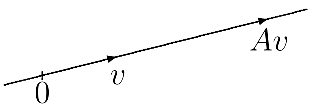
Inhalt Eigenwerte von Matrizen, Diagonalisierbarkeit von Matrizen, Beispiele

Seien K ein Körper mit unendlich vielen Elementen, $n \in \mathbb{N}$ und $A \in \mathrm{Mat}_n(K)$.

1 Eigenwerte von Matrizen

Definition $\lambda \in K$ heißt *Eigenwert* von A $:\Longleftrightarrow$ Es gibt ein $v \in K^n$, $v \neq 0$ mit $Av = \lambda v$. Jedes solche v heißt *Eigenvektor* von A zum Eigenwert λ.



Anschaulich: Ist v Eigenvektor zum Eigenwert λ, so gilt $A(av) = a\lambda v$ für alle $a \in K$, also $A\big(\mathrm{Lin}(v)\big) \subset \mathrm{Lin}(v)$, die Gerade $\mathrm{Lin}(v)$ wird also von A in sich abgebildet.

Definition $\mathrm{Eig}_A(\lambda) := \{v \in K^n \mid Av = \lambda v\} = \{v \in K^n \mid (\lambda \mathbf{1}_n - A)v = 0\} = \mathrm{Kern}(\lambda \mathbf{1}_n - A)$ ist ein Untervektorraum von K^n.
λ ist Eigenwert von A $\Longleftrightarrow$ $\mathrm{Eig}_A(\lambda) \neq \{0\}$. In diesem Fall heißt $\mathrm{Eig}_A(\lambda)$ *Eigenraum* von A zum Eigenwert λ.

Satz 1 *λ Eigenwert von A* $\Longleftrightarrow$ $\det(\lambda \mathbf{1}_n - A) = 0$.

Beweis: λ ist Eigenwert von A
$$\begin{aligned} &\Longleftrightarrow \mathrm{Eig}_A(\lambda) = \mathrm{Kern}(\lambda \mathbf{1}_n - A) \neq \{0\} \\ &\Longleftrightarrow (\lambda \mathbf{1}_n - A)v = 0 \text{ hat eine Lösung } v \neq 0 \\ &\Longleftrightarrow \lambda \mathbf{1}_n - A \text{ ist nicht invertierbar} \iff \det(\lambda \mathbf{1}_n - A) = 0. \end{aligned}$$

Definition Die Abbildung $\chi_A : K \to K$, $x \mapsto \det(x\mathbf{1}_n - A)$ heißt *charakteristisches Polynom* von A.
χ_A ist ein Polynom vom Grad n, es gilt
$$\chi_A(x) = x^n - (\mathrm{spur}\, A)x^{n-1} + \ldots + (-1)^n \det A,$$
für $A = (a_{ij})$ ist dabei $\mathrm{spur}\, A := \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$ die Summe der Diagonalelemente von A.

Satz 1 besagt also: λ *ist Eigenwert von* A $\Longleftrightarrow$ λ *ist Nullstelle von* χ_A.

Da jedes Polynom $f \neq 0$ vom Grad n höchstens n Nullstellen hat, folgt: *Jedes $A \in \mathrm{Mat}_n(K)$ hat höchstens n Eigenwerte.*

Beispiele a) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_2(\mathbb{R})$ hat überhaupt keinen Eigenwert, denn es gilt:
$\chi_A(x) = \det(x\mathbf{1}_2 - A) = \det\begin{pmatrix} x & -1 \\ 1 & x \end{pmatrix} = x^2 + 1$ hat in $\mathbb{R}$ keine Nullstelle. Über $K = \mathbb{C}$ hat jedes nicht-konstante Polynom eine Nullstelle, also hat über $K = \mathbb{C}$ jede Matrix $A \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{C})$ Eigenwerte.

b) Sei $A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$ eine obere Dreiecksmatrix. Dann ist
$$\chi_A(x) = \det\begin{pmatrix} x - \lambda_1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & x - \lambda_n \end{pmatrix} = (x - \lambda_1) \cdot \ldots \cdot (x - \lambda_n).$$
χ_A hat genau die Nullstellen $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, also hat A genau die Eigenwerte $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$.

Einsetzen von Matrizen in Polynome
Für $r \in \mathbb{N}^0$ wird A^r definiert durch $A^0 := \mathbf{1}_n,\ A^r = A \cdot \ldots \cdot A$ (r-mal) für $r \in \mathbb{N}$.
Für ein Polynom $f = \sum_{i=0}^{m} a_i x^i$ mit $a_0, \ldots, a_m \in K,\ m \in \mathbb{N}^0$ sei $f(A) := \sum_{i=0}^{m} a_i A^i \in \mathrm{Mat}_n(K)$.

Satz 2 (Satz von Hamilton-Cayley) *Für jedes $A \in \mathrm{Mat}_n(K)$ gilt $\chi_A(A) = 0$.*

2 Diagonalisierbarkeit von Matrizen

Problem Sei $A \in \mathrm{Mat}_n(K)$. Gesucht ist eine Basis $\mathcal{B}$ von K^n, so dass $M_{\mathcal{B}}(l_A)$ eine „einfache" Gestalt hat. Dem Basiswechsel von $\mathcal{E}$ zu $\mathcal{B}$ entspricht der Übergang von A zu $P^{-1}AP$ für ein geeignetes $P \in \mathrm{GL}_n(K)$. (Es ist $\mathrm{GL}_n(K) := \{M \in \mathrm{Mat}_n(K) \mid M \text{ invertierbar}\}$.)
Also: Gesucht ist ein $P \in \mathrm{GL}_n(K)$, so dass $P^{-1}AP$ eine „einfache" Gestalt hat.

