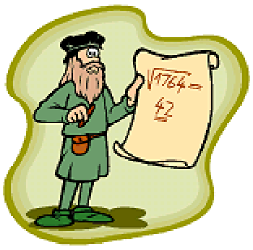
Mathematikmaterialien
von Tino Hempel

Startseite | Informatik | Physik | Mathematik | Sonstiges |



Das schriftliche Ziehen einer Quadratwurzel

Sobald man die Wurzel aus einer Zahl ziehen soll, greift man ganz selbstverständlich zum Taschenrechner. Ohne dieses Hilfsmittel kann man sich unter Ausnutzung des Heron-Verfahrens an die Lösung annähern. Aber das Ziehen der Wurzel aus einer Zahl geht auch ohne Näherungsverfahren "per Hand".

Das Prinzip am Beispiel gezeigt

Das schriftliche Wurzelziehen lässt sich am einfachsten mit einem Beispiel beschreiben. Wenn das schriftliche Dividieren beherrscht wird, werden keine Schwierigkeiten entstehen.

Angenommen es wird dringend die Wurzel aus der Zahl 119025 benötigt, also $\sqrt{119025} = ?$

Schritt	Anweisung	Beispiel
1	Zerlege die Zahl von rechts beginnend in Zweiergruppen	$\sqrt{11\vert 90\vert 25} =$
2	Suchen die Zahl, welche quadriert die ganz links stehende Zifferngruppe ergibt oder ihr von unten nahe kommt.	$\sqrt{11\vert 90\vert 25} = 3$
3	Schreibe das Quadrat der gefundenen Zahl unter die linke Zifferngruppe und ziehe es von ihr ab	$\sqrt{11\vert 90\vert 25} = 3$ -9 2
4	Setze die Differenz wie bei der schriftlichen Division unter den Strich und hänge die linke Ziffer der nächsten Gruppe an.	$\sqrt{11\vert 90\vert 25} = 3$ -9 29
5	In einer Nebenrechnung wird die so entstandene Zahl ohne Berücksichtigung des Restes durch das Doppelte des bisher ermittelten Wurzelwertes dividiert.	$\sqrt{11\vert 90\vert 25} = 3 \qquad 29 : 6 = 4 + \text{Rest}$ $\cdot 2$ -9 29
	Das Ergebnis der Division ist die nächste Ziffer der	

6	gesuchten Wurzel und außerdem ein Faktor in der zweiten Nebenrechnung. Der andere Faktor wird zusammengesetzt aus der Ziffer des Divisor und der Ziffer des Quotienten. **Ist das Ergebnis der Division größer als 9, so muss die Ziffer 9 verwendet werden!**	$\sqrt{11\vert 90\vert 25} = 34 \quad 29:6 = 4 + \text{Rest} \quad 4\cdot 64 = 256$ -9 29
7	Das Produkt wird wie bei der schriftlichen Division von der darüber liegenden Zahl, welche um eine weitere Stelle ergänzt wurde, abgezogen. **Sollte die Differenz negativ sein, ist die gefundene Ziffer der Wurzel um eins zu vermindern und dies auch in den Nebenrechnungen zu berücksichtigen!**	$\sqrt{11\vert 90\vert 25} = 34 \quad 29:6 = 4 + \text{Rest} \quad 4\cdot 64 = 256$ -9 290 -256 34
8	Es wiederholt sich Schritt 5, d.h. in der Nebenrechnung wird die entstandene Zahl ohne Berücksichtigung des Restes durch das Doppelte des bisher ermittelten Wurzelwertes dividiert.	$\sqrt{11\vert 90\vert 25} = 34 \quad 29:6 = 4 + \text{Rest} \quad 4\cdot 64 = 256$ $-9 \qquad \cdot 2$ $290 \qquad 342:68 = 5 + \text{Rest}$ -256 342
9	Wie in Schritt 6 ist das Ergebnis der Division ist die nächste Ziffer der gesuchten Wurzel und außerdem ein Faktor in der weiteren Nebenrechnung. Der andere Faktor wird zusammengesetzt aus der Ziffer des Divisor und der Ziffer des Quotienten.	$\sqrt{11\vert 90\vert 25} = 345 \quad 29:6 = 4 + \text{Rest} \quad 4\cdot 64 = 256$ -9 $290 \qquad 342:68 = 5 + \text{Rest} \quad 5\cdot 685 = 3425$ -256 342
10	Analog zu Schritt 7 wird das Produkt von der darüber liegenden Zahl, welche um eine weitere Stelle ergänzt wurde, abgezogen. Da die Differenz Null ist, haben wir die Wurzel gezogen. Das Ergebnis lautet	$\sqrt{11\vert 90\vert 25} = \underline{\underline{345}} \quad 29:6 = 4 + \text{Rest} \quad 4\cdot 64 = 256$ -9 $290 \qquad 342:68 = 5 + \text{Rest} \quad 5\cdot 685 = 3425$ -256 3425 -3425 0

	345.	

