# Lösungen der Übungsaufgaben in Kapitel 1

**Lösung von Aufgabe 1.1:** Hier muss man nur konsequent das Kommutativ- und das Assoziativgesetz anwenden; zunächst setze ich - wegen des Assoziativgesetzes unnötige - Klammern und erhalte

$$a + b + c = a + (b + c).$$

Nun wende ich das Kommutativgesetz auf $a$ und $(b + c)$ an, was liefert

$$a + (b + c) = (b + c) + a\,,$$

und weils so schön klappt, gleich nochmal das Kommutativgesetz, diesmal angewendet auf den Term in der Klammer:

$$(b + c) + a = (c + b) + a\ .$$

Nun lasse ich die unnötige Klammer wieder weg und erhalte

$$c + b + a\ .$$

**Lösung von Aufgabe 1.2:** Na ja, hier weiß ich offen gestanden nicht so recht, was ich der Lösung im Buch noch hinzufügen soll. Es werden immer zunächst die Terme in den Klammern berechnet, und danach die sich ergebenden Werte multipliziert. Das ergibt:

a) $(3 - 6)(-2 - 3) = (-3)(-5) = 15$;

b) $-(8 - 3)(-2 + 5) = (-5)3 = -15$;

c) $(9 - 3 - 8)(3 - 1 - 7)(-2 + 1) = (-2)(-5)(-1) = -10$.

**Lösung von Aufgabe 1.3:** Der Nenner des Bruchs $\frac{231}{22}$ enthält nur die beiden Faktoren 2 und 11, wenn ich also irgendetwas kürzen will, muss ich es mit diesen beiden versuchen. Der Zähler ist aber gerade, also nicht durch 2 teilbar, daher muss, wenn es überhaupt klappen soll, durch 11 gekürzt werden. Tatsächlich ist $231 = 21 \cdot 11$, und somit

$$\frac{231}{22} = \frac{21 \cdot 11}{2 \cdot 11} = \frac{21}{2}\ .$$

Wenn man in seiner Jugend schön brav die „Viererreihe“ gelernt hat, dann sieht man bei dem Bruch $\frac{52}{28}$, dass sowohl Zähler als auch Nenner durch vier teilbar sind; führt man diese Zerlegung aus, so erhält man

$$\frac{52}{28} = \frac{4 \cdot 13}{4 \cdot 7} = \frac{13}{7}\ ,$$

und da sowohl 13 als auch 7 Primzahlen sind, ist kein weiteres Kürzen möglich. Schließlich schaue ich mir den Bruch $\frac{16}{64}$ genauer an und sehe, dass der Nenner einfach das Vierfache des Zählers ist; somit wird

$$\frac{16}{64} = \frac{1}{4}$$

**Lösung von Aufgabe 1.4:** Natürlich kann man hier Zähler und Nenner separat multiplizieren und anschließend kürzen, sehr viel effizienter ist es allerdings, bereits vor dem Multiplizieren zu kürzen, und zwar, wie mein alter Physiklehrer zu sagen pflegte, „übers Kreuz". Bei dem Produkt $\frac{9}{4} \cdot \frac{6}{3}$ kann man beispielsweise 9 gegen 3 und 6 gegen 4 kürzen, was ergibt:

$$\frac{9}{4} \cdot \frac{6}{3} = \frac{3 \cdot 3}{2 \cdot 1} = \frac{9}{2} \ .$$

Bei dem Produkt $\frac{13}{7} \cdot \frac{21}{26}$ lacht einen zunächst die 13 an, die auch zweimal in 26 steckt, und von 21 durch 7 bleibt auch nur eine 3 übrig, somit ist

$$\frac{13}{7} \cdot \frac{21}{26} = \frac{3}{2} \ .$$

Schließlich ist $52 = 4 \cdot 13$ und $76 = 4 \cdot 19$, also

$$\frac{52}{76} \cdot \frac{19}{13} = \frac{4}{4} = 1 \ .$$

**Lösung von Aufgabe 1.5:** Durch einen Bruch dividiert man, indem man mit seinem Kehrwert multipliziert, der Rest ist einfaches Kürzen wie in Aufgabe 1.4 bereits ausführlich geübt. Es ergibt sich somit

$$\frac{3}{4} : \frac{7}{8} = \frac{3}{4} \cdot \frac{8}{7} = \frac{3 \cdot 2}{7} = \frac{6}{7}$$

$$\frac{52}{76} : \frac{13}{19} = \frac{52}{76} \cdot \frac{19}{13} = \frac{4}{4} = 1$$

$$\frac{143}{11} : \frac{130}{22} = \frac{143}{11} \cdot \frac{22}{130} = \frac{11 \cdot 2}{1 \cdot 10} = \frac{11}{5} \ .$$

**Lösung von Aufgabe 1.6:** Ich löse - streng nach Vorschrift - die Klammern von innen nach außen auf, das ergibt:

a)

$$(((2-3)\cdot 4)-2)\cdot(-2) = (((-1)\cdot 4)-2)\cdot(-2) = (-4-2)\cdot(-2) = -6\cdot(-2) = 12$$

und

b)

$$2-((1-4)\cdot(3-2)+4) = 2-((-3)\cdot 1+4) = 2-(-3+4) = 2-1 = 1\,.$$

**Lösung von Aufgabe 1.7:** Hier sollte man das Ganze auf einen Bruchstrich bringen und danach kräftig kürzen. Man erhält dann:

a)
$$\left(\frac{1}{2}\right)^3 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^5 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{1^3 \cdot 2^5 \cdot 3^2}{2^3 \cdot 3^5 \cdot 4^2} = \frac{2^2}{3^3 \cdot 4^2} = \frac{1}{27 \cdot 4} = \frac{1}{108}$$

sowie

b)
$$(a^2b^3c^{-1})^2 \cdot (c^2)^2 = a^4b^6c^{-2}c^4 = a^4b^6c^2$$

**Übungsaufgabe 1.8:**
a) Hier gibt es eigentlich auch nicht viel zu erläutern, der Ausdruck $\sqrt[4]{81}$ bezeichnet eine Zahl, die, in die vierte Potenz genommen, 81 ergibt; das ist offensichtlich die 3, also
$$\sqrt[4]{81} = 3\,.$$

b) Bei $\sqrt[3]{2^2 \cdot 2}$ benutzt man am besten die Regeln des Potenzrechnens und erhält
$$\sqrt[3]{2^2 \cdot 2} = \sqrt[3]{2^3} = 2\ .$$

c) Auch hier nützen die Potenzrechenregeln etwas, man erhält
$$\sqrt[5]{(a^5)^2} = \sqrt[5]{a^{10}} = a^2\ .$$

**Lösung von Aufgabe 1.9:**
a) Der Schlüssel ist bei dieser Aufgabe die Erkenntnis, dass $4^{\frac{1}{3}} \cdot 2^{\frac{1}{3}} = 8^{\frac{1}{3}}$, also gleich 2 ist. Damit geht alles wie von selbst:
$$4^{\frac{1}{3}} \cdot 2^{\frac{1}{3}} \cdot 16^{\frac{1}{4}} = 2 \cdot 2 = 4.$$

b) Hier ist es wahrscheinlich am besten, den Term $900^{\frac{1}{4}}$ umzuschreiben, und zwar in
$$900^{\frac{1}{4}} = (900^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}} = 30^{\frac{1}{2}}\ .$$

Damit erhält man:
$$120^{\frac{1}{2}} \cdot 900^{\frac{1}{4}} = 120^{\frac{1}{2}} \cdot 30^{\frac{1}{2}} = 3600^{\frac{1}{2}} = 60\,.$$

c) Hier ist nach $\sqrt{0,16}$ gefragt, also nach einer Zahl, die - mit sich selbst multipliziert - $0,16$ ergibt. Da gibts nur eine Möglichkeit:
$$\sqrt{0,16} = 0,4\ .$$

**Lösung von Aufgabe 1.10:** a) Bei dem Term $(a^2+b-c)(a+bc)(a^2b)$ fällt mir auch nichts Besseres ein als nacheinander auszumultiplizieren:

$$\begin{aligned}(a^2+b-c)(a+bc)(a^2b) &= (a^2+b-c)(a^3b+a^2b^2c)\\ &= a^5b+a^3b^2-a^3bc+a^4b^2c+a^2b^3c-a^2b^2c^2\end{aligned}$$

Leider kann man hier nichts mehr zusammenfassen, womit Teil a) der Aufgabe auch schon beendet wäre.
b) Hier sieht es schon besser aus: Ausmultiplizieren ergibt zunächst

$$(1+x+x^2+x^3+x^4)(1-x) = 1+x+x^2+x^3+x^4-(x+x^2+x^3+x^4+x^5)\ ;$$

fast alles hebt sich hier weg, und das Endergebnis ist

$$1-x^5.$$

**Lösung von Aufgabe 1.11:**
a) Bei dem Term $34xyz^2-17x^3yz+51y^4$ schaue ich zunächst, welcher größte Faktor in den ersten beiden Summanden steckt; da 34 durch 17 teilbar ist, ist dieser Faktor $17xyz$. Nun vergleiche ich diesen mit dem letzten Summanden, $51y^4$. Da auch 51 durch 17 teilbar ist, andererseits aber hier weit und breit weder $x$ noch $z$ zu erkennen ist, bleibt als größter gemeinsamer Faktor nur $17y$ übrig. Klammert man diesen aus, ergibt sich

$$34xyz^2-17x^3yz+51y^4 = 17y(2xz^2-x^3z+3y^3).$$

b) Weils gerade so gut geklappt hat, vergleiche ich auch hier zunächst die ersten beiden Summanden; diese enthalten $2abc$ als größten gemeinsamen Faktor. Und da das Leben manchmal auch schöne Geschichten schreibt, ist dieser auch im dritten Summanden enthalten; somit ist die Lösung der Aufgabe:

$$2a^2bc-4ab^2c+8abc^2 = 2abc(a-2b+4c)$$

**Lösung von Aufgabe 1.12:**
a) Bei dem Term $(2abc-4ab)$ im Nenner kann man noch den gemeinsamen Faktor $2ab$ ausklammern, so dass dieser zu $2a^3b(c-2)$ wird. Der Faktor $2a^3b$ steckt aber auch im Zähler, und deshalb kann man durch ihn kürzen. Es ergibt sich

$$\frac{4a^3(bc)^2}{(2abc-4ab)a^2} = \frac{2a^3b\cdot 2bc^2}{2a^3b(c-2)} = \frac{2bc^2}{c-2}\ .$$

b) Hier sollte man zunächst Zähler und Nenner nach den Regeln der Potenzrechnung ausmultiplizieren; dies liefert

$$\frac{(3x^2yz)^3}{9(xy^2z)^3} = \frac{27x^6y^3z^3}{9x^3y^6z^3}$$

Nun erkennt man, dass der größte gemeinsame Faktor $9x^3y^3z^3$ ist, und dividiert man diesen aus, ergibt sich

$$\frac{(3x^2yz)^3}{9(xy^2z)^3} \;=\; \frac{9x^3y^3z^3 \cdot (3x^3)}{9x^3y^3z^3 \cdot y^3} \;=\; 3\left(\frac{x}{y}\right)^3 \;.$$

**Lösung von Aufgabe 1.13:**
a) Mit „Zahlen“ sind hier, wie in der Teilbarkeitlehre üblich, natürliche Zahlen gemeint. Eine durch 3 teilbare natürliche Zahl ist immer von der Form $3n$ mit $n \in \mathbb{N}$. Somit muss die gesuchte Summe von der Form

$$\sum_{n=1}^{\text{irgendwas}} 3n$$

sein. Um herauszubekommen, was „irgendwas“ ist, muss man nur überlegen, für welches $n$ der Term $3n$ gleich 99 ist, denn das ist die größte durch 3 teilbare Zahl unter 100. Man findet $n = 33$, und somit ist die Lösung der Aufgabe

$$\sum_{n=1}^{33} 3n \;.$$

b) Eine ungerade Zahl ist immer von der Form $2n + 1$ mit einer natürlichen Zahl $n$. Somit ist die Lösung der Aufgabe

$$\sum_{n=0}^{10} (2n+1)$$

**Lösung von Aufgabe 1.14:** Wie im Beispiel im Buch sollte man hier zunächst die äußere Summe, also die über $i$, auflösen; für $i = -1$ ist der Laufbereich von $j$ von 4 bis $-1$, also ist dies eine leere Summe, deren Wert null ist. Somit ergibt sich

$$\sum_{i=-1}^{1} \sum_{j=-2i}^{i} i^2 \cdot j \;=\; 0 + 0 + (-2 - 1 + 0 + 1) \;=\; -2 \;.$$

**Lösung von Aufgabe 1.15:**
a) 8! ist nach Definition das Produkt $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \ \cdot 7 \cdot 8$, also 40.320.
b) Das Produkt aller Zahlen von 1 bis 11 ist 11!, das der Zahlen von 1 bis 8 ist 8!. Durch Kürzen ergibt sich

$$9 \cdot 10 \cdot 11 = \frac{11!}{8!}.$$

# Lösungen der Übungsaufgaben in Kapitel 2

**Lösung von Aufgabe 2.1:** Ich untersuche zunächst, worauf die Randpunkte des Intervalls $[-1, 2]$, also die Zahlen $-1$ und 2, abgebildet werden. Durch Einsetzen findet man $f(-1) = -\frac{1}{4}$ und $f(2) = -1$.
Nun kann man im Allgemeinen nicht einfach schließen, dass das ganze Intervall $[-1, 2]$ auf das Intervall $[-1, -\frac{1}{4}]$ abgebildet wird, denn es könnte ja sein, dass die Funktion zwischendurch sozusagen einen „Schlenker" macht und einen sehr großen Funktionswert annimmt. Bei dieser Funktion ist das aber nicht der Fall, wenn $x$ zwischen $-1$ und 2 läuft, so laufen die zugehörigen Funktionswerte schön gleichmäßig zwischen $-1$ und $-\frac{1}{4}$ (ein paar Seiten weiter im Text werden Sie für ein solches Verhalten den Begriff „streng monoton fallend" kennen lernen), es ist also

$$f([-1, 2]) = [-1, -\frac{1}{4}]$$

**Lösung von Aufgabe 2.2:**
a) $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ , $f(x) = x^2$ ist eine Funktion, denn das Quadrat einer natürlichen Zahl ist wieder eine natürliche Zahl.
b) $g : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ , $g(x) = \frac{1}{x}$ ist *keine* Funktion, denn für $x = 0$ ist $g(x)$ nicht definiert.
c) $h : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ , $h(x) = 2x^4 - \frac{5}{3}x^3 + \frac{1}{2}x$ ist eine Funktion, denn Potenzen, Produkte und Summen von rationalen Zahlen sind wieder rationale Zahlen, die Werte von $h$ liegen also alle in $\mathbb{Q}$.

**Lösung von Aufgabe 2.3:** Die Verkettung $(g \circ f)$ der beiden Funktionen aus Beispiel 2.3 ist möglich, denn $g$ verträgt als Eingabewerte alle reellen Zahlen. Als möglichst einfache Darstellung ergibt sich

$$(g \circ f)(y) \ = \ ((\sqrt{y} - 8) + 9)^2 \ = \ (\sqrt{y} + 1)^2 \ ,$$

oder, wenn Sie es lieber mit der Variablen $x$ sehen möchten,

$$(g \circ f)(x) \ = \ (\sqrt{x} + 1)^2 \ .$$

Auch das Paar aus Beispiel 2.4 kann man in umgekehrter Reihenfolge verketten, denn $f$ produziert als Output nur positive Zahlen, und solche verträgt $g$ als Input gut. Die einfache Darstellung formuliere ich diesmal gleich mit der Variablen $x$:

$$(g \circ f)(x) \ = \ \sqrt{\frac{\frac{1}{x^2} + 2}{\frac{1}{x^2} + 1}} \ = \ \sqrt{\frac{1 + 2x^2}{1 + x^2}} \ ,$$

wobei ich im letzten Schritt mit $x^2$ erweitert habe.

**Lösung von Aufgabe 2.4:** Zur Funktion

$$f(x) = \frac{x}{10} - 17 \ :$$

Wenn $x_2$ größer ist als $x_1$, dann ist natürlich auch $\frac{x_2}{10}$ größer als $\frac{x_1}{10}$, und wenn ich von beiden Werten jeweils 17 abziehe ändert das auch nichts an den Größenverhältnissen. Daher ist die Funktion $f$ monoton steigend.
Die Funktion

$$g(x) = -\frac{x}{17} + 10$$

dagegen ist monoton fallend, denn wenn $x_2$ größer ist als $x_1$, dann ist – wegen des Minuszeichens – $\frac{x_2}{17}$ kleiner als $\frac{x_1}{17}$, und wenn ich zu beiden Werten jeweils 10 addiere ändert das auch nichts daran.
Auch die Funktion

$$h(x) = \frac{1}{x} \ ,$$

die wir später unter dem Namen Hyperbel wiedersehen werden, ist im genannten Bereich $[1, 17]$ monoton fallend, denn wenn der Zähler konstant eins ist und der Nenner größer wird, dann wird der Bruch - hier also der Funktionswert - kleiner.

**Lösung von Aufgabe 2.5:** Da alle drei Funktionen streng monoton sind, sind die Umkehrfunktionen definiert. Man erhält sie am besten, indem man für den Moment $f(x)$ durch $y$ ersetzt und dann nach $x$ auflöst.
Nicht ganz klar? Das glaube ich, bei *dem* unverständlichen Satz von mir. Machen wir uns lieber an die konkrete Aufgabe:
Ich setze also

$$y = \frac{x}{10} - 17$$

und löse nach $x$ auf. Das ergibt im ersten Schritt

$$10y \ = \ x - 170 \ ,$$

und im zweiten

$$x = 10y + 170$$

Damit hat man's auch schon; da man in unserem (und nicht nur in unserem) Kulturkreis die unabhängige Variable lieber mit $x$ als mit $y$ bezeichnet, und es sich hier um die Umkehrfunktion von $f$ handelt, schreibt man das nun noch um zu

$$f^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \ , \quad f^{-1}(x) = \ 10x + 170 \ .$$

Bei der Funktion $g$ fasse ich mich ein wenig kürzer, Auflösen von

$$y = -\frac{x}{17} + 10$$

nach $x$ ergibt

$$x = -17y + 170 \, ,$$

und Umbenennen der Variablen wie gerade erläutert liefert das Ergebnis

$$g^{-1}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}\ ,\quad g^{-1}(x)=\ -17x+170\ .$$

Bleibt noch die Funktion $h$. Hier ist es ganz einfach, denn Auflösen von

$$y=\frac{1}{x}$$

nach $x$ liefert

$$x=\frac{1}{y}\ ,$$

die Funktion ist also mit ihrer Umkehrfunktion identisch, es folgt

$$h^{-1}:[\frac{1}{17},1]\to\mathbb{R}\ ,\quad h^{-1}(x)=\ \frac{1}{x}\ .$$

**Lösung von Aufgabe 2.6:** Die Funktion

$$f(x)=x^3+3^x$$

ist kein Polynom, denn der Ausdruck $3^x$ ist keine Potenz von $x$. Die Funktion

$$g(x)=\sqrt{x^2+2x+1}$$

dagegen ist sehr wohl ein Polynom, denn wenn Sie Ihre möglicherweise tief vergrabenen Erinnerungen an die binomischen Formeln wieder ausgraben, dann sehen Sie, dass $x^2+2x+1=(x+1)^2$ ist, also

$$\sqrt{x^2+2x+1}=\sqrt{(x+1)^2}=x+1\ ,$$

und das ist allemal ein Polynom.
Dagegen ist $h(x)=x^2-x^{-2}$ wiederum kein Polynom, denn ein Polynom darf keine negative Potenz von $x$, hier $-2$, enthalten.

**Lösung von Aufgabe 2.7:** Der Funktionswert $p(0)=117$ ist positiv, während beispielsweise die Werte $p(-1000)$ und $p(1000)$ negativ sind, also muss dazwischen je eine Nullstelle sein, insgesamt also zwei.

**Lösung von Aufgabe 2.8:** $f$ ist wegen des Terms $x^x$ keine rationale Funktion, denn als Potenzen von $x$ dürfen nur natürliche Zahlen auftreten. $g$ ist dagegen eine rationale Funktion. Aus dem Definitionsbereich auszuschließen sind lediglich die Nullstelle(n) des Nenners, und davon gibt es hier nur eine, nämlich die 1; der maximale Definitionsbereich ist also $\mathbb{R}\setminus\{1\}$.

**Lösung von Aufgabe 2.9:** Die Werte können Sie folgender Tabelle entnehmen:

| a | $x=-2$ | $x=0$ | $x=1$ | $x=2$ | $x=10$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $0,5$ | 4 | 1 | $0,5$ | $0,25$ | $\approx 0,00097$ |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 2 | 0,25 | 1 | 2 | 4 | 1024 |
| 4 | 0,0625 | 1 | 4 | 16 | 1048576 |

**Lösung von Aufgabe 2.10:** Sie sollte Bank A wählen, da sie dort etwa

$$8.000 \cdot \left(1 + \frac{4.5}{100}\right)^4 \;=\; 9.540,15 \text{ Euro}\,,$$

also mehr als $9.431,07$ Euro, erhält.

**Lösung von Aufgabe 2.11:** Nun ja, streng nach Vorschrift ergibt das

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{10.000}{5.776}} \;\approx\; 0,301 \text{ Gramm}$$

**Lösung von Aufgabe 2.12:** Bei $\log_{10}(0,001)$ wird nach derjenigen Zahl gefragt, mit der man 10 potenzieren muss, um $0,001$ zu erhalten. Da man $0,001$ auch als $\frac{1}{1000}$ oder $\frac{1}{10^3}$ oder $10^{-3}$ schreiben kann, muss dies $-3$ sein.
Bei dem Ausdruck $\log_7(\sqrt[4]{7^3})$ rate ich Ihnen erst mal: keine Panik! Mit den Regeln der Potenzrechnung ermittle ich zunächst, dass $\sqrt[4]{7^3} = 7^{\frac{3}{4}}$ ist. Es wird also in der Aufgabe nach derjenigen Zahl gefragt, mit der man 7 potenzieren muss, um $7^{\frac{3}{4}}$ zu erhalten. Das beantwortet sich aber quasi von selbst, denn es muss $\frac{3}{4}$ sein, also

$$\log_7(\sqrt[4]{7^3}) = \log_7(7^{\frac{3}{4}}) = \frac{3}{4}\ .$$

**Lösung von Aufgabe 2.13:** Teil a) der Aufgabe kann man im Kopf lösen: „Halbwertszeit von 500 Jahren“ bedeutet doch gerade, dass nach jeweils 500 Jahren genau die Hälfte des zu Beginn dieses Zeitabschnitts noch vorhandenen Materials zerfallen ist. Nach den ersten 500 Jahren ist also noch die Hälfte übrig, und nach nochmals 500 Jahren die Hälfte der Hälfte, also das gewünschte Viertel. Die Lösung von Teil a) lautet also: nach 1000 Jahren.
Bei b) wird's mit dem Kopfrechnen schon schwieriger, hier würde ich zur Benutzung der Formel raten: Wir suchen dasjenige $x$, für das

$$\left(\frac{1}{2}\right)^x \;=\; \frac{1}{5}$$

ist, also $x = \log_{\frac{1}{2}}(\frac{1}{5})$. Wenn ich hierzu beispielsweise den im Text vorgeschlagenen Umweg über den Zehnerlogarithmus gehe, erhalte ich

$$x = \log_{\frac{1}{2}}(\frac{1}{5}) \;=\; \frac{\log_{10}(\frac{1}{5})}{\log_{10}(\frac{1}{2})} \;=\; \frac{-0,69897}{-0,30103} \;\approx\; 2,3219\ .$$

Nach ungefähr $2,3219$ Halbwertszeiten, also $2,3219 \cdot 500 = 1160,96$ Jahren ist also noch ein Fünftel übrig.

# Lösungen der Übungsaufgaben in Kapitel 3

**Lösung von Aufgabe 3.1:** Es ist die Gleichung

$$12 + 6x = 60$$

zu lösen, also

$$6x = 48$$

oder $x = 8$. Es können also 8 Menschen eine Pizza essen, d.h., Sie können 8 Gäste einladen, wenn Sie selbst hungern, oder 7, wenn Sie auch eine Pizza essen.

