \begin{pmatrix} sx_1 \\ sx_2 \end{pmatrix}$ für Skalare $r, s \in \mathbb{R}$. Es folgt $v + w = \begin{pmatrix} (r+s)x_1 \\ (r+s)x_2 \end{pmatrix}$, und dies ist ein Element in $M$. Somit ist $+$ eine Verknüpfung auf $M$. Sei $a \in \mathbb{R}$ und $v$ wie oben. Dann gilt $av = \begin{pmatrix} arx_1 \\ arx_2 \end{pmatrix}$, und dies ist wieder ein Element in $M$. Es folgt, dass die Skalarmultiplikation eine Abbildung von $\mathbb{R} \times M$ nach $M$ ist.

   Jetzt überprüfen wir die Vektorraumaxiome:

   (i) **Addition**

   (a) Seien $v = \begin{pmatrix} rx_1 \\ rx_2 \end{pmatrix}$ und $w = \begin{pmatrix} sx_1 \\ sx_2 \end{pmatrix}$ in $M$ mit $r, s \in \mathbb{R}$. Dann gilt

$$v + w = \begin{pmatrix} (r+s)x_1 \\ (r+s)x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (s+r)x_1 \\ (s+r)x_2 \end{pmatrix} = w + v.$$

   (b) Seien $u = \begin{pmatrix} tx_1 \\ tx_2 \end{pmatrix}$, $v = \begin{pmatrix} rx_1 \\ rx_2 \end{pmatrix}$ und $w = \begin{pmatrix} sx_1 \\ sx_2 \end{pmatrix}$ in $M$ mit $r, s, t \in \mathbb{R}$. Dann gilt

$$(u+v)+w = \begin{pmatrix} ((t+r)+s)x_1 \\ ((t+r)+s)x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (t+(r+s))x_1 \\ (t+(r+s))x_2 \end{pmatrix} = u+(v+w).$$

   (c) Der Nullvektor ist von der Form $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0x_1 \\ 0x_2 \end{pmatrix}$, er liegt also in $M$, und für alle $v = \begin{pmatrix} rx_1 \\ rx_2 \end{pmatrix} \in M$ gilt

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} rx_1 \\ rx_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} rx_1 \\ rx_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} rx_1 \\ rx_2 \end{pmatrix}.$$

(d) Sei $v = \begin{pmatrix} rx_1 \\ rx_2 \end{pmatrix} \in M$. Dann ist $w = \begin{pmatrix} -rx_1 \\ -rx_2 \end{pmatrix} \in M$, und es gilt

$$v + w = \begin{pmatrix} (r-r)x_1 \\ (r-r)x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = w + v.$$

Somit erfüllt $M$ die Axiome der Addition.

(ii) **Skalarmultiplikation**

(a) Seien $a, b \in \mathbb{R}$, und sei $v = \begin{pmatrix} rx_1 \\ rx_2 \end{pmatrix} \in M$. Dann gilt

$$(ab)v = \begin{pmatrix} (ab)rx_1 \\ (ab)rx_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a(br)x_1 \\ a(br)x_2 \end{pmatrix} = a(bv).$$

(b) Sei $v = \begin{pmatrix} rx_1 \\ rx_2 \end{pmatrix} \in M$. Dann gilt

$$1v = \begin{pmatrix} 1rx_1 \\ 1rx_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} rx_1 \\ rx_2 \end{pmatrix} = v.$$

In $M$ gelten also die Axiome der Skalarmultiplikation.

(iii) **Distributivgesetze**

(a) Sei $a \in \mathbb{R}$, und seien $v = \begin{pmatrix} rx_1 \\ rx_2 \end{pmatrix}$ und $w = \begin{pmatrix} sx_1 \\ sx_2 \end{pmatrix}$ in $M$, $r, s \in \mathbb{R}$. Dann gilt

$$a(v+w) = a\begin{pmatrix} (r+s)x_1 \\ (r+s)x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a(r+s)x_1 \\ a(r+s)x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (ar+as)x_1 \\ (ar+as)x_2 \end{pmatrix} = av+aw.$$

