Luise Unger
In LATEX gesetzt von Luise Unger

Mathematische Grundlagen

Kurseinheit 4:
Reelle Zahlen und Folgen

mathematik
und
informatik

FernUniversität in Hagen

Studierhinweise

In den folgenden drei Kurseinheiten werden wir eine Einführung in die Analysis geben.

In der Analysis beschäftigt man sich mit dem Körper $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen und Abbildungen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Die untersuchten Abbildungen werden fast nie linear sein, denn die einzigen linearen Abbildungen von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$ beschreiben Geradengleichungen durch den Koordinatenursprung, und das ist für Untersuchungen der Analysis viel zu eingeschränkt.

In der Analysis spricht man nicht von Abbildungen sondern von Funktionen. Diese Begriffe sind aber völlig synonym, es wird einfach traditionell so gemacht, und daran werden wir uns in diesem Kurs auch halten.

Der rote Faden ist die Frage, wie man das Änderungsverhalten einer Funktion verstehen, beschreiben und beherrschen kann. Genauer, welche Begriffe eignen sich am besten dazu, die Änderung einer Funktion „im Kleinen" (also bei geringer Änderung der Variablen) zu erfassen, was kann man über die Funktion „im Großen", über ihren Gesamtverlauf sagen, wenn wir nur Kenntnisse über ihr Verhalten „im Kleinen" haben?

Diese Fragen werden uns in den Kurseinheiten 5 und 6 zu den Begriffen der Stetigkeit und der Differenzierbarkeit führen.

Das unverzichtbare Hilfsmittel für jede Untersuchung solcher Fragen ist der Begriff des Grenzwertes in vielfältigen Formen und Abwandlungen. Er ist das Herzstück der Analysis, und in Kapitel 12 werden wir uns auch mit Grenzwerten von reellen Zahlenfolgen beschäftigen.

Bei der Untersuchung von Grenzwertprozessen ist man auf den Körper $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen angewiesen. Was ist es also, was diesen Körper so besonders macht? Darauf werden wir in Kapitel 11 eingehen. Dabei werden wir axiomatisch vorgehen. Wir werden neun Axiome für die reellen Zahlen vorstellen, und aus diesen alle weiteren Aussagen der Analysis herleiten.

Es folgt ein Überblick über die einzelnen Abschnitte dieser Kurseinheit.

Wie gesagt, in Kapitel 11 widmen wir uns dem Körper $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen.

In 11.1 stellen wir kurz und knapp die Axiome vor, die die reellen Zahlen erfüllen. Die Axiome lassen sich in drei Gruppen zusammenfassen: die erste Gruppe, die in 11.1.1 vorgestellt wird, sagt schlicht aus, dass $\mathbb{R}$ ein Körper ist. Hier finden Sie vermutlich nichts, was Sie überraschen wird. Die Gruppe von Axiomen, die wir in 11.1.2 vorstellen werden, behandelt das Thema, dass wir reelle Zahlen der Größe nach anordnen können. Für gegebene reelle Zahlen a und b können wir entscheiden, ob $a > b$, $a < b$ oder $a = b$ ist. Was hier zu beachten ist, wird in 11.1.2 vorgestellt. Auch rationale Zahlen, also Zahlen in $\mathbb{Q}$ können wir vergleichen, und sie erfüllen dieselben Axiome wie die Ordnungsaxiome in $\mathbb{R}$. Müssen sie schon deshalb, weil $\mathbb{Q}$ eine Teilmenge von $\mathbb{R}$ ist. Die Körper- und Ordnungsaxiome machen das Besondere von $\mathbb{R}$ also noch nicht aus. Das Wesentliche der reellen Zahlen, also das, was $\mathbb{R}$ hat und $\mathbb{Q}$ nicht hat, ist das so genannte Schnittaxiom, das wir in 11.1.3 vorstellen werden. Reelle Zahlen, die keine rationalen Zahlen sind, nennt man irrationale Zahlen. Es gibt viele irrationale Zahlen – genau genommen gibt es viel mehr irrationale Zahlen als rationale. Man kann zeigen, dass es eine bijektive Abbildung von $\mathbb{N}$ nach $\mathbb{Q}$ gibt, dass es aber keine bijektive Abbildung von $\mathbb{N}$ in die Menge der irrationalen Zahlen geben kann. Mit anderen Worten, wenn Sie mit geschlossenen Augen die Zahlengerade zerschneiden, dann wird der Schnittpunkt mit hoher Wahrscheinlichkeit eine irrationale Zahl sein. Hätten wir keine irrationalen Punkte auf der Zahlengeraden, so gäbe es „Lücken", denn nicht an jedem Punkt der Zahlengeraden steht eine rationale Zahl. Anschaulich gesprochen sichert das Schnittaxiom, dass wir die Zahlengerade lückenlos auffüllen können.

In Abschnitt 11.2 leiten wir erste Folgerungen aus den Axiomen her. Die, die 11.2.1 aus den Körperaxiomen herleitet werden, sind im Wesentlichen die der Bruchrechnung. Im Gegensatz zu Termumformungen, die sich alle aus den Körperaxiomen herleiten lassen, werden wir in der Regel mit dem Umgang mit Ungleichungen nicht sehr geschult. Sie sollten sich daher in 11.2.2 die Zeit nehmen, das Rechnen mit Ungleichungen zu verinnerlichen, das werden wir künftig immer wieder brauchen. Hier leiten wir auch einige wichtige Ungleichungen her, die wir später immer wieder verwenden werden, um Zahlen abzuschätzen. In 11.2.3 geht es dann um Folgerungen aus dem Schnittaxiom. Insbesondere werden wir das so genannte Supremumsprinzip herleiten. Dieses ist äquivalent zum Schnittaxiom. Das Schnittaxiom ist geometrisch motiviert, man kann es sich also irgendwie vorstellen. Allerdings kann man mit ihm nicht richtig rechnen, und darauf werden wir angewiesen sein. Wir ersetzen in unserem Axiomensystem der reellen Zahlen also das Schnittaxiom durch das Supremumsprinzip, denn beide sind ja gleichwertig. In Abschnitt 11.2.4 werden wir etwas machen, was Ihnen von der Schule her bekannt zu sein scheint. Wir werden uns mit p-ten Wurzeln – also Wurzeln, dritten Wurzeln und so weiter – aus positiven reellen Zahlen beschäftigen. Ein alter Hut, meinen Sie? Nein, nicht wirklich, denn haben Sie jemals einen Beweis dafür gesehen, dass so etwas wirklich existiert? Und bedenken Sie, wir haben ja nur die neun Axiome zur Verfügung, und aus denen leiten wir all dies her. Wenn wir p-te Wurzeln haben, ist der Schritt zu Zahlen der Form $a^{\frac{r}{p}}$, $\frac{r}{p} \in \mathbb{Q}$, nicht mehr weit. Das ist einfach eine p-te Wurzel aus a, die in die r-te Potenz erhoben wird. Welche Regeln für diese Art von Zahlen gelten, werden wir ebenfalls in 11.2.4 klären.

Die Analysis lässt sich als die Theorie der Grenzprozesse auffassen. Die wichtigste Art des Grenzprozesses, auf die alle in diesem Kurs betrachteten zurückgeführt werden, ist die Konvergenz von reellen Folgen. Man widmet sich der Frage, ob eine unendlich lange Folge von Zahlen sich beliebig nahe einer reellen Zahl nähert, und was diese Zahl (eben der Grenzwert) sein könnte. Das war jetzt sehr schwammig, aber das wird in Kapitel 12 präzisiert. Dieses Kapitel ist die Grundlage für alles, was in den folgenden Kurseinheiten zur Analysis noch kommen wird. Sollten Sie mit Mut zur Lücke lernen, lassen Sie die Lücke bitte nicht hier. In den ersten vier Abschnitten dieses Kapitels geht es zunächst darum, sauber zu formulieren, was ein Grenzwert überhaupt ist und welche Spielregeln beim Umgang mit Grenzwerten zu beachten sind. Hier machen wir wieder den Spagat zwischen sehr formalen Definitionen, mit denen man gut rechen kann und eher geometrisch motivierten Umformulierungen, die man sich besser vorstellen kann. Wichtig sind in diesen Abschnitten auch die Beispiele, denn in der Analysis benutzt man bekannte Folgen und ihre Grenzwerte oft, um unbekannte Folgen abzuschätzen. In Abschnitt 12.5 geht es dann darum, wie man nur entscheiden kann, ob eine Folge einen Grenzwert besitzt oder nicht, ohne explizit geliefert zu bekommen, was dieser Grenzwert konkret ist. Hier werden Sie auf einen inzwischen alten Bekannten treffen: das Supremumsprinzip.

Ich habe zu beginn gesagt, in der Analysis ginge es um Funktionen. Wann die denn kommen, möchten Sie wissen? In Kurseinheit 5 geht es los. In Kurseinheit 4 legen wir die Grundsteine dafür.

Kapitel 11

Die reellen Zahlen

In den ersten drei Kurseinheiten haben wir bereits in Körpern gerechnet. Dabei war es in der Linearen Algebra – außer wenn wir konkrete Beispiele angeschaut haben – völlig egal, welche zugrunde lagen. Die Formulierung vieler Sätze begann mit den Worten „Sei $\mathbb{K}$ ein Körper“, und dann galt das Ergebnis für Abbildungen, Matrizen oder Vektorräume über $\mathbb{Q}$, $\mathbb{F}_2$, $\mathbb{R}$ und allen weiteren Körpern, die im Kurs nicht vorgestellt wurden.

In der Analysis beschäftigt man sich mit Phänomenen im Körper $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen. Die Faustregel ist, dass alles, was wir in der Analysis beweisen werden, für andere Körper falsch oder uninteressant wird. Was ist es also, was die reellen Zahlen so besonders macht? Was hat $\mathbb{R}$, was andere Körper nicht haben? Wir werden auf diese Fragen im nächsten Abschnitt eingehen.

Erschwerend bei unserer Meditation über die reellen Zahlen kommt hinzu, dass wir doch alle zu wissen glauben, was sie sind. In der Schule und im täglichen Leben hatten und haben wir mit Zahlen – auch reellen Zahlen – zu tun. Es ist nicht klar, was wir über die reellen Zahlen als wahr annehmen dürfen, und was eines Beweises bedarf. Wir werden daher im nächsten Abschnitt die Axiome der reellen Zahlen vorstellen. Axiome sind grundlegende Aussagen, die ohne Beweis als wahr angenommen werden, und aus denen sich alle Sätze einer Theorie beweisen lassen.

Wir werden neun Axiome für die reellen Zahlen vorstellen, aus denen sich alle Aussagen der Analysis beweisen lassen. Die ersten fünf werden Sie nicht überraschen; sie besagen, dass $\mathbb{R}$ ein Körper ist. Da es viele Körper gibt, machen diese fünf Axiome das Wesentliche von $\mathbb{R}$ noch nicht aus. Die folgenden drei Axiome tragen der Tatsache Rechnung, dass wir reelle Zahlen vergleichen können. Für gegebene reelle Zahlen a und b können wir sagen, ob $a < b$ oder $b < a$ oder $a = b$ gilt. Die Axiome besagen, wie wir mit solchen Ungleichungen umgehen müssen. Da auch die rationalen Zahlen in $\mathbb{R}$ liegen, können wir auch Zahlen in $\mathbb{Q}$ miteinander vergleichen, und die drei Axiome, die sich mit Ungleichungen beschäftigen, gelten auch in $\mathbb{Q}$. Also machen auch sie noch nicht das Wesentliche der reellen Zahlen aus. Das Wesentliche, also das, was $\mathbb{R}$ von $\mathbb{Q}$ unterscheidet, wird das letzte Axiom sein, das so genannte Schnittaxiom oder Axiom der Ordnungsvollständigkeit. Doch dazu mehr im nächsten Abschnitt.

