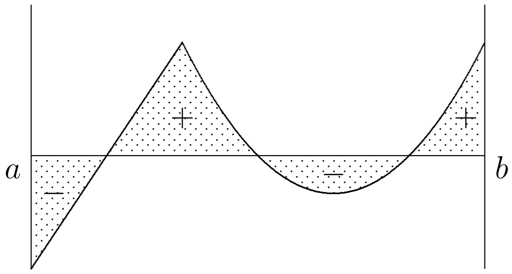
Inhalt Integralbegriff, Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung, Integrationsregeln

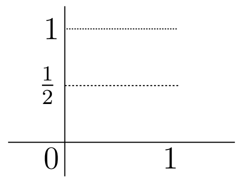
1 Der Integralbegriff

Problemstellung Seien $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ und $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Das *Integral* $\int_a^b f(t)\,dt$ soll der Flächeninhalt zwischen dem Graphen von f und der x-Achse sein. Flächenstücke oberhalb der x-Achse werden positiv, unterhalb der x-Achse negativ gezählt.



Wir haben nicht gesagt, was genau „Flächeninhalt" bedeutet. Was ist z. B. der „Flächeninhalt" unter folgender Funktion?

$$f : [0, 1] \to \mathbb{R},\ t \mapsto \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{für } t \in \mathbb{Q} \\ 1 & \text{für } t \notin \mathbb{Q} \end{cases}.$$

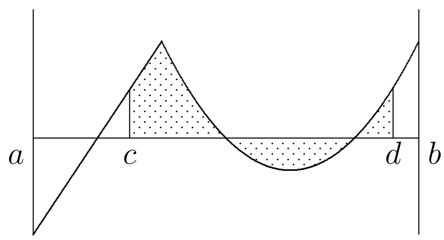


Im Folgenden betrachten wir nur Funktionen, bei denen sinnvoll vom „Flächeninhalt unter dem Graphen" gesprochen werden kann. Das Integral wird nur für solche Funktionen „definiert".

„Definition" Seien $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ und $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Das *Integral* $\int_a^b f(t)\,dt$ bezeichne den Flächeninhalt zwischen dem Graphen von f und der x-Achse. Flächenstücke oberhalb der x-Achse werden positiv, unterhalb der x-Achse negativ gezählt.
f heißt *integrierbar*, wenn das Integral $\int_a^b f(t)\,dt$ existiert (im obigen unpräzisen Sinn).

Definition
Für $c, d \in [a, b]$, $c \leq d$ sei

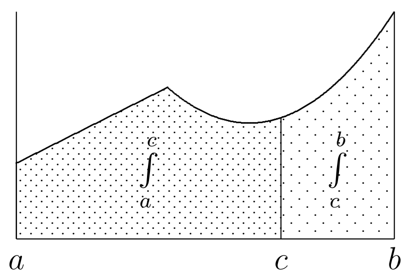
$$\int_c^d f(t)\,dt := \int_a^b f|_{[c,d]}(t)\,dt.$$



Wir benutzen für das Integral zwei Eigenschaften.

1. Intervalladditivität
$f : [a, b] \to \mathbb{R}$ sei integrierbar. Sei $c \in [a, b]$.
Dann gilt:

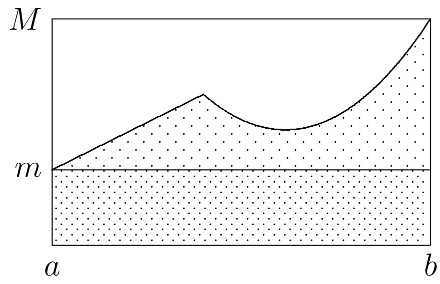
$$\text{(A)} \qquad \int_a^b f(t)\,dt = \int_a^c f(t)\,dt + \int_c^b f(t)\,dt.$$



2. Positivität

$f : [a,b] \to \mathbb{R}$ sei integrierbar.
Sei $m \le f(t) \le M$ für alle $t \in [a,b]$. Dann gilt:

$$\text{(P)} \qquad m(b-a) \le \int\limits_a^b f(t)\,dt \le M(b-a).$$



2 Der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

Definition

$F : [a,b] \to \mathbb{R}$ heißt *Stammfunktion* von $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, falls F differenzierbar ist mit $F' = f$.

Satz 1 (Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung, Teil 1)

Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, $a < b$, stetig. Dann ist

$$F : [a,b] \to \mathbb{R},\ F(x) := \int\limits_a^x f(t)\,dt$$

eine Stammfunktion von f.

