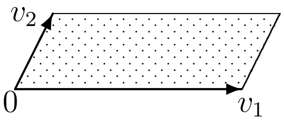
Studientage Mathematik I / Mathematik für Informatiker I 1181A7
M. Schulte: Vortrag zu Thema VII: Determinanten

Inhalt Determinantenfunktion, grundlegende Eigenschaften, Cramersche Regel, Entwicklung nach einer Zeile oder Spalte, Leibnizscher Darstellungssatz

Seien K *ein Körper,* $n \in \mathbb{N}$ *und* $A = (a_{ij}) = (v_1, \dots, v_n) \in \mathrm{Mat}_n(K)$ *mit* $v_1, \dots, v_n \in K^n$*.*

Geometrische Motivation des Determinantenbegriffs



$\det A :=$ orientiertes Volumen des von $v_1, \dots, v_n$ aufgespannten Parallelepipeds im $\mathbb{R}^n$.
Für $n = 2$ gilt: $\det(v_1 + v_2, v_2) = \det(v_1, v_2) = \det(v_1, v_1 + v_2)$, $\det(av_1, v_2) = a\det(v_1, v_2) = \det(v_1, av_2)$ für alle $a \in \mathbb{R}$.

Definition Eine Abbildung $\Delta : \mathrm{Mat}_n(K) \to K$ heißt *Determinantenfunktion*, falls gilt:
$\Delta(v_1, \dots, v_i, \dots, v_j + v_i, \dots, v_n) = \Delta(v_1, \dots, v_i, \dots, v_j, \dots, v_n)$ für alle $j \neq i$,
$\Delta(v_1, \dots, av_i, \dots, v_n) = a\Delta(v_1, \dots, v_n)$ für alle i und alle $a \in K$.

Satz 1 *Es gibt genau eine Determinantenfunktion* $\Delta : \mathrm{Mat}_n(K) \to K$ *mit* $\Delta(\mathbf{1}_n) = 1$*.*

Definition Diese Determinantenfunktion heißt *Determinante* und wird mit det bezeichnet.

Grundlegende Eigenschaften der Determinante

a) $\det A = 0$, falls $\mathrm{rang}\, A < n$.
b) $\det(v_1, \dots, av_i + a'v_i', \dots, v_n) = a\det(v_1, \dots, v_i, \dots, v_n) + a'\det(v_1, \dots, v_i', \dots, v_n)$, d. h. det ist linear in jeder Spalte.
c) Die Determinante ändert sich nicht, wenn man zu einer Spalte eine Linearkombination der *anderen* Spalten addiert.
d) $\det(v_1, \dots, v_i, \dots, v_j, \dots, v_n) = -\det(v_1, \dots, v_j, \dots, v_i, \dots, v_n)$ für alle $i \neq j$, d. h. bei Vertauschen zweier Spalten ändert sich das Vorzeichen der Determinante.
e) *Multiplikationssatz:* $\det(AB) = (\det A)(\det B)$ für alle $A, B \in \mathrm{Mat}_n(K)$.
f) $\det({}^tA) = \det A$, wobei ${}^tA$ die transponierte Matrix von A bezeichnet.

Mit Hilfe von f) folgen aus b) – d) entsprechende Eigenschaften für die Zeilen:

Folgerungen a) det ist linear in jeder Zeile.
b) Die Determinante ändert sich nicht, wenn man zu einer Zeile eine Linearkombination der *anderen* Zeilen addiert.
c) Bei Vertauschen zweier Zeilen ändert sich das Vorzeichen der Determinante.

Spezialfälle $n = 1$: Für $a \in \mathrm{Mat}_1(K) = K$ ist $\det a = a$.

$n = 2$: $\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - bc$ für alle $a, b, c, d \in K$.