11.1 Die Axiome der reellen Zahlen

11.1.1 Die Körperaxiome

Wir gehen davon aus, dass $\mathbb{R}$ ein Körper ist, dass wir also reelle Zahlen addieren und multiplizieren dürfen, sodass die folgenden fünf Axiome erfüllt sind:

11.1.1 Axiome: (Körperaxiome)

(A 1) **Kommutativgesetze:** Es gilt $a+b=b+a$ und $a\cdot b=b\cdot a$ für alle $a,b\in\mathbb{R}$.

(A 2) **Assoziativgesetze:** Es gilt $a+(b+c)=(a+b)+c$ und $a\cdot(b\cdot c)=(a\cdot b)\cdot c$ für alle $a,b,c\in\mathbb{R}$.

(A 3) **Distributivgesetz:** Es gilt $a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c$ für alle $a,b,c\in\mathbb{R}$.

(A 4) **Existenz neutraler Elemente:** Es gibt eine reelle Zahl 0 („Null“) und eine davon verschiedene Zahl 1 („Eins“), sodass für jedes $a\in\mathbb{R}$ gilt: $a+0=a$ und $a\cdot 1=a$.

(A 5) **Existenz inverser Elemente:** Zu jeder reellen Zahl a gibt es eine reelle Zahl $-a$, sodass $a+(-a)=0$ ist. Ferner gibt es zu jeder reellen Zahl $a\neq 0$ eine reelle Zahl a^{-1}, sodass $a\cdot a^{-1}=1$ ist.

Führen wir gleich folgende Notation ein:

11.1.2 Notation: Seien $a,b\in\mathbb{R}$. Anstelle von $a\cdot b$ schreiben wir ab. Ist $a\neq 0$, so bezeichnen wir a^{-1} mit $\frac{1}{a}$, und anstelle von $b\cdot\frac{1}{a}$ schreiben wir $\frac{b}{a}$. Ist $a\in\mathbb{R}$ und $n\in\mathbb{N}$, so bezeichnet a^n das Produkt, bei dem wir a n-mal mit sich selbst multiplizieren, und a^0 definieren wir als 1 für alle $a\in\mathbb{R}$, also auch für $a=0$. Für $n\in\mathbb{N}$ und $a\neq 0$ definieren wir a^{-n} als $\frac{1}{a^n}$.

Es gelten die aus der Schule bekannten Potenzregeln (die Sie, wenn Sie möchten, mit Induktion beweisen können):

11.1.3 Bemerkung: (Potenzregeln für ganzzahlige Exponenten)

Seien $a, b \in \mathbb{R}$ und $m, n \in \mathbb{Z}$. Dann gilt:

1. $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$,
2. $(a^m)^n = a^{mn}$,
3. $a^n \cdot b^n = (ab)^n$,
4. $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$ für $a \neq 0$,
5. $\frac{a^n}{b^n} = (\frac{a}{b})^n$ für $b \neq 0$.

11.1.2 Die Ordnungsaxiome

Hier gehen wir davon aus, dass in $\mathbb{R}$ die „Kleiner-Beziehung“ $a < b$ erklärt ist. Das Zeichen $a > b$ ist nur eine andere Schreibweise für $b < a$. Eine Zahl a heißt **positiv** beziehungsweise **negativ**, wenn $a > 0$ beziehungsweise $a < 0$ ist. Die Kleiner-Beziehung genügt folgenden Axiomen:

11.1.4 Axiome: (Ordnungsaxiome)

(A 6) **Trichotomiegesetz:** Für je zwei reelle Zahlen a, b gilt genau eine der drei Beziehungen:
$$a < b \text{ oder } a = b \text{ oder } a > b.$$

(A 7) **Transitivitätsgesetz:** Ist $a < b$ und $b < c$, so folgt $a < c$.

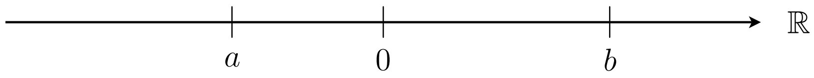
(A 8) **Monotoniegesetze:** Ist $a < b$, so gilt $a + c < b + c$ für alle $c \in \mathbb{R}$, und es gilt $ac < bc$ für alle $c > 0$.

11.1.5 Definition: Ein Körper $\mathbb{K}$, der die Axiome (A 6), (A 7) und (A 8) erfüllt, wird ein **angeordneter Körper** genannt.

Da alle rationalen Zahlen auch reelle Zahlen sind, gelten diese Axiome auch in $\mathbb{Q}$. Also ist auch $\mathbb{Q}$ ein angeordneter Körper.

Wie ist es mit $\mathbb{F}_2$? Können wir eine Kleiner-Beziehung so definieren, dass die Axiome (A 6), (A 7) und (A 8) erfüllt sind? Versuchen wir es. Wir haben nur zwei Elemente zur Verfügung, und wir versuchen es mit $0 < 1$. Wäre $\mathbb{F}_2$ ein angeordneter Körper, dann würde aus dem Monotoniegesetz $0 + 1 < 1 + 1$, also $1 < 0$ folgen, denn $1+1 = 0$ in $\mathbb{F}_2$. Das ist aber ein Widerspruch zum Trichotomiegesetz. Analog kann man die Annahme $1 < 0$ zum Widerspruch führen, und wir sehen, dass $\mathbb{F}_2$ kein angeordneter Körper ist.

Wie in der Schule veranschaulichen wir uns die reellen Zahlen mit Hilfe der Zahlengeraden, auf der wir den Nullpunkt auszeichnen. Zahlen a, die kleiner als 0 sind, befinden sich links des Nullpunktes, und Zahlen, die positiv sind, liegen rechts des Nullpunktes. Die Tatsache, dass $a < b$ ist, zeigt sich darin, dass a links von b liegt.



Bevor wir uns dem letzten Axiom zuwenden, führen wir noch einige Bezeichnungen ein. Das Zeichen $a \leq b$ bedeutet, dass $a < b$ oder $a = b$ gilt. Das Zeichen $a \geq b$ ist nur eine andere Schreibweise von $b \leq a$.

11.1.3 Das Schnittaxiom

Reelle Zahlen, die keine rationalen Zahlen sind, nennt man **irrationale** Zahlen. Es gibt viele irrationale Zahlen – genau genommen gibt es viel mehr irrationale Zahlen als rationale. Man kann zeigen, dass es eine bijektive Abbildung von $\mathbb{N}$ nach $\mathbb{Q}$ gibt, dass es aber keine bijektive Abbildung von $\mathbb{N}$ in die Menge der irrationalen Zahlen geben kann. Mit anderen Worten, wenn Sie mit geschlossenen Augen die Zahlengerade zerschneiden, dann wird der Schnittpunkt mit hoher Wahrscheinlichkeit eine irrationale Zahl sein. Hätten wir keine irrationalen Punkte auf der Zahlengeraden, so gäbe es „Lücken“, denn nicht an jedem Punkt der Zahlengeraden steht eine rationale Zahl.

Das war jetzt sehr unpräzise, aber genau diese Vorstellung leitete den griechischen Mathematiker Eudoxos von Knidos (408–355 vor unserer Zeitrechnung) und mehr als zweitausend Jahre später Richard Dedekind (1831–1916) zur Entwicklung der Theorie von Irrationalzahlen. Der Grundgedanke ist bestechend einfach. Jeder Punkt t auf der Zahlengeraden bewirkt eine Teilung der rationalen Zahlen in zwei Mengen A und B derart, dass jeder Punkt in A links von jedem Punkt von B liegt. Der Punkt t liegt zwischen A und B. Ist t selbst rational, so können wir t nach Belieben zu A oder B nehmen. Teilt man umgekehrt die rationalen Punkte so in zwei Mengen A und B ein, dass jeder Punkt von A links von jedem Punkt in B liegt, so verlangt unsere Vorsstellung von der „Lückenlosigkeit“ der reellen Zahlengerade, dass diese Einteilung von einem eindeutig bestimmten „Trennungspunkt“ t erzeugt wird. Ist dieser Punkt selbst rational, so dürfen wir ihn, da er ja eindeutig durch den Schnitt $(A|B)$ bestimmt wird, mit demselben identifizieren, also $t = (A|B)$ schreiben. Ist der Trennungspunkt t jedoch nicht rational, so werden wir den Schnitt $(A|B)$ als neue Zahl auffassen, die nun nicht mehr rational sondern eben irrational ist. Die rationalen und die irrationalen Zahlen zusammen bilden die reellen Zahlen, und diese haben wir gerade so konstruiert, dass wir die

Zahlengerade lückenlos ausfüllen: An jedem Punkt der Zahlengeraden steht eine reelle Zahl (nämlich der durch diesen Punkt erzeugte Schnitt), und umgekehrt lässt sich jede reelle Zahl $(A|B)$ durch einen Punkt, nämlich den Trennungspunkt des Schnittes repräsentieren. Nach diesem kurzen und vagen Streifzug durch zweitausend Jahre Mathematikgeschichte kommen wir aber nun zu unserem letzten Axiom der reellen Zahlen.

Wir beginnen mit einer abstrakten Definition.

11.1.6 Definition: Ein **Dedekind'scher Schnitt** $(A|B)$ liegt vor, wenn Folgendes gilt:

1. A und B sind nicht leere Teilmengen von $\mathbb{R}$, und
2. $A \cup B = \mathbb{R}$, und
3. für alle $a \in A$ und alle $b \in B$ gilt $a < b$.

Eine Zahl $t \in \mathbb{R}$ heißt **Trennungszahl** des Dedekind'schen Schnittes $(A|B)$, wenn $a \leq t \leq b$ für alle $a \in A$ und alle $b \in B$ gilt.

11.1.7 Beobachtung: Beachten Sie, dass eine Trennungszahl t eines Schnittes $(A|B)$ immer zu A oder B gehört. Läge t weder in A noch in B, so könnte $A \cup B$ nicht ganz $\mathbb{R}$ sein. Weiter kann t nicht zu A und zu B gehören, denn sonst müsste mit der dritten Eigenschaft von Definition 11.1.6 ja gelten, dass $t < t$ gilt.

Unser letztes Axiom lautet nun folgendermaßen:

11.1.8 Axiom: (Schnittaxiom)

(A 9) **Schnittaxiom** oder **Axiom der Ordnungsvollständigkeit:** Jeder Dedekind'sche Schnitt besitzt genau eine Trennungszahl.

11.2 Erste Folgerungen aus den Axiomen

Nachdem wir im letzten Abschnitt die Axiome der reellen Zahlen vorgestellt haben, kommen wir jetzt dazu, erste Eigenschaften von ihnen herzuleiten.

11.2.1 Folgerungen aus den Körperaxiomen

In Kurseinheit 1 haben wir bereits einige Rechenregeln aus den Körperaxiomen hergeleitet, vergleichen Sie bitte Proposition 1.6.4 und Bemerkung 1.6.6. Diese gelten natürlich auch für den Körper $\mathbb{R}$.

Wichtig sind noch die Vorzeichenregeln und die Regeln der Bruchrechung:

11.2.1 Proposition: (Vorzeichenregeln und Regeln der Bruchrechnung)

Für alle $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ gilt

1. $-(-a) = a$,
2. $(a^{-1})^{-1} = a$ für alle $a \neq 0$,
3. $(-a)b = a(-b) = -(ab)$ und $(-a)(-b) = ab$.
4. Sind $b \neq 0$ und $d \neq 0$, so gilt $\frac{a}{b} \pm \frac{c}{d} = \frac{ad \pm bc}{bd}$.
5. Sind $b \neq 0$ und $d \neq 0$, so gilt $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$.
6. Sind $b \neq 0$ und $c \neq 0$ und $d \neq 0$, so gilt $\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{ad}{bc}$.

Beweis:

1. Zu zeigen ist, dass das zu $-a$ bezüglich der Addition inverse Element das Element a ist. Das zeigen wir, indem wir $-a + a$ bilden und feststellen, dass $-a + a = 0$ ist.