**Lösung von Aufgabe 3.2:**

a) Zur Lösung von

$$2(x-3) + 4 = 3(1-x)$$

multipliziere ich zunächst beide Seiten aus, das ergibt

$$2x - 6 + 4 = 3 - 3x\,,$$

und sortiere dann nach $x$-Termen und Konstanten. Es folgt

$$5x = 5\,,$$

also $x = 1$.

b) Auch bei der Gleichung

$$3(x+1)(1-x) = 1 - x - 3x^2$$

multipliziert man zunächst aus, hier nur die linke Seite, und erhält

$$3 - 3x^2 = 1 - x - 3x^2\ .$$

Zum Glück fällt also der $x^2$-Term heraus, und es verbleibt zu lösen

$$3 = 1 - x\,,$$

also $x = -2$.

c) Die Gleichung

$$\frac{x-1}{2(x+3)} = \frac{x}{2x-1}$$

sieht schlimmer aus als sie ist (sonst stünde sie auch nicht als Übungsaufagbe hier). Nachdem man mit dem Hauptnenner $2(x+3)(2x-1)$ durchmultipliziert hat, lautet die Gleichung

$$(x-1)(2x-1) = 2x(x+3)\ .$$

Nun fasse ich mich etwas kürzer: Ausmultiplizieren und Sortieren zeigt, dass der $x^2$-Term wegfällt, und es bleibt die Gleichung

$$-9x + 1 \;=\; 0$$

mit der Lösung $x = \frac{1}{9}$.

**Lösung von Aufgabe 3.3:**

a) Es ist die quadratische Gleichung

$$x^2 + \sqrt{8}x + 2 = 0$$

zu lösen. Hier wende ich stur die $p$-$q$-Formel an:

$$x_{1/2} \;=\; -\frac{\sqrt{8}}{2} \pm \sqrt{\frac{8}{4} - 2} \;=\; -\frac{\sqrt{8}}{2}\ .$$

Diese Gleichung hat also nur eine Lösung, und zur Not kann man die auch so stehen lassen, aber es wird viel eleganter, wenn man weiß, dass $\sqrt{8} = 2\sqrt{2}$ ist, denn dann lautet die Lösung einfach: $x_1 = x_2 = -\sqrt{2}$.

b) Die zu lösende Gleichung lautet hier

$$x^2 + (3-\sqrt{3})x - \sqrt{27}.$$

Auch in diesem Fall hilft es - ähnlich wie bei a) - wenn man sieht, dass

$$\sqrt{27} \;=\; \sqrt{3^3} \;=\; 3\sqrt{3}$$

ist; ich zeige Ihnen gleich, wo man das brauchen kann. Zunächst wende ich wieder mal die $p$-$q$-Formel an und erhalte

$$x_{1/2} \;=\; -\frac{3-\sqrt{3}}{2} \pm \sqrt{\frac{(3-\sqrt{3})^2}{4} + \sqrt{27}}\ .$$

Ziemlich üble Sache, aber nicht entmutigen lassen! Wenn ich nämlich jetzt den quadratischen Term unter der Wurzel ausmultipliziere und gleichzeitig die gerade gezeigte Identität für $\sqrt{27}$ benutze, wird der ganze Radikand zu

$$\frac{(3-\sqrt{3})^2}{4} + \sqrt{27} \;=\; \frac{9 - 6\sqrt{3} + 3}{4} + 3\sqrt{3} \;=\; \frac{12 + 6\sqrt{3}}{4}\ .$$

Die Wurzel hieraus ist, da

$$(3+\sqrt{3})^2 = 12 + 6\sqrt{3}$$

ergibt, gerade

$$\frac{3+\sqrt{3}}{2}\ .$$

Insgesamt ergibt sich

$$x_{1/2} \;=\; -\frac{3-\sqrt{3}}{2} \pm \frac{3+\sqrt{3}}{2}\ ,$$

also $x_1 = \sqrt{3}$ und $x_2 = -3$.

**Lösung von Aufgabe 3.4:**
a) Die zu lösende Gleichung lautet hier

$$(x-1)^2 + x(x+2) \;=\; 2(x-1)(x+2).$$

Multipliziert man diese aus, so ergibt sich

$$x^2 - 2x + 1 + x^2 + 2x \;=\; 2x^2 + 2x - 4\,,$$

und nach Zusammenfassen

$$2x \;=\; 5\,.$$

Dies ist eine lineare Gleichung mit der Lösung $x = 5/2$.
b) Multipliziert man die zu lösende Gleichung

$$\frac{x-1}{x+2} + \frac{x}{x-1} \;=\; \frac{2x^2+1}{(x+2)(x-1)}$$

mit dem Hauptnenner $(x+2)(x-1)$ durch, so ergibt sich

$$(x-1)^2 + x(x+2) \;=\; 2x^2 + 1\,,$$

was nach Ausmultiplizieren der linken Seite zu

$$0 \;=\; 0$$

wird. Die Gleichung ist somit allgemeingültig, wird also von jeder reellen Zahl $x$ gelöst, allerdings darf man die Nullstellen der Nenner nicht einsetzen. Die Lösungsmenge ist somit $\mathbb{L} = \mathbb{R} \setminus \{-2, 1\}$.

**Lösung von Aufgabe 3.5:**
a) Bei der Zählerfunktion $x^3 + 7x^2 - 60x$ kann man zunächst $x$ ausklammern; die verbleibende Funktion $x^2 + 7x - 60$ hat die Nullstellen $-12$ und 5, wie Sie z.B. mit der $p$-$q$-Formel herausbekommen. Der Zähler kann folglich faktorisiert werden zu

$$x^3 + 7x^2 - 60x \;=\; x(x+12)(x-5)\ .$$

Ebenso findet man, dass der Nenner $3x^2 - 27x + 60$ die Nullstellen 4 und 5 hat, also in der Form

$$3(x-4)(x-5)$$

faktorisiert werden kann. Zähler und Nenner enthalten also den gemeinsamen Faktor $(x-5)$, und es ergibt sich

$$r_1(x) \;=\; \frac{x(x+12)(x-5)}{3(x-4)(x-5)} \;=\; \frac{x(x+12)}{3(x-4)}\ .$$

b) Bei der Funktion

$$r_2(x) \;=\; \frac{x^2-4}{2x-4}$$

geht es schneller: Der Zähler kann nach der binomischen Formel in $(x-2)(x+2)$ faktorisiert, der Nenner in $2(x-2)$ zerlegt werden. Es folgt

$$r_2(x) = \frac{x^2-4}{2x-4} = \frac{(x-2)(x+2)}{2(x-2)} = \frac{x+2}{2}\,.$$

**Lösung von Aufgabe 3.6:** Man multipliziert zunächst die gegebene Gleichung mit dem Nenner $x^2+1$ durch; dies ergibt

$$-2(1+x)+x^2(x^2+1) = (x^2-1)(x^2+1),$$

also

$$-2-2x+x^4+x^2 = x^4-1.$$

Hier kann man den $x^4$-Term eliminieren und den Rest auf die linke Seite bringen, was zur quadratischen Gleichung

$$x^2-2x-1 = 0$$

führt. Diese hat die im Lösungsteil angegebenen Lösungen $x_{1/2} = 1 \pm \sqrt{2}$.

**Lösung von Aufgabe 3.7:** In jedem Aufgabenteil substituiere ich zunächst $u = x^2$ und untersuche die sich ergebende quadratische Gleichung.

a) Für die substituierte Gleichung

$$u^2+u+1 = 0$$

liefert die $p$-$q$-Formel

$$u_{1/2} = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4}-1}\,,$$

die substituierte und damit auch die Ausgangsgleichung hat somit keine Lösung.

b) Substitution und gleichzeitige Division durch 2 liefert

$$u^2+16u-225 = 0$$

mit den Lösungen

$$u_{1/2} = -8 \pm \sqrt{64+225} = -8 \pm 17\,,$$

also $u_1 = -25$ und $u_2 = 9$. Nur aus $u_2$ kann man noch Wurzeln ziehen und erhält die Lösungen $x_{2,1} = -3$, $x_{2,2} = 3$.

c) Hier ist die substituierte Gleichung

$$u^2-13u+36 = =$$

zu lösen; man erhält $u_1 = 4$ und $u_2 = 9$. Aus beiden lassen sich Wurzeln ziehen, und die endgültigen Lösungen sind $x_{1,1} = -2$, $x_{1,2} = 2$, $x_{2,1} = -3$, $x_{2,2} = 3$.

**Lösung von Aufgabe 3.8:**
a) Die Gleichung

$$\sqrt{x+4} \;=\; \sqrt{x^2+x}$$

wird quadriert; das liefert

$$x+4 \;=\; x^2+x\,,$$

also

$$x^2 \;=\; 4$$

mit den Lösungen $x_1 = -2$, $x_2 = 2$.
b) Bei der Gleichung

$$\sqrt{x}+\sqrt{5-x} \;=\; \sqrt{2x+7}$$

muss mehr gearbeitet werden; erstes Quadrieren liefert

$$x + 2\sqrt{x(5-x)} + (5-x) \;=\; 2x+7\ .$$

Das fasst man zusammen zu

$$2\sqrt{x(5-x)} \;=\; 2x+2\,,$$

teilt durch 2 und quadriert, was liefert

$$x(5-x) \;=\; x^2+2x+1\ .$$

In Normalform gebracht ergibt dies die quadratische Gleichung

$$x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{1}{2} \;=\; 0$$

mit den Lösungen $x_1 = 1$ und $x_2 = \frac{1}{2}$. Setzt man $x_1 = 1$ in die Ausgangsgleichung ein, so erhält man auf beiden Seiten den Wert 3. Setzt man dagegen $x_2 = \frac{1}{2}$ ein, so ergeben sich unterschiedliche Werte; dies ist also eine Scheinlösung.
c) Quadriert man die Gleichung

$$\sqrt{x-\sqrt{x+2}} \;=\; 2$$

so erhält man

$$x-\sqrt{x+2} \;=\; 4$$

also

$$x-4 \;=\; \sqrt{x+2}\ .$$

Das wird unverdrossen nochmal quadriert, was liefert

$$x^2-8x+16 \;=\; x+2\,,$$

also

$$x^2-9x+14 \;=\; 0$$

mit den Lösungen $x_1 = 7$ und $x_2 = 2$. Während $x_1 = 7$ auch die Ausgangsgleichung löst, trifft dies für $x_2 = 2$ nicht zu, $x_2$ ist also eine Scheinlösung.

**Lösung von Aufgabe 3.9:**
a) Die Gleichung
$$7^x = 17^x$$
wird offensichtlich von $x = 0$ gelöst, denn dann steht auf beiden Seiten der Wert 1.
b) Die Gleichung
$$2^{x+1} + 16 - 12 \cdot 2^{x-1} = 0$$
bringe ich zunächst in die Form
$$4 \cdot 2^{x-1} + 16 - 12 \cdot 2^{x-1} = 0\,,$$
zusammengefasst also
$$16 - 8 \cdot 2^{x-1} = 0\,.$$
Es muss also
$$2^{x-1} = 2$$
sein, und damit $x = 2$.
c) Bei der Gleichung
$$2^{x+1} + 2^{x+2} = 2 \cdot 3^{x-1}$$
benutze ich die Identität $2^{x+2} = 2 \cdot 2^{x+1}$, was liefert
$$3 \cdot 2^{x+1} = 2 \cdot 3^{x-1}\,.$$
Logarithmieren dieser Gleichung ergibt
$$\log 3 + (x+1)\log 2 = \log 2 + (x-1)\log 3\ .$$
Sortiert man dieses nach $x$ behafteten Termen und Konstanten, so erhält man
$$x = \frac{-2\log 3}{\log 2 - \log 3} \approx 5,419\ .$$

**Lösung von Aufgabe 3.10:** Es ist die Gleichung
$$\left(1 + \frac{4}{100}\right)^x = 1.000.000$$
nach $x$ aufzulösen. Da hilft nur Logarithmieren, was ergibt
$$x = \log_{1,04}(1.000.000)\,.$$
Da der Taschenrechner vermutlich nicht den Logarithmus zur Basis $1,04$ bereit hält, benutze ich die im Text angegebene Formel zur Umrechung von Logarithmen und erhalte
$$x = \frac{\log_{10}(1.000.000)}{\log_{10}(1,04)} \approx 352,25\,.$$

**Übungsaufgabe 3.11:**
a) Bei der Ungleichung
$$2x + 1 \ < \ 3x - 5$$
gibt es keinen Trick und doppelten Boden: Man sortiert einfach und erhält
$$-x \ < \ -6\,,$$
also
$$\mathbb{L} = \{x \in \mathbb{R} \,|\, x > 6\}\,.$$
b) Bei
$$2(x + 1)(x - 2) \ < \ 2x^2 + 5$$
multipliziere ich die linke Seite aus und erhalte
$$2x^2 - 2x - 4 \ < \ 2x^2 + 5\,,$$
also
$$-2x \ < \ 9$$
und somit
$$\mathbb{L} = \{x \in \mathbb{R} \,|\, x > -9/2\}\,.$$
c) Bei der hier zu lösenden Ungleichung
$$\frac{1 - 2x}{x + 1} \ < \ -1$$
muss ich eine Fallunterscheidung danach machen, ob der Nenner der linken Seite positiv oder negativ ist.
Fall 1: Ist $x+1 > 0$, also $x > -1$, so ändert sich das Ungleichungszeichen nicht, wenn ich mit $x + 1$ durchmultipliziere; es ergibt sich
$$1 - 2x \ < \ -(x + 1)\,,$$
also $-x < -2$ oder
$$x \ > \ 2\;.$$
In diesem Fall sind also alle $x$-Werte Lösungen, die größer als 2 sind; da diese dann allemal auch größer als $-1$ sind, ist hier nichts weiter zu tun.
Fall 2: Ist $x + 1 < 0$, also $x < -1$, so ändert sich das Ungleichungszeichen beim Durchmultiplizieren, und ich erhalte
$$1 - 2x \ > \ -(x + 1)\,,$$
also $-x > -2$ oder
$$x \ < \ 2\;.$$

Jetzt muss man ein wenig aufpassen: Das Ergebnis sagt zunächst, dass alle $x$ die Ungleichung erfüllen, die kleiner als 2 sind; in diesem Fall 2 sind aber nur $x$-Werte zugelassen, die kleiner als $-1$ sind, und das ist die strengere Ungleichung. Somit ist hier $x < -1$ als Ergebnis zu nehmen.
Als Endergebnis erhalte ich also die Lösungsmenge

$$\mathbb{L} \;=\; \{x \in \mathbb{R} \,|\, x < -1 \;\text{ oder }\; x > 2\}\,.$$

# Lösungen der Übungsaufgaben in Kapitel 4

**Lösung von Aufgabe 4.1:** Der Flächeninhalt $F$ eines allgemeinen Dreiecks ist die Hälfte des Produkts der Länge der Höhe $h$ mit der Länge der Seite $c$ auf die diese Höhe senkrecht steht: $F = hc/2$. Im a), b) und c)-Teil der Aufgabe kann ich als Grundseite die Strecke von $A = (0|0)$ nach $B = (4|0)$ wählen. Es gilt also $c = 4$. Für jede der Wahlen $C = (2|2), C = (0|2)$ und $C = (6|2)$ hat die auf diese Seite senkrecht stehende Höhe die Länge $h = 2$, denn die zweite Koordinate dieser Punkte ist jeweils die Zahl 2. Somit ergibt sich in diesen Fällen jeweils der Flächeninhalt $F = (4 \cdot 2)/2 = 4$. Zur Lösung des d)-Teils sollte ich mich an Heron's Formel erinnern. Diese bietet sich an, denn ich kenne hier die drei Seitenlängen des Dreiecks und mit diesen läßt sich gemäß Heron's Formel der Flächeninhalt des Dreiecks bestimmen. Ich erkenne an dieser Stelle, dass ich den Punkt $C$ zur Lösung des d)-Teils nicht explizit kennen muss. Der Abstand von $A = (0|0)$ nach $B = (4|0)$ ist $c = 4$, während nach den Vorgaben der Aufgabe die Länge der Seite von $A = (0|0)$ nach $C$ gerade $b = \sqrt{5}$ ist und die Länge der Seite von $B = (4|0)$ nach $C$ den Wert $a = \sqrt{13}$ hat. Nach Heron's Formel gilt somit für den Flächeninhalt $F$ dieses Dreiecks:

$$\begin{aligned} F &= \tfrac{1}{4}\sqrt{(a+b+c)\ (b+c-a)\ (a+c-b)\ (a+b-c)} \\ &= \tfrac{1}{4}\sqrt{(\sqrt{13}+\sqrt{5}+4)\ (\sqrt{5}+4-\sqrt{13})\ (\sqrt{13}+4-\sqrt{5})\ (\sqrt{13}+\sqrt{5}-4)}. \end{aligned}$$

Wegen der vielen Terme wäre es relativ mühevoll und fehleranfällig wenn ich jetzt alle diese Terme unter der großen Wurzel ausmultiplizieren würde. Ich mache dies etwas geschickter und einfacher, indem ich zunächst die dritte Binomische Formel verwende:

$$\begin{aligned} F &= \tfrac{1}{4}\sqrt{((\sqrt{5}+4)+\sqrt{13})\ ((\sqrt{5}+4)-\sqrt{13})\ (\sqrt{13}+(4-\sqrt{5}))\ (\sqrt{13}-(4-\sqrt{5}))} \\ &= \tfrac{1}{4}\sqrt{((\sqrt{5}+4)^2-13)\ (13-(4-\sqrt{5})^2)}. \end{aligned}$$

Jetzt kann ich die erste beziehungsweise zweite Binomische Formel für die beiden verbleibenden Quadratterme anwenden und berechne

$$F = \tfrac{1}{4}\sqrt{((5+8\sqrt{5}+16)-13)\ (13-(16-8\sqrt{5}+5))} = \tfrac{1}{4}\sqrt{(8+8\sqrt{5})\ (-8+8\sqrt{5})}$$

Hieran erkenne ich, dass ich nun für die beiden Terme unter der Wurzel jeweils die Zahl 8 ausklammern kann. Die nochmalige Verwendung der dritten Binomischen Formel ergibt schließlich das Ergebnis

$$F = \tfrac{1}{4}\sqrt{8^2\ (\sqrt{5}+1)\ (\sqrt{5}-1)} = \tfrac{8}{4}\sqrt{(5-1)} = 2\cdot\sqrt{4} = 2\cdot 2 = 4.$$

**Lösung von Aufgabe 4.2:** Die Länge der Hypotenuse des vorgegebenen, rechtwinkligen Dreieck ist hier $c = 5$ und die Fläche des Quadrats über einer der Katheten ist 16. Ist also $a$ die Länge dieser Kathete, so gilt somit $a^2 = 16$. Nach dem Satz des Pytagoras ist die Beziehung $a^2 + b^2 = c^2$ für rechtwinklige Dreiecke gültig. Hier ist $b$ die gesuchte Länge der verbleibenden Kathete. Wegen $c = 5$ ergibt sich $c^2 = 25$. Setze ich nun diese Werte für $a^2$ und $c^2$ in die durch den Satz des Pytagoras gegebenen Beziehung ein, so erhalte ich $16 + b^2 = 25$. Hieraus folgt nun $b^2 = 25 - 16 = 9$. Damit ist $b = 3$.

**Lösung von Aufgabe 4.3:** Die Summe der Längen der Katheten $a$ und $b$ soll hier 2 sein, das heißt es soll $a + b = 2$, beziehungsweise

$$b = 2 - a$$

gelten. Außerdem soll die Länge der Hypothenuse $c$ doppelt so lang wie eine der Katheten sein, das heißt es soll

$$c = 2\ a$$

gelten. Da es sich um ein rechtwinkliges Dreieck handelt, gilt nach dem Satz des Pytagoras $a^2 + b^2 = c^2$. Setze ich die beiden obigen Beziehungen zwischen $b$ und $a$, beziehungsweise $c$ und $a$ hier ein, so erhalte ich

$$a^2 + (2 - a)^2 = (2a)^2\ .$$

Die zweite Binomische Formel und Ausquadrieren der rechten Seite ergibt nun

$$a^2 + (4 - 4a + a^2) = 4a^2\ , \text{ das heißt } 2a^2 - 4a + 4 = 4a^2.$$

In dem ich Terme gleicher Ordnung auf der rechten Seite sammle erhalte ich hieraus

$$0 = 2a^2 + 4a - 4\ .$$

Ausklammern von 2 ergibt die Bedingung $2(a^2 + 2a - 2) = 0$. Mit der p-q-Formel (mit $p = 2$ und $q = -2$) bestimme ich nun die möglichen Lösungen für $a$:

$$a_1 = -\tfrac{2}{2} + \sqrt{\tfrac{2^2}{4} - (-2)} = -1 + \sqrt{3} \text{ und } a_2 = -1 - \sqrt{3}\ .$$

Die gesuchte Lösung für $a$ ist $a_1$: $a = a_1$, denn $a_2$ ist keine positive Zahl und deßhalb keine gültige Seitenlänge. Jetzt lassen sich mit den beiden obigen Beziehungen zwischen $b$ und $a$, beziehungsweise $c$ und $a$ die verbleibenden Größen $b$ und $c$ berechnen:

$$b = 2 - a = 2 - (-1 + \sqrt{3}) = 3 - \sqrt{3}, \text{ und } c = 2\ a = -2 + 2\ \sqrt{3}\ .$$

**Lösung von Aufgabe 4.4:** Die verbleibende Seite im gleichschenkligen Dreieck wird durch die auf diese senkrecht stehende Höhe in der Mitte geteilt. Ist $h$ die Länge dieser Höhe, $b$ die Länge der verbleibenden Seite und $a$ die Länge der (gleichlangen) Schenkel, so gilt nach dem Satz des Pytagoras

$$h^2 + (\frac{b}{2})^2 = a^2 \ .$$

Der Grund dafür ist, dass die Höhe das Dreieck in zwei rechtwinklige Teildreiecke unterteilt. Die Länge der Katheten dieser Dreiecke sind $h$ und $b/2$. Zudem ist die Länge der Hypotenuse dieser Teildreiecke $a$. Löse ich obige Formel nach $h$ auf, so kann ich die Länge der Höhe im gleichschenkligen Dreieck durch dessen Seitenlängen ausdrücken:

$$h = \sqrt{a^2 - \tfrac{b^2}{4}} = \sqrt{\tfrac{4a^2-b^2}{4}} = \tfrac{1}{2}\sqrt{4a^2 - b^2} \ .$$

Wende ich die Formel für den Flächeninhalt eines Dreiecks an, so erhalte ich nun durch Ersetzen von $h$:

$$F = \tfrac{hb}{2} = \tfrac{b\sqrt{4a^2-b^2}}{4} \ .$$

**Lösung von Aufgabe 4.5:** Für das vorliegenden, rechtwinklige Dreieck wurde bereits in Beispiel 4.3 die Länge $c = 2$ der Hypotenuse berechnet. Zudem ist die Länge $p = 1$ eines Hypotenusenabschnitts vorgegeben, sowie die Länge $b = \sqrt{2}$ der Kathete die keinen gemeinsamen Punkt mit diesem Hypotenusenabschnitt hat. Ich berechne die Länge des verbleibenden Hypotenusenabschnitts $q = c - p = 2 - 1 = 1$. Bezeichne ich mit $h$ die Länge der Höhe auf die Hypothenuse, so gilt nach dem Höhensatz $h^2 = pq = 1 \cdot 1 = 1$, also $h = 1$. Schließlich ermittle ich mit dem Satz des Pytagoras die Länge der verbleibenden Kathete: $a = \sqrt{c^2 - b^2} = \sqrt{4 - 2} = \sqrt{2}$.