$n = 3$: *Regel von Sarrus* oder *Jägerzaunregel:*

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{32}a_{23}a_{11} - a_{33}a_{21}a_{12}.$$

Merkregel:

$$\begin{array}{ccc|cc} + & + & + \; - & - & - \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{array}$$

Satz 2 (Determinante von Blockmatrizen)
Seien A, D quadratische Matrizen. Dann gilt:

$$\det\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D \end{pmatrix} = (\det A)(\det D) = \det\begin{pmatrix} A & 0 \\ C & D \end{pmatrix}.$$

Satz 3 $A \in \mathrm{Mat}_n(K)$ *ist invertierbar* $\iff$ $\det A \neq 0$.
In diesem Fall gilt: $\det(A^{-1}) = (\det A)^{-1}$.

Beweis: „$\Rightarrow$“: Sei A invertierbar. Anwendung von det auf $AA^{-1} = \mathbf{1}_n$ liefert $1 = \det \mathbf{1}_n = \det(AA^{-1}) = (\det A)(\det A^{-1})$, also $\det A \neq 0$ und $\det(A^{-1}) = (\det A)^{-1}$.
„$\Leftarrow$“: Sei $\det A \neq 0$. Wäre A nicht invertierbar, so wäre $\operatorname{rang} A < n$, also $\det A = 0$.

Satz 4 (Cramersche Regel) *Sei* $A = (v_1, \ldots, v_n) \in \mathrm{Mat}_n(K)$ invertierbar *und* $w \in K^n$. *Dann ist das lineare Gleichungssystem $Ax = w$ eindeutig lösbar mit der Lösung*

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad \textit{mit} \quad x_j = \frac{\det(v_1, \ldots, v_{j-1}, w, v_{j+1}, \ldots, v_n)}{\det A}.$$

Beweis: Aus $Ax = w$ folgt $x = A^{-1}w$, und $A^{-1}w$ ist Lösung von $Ax = w$.
Die Gleichung $Ax = w$ besagt $\sum_{k=1}^{n} x_k v_k = w$. Mit der Spalten-Multilinearität von det folgt

$$\begin{aligned} \det(v_1, \ldots, v_{j-1}, w, v_{j+1}, \ldots, v_n) &= \sum_{k=1}^{n} x_k \det(v_1, \ldots, v_{j-1}, v_k, v_{j+1}, \ldots, v_n) \\ &= x_j \det(v_1, \ldots, v_{j-1}, v_j, v_{j+1}, \ldots, v_n) = x_j \det A, \end{aligned}$$

da $\det(v_1, \ldots, v_{j-1}, v_k, v_{j+1}, \ldots, v_n) = 0$ für $k \neq j$ ist, weil in der Matrix zwei Spalten gleich sind. Division durch $\det A$ liefert die Behauptung.

Definition Für $1 \leq i, j \leq n$ seien $a^{\sharp}_{ij} := \det(v_1, \ldots, v_{i-1}, e_j, v_{i+1}, \ldots, v_n)$, $e_j = j$-ter Einheitsvektor. $A^{\sharp} := (a^{\sharp}_{ij}) \in \mathrm{Mat}_n(K)$ heißt *Komplementärmatrix* oder *Adjunkte* von A.

Es ist $a^{\sharp}_{ij} = (-1)^{i+j} \det A_{ji}$, wobei $A_{ji} \in \mathrm{Mat}_{n-1}(K)$ aus A durch Streichen der j-ten Zeile und der i-ten Spalte entsteht.

Satz 5 $AA^{\sharp} = (\det A)\mathbf{1}_n = A^{\sharp}A$, *für alle* $1 \leq i, j \leq n$ *gilt also*

$$(*) \qquad \sum_{k=1}^{n} a_{ik} a^{\sharp}_{kj} = \delta_{ij}(\det A) = \sum_{k=1}^{n} a^{\sharp}_{ik} a_{kj}, \quad \textit{wobei } \delta_{ij} := 0 \textit{ für } i \neq j,\ \delta_{ii} := 1.$$

Beweis der zweiten Gleichung in $(*)$: Wie beim Beweis der Cramerschen Regel gilt

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n} a^{\sharp}_{ik} a_{kj} &= \sum_{k=1}^{n} a_{kj} \det(v_1, \ldots, v_{i-1}, e_k, v_{i+1}, \ldots, v_n) \\ &= \det(v_1, \ldots, v_{i-1}, \sum_{k=1}^{n} a_{kj} e_k, v_{i+1}, \ldots, v_n) \\ &= \det(v_1, \ldots, v_{i-1}, v_j, v_{i+1}, \ldots, v_n) = \delta_{ij}(\det A), \end{aligned}$$

da $\det(v_1, \ldots, v_{i-1}, v_j, v_{i+1}, \ldots, v_n) = 0$ für $j \neq i$ und $= \det A$ für $j = i$.