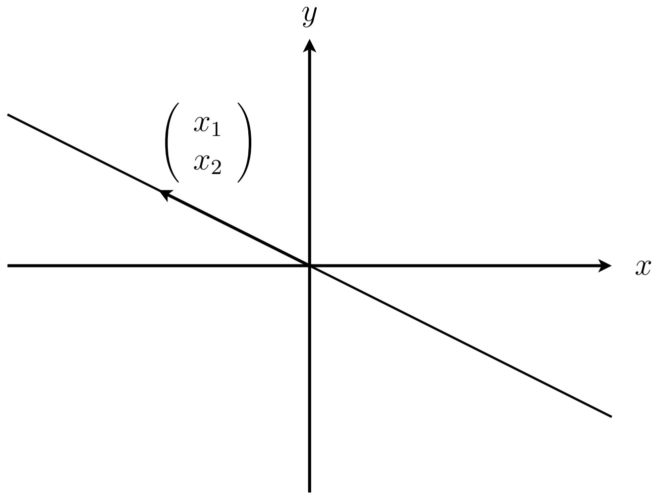
(b) Seien $a, b \in \mathbb{R}$, und sei $v \begin{pmatrix} rx_1 \\ rx_2 \end{pmatrix} \in M$. Dann gilt

$$(a+b)v = \begin{pmatrix} (a+b)rx_1 \\ (a+b)rx_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (ar+br)x_1 \\ (ar+br)x_2 \end{pmatrix} = av + bv.$$

Somit gelten auch die Distributivgesetze.

Die Menge $M$ mit der Addition und der Skalarmultiplikation erfüllt alle Axiome eines $\mathbb{R}$-Vektorraums.

$M$ ist eine Gerade durch den Koordinatenursprung und den Punkt $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$.




**Aufgabe 6.1.6** Der Vektorraum $\mathbb{F}_2^2$ liefert so ein Beispiel. Es ist

$$\mathbb{F}_2^2 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

**Aufgabe 6.1.9** In $\mathbb{F}_2[T]$ gilt $(1+T+T^2)+(T+T^3+T^4) = 1+(1+1)T+T^2+T^3+T^4$. Da $1+1=0$ in $\mathbb{F}_2$, folgt, dass der Koeffizient vor $T$ in der Summe 0 ist. Somit gilt

$$(1 + T + T^2) + (T + T^3 + T^4) = 1 + T^2 + T^3 + T^4.$$

**Aufgabe 6.1.11** Nein, wenn $p$ und $q$ Polynome in $\mathbb{K}[T]$ vom Grad $m$ sind, dann muss nicht $\mathrm{Grad}(p+q) = m$ sein. Ein einfaches Beispiel liefern die Polynome $p$ und $-p$, wobei die Koeffizienten von $-p$ die negativen der Koeffizienten in $p$ sind. Beide Polynome haben denselben Grad. Es ist aber $p + (-p) = 0$, und das Nullpolynom hat den Grad $-\infty < m$.

**Aufgabe 6.2.2** Es ist $1 + 1 = 0$ in $\mathbb{F}_2$, und es ist $1 + 1 = 2 \neq 0$ in $\mathbb{R}$. Die Verknüpfungen $+$ in $\mathbb{F}_2$ und in $\mathbb{R}$ sind also verschieden. Es folgt, dass $\mathbb{F}_2$ kein Unterraum von $\mathbb{R}$ ist.

**Aufgabe 6.2.4** Die Menge, die nur aus dem Nullvektor besteht, ist immer ein Unterraum eines Vektorraums. Es ist also $\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ ein Unterraum von $\mathbb{F}_2^2$. Kann es weitere Unterräume geben, die nur ein Element enthalten? Nein, denn die Bedingung

(a) des Unterraumkriteriums besagt, dass ein Unterraum immer den Nullvektor enthalten muss.

Machen wir uns auf die Suche nach Unterräumen mit zwei Elementen. Wenn $U$ ein Unterraum mit 2 Elementen ist, dann muss einer der Vektoren der Nullvektor sein. Betrachten wir zum Beispiel die Teilmenge $U_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$. Die Summe von zwei Vektoren in $U_1$ liegt wieder in $U_1$, denn $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Multiplizieren wir einen Vektor in $U_1$ mit 0 oder 1 (die einzigen Skalare in $\mathbb{F}_2$), so erhalten wir wieder ein Element aus $U_1$. Es folgt mit dem Unterraumkriterium, dass $U_1$ ein Unterraum von $\mathbb{F}_2^2$ ist.

Analog gilt, dass $U_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ und $U_3 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ Unterräume von $\mathbb{F}_2^2$ sind.

Versuchen wir, Unterräume mit drei Elementen zu finden. Neben dem Nullvektor brauchen wir noch zwei weitere Vektoren $v$ und $w$. Die Summe $v + w$ muss der Nullvektor oder $v$ oder $w$ sein. Das klappt aber nicht, denn es ist $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Es gibt also keine Unterräume mit 3 Elementen.