2. Zu zeigen ist, dass das zu a^{-1} bezüglich der Multiplikation inverse Element das Element a ist. Das zeigen wir, indem wir $a^{-1} \cdot a$ bilden, und feststellen, dass $a^{-1}a = 1$ ist.

3. Mit Bemerkung 1.6.6 gilt $-x = (-1)x$ für alle Elemente x eines Körpers. Es folgt
$$(-a)b = ((-1)a)b = (-1)(ab) = -(ab)$$
und
$$a(-b) = a((-1)b) = (-1)(ab) = -(ab).$$
Dies zeigt die erste Gleichungskette. Weiter gilt
$$(-a)(-b) = -(a(-b)) = -(-(ab)) = ab.$$

4. Es gilt für $b \neq 0$ und $d \neq 0$:

$$\begin{aligned}
\frac{ad \pm bc}{bd} &= (ad \pm bc)(bd)^{-1} \\
&= ad(bd)^{-1} \pm bc(bd)^{-1} \\
&= add^{-1}b^{-1} \pm bb^{-1}cd^{-1} \\
&= ab^{-1} \pm cd^{-1} \\
&= \frac{a}{b} \pm \frac{c}{d}.
\end{aligned}$$

5. Es gilt für $b \neq 0$ und $d \neq 0$:

$$\begin{aligned}
\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} &= (ab^{-1})(cd^{-1}) \\
&= (ac)(bd)^{-1} \\
&= \frac{ac}{bd}.
\end{aligned}$$

□

11.2.2 Aufgabe: Beweisen Sie die letzte Behauptung in Proposition 11.2.1.

11.2.2 Folgerungen aus den Ordnungsaxiomen

Das tägliche Brot in der Analysis ist der Umgang mit Ungleichungen; dabei müssen Sie also eine gewisse Virtuosität entwickeln. Allerdings wird man im Umgang mit Ungleichungen weit weniger trainiert als im Umgang mit den Grundrechenarten, also werden wir aus den Axiomen (A 6) bis (A 8) (vergleiche 11.1.4) weitere grundlegende Folgerungen herleiten. Die Ergebnisse dieses Abschnitts sind ein unentbehrliches Handwerkszeug in der Analysis, und wir werden sie im Folgenden immer wieder verwenden, ohne explizit darauf hinzuweisen. Sie sollten Ihnen also in Fleisch und Blut übergehen.

Grundlegendes über Ungleichungen

11.2.3 Proposition: Für alle reellen Zahlen a und b gilt:

1. $a < b \Leftrightarrow b - a > 0$
2. $a < 0 \Leftrightarrow -a > 0$
3. $a > 0 \Leftrightarrow -a < 0$

4. $a < b \Leftrightarrow -b < -a$.

Beweis:

1. Aus $a < b$ folgt mit dem Monotoniegesetz (A 8) $0 = a + (-a) < b + (-a) = b - a$, also $b - a > 0$. Gilt umgekehrt $b - a > 0$, so folgt $b - a + a > 0 + a$, also $b > a$.
2. Die Aussage folgt aus 1. mit $b = 0$.
3. Die Aussage folgt aus 2., wenn wir a durch $-a$ ersetzen und beachten, dass $-(-a) = a$ ist.
4. Es gilt

$$\begin{array}{rcll} a < b & \Leftrightarrow & b - a > 0 & \text{mit 1} \\ & \Leftrightarrow & -a - (-b) > 0 & \text{da } -(-b) = b \\ & \Leftrightarrow & -b < -a & \text{mit 1.} \end{array}$$

□

Eine Ungleichung $a < b$ nennt man auch eine **Abschätzung** und sagt, dass a von oben durch b und b von unten durch a abgeschätzt wird.

Nun befassen wir uns mit der Addition von Ungleichungen.

11.2.4 Proposition: Gleichgerichtete Ungleichungen dürfen addiert werden, das heißt, aus $a < b$ und $c < d$ folgt $a + c < b + d$.

Beweis: Aus dem Monotoniegesetz (A 8) folgt

$$a < b \Rightarrow a + c < b + c \text{ und } c < d \Rightarrow b + c < b + d.$$

Aus dem Transitivitätsgesetz (A 7) folgt $a + c < b + d$, die Behauptung. □

Warnung: Gleichgerichtete Ungleichungen dürfen nicht ohne Weiteres subtrahiert oder multipliziert werden. Die Multiplikation von Ungleichungen bereiten wir durch folgende Proposition vor.

11.2.5 Proposition: Seien a und b reelle Zahlen. Dann gilt: Es ist $ab > 0$ genau dann, wenn beide Faktoren positiv oder beide Faktoren negativ sind.

Beweis:

- $\Rightarrow$ Sei $ab > 0$. Es folgt $a \neq 0$ und $b \neq 0$. Wir unterscheiden nun zwei Fälle.

  Fall 1: $a > 0$. Angenommen, $b < 0$. Mit Proposition 11.2.3 folgt $-b > 0$. Das Monotoniegesetz (A 8) für die Multiplikation (vergleiche 11.1.4) impliziert $a(-b) > 0$, mit Proposition 11.2.1 also $-(ab) > 0$. Mit 11.2.3 folgt $ab < 0$, ein Widerspruch zu unserer Annahme, dass $ab > 0$ ist. Somit folgt $b > 0$. Wenn $a > 0$, so muss also auch $b > 0$ gelten.

  Fall 2: $a < 0$. Angenommen, $b > 0$. Mit Proposition 11.2.3 folgt $-a > 0$. Das Monotoniegesetz (A 8) für die Multiplikation impliziert $(-a)b > 0$, mit Proposition 11.2.1 also $-(ab) > 0$. Wieder mit 11.2.3 folgt $ab < 0$, ein Widerspruch zu unserer Annahme, dass $ab > 0$ ist. Somit folgt $b < 0$ mit (A 6). Wenn $a < 0$, so muss also auch $b < 0$ gelten.

- $\Leftarrow$ Seien a und b beide positiv. Wenden wir das Monotoniegesetz (A 8) auf die Ungleichung $a > 0$ an, so erhalten wir $ab > 0$, die Behauptung. Seien nun a und b beide negativ. Dann gilt $-a > 0$ und $-b > 0$. Es folgt $(-a)(-b) > 0$, also $ab > 0$ mit 3 aus 11.2.1, die Behauptung.

$\square$

Als unmittelbare Folgerungen erhalten wir:

11.2.6 Korollar: Es ist $ab < 0$ genau dann, wenn einer der Faktoren positiv und einer negativ ist. $\square$

11.2.7 Korollar: Für alle reellen Zahlen a ist $a^2 \geq 0$, und das Gleichheitszeichen gilt genau dann, wenn $a = 0$ ist.

Beweis: Ist $a \neq 0$, so gilt $a^2 > 0$ mit Proposition 11.2.5. Es ist $a^2 = 0$ genau dann, wenn a weder positiv noch negativ ist, also genau dann, wenn $a = 0$ ist. $\square$

Das folgende Korollar wird Sie nicht überraschen. Wenn wir aber wirklich an unserem Ehrgeiz festhalten, alles, was über reelle Zahlen wahr ist, aus den Axiomen des letzten Abschnittes herzuleiten, dann verdient es, festgehalten zu werden.

11.2.8 Korollar: Es ist $1 > 0$.

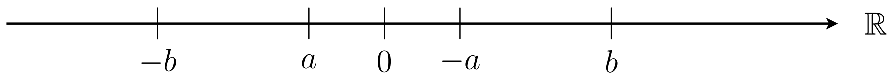
Beweis: Da $\mathbb{R}$ ein Körper ist, gilt $1 \neq 0$. Es ist $1 = 1^2$, und mit Korollar 11.2.7 folgt $1 > 0$. $\square$

Multipliziert man eine Ungleichung mit einer negativen Zahl, so dreht sich das Ungleichungszeichen um:

11.2.9 Proposition: Ist $a < b$, so gilt $ac > bc$ für alle $c < 0$.

11.2.10 Aufgabe: Beweisen Sie Proposition 11.2.9.

Betrachten wir noch einmal die reellen Zahlen auf der Zahlengeraden. Die Ungleichungskette $a < x < b$ drückt aus, dass sich x zwischen a und b befindet. Der Übergang von a zu $-a$ ist geometrisch eine Spiegelung am Nullpunkt. Insbesondere wird damit anschaulich klar, dass die Ungleichung $a < b$ nach Multiplikation mit -1 in die Ungleichung $-a > -b$ übergeht.



Das multiplikative Monotoniegesetz (A 8) und Proposition 11.2.9 fassen wir in einer Merkregel zusammen.

11.2.11 Merkregel: Ungleichungen dürfen mit positiven Zahlen multipliziert werden, ohne das sich die Richtung des Ungleichungszeichens ändert. Multipliziert man mit einer negeativen Zahl, so dreht sich das Ungleichungszeichen um.

11.2.12 Proposition: Gleichgerichtete Ungleichungen dürfen immer dann multipliziert werden, wenn alle Glieder positiv sind, genauer:

Wenn $0 < a < b$ und $0 < c < d$, so gilt $ac < bd$.

Beweis: Aus $a < b$ und $c > 0$ folgt $ac < bc$. Aus $c < d$ und $b > 0$ folgt $bc < bd$. Mit dem Transitivitätsgesetz folgt $ac < bd$, die Behauptung. □

Kommen wir nun zu Ungleichungen zwischen Brüchen. Zum Aufwärmen:

11.2.13 Aufgabe: Seien $b, d > 0$. Beweisen Sie:

$$\frac{a}{b} < \frac{c}{d} \Leftrightarrow ad < bc.$$

11.2.14 Proposition: Sei $b \neq 0$. Dann gilt:

1. $\dfrac{1}{b} > 0 \Leftrightarrow b > 0$.
2. $\dfrac{a}{b} > 0 \Leftrightarrow$ Zähler und Nenner sind beide positiv oder beide negativ.

Beweis:

1. Es ist $b \cdot \frac{1}{b} = 1 > 0$. Mit Proposition 11.2.5 folgt, dass $\frac{1}{b}$ genau dann positiv ist, wenn b positiv ist.
2. Genau dann ist $\frac{a}{b} = a \cdot \frac{1}{b}$ positiv, wenn a und $\frac{1}{b}$ positiv sind (und dann ist b positiv) oder a und $\frac{1}{b}$ negativ sind (und dann ist b negativ).

□

11.2.15 Proposition: (Abschätzung von Brüchen)

1. Ist $p_1 < p_2$ und $q > 0$, so gilt $\frac{p_1}{q} < \frac{p_2}{q}$.
2. Ist $0 < q_1 < q_2$ und ist $p > 0$, so gilt $\frac{p}{q_2} < \frac{p}{q_1}$.

Beweis:

1. Mit Proposition 11.2.14 ist $\frac{1}{q} > 0$. Die Behauptung ergibt sich nun aus dem Monotoniegesetz (A 8).
2. Es ist $\frac{p}{q_1 q_2} > 0$. Wir multiplizieren die Ungleichung $q_1 < q_2$ mit $\frac{p}{q_1 q_2}$, und mit dem Monotoniegesetz folgt die Behauptung.

□

Proposition 11.2.15 fassen wir wieder in einer Merkregel zusammen.

11.2.16 Merkregel: Einen Bruch mit positivem Zähler und Nenner kann man vergrößern, indem man den Zähler vergrößert oder den Nenner verkleinert (aber stets positiv hält).

