Lösungen der Klausur Mathematische Grundlagen (1141) WS 07/08

Klausur am 09.02.2008:

Lösungsvorschläge zu den Aufgaben

zu Aufgabe 1

Die erweiterte Koeffizientenmatrix des linearen Gleichungssystems ist

$$A' = \left(\begin{array}{cccccc|c} 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right).$$

Diese Matrix überführen wir in Treppennormalform und erhalten

$$T' = \left(\begin{array}{cccccc|c} 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right).$$

Links des Strichs steht die Treppennormalform T der Koeffizientenmatrix A.

Wir führen Nullzeilen so ein, dass die Matrix links des Strichs quadratisch ist und die Pivot-Positionen auf der Diagonalen stehen:

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

Rechts des Strichs steht eine spezielle Lösung des linearen Gleichungssystems. Wir fügen nun -1 überall auf der Diagonalen ein, wo 0 steht.

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right).$$

© 2008 Fernuniversität in Hagen

An dieser Matrix können wir die Lösungsmenge ablesen: Eine spezielle Lösung steht rechts des Strichs, und die Lösungsmenge des homogenen Systems ist die Menge der Linearkombinationen der Spalten, in denen wir -1 eingeführt haben. Es folgt:

$$\mathcal{L} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + \left\{ a \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \mid a, b, c \in \mathbb{R} \right\}.$$

zu Aufgabe 2

1. Seien $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ und $B = \begin{pmatrix} x & y \\ z & u \end{pmatrix}$ in V. Es gilt

$$\begin{aligned} f(A+B) &= \begin{pmatrix} 2a+2x & b+c+y+z \\ b+c+y+z & 2d+2u \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2a & b+c \\ b+c & 2d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2x & y+z \\ y+z & 2u \end{pmatrix} = f(A) + f(B). \end{aligned}$$

   Seien $x \in \mathbb{R}$ und $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in V$. Dann gilt

$$f(xA) = \begin{pmatrix} 2xa & xb+xc \\ xb+xc & 2xd \end{pmatrix} = xf(A).$$

   Es folgt, dass f linear ist.

2. Es gilt

$$\begin{aligned} \mathrm{Bild}(f) &= \langle f(E_{11}), f(E_{12}), f(E_{21}), f(E_{22}) \rangle \\ &= \left\langle \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \right\rangle \\ &= \left\langle \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \right\rangle. \end{aligned}$$

Die Matrizen $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ sind linear unabhängig, bilden also eine Basis von $\mathrm{Bild}(f)$.

Mit dem Rangsatz gilt

$$\dim(V) = \dim(\mathrm{Kern}(f)) + \dim(\mathrm{Bild}(f)),$$

also $\dim(\mathrm{Kern}(f)) = 4 - 3 = 1$. Es reicht also, eine linear unabhängige Matrix in $\mathrm{Kern}(f)$ zu finden.

Sei $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. Dann gilt $f(A) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, also $A \in \mathrm{Kern}(f)$. Somit ist A eine Basis von $\mathrm{Kern}(f)$.

zu Aufgabe 3

Zum Beweis benutzen wir das Unterraumkriterium. Die Nullmatrix liegt in V. Seien $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} a' & b' \\ b' & c' \end{pmatrix} \in V$. Dann gilt $A + B = \begin{pmatrix} a + a' & b + b' \\ b + b' & c + c' \end{pmatrix} \in V$. Sei $r \in \mathbb{R}$, und sei $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \in V$. Dann gilt $(rA) = \begin{pmatrix} ra & rb \\ rb & rc \end{pmatrix}$, also $rA \in V$. Mit dem Unterraumkriterium folgt, dass V ein Unterraum von $\mathrm{M}_{22}(\mathbb{R})$ ist.

zu Aufgabe 4

Für den Induktionsanfang sei $n = 1$. Es sind $\frac{1}{1\cdot 3} = \frac{1}{3}$ und $\frac{1}{2\cdot 1+1} = \frac{1}{3}$. Es gilt somit der Induktionsanfang.

In der Induktionsannahme nehmen wir an, es sei $n \geq 1$ und es gelte $\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{(2k-1)(2k+1)} = \frac{n}{2n+1}$. Dann folgt

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{(2k-1)(2k+1)} &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(2k-1)(2k+1)} + \frac{1}{(2(n+1)-1)(2(n+1)+1)} \\
&= \frac{n}{2n+1} + \frac{1}{(2n+1)(2n+3)} = \frac{n(2n+3)+1}{(2n+1)(2n+3)} \\
&= \frac{2n^2+3n+1}{(2n+1)(2n+3)} = \frac{(2n+1)(n+1)}{(2n+1)(2n+3)} = \frac{n+1}{2(n+1)+1}.
\end{aligned}$$