Weiter ist $\mathbb{F}_2^2$ ein Unterraum von $\mathbb{F}_2^2$.

Es gibt also folgende Unterräume von $\mathbb{F}_2^2$:

$$\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}, \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}, \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}, \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \text{ und } \mathbb{F}_2^2.$$

**Aufgabe 6.2.6** Wir benutzen zum Beweis das Unterraumkriterium.

Für die Nullmatrix $0 \in \mathrm{M}_{nn}(\mathbb{K})$ gilt $0X = X0$, die Nullmatrix liegt also in $U$.

Seien $A, B \in U$. Dann gilt $(A+B)X = AX + BX = XA + XB = X(A+B)$, und dies zeigt, dass $A + B$ in $U$ liegt.

Sei $A \in U$ und sei $a \in \mathbb{K}$. Dann gilt $(aA)X = a(AX) = a(XA) = X(aA)$, es liegt also $aA$ in $U$.

Mit dem Unterraumkriterium folgt, dass $U$ ein Unterraum von $\mathrm{M}_{nn}(\mathbb{K})$ ist.

**Aufgabe 6.2.8** Wäre $U \cup W$ ein Unterraum von $\mathbb{R}^2$, so müssten Summen von Vektoren in $U \cup W$ wieder in $U \cup W$ liegen. Dies ist hier aber nicht der Fall, denn

$\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \in U \cup W$ und $\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} \in U \cup W$, aber es gilt $\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} \notin U \cup W$.

**Aufgabe 6.2.10** Sei $V$ ein Vektorraum über $\mathbb{K}$, und seien $U$ und $W$ Unterräume von $V$.

**Behauptung:** $U \cup W$ ist eine Teilmenge von $U + W$.

**Beweis:** Sei $x \in U \cup W$. Dann gilt $x \in U$ oder $x \in W$. Falls $x \in U$, so gilt $x = x + 0 \in U + W$, denn $x \in U$ und $0 \in W$. Falls $x \in W$, so gilt $x = 0 + x \in U + W$, denn $0 \in U$ und $x \in W$. Es folgt $U \cup W \subseteq U + W$, die Behauptung.

**Aufgabe 6.3.3** Seien $u = \begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}, v = \begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}, w = \begin{pmatrix}0\\3\\-4\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$.

**Behauptung:** $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} \notin \langle u, v, w\rangle$.

**Beweis:** Angenommen, es gibt reelle Zahlen $a_1, a_2, a_3$, so dass

$$a_1\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix} + a_2\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix} + a_3\begin{pmatrix}0\\3\\-4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2a_1 + a_2\\a_1 - a_2 + 3a_3\\2a_2 - 4a_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} \text{ ist.}$$

Dann ist $\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}$ Lösung des inhomogenen linearen Gleichgssystems

$$\begin{pmatrix}2 & 1 & 0\\1 & -1 & 3\\0 & 2 & -4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}.$$

Um zu untersuchen, ob dieses lineare Gleichungssystem eine Lösung besitzt, berechnen wir die Ränge der Koeffizientenmatrix und der erweiterten Koeffizientenmatrix.

Die erweiterte Koeffizientenmatrix ist

$$\begin{pmatrix}2 & 1 & 0 & | & 1\\1 & -1 & 3 & | & 1\\0 & 2 & -4 & | & 1\end{pmatrix}.$$

Wir vertauschen die erste und die zweite Zeile.

$$\begin{pmatrix}1 & -1 & 3 & | & 1\\2 & 1 & 0 & | & 1\\0 & 2 & -4 & | & 1\end{pmatrix}$$

Wir subtrahieren das Doppelte der ersten Zeile von der zweiten.

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & | & 1 \\ 0 & 3 & -6 & | & -1 \\ 0 & 2 & -4 & | & 1 \end{pmatrix}$$

Wir teilen die zweite Zeile durch 3 und die dritte durch 2.

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & | & 1 \\ 0 & 1 & -2 & | & -\frac{1}{3} \\ 0 & 1 & -2 & | & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Wir subtrahieren die zweite Zeile von der dritten und addieren die zweite Zeile zur ersten.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & | & \frac{2}{3} \\ 0 & 1 & -2 & | & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & | & \frac{5}{6} \end{pmatrix}$$

Der Rang der erweiterten Koeffizientenmatrix ist größer als der Rang der Koeffizientenmatrix, und daher hat das lineare Gleichungssystem keine Lösung. Es folgt, dass $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \notin \langle u, v, w \rangle$. $\square$