**Lösung von Aufgabe 4.6:** Ist $\beta$ der Innenwinkel im Dreieck, der an der Kathete mit Seitenlänge $a = 3\sqrt{3}$ anliegt, so gilt

$$\tan(\beta) = \frac{b}{a} = \frac{3}{3\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Hier habe ich im letzten Schritt den Bruch mit $\sqrt{3}$ erweitert. Drücke ich INV und TAN auf meinem Taschenrechner (Gradmaß), so erhalte ich $\beta = 30°$. Da es sich um ein rechtwinkliges Dreieck handelt und die Summe der Innenwinkel eines Dreiecks stets $180°$ ist, erhalte ich den verbleibenden Winkel $\alpha = 180° - 90° - 30° = 60°$. Natürlich könnte ich nun – wenn ich das wollte – die Länge der Hypotenuse $c$ mit dem Satz des Pytagoras berechnen. Ich mache das hier aber mit Hilfe der Festlegung des Sinus. Es gilt nämlich

$$\sin(\beta) = \frac{3}{c}, \text{ beziehungsweise } c = \frac{3}{\sin(30°)} = \frac{3}{\frac{1}{2}} = 6 \ .$$

**Lösung von Aufgabe 4.7:** Ist $h_a$ die Länge der Höhe auf die Seite mit Länge $a = 4$, so gilt die folgende Beziehung

$$\sin(30°) = \frac{h_a}{5},$$

denn diese Höhe ist die dem Winkel $\alpha = 30°$ gegenüberliegende Kathete eines rechwinkligen Dreiecks mit Hypotenusenlänge $b = 5$. Löse ich diese Formel nach $h_a$ auf, so erhalte ich

$$h_a = 5\ \sin(30°) = 5 \cdot \frac{1}{2} = \frac{5}{2}.$$

Der Flächeninhalt $F$ dieses Dreiecks ist somit nach der allgemeinen Formel

$$F = \frac{h_a a}{2} = \frac{\frac{5}{2} \cdot 4}{2} = 5\ .$$

Alternativ kann ich zunächst $h_b$ die Länge der Höhe auf die Seite mit Länge $b = 5$, berechnen:

$$h_b = 4\ \sin(30°) = 2,$$

und dann die allgemeine Flächeninhaltsformel für das Dreieck – diese Höhe benutzend – anwenden:

$$F = \frac{h_b b}{2} = \frac{2 \cdot 5}{2} = 5\ .$$

**Lösung von Aufgabe 4.8:** a) Im Intervall $[0, 2\pi]$ besitzt die Sinus-Funktion sin genau an der Stelle $x = \pi/2$ den Wert 1: $\sin(\pi/2) = 1$ und $\sin(x) \neq 1$, falls $x \in [0, 2\pi] \setminus \{\pi/2\}$. Außerdem wiederholen sich die Werte des Sinus $2\pi$-periodisch: $\sin(x) = \sin(x + 2\pi)$ für alle $x$. Dies bedeutet beispielsweise, dass die Sinus-Funktion im Intervall $[2\pi, 4\pi]$ genau an der Stelle $x = (5/2)\pi = 2\pi + \pi/2$ den Wert 1 hat: $\sin((5/2)\pi) = 1$. Im Intervall $[-2\pi, 0]$ hat der Sinus genau an der Stelle $x = -(3/2)\pi = -2\pi + \pi/2$ den Wert 1: $\sin(-(3/2)\pi) = 1$. Allgemein besitzt die Sinus-Funktion somit für jede ganze Zahl $k$ im Intervall $[2k\pi, (2k + 2)\pi]$ genau an der Stelle $x = 2k\pi + \pi/2$ den Wert 1: $\sin(2k\pi + \pi/2) = 1$. Da die Vereinigung aller dieser Intervalle den reellen Zahlenbereich vollständig überdecken sind dies genau die Stellen an denen der Sinus den Wert 1 hat. Es gilt also

$$\{x \text{ reell } : \sin(x) = 1\} = \{x = 2k\pi + \pi/2 : \ k \text{ ganz }\}\ .$$

b) Im Intervall $[0, 2\pi]$ besitzt die Cosinus-Funktion cos genau an der Stelle $x = \pi$ den Wert $-1$: $\cos(\pi) = -1$ und $\cos(x) \neq -1$, falls $x \in [0, 2\pi] \setminus \{\pi\}$. Außerdem wiederholen sich die Werte des Cosinus $2\pi$-periodisch: $\cos(x) = \cos(x + 2\pi)$ für alle $x$. Dies bedeutet beispielsweise, dass die Cosinus-Funktion im Intervall $[2\pi, 4\pi]$ genau an der Stelle $x = 3\pi = 2\pi + \pi$ den Wert $-1$ hat: $\cos(3\pi) = -1$. Im Intervall $[-2\pi, 0]$ hat der Cosinus genau an der Stelle $x = -\pi = -2\pi + \pi$ den Wert $-1$: $\cos(-\pi) = -1$. Allgemein besitzt die Cosinus-Funktion somit für jede ganze Zahl $k$ im Intervall $[2k\pi, (2k + 2)\pi]$ genau an der Stelle $x = 2k\pi + \pi$ den Wert $-1$: $\cos(2k\pi + \pi) = -1$.

Das selbe Argument wie in a) zeigt mir nun, dass dies genau die Stellen sind an denen der Cosinus den Wert $-1$ hat. Es gilt also

$$\{x \text{ reell } : \cos(x) = 1\} = \{x = 2k\pi + \pi : \; k \text{ ganz }\} \; .$$

**Lösung von Aufgabe 4.9:** Die Tangens-Funktion $\tan(x) = \sin(x)/\cos(x)$ ist für alle reellen Zahlen $x$ sinnvoll definiert an denen der Nenner $\cos(x)$ nicht verschwindet, das heißt alle $x$ mit $\cos(x) \neq 0$. Anders ausgedrückt bedeutet dies, dass der Tangens nur an den Stellen $x$ nicht definiert ist an denen eine Nullstelle der Cosinus-Funktion vorliegt. Im Intervall $[0, \pi]$ besitzt die Cosinus-Funktion cos genau an der Stelle $x = \pi/2$ den Wert 0 und im Intervall $[\pi, 2\pi]$ verschwindet die Cosinus-Funktion genau an der Stelle $x = (3/2)\pi$. Außerdem wiederholen sich die Werte des Cosinus $2\pi$-periodisch: $\cos(x) = \cos(x + 2\pi)$ für alle $x$. Dies bedeutet beispielsweise, dass die Cosinus-Funktion im Intervall $[2\pi, 4\pi]$ genau die Nullstellen $x = (5/2)\pi$ und $x = (7/2)\pi$ besitzt, während sie im Intervall $[-2\pi, 0]$ genau an den beiden Stellen $x = -\pi/2$ und $x = -(3/2)\pi$ verschwindet. Allgemein besitzt die Cosinus-Funktion somit für jede ganze Zahl $k$ im Intervall $[k\pi, (k + 1)\pi]$ genau an der Stelle $x = k\pi + \pi/2$ den Wert 0. Das selbe Argument wie in der Lösung von Übungsaufgabe 4.8 a) zeigt mir nun, dass dies genau die Stellen sind an denen der Cosinus den Wert 0 hat. Es gilt also, dass der Tangens für alle reellen Zahlen aus der Menge

$$\{x : \; x \neq k\pi + \pi/2 : \; k \text{ ganz }\}$$

sinnvoll definiert ist.

**Lösung von Aufgabe 4.10:** Hier sollten Sie die Gültigkeit der Formel

$$\cos(x) + \cos(y) = 2 \cos(\tfrac{x+y}{2}) \cos(\tfrac{x-y}{2})$$

für alle reellen $x$ und $y$ nachweisen. Das zweite Additionstheorem lautet

$$\cos(a + b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b).$$

Setze ich hier $a = (x + y)/2$ und $b = (x - y)/2$, so folgt aus diesem wegen $a + b = x$, beziehungsweise $a - b = y$:

$$\begin{aligned}
\cos(x) &= \cos(\overbrace{\tfrac{x+y}{2}}^{a} + \overbrace{\tfrac{x-y}{2}}^{b}) = \cos(\tfrac{x+y}{2})\cos(\tfrac{x-y}{2}) - \sin(\tfrac{x+y}{2})\sin(\tfrac{x-y}{2}) \\
\cos(y) &= \cos(\underbrace{\tfrac{x+y}{2}}_{a} + \underbrace{\tfrac{y-x}{2}}_{-b}) = \cos(\tfrac{x+y}{2})\cos(\tfrac{y-x}{2}) - \sin(\tfrac{x+y}{2})\sin(\tfrac{y-x}{2}).
\end{aligned}$$

Da die Cosinus-Funktion $\cos(z) = \cos(-z)$ erfüllt und die Sinus-Funktion die Eigenschaft $\sin(z) = -\sin(-z)$ für alle $z$ besitzt gelten die Relationen

$$\cos(\tfrac{y-x}{2}) = \cos(\tfrac{x-y}{2}) \text{ und } -\sin(\tfrac{y-x}{2}) = \sin(\tfrac{x-y}{2}).$$

Hier habe ich $z$ durch $(y-x)/2$ ersetzt und $-(y-x)/2 = (x-y)/2$ verwendet. Setze ich diese Beziehungen in die zweite Gleichung für $\cos(y)$ oben ein, so erhalte ich

$$\cos(y) \quad = \quad \cos(\tfrac{x+y}{2})\cos(\tfrac{x-y}{2}) + \sin(\tfrac{x+y}{2})\sin(\tfrac{x-y}{2}).$$

Addiere ich nun $\cos(x) = \cos(\frac{x+y}{2})\cos(\frac{x-y}{2}) - \sin(\frac{x+y}{2})\sin(\frac{x-y}{2})$ und $\cos(y)$ zusammen, so sehe ich, dass sich die Produkte der Sinusterme in der Summe aufgrund der unterschiedlichen Vorzeichen gegenseitig aufheben und gleichzeitig jeweils die gleichen Cosinusterme auftreten. Es folgt somit die Behauptung.

**Lösung von Aufgabe 4.11:** Der Cosinussatz besagt, dass die Beziehungen

$$\begin{aligned}
(2y)^2 &= (2y)^2 + (3y)^2 - 2(2y)(3y)\cos(\alpha),\\
(2y)^2 &= (2y)^2 + (3y)^2 - 2(2y)(3y)\cos(\beta),\\
(3y)^2 &= (2y)^2 + (2y)^2 - 2(2y)(2y)\cos(\gamma)
\end{aligned}$$

gültig sind. Ich rechne dies weiter aus

$$\begin{aligned}
4y^2 &= 4y^2 + 9y^2 - 12y^2\cos(\alpha),\\
4y^2 &= 4y^2 + 9y^2 - 12y^2\cos(\beta),\\
9y^2 &= 4y^2 + 4y^2 - 8y^2\cos(\gamma),
\end{aligned}$$

fasse dann die Terme die $y^2$ enthalten zusammen

$$-9y^2 \quad = \quad -12y^2\cos(\alpha),\ -9y^2 = -12y^2\cos(\beta),\ y^2 = -8y^2\cos(\gamma),$$

und isoliere schließlich die Cosinus-Terme

$$\tfrac{3}{4} \quad = \quad \cos(\alpha),\ \tfrac{3}{4} = \cos(\beta),\ -\tfrac{1}{8} = \cos(\gamma),$$

indem ich auf beiden Seiten durch $y^2 \neq 0$ teile. Der letzte Schritt hat mir gezeigt, dass die Innenwinkel des Dreiecks unabhängig von $y$ sind, denn $y$ taucht jetzt gar nicht mehr in den Gleichungen auf. Durch Verwendung des Taschenrechners (Drücken von INV und COS im Gradmaß) bestimme ich schließlich die näherungsweisen Innenwinkel $\alpha = \beta \approx 41.41°$ und $\gamma \approx 97.18°$.

**Lösung von Aufgabe 4.12:** Die Antwort auf die gestellte Frage lautet: Nein! Ich betrachte beispielsweise die vorgegebenen Seitenlängen $a = 1, b = 2$ und $c = 3$. Nehme ich nun an es gibt ein Dreieck mit dieses Seitenlängen, so müßte gemäß der Dreiecksungleichung vom Beginn des Kapitels 4 die Bedingung $a + b > c$ gelten. Dies ist aber für die vorgegebenen Längen *nicht* der Fall, denn es gelten hier $a + b = 1 + 2 = 3$ und $c = 3$.

**Lösung von Aufgabe 4.13:** Die Lösung der Aufgabe gelingt durch Anwendung des Sinussatz. Ich berechne zunächst den der Seite mit Länge $b$ gegenüberliegenden Winkel $\beta$. Nach dem Sinussatz gilt

$$\frac{\sin(\alpha)}{\sin(\beta)} = \frac{a}{b}, \text{ das heißt } \sin(\beta) = \frac{b}{a}\ \sin(\alpha).$$

Da neben $b = 8$ auch $a = 2$ und $\alpha = 10°$ vorgegeben sind, erhalte ich durch Einsetzen

$$\sin(\beta) = \frac{8}{2}\ \sin(10°) = 4\ \sin(10°) \approx 0.6946.$$

Somit liefert das Drücken von INV und SIN (im Gradmaß) auf dem Taschenrechner die folgende Näherung an den gesuchten Winkel $\beta \approx 43.99°$. Da die Summe der Innenwinkel eines Dreiecks stets 180° ist berechne ich den verbleibenden Winkel $\gamma = 180° - \alpha - \beta \approx 180° - 10° - 43.99° = 126.01°$. Hiermit kann ich nun schließlich die verbleibende Seitenlänge näherungsweise ausrechnen, indem ich den Sinussatz in der Form

$$\frac{\sin(\alpha)}{\sin(\gamma)} = \frac{a}{c}, \text{ das heißt } c = a\ \frac{\sin(\gamma)}{\sin(\alpha)},$$

nochmals anwende. Ich berechne

$$c \approx 2\ \frac{\sin(126.01°)}{\sin(10°)} \approx 9.3167.$$

Betrachte ich nun die Situation bei der die selben beiden Seitenlängen $a = 2$ und $b = 8$ vorgegeben sind, aber für den der Seite mit Länge $a$ gegenüberliegenden Innenwinkel $\alpha = 40°$ gefordert ist, so stelle ich mit der selben Überlegung wie eingangs der obigen Lösung fest, dass die Bedingung

$$\sin(\beta) = 4\ \sin(40°) \approx 2.5712$$

gültig sein müßte. Dies kann aber nicht sein, denn die Werte des Sinus bewegen sich zwischen $-1$ und 1, das heißt $|\sin(\alpha)| \leq 1$ für alle $\alpha$. Hieraus folgt, dass ein solcher Winkel $\beta$ nicht konstruierbar ist und dies bedeutet, dass ein ebenes Dreieck mit Seitenlängen $a = 2$ und $b = 8$ und $\alpha = 40°$ nicht existieren kann.

**Lösung von Aufgabe 4.14:** Ich betrachte zwei Seiten eines Dreiecks $\Delta$ – sagen wir mit den Längen $b$ und $c$, und der diese beiden Seiten einschließende Winkel $\alpha$ dieses Dreiecks. Die Höhe mit Länge $h_b$ auf die Seite mit Länge $b$ zerlegt $\Delta$ in zwei rechtwinklige Teildreiecke. Für eines dieser Teildreiecke ist die Seite mit Länge $c$ die Hypotenuse. Zudem ist die dem Winkel $\alpha$ gegenüberliegenden Seite dieses Teildreiecks die Höhe mit Länge $h_b$. Aus der Festlegung des Sinus als Quotient von Gegenkathete und Hypotenuse erhalte ich nun

$$\sin(\alpha) = \frac{h_b}{c}, \text{ das heißt } h_b = c\ \sin(\alpha).$$

Gemäß der allgemeinen Formel für den Flächeninhalt $F$ von $\Delta$ komme ich jetzt auf

$$F = \frac{b\ h_b}{2} = \frac{b\ c}{2}\ \sin(\alpha).$$

Die unterhalb des Sinussatz erwähnte Beziehung

$$\frac{a}{\sin(\alpha)} = 2r, \text{ das heißt } \sin(\alpha) = \frac{a}{2r},$$

mit dem Umkreisradius $r$ von $\Delta$, ergibt dann durch Einsetzen in obige Formel

$$F = \frac{bc}{2}\ \frac{a}{2r} = \frac{abc}{4r}\ .$$

**Lösung von Aufgabe 4.15:** Betrachte ich ein Parallelogramm wie in Abbildung 4.15, so gelten nach den Voraussetzungen der Aufgabe mit den dortigen Bezeichnungen $a = 5,\ b = 3$ und $\beta = 120°$. Ich berechne zunächst den verbleibenden Winkel im Parallelogramm $\alpha = 180° - \beta = 180° - 120° = 60°$. Die Länge $d$ der Diagonale im Parallelogramm bestimmt sich allgemein gemäß der Formel

$$d = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos(\alpha)}\ .$$

Setze ich hier die speziellen Werte für $a,\ b$ und $\alpha$ ein so erhalte ich

$$d = \sqrt{5^2 + 3^2 - 2 \cdot 5 \cdot 3 \cdot \cos(60°)} = \sqrt{25 + 9 - 30 \cdot \frac{1}{2}} = \sqrt{34 - 15} = \sqrt{19} \approx 4.3589\ .$$

Der Flächenininhalt $F$ eines Parallelogramms ist allgemein durch die Formel

$$F = \sin(\alpha)\ ab$$

gegeben. Setze ich hier ebenfalls die speziellen Werte für $a,\ b$ und $\alpha$ ein, so berechne ich

$$F = \sin(60°)\ 3 \cdot 5 = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 15 \approx 12.9904\ .$$

**Lösung von Aufgabe 4.16:** Zur Erklärung der Lösung verwende ich Abbildung 1. Diese zeigt, dass der Flächeninhalt eines Drachens die Hälfte des Flächeninhalts des in dieser Abbildung eingezeichneten Rechtecks ist. Die Seitenlängen dieses Rechtecks sind gerade die Längen $d_1$ und $d_2$ der beiden Diagonalen im Drachen und somit ist dessen Flächeninhalt $d_1 d_2$. Der Flächeninhalt des Drachens ist somit durch die Formel $(d_1 d_2)/2$ gegeben.

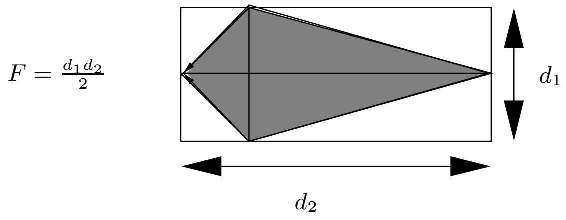


Abbildung 1: Der Flächeninhalt $F$ eines Drachens (graue Fläche) mit Diagonalen der Länge $d_1$ und $d_2$ ist die Hälfte des Flächeninhalts eines Rechtecks mit Seitenlängen $d_1$ und $d_2$.

**Lösung von Aufgabe 4.17:** Der Flächeninhalt $F$ eines Trapez mit Seitenlängen $a$ und $b$ der parallelen Seiten und Höhelänge $h$ ist allgemein durch die Formel

$$F = (a + b)\ \frac{h}{2}$$

gegeben. In dieser Aufgabe sind für ein Trapez $\diamondsuit$ die Größen $a = 6$ und $b = 4$ vorgegeben, so dass man lediglich noch die Länge der Höhe $h$ benötigt. Diese bestimme ich durch Verwendung der zusätzlichen Vorgaben, dass die Seite mit Länge $a$ einen Winkel von $\alpha = 45°$ mit einer Seite von $\diamondsuit$ der Länge $c = \sqrt{2}$ einschließt. Aus der Festlegung des Sinus folgt nämlich

$$\sin(\alpha) = \frac{h}{c},\ \text{das heißt } h = \sin(\alpha)c\ .$$

Somit erhalte ich

$$h = \sin(45°)\sqrt{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{2} = \frac{2}{2} = 1,$$

und Einsetzen in die obige, allgemeine Flächeninhaltsformel des Trapez ergibt

$$F = \frac{(6+4)\ 1}{2} = \frac{10}{2} = 5\ .$$

**Lösung von Aufgabe 4.18:** Vorgegeben ist hier ein Trapez, bei dem eine der beiden parallelen Seiten die selbe Länge $h$ wie die Höhe auf diese Seite besitzt, also $a = h$ gilt und die verbleibende, parallele Seite doppelt so lang ist: $b = 2\ h$. Zudem soll der Flächeninhalt dieses Trapez $F = 1$ sein. Mit diesen Informationen kann ich $h$ bestimmen, indem ich $a$ und $b$, sowie $F$ in der allgemeinen Flächeninhaltsformel für das Trapez ersetze

$$\overbrace{1}^{F} = (\overbrace{h}^{a} + \overbrace{2\ h}^{b})\ \frac{h}{2},$$

das heißt

$$1 = \frac{3}{2}\ h^2.$$

Löse ich nach $h$ auf, so erhalte ich nach Multiplikation der letzten Gleichung mit $2/3$

$$h^2 = \frac{2}{3},$$

also

$$h = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{2}\sqrt{3}}{3} = \frac{\sqrt{2\cdot 3}}{3} = \frac{\sqrt{6}}{3}\ .$$

Damit berechnen sich die Längen $a$ und $b$ der parallelen Seiten des Trapez wegen des vorausgesetzten Zusammenhangs zur Länge der Höhe $h$ als $a = h = \sqrt{6}/3$ und $b = 2h = (2\sqrt{6})/3$.
Ich bestimme nun die Länge $c$ der beiden verbleibenden Seiten des Trapez. Diese ist jeweils gleich lang, da ein gleichschenkliges Trapez vorliegt. Ich betrachte hierzu ein rechtwinkliges Dreieck dessen Hypothenuse eine der verbleibenden Seiten des Trapez ist. Weiter soll eine Kathete dieses Dreiecks die Höhe auf die Seite der Länge $b = 2h$ durch den Schnittpunkt der Seite mit Länge $a = h$ mit dieser verbleibenden Seite sein. Nach dem Satz des Pytagoras gilt dann der folgende Zusammenhang:

$$(\frac{h}{2})^2 + h^2 = c^2 \text{ das heißt } \overbrace{(\frac{1}{4} + 1)}^{=\frac{5}{4}}\ h^2 = c^2\ .$$

Löse ich dies nach $c$ auf, indem die Wurzel ziehe, so erhalte ich wegen $h = \sqrt{6}/3$:

$$c = \sqrt{\frac{5}{4}}\ h = \frac{\sqrt{5}}{2}\frac{\sqrt{6}}{3} = \frac{\sqrt{5\cdot 6}}{2\cdot 3} = \frac{\sqrt{30}}{6}\ .$$

Aus der Festlegung des Sinus folgt bei nochmaliger Betrachtung des oben beschriebenen Dreiecks die Beziehung

$$\sin(\alpha) = \frac{h}{c},$$

wobei $\alpha$ der von den Seiten der Länge $b$ und $c$ eingeschlossene Winkel im Trapez ist. Setze ich hier die oben ermittelten Werte für $h$ und $c$ ein, so gelange ich auf

$$\sin(\alpha) = \frac{\frac{\sqrt{6}}{3}}{\frac{\sqrt{30}}{6}} = \frac{\sqrt{6}\cdot 6}{\sqrt{6\cdot 5}\cdot 3} = \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2}{\sqrt{5}}\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = \frac{2}{5}\sqrt{5} \approx 0.8944.$$

Nachfolgendes Drücken von INV und SIN auf meinem Taschenrechner (im Gradmaß) hilft mir den folgenden Näherungswert zu ermitteln: $\alpha \approx 63.43°$. Weil das Trapez gleichschenklig ist treten für dieses nur zwei unterschiedliche Innenwinkel auf. Andererseits ist die Summe der Innenwinkel in jedem Viereck 360°, so dass sich der verbleibende Innenwinkel $\beta$ des vorliegenden Trapez wie folgt näherungsweise berechnet: $\beta = 180° - \alpha \approx 116.57°$.

**Lösung von Aufgabe 4.19:** a) Die allgemeine Formel für den Flächeninhalt $F_N$ des regelmäßiges $N$-Eck lautet

$$F_N = N\ (\frac{a^2}{2}\ \sin(\tfrac{360^\circ}{N})),$$

wobei $a$ im folgenden Zusammenhang mit der Seitenlänge $b$ steht:

$$b = 2a\ \sin(\tfrac{180^\circ}{N}).$$

Ich kann also $a$ in Abhängigkeit von $b$ ausdrücken, indem ich die letzte Gleichung durch $2\ \sin(\frac{180^\circ}{N})$ teile

$$a = \frac{b}{2\ \sin(\frac{180^\circ}{N})}\ .$$

Um obige allgemeine Formel für den Flächeninhalt anzuwenden zu können rechne ich zunächst den Teilterm

$$\frac{a^2}{2} = \frac{\left(\frac{b}{2\ \sin(\frac{180^\circ}{N})}\right)^2}{2} = \frac{b^2}{2\cdot 4\ \sin^2(\frac{180^\circ}{N})} = \frac{b^2}{8\ \sin^2(\frac{180^\circ}{N})}$$

aus, und setze das Ergebnis in diese Formel ein

$$F_N = N\ (\frac{b^2}{8\ \sin^2(\frac{180^\circ}{N})}\ \sin(\tfrac{360^\circ}{N})) = \frac{N}{8}\ \frac{\sin(\frac{360^\circ}{N})}{\sin^2(\frac{180^\circ}{N})}\ b^2\ .$$

Betrachte ich nun die spezielle Wahl $N = 3600$, so erhalte ich

$$F_{3600} = \frac{3600}{8}\ \frac{\sin(\frac{360^\circ}{3600})}{\sin^2(\frac{180^\circ}{3600})}\ b^2 = 450\ \frac{\sin((0.1)^\circ)}{\sin^2((0.05)^\circ)}\ b^2 \approx 1031323.769\ b^2\ ,$$

denn $\sin((0.1)^\circ) \approx 0.001745328366$ und $\sin^2((0.05)^\circ) \approx 7.615433562\cdot 10^{-7}$.

b) Der Umfang eines Kreises mit Radius $a = 1$ wird durch die Summe $U_N$ der Längen der Seiten des regelmäßigen $N$-Ecks angenähert. Da die Länge dieser Seiten jeweils gleich $b$ ist gilt $U_N = N\ b$. Mit dem Zusammenhang

$$b = 2a\ \sin(\tfrac{180^\circ}{N}).$$

und der Voraussetzung $a = 1$ gelange ich auf

$$U_N = 2N\ \sin(\tfrac{180^\circ}{N})\ .$$

Für $N = 3600$ ergibt sich nun

$$U_{3600} = 2\cdot 3600\ \sin(\tfrac{180^\circ}{3600}) = 7200\ \sin((0.05)^\circ) \approx 6.28318451,$$

denn $\sin((0.05)^\circ) \approx 0.0008726645152$.