Die Gleichung $AA^\sharp = (\det A)\mathbf{1}_n$ kann dann durch Anwendung von $A^\sharp A = (\det A)\mathbf{1}_n$ auf ${}^tA$ bewiesen werden.

Korollar *Ist* $A \in \mathrm{Mat}_n(K)$ *invertierbar, so ist* $A^{-1} = \dfrac{1}{\det A} A^\sharp$.

Aus der ersten Gleichung in $(*)$ folgt für $i = j$:

Satz 6 (Entwicklung nach der i-ten Zeile) *Sei* $1 \le i \le n$. *Dann gilt*

$$\det A = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} a^\sharp_{ki} = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{i+k} a_{ik} \det A_{ik}.$$

Aus der zweiten Gleichung in $(*)$ folgt für $i = j$:

Satz 7 (Entwicklung nach der j-ten Spalte) *Sei* $1 \le j \le n$. *Dann gilt*

$$\det A = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{j+k} a_{kj} \det A_{kj}.$$

Mit diesen Sätzen kann man die Determinante einer $n \times n$-Matrix mit Hilfe von Determinanten von $(n-1) \times (n-1)$-Untermatrizen berechnen.

Beispiele a) Für eine obere Dreiecksmatrix gilt (jeweils durch Entwicklung nach der ersten Spalte)

$$\det \begin{pmatrix} a_1 & * & \cdots & * \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & * \\ 0 & \cdots & 0 & a_n \end{pmatrix} = a_1 \det \begin{pmatrix} a_2 & & * \\ \vdots & \ddots & \\ 0 & \cdots & a_n \end{pmatrix} = \ldots = a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n.$$

b)
$$\det \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 & 3 \\ 1 & 9 & 8 & 7 \\ 2 & 6 & 5 & 0 \\ 2 & 6 & 8 & 2 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 & 3 \\ 1 & 9 & 8 & 7 \\ 0 & -12 & -11 & -14 \\ 0 & -12 & -8 & -12 \end{pmatrix} \quad [Z_3 \mapsto Z_3 - 2Z_2,\ Z_4 \mapsto Z_4 - 2Z_2]$$

$$= (-1) \cdot 1 \cdot \det \begin{pmatrix} 2 & 3 & 3 \\ -12 & -11 & -14 \\ -12 & -8 & -12 \end{pmatrix} = -\det \begin{pmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 0 & 7 & 4 \\ 0 & 10 & 6 \end{pmatrix}$$

$$= -2 \det \begin{pmatrix} 7 & 4 \\ 10 & 6 \end{pmatrix} = -2(42 - 40) = -4.$$

Satz 8 (Leibnizscher Darstellungssatz) *Sei* S_n *die Menge aller bijektiven Abbildungen von* $\{1, \ldots, n\}$ *auf sich. Dann gilt*

$$\det A = \sum_{\pi \in S_n} \varepsilon(\pi) a_{\pi(1),1} \cdot \ldots \cdot a_{\pi(n),n} = \sum_{\pi \in S_n} \varepsilon(\pi) a_{1,\pi(1)} \cdot \ldots \cdot a_{n,\pi(n)},$$

wobei $\varepsilon(\pi) \in \{\pm 1\}$ *ein nur von* $\pi \in S_n$ *abhängiger Vorzeichenfaktor ist.*

Da S_n aus $n!$ Elementen besteht, also in der obigen Formel $n!$ Summanden vorkommen, ist dieser Satz für große n zur praktischen Berechnung von Determinanten *nicht* geeignet.