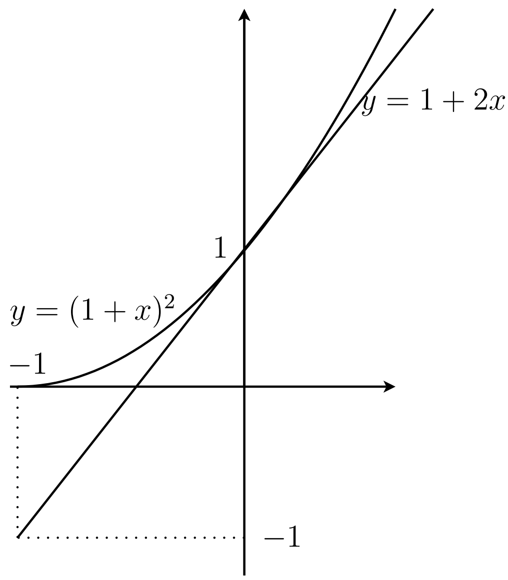
Im Folgenden werden wir eine wichtige Ungleichung beweisen, die nach dem schweizer Mathematiker Jakob Bernoulli (1654-1705) benannt ist. Die Bedeutung, Brauchbarkeit und Wichtigkeit dieser Ungleichung besteht darin, dass eine Potenz durch eine Geradengleichung abgeschätzt werden kann.

11.2.17 Satz: (Bernoulli'sche Ungleichung)

Für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $x \geq -1$ und alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $(1 + x)^n \geq 1 + nx$.

Vor dem Beweis eine Skizze für $n = 2$.

Die Bernoulli'sche Ungleichung besagt, dass für $x \geq -1$ immer $(x+1)^2 \geq 1+2x$ gilt:



Beweis: Wir beweisen die Behauptung mit Induktion nach n.

Sei $n = 1$. Dann gilt $(1+x)^1 = 1 + x \geq 1 + 1 \cdot x$ für alle $x \in \mathbb{R}$, insbesondere für alle $x \geq -1$. Es gilt also der Induktionsanfang.

In der Induktionsannahme nehmen wir an, dass $(1+x)^n \geq 1+nx$ für alle $x \geq -1$ schon für ein $n \geq 1$ bewiesen ist. Da $1 + x \geq 0$, folgt aus dem Monotoniegesetz

$$(1+x)^n(1+x) \geq (1+nx)(1+x),$$

also

$$(1+x)^{n+1} \geq 1 + (n+1)x + nx^2.$$

Da $x^2 \geq 0$ mit Korollar 11.2.7, und da $n > 0$, folgt $nx^2 \geq 0$. Mit Proposition 11.2.4 folgt $1 + (n+1)x + nx^2 \geq 1 + (n+1)x$, also $(1+x)^{n+1} \geq 1 + (n+1)x$. Mit dem Prinzip der vollständigen Induktion folgt die Behauptung. □

11.2.18 Aufgabe: Beweisen Sie, dass $2^n \geq 1 + n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.

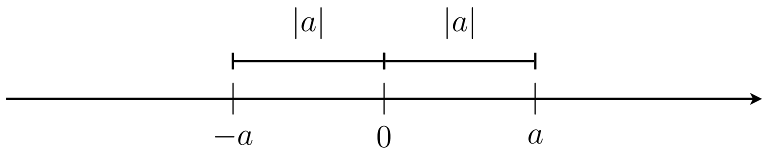
Abstand und Betrag

Die Ordnungsstruktur der reellen Zahlen erlaubt uns, den Abstand $d(a, b)$ (die Bezeichnung d kommt von „distance“) zwischen reellen Zahlen a und b zu definieren, und zwar so, wie es durch die Verhältnisse auf der Zahlengeraden suggeriert wird. Wir beginnen etwas spezieller, nämlich mit der Definition des Betrages einer reellen Zahl.

11.2.19 Definition: Der **Betrag** $|a|$ einer reellen Zahl a ist definiert durch

$$|a| = \begin{cases} a, & \text{falls } a \geq 0 \\ -a, & \text{falls } a < 0. \end{cases}$$

Veranschaulichen wir uns die Definition des Betrages auf der Zahlengeraden:



Ist $a = 0$, so ist auch $|a| = 0$. Nehmen wir an, $a \neq 0$. Nehmen wir $|a|$ in den Zirkel, und schlagen wir einen Kreis um den Nullpunkt, so schneidet der Kreis die Zahlengeraden in a und $-a$. Damit ist anschaulich klar, dass $|a|$ der Abstand von a beziehungsweise $-a$ vom Nullpunkt ist.

Erste Eigenschaften des Betrages fassen wir in folgender Bemerkung zusammen:

11.2.20 Bemerkung: Für jede reelle Zahl a gilt

1. $|a| \geq 0$, und $|a| = 0$ genau dann, wenn $a = 0$ ist.
2. $|a| = |-a|$.
3. $a \leq |a|$ und $-a \leq |a|$.

Beweis:

1. Nach Definition gilt $|a| \geq 0$. Ist $a = 0$, so ist nach Definition $|a| = 0$. Ist umgekehrt $|a| = 0$, so ist a weder positiv noch negativ, also $a = 0$.
2. Nach Definition gilt
$$|-a| = \begin{cases} -a, & \text{falls } -a \geq 0 \\ -(-a) = a, & \text{falls } -a < 0 \end{cases} = \begin{cases} -a, & \text{falls } a \leq 0 \\ a, & \text{falls } a > 0 \end{cases} = |a|.$$
3. Sei $a \geq 0$. Dann ist $-a \leq 0 \leq a = |a|$. Ist $a < 0$, so gilt $a \leq 0 \leq -a = |a|$.

□

Der Betrag reeller Zahlen hat folgende Grundeigenschaften:

11.2.21 Proposition: (Grundeigenschaften des Betrags)

Für alle reelle Zahlen $a, b \in \mathbb{R}$ gilt:

1. $|ab| = |a||b|$.
2. $|a + b| \leq |a| + |b|$.
3. $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$, falls $b \neq 0$.
4. $||a| - |b|| \leq \begin{cases} |a-b| \\ |a+b| \end{cases}$.

Beweis:

1. Wir unterscheiden verschiedene Fälle:

   1. Fall: Sei $ab = 0$. Da $\mathbb{R}$ ein Körper ist, gilt $a = 0$ oder $b = 0$ (vergleichen Sie mit Proposition 1.6.4). Dann ist $|a| = 0$ oder $|b| = 0$. In beiden Fällen gilt $|a||b| = 0$, also $|ab| = |a||b|$.

   2. Fall: Sei $ab > 0$. Mit Proposition 11.2.5 gilt $a > 0$ und $b > 0$ oder $a < 0$ und $b < 0$. Falls $a > 0$ und $b > 0$, dann gilt

   $$|ab| = ab = |a||b|.$$

   Falls $a < 0$ und $b < 0$, so gilt $-a = |a|$ und $-b = |b|$ und

   $$|ab| = ab = (-a)(-b) = |a||b|.$$

   3. Fall: Sei $ab < 0$. Dann ist $-ab > 0$ und mit dem zweiten Fall folgt $|ab| = |-ab| = |-a||b| = |a||b|$.

2. Sei $a+b \geq 0$. Dann ist $|a+b| = a+b \leq |a|+b \leq |a|+|b|$ mit Bemerkung 11.2.20 3. Wenn $a+b < 0$, so gilt $|a+b| = -(a+b) = -a+(-b) \leq |a|+(-b) \leq |a|+|b|$, wieder mit Bemerkung 11.2.20 3.

3. Sei $b \neq 0$. Dann gilt $b\frac{1}{b} = 1$. Mit 1 gilt $\left|b\frac{1}{b}\right| = |b|\left|\frac{1}{b}\right| = 1$. Wir dividieren durch $|b|$ und erhalten $\left|\frac{1}{b}\right| = \frac{1}{|b|}$. Es folgt

   $$\left|\frac{a}{b}\right| = \left|a\frac{1}{b}\right| = |a|\left|\frac{1}{b}\right| = |a|\frac{1}{|b|} = \frac{|a|}{|b|}.$$

4. Es gilt:

$$||a|-|b|| \leq ||a|-b| = |-(|a|-b)| = |b-|a|| \leq |b-a| = |-(b-a)| = |a-b|.$$

Somit gilt die obere Ungleichung. Die untere folgt aus der oberen, denn

$$||a|-|b|| = ||a|-|-b|| \leq |a-(-b)| = |a+b|.$$

□

11.2.22 Definition: Die Ungleichung $|a+b| \leq |a|+|b|$ wird **Dreiecksungleichung** genannt.

Die Dreiecksungleichung gilt nicht nur für Summen aus zwei Summanden, sondern auch für Summen, die mehr Summanden haben:

11.2.23 Korollar: Sei n eine natürliche Zahl, und seien $a_1, \ldots, a_n$ reelle Zahlen. Dann gilt

$$\left|\sum_{i=1}^{n} a_i\right| \leq \sum_{i=1}^{n} |a_i|.$$

Beweis: Wir beweisen die Behauptung mit Induktion nach n. Im Induktionsanfang sei $n = 1$. Dann gilt $|a_1| \leq |a_1|$, eine wahre Aussage.

Für die Induktionsannahme nehmen wir an, dass $\left|\sum\limits_{i=1}^{n} a_i\right| \leq \sum\limits_{i=1}^{n} |a_i|$ für ein $n \geq 1$ bereits bewiesen ist. Dann folgt:

$$\begin{array}{rcll} \left|\sum\limits_{i=1}^{n+1} a_i\right| & = & \left|\sum\limits_{i=1}^{n} + a_{n+1}\right| & \\ & \leq & \left|\sum\limits_{i=1}^{n} a_i\right| + |a_{n+1}| & \text{mit der Dreiecksungleichung} \\ & \leq & \sum\limits_{i=1}^{n} |a_i| + |a_{n+1}| & \text{mit der Induktionsannahme.} \\ & = & \sum\limits_{i=1}^{n+1} |a_i|. & \end{array}$$

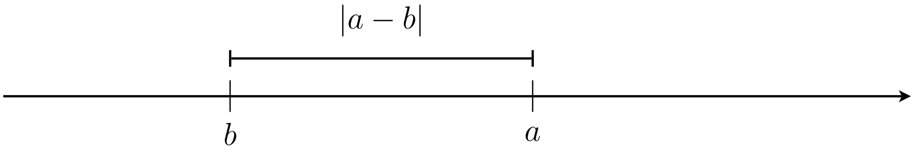
Mit dem Prinzip der vollständigen Induktion folgt die Behauptung. □

Der Betrag einer Summe ist somit kleiner oder gleich der Summe der Beträge.

Wir hatten oben bereits den Begriff des Abstands intuitiv benutzt, nämlich zur Veranschaulichung des Betrages einer reellen Zahl als deren Abstand vom Nullpunkt. Wir werden jetzt diesen Begriff formal einführen.

11.2.24 Definition: Seien $a, b \in \mathbb{R}$. Der Abstand $d(a, b)$ zwischen a und b ist definiert durch $d(a, b) = |a - b|$.

Veranschaulicht auf der Zahlengeraden ist $d(a, b)$ die Länge der Strecke zwischen a und b:



Da der Betrag einer reellen Zahl genau dann Null ist, wenn die reelle Zahl Null ist, folgt

$$d(a, b) = 0 \Leftrightarrow |a - b| = 0 = a - b \Leftrightarrow a = b.$$

Für alle $a, b \in \mathbb{R}$ gilt $|a - b| = |-(a - b)| = |b - a|$, und es folgt

$$d(a, b) = d(b, a).$$

Der Abstand zwischen a und b ist also gleich dem Abstand zwischen b und a, was unserer Intuition nach auch richtig sein sollte. Weiter gilt für alle $a, b, c \in \mathbb{R}$: $|a - b| = |(a - c) + (c - b)| \leq |a - c| + |c - b|$ (mit der Dreiecksungleichung), also

$$d(a, b) \leq d(a, c) + d(c, b).$$

Auch diese Ungleichung kann man sich auf der Zahlengeraden gut vorstellen: Gehen wir von a nicht direkt zu b, sondern gehen wir erst von a nach c und dann von c nach b, dann haben wir auf jeden Fall nicht abgekürzt, sondern im ungünstigsten Fall einen Umweg gemacht.