**Lösung von Aufgabe 4.20:** Der gesamte Flächeninhalt $F$ der Pizza mit 80 cm Durchmesser (also Radius $r = 40$ cm) ist $F = \pi\ 40^2\ \text{cm}^2 = 1600\pi\ \text{cm}^2$. Jede der acht Pizzaportionen ist also $200\pi\ \text{cm}^2\ \approx 628\ \text{cm}^2$ groß. Der gesamte Umfang $U$ der Pizza mit Radius $r = 40$ cm ist $U = 2\pi\ 40$ cm$= 80\pi$ cm. Jede Pizzaportion hat also einen Rand der Länge $10\pi$ cm $\approx 31.42$ cm. Die Gesamtfläche der Kreisring-Pizza ist $(2500-625)\pi\ \text{cm}^2 = 1875\pi\ \text{cm}^2$, denn die Radien sind 50 cm, beziehungsweise 25 cm. Das Angebot Ihres Pizzabäckers nehmen Sie vermutlich an, denn jedem Ihrer acht Freunde stehen dann $1875/8\pi\ \text{cm}^2 = 234.375\pi\ \text{cm}^2\ \approx 736\ \text{cm}^2$ Pizza zu. Der Rand jeder Portion hat dann allerdings die Länge $(2\pi(50+25))/8$ cm $= 18.75\pi \approx 58.90$ cm, was es zu beachten gilt.

**Lösung von Aufgabe 4.21:** In der Tat habe ich hier ein Problem für Sie aufgeworfen, welches Sie vermutlich einfach nicht mehr los läßt. Das Grübeln hat nun eine Ende: Ich zeige Ihnen wie man die Lösung finden kann.
Der Flächeninhalt $F_K$ eines kreisförmigen Hamburgers im gefrorenen Zustand mit 20 cm Durchmesser (also Radius 10 cm) ist $F_K = \pi\ 10^2\ \text{cm}^2 = 100\pi\ \text{cm}^2$. Andererseits ist der Flächeninhalt $F_E$ einer Ellipse deren Hauptachsenradius $r$ doppelt so groß wie der Nebenachsenradius $b$ ist, das heißt $r = 2b$, durch die folgende Formel gegeben: $F_E = \pi r b = \pi(2b)b = 2\pi\ b^2$. Nun schmurgeln nach Ihrer jahrelangen Erfahrung beim sommerlichen Grillen die im gefrorenen Zustand runden Hamburger auf eine Ellipse mit zwei Drittel Größe (Fläche) zusammen. Ich mache deßhalb den Ansatz $2/3\ F_K = F_E$. Also:

$$\frac{2}{3}\ (100\pi) = 2\pi\ b^2.$$

Hier kann ich nun durch $2\pi$ teilen und erhalte

$$b^2 = \frac{100}{3},\ \text{das heißt}\ b = \frac{10}{\sqrt{3}} = 10\ \frac{\sqrt{3}}{3} \approx 5.77\ .$$

Somit ist der Nebenachsenradius $b$ der gegrillten Hamburger-Ellipse in etwa 5.77 cm groß und für den doppelt so großen Hauptachsenradius ergibt sich in etwa 11.55 cm. Ich hoffe über dies an dieser Stelle, dass Ihnen beim Grübeln über diesem Problem Ihre Hamburger nicht angebrannt sind und Sie nun endlich wieder relativ ablenkungsfrei grillen können.

# Lösungen der Übungsaufgaben in Kapitel 5

**Lösung von Aufgabe 5.1:** Vektoren, die in ihren Dimensionen zusammen passen, addiert man immer komponentenweise. Die Multiplikation mit einer Zahl geschieht, indem man jede einzelne Komponente eines Vektors mit der Zahl multipliziert. Also gilt:

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix} - 4 \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 12 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -8 \\ 4 \\ 16 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 24 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1-(-8)+24 \\ -2-4+0 \\ 5-16+2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 33 \\ -6 \\ -9 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Im nächsten Beispiel berechnet man zuerst den Ausdruck in der eckigen Klammer. Es gilt:

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} - 2 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -7 \end{pmatrix}.$$

Daraus folgt dann:

$$\begin{aligned}
-\begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix} + 3 \cdot \left[\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} - 2 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix}\right] &= -\begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix} + 3 \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -7 \end{pmatrix} \\
&= -\begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 12 \\ -21 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ -17 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

**Lösung von Aufgabe 5.2:**

a) Ein Skalarprodukt aus zwei Vektoren berechnet man, indem man die zueinander passenden Komponenten der beiden Vektoren miteinander multipliziert und dann die Summanden addiert. Es gilt also:

$$\begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -12 \end{pmatrix} = 3 \cdot 1 + (-4) \cdot 0 + 1 \cdot (-12) = 3 - 12 = -9$$

und

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} = 2 \cdot (-1) + 1 \cdot 5 + (-1) \cdot 6 = -2 + 5 - 6 = -3.$$

b) Einerseits kann man zuerst den Vektor in der großen Klammer ausrechnen und dann mit dem davor stehenden Vektor multiplizieren. Es gilt:

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3-2 \\ 4+5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 9 \end{pmatrix}$$

und daher:

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \left( \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 9 \end{pmatrix} = (-1) \cdot 1 + 2 \cdot 9 = 17.$$

Andererseits kann man aber auch die große Klammer ausmultiplizieren und dabei genauso vorgehen, als handelte es sich um ganz normale Zahlen und nicht um Vektoren. Das liefert:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \left( \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \end{pmatrix} \right) &= \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \end{pmatrix} \\ &= (-1) \cdot 3 + 2 \cdot 4 + (-1) \cdot (-2) + 2 \cdot 5 \\ &= -3 + 8 + 2 + 10 = 17. \end{aligned}$$

**Lösung von Aufgabe 5.3:**

a) Um festzustellen, ob $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix}$ linear unabhängig oder linear abhängig sind, muss man testen, ob man den einen Vektor als Vielfaches des anderen darstellen kann. Der Ansatz

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = c \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix}$$

liefert aber die einzelnen Gleichungen

$$1 = 2c, 2 = 4c, 3 = 7c.$$

Während aus den ersten beiden Gleichungen jeweils $c = \frac{1}{2}$ folgt, erhält man aus der dritten Gleichung $c = \frac{3}{7}$. Da eine Zahl nicht gleichzeitig zwei verschiedene Werte haben kann, kann die Ansatzgleichung nicht gelten. Versucht man umgekehrt den Ansatz

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix} = d \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix},$$

so kann man sofort durch $d$ auf beiden Seiten teilen und findet:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = c \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix}$$

mit $c = \frac{1}{d}$. Da dieser Ansatz schon beim ersten Versuch fehlgeschlagen ist, kann auch die zweite Ansatzgleichung keine Lösung $d$ haben. Also kann man einen Vektor nicht als Vielfaches des anderen darstellen, und daraus folgt, dass die beiden Vektoren linear unabhängig sind.

b) Die Vektoren $\begin{pmatrix} -2 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 12 \\ 17 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 234 \\ 1 \end{pmatrix}$ sind linear abhängig, denn es handelt sich hier um drei Vektoren aus jeweils zwei Komponenten. Die Anzahl der Vektoren ist also größer als die Dimension, und in diesem Fall sind Vektoren immer linear abhängig.

c) Die Vektoren $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}$ sind linear abhängig, denn es gilt:

$$\begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix} = -2 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

**Lösung von Aufgabe 5.4:** Man multipliziert eine Matrix mit einer Zahl, indem man jeden einzelnen Eintrag der Matrix mit dieser Zahl multipliziert. Weiterhin addiert man zwei Matrizen mit gleichen Ausmaßen, indem man einfach die jeweiligen Komponenten an den gleichen Positionen der beiden Matrizen addiert. Das ergibt dann die folgenden Rechnungen.

a)

$$\begin{aligned}
& 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -3 & 5 & 1 \\ 4 & 2 & -1 \end{pmatrix} + 3 \cdot \begin{pmatrix} -6 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & -2 \\ -3 & -4 & 0 \end{pmatrix} \\
= & \begin{pmatrix} 2 & 0 & -4 \\ -6 & 10 & 2 \\ 8 & 4 & -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -18 & 9 & 12 \\ 3 & 6 & -6 \\ -9 & -12 & 0 \end{pmatrix} \\
= & \begin{pmatrix} 2-18 & 0+9 & -4+12 \\ -6+3 & 10+6 & 2-6 \\ 8-9 & 4-12 & -2+0 \end{pmatrix} \\
= & \begin{pmatrix} -16 & 9 & 8 \\ -3 & 16 & -4 \\ -1 & -8 & -2 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

b)

$$
\begin{aligned}
-3 \cdot \begin{pmatrix} -1 & 5 & 2 \\ -2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & -5 & -2 \\ 2 & -1 & 0 \\ -3 & -1 & 3 \end{pmatrix}
&= \begin{pmatrix} 3 & -15 & -6 \\ 6 & -3 & 0 \\ -9 & -3 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & -5 & -2 \\ 2 & -1 & 0 \\ -3 & -1 & 3 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 3+2 & -15-5 & -6-2 \\ 6+2 & -3-1 & 0+0 \\ -9-3 & -3-1 & 6+3 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 5 & -20 & -8 \\ 8 & -4 & 0 \\ -12 & -4 & 9 \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

**Lösung von Aufgabe 5.5:** Mit der Klammerung von Matrizenoperationen geht man genauso um wie mit der Klammerung der üblichen Operationen des Zahlenrechnens. In diesem Beispiel wird man also zuerst die Matrix aus der inneren Klammer berechnen, dann das Ergebnis mit 3 multiplizieren und diese Matrix von der verdoppelten ersten Matrix abziehen. Das ergibt:

$$
\begin{aligned}
2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -2 & 6 \end{pmatrix} - 3 \cdot \left[ \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} + 4 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \right]
&= \begin{pmatrix} 2 & 8 \\ -4 & 12 \end{pmatrix} - 3 \cdot \left[ \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ -4 & -8 \end{pmatrix} \right] \\
&= \begin{pmatrix} 2 & 8 \\ -4 & 12 \end{pmatrix} - 3 \cdot \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -1 & -9 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 2 & 8 \\ -4 & 12 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 12 & 6 \\ -3 & -27 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -10 & 2 \\ -1 & 39 \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

**Lösung von Aufgabe 5.6:**

a) Zur Matrizenmultiplkation ist das Falksche Schema beliebt, das hier zunächst notiert werden soll.

$$
\begin{array}{rrr|rrr}
 & & & -6 & 3 & 4 \\
 & & & 1 & 2 & -2 \\
 & & & -3 & -4 & 0 \\
\hline
1 & 0 & -2 & 0 & 11 & 4 \\
-3 & 5 & 1 & 20 & -3 & -22 \\
4 & 2 & -1 & -19 & 20 & 12
\end{array}
$$

Die genaue Berechnung der einzelnen Einträge zeigt die folgende Rechnung.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -3 & 5 & 1 \\ 4 & 2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -6 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & -2 \\ -3 & -4 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1\cdot(-6)+0\cdot 1+(-2)\cdot(-3) & 1\cdot 3+0\cdot 2+(-2)\cdot(-4) & 1\cdot 4+0\cdot(-2)+(-2)\cdot 0 \\ (-3)\cdot(-6)+5\cdot 1+1\cdot(-3) & (-3)\cdot 3+5\cdot 2+1\cdot(-4) & (-3)\cdot 4+5\cdot(-2)+1\cdot 0 \\ 4\cdot(-6)+2\cdot 1+(-1)\cdot(-3) & 4\cdot 3+2\cdot 2+(-1)\cdot(-4) & 4\cdot 4+2\cdot(-2)+(-1)\cdot 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 11 & 4 \\ 20 & -3 & -22 \\ -19 & 20 & 12 \end{pmatrix}.$$

b) Hier wird nur noch das Falksche Schema angegeben.

$$\begin{array}{rrr|rrrr} & & & 2 & -5 & -2 & 1 \\ & & & 2 & -1 & 0 & 2 \\ & & & -3 & -1 & 3 & 0 \\ \hline -1 & 5 & 2 & 2 & -2 & 8 & 9 \\ -2 & 1 & 0 & -2 & 9 & 4 & 0 \end{array}$$

Also gilt:

$$\begin{pmatrix} -1 & 5 & 2 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -5 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & 0 & 2 \\ -3 & -1 & 3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 8 & 9 \\ -2 & 9 & 4 & 0 \end{pmatrix}.$$

**Lösung von Aufgabe 5.7:** In der ersten Rechnung werden die Matrizen in der eckigen Klammer addiert und anschließend die Matrizenmultiplikation durchgeführt. Es gilt:

$$2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -1 & 3 & 1 \\ 4 & 0 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 4 & -1 \\ -2 & 3 & 1 \\ 1 & 5 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 8 & -5 \\ -4 & 9 & 3 \\ 9 & 5 & 4 \end{pmatrix}.$$

Also lautet die Multiplikation:

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ -2 & 4 & 1 \\ 0 & 5 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 8 & -5 \\ -4 & 9 & 3 \\ 9 & 5 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -17 & 38 & -5 \\ -11 & 25 & 26 \\ -38 & 35 & 7 \end{pmatrix}.$$

In der zweiten Variante multipliziert man die Klammern aus, wobei hier der Faktor 2 vor der zweiten Matrix zunächst in die Matrix hinein multipliziert wird. Also ergeben sich die folgenden Matrizenmultiplikationen.

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ -2 & 4 & 1 \\ 0 & 5 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 4 & -4 \\ -2 & 6 & 2 \\ 8 & 0 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10 & 26 & -8 \\ -4 & 16 & 22 \\ -26 & 30 & -2 \end{pmatrix}$$

und

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ -2 & 4 & 1 \\ 0 & 5 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 4 & -1 \\ -2 & 3 & 1 \\ 1 & 5 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 & 12 & 3 \\ -7 & 9 & 4 \\ -12 & 5 & 9 \end{pmatrix}.$$

Insgesamt ergibt sich das Resultat:

$$\begin{pmatrix} -10 & 26 & -8 \\ -4 & 16 & 22 \\ -26 & 30 & -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -7 & 12 & 3 \\ -7 & 9 & 4 \\ -12 & 5 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -17 & 38 & -5 \\ -11 & 25 & 26 \\ -38 & 35 & 7 \end{pmatrix}.$$

Es spielt also keine Rolle, ob man zuerst die Matrizenoperationen innerhalb der eckigen Klammer bearbeitet und dann die Matrizen multipliziert oder gleich ausmultipliziert und dann zusammenfasst.

**Lösung von Aufgabe 5.8:** Bei dieser Aufgabe ist der im Buch angegebenen Lösung nichts hinzuzufügen. Hätte $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ eine Inverse $A^{-1} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, so müsste gelten:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = A \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+2c & b+2d \\ 2a+4c & 2b+4d \end{pmatrix}.$$

Also wäre $a + 2c = 1$ und gleichzeitig $2a + 4c = 0$. Wegen $2a + 4c = 2(a + 2c)$ ist das unmöglich.

**Lösung von Aufgabe 5.9:** Das erste Gleichungssystem hat drei Gleichungen mit drei Unbekannten. Die zugehörige Matrix lautet:

$$(A, b) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -5 & -10 \\ 3 & -4 & 1 & 9 \\ 6 & 2 & 4 & 12 \end{pmatrix}.$$

Nun wird der Gauß-Algorithmus begonnen, indem die dreifache erste Zeile von der zweiten und die sechsfache erste Zeile von der dritten subtrahiert wird. Das ergibt

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -5 & -10 \\ 0 & -7 & 16 & 39 \\ 0 & -4 & 34 & 72 \end{pmatrix}.$$

Um einfachere Zahlen herzustellen, wird die doppelte dritte Zeile von der zweiten abgezogen. Das ergibt

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -5 & -10 \\ 0 & 1 & -52 & -105 \\ 0 & -4 & 34 & 72 \end{pmatrix}.$$

Nun wird die vierfache zweite Zeile auf die dritte addiert mit dem Resultat

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -5 & -10 \\ 0 & 1 & -52 & -105 \\ 0 & 0 & -174 & -348 \end{pmatrix}.$$

Teilen der dritten Zeile durch $-174$ liefert

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -5 & -10 \\ 0 & 1 & -52 & -105 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Die zweiundfünfzigfache dritte Zeile wird auf die zweite addiert und die fünffache dritte Zeile auf die erste. Das führt zu der Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Zum Schluss wird die zweite Zeile von der ersten abgezogen, und man hat

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Also ergibt sich $x = 1, y = -1, z = 2$
Das zweite Gleichungssystem hat vier Gleichungen mit vier Unbekannten. Die zugehörige Matrix lautet:

$$(A, b) = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & -6 & 1 \\ 1 & 2 & -2 & -5 & -1 \\ 2 & 4 & -2 & -9 & 0 \\ 2 & 4 & -6 & -9 & 2 \end{pmatrix}.$$

Nun wird der Gauß-Algorithmus begonnen, indem die erste Zeile von der zweiten abgezogen wird und die doppelte erste Zeile von der dritten und der vierten. Das ergibt

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & -6 & 1 \\ 0 & -1 & -4 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & -6 & 3 & -2 \\ 0 & -2 & -10 & 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Die zweite Zeile wird mit $-1$ multipliziert. Das ergibt

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & -6 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & -1 & 2 \\ 0 & -2 & -6 & 3 & -2 \\ 0 & -2 & -10 & 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Die doppelte zweite Zeile wird auf die dritte und die vierte addiert mit dem Ergebnis

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & -6 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Die dritte Zeile wird auf die vierte addiert. Das führt zu der Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & -6 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 6 \end{pmatrix}.$$

Dritte und vierte Zeile werden durch 2 geteilt. Das ergibt

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & -6 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Die halbe vierte Zeile wird von der dritten abgezogen, die vierte Zeile wird auf die zweite addiert und die sechsfache vierte Zeile wird auf die erste addiert. Das führt zu

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 0 & 19 \\ 0 & 1 & 4 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Nun wird die vierfache dritte Zeile von der zweiten abgezogen und die doppelte dritte Zeile von der ersten mit dem Resultat

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 & 20 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Zum Schluss wird die dreifache zweite Zeile von der ersten abgezogen. Das ergibt

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Also ist $x = -1, y = 7, z = -\frac{1}{2}, u = 3$.

**Lösung von Aufgabe 5.10:** Die Matrix des Gleichungssystems lautet

$$(A, b) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 5 & 2 & 3 \\ 2 & -2 & 4 & 5 \end{pmatrix}.$$

Die erste Zeile wird von der zweiten abgezogen, die doppelte erste Zeile von der dritten. Das ergibt

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 0 & 2 \\ 0 & -4 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Die zweite Zeile wird auf die dritte addiert. Das führt zu

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

Wegen der dritten Zeile ist das Gleichungssystem unlösbar.

**Lösung von Aufgabe 5.11:** Das erste Gleichungssystem lautet in Matrixform

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & -2 & 0 \\ 2 & -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Die erste Zeile wird von der zweiten abgezogen, die doppelte erste von der dritten:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Zweite und dritte Zeile werden vertauscht:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & -2 & -2 \end{pmatrix}.$$

Die doppelte zweite Zeile wird von der dritten abgezogen:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Die zweite Zeile wird auf die erste addiert:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Damit ist eine Einheitsmatrix aus zwei Zeilen und zwei Spalten erreicht. Formuliert man die ersten beiden Zeilen der Matrix als Gleichungen, so ergibt sich

$$x - z = 1 \text{ und } y - z = -1,$$

wobei $z \in \mathbb{R}$ beliebig ist. Also hat das erste Gleichungssystem die Lösungen

$$x = z + 1, y = z - 1, \ z \in \mathbb{R} \text{ beliebig.}$$

Das zweite Gleichungssystem lautet in Matrixform

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & 2 & 0 \\ -2 & 5 & 2 & -4 & 0 \\ 4 & -13 & -6 & 10 & 0 \end{pmatrix}.$$

Die doppelte erste Zeile wird auf die dritte addiert, die vierfache erste von der vierten abgezogen:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & -9 & -6 & 6 & 0 \end{pmatrix}.$$

Um Brüche zu vermeiden, wird die dritte Zeile auf die zweite addiert:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & -9 & -6 & 6 & 0 \end{pmatrix}.$$

Die dreifache zweite Zeile wird von der dritten abgezogen, die neunfache zweite auf die vierte addiert:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 6 & 0 \end{pmatrix}.$$

Die dritte Zeile wird mit $-1$ multipliziert, anschließend wird die dreifache dritte Zeile von der vierten abgezogen:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Die dritte Zeile wird von der zweiten abgezogen, anschließend die zweite auf die erste addiert:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Damit ist eine Einheitsmatrix aus drei Zeilen und drei Spalten erreicht. Formuliert man die ersten drei Zeilen der Matrix als Gleichungen, so ergibt sich

$$x - u = 0, y - 2u = 0, z + 2u = 0,$$

wobei $u \in \mathbb{R}$ beliebig ist. Also hat das zweite Gleichungssystem die Lösungen

$$x = u, y = 2u, z = -2u,\ u \in \mathbb{R} \text{ beliebig.}$$

**Lösung von Aufgabe 5.12:** Es handelt sich um die Vektoren

$$\begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

Lineare Abhängigkeit bzw. Unabhängigkeit kann man feststellen, indem man testet, ob sich die gegebenen Vektoren auf eine nicht-triviale Weise zum Nullvektor kombinieren lassen: ist das möglich, so sind die Vektoren linear abhängig, ansonsten sind sie linear unabhängig. Im Falle der drei gegebenen Vektoren lautet die Ansatzgleichung

$$c_1 \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + c_2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} + c_3 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Das entsprechende Gleichungssystem lautet dann

$$\begin{array}{ccccccc} 5c_1 & + & c_2 & + & c_3 & = & 0 \\ c_1 & + & 4c_2 & + & 2c_3 & = & 0 \\ 3c_1 & + & 2c_2 & + & 6c_3 & = & 0. \end{array}$$

Dieses Gleichungssystem hat natürlich die Lösung $c_1 = c_2 = c_3 = 0$, denn wenn man für $c_1$, $c_2$ und $c_3$ jeweils den Wert null einsetzt, dann ergibt sich insgesamt als Ergebnis jeder linken Seite wieder null. Die Frage ist nun, ob das Gleichungssystem auch noch andere Lösungen hat, denn nur in diesem Fall sind die Vektoren linear abhängig. Die Matrixform des Gleichungssystems lautet

$$\begin{pmatrix} 5 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 6 & 0 \end{pmatrix}.$$

Die ersten beiden Zeilen werden vertauscht:

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 & 0 \\ 5 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 6 & 0 \end{pmatrix}.$$

Die fünffache erste Zeile wird von der zweiten abgezogen, die dreifache erste von der dritten:

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & -19 & -9 & 0 \\ 0 & -10 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Die dritte Zeile wird durch $-10$ geteilt und mit der zweiten vertauscht:

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -19 & -9 & 0 \end{pmatrix}.$$

Die neuzehnfache zweite Zeile wird auf die dritte addiert, anschließend wird die dritte Zeile durch $-9$ geteilt:

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Die doppelte dritte Zeile und die vierfache zweite werden von der ersten abgezogen:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Das Gleichungssystem ist eindeutig lösbar mit den Lösungen $c_1 = c_2 = c_3 = 0$. Also sind die Vektoren linear unabhängig.

**Lösung von Aufgabe 5.13:** Zu berechnen ist die Inverse der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -8 & 4 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Man invertiert eine Matrix, indem man sie zusammen mit der entsprechenden Einheitsmatrix in eine große Matrix schreibt und mit dem Gauß-Algorithmus diese große Matrix so lange manipuliert, bis in ihrer linken Hälfte, wo am Anfang $A$ stand, die Einheitsmatrix steht. In der rechten Hälfte befindet sich dann die gesuchte Inverse. Die große Matrix aus $A$ und $I_3$ lautet hier

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ -8 & 4 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Die achtfache erste Zeile wird auf die zweite addiert, die doppelte erste auf die dritte:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & -7 & 8 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Zweite und dritte Zeile werden vertauscht:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & -7 & 8 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Die vierfache zweite Zeile wird von der dritten abgezogen:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -4 \end{pmatrix}.$$

Die doppelte dritte Zeile wird auf die zweite addiert, die dritte Zeile wird auf die erste addiert:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 2 & -7 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -4 \end{pmatrix}.$$

Damit ist in der linken Hälfte die Einheitsmatrix erreicht, und es folgt:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -4 \\ 2 & 2 & -7 \\ 0 & 1 & -4 \end{pmatrix}.$$

**Lösung von Aufgabe 5.14:**

a) Einen Vektor zwischen zwei Punkten berechnet man, indem man die Koordinaten des vorderen Punktes von denen des hinteren Punktes abzieht. Also gilt

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

und

$$\overrightarrow{CD} = \begin{pmatrix} 9 \\ 16 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 8 \\ 17 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

b) Der Ortsvektor eines Punktes hat genau die gleichen Komponenten wie der Punkt selbst, nur dass man den Vektor als Spalte schreibt, während der Punkt als Zeile geschrieben wird. Daher ist

$$\overrightarrow{\mathbf{0}A} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ und } \overrightarrow{\mathbf{0}B} = \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \\ 9 \end{pmatrix}.$$

**Lösung von Aufgabe 5.15:** Rechnerisch ist die Aufgabe sehr einfach, denn das Addieren und Subtrahieren von Vektoren erfolgt komponentenweise. Es gilt also

$$\mathbf{a} + 2\mathbf{b} - \mathbf{c} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}$$

und

$$3\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c} = \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 8 \end{pmatrix}.$$

Die graphische Addition zweier Vektoren erfolgt, indem man den Anfangspunkt des zweiten Vektors an den Endpunkt des ersten Vektors setzt; der Summenvektor beginnt dann am Anfangspunkt des ersten Vektors und endet am Endpunkt des zweiten. Bei der Subtraktion muss man noch darauf achten, dass der abzuziehende Vektor in seiner Richtung umgedreht wird. Die erste Rechnung ist in der ersten graphischen Darstellung eingetragen.
Die zweite Rechnung ist in der zweiten graphischen Darstellung eingetragen.