Mit dem Prinzip der vollständigen Induktion folgt, dass die Formel für alle $n \in \mathbb{N}$ richtig ist.

zu Aufgabe 5

Es gilt $(\sqrt{n^2+n}-n)(\sqrt{n^2+n}+n) = n^2+n-n^2 = n$. Es folgt

$$\sqrt{n^2+n}-n = \frac{n}{\sqrt{n^2+n}+n} = \frac{n}{\sqrt{n^2(1+\frac{1}{n})}+n} = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1}.$$

Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $1 \leq \sqrt{1+\frac{1}{n}} \leq 1+\frac{1}{n}$. Da die konstante Folge (1) und die Folge $(1+\frac{1}{n})$ konvergent sind und den Grenzwert 1 haben, konvergiert $(\sqrt{1+\frac{1}{n}})$ ebenfalls gegen 1. Somit ist die Folge $(\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1})$ konvergent, und es gilt

$$\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+n}-n) = \lim_{n\to\infty}(\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1}) = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}.$$

zu Aufgabe 6

Wir verwenden zum Beweis das Quotientenkriterium. Es gilt

$$\begin{aligned} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} &= \frac{((n+1)!)^2}{(2n+2)!} \cdot \frac{(2n)!}{(n!)^2} = \frac{(n+1)^2}{(2n+2)(2n+1)} \\ &= \frac{(n+1)^2}{2(n+1)(2n+1)} = \frac{n+1}{4n+2}. \end{aligned}$$

Es ist $\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{n+1}{4n+1}) = \lim\limits_{n\to\infty}(\frac{1+\frac{1}{n}}{4+\frac{1}{n}}) = \frac{1}{4} < 1$. Mit dem Quotientenkriterium folgt, dass die Reihe konvergent ist.

zu Aufgabe 7

Sei $x \in I$. Ist $x \in I \cap \mathbb{Q}$, so gilt nach Annahme $f(x) = g(x)$. Wir können also annehmen, dass $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ ist. Da $\mathbb{Q}$ dicht in $\mathbb{R}$ liegt, gibt es eine Folge (x_n), deren Glieder alle in $\mathbb{Q}$ liegen, und die den Grenzwert x hat. Es folgt $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = \lim\limits_{n\to\infty} g(x_n) = g(x)$, denn f und g sind stetig.

zu Aufgabe 8

Sei $f(x) = \sin(\frac{\cos(x)}{x})$, und sei $g(x) = \sin(\frac{\cos(x)}{x})$. Mit der Kettenregel gilt

$$f'(x) = g'(x) \cdot \frac{1}{2} g(x)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} g'(x)(\sin(\frac{\cos(x)}{x}))^{-\frac{1}{2}}.$$

Sei $h(x) = \frac{\cos(x)}{x}$. Dann gilt wieder mit der Kettenregel

$$g'(x) = h'(x)\cos(\frac{\cos(x)}{x}).$$

Mit der Quotientenregel gilt

$$h'(x) = \frac{x(-\sin(x)) - \cos(x)}{x^2}.$$

Es folgt

$$f'(x) = \frac{1}{2}\frac{x(-\sin(x)) - \cos(x)}{x^2}\cos(\frac{\cos(x)}{x})(\sin(\frac{\cos(x)}{x}))^{-\frac{1}{2}}.$$

zu Aufgabe 9

1. (a) Sei $U = \mathbb{N}$ das Universum.

   (b) Seien $\mathfrak{I}(P) = \mathbf{P} = \{2n \mid n \in \mathbb{N}\}$ und $\mathfrak{I}(Q) = \mathbf{Q} = \{2n - 1 \mid n \in \mathbb{N}\}$. Dann ist $\mathbf{P}$ die Menge der geraden natürlichen Zahlen, und $\mathbf{Q}$ ist die Menge der ungeraden natürlichen Zahlen. Da jede natürliche Zahl gerade oder ungerade ist, ist $\mathfrak{I}(\forall x(P(x) \vee Q(x))) = \mathbf{1}$.

2. (a) Sei $U = \mathbb{N}$ das Universum.

   (b) Seien $\mathfrak{I}(P) = \mathbf{P} = \{2n \mid n \in \mathbb{N}\}$ und $\mathfrak{I}(Q) = \mathbf{Q} = \{2n + 1 \mid n \in \mathbb{N}\}$. Dann ist $\mathbf{P}$ die Menge der geraden natürlichen Zahlen, und $\mathbf{Q}$ ist die Menge der ungeraden natürlichen Zahlen, die ≥ 3 sind. Da 1 weder in $\mathbf{P}$ noch in $\mathbf{Q}$ liegt, ist $\mathfrak{I}(\forall x(P(x) \vee Q(x))) = \mathbf{0}$.