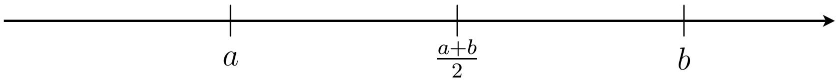
Wir kommen nun zu einer Abschätzung, die wir im Folgenden oft verwendet werden.

11.2.25 Proposition: (Ungleichung des arithmetischen Mittels)

Ist $a < b$, so folgt $a < \dfrac{a + b}{2} < b$.

Beweis: Aus $a < b$ folgt $2a = a + a < a + b$ und $a + b < b + b = 2b$. Mit dem Transitivitätsgesetz gilt somit $2a < a + b < 2b$. Wir dividieren durch 2 (formal: multiplizieren mit $\frac{1}{2}$) und erhalten die Behauptung, da $2 > 0$ gilt. $\square$

Auch die Aussage der Ungleichung des arithmetischen Mittel können wir uns auf der Zahlengeraden veranschaulichen.



11.2.26 Beobachtung: Ist $a < b$, so folgt $\frac{a+b}{2} - a = \frac{b-a}{2}$ und $b - \frac{a+b}{2} = \frac{b-a}{2}$, also $d(a, \frac{a+b}{2}) = d(\frac{a+b}{2}, b) = \frac{b-a}{2}$. Der Punkt $\frac{a+b}{2}$ ist von a und b also gleich weit entfernt, liegt also genau in der Mitte zwischen beiden. □

Proposition 11.2.25 drückt aus, dass zwischen zwei verschiedenen reellen Zahlen stets eine weitere reelle Zahl liegt. Sind a und b rational, so ist auch $\dfrac{a+b}{2}$ rational, und es folgt, dass auch zwischen zwei rationalen Zahlen immer eine rationale Zahl liegt.

11.2.27 Definition: Für zwei reelle Zahlen a und b wird $\dfrac{a+b}{2}$ das **arithmetische Mittel** von a und b genannt.

11.2.28 Aufgabe: Beweisen Sie: Wenn $0 \leq a \leq \varepsilon$ für jede positive Zahl ε gilt, dann ist $a = 0$.

Das Symbol ε ist der griechische Kleinbuchstabe e, und ε wird „Epsilon“ ausgesprochen. Mit ε assoziieren Mathematikerinnen und Mathematiker immer eine ganz, ganz kleine, wirklich winzig kleine, positive Zahl.

11.2.29 Definition: Seien $a, b \in \mathbb{R}$.

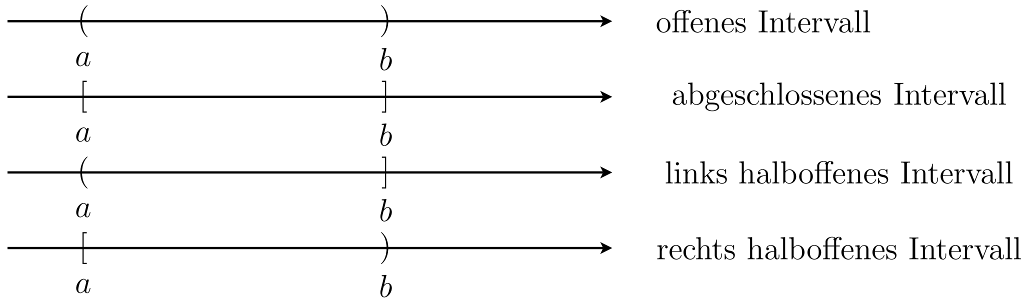
1. Die Menge $\{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$ wird mit (a, b) bezeichnet und **offenes Intervall** von a nach b genannt.

2. Die Menge $\{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$ wird mit $[a, b]$ bezeichnet und **abgeschlossenes Intervall** von a nach b genannt.

3. Die Menge $\{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$ wird mit $(a, b]$ bezeichnet und **links halboffenes Intervall** von a nach b genannt.

4. Die Menge $\{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$ wird mit $[a, b)$ bezeichnet und **rechts halboffenes Intervall** von a nach b genannt.

Beachten Sie, dass auch das abgeschlossene Intervall $[a, a]$, das nur aus dem Punkt a besteht, erklärt ist. Intervalle veranschaulichen wir wie folgt auf der Zahlengeraden:



In Anlehnung an unsere Beobachtung in 11.2.26 führen wir folgende Begriffe ein:

11.2.30 Definition: Seien (a, b), $[a, b]$, $(a, b]$, $[a, b)$ Intervalle. In allen Fällen nennen wir a und b die **Randpunkte** , $b - a$ die **Länge**, $\frac{a+b}{2}$ den **Mittelpunkt** und $\frac{b-a}{2}$ den Radius des entsprechenden Intervalls.

Neben den in 11.2.29 definierten Intervallen betrachtet man noch so genannte uneigentliche Intervalle:

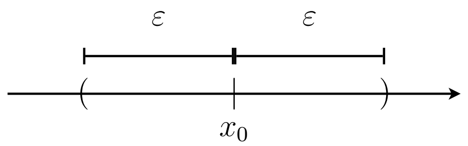
11.2.31 Definition: Sei $a \in \mathbb{R}$. Die folgenden Mengen werden **uneigentliche Intervalle** genannt. Dabei gelten folgende Bezeichnungen:

1. $\{x \in \mathbb{R} \mid x \geq a\} = [a, \infty)$
2. $\{x \in \mathbb{R} \mid x > a\} = (a, \infty)$
3. $\{x \in \mathbb{R} \mid x \leq a\} = (-\infty, a]$
4. $\{x \in \mathbb{R} \mid x < a\} = (-\infty, a)$
5. $\mathbb{R} = (-\infty, \infty)$

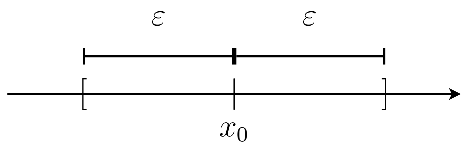
Wir werden später noch eine andere Bezeichnung für offene beziehungsweise abgeschlossene Intervalle verwenden:

11.2.32 Definition: Sei (a, b) beziehungsweise $[a, b]$ ein Intervall mit Mittelpunkt x_0 und Radius ε. Dann wird (a, b) mit $U_\varepsilon(x_0)$ und $[a, b]$ mit $U_\varepsilon[x_0]$ bezeichnet und **offene ε-Umgebung** beziehungsweise **abgeschlossene ε-Umgebung** um x_0 genannt.

Anschaulich: Wenn wir um x_0 einen Kreis mit Radius ε schlagen, dann schneidet der Kreis die Zahlengerade in zwei Punkten (den Randpunkten des Intervalls) und die Punkte in der (offenen oder abgeschlossenen) ε-Umgebung sind die, die auf der Zahlengeraden zwischen den Randpunkten liegen. Wenn wir die Randpunkte zu dem Intervall hinzunehmen, haben wir eine abgeschlossene ε-Umgebung um x_0, sonst eine offene.



offene ε-Umgebung um x_0



abgeschlossene ε-Umgebung um x_0

Offene ε-Umgebungen werden häufiger betrachtet als abgeschlossene. Daher nennt man offene ε-Umgebungen in der Regel einfach nur ε-Umgebungen.

Um mit ε-Umgebungen später besser umgehen zu können, schreiben wir sie wie folgt um:

11.2.33 Proposition: Sei $x_0 \in \mathbb{R}$, und sei $\varepsilon > 0$. Dann gilt

$$U_\varepsilon(x_0) = \{x \in \mathbb{R} \mid |x - x_0| < \varepsilon\} \text{ und } U_\varepsilon[x_0] = \{x \in \mathbb{R} \mid |x - x_0| \leq \varepsilon\}.$$

Beweis: Die Randpunkte von $U_\varepsilon(x_0)$ beziehungsweise $U_\varepsilon[x_0]$ sind $a = x_0 - \varepsilon$ und $b = x_0 + \varepsilon$.

Sei $x \in U_\varepsilon(x_0)$. Dann gilt $x_0 - \varepsilon < x < x_0 + \varepsilon$ nach Definition eines offenen Intervalls mit Randpunkten $x_0 - \varepsilon$ und $x_0 + \varepsilon$. Aus dem Monotoniegesetz (A 8) der Addition folgt $-\varepsilon < x - x_0 < \varepsilon$. Ist $x - x_0 \geq 0$, so folgt $|x - x_0| = x - x_0 < \varepsilon$, also $x \in \{x \in \mathbb{R} \mid |x - x_0| < \varepsilon\}$. Ist $x - x_0 < 0$, so folgt aus der Ungleichung $-\varepsilon < x - x_0$ mit Merkregel 11.2.11 die Ungleichung $-(-\varepsilon) > -(x - x_0)$. Es sind aber $-(-\varepsilon) = \varepsilon$ und $-(x - x_0) = |x - x_0|$. Somit gilt auch in diesem Fall $|x - x_0| < \varepsilon$ und $x \in \{x \in \mathbb{R} \mid |x - x_0| < \varepsilon\}$. Also haben wir gezeigt, dass $U_\varepsilon(x_0) \subseteq \{x \in \mathbb{R} \mid |x - x_0| < \varepsilon\}$ gilt.

Sei umgekehrt $x \in \mathbb{R}$ mit $|x-x_0| < \varepsilon$. Ist $x-x_0 \geq 0$, so gilt $|x-x_0| = x-x_0 < \varepsilon$ und wir bekommen die Ungleichungskette $-\varepsilon < x - x_0 < \varepsilon$. Mit dem Monotoniegesetz folgt $x_0 - \varepsilon < x < x_0 + \varepsilon$. Ist $x - x_0 < 0$, so gilt $-(x - x_0) = |x - x_0|$, also $-\varepsilon < -(x - x_0) < \varepsilon$. Wieder mit Merkregel 11.2.11 folgt $\varepsilon > x - x_0 > -\varepsilon$, und mit dem Monotoniegesetz erhalten wir $x_0 - \varepsilon < x < x_0 + \varepsilon$. Es folgt $\{x \in \mathbb{R} \mid |x-x_0| < \varepsilon\} \subseteq U_\varepsilon(x_0)$, also $U_\varepsilon(x_0) = \{x \in \mathbb{R} \mid |x - x_0| < \varepsilon\}$. Dass $U_\varepsilon[x_0] = \{x \in \mathbb{R} \mid |x - x_0| \leq \varepsilon\}$ gilt, wird analog bewiesen. □

11.2.34 Aufgabe: Beweisen Sie $U_\varepsilon[x_0] = \{x \in \mathbb{R} \mid |x - x_0| \leq \varepsilon\}$.

Setzen wir $x_0 = 0$ in Proposition 11.2.33, so erhalten wir

11.2.35 Korollar: Sei $\varepsilon > 0$. Dann gilt

$$U_\varepsilon(0) = \{x \in \mathbb{R} \mid |x| < \varepsilon\} \text{ und } U_\varepsilon[0] = \{x \in \mathbb{R} \mid |x| \leq \varepsilon\}.$$

11.2.3 Folgerungen aus dem Schnittaxiom

Kommen wir nun zu dem Schnittaxiom, das die reellen Zahlen so besonders macht.

Minimum und Maximum

11.2.36 Definition: Sei $M \subseteq \mathbb{R}$ eine Teilmenge von $\mathbb{R}$. Ein Element $m \in M$ heißt **Minimum** oder **kleinstes Element** von M, wenn $m \leq x$ für alle $x \in M$ gilt. Entsprechend heißt $m \in M$ **Maximum** oder **größtes Element** von M, wenn $x \leq m$ für alle $x \in M$ gilt.

ACHTUNG: Für Maximum und Minimum einer Menge M wird verlangt, dass diese in M liegen.

11.2.37 Aufgabe: Sei $M = \{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\}$. Beweisen Sie, dass M ein Maximum aber kein Minimum besitzt.

11.2.38 Aufgabe: Sei $M \subseteq \mathbb{R}$ eine Menge, die ein Minimum und ein Maximum besitzt. Beweisen Sie, dass $\min M$ und $\max M$ eindeutig sind.