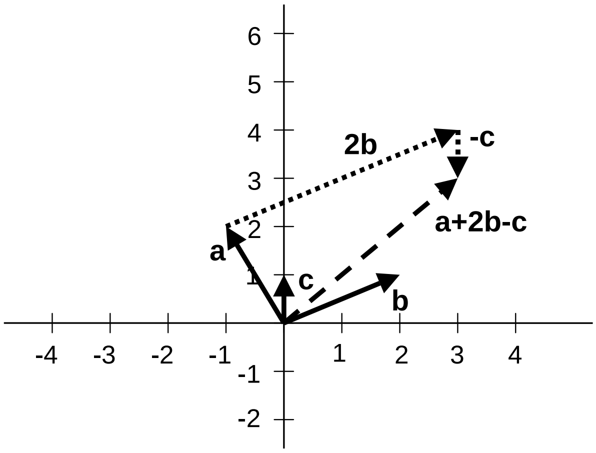


Abbildung 1: Vektoren $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ sowie $\mathbf{a} + 2\mathbf{b} - \mathbf{c}$

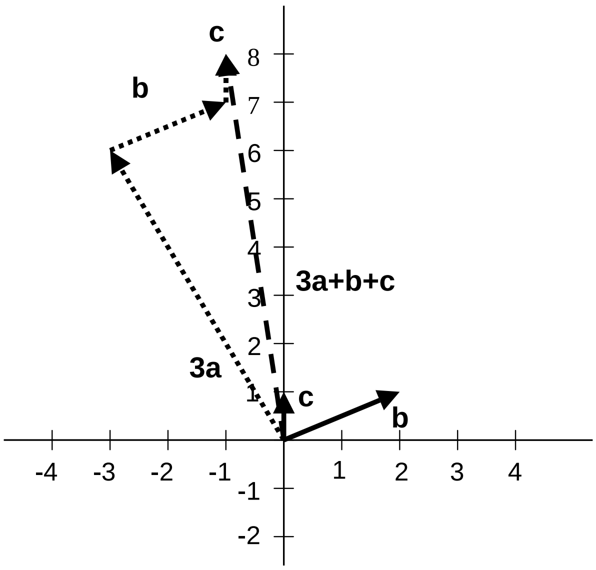


Abbildung 2: $3\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}$

**Lösung von Aufgabe 5.16:** Zuerst berechnet man die Vektoren **b** und **c**, die den Punkt $A$ mit den Punkten $B$ bzw. $C$ verbinden. Es gilt

$$\mathbf{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \mathbf{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Der Ortsvektor von $A$ hat natürlich genau die gleichen Komponenten wie $A$ selbst. Also lautet die parametrisierte Ebenengleichung

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} \text{ mit } \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

In der gedruckten Fassung ist der Vektor **b** in seiner ersten Komponente falsch angegeben.

**Lösung von Aufgabe 5.17:** Zur Berechnung des Vektorprodukts setzt man in die entsprechende Formel ein. Es gilt

$$\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-1) \cdot 2 - 1 \cdot 4 \\ 4 \cdot (-3) - 2 \cdot 2 \\ 2 \cdot 1 - (-3) \cdot (-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ -16 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Ob zwei Vektoren senkrecht aufeinander stehen, prüft man mit dem Skalarprodukt: ist ihr Skalarprodukt gleich 0, so stehen sie senkrecht aufeinander, ansonsten nicht. Es gilt

$$\begin{pmatrix} -6 \\ -16 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} = (-6) \cdot 2 + (-16) \cdot (-1) + (-1) \cdot 4 = -12 + 16 - 4 = 0$$

und

$$\begin{pmatrix} -6 \\ -16 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = (-6) \cdot (-3) + (-16) \cdot 1 + (-1) \cdot 2 = 18 - 16 - 2 = 0.$$

**Lösung von Aufgabe 5.18:** Zuerst werden die drei relevanten Vektoren berechnet. Es gilt

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \mathbf{c} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Die Berechnung des Kreuzproduktes von **b** und **c** ergibt den Normalenvektor

$$\mathbf{n} = \mathbf{b} \times \mathbf{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -7 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 1 - 2 \cdot (-1) \\ (-1) \cdot (-7) - 1 \cdot 1 \\ 1 \cdot 2 - (-7) \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 9 \end{pmatrix}.$$

Für die Ebenenpunkte $(x, y, z)$ macht man dann den Ansatz

$$\mathbf{n} \cdot \begin{pmatrix} x-4 \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0,$$

also

$$0 = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x-4 \\ y \\ z \end{pmatrix} = 3(x-4) + 6y + 9z = 3x + 6y + 9z - 12.$$

Somit lautet die gesuchte Gleichung $3x + 6y + 9z = 12$ oder, wenn man auf beiden Seiten durch 3 teilt, $x + 2y + 3z = 4$.

# Lösungen der Übungsaufgaben in Kapitel 6

**Lösung von Aufgabe 6.1:** a) Die erste Ableitung von $f(x) = x^2$ ist $f'(x) = 2x$. An jeder Stelle $x$ stellt $f'(x)$ den Wert der Steigung von $f$ in $x$ dar. Speziell ist $f'(3)$ der Wert der Steigung von $f$ an der Stelle $x = 3$. Konkret berechne ich diesen also durch Einsetzen von $x = 3$ in die Funktion $f'(x) = 2x$: $f'(3) = 2 \cdot 3 = 6$. Analog finde ich den Wert der Steigung von $f$ in $x = -2$: $f'(-2) = 2 \cdot (-2) = -4$.
b) Gesucht ist die Stelle $x$ an der die erste Ableitung $f'(x) = 2x$ von $f(x) = x^2$ den Wert $-2$ hat. Für diese Stelle $x$ soll also $2x = -2$ gelten. Teile ich beide Seiten dieser Gleichung durch 2, so erkenne ich, dass $x = -1$ die gesuchte Stelle ist.

**Lösung von Aufgabe 6.2:** Hier muß ich für die Funktion $p_3(x) = x^3$ den Quotienten

$$\frac{p_3(x+h) - p_3(x)}{(x+h) - x} = \frac{(x+h)^3 - x^3}{h}$$

für $h \neq 0$ anschauen und untersuchen was für diesen passiert, wenn $h$ gegen 0 geht. Hierzu sollte ich den Term $(x+h)^3$ ausrechnen. Der Hinweis in der Aufgabenstellung besagt, dass

$$(x+h)^3 = x^3 + 3\ x^2h + 3\ xh^2 + h^3$$

gilt. Dies kann ich übrigens erkennen, indem ich die Binomische Formel anwende, und danach ausmultipliziere, sowie Terme gleicher Bauart zusammenfasse:

$$\begin{aligned}
(x+h)^3 &= (x+h)\ (x+h)^2 = (x+h)\ (x^2 + 2hx + h^2) \\
&= (x^3 + 2hx^2 + h^2x) + (hx^2 + 2h^2x + h^3) \\
&= x^3 + (2+1)hx^2 + (1+2)h^2x + h^3 = x^3 + 3\ x^2h + 3\ xh^2 + h^3 \ .
\end{aligned}$$

Jetzt rechne ich den Zähler des obigen Quotienten aus:

$$(x+h)^3 - x^3 = x^3 + 3\ x^2h + 3\ xh^2 + h^3 - x^3 = 3\ x^2h + 3\ xh^2 + h^3 = h(3\ x^2 + 3\ xh + h^2) \ .$$

Im letzten Schritt habe ich hier $h$ ausgeklammert. Dies zeigt mir jetzt, dass bei der Berechnung des obigen Quotienten $h$ herausgekürzt werden kann:

$$\frac{(x+h)^3 - x^3}{h} = \frac{h(3\ x^2 + 3\ xh + h^2)}{h} = 3\ x^2 + 3\ xh + h^2 \ .$$

Somit folgt für den Grenzwert des Quotienten der Differenzen

$$\lim_{h \to 0} 3\ x^2 + 3\ xh + h^2 = 3\ x^2 + 3\ x \lim_{h \to 0} h + \lim_{h \to 0} h^2 = 3\ x^2 + 0 + 0 = 3\ x^2 \ .$$

Der Grenzwert existiert somit und ist für jedes $x$ als $3x^2$ eindeutig festgelegt. Ich stelle fest, dass $p_3(x) = 3x^2$ die erste Ableitung von $p_3(x) = x^3$ ist.

**Lösung von Aufgabe 6.3:** Ich berechne zunächst die Differenzenquotienten von $f(x) = x^2 + x$. Diese sind für $h \neq 0$ wie folgt festgelegt:

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{(x+h) - x} = \frac{((x+h)^2 + (x+h)) - (x^2 + x)}{h} \ .$$

Ich vereinfache den Zähler, indem ich die Binomische Formel anwende, danach nach Termen gleicher Bauart sammle und $h$ ausklammere:

$$\begin{aligned} (x+h)^2 + (x+h) - x^2 - x &= x^2 + 2\ hx + h^2 + x + h - x^2 - x \\ &= 2\ hx + h^2 + h = h(2\ x + h + 1) \ . \end{aligned}$$

Ich erhalte somit durch Kürzen von $h$

$$\frac{((x+h)^2 + (x+h)) - (x^2 + x)}{h} = 2\ x + h + 1 \ .$$

Somit folgt für den Grenzwert der Differenzenquotienten:

$$\lim_{h \to 0} 2\ x + h + 1 = 2\ x + 1 + \lim_{h \to 0} h = 2\ x + 1 + 0 = 2\ x + 1 \ .$$

Der Differentialquotient ist somit $2\ x + 1$ und ich stelle fest, dass $f'(x) = 2\ x + 1$ die erste Ableitung von $f(x) = x^2 + x$ ist.

**Lösung von Aufgabe 6.4:** a) Die Funktion $f(x) = |x - 2|$ ist an der Stelle $x = 2$ nicht ableitbar, also insgesamt nicht ableitbar. Dies kann ich wie folgt einsehen. Zunächst mache ich mir klar, dass ich $f$ in der folgenden Form abschnittsweise hinschreiben kann:

$$f(x) = |x - 2| = \begin{cases} x - 2, & \text{falls } x \geq 2 \\ -(x-2) = -x + 2, & \text{falls } x < 2 \end{cases} \ .$$

Dies folgt aus der Definition der Betragsfunktion. Ich sehe jetzt ein, dass die einzige kritische Stelle hinsichtlich der Ableitbarkeit die Stelle $x = 2$ ist. Der Grund hierfür ist die Tatsache, dass außerhalb der Stelle $x = 2$ die Funktion aus (verschiedenen) linearen Funktionen besteht, die bekanntlich ableitbar sind. Ich untersuche die Stelle $x = 2$ nun genauer. Hierzu betrachte ich den rechtseitigen Grenzwert der Differenzenquotienten

$$\lim_{\substack{h \to 0 \\ h > 0}} \frac{f(2+h) - f(2)}{(2+h) - 2} = \lim_{\substack{h \to 0 \\ h > 0}} \frac{((2+h) - 2) - 0}{h} = \lim_{\substack{h \to 0 \\ h > 0}} \frac{h}{h} = 1$$

und den linkseitigen Grenzwert der Differenzenquotienten

$$\lim_{\substack{h \to 0 \\ h < 0}} \frac{f(2+h) - f(2)}{(2+h) - 2} = \lim_{\substack{h \to 0 \\ h < 0}} \frac{(-(2+h) + 2) - 0}{h} = \lim_{\substack{h \to 0 \\ h < 0}} \frac{(-h)}{h} = -1 \ .$$

Ich beachte hierbei, dass ich die unterschiedlichen Festlegungen von $f$ für $x \geq 2$ und $x < 2$ richtig verwende. Jetzt sehe ich, dass der rechts- und linkseitige Grenzwert zwar jeweils existiert – diese aber nicht übereinstimmen. Es folgt somit, dass der Differentialquotient in $x = 2$ nicht existiert (denn dieser ist nicht eindeutig festlegbar). Somit ist $f$ in $x = 2$ und damit insgesamt nicht ableitbar.
b) Die Funktion $f(x) = 1/2((x-2)^3 + |x-2|^3)$ ist an allen Stellen $x$ ableitbar. Dies mache ich mir wie folgt klar. Ich verwende zunächst die Definition des Betrags um $f$ in der folgenden Form abschnittsweise hinzuschreiben:

$$f(x) = \frac{1}{2}((x-2)^3 + |x-2|^3) = \begin{cases} \frac{1}{2}\left((x-2)^3 + (x-2)^3\right) = (x-2)^3, & \text{falls } x \geq 2 \\ \frac{1}{2}\left((x-2)^3 - (x-2)^3\right) = 0, & \text{falls } x < 2 \end{cases} .$$

Die einzige kritische Stelle hinsichtlich der Ableitbarkeit ist offenbar die Stelle $x = 2$. Der Grund hierfür ist, dass ich die erste Ableitung $g'$ von $g(x) = (x-2)^3 = x^3 - 6x^2 + 12x + 8$ für $x > 2$ mit der zuvor besprochenen Vorgehensweise als $g'(x) = 3x^2 - 12x + 12$ berechnen kann und $h(x) = 0$ für $x < 2$ ebenfalls ableitbar ist: $h'(x) = 0$. Ich betrachte also die verbleibende Stelle $x = 2$. Der rechtseitige Grenzwert der Differenzenquotienten ergibt

$$\lim_{\substack{h\to 0\\ h>0}} \frac{f(2+h) - f(2)}{(2+h) - 2} = \lim_{\substack{h\to 0\\ h>0}} \frac{((2+h)-2)^3 - 0^3}{h} = \lim_{\substack{h\to 0\\ h>0}} \frac{h^3}{h} = \lim_{\substack{h\to 0\\ h>0}} h^2 = 0$$

und der linkseitigen Grenzwert der Differenzenquotienten ist

$$\lim_{\substack{h\to 0\\ h<0}} \frac{f(2+h) - f(2)}{(2+h) - 2} = \lim_{\substack{h\to 0\\ h<0}} \frac{0-0}{h} = \lim_{\substack{h\to 0\\ h<0}} \frac{0}{h} = 0 .$$

Rechtseitiger und linkseitiger Grenzwert der Differenzenquotienten stimmen also auch an der Stelle $x = 2$ überein. Da jegliche Wahl des Zulaufens auf diese Stelle $x = 2$ denselben Grenzwert der Differenzenquotienten ergibt, folgt dass für diese Funktion der Differentialquotient auch an der Stelle $x = 2$ existiert (und somit eindeutig ist) – insbesondere ist $f$ in $x = 2$ ableitbar und die obige Berechnung ergibt zudem $f'(2) = 0$.

**Lösung von Aufgabe 6.5:** Zunächst stelle ich fest, dass $f(x) = 3\ \cos(x) - 2\ \sin(x)$ für alle $x$ ableitbar ist. Dies folgt aus der Faktor- und Summenregel zusammen mit der Tatsache, dass die Sinus-Funktion $\sin(x)$ und die Cosinus-Funktion $\cos(x)$ ableitbar sind. Diese beiden Regeln verwende ich nun um die erste Ableitung von $f$ konkret auszurechnen:

$$f'(x) = (3\ \cos(x) - 2\ \sin(x))' = 3\cos'(x) - 2\ \sin'(x) .$$

Erinnere ich mich noch daran, dass $\cos'(x) = -\sin(x)$ und $\sin'(x) = \cos(x)$ gelten, so erhalte ich das Ergebnis

$$f'(x) = -3\sin(x) - 2\ \cos(x) .$$

**Lösung von Aufgabe 6.6:** a) Hier soll das Polynom $f(x) = -x^3 - 2\,x^2 + \frac{1}{8}\,x - \sqrt[3]{2}$ einmal abgeleitet werden. Dazu verwende ich meine Kenntnisse über die Bildung der ersten Ableitung von Polynomen. Ich berechne also

$$f'(x) = -(x^3)' - 2\,(x^2)' + \frac{1}{8}\,(x)' - \sqrt[3]{2}(1)' = -3\,x^2 - 2\cdot 2\,x + \frac{1}{8}\cdot 1 - \sqrt[3]{2}\cdot 0 = -3\,x^2 - 4\,x + \frac{1}{8}\ .$$

b) Hier soll das Polynom $f_t(x) = t^2\,x^4 - 2t^4\,x^2 + t^2$ einmal abgeleitet werden, wobei ich zu beachten habe, dass $x$ die Variable ist (nach der abgeleitet werden soll), während $t$ ein Parameter ist der also die Rolle einer beliebigen aber festen Zahl einnimmt. Ich verwende nach dieser kurzen Vorüberlegung meine Kenntnisse über die Berechnung der ersten Ableitung von Polynomen und erhalte

$$f_t'(x) = t^2\ (x^4)' - 2t^4\ (x^2)' + t^2\ (1)' = 4\ t^2x^3 - 2\cdot 2\ t^4x + 0 = 4\ t^2x^3 - 4\ t^4x\ ,$$

indem ich nach $x$ ableite.
c) Dieser Aufgabenteil zeigt mir, dass ich die Bedeutung von Variablen und Parametern sehr genau unterscheiden muß. Während die Funktion $f_t(x) = t^2\,x^4 - 2t^4\,x^2 + t^2$ (aus dem b)-Teil) eine Polynom-Funktion vom Grad 4 in der Variablen $x$ ist, ist $f_x(t) = t^2\ x^4 - 2t^4\ x^2 + t^2$ eine andere Polynom-Funktion vom Grad 4 in der Variablen $t$. Sammle ich für die letztgenannte Funktion Terme gleicher Potenz (in der Variablen $t$), so kann ich diese Funktion (wie im Aufgabentext erwähnt) nämlich als $f_x(t) = -2x^2\ t^4 + (x^4+1)\ t^2$ hinschreiben. Ich verwende jetzt meine Kenntnisse über die Berechnung der ersten Ableitung von Polynomen um die erste Ableitung (nach der Variablen $t$) von $f_x$ zu bestimmen:

$$f_x'(t) = -2x^2\ (t^4)' + (x^4+1)\ (t^2)' = -2x^2\ 4t^3 + (x^4+1)\ 2t = -8\ x^2t^3 + 2\ (x^4+1)t\ .$$

Damit ist die Aufgabe gelöst. Um deutlich zu sehen, dass sich $f_x'$ von der im b)-Teil berechneten ersten Ableitung unterscheidet, schreibe ich $f_x'$ als Extraservice noch einmal hin, indem ich nach Termen gleicher Potenz in $x$ sammle:

$$f_x'(t) = 2t\ x^4 - 8t^3x^2 + 2t\ .$$

**Lösung von Aufgabe 6.7:** Hier soll die Produktregel zur Berechnung der ersten Ableitung verwendet werden. Im a)-Teil berechne ich

$$\begin{aligned} f'(x) &= (-x^3\ (x^2-4x+2))' = -(x^3)'\ (x^2-4x+2) - x^3\ (x^2-4x+2)' \\ &= -3x^2\ (x^2-4x+2) - x^3\ (2x-4) \\ &= -3x^4 + 12x^3 - 6x^2 - 2x^4 + 4x^3 \\ &= -5x^4 + 16x^3 - 6x^2 = (-5x^2 + 16x - 6)\ x^2. \end{aligned}$$

Damit ist der a)-Teil gelöst. Zur Kontrolle berechne ich die Ableitung dieser Polynom-Funktion $f(x) = -x^5 + 4x^4 - 2x^3$ auf alternativem Weg:

$$f'(x) = -(x^5)' + 4(x^4)' - 2(x^3)' = -5x^4 + 4\cdot 4x^3 - 2\cdot 3x^2 = -5x^4 + 16x^3 - 6x^2\ .$$

Im b)-Teil berechne ich

$$\begin{aligned} f'(x) &= ((x^2+x)\ \cos(x))' = (x^2+x)'\ \cos(x) + (x^2+x)\ \cos'(x) \\ &= (2x+1)\ \cos(x) - (x^2+x)\ \sin(x), \end{aligned}$$

denn $\cos'(x) = -\sin(x)$. Wenn ich möchte kann ich nun noch nach Termen gleicher Potenz gruppieren. Ich erhalte dann

$$f'(x) = -\sin(x)\ x^2 + (2\cos(x) - \sin(x))\ x + \cos(x)\ .$$

Im c)-Teil berechne ich unter Verwendung von $(e^x)' = e^x$

$$\begin{aligned} f'(x) &= (x^2\ e^x)' = (x^2)'\ e^x + x^2\ (e^x)' \\ &= 2x\ e^x + x^2\ e^x = (2x+x^2)\ e^x = x(2+x)\ e^x\ . \end{aligned}$$

Im d)-Teil berechne ich

$$\begin{aligned} f'(x) &= (\cos(x)\ e^x)' = \cos'(x)\ e^x + \cos(x)\ (e^x)' \\ &= -\sin(x)\ e^x + \cos(x)\ e^x = (\cos(x) - \sin(x))\ e^x, \end{aligned}$$

denn $\cos'(x) = -\sin(x)$ und $(e^x)' = e^x$.
Im e)-Teil sollte ich zunächst erkennen, dass $f(x) = \cos^2(x)$ ein Produkt von Funktionen ist: $f(x) = \cos(x)\cos(x)$. Jetzt kann ich die Produktregel zur Berechnung der Ableitung anwenden

$$\begin{aligned} f'(x) &= (\cos(x)\cos(x))' = \cos'(x)\cos(x) + \cos(x)\cos'(x) \\ &= -\sin(x)\cos(x) + \cos(x)(-\sin(x)) = -2\sin(x)\cos(x)\ . \end{aligned}$$

Hier habe ich wiederum $\cos'(x) = -\sin(x)$ verwendet.