Beweis: Sei $c \in [a,b]$. Zu untersuchen ist $\frac{F(x)-F(c)}{x-c}$ für $x \to c$. Sei zunächst $x > c$. Wegen der Intervalladditivität (A) gilt

$$F(x) - F(c) = \int_a^x f(t)\,dt - \int_a^c f(t)\,dt = \int_c^x f(t)\,dt.$$

Da f stetig ist, nimmt f in $[c,x]$ Infimum und Supremum an, es gibt also $u_x, v_x \in [c,x]$ mit

$$f(u_x) \le f(t) \le f(v_x) \quad \text{für alle } t \in [c,x].$$

Mit der Positivität (P) folgt (nach Division durch $x-c$)

$$f(u_x) \le \frac{F(x)-F(c)}{x-c} = \frac{1}{x-c}\int_c^x f(t)\,dt \le f(v_x).$$

Für $x \to c$ gilt auch $u_x, v_x \to c$. Wegen der Stetigkeit von f folgt $f(u_x) \to f(c)$ und $f(v_x) \to f(c)$ für $x \to c$, $x > c$. Also gilt

$$\lim_{\substack{x\to c\\ x>c}} \frac{F(x)-F(c)}{x-c} = f(c).$$

Für $x < c$ zeigt man analog

$$\lim_{\substack{x\to c\\ x<c}} \frac{F(x)-F(c)}{x-c} = f(c).$$

Also gilt

$$\lim_{\substack{x\to c\\ x>c}} \frac{F(x)-F(c)}{x-c} = f(c) = \lim_{\substack{x\to c\\ x<c}} \frac{F(x)-F(c)}{x-c}.$$

Daraus folgt

$$\lim_{x\to c} \frac{F(x)-F(c)}{x-c} = f(c).$$

Also ist F in c differenzierbar mit $F'(c) = f(c)$.

Satz 2 (Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung, Teil 2) *Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, $a < b$, stetig. Sei $G : [a,b] \to \mathbb{R}$ irgendeine Stammfunktion von f. Dann gilt*

$$\int\limits_a^b f(t)\,dt = G(b) - G(a) =: G(t)\Big|_a^b.$$

Beweis: Nach Satz 1 ist F mit $F(x) := \int\limits_a^x f(t)\,dt$ eine Stammfunktion von f.

Sei G irgendeine Stammfunktion von f, also $(G-F)' = f - f = 0$. Dann ist $G - F$ konstant, also $G = F + K$ mit einem $K \in \mathbb{R}$. Also ist

$$G(b) - G(a) = F(b) - F(a) = \int_a^b f(t)\,dt.$$

Damit kann man das Integral von f berechnen, wenn man eine Stammfunktion von f kennt.

Beispiele

a) Sei $n \in \mathbb{N}$. Eine Stammfunktion von $t \mapsto t^n$ ist $t \mapsto \frac{1}{n+1} t^{n+1}$. Also gilt

$$\int_a^x t^n\,dt = \frac{1}{n+1}\,t^{n+1}\Big|_a^x = \frac{1}{n+1}\Big(x^{n+1} - a^{n+1}\Big).$$

b) Sei $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Eine Stammfunktion von $]0,\infty[\, \to \mathbb{R}$, $t \mapsto t^{-n}$ ist $t \mapsto \frac{1}{-n+1} t^{-n+1}$. Also gilt (für $x \geq a > 0$)

$$\int_a^x t^{-n}\,dt = \frac{1}{-n+1}\,t^{-n+1}\Big|_a^x = \frac{1}{-n+1}\Big(x^{-n+1} - a^{-n+1}\Big).$$

Bezeichnung

Eine Stammfunktion F von f nennt man auch *unbestimmtes Integral* von f und schreibt

$$F(t) = \int f(t)\,dt.$$

Das Symbol $\int f(t)\,dt$ bezeichnet also eine Stammfunktion von f.

Beispiel: $\int t^n\,dt = \frac{1}{n+1}\,t^{n+1}$ für $n \in \mathbb{N}$.

Der Ausdruck

$$\int_a^b f(t)\,dt$$

heißt *bestimmtes Integral*, weil die *Integrationsgrenzen* a, b angegeben sind.

3 Integrationsregeln

Satz 3 (Linearität des Integrals) *Seien $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$, $a < b$, stetig, seien $r, s \in \mathbb{R}$. Dann gilt:*

$$\int_a^b \big(rf(t) + sg(t)\big)\,dt = r\int_a^b f(t)\,dt + s\int_a^b g(t)\,dt.$$

Beweis: Seien F bzw. G Stammfunktionen von f bzw. g. Es gilt $(rF + sG)' = rF' + sG' = rf + sg$, also ist $rF + sG$ eine Stammfunktion von $rf + sg$. Damit folgt

$$\int_a^b \big(rf(t) + sg(t)\big)\,dt = \big(rF(t) + sG(t)\big)\Big|_a^b = rF(t)\Big|_a^b + sG(t)\Big|_a^b = r\int_a^b f(t)\,dt + s\int_a^b g(t)\,dt.$$

Beispiele a) Für eine Polynomfunktion $t \mapsto \sum\limits_{j=0}^{n} a_j t^j$ erhalten wir

$$\int\limits_0^x \sum_{j=0}^{n} a_j t^j \, dt = \sum_{j=0}^{n} a_j \int\limits_0^x t^j \, dt = \sum_{j=0}^{n} a_j \frac{t^{j+1}}{j+1}\Big|_0^x = \sum_{j=0}^{n} \frac{a_j}{j+1} x^{j+1}.$$

b) $\displaystyle\int\limits_1^4 \Big(t^2 - \frac{10}{t^2}\Big)\, dt = \Big(\frac{t^3}{3} + \frac{10}{t}\Big)\Big|_1^4 = \frac{64}{3} + \frac{10}{4} - \frac{1}{3} - 10 = \frac{27}{2}.$