11.2.39 Notation: Sei $M \subseteq \mathbb{R}$ eine Menge, die ein Minimum oder ein Maximum besitzt. Das Minimum wird mit $\min M$ bezeichnet und das Maximum mit $\max M$. Besteht M aus zwei Elementen, also $M = \{a, b\}$, so werden $\max M$ und $\min M$ mit $\max(a, b)$ beziehungsweise $\min(a, b)$ bezeichnet.

Mit dieser Bezeichnung gilt $\max(-a, a) = |a|$ für alle $a \in \mathbb{R}$.

Teilmengen von $\mathbb{R}$ müssen keine Minima oder Maxima besitzen. Beispiele dafür sind $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{Q}$ oder auch $\{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < 1\}$. Dieses Phänomen kann aber nur bei Mengen mit unendlich vielen Elementen auftreten. Jede nicht leere, endliche Teilmenge $\{a_1, \ldots, a_n\}$ reeller Zahlen besitzt ein Minimum und ein Maximum, wie das folgende Ergebnis zeigt.

11.2.40 Proposition: Jede nicht leere, endliche Teilmenge $\{a_1, \ldots, a_n\}$ reeller Zahlen besitzt ein Minimum und ein Maximum.

Beweis: Wir beweisen die Behauptung mit Induktion nach n. Im Fall $n = 1$ ist a_1 das einzige Element in M. Dann ist a_1 das Minimum und das Maximum von M.

In der Induktionsannahme nehmen wir an, für ein $n \geq 1$ bereits bewiesen wurde, dass jede Teilmenge reeller Zahlen mit n Elementen ein Minimum und ein Maximum besitzt.

Sei $M = \{a_1, \ldots, a_{n+1}\}$ eine Menge mit $n + 1$ Elementen. Sei $M' = \{a_1, \ldots, a_n\}$. Die Menge M' hat n Elemente, und nach Induktionsannahme besitzt sie ein Minimum a_i und ein Maximum a_j. Ist $a_{n+1} < a_i$, so ist a_{n+1} das Minimum von M, anderenfalls ist a_i das Minimum von M. Ist $a_j < a_{n+1}$, so ist a_{n+1} das Maximum von M, anderenfalls ist a_j das Maximum von M. Es folgt, dass auch M ein Minimum und ein Maximum besitzt, und mit dem Prinzip der vollständigen Induktion folgt die Behauptung. $\square$

11.2.41 Aufgabe: Sei $M = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < 1\}$. Beweisen Sie, dass M kein Minimum und kein Maximum besitzt.

Untere und obere Schranken

Wir haben gerade gesehen, dass zwar jede endliche Menge reeller Zahlen ein Minimum und ein Maximum besitzt, aber durchaus nicht jede unendliche Menge. Wir werden jetzt sehen, dass es bei gewissen Mengen einen Ersatz für das eventuell fehlende Minimum oder Maximum gibt. Allerdings brauchen wir einige Vorbereitungen.

11.2.42 Definition: Eine Menge M reeller Zahlen heißt **nach unten beschränkt**, wenn es ein $a \in \mathbb{R}$ gibt, sodass $a \leq x$ für alle $x \in M$ gilt. Jedes derartige a wird eine **untere Schranke** von M genannt. Analog heißt M **nach oben beschränkt**, wenn es ein $b \in \mathbb{R}$ so gibt, dass $x \leq b$ für alle $x \in M$ gilt. Jedes b mit dieser Eigenschaft wird eine **obere Schranke** genannt. Eine Menge M heißt **beschränkt**, wenn M nach unten und nach oben beschränkt ist.

Sie sehen den Unterschied zwischen unteren Schranken einer Menge und dem Minimum einer Menge? Für ein Minimum a einer Menge M hatten wir verlangt, dass a ein Element von M war. Das ist bei einer unteren Schranke nicht nötig. Eine untere Schranke kann, muss aber nicht in M liegen. Analoges gilt für das Maximum einer Menge und obere Schranken.

11.2.43 Aufgabe: Sei $M = \{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\}$. Beweisen Sie, dass M beschränkt ist.

11.2.44 Beispiele: Es folgen Beispiele für Teilmengen von $\mathbb{R}$, die untere oder obere Schranken haben.

1. Jede Menge, die ein kleinstes Element besitzt, ist nach unten beschränkt, und ihr Minimum ist eine untere Schranke, sogar die größte untere Schranke. Entsprechendes gilt, wenn eine Menge ein Maximum besitzt. Mit Proposition 11.2.40 folgt, dass jede endliche Teilmenge von $\mathbb{R}$ beschränkt ist.

2. Die Menge $\{0, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots\} = \{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\} \cup \{0\}$ ist beschränkt. Sie besitzt ein größtes Element, nämlich 1 und ein kleinstes Element, nämlich 0.

3. In Aufgabe 11.2.41 haben Sie gezeigt, dass $M = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < 1\}$ kein Minimum und kein Maximum besitzt. Trotzdem ist M beschränkt, es ist 0 eine untere Schranke von M, und 1 ist eine obere Schranke.

4. Die Menge $M = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 1\}$ ist nach unten, jedoch nicht nach oben beschränkt. Eine untere Schranke ist 1. Wäre b eine obere Schranke, so müsste $b > 1$, also in M sein. Dann läge aber auch die noch größere Zahl $b + 1$ in M.

5. Ist a eine untere Schranke von M, so ist jede Zahl unterhalb von a ebenfalls eine untere Schranke. Zahlen oberhalb von a müssen aber keine unteren Schranken sein. Für $M = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 1\}$ ist etwa 0 eine untere Schranke. Alle Zahlen a mit $a \leq 1$ ebenfalls. Hingegen sind alle Zahlen größer als 1 keine untere Schranken. Analoges gilt für obere Schranken. Locker formuliert: Obere Schranken können problemlos vergrößert, aber nicht immer verkleinert werden; untere Schranken dürfen verkleinert, aber nicht immer vergrößert werden.

11.2.45 Vereinbarung: Auch die leere Menge wollen wir als beschränkt ansehen. Allerdings auf eine etwas exzentrische Weise. Jede reelle Zahl ist gleichzeitig eine obere und eine untere Schranke von $\emptyset$. Insbesondere besitzt $\emptyset$ weder eine größte untere Schranke noch eine kleinste obere Schranke.

11.2.46 Aufgabe: Beweisen Sie, dass der Durchschnitt einer nach oben beschränkten Menge M mit einer beliebigen Menge N nach oben beschränkt ist.

Infimum und Supremum

In unseren Beispielen 11.2.44 hatte jede nach oben beschränkte Menge M eine kleinste obere Schranke, und entsprechendes gilt auch für nach unten beschränkte Mengen. Präzisieren wir diese informell verwendeten Begriffe.

11.2.47 Definition: Eine reelle Zahl s heißt **größte untere Schranke** oder **Infimum** einer Menge M, falls gilt:

1. s ist untere Schranke von M, und
2. keine Zahl $> s$ ist eine untere Schranke von M, das heißt, zu jedem positiven ε gibt es ein $x \in M$ mit $x < s + \varepsilon$.

Eine reelle Zahl S heißt **kleinste obere Schranke** oder **Supremum** einer Menge M, falls gilt:

1. S ist eine obere Schranke von M, und
2. keine Zahl $< S$ ist obere Schranke von M, das heißt, zu jedem positiven ε gibt es ein $y \in M$ mit $y > S - \varepsilon$.

Der Plural von Supremum ist Suprema, und der von Infimum ist Infima.

Fassen wir erste Eigenschaften von Supremum und Infimum zusammen:

11.2.48 Bemerkung: Sei M eine nicht leere Teilmenge von $\mathbb{R}$.

1. Wenn M ein Supremum besitzt, dann ist dieses eindeutig bestimmt.
2. Wenn M ein Maximum $\max M$ besitzt, dann ist $\max M$ das Supremum von M.
3. Wenn M ein Infimum besitzt, dann ist dieses eindeutig bestimmt.
4. Wenn M ein Minimum $\min M$ besitzt, dann ist $\min M$ das Infimum von M.

Beweis:

1. Angenommen, eine nicht leere Teilmenge M von $\mathbb{R}$ hätte zwei verschiedene Suprema S und S'. Dann ist eines der Suprema größer als das andere, und wir können annehmen, dass $S < S'$ ist (anderenfalls lassen wir S und S' die Rollen tauschen). Es folgt $S' - S > 0$. Setze $\varepsilon = S' - S$. Da S' ein Supremum von M ist, gibt es ein $y \in M$ mit
$$y > S' - \varepsilon = S' - (S' - S) = S,$$
ein Widerspruch zu unserer Annahme, dass S ein Supremum von M ist. Dieser Widerspruch zeigt, dass M nicht zwei Suprema haben kann.
2. Sei $m = \max M$. Nach Definition gilt $x \leq m$ für alle $x \in M$, das heißt, m ist eine obere Schranke von M. Ist $\varepsilon > 0$, so gilt $m > m - \varepsilon$, das heißt, es gibt ein $y \in M$ (nämlich $y = m$) mit $y > m - \varepsilon$. Somit erfüllt m die Bedingungen

eines Supremums in Definition 11.2.47 und ist – mit 1. – das Supremum von M.

3. Analog zu 1.
4. Analog zu 2.

$\square$

11.2.49 Aufgabe: Beweisen Sie die nicht bewiesenen Aussagen von Bemerkung 11.2.48.

11.2.50 Notation: Mit $\sup M$ beziehungsweise $\inf M$ bezeichnen wir das Supremum beziehungsweise das Infimum einer nicht leeren Menge M.

11.2.51 Aufgabe: Sei M eine nicht leere Menge, die ein Supremum und ein Infimum besitzt. Sei

$$-M := \{-m \mid m \in M\}.$$

Beweisen Sie: $\sup(-M) = -\inf M$ und $\inf(-M) = -\sup M$.

Das Supremumsprinzip

Nicht jede Teilmenge von $\mathbb{R}$ hat ein Supremum oder Infimum. Die Existenz sichert in allen Fällen, wo wir sie überhaupt erwarten dürfen, das fundamentale Supremumsprinzip, das – wie wir feststellen werden – äquivalent zum Schnittaxiom ist.

11.2.52 Satz: (Supremumsprinzip)

Jede nicht leere, nach oben beschränkte Teilmenge M von $\mathbb{R}$ besitzt ein Supremum.

Beweis: Sei $M \neq \emptyset$ eine nach oben beschränkte Menge, und sei B die Menge der oberen Schranken von M. Dann ist $B \neq \emptyset$. Sei $A = \mathbb{R} \setminus B$. Da M mindestens ein Element z enthält, liegen alle $a < z$ in A, das heißt, A ist ebenfalls nicht die leere Menge. Nach Konstruktion gilt $A \cup B = \mathbb{R}$ und $a < b$ für alle $a \in A$ und alle $b \in B$. Die Mengen A, B definieren somit einen Dedekind'schen Schnitt $(A|B)$ (vergleichen Sie mit Definition 11.1.6). Besitzt M ein Maximum, so ist dieses ein Supremum, und es ist nichts mehr zu beweisen. Wir können also annehmen, dass M kein Maximum besitzt. Dann ist $M \cap B = \emptyset$, und es folgt $M \subseteq A$. Da aber für die Trennungszahl t des Schnittes, die nach (A 9) existiert, immer $a \leq t \leq b$ (wobei $a \in A$ und $b \in B$ gilt) erfüllt ist, folgt daraus, dass t eine obere Schranke von M ist. Somit gilt $t \in B$. Die Trennungszahl t ist das kleinste Element in B, denn sonst gäbe es ein $t' \in B$ mit $t' < t$. Dieses t' würde ebenfalls $a \leq t' \leq b$ für alle $a \in A$ und $b \in B$ erfüllen, wäre somit eine weitere Trennungszahl. Dies ist ein Widerspruch, denn Axiom (A 9) verlangt, dass eine Trennungzahl eindeutig ist. Es ist also $t = \inf B$ die kleinste obere Schranke von M, also das Supremum von M. □

Aus dem Supremumsprinzip folgt das Infimumsprinzip, für das Sie in Aufgabe 11.2.54 gleich zwei verschiedene Beweise geben sollen.