**Lösung von Aufgabe 6.8:** Hier soll im wesentlichen die Kettenregel zur Berechnung der ersten Ableitung verwendet werden. Im a)-Teil betrachte ich die Funktion $f(x) = (x^2 - 4x + 2)^{16}$. Die äußere Ableitung ist $(\bar{x}^{16})' = 16\bar{x}^{15}$. Die Variable $\bar{x}$ steht hier für den Term $x^2 - 4x + 2$ und deshalb benötige ich zusätzlich die innere Ableitung. Diese ist $(x^2 - 4x + 2)' = (x^2)' - 4(x)' + (2)' = 2x - 4 = 2(x-2)$. Somit erhalte ich gemäß der Kettenregel

$$f'(x) = 32\ (x-2)(x^2 - 4x + 2)^{15}\ .$$

Im b)-Teil betrachte ich die Funktion $f(x) = \exp(x^2 - x)$. Die äußere Ableitung ist $\exp(\bar{x})' = \exp(\bar{x})$, während die innere Ableitung $(x^2 - x)' = 2x - 1$ ist. Somit erhalte ich $f'(x) = (2x-1)\ e^{x^2-x}$. Im c)-Teil ist für $n, m \in \mathbb{N}$ die Funktion $f(x) = x^{n/m},\ x > 0$, vorgegeben. Dieses $f$ ist die Verkettung der Potenz-Funktion $\bar{x}^n$ mit der m-ten Wurzel-Funktion, denn ich kann diese ja auch folgendermaßen hinschreiben $f(x) = (\sqrt[m]{x})^n$. Deshalb ist $f$ ableitbar, denn für $x > 0$ sind die beiden beteiligten Verkettungsfunktionen ableitbar. Die äußere Ableitung ist hier

$(\bar{x}^n)' = n\ \bar{x}^{n-1}$, während die innere Ableitung $(\sqrt[m]{x})' = 1/m\ x^{1/m-1}$ ist (schauen Sie sich gegebenenfalls noch einmal nach, was ich Ihnen über die Ableitung der $m$-ten Wurzel-Funktion für $x > 0$ erzählt hatte). Ich erhalte also

$$f'(x) = \tfrac{1}{m}\ x^{\frac{1}{m}-1}\ n\ (x^{\frac{1}{m}})^{n-1} = \tfrac{n}{m}\ x^{\frac{1}{m}-1+\frac{n-1}{m}}\ .$$

Den Exponenten kann ich hier noch ein wenig vereinfachen, indem ich den Hauptnenner bilde und zusammenfasse

$$\frac{1}{m} - 1 + \frac{n-1}{m} = \frac{1-m+n-1}{m} = \frac{n-m}{m} = \frac{n}{m} - 1\ .$$

Schließlich kann ich also die Ableitung von $f(x) = x^{n/m}$ für $x > 0$ schreiben als

$$f'(x) = \tfrac{n}{m}\ x^{\frac{n}{m}-1}\ .$$

Ich stelle hier übrigens fest, dass die Grobregel zur Berechnung der ersten Ableitung (schreibe den Exponenten $n/m$ multiplikativ nach vorne und ziehe eins von diesem Exponenten ab) für diese Funktion ebenfalls gültig ist.
Im d)-Teil betrachte ich schließlich die Funktion $f(x) = (1-x^2)\ (x^2+1)^{-2}$. Um den Teilterm $(x^2+1)^{-2}$ abzuleiten kann ich die Kettenregel verwenden. Darüberhinaus muß ich allerdings beachten, dass dieser Term mit $(1-x^2)$ multipliziert wird und deßhalb insgesamt die Produktregel erforderlich ist. In der Tat handelt es sich hier um eine Aufgabe bei der man Produkt- und Kettenregel kombinieren kann. Verwende ich zunächst die Produktregel, so erhalte ich

$$f'(x) = (1-x^2)'\ (x^2+1)^{-2} + (1-x^2)\ ((x^2+1)^{-2})'\ .$$

Um weiter fortzufahren muß ich also $(1-x^2)$ und $(x^2+1)^{-2}$ ableiten. Ersteres ist relativ einfach, denn es handelt sich hierbei um eine Polynom-Funktion: $(1-x^2)' = -2x$. Für den anderen Term $(x^2+1)^{-2}$ verwende ich die Kettenregel

$$((x^2+1)^{-2})' = (-2)\ 2x\ (x^2+1)^{-3} = \frac{-4x}{(x^2+1)^3}\ .$$

Ich erhalte somit

$$f'(x) = (-2x)\frac{1}{(x^2+1)^2} + (1-x^2)\frac{-4x}{(x^2+1)^3}\ .$$

Ich erweitere nun den ersten Term mit $(x^2+1)$ und gelange auf

$$f'(x) = \frac{-2x(x^2+1) + (1-x^2)(-4x)}{(x^2+1)^3}\ .$$

Den hier auftretenden Zähler kann ich vereinfachen, indem ich zunächst ausmultipliziere und dann Terme gleicher Bauart zusammen gruppiere

$$-2x(x^2+1) + (1-x^2)(-4x) = -2x^3 - 2x - 4x + 4x^3 = 2x^3 - 6x = 2x(x^2-3)\ .$$

Damit gelange ich auf die folgende, bequeme Darstellung der gesuchten ersten Ableitung:

$$f'(x) = 2x \ \frac{x^2 - 3}{(x^2 + 1)^3} \ = 2x \ (x^2 - 3) \ (x^2 + 1)^{-3} \ .$$

**Lösung von Aufgabe 6.9:** Hier soll die Quotientenregel zur Berechnung der ersten Ableitung verwendet werden. Im a)-Teil betrachte ich die gebrochen-rationale Funktion $f(x) = (x - 4)/(2\ x^2 + 1)$. Der Zähler sowohl als auch der Nenner sind hier ableitbare Funktionen, denn es handelt sich dabei jeweils um Polynome. Außerdem ist der Nenner dieser Funktion stets ungleich 0, denn es gilt $2\ x^2 + 1 \geq 1 > 0$. Somit ist $f$ für beliebige $x$ ableitbar. Ich berechne die erste Ableitung $f'$ durch Anwenden der Quotientenregel

$$f'(x) = \frac{(x - 4)'(2\ x^2 + 1) - (x - 4)(2\ x^2 + 1)'}{(2\ x^2 + 1)^2} \ .$$

Um $f'$ näher zu bestimmen sollte ich also die Ableitung des Nenner- und Zählerpolynoms in der Festlegung von $f$ kennen. Diese sind wie folgt

$$(x - 4)' = 1, \ (2\ x^2 + 1)' = 4x \ .$$

Ich setze dies oben ein und erhalte

$$f'(x) = \frac{2\ x^2 + 1 - (x - 4)4x}{(2\ x^2 + 1)^2} = \frac{2\ x^2 + 1 - 4x^2 + 16x}{(2\ x^2 + 1)^2} = \frac{-2\ x^2 + 16x + 1}{(2\ x^2 + 1)^2} \ .$$

Im b)-Teil liegt die gebrochen-rationale Funktion $f(x) = (x + 4)/(2\ x^2 - 1)$ vor, die durch einen ähnlichen Term wie die Funktion im a)-Teil beschrieben wird. Zähler und Nenner sind wiederum Polynome und damit überall ableitbar. Der Nenner hat allerdings zwei Nullstellen, denn die Gleichung

$$2\ x^2 - 1 = 0, \text{ beziehungsweise } x^2 = \frac{1}{2},$$

hat die beiden reellen Lösungen $x_1 = \sqrt{2}/2$ und $x_2 = -\sqrt{2}/2$. An diesen Stellen darf ich die Funktion $f$ nicht ableiten. Für alle anderen Stellen, also $x \neq \sqrt{2}/2$ und $x \neq -\sqrt{2}/2$, bestimme ich die Ableitung von $f$ in ähnlicher Weise wie im a)-Teil. Ich berechne für diese Stellen

$$f'(x) = \frac{(x + 4)'(2\ x^2 - 1) - (x + 4)(2\ x^2 - 1)'}{(2\ x^2 - 1)^2} \ .$$

Jetzt bestimme ich die Ableitung des Nenner- und Zählerpolynoms in der Festlegung von $f$:

$$(x + 4)' = 1, \ (2\ x^2 - 1)' = 4x \ .$$

Ich setze dies oben ein und erhalte

$$f'(x) = \frac{2\ x^2 - 1 - (x + 4)4x}{(2\ x^2 - 1)^2} = \frac{2\ x^2 - 1 - 4x^2 - 16x}{(2\ x^2 - 1)^2} = (-1) \ \frac{2\ x^2 + 16x + 1}{(2\ x^2 - 1)^2} \ .$$

Im c)-Teil soll $f(x) = \sin(x)/x$ abgeleitet werden. Da $\sin(x)$ und $x$ ableitbare Funktionen sind und der Nenner nur für $x_1 = 0$ verschwindet, folgt dass die vorgegebene Funktion für alle reellen Zahlen ableitbar ist, die ungleich 0 sind. Die erste Ableitung dieser Funktion berechne ich mit der Quotientenregel wie folgt

$$f'(x) = \frac{\sin'(x)x - \sin(x)(x)'}{x^2} = \frac{\cos(x)x - \sin(x)}{x^2},$$

denn $\sin'(x) = \cos(x)$ und $(x)' = 1$. Wenn ich möchte, so kann ich $f'$ auch wie folgt hinschreiben

$$f'(x) = \frac{\cos(x)}{x} - \frac{\sin(x)}{x^2} \ .$$

Im d)-Teil soll ich die Funktion $f(x) = (1-x^2)/(x^2+1)^2$ ableiten. Dies ist wiederum eine gebrochen-rationale Funktion. Deren Nenner verschwindet nirgends, denn für diesen gilt $(x^2+1)^2 \geq 1 > 0$. Zudem stelle ich fest, dass es sich wegen $1/(x^2+1)^2 = (x^2+1)^{-2}$ um die selbe Funktion wie in Aufgabe 6.8 d) handelt. Dort hatte ich die Funktion durch Verwendung von Produkt- und Kettenregel abgeleitet. Ich zeige nun wie ich diese Funktion alternativ direkt mit der Quotientenregel ableiten kann. Wende ich diese an, so erhalte ich zunächst

$$f'(x) = \frac{(1-x^2)'(x^2+1)^2 - (1-x^2)((x^2+1)^2)'}{((x^2+1)^2)^2} \ .$$

Um fortfahren zu können muß ich nun die Ableitung von $1 - x^2$ und $(x^2+1)^2$ berechnen. Das Polynom $1 - x^2$ kann ich leicht ableiten: $(1-x^2)' = -2x$. Die Funktion $(x^2+1)^2$ kann ich ableiten, indem ich die Kettenregel anwende: $((x^2+1)^2)' = 2\ 2x\ (x^2+1) = 4x\ (x^2+1)$. Jetzt erhalte ich

$$f'(x) = \frac{(-2x)(x^2+1)^2 - (1-x^2)(4x)(x^2+1)}{(x^2+1)^4} \ .$$

Natürlich könnte ich jetzt – wie ich dies in meinen obigen Lösungen gemacht habe – nun fortfahren, indem ich die Terme im Zähler weiter ausrechne und dann zusammenfasse. Bei der Ableitung von gebrochen-rationalen Funktionen kann man sich das Leben aber oftmals etwas einfacher machen, indem man rechtzeitig kürzt. Ein solche Situation liegt hier vor, denn der Term $x^2 + 1$ tritt sowohl im Zähler als auch im Nenner auf

$$f'(x) = \frac{((-2x)(x^2+1) - (1-x^2)(4x))(x^2+1)}{(x^2+1)^4} \ ,$$

und ich kann diesen somit wegkürzen:

$$f'(x) = \frac{(-2x)(x^2+1) - (1-x^2)(4x)}{(x^2+1)^3} \ ,$$

Erst jetzt multipliziere ich die Terme im Zähler aus und gruppiere dort Terme gleicher Bauart. Der Zähler ist also wie folgt vereinfachbar:

$$(-2x)(x^2+1) - (1-x^2)(4x) = -2x^3 - 2x - 4x + 4x^3 = 2x^3 - 6x = 2x(x^2-3) \ .$$

Schließlich erhalte ich hiermit das selbe Ergebnis wie in Aufgabe 6.8 d):

$$f'(x) = \frac{2x(x^2-3)}{(x^2+1)^3} = 2x\ \frac{x^2-3}{(x^2+1)^3}\ .$$

Im e)-Teil sollte nun noch die Funktion $f(x) = (-x^2 + x + 2)/e^x$ abgeleitet werden. Diese Funktion ist für alle $x$ ableitbar, denn der Zähler (Polynom-Funktion) und der Nenner (Exponential-Funktion) sind ableitbare Funktionen und der Nenner verschwindet nirgends: $e^x \neq 0$ für alle $x$. Anwendung der Quotientenregel ergibt zunächst

$$f'(x) = \frac{(-x^2+x+2)'e^x - (-x^2+x+2)(e^x)'}{(e^x)^2}\ .$$

Glücklicherweise weiß ich wie ich die Ableitung des Polynoms $-x^2 + x + 2$ und der Exponential-Funktion bestimmen kann: $(-x^2 + x + 2)' = -2x + 1$ und $(e^x)' = e^x$. Außerdem gilt nach den Potenz-Rechengesetzen $(e^x)^2 = e^{2x}$. Somit erhalte ich

$$f'(x) = \frac{(-2x+1)e^x - (-x^2+x+2)e^x}{e^{2x}}\ .$$

Ähnlich wie in der Lösung des vorherigen Aufgabenteils klammere ich nun erst einmal $e^x$ im Zähler aus und kürze dann $e^x$ weg:

$$f'(x) = \frac{((-2x+1) - (-x^2+x+2))e^x}{e^{2x}} = \frac{(-2x+1) - (-x^2+x+2)}{e^x}\ .$$

Hier habe ich $e^x/e^{2x} = e^x e^{-2x} = e^{x-2x} = e^{-x} = 1/e^x$ verwendet. Jetzt ist es an der Zeit den Zähler weiter zu vereinfachen. Hierzu fasse ich Terme gleicher Bauart zusammen:

$$f'(x) = \frac{-2x+1+x^2-x-2}{e^x} = \frac{x^2-3x-1}{e^x}\ .$$

**Lösung von Aufgabe 6.10:** a) Die Polynom-Funktion

$$p(x) = 4\ x^4 - 6\ x^2 + e^8$$

besitzt die folgenden Ableitungen. Die erste Ableitung ist

$$p'(x) = 4\ (x^4)' - 6\ (x^2)' + e^8(1)' = 4 \cdot 4x^3 - 6 \cdot 2x + 0 = 16x^3 - 12x\ .$$

Hierbei beachte ich, dass $e^8$ eine Konstante ist – dessen Ableitung ist also identisch 0. Die zweite Ableitung ist

$$p''(x) = (p'(x))' = (16x^3 - 12x)' = 16(x^3)' - 12(x)' = 16 \cdot 3x^2 - 12 = 48x^2 - 12\ .$$

Die dritte Ableitung ist

$$p^{(3)}(x) = (p^{(2)}(x))' = (48x^2 - 12)' = 96x\ .$$

Weiter sind $p^{(4)}(x) = 96$ und $p^{(i)}(x) = 0,\ i \geq 5$.
b) Bei der Bildung der Ableitungen des Polynoms

$$f_t(x) = t^3\ x^3 - t\ x^2 + t\ x + t^3$$

beachte ich, dass ich nach der Variablen $x$ ableiten muß. Der Parameter $t$ ist hierbei wie eine Konstante zu behandeln. Ich berechne zunächst die erste Ableitung

$$f_t'(x) = t^3\ (x^3)' - t\ (x^2)' + t\ (x)' + t^3(1)' = 3t^2\ x^2 - 2t\ x + t.$$

Nun bestimme ich die zweite Ableitung so wie ich es für Polynome gewohnt bin:

$$f_t''(x) = (f_t'(x))' = (3t^2\ x^2 - 2t\ x + t)' = 3t^2\ (x^2)' - 2t\ (x)' + (t)' = 6t^2\ x - 2t.$$

Schließlich ergeben sich

$$f_t'''(x) = 6t^2\ (x)' - (2t)' = 6t^2\ ,$$

und $f_t^{(i)}(x) = 0,\ i \geq 4$.

**Lösung von Aufgabe 6.11:** Die zweite Ableitung von $f(x) = e^{x^2-x}$ wurde bereits vor der Formulierung dieser Aufgabe berechnet: $f''(x) = (4\ x^2 - 4\ x + 3)\ e^{x^2-x}$. Da das Polynom $4\ x^2 - 4\ x + 3$ und die Funktion $e^{x^2-x}$ (als Verkettung der Exponential-Funktion mit einem Polynom) ableitbar sind ist $f''$ ableitbar und ich kann die Ableitung von $f''$ – die dritte Ableitung von $f$ – mithilfe der Produktregel ausrechnen. Ich bestimme

$$\begin{aligned} f'''(x) &= (f''(x))' = ((4\ x^2 - 4\ x + 3)\ e^{x^2-x})' \\ &= (4\ x^2 - 4\ x + 3)'\ e^{x^2-x} + (4\ x^2 - 4\ x + 3)\ (e^{x^2-x})'\ . \end{aligned}$$

Die Polynom-Funktion $4\ x^2 - 4\ x + 3$ läßt sich einfach ableiten: $(4\ x^2 - 4\ x + 3)' = 8x - 4$. Die Ableitung von $e^{x^2-x}$ kann ich nach der Kettenregel wie in Übungsaufgabe 6.8 b) bestimmen: $(e^{x^2-x})' = (2x-1)e^{x^2-x}$. Setze ich dies oben ein, so erhalte ich

$$\begin{aligned} f'''(x) &= (8x-4)\ e^{x^2-x} + (4\ x^2 - 4\ x + 3)(2x-1)\ e^{x^2-x} \\ &= ((8x-4) + (4\ x^2 - 4\ x + 3)(2x-1))\ e^{x^2-x}\ . \end{aligned}$$

Multipliziere ich nun die Terme in der Klammer aus und sammle dann nach Termen gleicher Bauart so gelange ich auf die folgende Darstellung für die dritte Ableitung von $f$:

$$f'''(x) = (8x - 4 + 8x^3 - 8x^2 + 6x - 4x^2 + 4x - 3)\ e^{x^2-x} = (8x^3 - 12x^2 + 18x - 7)\ e^{x^2-x}\ .$$

Zur Berechnung der vierten Ableitung von $f$ verfahre ich analog.

$$\begin{aligned}
f''''(x) &= (f'''(x))' = ((8x^3 - 12x^2 + 18x - 7)\ e^{x^2-x})' \\
&= (8x^3 - 12x^2 + 18x - 7)'\ e^{x^2-x} + (8x^3 - 12x^2 + 18x - 7)\ (e^{x^2-x})' \\
&= ((24x^2 - 24x + 18) + (8x^3 - 12x^2 + 18x - 7)(2x - 1))\ e^{x^2-x} \\
&= (24x^2 - 24x + 18 + 16x^4 - 24x^3 + 36x^2 - 14x - 8x^3 + 12x^2 - 18x + 7)\ e^{x^2-x} \\
&= (16x^4 - 32x^3 + 72x^2 - 56x + 25)\ e^{x^2-x}\ .
\end{aligned}$$

**Lösung von Aufgabe 6.12:** Ich betrachte hier die abschnittsweise festgelegte Funktion

$$f(x) = \begin{cases} (-1/2)\ x^2, & \text{falls } x \geq 0 \\ 1/2\ x^2, & \text{falls } x < 0 \end{cases} .$$

Die einzige kritische Stelle hinsichtlich der Ableitbarkeit dieser Funktion ist die Stelle $x = 0$, da an den sonstigen Stellen die Funktion mit einem quadratischen Polynom übereinstimmt. Ich möchte nun – ohne die Verwendung von Differenzenquotienten – sehen, dass diese Funktion einmal ableitbar ist. Hierzu schaue ich mir die Ableitung für $x > 0$ und $x < 0$ an. Verwende ich meine Kenntnisse über die Ableitung von Polynomen, so sehe ich

$$f'(x) = \begin{cases} -x, & \text{falls } x > 0 \\ x, & \text{falls } x < 0 \end{cases} .$$

Damit stimmt der rechtseitige und linkseitige Grenzwert der Ableitungen an der Stelle $x = 0$ überein

$$\lim_{\substack{h\to 0\\ h>0}} (-h) = 0 = \lim_{\substack{h\to 0\\ h<0}} h\ .$$

Folglich ist $f$ einmal ableitbar. Wegen $f'(0) = 0$ kann ich unter Verwendung der obigen abschnittsweise Darstellung von $f'$ sehen, dass $f'(x) = -|x|$ gilt. Da nach den Ausführungen von Abschnitt 6.1 die Betragsfunktion $|.|$ in 0 nicht ableitbar ist, folgt dass $f'$ in 0 nicht ableitbar ist. Für die Funktion $f$ bedeutet dies, dass sie nicht zweimal ableitbar ist. Zusammenfassend ist $f$ also eine Funktion die einmal aber nicht zweimal ableitbar ist.

**Lösung von Aufgabe 6.13:** In dieser Aufgabe muß ich die Funktion $f(x) = e^{x^2-x}$ hinsichtlich lokaler Extrema untersuchen. Es bietet sich deshalb an die erste und zweite Ableitung dieser Funktion zu verwenden. Diese kenne ich aus Beispiel 6.25:

$$f'(x) = (2x - 1)\ e^{x^2-x} \text{ und } f''(x) = (4\ x^2 - 4\ x + 3)\ e^{x^2-x}\ .$$

Ich suche die Nullstellen der ersten Ableitung von $f$, indem ich die Gleichung

$$(2x - 1)\ e^{x^2-x} = 0$$

betrachte. Wegen $e^{x^2-x} \neq 0$ folgt $2x - 1 = 0$, das heißt $x = 1/2$. Die Stelle $x = 1/2$ ist somit der einzige Kandidat für ein lokales Extremum von $f$. Zur Überprüfung der

Extremaleigenschaft dieser Stelle und zur Feststellung der Art des Extremums setze ich diese Stelle in die zweite Ableitung ein. Ich erhalte

$$f''(\tfrac{1}{2}) = (4\ (\tfrac{1}{2})^2 - 4\ \tfrac{1}{2} + 3)\ e^{(\frac{1}{2})^2 - \frac{1}{2}} = (4\tfrac{1}{4} - 2 + 3)\ e^{\frac{1}{4} - \frac{1}{2}} = 2e^{-\frac{1}{4}} > 0\ .$$

Deshalb handelt es sich bei der Stelle $x = 1/2$ um ein lokales Minimum. Die $y$-Koordinate des zugehörigen Tiefpunkt des Graphen von $f(x) = e^{x^2 - x}$ berechne ich indem ich $x = 1/2$ in die Funktion einsetze. Ich berechne also

$$f(\tfrac{1}{2}) = e^{(\frac{1}{2})^2 - \frac{1}{2}} = e^{-\frac{1}{4}}\ .$$

Der einzige Extrempunkt von $f$ ist somit der Tiefpunkt $T = (1/2|e^{-1/4})$.

**Übungsaufgabe 6.14:** a) Ich bestimme die ersten drei Ableitungen des Polynoms $f(x) = (1/12)x^4$. Diese sind wie folgt

$$f'(x) = (1/3)\ x^3,\ \ f''(x) = x^2,\ \ f'''(x) = 2x.$$

Zum Test auf Wendestellen setze ich die zweite Ableitung gleich 0, das heißt $x^2 = 0$. Somit ist $x = 0$ der Kandidat für eine Wendestelle. Jedoch gilt offenbar $f'''(0) = 0$. Somit kann ich mit der Standardvorgehensweise hier nichts weiter aussagen. Um zu zeigen, dass in $x = 0$ tatsächlich keine Wendestelle vorliegt betrachte ich $f'(x) = (1/3)\ x^3$ und den Graph dieser Funktion, der in Abbildung 6.31 veranschaulicht ist. Diese Funktion besitzt in $x = 0$ kein Extremum. Da die Wendestellen von $f$ aber immer Extrema von $f'$ sind folgt, dass $x = 0$ keine Wendestelle von $f$ sein kann.

b) Gemäß Beispiel 6.25 ist $f''(x) = (4x^2 - 4x + 3)\ e^{x^2 - x}$ die zweite Ableitung der hier vorgegebenen Funktion $f(x) = e^{x^2 - x}$. Um Kandidaten für Wendestellen zu finden setze ich die zweite Ableitung $f''(x)$ gleich 0:

$$(4x^2 - 4x + 3)\ e^{x^2 - x} = 0$$

Wegen $e^{x^2 - x} \neq 0$ ist dies gleichbedeutend mit $4x^2 - 4x + 3 = 0$. Teilen dieser Gleichung durch 4 zeigt mir, dass ich also die quadratische Gleichung

$$x^2 - x + \tfrac{3}{4} = 0$$

lösen muß. Die p-q-Formel (mit $p = -1$ und $q = 3/4$) ergibt

$$x_1 = \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{3}{4}} = \frac{1}{2} + \sqrt{-\frac{1}{2}} \text{ und } x_2 = \frac{1}{2} - \sqrt{-\frac{1}{2}}\ .$$

Da hier eine negative Zahl unter der Wurzel steht existieren keine reellen Lösungen dieser Gleichung. Dies bedeutet, dass $f''$ an keiner Stelle den Wert 0 hat. Somit folgt, dass $f$ keine Wendestellen besitzt, denn an solchen Stellen müßte die zweite Ableitung verschwinden (notwendiges Kriterium).