Satz 4 (Partielle Integration) *Seien $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$, $a < b$, differenzierbar und ihre Ableitungen f', g' stetig. Dann gilt:*

$$\int_a^b f'(t) g(t) \, dt = f(t)g(t)\Big|_a^b - \int_a^b f(t) g'(t) \, dt.$$

Beweis: Wegen $(fg)' = f'g + fg'$ ist fg Stammfunktion von $f'g + fg'$. Also gilt

$$\int_a^b f'(t) g(t) \, dt + \int_a^b f(t) g'(t) \, dt = f(t)g(t)\Big|_a^b.$$

Daraus folgt die Behauptung.

Beispiele Für interessante Beispiele brauchen wir mehr Funktionen. Wir benutzen (ohne Beweis), dass die trigonometrischen Funktionen $\sin$, $\cos$ auf $\mathbb{R}$ differenzierbar sind mit $\sin' = \cos$, $\cos' = -\sin$.

a) Wir wollen $\int\limits_0^x t \cos t \, dt$ berechnen. Sei $f(t) := \sin t$ mit $f'(t) = \cos t$, $g(t) := t$. Dann folgt

$$\int_0^x t \cos t \, dt = t \sin t\Big|_0^x - \int_0^x \sin t \, dt = x \sin x + \cos t\Big|_0^x = x \sin x + \cos x - 1.$$

b) Es soll $\int\limits_0^x \sin^2 t \, dt$ berechnet werden. Wir setzen $f(t) := -\cos t$, $f'(t) = \sin t$, $g(t) := \sin t$. Es folgt

$$\int_0^x \sin^2 t \, dt = -\sin t \cos t\Big|_0^x + \int_0^x \cos^2 t \, dt.$$

Wegen $\cos^2 t = 1 - \sin^2 t$ ist $\int\limits_0^x \cos^2 t \, dt = x - \int\limits_0^x \sin^2 t \, dt$. Also ist

$$\int_0^x \sin^2 t \, dt = -\sin x \cos x + x - \int_0^x \sin^2 t \, dt.$$

Es folgt

$$2 \int_0^x \sin^2 t \, dt = x - \sin x \cos x.$$

Satz 5 (Substitutionsregel) *Sei I ein Intervall, $f : I \to \mathbb{R}$ stetig und $h : [a,b] \to I$ differenzierbar mit stetiger Ableitung h'. Dann gilt:*

$$\int_{h(a)}^{h(b)} f(x) \, dx = \int_a^b f\big(h(t)\big) \cdot h'(t) \, dt.$$

Beweis: Sei F eine Stammfunktion von f. Es gilt $\big(F(h(t)\big)' = F'\big(h(t)\big) \cdot h'(t) = f\big(h(t)\big) \cdot h'(t)$, also ist $F \circ h$ Stammfunktion von $(f \circ h) \cdot h'$. Damit folgt

$$\int_a^b (f \circ h)(t) \cdot h'(t)\, dt = (F \circ h)\Big|_a^b = F\big(h(b)\big) - F\big(h(a)\big) = \int_{h(a)}^{h(b)} f(x)\, dx.$$

Beispiele

a) Es soll $\int\limits_0^b t^2 \sin(t^3)\, dt$ berechnet werden. Sei $h(t) := t^3$, also $h'(t) = 3t^2$. Mit der Substitutionsregel (Satz 5, gelesen von rechts nach links) folgt

$$\begin{aligned} \int_0^b t^2 \sin(t^3)\, dt &= \frac{1}{3} \int_0^b \sin(t^3) \cdot 3t^2\, dt = \frac{1}{3} \int_0^{b^3} \sin(x)\, dx \\ &= \frac{1}{3} \cdot -\cos(x)\Big|_0^{b^3} = \frac{1}{3}\big(-\cos(b^3) + 1\big). \end{aligned}$$

b) Berechnung von $\int\limits_0^{\pi^2/4} \cos \sqrt{x}\, dx$. Wir „substituieren“ $x(t) := t^2$, also $x'(t) = \frac{dx}{dt} = 2t$. Mit der Substitutionsregel (Satz 5, gelesen von links nach rechts) folgt

$$\int\limits_0^{\pi^2/4} \cos \sqrt{x}\, dx = \int\limits_{x(0)}^{x(\frac{\pi}{2})} \cos \sqrt{x}\, dx = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t \cdot 2t\, dt.$$

Als Stammfunktion von $t \cos t$ haben wir schon $t \sin t + \cos t$ gefunden (mit partieller Integration). Also ist

$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t \cdot 2t\, dt = 2\big(t \sin t + \cos t\big)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 2\big(\frac{\pi}{2} - 1\big) = \pi - 2.$$