11.2.53 Korollar: (Infimumsprinzip)

Jede nicht leere, nach unten beschränkte Teilmenge M von $\mathbb{R}$ besitzt ein Infimum.

11.2.54 Aufgabe: Beweisen Sie das Infimumsprinzip auf zwei Weisen. Einmal, indem Sie den Beweis des Supremumsprinzipes variieren, und einmal, indem Sie Aufgabe 11.2.51 benutzen.

Wir haben in Satz 11.2.52 das Supremumsprinzip aus dem Schnittaxiom (A 9) hergeleitet. Umgekehrt können wir aus dem Supremumsprinzip das Schnittaxiom herleiten, wie die folgende Proposition zeigt:

11.2.55 Proposition: Wenn jede nicht leere, beschränkte Teilmenge M von $\mathbb{R}$ ein Supremum besitzt, dann besitzt jeder Dedekind'sche Schnitt genau eine Trennungszahl.

Beweis: Sei $(A|B)$ ein Dedekind'scher Schnitt. Nach Definition gilt $A \neq \emptyset$ und $B \neq \emptyset$. Da $a < b$ für alle $a \in A$ und alle $b \in B$, sind alle Elemente in B obere Schranken von A, und es folgt, dass A eine nicht leere, nach oben beschränkte Menge ist. Nach Annahme besitzt sie ein Supremum, das wir t nennen (es wird sich herausstellen, dass t die Trennungszahl ist). Für das Supremum t gilt $a \leq t$ für alle $a \in A$. Es bleibt zu zeigen, dass $t \leq b$ für alle $b \in B$ gilt. Angenommen, es gibt ein $x \in B$ mit $t > x$. Dann ist x eine obere Schranke von A ist, und x ist eine kleinere obere Schranke von A als t. Das ist ein Widerspruch, denn wir hatten angenommen, dass t die kleinste obere Schranke von A ist. Dieser Widerspruch zeigt, dass $t \leq b$ für alle $b \in B$ gilt. Somit ist t eine Trennungszahl des Schnittes. Diese ist eindeutig, da das Supremum von A eindeutig ist. □

In Kombination von Satz 11.2.52 und Proposition 11.2.55 erhalten wir:

11.2.56 Korollar: Das Supremumsprinzip und das Schnittaxiom (A 9) sind äquivalent. □

An Stelle des Schnittaxioms (A 9) hätten wir also auch das Supremumsprinzip als Axiom für die reellen Zahlen verwenden dürfen. Der Vorteil des Schnittaxioms ist, dass man es sich so gut vorstellen kann, denn es hat ja eine geometrische Interpretation. Der Vorteil des Supremumsprinzips ist, dass man mit ihm besser rechnen kann.

Leiten wir noch einige Folgerungen aus dem Supremumsprinzip her. Die erste, der Satz des Archimedes (Archimedes, griechischer Mathematiker und Physiker, 287–212 vor unserer Zeitrechnung), wird Sie sicherlich nicht überraschen. Er besagt, dass $\mathbb{N}$ nicht nach oben beschränkt ist. Je länger man über diese Aussage nachdenkt, desto verwirrender ist sie. Warum sollte es nicht eine riesig große reelle Zahl geben, die größer als alle natürlichen Zahlen ist? Dass dies nicht möglich ist, wurde übrigens nicht von Archimedes bewiesen, sondern war schon Eudoxos von Knidos gut 100 Jahre vor Archimedes bekannt.

11.2.57 Korollar: (Satz des Archimedes)

Die Menge der natürlichen Zahlen ist nicht nach oben beschränkt.

Beweis: Angenommen, $\mathbb{N}$ ist nach oben beschränkt. Mit dem Supremumsprinzip gibt es ein Supremum S von $\mathbb{N}$. Dann ist $S-1$ kein Supremum von $\mathbb{N}$, und es folgt, dass es eine natürliche Zahl n geben muss, für die $n > S - 1$ gilt. Wir addieren 1 auf beiden Seiten der Ungleichung und erhalten $n+1 > S$. Da $n+1 \in \mathbb{N}$, ist dies ein Widerspruch zur Annahme, dass S ein Supremum von $\mathbb{N}$ ist. □

Als Folgerung aus dem Satz des Archimedes erhalten wir:

11.2.58 Korollar: (Satz des Eudoxos)

Zu jedem positiven ε gibt es eine natürliche Zahl m mit $\frac{1}{m} < \varepsilon$.

Beweis: Sei $\varepsilon > 0$. Dann ist $\frac{1}{\varepsilon} > 0$, und da $\frac{1}{\varepsilon}$ nach dem Satz des Archimedes keine obere Schranke von $\mathbb{N}$ ist, gibt es eine natürliche Zahl m mit $\frac{1}{\varepsilon} < m$. Mit Proposition 11.2.15 folgt $\frac{1}{m} < \varepsilon$, die Behauptung. □

In unserer Terminologie mit ε-Umgebungen (vergleichen Sie 11.2.32) lautet der Satz des Eudoxos: In jeder ε-Umgebung von 0 gibt es ein $\frac{1}{m}$ mit $m \in \mathbb{N}$.

Das folgende Korollar klärt, wie die rationalen Zahlen in den reellen Zahlen verteilt sind.

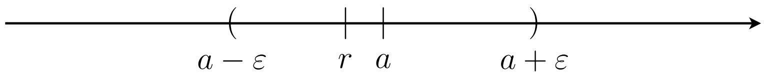
11.2.59 Korollar: ($\mathbb{Q}$ liegt dicht in $\mathbb{R}$)

Sei a eine reelle Zahl, und sei $\varepsilon > 0$ vorgegeben. Dann gibt es in der ε-Umgebung $U_\varepsilon(a)$ eine rationale Zahl r, also ein $r \in \mathbb{Q}$ mit $a - \varepsilon < r < a + \varepsilon$.

Beweis: Sei $\varepsilon > 0$ vorgegeben. Mit dem Satz 11.2.58 des Eudoxos gibt es eine natürliche Zahl m mit $\frac{1}{m} < \varepsilon$. Wir müssen jetzt nur noch zeigen, dass es eine rationale Zahl r mit $a - \frac{1}{m} \le r \le a + \frac{1}{m}$ gibt. Dazu nehmen wir zunächst an, dass $a \ge 0$ ist. Nach dem Satz 11.2.57 des Archimedes gibt es eine natürliche Zahl n mit $n > ma$. Da jede nicht leere Teilmenge der natürlichen Zahlen ein kleinstes Element besitzt, besitzt die Menge aller dieser n ein kleinstes Element k. Somit ist $k - 1 \le ma \le k$. Wir setzen jetzt $r = \frac{k}{m}$. Dann gilt $r - \frac{1}{m} \le a < r$. Aus der linken Ungleichung folgt $r \le a + \frac{1}{m}$. Wegen der rechten Ungleichung gilt $a - \frac{1}{m} < r$. Somit erfüllt r die Behauptung des Korollars.

Ist $a < 0$, so gilt $-a > 0$, und mit dem, was wir gerade bewiesen haben, gibt es ein rationales r mit $-a - \varepsilon < r < -a + \varepsilon$. Wir multiplizieren die Ungleichungskette mit -1 und erhalten $a + \varepsilon > -r > a - \varepsilon$. Somit leistet $-r$ das Gewünschte. □

Wenn wir eine beliebige ε-Umgebung von a betrachten, dann besagt Korollar 11.2.59, dass wir in dieser immer noch eine rationale Zahl r finden.



Wenn wir das ε verkleinern (aber positiv halten), dann muss so ein r immer dichter an a heranrutschen. Man hat dieses Korollar im Sinn, wenn man sagt, dass $\mathbb{Q}$ dicht in $\mathbb{R}$ liegt, oder dass sich jede reelle Zahl beliebig gut durch rationale Zahlen approximieren (annähern) lässt. „Beliebig gut" ist eine Kurzfassung von „bis auf einen Fehler, der kleiner ist als eine beliebige, von vornherein fest vorgeschriebene positive Fehlerschranke ε".

Jetzt muss ich gestehen, dass ich im Beweis von Korollar 11.2.59 etwas geschummelt habe. Ich habe folgendes Argument verwendet: Jede nicht leere Teilmenge der natürlichen Zahlen besitzt ein kleinstes Element. Eigentlich hätte ich das beweisen müssen. Und, ehrlich gesagt, der Beweis ist gar nicht einfach und kann mit Hilfe des Supremumsprinzips durchgeführt werden. Trotzdem (oder deswegen) wollen wir dieses Ergebnis einfach mal glauben.

11.2.4 p-te Wurzeln

Unsere bisherigen Betrachtungen sind derzeit noch etwas unbefriedigend. Wir haben schon lang und breit über irrationale Zahlen geredet, aber gesehen haben wir noch keine einzige. Das wird sich in diesem Abschnitt ändern. Allerdings brauchen wir noch etwas Munition.

Der binomische Lehrsatz

11.2.60 Definition: Seien n und k natürliche Zahlen, und sei $n \geq k$. Der **Binomialkoeffizient** $\binom{n}{k}$ (gesprochen „n über k") ist definiert durch

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{1 \cdot 2 \cdots k}.$$

Für $k = 0$ definieren wir $\binom{n}{0} = 1$.

11.2.61 Aufgabe: Berechnen Sie $\binom{5}{3}$.

Der Binomialkoeffizient hat vielfältige Anwendungen in der angewandten Mathematik, insbesondere in der Kombinatorik. Beispielsweise ist $\binom{n}{k}$ die Anzahl der Möglichkeiten, aus einer n-elementigen Menge eine Teilmenge mit k Elementen auszuwählen. Sie werden Binomialkoeffizienten detailliert im Folgekurs „Algorithmische Mathematik" untersuchen. Wir benötigen sie hier zur Formulierung des so genannten binomischen Lehrsatzes, den Sie für den Spezialfall $p = 2$ bereits aus der Schule kennen.

11.2.62 Satz: (Binomischer Lehrsatz)

Für alle $a, b \in \mathbb{R}$ und alle $p \in \mathbb{N}$ gilt

$$(a+b)^p = a^p + \binom{p}{1} a^{p-1} b + \binom{p}{2} a^{p-2} b^2 + \cdots + \binom{p}{p-1} a b^{p-1} + b^p = \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} a^{p-k} b^k.$$

Wir werden den binomischen Lehrsatz hier nicht beweisen. Einen Beweis werden Sie im Kurs „Algorithmische Mathematik" sehen.

11.2.63 Aufgabe: Multiplizieren Sie $(a+b)^2$, $(a+b)^3$ und $(a+b)^4$ aus. Berechnen Sie für diese Fälle die Binomialkoeffizienten aus dem Binomischen Lehrsatz 11.2.62 und überprüfen Sie so, dass der Binomische Lehrsatz für $p = 2, 3, 4$ richtig ist.

Existenz und Eindeutigkeit von p-ten Wurzeln

Hier werden wir zeigen, dass aus positiven Zahlen p-te Wurzeln gezogen werden können. Dabei müssen wir aber zunächst festlegen, was wir überhaupt unter einer p-ten Wurzel verstehen.

11.2.64 Definition: Sei $a \geq 0$, und sei $p \in \mathbb{N}$. Eine reelle Zahl r heißt **p-te Wurzel** aus a, falls gilt:

1. $r \geq 0$ und
2. $r^p = a$.

Ist $p = 2$, so wird eine zweite Wurzel aus a nur eine **Wurzel** aus a genannt.