**Lösung von Aufgabe 6.15:** In dieser Aufgabe sollte eine Kurvendiskussion des Graphen der Funktion $f_t(x) = t^3/x^2 - t$ durchgeführt werden. Hierbei soll $t > 0$ ein fester Parameter sein. Ich beginne mit der Bestimmung des Definitionsbereichs $D_{f_t}$ dieser Funktion. Ausschliesen muß ich hier Stellen an denen ich bei Einsetzen in $f_t$ durch 0 teilen würde. Die einzige Stelle die ich nicht einsetzen darf ist offenbar $x = 0$. Somit gilt $D_{f_t} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Nun untersuche ich $f_t$ hinsichtlich Nullstellen, das heißt Stellen $x$ für die $f_t(x) = 0$ gilt. Diese Bedingung führt auf die Gleichung

$$\frac{t^3}{x^2} - t = 0, \text{ beziehungsweise } \frac{t^3}{x^2} = t \ .$$

Da $t > 0$ gelten soll, kann ich die letzte Gleichung durch $t$ teilen und erhalte $t^2/x^2 = 1$. Multipliziere ich dies mit $x^2$ so sehe ich, dass die Nullstellen von $f_t$ die Bedingung $t^2 = x^2$ erfüllen. Somit folgt, dass $x_1 = -t$ und $x_2 = t$ die Nullstellen von $f_t$ sind. Das kann ich auch nochmal nachprüfen indem ich diese Stellen in $f_t$ einsetze: $f_t(t) = t^3/t^2 - t = t - t = 0$ und $f_t(-t) = t^3/(-t)^2 - t = t^3/t^2 - t = 0$. Nun untersuche ich $f_t$ hinsichtlich lokaler Extrema. Hierzu bilde ich für alle $x$ aus dem Definitionsbereich $D_{f_t}$ die erste Ableitung von $f_t$:

$$f_t'(x) = (t^3\ x^{-2} - t)' = -2t^3\ x^{-3} \ .$$

Die Bedingung für das Verschwinden der ersten Ableitung ist nun

$$(-2)\frac{t^3}{x^3} = 0, \text{ beziehungsweise } \frac{t^3}{x^3} = 0 \ .$$

Egal was ich hier für $x$ einsetze – diese Gleichung ist nicht erfüllbar. Deshalb gibt es keine Stellen an denen $f_t'$ verschwindet. Somit besitzt $f_t'$ keine lokalen Extrema. Ich mache mir also ein paar Gedanken um das Monotonieverhalten dieser Funktion. Ist $x > 0$, so gilt wegen $t > 0$:

$$f_t'(x) = \overbrace{-2}^{<0} \underbrace{t^3\ x^{-3}}_{>0} < 0 \ .$$

Die erste Ableitung $f_t'$ von $f_t$ ist also für $x > 0$ stets negativ. Dies bedeutet, dass $f_t$ in diesem Bereich streng monoton fallend ist. Ähnlich kann ich nun für $x < 0$ argumentieren um zu sehen, dass $f_t$ in diesem Bereich streng monoton steigend ist. Ich untersuche die Funktion nun auf mögliche Wendestellen. Hierzu bilde ich die zweite Ableitung

$$f_t''(x) = (-2t^3\ x^{-3})' = 6t^3\ x^{-4} \ ,$$

und sehe genauso wie oben ein, dass die Bedingung $6t^3\ x^{-4} = 0$ für kein $x$ erfüllt ist. Es gibt also keine Wendepunkte des Graphen von $f_t$. Ich stelle nun fest, dass der Graph von $f_t$ achsensymmetrisch zur $y$-Achse ist, denn es gilt

$$f_t(-x) = \frac{t^3}{(-x)^2} - t = \frac{t^3}{x^2} - t = f_t(x)$$

für alle $x$ aus dem Definitionsbereich. Wegen

$$\lim_{x\to\infty} f_t(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{t^3}{x^2} - t = -t$$

und

$$\lim_{x\to-\infty} f_t(x) = -t$$

ist schließlich $a_{f_t}(x) = -t$ die horizontale Asymptote von $f_t$.

**Lösung von Aufgabe 6.16:** Ich bezeichne die Seitenlängen des rechteckigen Bauplatz Ihrer neuen Villa mit $x$ und $y$. Da Sie eine Fläche von 2 Quadratkilometern benötigen und der Flächeninhalt des Rechtecks durch $xy$ gegeben ist, kann ich $y$ durch $x$ ausdrücken. Es gilt

$$y = \frac{2}{x} \; .$$

Ihre Idee ist es Einsparungen vorzunehmen, indem Sie die Länge der Umzäunung des auszuwählenden Grundstücks – also dessen Umfang – zu minimieren. In Abhängigkeit von $x$ und $y$ ist dieser Umfang $2(x+y)$. Beachte ich die obige Relation von $x$ und $y$, die sich aus der Größe des Grundstücks ergab, so gelange ich also auf die folgende zu minimierende (den Umfang darstellende) Funktion

$$f(x) = 2(x + \frac{2}{x}) \; ,$$

die nur noch von der Variablen $x > 0$ abhängt. Um Kandidaten für lokale Extrema zu finden und diese zu überprüfen leite ich diese Funktion zweimal ab. Ich berechne

$$f'(x) = 2(1 - \frac{2}{x^2}) \text{ und } f''(x) = \frac{8}{x^3} \; .$$

Ich setze nun die erste Ableitung gleich 0 und gelange auf die Bedingung $1-2/x^2 = 0$, das heißt $1 = 2/x^2$, also $x^2 = 2$. Als zulässigen Kandidaten für ein lokales Extremum erhalte ich somit $x_0 = \sqrt{2}$. Einsetzen dieser Stelle in die zweite Ableitung ergibt $f''(\sqrt{2}) = 8/(\sqrt{2})^3 = 4/\sqrt{2} > 0$. Ich erkenne somit, dass $x_0 = \sqrt{2}$ das einzige lokale Extremum von $f$ (im zulässigen Bereich $x > 0$) ist und dass es sich hierbei – wie gewünscht – um ein lokales Minimum handelt. Der Umfang des Grundstücks hat dann die Länge von

$$f(\sqrt{2}) = 2(\sqrt{2} + 2/\sqrt{2}) = 2(\sqrt{2} + \sqrt{2}) = 4\sqrt{2} \approx 5.66$$

Kilometern. Die verbleibende Seitenlänge $y$ berechnet sich aus der obigen Relation $y = 2/\sqrt{2} = \sqrt{2}$. Aus dem Blickwinkel der Umfangsminimierung stellt also ein quadratisches Grundstück mit Seitenlängen $x = y = \sqrt{2} \approx 1.41$ Kilometer die ideale Lösung für Sie dar. Ein Anwesen beeindruckender Größe – Gratulation.

**Lösung von Aufgabe 6.17:** a) Der Inhalt der Fläche, die der Graph von $f(x) = x^2$ bei Durchlauf von $[1, 3]$ mit der $x$-Achse umschließt läßt sich durch das bestimmte Integral

$$\int_1^3 x^2\ dx = \frac{3^3}{3} - \frac{1^3}{3}$$

ausdrücken. Berechne ich hier die rechte Seite, so erhalte ich als Ergebnis $27/3 - 1/3 = 26/3$.

b) Der Inhalt der Fläche, die der Graph von $f(x) = x^2$ bei Durchlauf von $[1, t]$ für $t > 1$ mit der $x$-Achse umschließt läßt sich durch das bestimmte Integral

$$\int_1^t x^2\ dx = \frac{t^3}{3} - \frac{1}{3}$$

ausdrücken. Dieser Flächeninhalt soll nun $7/3$ sein, und deshalb sehe ich, dass die Bedingung

$$\frac{t^3}{3} - \frac{1}{3} = \frac{7}{3}$$

gelten muß. Dies ist gleichbedeutend mit $t^3/3 = 8/3$, beziehungsweise $t^3 = 8$. Wegen $t > 1$ folgt nun, dass $t = 2$ die gesuchte Stelle ist.

**Lösung von Aufgabe 6.18:** a) Ich berechne zunächst den orientierten Flächeninhalt, indem ich lediglich das Integral auswerte. Die Integrationsregeln erlauben mir die folgende Vereinfachung

$$\int_{-1}^1 x^3 - x\ dx = \int_{-1}^1 x^3\ dx - \int_{-1}^1 x\ dx\ .$$

Mit meinen Kenntnissen über die Integration von Potenzfunktionen rechne ich nun

$$\int_{-1}^1 x^3\ dx = \frac{1^4}{4} - \frac{(-1)^4}{4} = 0 \text{ und } \int_{-1}^1 x\ dx = \frac{1^2}{2} - \frac{(-1)^2}{2} = 0$$

aus. Es ergibt sich somit der orientierte Flächeninhalt

$$\int_{-1}^1 x^3 - x\ dx = 0 - 0 = 0.$$

Nun wende ich mich dem absoluten Flächeninhalt zu. Hierzu sollte ich wissen, an welchen Stellen der Integrand das Vorzeichen wechselt. Ich untersuche somit zunächst den Integranden $x^3 - x$ auf dessen Nullstellen. Dieser läßt sich wie folgt in Linearfaktoren zerlegen

$$x^3 - x = x(x^2 - 1) = x(x - 1)(x + 1)\ .$$

Dies kann ich beispielsweise durch Verwenden der Binomischen Formel noch einmal nachprüfen. Damit sind $-1, 0$ und $1$ die Nullstellen des Intgranden, denn das Produkt auf der rechten Seite der letzten Gleichung ist genau dann $0$ wenn entweder $x = 0$

oder $x = -1$ oder $x = 1$ gilt. An der Stelle 0 wechselt tatsächlich das Vorzeichen des Integranden. Das schaue ich mit genauer an. Für $-1 \leq x < 0$ gelten $x < 0, x - 1 < 0$ und $x + 1 \geq 0$, so dass $x^3 - x = x(x-1)(x+1) \geq 0$ folgt. Für $0 < x \leq 1$ gelten $x > 0, x - 1 \leq 0$ und $x + 1 > 0$, so dass $x^3 - x = x(x-1)(x+1) \leq 0$ folgt. Ich stelle also fest, dass der Integrand für $-1 \leq x < 0$ nicht negativ ist, während dieser für $0 < x \leq 1$ nicht positiv ist – also insbesondere einen Vorzeichenwechsel von + nach − an der Stelle 0 hat. Somit ergibt sich aus der Festlegung des Betrags der absolute Flächeninhalt wie folgt

$$\int_{-1}^{1} |x^3 - x| \; dx = \int_{-1}^{0} x^3 - x \; dx + \int_{0}^{1} -(x^3 - x) \; dx \; .$$

Verwende ich die Integrationsregeln und meine Kenntnisse über die Integration von Potenzfunktionen, so erhalte ich weiter

$$\int_{-1}^{0} x^3 - x \; dx = \int_{-1}^{0} x^3 \; dx - \int_{-1}^{0} x \; dx = \frac{0^4}{4} - \frac{(-1)^4}{4} - \frac{0^2}{2} + \frac{(-1)^2}{2} = \frac{1}{4} \; ,$$

beziehungsweise

$$\int_{0}^{1} -x^3 + x \; dx = -\int_{0}^{1} x^3 \; dx + \int_{0}^{1} x \; dx = -\frac{1^4}{4} + \frac{0^4}{4} + \frac{1^2}{2} - \frac{0^2}{2} = \frac{1}{4} \; .$$

Insgesamt ergibt sich somit für den absoluten Flächeninhalt

$$\int_{-1}^{1} |x^3 - x| \; dx = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \; .$$

b) Verwende ich die Integrationsregeln, so erhalte ich

$$\int_{-1}^{1} 4x^4 - 6x^2 + e^8 \; dx = 4 \int_{-1}^{1} x^4 \; dx - 6 \int_{-1}^{1} x^2 \; dx + e^8 \int_{-1}^{1} 1 \; dx \; .$$

Meine Kenntnisse über die Integration von Potenzfunktionen führen auf

$$\begin{aligned} \int_{-1}^{1} x^4 \; dx &= \frac{1^5}{5} - \frac{(-1)^5}{5} = \frac{2}{5} \\ \int_{-1}^{1} x^2 \; dx &= \frac{1^3}{3} - \frac{(-1)^3}{3} = \frac{2}{3} \\ \int_{-1}^{1} 1 \; dx &= 1 - (-1) = 2 \; . \end{aligned}$$

Somit folgt

$$\int_{-1}^{1} 4x^4 - 6x^2 + e^8 \; dx = 4 \cdot \frac{2}{5} - 6 \cdot \frac{2}{3} + e^8 \cdot 2 = \frac{8}{5} - 4 + 2 \; e^8 = -\frac{12}{5} + 2 \; e^8 \; .$$

Für die zweite Integrandenfunktion, $f_t(x) = t^3x^3 - tx^2 + tx + t^3$ gehe ich analog vor. Hier muß ich beachten, dass $t$ ein Parameter ist – also wie eine feste Zahl zu behandeln ist, während $x$ die Integrationsvariable ist. Verwende ich die Integrationsregeln, so erhalte ich

$$\int_{-1}^{1} t^3x^3 - tx^2 + tx + t^3 \; dx = t^3 \int_{-1}^{1} x^3 \; dx - t \int_{-1}^{1} x^2 \; dx + t \int_{-1}^{1} x \; dx + t^3 \int_{-1}^{1} 1 \; dx \; .$$

Meine Kenntnisse über die Integration von Potenzfunktionen führen auf

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^{1} x^3 \; dx &= \frac{1^4}{4} - \frac{(-1)^4}{4} = 0 \\
\int_{-1}^{1} x^2 \; dx &= \frac{1^3}{3} - \frac{(-1)^3}{3} = \frac{2}{3} \\
\int_{-1}^{1} x \; dx &= \frac{1^2}{2} - \frac{(-1)^2}{2} = 0 \\
\int_{-1}^{1} 1 \; dx &= 1 - (-1) = 2 \; .
\end{aligned}$$

Somit folgt

$$\int_{-1}^{1} t^3x^3 - tx^2 + tx + t^3 \; dx = t^3 \cdot 0 - t \cdot \frac{2}{3} + t \cdot 0 + t^3 \cdot 2 \; = 2t^3 - \frac{2}{3}t \; .$$

**Lösung von Aufgabe 6.19:** Hier ist die Integrandenfunktion $f(x) = -x^2 + 2x$ vorgegeben. Verwende ich die Integrationsregeln, so erhalte ich

$$\int_{0}^{t} -x^2 + 2x \; dx = -\int_{0}^{t} x^2 \; dx + 2 \int_{0}^{t} x \; dx \; .$$

Integriere ich nun die beiden Potenzfunktionen, so gelange ich auf

$$\int_{0}^{t} -x^2 + 2x \; dx = -\frac{t^3}{3} + \frac{0^3}{3} + 2(\frac{t^2}{2} - \frac{0^2}{2}) = -\frac{t^3}{3} + t^2 \; .$$

Ich fasse nun das Ergebnis als Funktion $F_0$ der Variablen $t$ auf:

$$F_0(t) = -\frac{t^3}{3} + t^2 \; ,$$

und leite diese spaßhalber ab:

$$F_0'(t) = -t^2 + 2t \; .$$

Ich erkenne an diesem Beispiel, dass die Ableitung von $F_0$ mit der Integrandenfunktion $f$ übereinstimmt:

$$F_0'(t) = f(t) \; .$$

**Lösung von Aufgabe 6.20:** a) Ich zeige, dass $H(x) = -1/3\ x^3 + x^2 - 12$ eine Stammfunktion von $h(x) = -x^2 + 2x$ ist, indem ich nachweise, dass die erste Ableitung von $H$ mit $h$ übereinstimmt. Ich berechne die erste Ableitung der Polynom-Funktion $H$

$$H'(x) = -\frac{1}{3}\ (x^3)' + (x^2)' - (12)' = -\frac{1}{3}\ 3x^2 + 2x - 0 = -x^2 + 2x,$$

und sehe in der Tat, dass diese mit $h(x)$ übereinstimmt.
b) Aus der Lösung von Übungsaufgabe 6.8 b) erkenne ich, dass $F(x) = e^{x^2-x}$ eine Stammfunktion von $f(x) = (2x-1)\ e^{x^2-x}$ ist, denn dort wurde $F$ – die Kettenregel verwendend – abgeleitet und das Ergebnis ist

$$F'(x) = (e^{x^2-x})' = (2x-1)\ e^{x^2-x} = f(x)\ .$$

Da die Ableitung konstanter Funktionen die Nullfunktion ist, kann ich eine beliebige Konstante zu $F$ hinzuaddieren und erhalte so eine weitere Stammfunktion von $f$. So ist beispielsweise $G(x) = e^{x^2-x} + 5$ eine Stammfunktion von $f(x) = (2x-1)\ e^{x^2-x}$, denn

$$G'(x) = (F(x) + 5)' = F'(x) + (5)' = F'(x) + 0 = F'(x) = f(x)\ .$$

**Lösung von Aufgabe 6.21:** Im a)-Teil ist $\int_0^2 -x^2 + 2x\ dx$ mit der Funktion $H$ aus Übungsaufgabe 6.20 a) zu berechnen. Dort haben wir uns gemeinsam klar gemacht, dass $H(x) = -1/3\ x^3 + x^2 - 12$ eine Stammfunktion von $h(x) = -x^2 + 2x$ ist. Nach dem Hauptsatz der Differenzial- und Integralrechnung kann ich nun das gesuchte bestimmte Integral berechnen, indem ich $H(2) - H(0)$ ausrechne. Somit bestimme ich

$$\int_0^2 -x^2 + 2x\ dx = H(2) - H(0) = -\frac{1}{3}\ 2^3 + 2^2 - 12 - (-\frac{1}{3}\ 0^3 + 0^2 - 12) = -\frac{8}{3} + 4 = \frac{4}{3}\ .$$

Sie erkennen, dass das Ergebnis glücklicherweise mit jenem übereinstimmt, dass ich durch die Vorgehensweise oberhalb von Übungsaufgabe 6.18 erhielt. Andererseits zeigt die Lösung hier, dass ich mithilfe der Stammfunktion $H$ auf direkterem Weg auf dieses Ergebnis komme.
Im b)-Teil ist $\int_1^2 (2x-1)\ e^{x^2-x}\ dx$ zu berechnen. Aufgabe 6.20 b) hat mir gezeigt, dass $F(x) = e^{x^2-x}$ eine Stammfunktion des hier vorliegenden Integranden $f(x) = (2x-1)\ e^{x^2-x}$ ist. Nach dem Hauptsatz der Differenzial- und Integralrechnung kann ich nun das gesuchte bestimmte Integral berechnen, indem ich diese Stammfunktion $F$ verwende. Dies mache ich wie folgt:

$$\int_1^2 (2x-1)\ e^{x^2-x}\ dx = e^{x^2-x}|_1^2 = e^{2^2-2} - e^{1^2-1} = e^2 - e^0 = e^2 - 1\ .$$

Der c)-Teil sieht zugegebenermaßen auf den ersten Blick recht schwierig aus. Einfacher wird die Lösung dieser Aufgabe, wenn ich mir noch einmal Beispiel 6.35 anschaue. Dort stellte ich unter anderem fest, dass die Funktion $G(x) = x/(1 + x^2)$

eine Stammfunktion von $g(x) = (1-x^2)/(1+x^2)^2$ ist. In Beispiel 6.26 habe ich Ihnen schließlich (etwas andere Bezeichnungen verwendend) gezeigt, dass $G'(x) = g(x)$ gilt. Nach dem Hauptsatz der Differenzial- und Integralrechnung kann ich nun das gesuchte bestimmte Integral berechnen, indem ich diese Stammfunktion $G$ verwende. Dies mache ich wie folgt:

$$\int_1^2 \frac{(1-x^2)}{(1+x^2)^2}\ dx = [\frac{x}{1+x^2}]_1^2 = \frac{2}{1+2^2} - \frac{1}{1+1^2} = \frac{2}{5} - \frac{1}{2} = \frac{4-5}{10} = -\frac{1}{10}$$

Im d)-Teil ist das bestimmte Integral $\int_0^\pi (\cos(x) - \sin(x))\ e^x\ dx$ auszurechnen. Erinnere ich mich an die in Übungsaufgabe 6.7 b) gewonnenen Kenntnisse, so sehe ich schnell ein, dass $F(x) = \cos(x)e^x$ eine Stammfunktion des hier vorliegenden Integranden $f(x) = (\cos(x) - \sin(x))\ e^x$ ist. Nach dem Hauptsatz der Differenzial- und Integralrechnung kann ich nun das gesuchte bestimmte Integral berechnen, indem ich diese Stammfunktion $F$ verwende. Dies mache ich wie folgt:

$$\begin{aligned}\int_0^\pi (\cos(x) - \sin(x))\ e^x\ dx &= \cos(x)e^x|_0^\pi = \cos(\pi)e^\pi - \cos(0)e^0 \\ &= (-1)e^\pi - 1 = -(e^\pi + 1)\ .\end{aligned}$$

Im e)-Teil verwende ich schließlich, dass $F(x) = -1/x$ eine Stammfunktion von $f(x) = 1/x^2$ ist. Verifizieren Sie hierzu gegebenfalls die Beziehung $F' = f$, indem Sie nochmals unterhalb von Übungsaufgabe 6.7 in Abschnitt 6.3 schmökern. Ich wende nun ebenfalls den Hauptsatz der Differenzial- und Integralrechnung an und berechne

$$\int_1^2 \frac{1}{x^2}\ dx = -\frac{1}{x}|_1^2 = -\frac{1}{2} + \frac{1}{1} = -\frac{1}{2} + 1 = \frac{1}{2}\ .$$

**Lösung von Aufgabe 6.22:** Unter Verwendung von partieller Integration soll ich hier alle Stammfunktionen von $f(x) = \sin(x)\ x$ und $g(x) = x^2\ e^x$ explizit bestimmen. Ich beginne mit den Stammfunktionen von $f$. Da

$$\int^t \sin(x)\ x\ dx$$

eine Stammfunktion von $f$ ist und sich verschiedene Stammfunktionen von $f$ nur um Konstanten unterscheiden, sehe ich ein, dass ich eine beliebige Stammfunktionen von $f$ erhalte, indem ich dieses unbestimmte Integral berechne und eine Konstante, sagen wir $c$, hinzuaddiere. Ich wende nun partielle Integration zur Berechnung dieses Integrals an

$$\int^t \overbrace{\sin(x)\ x}^{=(-\cos(x))'\ x}\ dx = -\cos(t)\ t - \int^t \overbrace{-\cos(x)\cdot 1}^{=-\cos(x)\ (x)'}\ dx\ .$$

Hier habe ich also $\sin(x)$ als Ableitung der Funktion $-\cos(x)$ aufgefaßt und partiell integriert. Das Integral auf der rechten Seite der letzten Gleichung kann ich nun wegen $(x)' = 1$ leicht berechnen, denn bekanntlich ist $-\sin(x)$ eine Stammfunktion von $-\cos(x)$:

$$\int^t -\cos(x) \cdot 1 \; dx = \int^t -\cos(x) \; dx = -\sin(t) \; .$$

Insgesamt ergibt sich, dass jede Stammfunktion von $f$ von der Form

$$-\cos(t) \; t - (-\sin(t)) + c = \sin(t) - t\cos(t) + c$$

ist. Ich checke nun noch, ob das auch stimmt, was ich da ausgerechnet habe. Hierzu leite ich (die Produktregel benutzend) die Stammfunktionen ab

$$\begin{aligned}(\sin(t) - t\cos(t) + c)' &= (\sin(t))' - (t\cos(t))' + 0 \\ &= \cos(t) - ((t)'\cos(t) + t(\cos(t))') \\ &= \cos(t) - 1 \cdot \cos(t) - t(-\sin(t)) = t\sin(t) = f(t) \; .\end{aligned}$$

Zur Bestimmung der Stammfunktionen von $g$ gehe ich prinzipiell genauso vor. Ich stelle zunächst fest, dass ich alle Stammfunktionen von $g$ erhalte, indem ich das Integral

$$\int^t x^2 \; e^x \; dx$$

berechne und eine beliebige Konsante $c$ hinzuaddiere. Ich wende partielle Integration zur Berechnung dieses Integrals an

$$\int^t \overbrace{e^x \; x^2}^{=(e^x)' \; x^2} \; dx = e^t \; t^2 - \int^t \overbrace{e^x \; 2x}^{=e^x \; (x^2)'} \; dx \; .$$

Hier habe ich also $e^x$ als Ableitung der Funktion $e^x$ aufgefaßt und partiell integriert. Meine Hoffnung war es dabei, denn Integranden zu vereinfachen, das heißt auf der rechten Seite ein Integral zu erhalten, welches einfacher zu bestimmen ist als das Integral von dem ich ausgegangen bin. Das Integral

$$\int^t e^x \; 2x \; dx = 2 \int^t e^x \; x \; dx$$

das auf der rechten Seite der letzten Gleichung auftaucht, kann ich nun aber nicht ganz so einfach berechnen, wie dies im ersten Aufgabenteil der Fall ist. Dennoch ist der hier vorliegende Integrand nun etwas einfacher, denn anstatt mit $x^2$ wird $e^x$ hier nur noch mit $x$ multipliziert. Meine Idee ist es nun nochmals partielle Integration auf dieses Integral anzuwenden – mit dem Ziel das daraus entstehende Integral eventuell sehr einfach behandeln zu können. Diese Hoffnung erfüllt sich, denn partielle Integration zur Berechnung dieses Integrals liefert mir

$$\int^t \overbrace{e^x \; x}^{=(e^x)' \; x} \; dx = e^t \; t - \int^t \overbrace{e^x \cdot 1}^{=e^x \; (x)'} \; dx \; .$$

Hier habe ich also wiederum $e^x$ als Ableitung der Funktion $e^x$ aufgefaßt und partiell integriert. Man sieht, dass das hierbei entstehende Integral auf der rechten Seite sehr einfach bestimmbar ist

$$\int^t e^x \cdot 1 \; dx = \int^t e^x \; dx = e^t \; ,$$

denn $e^x$ hat sich selbst als Ableitung – ist also auch für sich selbst eine Stammfunktion. Ich berechne also hiermit zunächst

$$\int^t e^x \; x \; dx = e^t \; t - e^t \; ,$$

und setze das dann ganz oben (in die erste Gleichung) ein

$$\int^t e^x \; x^2 \; dx = e^t \; t^2 - 2 \int^t e^x \; x \; dx = e^t \; t^2 - 2 \; (e^t \; t - e^t) \; .$$

