FernUniversität in Hagen

Bitte hier unbedingt Matrikelnummer und Adresse eintragen, sonst keine Bearbeitung möglich.

Postanschrift: FernUniversität ·58084 Hagen

(Name, Vorname)

(Straße, Nr.)

(PLZ, Wohnort)

FernUniversität in Hagen
FAKULTÄT für Mathematik und Informatik

Klausur
WS 2007/08

Klausur: 01141 Mathematische Grundlagen
DATUM: 9.2.2008
UHRZEIT: 10.00 - 12.00 Uhr
KLAUSURORT:

Bearbeitungshinweise

(Bitte vor Arbeitsbeginn durchlesen!)

1. Schreiben Sie Ihre Klausur bitte nicht mit Bleistift.
2. Füllen Sie bitte die grau hinterlegten Felder leserlich und vollständig aus, und schreiben Sie Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer auf jedes Lösungsblatt, das Sie abgeben.
3. Die Reihenfolge, in der Sie die Aufgaben/Teilaufgaben lösen, ist Ihnen freigestellt. Kreuzen Sie in der Tabelle (s.u.) an, welche Aufgaben Sie bearbeitet haben.
4. Bei jeder Aufgabe ist die erreichbare Höchstpunktzahl vermerkt. Sie haben die Klausur bestanden, wenn Sie **40** Punkte erreichen.
5. Erlaubtes Hilfsmittel ist ein beidseitig beschriebenes, handschriftliches DIN-A4 Blatt mit eigenen Aufzeichnungen.
6. Weitere Hilfsmittel wie Studienbriefe, Glossare, Bücher, Aufzeichnungen, Taschenrechner, etc. dürfen während der Klausur nicht benutzt werden. Ihre Benutzung sowie andere Täuschungsversuche führen dazu, dass Ihre Klausur mit 5 bewertet wird.
7. Die Finanzamtsbescheinigung wird Ihnen zugeschickt.

Aufsicht:	**Bemerkungen:**
Datum, Unterschrift:	

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Summe
Bearbeitet										
max. Punktezahl	8	16	4	10	8	8	10	8	8	80
erreichte Punktezahl										
Korrektur										

Datum/Note	

1. Prüferin: Prof. Dr. L. Unger	2. Prüferin: Dr. S. Hartlieb
Datum, Unterschrift	Datum, Unterschrift

Mathematische Grundlagen (1141) — WS 07/08

Klausur am 09.02.2008:

Aufgabenstellungen

Die Lösungen der folgenden Aufgaben müssen Sie begründen.

Aufgabe 1

Bestimmen Sie die Lösungsmenge $\mathcal{L}$ des folgenden linearen Gleichungssystems über $\mathbb{R}$.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

[*8 Punkte*]

Aufgabe 2

Sei $V = \mathrm{M}_{22}(\mathbb{R})$, und sei $f : V \to V$ definiert durch $f\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a & b+c \\ b+c & 2d \end{pmatrix}$ für alle $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in V$.

1. Beweisen Sie, dass f linear ist.
2. Bestimmen Sie eine Basis von $\mathrm{Bild}(f)$ und von $\mathrm{Kern}(f)$.

[*4 + 12 = 16 Punkte*]

Aufgabe 3

Beweisen Sie, dass $V = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \mid a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$ ein Unterraum von $\mathrm{M}_{22}(\mathbb{R})$ ist.

[*4 Punkte*]

Aufgabe 4

Beweisen Sie folgende Formel mit vollständiger Induktion.

$$\text{Für alle } n \in \mathbb{N} \text{ gilt } \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(2k-1)(2k+1)} = \frac{n}{2n+1}.$$

[*10 Punkte*]

Aufgabe 5

Beweisen Sie, dass die Folge (a_n) mit $a_n = \sqrt{n^2+n} - n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ konvergent ist, und bestimmen Sie ihren Grenzwert.

Hinweis: Mit der dritten binomischen Formel gilt $(\sqrt{n^2+n} - n)(\sqrt{n^2+n} + n) = n$.

[*8 Punkte*]

Aufgabe 6

Beweisen Sie, dass die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}$ konvergent ist.

[*8 Punkte*]

Aufgabe 7

Sei I ein Intervall in $\mathbb{R}$, und seien $f : I \to \mathbb{R}$ und $g : I \to \mathbb{R}$ stetige Funktionen. Für alle $x \in I \cap \mathbb{Q}$ sei $f(x) = g(x)$.

Beweisen Sie, dass $f(x) = g(x)$ für alle $x \in I$ gilt.

[*10 Punkte*]

Aufgabe 8

Sei $x \in \mathbb{R}$ so, dass $f(x) = \sqrt{\sin(\frac{\cos(x)}{x})}$ definiert ist. Berechnen Sie $f'(x)$.

[*8 Punkte*]

Aufgabe 9

1. Konstruieren Sie eine Interpretation, sodass die Formel $\forall x(P(x) \vee Q(x))$ wahr ist.
2. Konstruieren Sie eine Interpretation, sodass die Formel $\forall x(P(x) \vee Q(x))$ falsch ist.

[*4 + 4 = 8 Punkte*]

Funktion	Definitionsbereich	Stammfunktion
$x \mapsto x^n, n \in \mathbb{N}_0$	$\mathbb{R}$	$x \mapsto \frac{1}{n+1}x^{n+1}$
$x \mapsto x^{-n}, n \in \mathbb{N}, n \geq 2$	$\mathbb{R} \setminus \{0\}$	$x \mapsto \frac{1}{-n+1}x^{-n+1}$
$x \mapsto x^{-1}$	$(0, \infty)$	$x \mapsto \ln(x)$
$x \mapsto x^{-1}$	$(-\infty, 0)$	$x \mapsto \ln(-x)$
$x \mapsto x^\alpha, \alpha \in \mathbb{R}, \alpha \neq -1$	$(0, \infty)$	$x \mapsto \frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1}$
$x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$	$\mathbb{R}$	$x \mapsto \arctan(x)$
$x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$(-1, 1)$	$x \mapsto \arcsin(x)$
$x \mapsto \exp(x)$	$\mathbb{R}$	$x \mapsto \exp(x)$
$x \mapsto a^x, a > 0, a \neq 1$	$\mathbb{R}$	$x \mapsto \frac{1}{\ln(a)}a^x$
$x \mapsto \cos(x)$	$\mathbb{R}$	$x \mapsto \sin(x)$
$x \mapsto \sin(x)$	$\mathbb{R}$	$x \mapsto -\cos(x)$
$x \mapsto \frac{1}{\cos^2(x)}$	$((k - \frac{1}{2})\pi, (k + \frac{1}{2})\pi), k \in \mathbb{Z}$	$x \mapsto \tan(x)$
$x \mapsto \frac{1}{\sin^2(x)}$	$(k\pi, (k+1)\pi), k \in \mathbb{Z}$	$x \mapsto -\cot(x)$