Definition Eine Matrix der Form $\begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$ mit $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in K$ heißt *Diagonalmatrix*. A heißt *diagonalisierbar*, falls ein $P \in \mathrm{GL}_n(K)$ existiert, so dass $P^{-1}AP$ eine Diagonalmatrix ist.

Proposition *Für $A \in \mathrm{Mat}_n(K),\ P \in \mathrm{GL}_n(K)$ gilt:*
a) *A und $P^{-1}AP$ haben dieselben Eigenwerte.*
b) *Ist $P^{-1}AP$ eine Diagonalmatrix, so stehen in der Diagonale (von $P^{-1}AP$) genau die Eigenwerte von A.*

Beweis: a) Es gilt $\chi_{P^{-1}AP}(x) = \det(x\mathbf{1}_n - P^{-1}AP) = \det\big(P^{-1}(x\mathbf{1}_n - A)P\big) = \det(P^{-1}) \cdot \det(x\mathbf{1}_n - A) \cdot \det P = \det(x\mathbf{1}_n - A) = \chi_A(x)$.
Also haben $A, P^{-1}AP$ dasselbe charakteristische Polynom, also dieselben Eigenwerte.
b) Ist $P^{-1}AP$ eine Diagonalmatrix, so sind die Eigenwerte von $P^{-1}AP$ (und A) genau die Diagonalelemente.

Ist $A \in \mathrm{Mat}_n(K)$ diagonalisierbar, so existiert ein $P \in \mathrm{GL}_n(K)$ mit

$$P^{-1}AP = D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix},$$

dies ist äquivalent zu $AP = PD$. Sind $v_1, \ldots, v_n$ die Spalten von P, so gilt

$$AP = (Av_1, \ldots, Av_n) = PD = (\lambda_1 v_1, \ldots, \lambda_n v_n), \quad \text{also} \quad Av_j = \lambda_j v_j \quad \text{für alle } j \in \{1, \ldots, n\},$$

jede Spalte v_j von P ist also Eigenvektor von A zum Eigenwert λ_j. Damit erhält man:

Satz 3 *Es seien $A \in \mathrm{Mat}_n(K)$, $(v_1, \ldots, v_n)$ eine geordnete Basis von K^n und $P := (v_1, \ldots, v_n) \in \mathrm{Mat}_n(K)$. Dann ist P invertierbar, und es sind äquivalent:*

(i) $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$.

(ii) *Für alle $j \in \{1, \ldots, n\}$ ist v_j Eigenvektor von A zum Eigenwert λ_j.*

Korollar *$A \in \mathrm{Mat}_n(K)$ ist diagonalisierbar $\iff$ Es gibt eine geordnete Basis des K^n, die aus Eigenvektoren von A besteht.*
Ist $(v_1, \ldots, v_n)$ eine geordnete Basis des K^n, die aus Eigenvektoren von A besteht, so ist $P = (v_1, \ldots, v_n) \in \mathrm{Mat}_n(K)$ invertierbar und $P^{-1}AP$ eine Diagonalmatrix.

3 Beispiele

a) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_2(\mathbb{R})$ ist über $\mathbb{R}$ *nicht* diagonalisierbar, da $\chi_A = x^2 + 1$ keine reelle Nullstelle besitzt.

b) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_2(K)$ ist *nicht* diagonalisierbar.
0 ist der einzige Eigenwert von A. Wäre A diagonalisierbar, so wäre $P^{-1}AP = 0$ für ein $P \in \mathrm{GL}_n(K)$, also wäre $A = 0$, Widerspruch!

c) Sei $A = \begin{pmatrix} -2 & 6 \\ -2 & 5 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_2(\mathbb{R})$.

1. Berechnung von χ_A: $\chi_A(x) = \det(x\mathbf{1}_2 - A) = \det \begin{pmatrix} x+2 & -6 \\ 2 & x-5 \end{pmatrix} = (x+2)(x-5)+12 = x^2 - 3x - 10 + 12 = x^2 - 3x + 2$.

2. Bestimmung der Eigenwerte: Wegen $\chi_A(x) = x^2 - 3x + 2 = (x-1)(x-2)$ sind 1 und 2 die Nullstellen von χ_A, also die Eigenwerte von A (nach Satz 1).

3. Bestimmung einer Basis der jeweiligen Eigenräume:
Für $\lambda_1 = 1$ gilt: $\mathrm{Eig}_A(1) = \mathrm{Kern}(\mathbf{1}_2 - A) = \mathrm{Kern} \begin{pmatrix} 3 & -6 \\ 2 & -4 \end{pmatrix} = \mathrm{Kern} \begin{pmatrix} 3 & -6 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$
$= \{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid 3x_1 - 6x_2 = 0 \} = \mathrm{Lin}(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix})$, eine Basis von $\mathrm{Eig}_A(1)$ ist also $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.
Für $\lambda_2 = 2$ gilt: $\mathrm{Eig}_A(2) = \mathrm{Kern}(2\,\mathbf{1}_2 - A) = \mathrm{Kern} \begin{pmatrix} 4 & -6 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} = \mathrm{Kern} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$
$= \{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid 2x_1 - 3x_2 = 0 \} = \mathrm{Lin}(\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix})$, eine Basis von $\mathrm{Eig}_A(2)$ ist also $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$.
Wir setzen $P := \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. Wegen $\det P = 1 \neq 0$ ist P invertierbar. Dann folgt

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Zur Probe können wir diese Gleichung in der Form $AP = P \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ verifizieren:

$$AP = \begin{pmatrix} -2 & 6 \\ -2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}, \quad P \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}.$$