Der Hintergrund

Das Verfahren nutzt folgendes aus:

Aus den Aussagen: "Die Quadrate 1ziffriger Zahlen sind 1- oder 2ziffrig." "Die Quadrate 2ziffriger Zahlen sind 3- oder 4ziffrig." "Die Quadrate 3ziffriger Zahlen sind 5- oder 6ziffrig." usw.	**folgt umgekehrt:** "Die Quadratwurzeln aus einer 1- oder 2ziffrigen Zahl ist 1ziffrig." "Die Quadratwurzeln aus einer 3- oder 4ziffrigen Zahl ist 2ziffrig." "Die Quadratwurzeln aus einer 5- oder 6ziffrigen Zahl ist 3ziffrig." usw.
Die binomische Formel: $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$	**und deren Erweiterungen:** $(a + b + c)^2$ $= [(a + b) + c]^2$ $= (a + b)^2 + 2(a + b)c + c^2$ $= (a^2 + 2ab + b^2) + 2(a + b)c + c^2$

Damit ist es für einen geübten Kopfrechner kein Problem mehr, das Quadrat von z.B. 47 im Kopf zu berechnen.

$$47^2 = (40 + 7)^2 = 40^2 + 2 \cdot 40 \cdot 7 + 7^2 = 1600 + 560 + 49 = 2209$$

Unter Ausnutzung der zweiten angegebenen Formel lassen sich auch Quadrate von 3ziffrigen Zahlen bestimmen, etwa

$$123^2 = (100 + 20 + 3)^2 = (100^2 + 2 \cdot 100 \cdot 20 + 20^2) + 2 \cdot (100 + 20) \cdot 3 + 3^2 = (10000 + 4000 + 400) + 720 + 9 = 15129$$

Durch Umkehrung dieser Quadratbildung erhält man sofort das Verfahren des Quadratwurzelziehens.

$$\sqrt{(a+b)^2} = a + b$$

$$\begin{array}{l}
\sqrt{a^2 + 2ab + b^2} = a + b \\
-a^2 \\
\hline
0 + 2ab \\
\quad - 2ab \\
\hline
\qquad 0 + b^2 \\
\qquad\quad - b^2 \\
\hline
\qquad\qquad 0
\end{array}$$

Dieser Term wird durch 2a dividiert, um b im Ergebnis zu erhalten.

Es kann vorkommen, dass besonders bei der ersten Division das zunächst vernachlässigte Glied b^2 so groß ist, dass das Produkt (Schritt 7) größer als der Rest wird. Dann ist der Quotient (Schritt 6) entsprechend kleiner anzusetzen.

Ist die zu radizierende Zahl keine Quadratzahl, so füllt man einfach nach dem Komma Nullen auf, die wieder in Zweiergruppen (vom Komma beginnend) zerlegt werden.

Es ist übrigens immer darauf zu achten, dass die letzte Zifferngruppe rechts hinter dem Komma auch aus zwei Ziffern besteht. Notfalls muss man eben ein Null anfügen.

Beispiele

Das erste Beispiel stellt das Prinzip für eine Dezimalzahl dar. Die Einteilung in Zweierblöcke erfolgt also vom Komma aus nach links und rechts. Das Komma wird im Ergebnis gesetzt, wenn während der Rechnung selbiges im Radikanten überschritten wird.	Im zweiten Beispiel ist der Versuch dargestellt, den Wert von Wurzel 2 zu bestimmen.

$\sqrt{5\|50\|46{,}54\|44} = \underline{\underline{234{,}62}}$	$\sqrt{2{,}000000000000} = 1{,}414213...$
$\underline{4}$	$\underline{1}$
150	100
$\underline{129}$	$\underline{96}$
2146	400
$\underline{1856}$	$\underline{281}$
29054	11900
$\underline{28116}$	$\underline{11296}$
93844	60400
$\underline{93844}$	$\underline{56564}$
0	383600
	$\underline{282841}$
	10075900
	$\underline{8485269}$
	1590631
	...

Das Ziehen von Kubikwurzeln

Volker Bartels beschreibt auf einer Internet-Seite das Ziehen der Kubikwurzel.
Zu finden unter der URL http://www-public.tu-bs.de:8080/~y0004251/kwurzel.htm [18.03.2002].

Literatur und Quellen

- A. P. Juschkewitsch: Geschichte der Mathematik im Mittelalter. B. G. Teubner Verlagsgesellschaft, Leipzig, 1964.
- Bischoff, J.P.: Versuch einer Geschichte der Rechenmaschine. Ansbach, 1804. Hrsg. Weiß, S. Systhema-Verlag. München, 1990.
- Lemke, O.: Richtiges Rechnen, Prüfungsbehelf für Beamte. Verlag Beamtenpresse, 1943.
- Gäbler, J.: Mathematik und Leben, Arithmetik - Algebra - Geometrie, Ein unterhaltsames Lehrbuch für Erwachsenen. Fachbuchverlag, Leipzig, 1959.