Multipliziere ich hier zunächst die Klammer aus und klammere danach den Term $e^t$ aus, so erhalte ich schließlich, dass sich eine beliebige Stammfunktion von $g$ wie folgt explizit beschreiben läßt

$$\int^t e^x \; x^2 dx + c = (t^2 - 2t + 2) \; e^t + c \; .$$

Zur Kontrolle überprüfe ich dieses Ergebnis. Hierzu leite ich (die Produktregel benutzend) die Stammfunktionen ab

$$\begin{aligned} ((t^2 - 2t + 2) \; e^t + c)' &= (t^2 - 2t + 2)' \; e^t + (t^2 - 2t + 2) \; (e^t)' + (c)' \\ &= (2t - 2) \; e^t + (t^2 - 2t + 2) \; e^t + 0 \\ &= e^t \; ((2t - 2) + (t^2 - 2t + 2)) = e^t \; t^2 = g(t) \; . \end{aligned}$$

**Lösung von Aufgabe 6.23:** In dieser Aufgabe sind mit der (Standard-) Substitutionsregel alle Stammfunktionen von $f(x) = 3x^2 \; (x^3 + 4)^{88}$ und $g(x) = (2x - 1) \; e^{x^2 - x}$ zu bestimmen. Ich beginne mit den Stammfunktionen von $f$. Da

$$\int^t 3x^2 \; (x^3 + 4)^{88} \; dx$$

eine Stammfunktion von $f$ ist und sich verschiedene Stammfunktionen von $f$ nur um Konstanten unterscheiden, sehe ich ein, dass ich eine beliebige Stammfunktionen von $f$ erhalte, indem ich dieses unbestimmte Integral berechne und eine Konstante, sagen wir $c$, hinzuaddiere. Ich sollte nun erkennen, dass ich die Substitutionsregel anwenden kann. Betrachte ich die Polynom-Funktion $f$ (vom Grad $2 + 3 \cdot 88 = 266$), so sehe ich, dass hier für $h(x) = x^3 + 4$ gerade $h'(x) = 3x^2$ als multiplikativer Term in

$f$ auftritt. An dieser Stelle sollte mir auffallen, dass ich mithilfe der Potenz-Funktion $p_{88}(\bar{x}) = \bar{x}^{88}$ das Polynom $f$ als $h'\ (p_{88} \circ h)$ hinschreiben kann:

$$h'(x)\ p_{88}(h(x)) = 3x^2\ (x^3+4)^{88} = f(x),$$

indem ich die Variable $\bar{x}$ von $p_{88}$ durch $h(x)$ ersetze – also $\bar{x} = x^3+4$ setze. Weiter habe ich mir ja beim Lesen des Buches klar gemacht, dass ich für eine Potenz-Funktion keine Schwierigkeiten habe, eine Stammfunktion zu finden. Im konkreten Fall ist $P_{88}(\bar{x}) = 1/89\ \bar{x}^{89}$ eine Stammfunktion von $p_{88}$. Somit kann ich durch Anwenden der Substitutionsregel die gesuchten Stammfunktionen bestimmen:

$$\begin{aligned}
\int^t \overbrace{3x^2}^{=h'(x)}\ \overbrace{(x^3+4)^{88}}^{=p_{88}(h(x))}\ dx + c &= \int^{\overbrace{t^3+4}^{=h(t)}} \bar{x}^{88}\ d\bar{x} + c = P_{88}(\bar{t})\vert^{t^3+4} + c \\
&= \frac{1}{89}\bar{t}^{89}\vert^{t^3+4} + c = \frac{1}{89}(t^3+4)^{89} + c\ .
\end{aligned}$$

Ich checke schließlich mein Ergebnis, indem ich die gefundenen Stammfunktionen (die Kettenregel benutzend) ableite und erkenne, dass der Integrand von dem ich ausgegangen bin dabei heraus kommt:

$$(\frac{1}{89}(t^3+4)^{89} + c)' = (\frac{1}{89}(t^3+4)^{89})' + (c)' = \frac{1}{89}\ 89\ 3t^2\ (t^3+4)^{88} + 0 = f(t)\ .$$

Die Bestimmung aller Stammfunktionen von $g(x) = (2x-1)\ e^{x^2-x}$ gelingt mir in ähnlicher Weise. Ich werde Ihnen gleich zeigen, wie man also hierzu die Substitutionsregel anwenden kann. Allerdings sollte ich vorab nicht verheimlichen, dass ich diese Aufgabe auch sehr einfach unter Verwendung meiner Ergebnisse aus Aufgabe 6.21 b) lösen kann. Dort hatte ich nämlich gesehen, dass $G(x) = e^{x^2-x}$ eine Stammfunktion von $g$ ist – alle Stammfunktionen von $g$ sind somit von der Form

$$e^{t^2-t} + c\ ,$$

wobei $c$ eine beliebige Konstante ist. Sie sehen also nochmals, dass die Kenntnis einer Stammfunktion direkt auf alle Stammfunktionen führt, indem ich eine beliebige Konstante zu dieser hinzuaddiere. Wie aber hätte ich vorgehen können, wenn ich $G$ nicht apriori, das heißt im Vorhinein, gekannt hätte ? Ich zeige Ihnen wie versprochen, dass ich dann die Substitutionsregel hätte anwenden können. Betrachte ich die Funktion $g$, so sehe ich, dass hier für $h(x) = x^2 - x$ gerade $h'(x) = 2x-1$ als multiplikativer Term in $g$ auftritt. Jetzt sollte ich erkennen, dass ich die Funktion $g$ mithilfe der Exponential-Funktion $\exp(\bar{x}) = e^{\bar{x}}$ als $h'\ (\exp \circ h)$ hinschreiben kann:

$$h'(x)\ \exp(h(x)) = (2x-1)\ e^{x^2-x} = g(x),$$

indem ich die Variable $\bar{x}$ von exp durch $h(x)$ ersetze – also $\bar{x} = x^2 - x$ setze. Zudem ist die Ableitung der Exponential-Funktion die Exponential-Funktion selbst, also $\exp' =$

exp. Dies bedeutet aber auch, das die Exponential-Funktion eine Stammfunktion von sich selbst ist. Somit kann ich durch Anwenden der Substitutionsregel die gesuchten Stammfunktionen bestimmen:

$$\int^t \overbrace{(2x-1)}^{=h'(x)} \overbrace{e^{\overbrace{x^2-x}^{=h(x)}}}^{=\exp(h(x))} \, dx + c = \int^{\overbrace{t^2-t}^{=h(t)}} e^{\bar{x}} \, d\bar{x} + c = e^{\bar{t}}\big|^{t^2-t} + c = e^{t^2-t} + c \; .$$

Dies stimmt offenbar mit dem obigen Ergebnis überein und ich habe die Aufgabe gelöst.

**Lösung von Aufgabe 6.24:** Der (absolute) Inhalt der in Abbildung 6.35 grau dargestellten Fläche ist offenbar das bestimmte Integral

$$\int_1^2 \frac{x}{x^2+1} \, dx \; ,$$

denn die Integrandenfunktion $f(x) = x/(x^2+1)$ ist im gesamten Intervall $[1,2]$ stets positiv. Ich werde nun versuchen, dieses Integral auszurechnen. Hierzu wäre die Kenntnis eine Stammfunktion nützlich. In den seltesten Fällen wird es vermutlich so sein, dass der möglicherweise noch nicht vollkommen mathematisch ausgebildete Leser sofort sieht, dass $F(x) = 1/2 \; \ln(x^2+1)$ eine Stammfunktion von $f$ ist und von daher gemäß dem Hauptsatz der Differenzial- und Integralrechnung der gesuchte Wert $F(2)-F(1) = 1/2\,(\ln(5)-\ln(2)) \approx 0.4581$ ist. Eher ist es wohl noch so, dass man sich auf die Suche einer solchen Stammfunktion mit den hier zur Verfügung stehenden Mitteln begibt. Nach einer Weile kommt einem vielleicht der richtige Gedanke, dass man möglicherweise die Substitutionsregel anwenden könnte. Betrachte ich die Funktion $f$, so sehe ich, dass hier für $g(x) = x^2+1$ im wesentlichen die Ableitung $g'(x) = 2x$ als multiplikativer Term in $f$ auftritt. Im wesentlichen bedeutet dabei, dass nicht $g'$ selbst sondern $1/2 \; g'$ auftritt, denn dies ist $x$. Um diese Beobachtung auszunutzen multipliziere ich den fehlenden Faktor 2 an den Integranden heran und dividiere gleichzeitig den Wert des Integrals durch 2 damit ich keinen Fehler mache. Genauer hingeschrieben betrachte ich nun also

$$\frac{1}{2} \int_1^2 \frac{2x}{x^2+1} \, dx \; ,$$

und Sie sehen, dass dies mit dem gesuchten Integral übereinstimmt. Jetzt sollte ich erkennen, dass die so entstehende Integrandenfunktion $2 \; f(x)$ wie folgt hingeschrieben werden kann

$$g'(x) \; \frac{1}{g(x)} = 2x \; \frac{1}{x^2+1} = 2 \; f(x) \; .$$

In Beispiel 6.37 hatte ich Ihnen unter anderem erklärt, dass für $\bar{x} > 0$ der natürliche Logarithmus $\ln(\bar{x})$ eine Stammfunktion von $1/\bar{x}$ ist – hieran sollte ich mich nun erinnern, um fortfahren zu können. Ich kann damit nämlich die Substitutionsregel anwenden um das gesuchte Integral zu bestimmen:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_1^2 \frac{\overbrace{2x}^{=g'(x)}}{\underbrace{x^2+1}_{=g(x)}}\, dx &= \frac{1}{2} \int_{g(1)}^{g(2)} \frac{1}{\bar{x}}\, d\bar{x} = \frac{1}{2} \int_{1^2+1}^{2^2+1} \frac{1}{\bar{x}}\, d\bar{x} \\ &= = \frac{1}{2} \ln \bar{x}|_2^5 = \frac{1}{2} (\ln(5) - \ln(2)) \; . \end{aligned}$$

Nebenbei erkenne ich hier, indem ich $\bar{x}$ durch $g(x)$ ersetze – also in $\ln(\bar{x})$ nun $\bar{x} = x^2 + 1$ setze, auf konstruktivem Weg, dass

$$F(x) = \frac{1}{2} \ln(x^2+1)$$

eine Stammfunktion von $f$ ist. Dies kann ich durch Ableiten (die Kettenregel benutzend) checken

$$F'(x) = \frac{1}{2} (\ln(x^2+1))' = \frac{1}{2} (x^2+1)' \ \ln'(x^2+1) = \frac{1}{2}\, 2x\, \frac{1}{x^2+1} = f(x) \; .$$

# Lösungen der Übungsaufgaben in Kapitel 7

**Lösung von Aufgabe 7.1:** Bei jedem Zug gibt es 32, insgesamt also

$$32^3 \;=\; 32.768$$

Möglichkeiten. Die gesuchte Wahrscheinlichkeit ist somit

$$\frac{1}{32.768} \;\approx\; 0,0000305\;.$$

**Lösung von Aufgabe 7.2:** Das ist ein Fall für die Auswahl mit Zurücklegen ohne Beachtung der Reihenfolge. Wegen $n = 7$ und $l = 5$ gibt es

$$\binom{11}{5} \;=\; 462$$

Möglichkeiten, von denen nur eine einzige das gewünschte Wort ergibt. Die gesuchte Wahrscheinlichkeit ist somit

$$\frac{1}{462} \;\approx\; 0,00216\;.$$

**Lösung von Aufgabe 7.3:** Hier haben wir es mit der Auswahl ohne Zurücklegen, aber mit Beachtung der Reihenfolge zu tun. Die gesuchte Wahrscheinlichkeit ist demnach

$$\frac{(7-5)!}{7!} \;=\; \frac{1}{3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7} \;=\; \frac{1}{2.520} \;\approx\; 0,0003968\;.$$

**Lösung von Aufgabe 7.4:**
a) Der Trainer hat

$$\binom{15}{11} \;=\; \frac{15!}{11!\cdot 4!} \;=\; 1365$$

Möglichkeiten.
b) Hier müssen die drei genannten Mannschaftsteile separat analysiert werden, die sich ergebenden Wahrscheinlichkeiten werden anschließend multipliziert.
Der neue Trainer hat somit

$$\binom{7}{5}\cdot\binom{6}{5}\cdot\binom{2}{1} \;=\; \frac{7!\cdot 6!\cdot 2!}{5!\cdot 2!\cdot 5!\cdot 1!\cdot 1!\cdot 1!} \;=\; 252$$

Möglichkeiten.

**Lösung von Aufgabe 7.5:**
a) Es gibt

$$3^{11} \;=\; 177.147$$

verschiedene Tipps.
b) Bei '5 aus 25' ist die Wahrscheinlichkeit für einen Haupttreffer gleich

$$\binom{25}{5}^{-1} \;=\; \frac{1}{53.130}\,,$$

bei '4 aus 20' ist sie dagegen

$$\binom{20}{4}^{-1} \;=\; \frac{1}{4.845}\,,$$

also wesentlich höher.
c) Insgesamt haben die Fahrgäste

$$\frac{7!}{(7-4)!} \;=\; 840$$

Möglichkeiten.
d) Das geht wie beim „Skatbeispiel " im Text: Der Veranstalter hat

$$\binom{12}{4}\cdot\binom{8}{4} \;=\; \frac{12!\cdot 8!}{4!\cdot 8!\cdot 4!\cdot 4!} \;=\; 34.650$$

Möglichkeiten.

**Lösung von Aufgabe 7.6:** Durch Addition der einzelnen Häufigkeiten ergibt sich $n = 797$. Das Ereignis $A_1$ trat 140-mal auf, damit wird

$$h_{797}(A_1) = \frac{140}{797} \approx 0,176\ .$$

Gerade Zahlen sind 2, 4, und 6, somit trat das Ereignis $A_2$

$$140 + 120 + 133 = 393$$

mal auf. Es folgt

$$h_{797}(A_2) = \frac{393}{797} \approx 0,493\ .$$

Ungerade Zahlen, die nicht durch 3 teilbar sind, sind hier 1 und 5. Damit wird

$$h_{797}(A_3) = \frac{277}{797} \approx 0,348\ .$$

**Lösung von Aufgabe 7.7:** Es sind insgesamt 166 Gewinne zu ziehen, die gesuchte Wahrscheinlichkeit also

$$p(G) \;=\; \frac{116}{500} \;=\; 0,332\ .$$

Alternativ kann man auch wie folgt rechnen: die Wahrscheinlichkeit dafür, eine Niete zu ziehen, ist

$$\frac{334}{500} \;=\; 0,668\ ,$$

und da dies gerade die Wahrscheinlichkeit dafür ist, *keinen* Gewinn zu ziehen, folgt

$$p(G) \;=\; 1 - 0,668 \;=\; 0,332\ .$$

**Lösung von Aufgabe 7.8:** Zur Auswahl stehen hier nur die Ergebnisse 1, 3, 4, und 5. Die einzige gerade Zahl ist hier also die 4, und diese ist weder durch 3 teilbar noch gleich 5. Die einzige durch 3 teilbare Zahl ist die 3 selbst, und die ist weder gerade noch gleich 5. Somit sind die drei Ereignisse unvereinbar.
Die Einzelwahrscheinlichkeiten sind $p(A) = 1/6$, $p(B) = 1/3$, $p(C) = 1/6$. Somit ist

$$\begin{aligned} p(A) + p(B) &= 1/2 \\ p(B) + p(C) &= 1/2 \\ p(A) + p(C) &= 1/3 \end{aligned}$$

Andererseits ist $A \cup B = \{3, 3, 4\}$, also $p(A \cup B) = 1/2$. Ebenso ergibt sich $p(B \cup C) = 1/2$ und $p(A \cup C) = 1/3$.

**Lösung von Aufgabe 7.9:** Es sei $E =$„Schüler lernt Englisch“ und $L =$„Schüler lernt Latein“. Da 35 von 50 Schülern Englisch, 25t von 50 Latein lernen, ergibt sich

$$p(E) = \frac{35}{50} = 0,7 \quad \text{und} \quad p(L) = \frac{25}{50} = 0,5\ .$$

Da jeder Schüler mindestens eine Sprache erlernt, ist $p(E \cup L) = 1$. Es folgt:

(a) $1 = p(E) + p(L) - p(E \cap L)$, also $p(E \cap L) = 0,2$.

(b) $p(\text{„nur Englisch“}) = p(E) - p(E \cap L) = 0,5$.

(c) $p(\text{„nur eine Sprache“}) = p(\text{„nur Englisch“}) + p(\text{„nur Latein“}) = 0,5 + 0,3 = 0,8$.

**Lösung von Aufgabe 7.10:** Sind $A$ und $B$ unvereinbar, so ist $A \cap B$ umöglich, also $p(A \cap B) = 0$. Damit stimmt in diesem Fall (7.4) mit (7.3) überein.

**Lösung von Aufgabe 7.11:** Wenn man sich hier vom Schock der Augabenstellung erholt hat, ist es gar nicht schwer, denn die grundlegende Formel (7.5) kann direkt angewandt werden: Es sei $B$ das Ereignis „Teil stammt von Firma B“ und $OK$ das Ereignis „Teil ist intakt“. Dann ist nach Angabe $p(OK \cap B) = 0,23$, und es folgt

$$p(OK|B) \;=\; \frac{p(OK \cap B)}{p(B)} \;=\; \frac{0,23}{0,25} \;=\; 0,92\,,$$

es sind also 92% der von B gelieferten Teile intakt.

# Lösungen der Übungsaufgaben in Kapitel 8

**Lösung von Aufgabe 8.1:** Alle drei Ausdrücke sind komplexe Zahlen:

a) Die Zahl $-2-3i$ ist unmittelbar als solche erkennbar.

b) Da $i^2=-1$ ist, ist auch dies eine komplexe Zahl.

c) Die beiden Lösungen der Gleichung $x^2+2=0$ sind die Wurzeln aus $-2$. Nach den Ausführungen auf Seite 330 des Buches sind dies die komplexen Zahlen $\pm i\sqrt{2}$.

**Lösung von Aufgabe 8.2:**

a) Selbstverständlich kann man hierfür Formel (8.2) benutzen; ich persönlich multipliziere die beiden Zahlen lieber "zu Fuß" aus und erhalte

$$z_1 \cdot z_2 = (2+5i)(-1-2i) = -2-5i-4i-10i^2 = 8-9i,$$

denn $-10i^2=+10$.

b) Multipliziert man zunächst denn Nenner aus, erhält man hierfür

$$(-1-2i)(1-3i) = -1-2i+3i+6i^2 = -7+i.$$

Damit ergibt sich

$$\frac{z_1}{z_2 \cdot z_3} = \frac{2+5i}{-7+i} = \frac{(2+5i)(-7-i)}{(-7+i)(-7-i)} = \frac{-14-35i-2i-5i^2}{49+1} = -\frac{9}{50} - \frac{37}{50}\,i.$$

c) Hier ist

$$\frac{z_1+z_2}{z_2-z_3} = \frac{1+3i}{-2+i} = \frac{(1+3i)(-2-i)}{(-2+i)(-2-i)} = \frac{1}{5} - \frac{7}{5}\,i\ .$$

**Lösung von Aufgabe 8.3:**

a) Der Betrag von $1-i$ ist $\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}=1,4142$, der Winkel ist gemäß der Tabelle auf Seite 337:

$$\varphi = \arctan\left(\frac{-1}{1}\right) + 360^\circ = -45^\circ + 360^\circ = 315^\circ.$$

Damit ergibt sich

$$1-i = 1,4142 \cdot (\cos(315^\circ) + i\sin(315^\circ)) = 1,4142 \cdot (0,7071 - 0,7071\,i).$$

b) Der Betrag von $-5-3i$ ist $\sqrt{25+9} = 5,8309$, der Winkel lautet

$$\varphi = \arctan(\frac{-3}{-5}) + 180° = 210,964°.$$

Daraus ergibt sich die folgende trigonometrische Form:

$$-5-3i = 5,8309 \cdot (-0,8575 - 0,5145\, i).$$

**Lösung von Aufgabe 8.4:** Hier hatte ich im Aufgabentext schlicht und ergreifend vergessen zu schreiben, dass man die Potenzierung mithilfe der trigonometrischen Form durchführen soll. Das geht zwar aus dem Textzusammenhang hervor, aber rein juristisch ist nichts dagegen zu sagen, wenn Sie die Aufgabe dadurch gelöst haben, dass sie die gegebene Zahl fünf- bzw. achtmal mit sich selbst multipliziert haben. Für die folgenden Musterlösungen wähle ich aber die eigentlich vorgesehene Methode.

a) Der Betrag der Zahl $-1+2i$ ist $\sqrt{1+2^2} = \sqrt{5}$, der Winkel ergibt sich durch

$$\varphi = \arctan\left(\frac{2}{-1}\right) + 180° = \arctan(-2) + 180° = -63.435° + 180° = 116.565°.$$

Um die gewünschte Potenzierung vornehmen zu können muss ich den Betrag hoch fünf nehmen und den Winkel mit fünf multiplizieren. Es ergibt sich

$$\begin{aligned}(-1+2i)^5 &= \sqrt{5}^5 \cdot (\cos(582.825°) + i\sin(582.825°))\\ &= 55.901 \cdot (-0.733 + i \cdot (-0.679))\\ &= -41 - 38i.\end{aligned}$$

Die letzten Werte sind natürlich gerundet, aber das darf man guten Gewissens machen, da man ja weiß, dass die Ergebnisse ganze Zahlen sein müssen.

b) Die Zahl $\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}}$ hat den Betrag 1, der zugehörige Winkel ist $\varphi = \arctan(1) = 45°$. Damit hat man sofort das Ergebnis:

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}}\right)^8 = \cos(8 \cdot 45°) + i \cdot \sin(8 \cdot 45°) = \cos(360°) + i\sin(360°) = 1.$$

**Lösung von Aufgabe 8.5:**

a) Man muss zunächst die trigonometrische Form der Zahl $z = -2+3i$ erstellen. Es ist $|z| = \sqrt{13} = 3.605$ und $\varphi = \arctan(\frac{3}{-2}) + 180° = 123.69°$. Damit findet man mithilfe von Formel (8.7):

$$\zeta_0 = \sqrt{3.605} \cdot (\cos(\frac{123.69°}{2}) + i\sin(\frac{123.69°}{2})) = 1.899 \cdot (0.472 + i \cdot 0.882) = 0,896 + i \cdot 1,674.$$

Ebenso ergibt sich

$$\zeta_1 = \sqrt{3.605} \cdot (\cos(\frac{123.69° + 360°}{2}) + i\sin(\frac{123.69° + 360°}{2})) = -0,896 - i \cdot 1,674.$$

b) Hier geht man natürlich genauso vor wie in a). Der Betrag von 8 ist überraschenderweise gleich 8, der Winkel ist 0, denn 8 ist - interpretiert als komplexe Zahl - gleich $8 + 0 \cdot i$. Damit ergibt sich:

$$\begin{aligned}
\zeta_0 &= \sqrt[3]{8} \cdot (\cos(0°) + i\sin(0°)) = 2 \cdot (1 + 0) = 2, \\
\zeta_1 &= \sqrt[3]{8} \cdot (\cos(120°) + i\sin(120°)) = 2 \cdot \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -1 + i\sqrt{3}, \\
\zeta_2 &= \sqrt[3]{8} \cdot (\cos(240°) + i\sin(240°)) = 2 \cdot \left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -1 - i\sqrt{3}.
\end{aligned}$$

**Lösung von Aufgabe 8.6:**

a) Auf die gegebene Gleichung $x^2 + x + \frac{5}{2} = 0$ wendet man zunächst eines der Verfahren zur Lösung quadratischer Gleichungen an, beispielsweise die $p$-$q$-Formel. Diese liefert

$$x_{1/2} = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{10}{4}} = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{-\frac{9}{4}}.$$

Wegen $\sqrt{-\frac{9}{4}} = i \cdot \sqrt{\frac{9}{4}}$ folgt hieraus

$$x_{1/2} = -\frac{1}{2} \pm i \cdot \frac{3}{2}.$$

b) Die Gleichung $x^4 - x^2 - 2 = 0$ ist eine biquadratische Gleichung. Wie in Kapitel 3 erläutert substituiert man zunächst $u = x^2$, was auf die quadratische Gleichung

$$u^2 - u - 2 = 0$$

führt. Diese hat die Lösungen

$$u_{1/2} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 2} = \frac{1}{2} \pm \frac{3}{2},$$

also $u_1 = 2$ und $u_2 = -1$. Die Lösungen der Ausgangsgleichung sind die Quadratwurzeln dieser Werte und lauten somit $\sqrt{2}$, $-\sqrt{2}$, $i$ und $-i$.

Springer

http://www.springer.com/978-3-8274-2763-2

Brückenkurs Mathematik
für Studieneinsteiger aller Disziplinen
Walz, G.; Zeilfelder, F.; Rießinger, Th.
2011, VIII, 392 S. 60 Abb., Softcover
ISBN: 978-3-8274-2763-2
A product of Spektrum Akademischer Verlag