Mathematische Grundlagen(1141) — SoSe 2012

Kurseinheit 2:

Einsendeaufgaben – Einsendetermin: 30.4.2012

Aufgabe 2.1

Die folgenden linearen Gleichungssysteme sind alle über $\mathbb{R}$ definiert.

Wahr oder falsch?

		wahr	falsch
(1)	Das lineare Gleichungssystem $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$ hat keine Lösung.	☐	☐
(2)	Das lineare Gleichungssystem $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ hat unendlich viele Lösungen.	☐	☐
(3)	Eine spezielle Lösung von $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ist $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.	☐	☐
(4)	Sei $A \in \mathrm{M}_{mn}(\mathbb{R})$, und sei $m < n$. Dann hat $Ax = b$, $b \in \mathrm{M}_{m1}(\mathbb{R})$, immer eine Lösung.	☐	☐
(5)	Ein homogenes lineares Gleichungssystem hat immer eine Lösung.	☐	☐
(6)	Sind λ und λ' verschiedene Lösungen von $Ax = b$, so hat dieses lineare Gleichungssystem unendlich viele Lösungen.	☐	☐
(7)	Ein lineares Gleichungssystem $Ax = b$ mit $A \in \mathrm{M}_{mn}(\mathbb{R})$ und $m > n$ hat nie mehr als eine Lösung.	☐	☐
(8)	In $\mathrm{M}_{12}(\mathbb{R})$ gibt es nur endlich viele Matrizen in Treppennormalform.	☐	☐
(9)	In $\mathrm{M}_{21}(\mathbb{R})$ gibt es nur endlich viele Matrizen in Treppennormalform.	☐	☐
(10)	Wenn λ und λ' verschiedene Lösungen von $Ax = 0$ sind, dann ist $\lambda + \lambda'$ auch eine Lösung von $Ax = 0$.	☐	☐

[max($0, r - f$) *Punkte, wobei r die Anzahl der richtigen und f die Anzahl der falschen Antworten ist. Nicht beantwortete Fragen gehen nicht in die Bewertung ein.*]

Diese Seite bleibt aus technischen Gründen frei!

Aufgabe 2.2

Bestimmen Sie die Lösungsmenge des folgenden linearen Gleichungssystems über $\mathbb{R}$:

$$\begin{array}{ccccccccc} x_1 & + & x_2 & - & 2x_3 & + & 4x_4 & = & 5 \\ 2x_1 & + & 2x_2 & - & 3x_3 & + & x_4 & = & 3 \\ 3x_1 & + & 3x_2 & - & 4x_3 & - & 2x_4 & = & 1. \end{array}$$

[*10 Punkte*]

Aufgabe 2.3

Untersuchen Sie folgende Teilmengen von $\mathrm{M}_{22}(\mathbb{R})$ darauf, ob sie Unterräume von $\mathrm{M}_{22}(\mathbb{R})$ sind:

(Begründung bitte nicht vergessen!)

1. Die Teilmenge X_1 der Matrizen vom Rang 1.
2. Die Teilmenge X_2 der Matrizen vom Rang 0.
3. Die Teilmenge X_3 der Matrizen A, die die Gleichung $A \cdot A + A = I_2$ erfüllen.
4. Die Teilmenge X_4 der Matrizen $\left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \mid a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$.

[*2 + 2 + 2 + 4 = 10 Punkte*]

Aufgabe 2.4

Untersuchen Sie, ob $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \in \left\langle \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right\rangle$ in $\mathrm{M}_{22}(\mathbb{R})$ gilt.

[*10 Punkte*]

Aufgabe 2.5

Sei $\mathbb{K}$ ein Körper, und sei $A \in \mathrm{M}_{mn}(\mathbb{K})$. Beweisen Sie, dass folgende Aussagen äquivalent sind:

1. Es gibt eine Matrix $B \in \mathrm{M}_{nn}(\mathbb{K})$, $B \neq 0$, sodass alle Einträge von AB null sind.
2. $\mathrm{Rg}(A) < n$.

[*5 + 5 Punkte*]

Aufgabe 2.6

Untersuchen Sie den Rang der Matrix $A = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & a \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{55}(\mathbb{R})$ in Abhängigkeit von $a \in \mathbb{R}$.

[*10 Punkte*]