11.2.65 Beispiele: Bevor wir uns dem nächsten Satz zuwenden, einige Beispiele.

1. Ist $a \geq 0$ und $p = 1$, so ist a selbst eine erste Wurzel aus a, denn $a^1 = a$. Der Fall $p = 1$ ist also völlig uninteressant.
2. Ist $a = 0$, so ist 0 eine p-te Wurzel für alle $p \in \mathbb{N}$. Der Fall $a = 0$ ist in etwa so interessant wie der Fall $p = 1$, also uninteressant.
3. Sei $a = 4$. Dann sind $(-2)^2 = 4$ und $2^2 = 4$. Nur 2 ist eine Wurzel aus 4, denn in der Definition hatten wir verlangt, dass p-te Wurzeln ≥ 0 sein müssen.
4. Ist $a < 0$, so ist eine p-te Wurzel aus a selbst dann nicht definiert, wenn die Gleichung $x^p = a$ eine Lösung hat. Also ist -2 keine dritte Wurzel aus -8.

   WICHTIG: Man darf p-te Wurzeln nur aus Zahlen ziehen, die ≥ 0 sind.

Nehmen wir an, $a \geq 0$ wäre eine reelle Zahl, aus der wir eine p-te Wurzel ziehen könnten. Wie viele p-te Wurzeln kann a dann haben? Genau eine, wie wir jetzt überlegen werden. Zum Beweis brauchen wir folgendes Lemma:

11.2.66 Lemma: Sind $x, y > 0$ und $p \in \mathbb{N}$, so gilt $x^p > 0$ und

$$x < y \Leftrightarrow x^p < y^p.$$

Beweis: Wir beweisen die Behauptung mit Induktion nach p. Im Induktionsanfang $p = 1$ ist $x > 0$ und $x < y \Leftrightarrow x < y$, eine wahre Aussage.

Sei $x^p > 0$ und $x < y \Leftrightarrow x^p < y^p$ für ein $p \geq 1$ bereits bewiesen. Da gleichgerichtete Ungleichungen miteinander multipliziert werden dürfen, sofern alle Glieder positiv sind (vergleiche Proposition 11.2.12), folgt aus $x^p > 0$ die Ungleichung $x^{p+1} > 0 \cdot x = 0$; daher folgt aus $0 < x^p < y^p$ und $0 < x < y$ die Ungleichung $x^{p+1} < y^{p+1}$. Mit dem Prinzip der vollständigen Induktion folgt die Behauptung $x < y \Rightarrow x^p < y^p$ für alle $p \in \mathbb{N}$. Es bleibt zu zeigen, dass $x^{p+1} < y^{p+1} \Rightarrow x < y$ gilt. Diese Behauptung zeigen wir durch Kontraposition: Nach Induktionsannahme gilt $x \geq y \Rightarrow x^p \geq y^p$. Es folgt $x^{p+1} \geq y^p x \geq y^p y = y^{p+1}$, also $x \geq y \Rightarrow x^{p+1} \geq y^{p+1}$, beziehungsweise $x^{p+1} < y^{p+1} \Rightarrow x < y$. □

Es folgt eine Begründung für das „genau eine“ von oben:

11.2.67 Bemerkung: (Eindeutigkeit p-ter Wurzeln)

Sei $p \in \mathbb{N}$, und sei $a \geq 0$ eine reelle Zahl, für die eine p-te Wurzel r existiert. Dann ist r die einzige p-te Wurzel aus a.

Beweis: Ist $a = 0$, oder ist $p = 1$, so ist die Behauptung richtig. Wir können also annehmen, dass $a > 0$ und $p > 1$ gelten.

Angenommen, r und r' sind verschiedene p-te Wurzeln aus a. Da $a \neq 0$, gilt $r, r' > 0$. Wir können annehmen, dass $r < r'$ gilt. Mit dem Lemma 11.2.66 folgt $r^p < r'^p$, ein Widerspruch dazu, dass $r^p = a = r'^p$ gelten muss. Dieser Widerspruch zeigt, dass es maximal eine p-te Wurzel aus a geben kann. □

Sie sehen, zu beweisen, dass es zu $a \geq 0$ nicht mehr als eine p-te Wurzel geben kann, war gar nicht schwer. Viel schwieriger wird das sein, was wir gleich machen werden: zu beweisen, dass es zu jeder reellen Zahl $a \geq 0$ überhaupt eine p-te Wurzel gibt. Damit Sie den Faden im Beweis nicht verlieren, gebe ich hier eine Beweisskizze, was grob gemacht wird:

Wir definieren eine Menge M wie folgt: $M = \{y \in \mathbb{R} \mid y \geq 0 \text{ und } y^p < a\}$. Von dieser Menge werden wir zeigen, dass sie nicht leer und beschränkt ist. Aus dem Supremumsprinzip (Satz 11.2.52) folgt, dass M ein Supremum r besitzt. Von diesem r werden wir zeigen, dass r eine p-te Wurzel aus a ist. Das können wir aber leider nicht einfach nachrechnen, also $r^p = a$ verifizieren, denn r ist ja nicht als konkrete Zahl gegeben, sondern nur durch die Eigenschaft, ein Supremum von M zu sein. Daher werden wir einen Trick anwenden. Wir werden annehmen, r^p wäre kleiner als a und diese Annahme zum Widerspruch führen. Dann werden wir annehmen, r^p wäre größer als a. Auch diese Annahme werden wir zum Widerspruch führen. Da aber einer der Fälle $r^p < a$ oder $r^p > a$ oder $r^p = a$ erfüllt sein muss, bleibt nur noch $r^p = a$ übrig, und damit ist gezeigt, dass r eine p-te Wurzel aus a ist. Um die Ungleichungen $r^p < a$ und $r^p > a$ zum Widerspruch zu führen, brauchen wir fast alles, was wir in dieser Kurseinheit bisher gemacht haben. Zu nennen sind: die Bernoulli’sche Ungleichung 11.2.17, der binomische Lehrsatz 11.2.62, der Satz des Archimedes 11.2.57 und der Satz des Eudoxos 11.2.58. Und natürlich das Supremumsprinzip 11.2.52. Wenn Sie unter Zeitdruck stehen, können Sie den Beweis beim ersten Durcharbeiten ruhig überspringen.

11.2.68 Satz: (Existenz p-ter Wurzeln)

Ist $a \geq 0$ und $p \in \mathbb{N}$, so gibt es eine p-te Wurzel aus a.

Beweis: Ist $a = 0$, oder ist $p = 1$, so ist die Behauptung richtig. Wir können also annehmen, dass $a > 0$ und $p > 1$ gelten.

Wir definieren eine Menge M wie folgt: $M = \{y \in \mathbb{R} \mid y \geq 0 \text{ und } y^p < a\}$. Diese Menge hat folgende Eigenschaften:

1. Es ist $M \neq \emptyset$.

   Beweis: Es ist $0 \in M$.

2. Die Menge M ist beschränkt.

   Beweis: Mit der Bernoulli'schen Ungleichung gilt

   $$(1+a)^p \geq 1 + pa > a > y^p,$$

   also $y^p < (1+a)^p$. Mit Lemma 11.2.66 folgt $y < 1 + a$. Somit ist $1 + a$ eine obere Schranke für M, das heißt, M ist beschränkt.

Aus dem Supremumsprinzip (Satz 11.2.52) folgt, dass M ein Supremum r besitzt. Dieses Supremum muss ≥ 0 sein, denn alle Elemente in M sind ≥ 0. Unser Ziel wird sein, zu zeigen, dass r eine p-teWurzel aus a ist, dass also $r^p = a$ gilt. Dies zeigen wir durch Widerspruch: wir zeigen, dass sowohl die Annahme $r^p < a$ als auch die Annahme $r^p > a$ zum Widerspruch führen. Wenn uns das gelingt, muss $r^p = a$ gelten, und wir haben mit r eine p-te Wurzel gefunden.

1. Fall: Angenommen, $r^p < a$.

Mit dem Binomischen Lehrsatz gilt für alle $n \in \mathbb{N}$ (es ist $\binom{p}{p} = 1$):

$$\begin{aligned}
(r + \tfrac{1}{n})^p &= r^p + \tfrac{1}{n}\binom{p}{1}r^{p-1} + \tfrac{1}{n^2}\binom{p}{2}r^{p-2} + \cdots + \tfrac{1}{n^p}\binom{p}{p} \\
&= r^p + \tfrac{1}{n}\left[\binom{p}{1}r^{p-1} + \tfrac{1}{n}\binom{p}{2}r^{p-2} + \cdots + \tfrac{1}{n^{p-1}}\binom{p}{p}\right] \\
&\leq r^p + \tfrac{1}{n}\left[\binom{p}{1}r^{p-1} + \binom{p}{2}r^{p-2} + \cdots + \binom{p}{p}\right] \\
&= r^p + \tfrac{\alpha}{n} \text{ mit } \alpha = \binom{p}{1}r^{p-1} + \binom{p}{2}r^{p-2} + \cdots + \binom{p}{p} > 0.
\end{aligned}$$

Da nach Annahme $r^p < a$, also $a - r^p > 0$, und da $\alpha > 0$, folgt $\frac{a-r^p}{\alpha} > 0$. Mit dem Satz des Eudoxos gibt es ein $m \in \mathbb{N}$ mit $\frac{1}{m} < \frac{a-r^p}{\alpha}$. Umformen ergibt $r^p + \frac{\alpha}{m} < a$. Wie wir mit der Ungleichung oben berechnet haben, gilt für dieses m die Abschätzung $(r + \frac{1}{m})^p \leq r^p + \frac{\alpha}{m}$, also $(r + \frac{1}{m})^p < a$. Damit liegt $r + \frac{1}{m}$ in M und $r < r + \frac{1}{m}$. Das ist ein Widerspruch, denn wir hatten angenommen, dass $r = \sup M$ ist.

2. Fall: Angenommen, $r^p > a$. Dann ist auch $r > 0$.

Wir müssen gleich den Ausdruck $(r - \frac{1}{n})^p$ abschätzen, zumindest für große natürliche Zahlen n. Dazu einige Vorüberlegungen:

Schritt 1: Wegen $r > 0$ gilt $r - \frac{1}{n} = r(1 - \frac{1}{nr})$, also $(r - \frac{1}{n})^p = r^p(1 - \frac{1}{nr})^p$.

Schritt 2: Den Ausdruck $(1 - \frac{1}{nr})^p$ werden wir mit Hilfe der Bernoulli'schen Ungleichung 11.2.17 abschätzen. Dazu müssen wir überlegen, wann die Ungleichung $-\frac{1}{nr} \geq -1$ gilt. Es gilt

$$\begin{aligned} -\tfrac{1}{nr} > -1 \quad &\Leftrightarrow \quad 1 - \tfrac{1}{nr} > 0 \\ &\Leftrightarrow \quad \tfrac{nr-1}{nr} > 0 \\ &\Leftrightarrow \quad nr - 1 > 0, \text{ da } r > 0 \\ &\Leftrightarrow \quad n > \tfrac{1}{r}, \text{ denn } r > 0. \end{aligned}$$

Ist also $n > \frac{1}{r}$, so gilt mit der Bernoulli'schen Ungleichung

$$(r - \frac{1}{n})^p = r^p(1 - \frac{1}{nr})^p > r^p(1 - \frac{p}{nr}) = r^p - \frac{r^p p}{nr}.$$

Von dem Ausdruck $r^p - \frac{r^p p}{nr}$ interessiert uns, wann er größer als a ist. Nach Voraussetzung ist $r^p > a$ und damit $r^p - a > 0$. Wegen $r^p - (r^p - a) = a$ ist somit ein $n \in \mathbb{N}$ zu finden, sodass gilt:

$$\frac{1}{n}\frac{r^p p}{r} = \frac{r^p p}{nr} < r^p - a.$$

Dies ist genau dann erfüllt, wenn $\frac{1}{n} < \frac{r(r^p - a)}{r^p p}$ gilt. Mit dem Satz des Eudoxos 11.2.58 gibt es ein solches n. Hierfür gilt $-\frac{r^p p}{nr} > -(r^p - a)$ und damit

$$r^p - \frac{r^p p}{nr} > r^p - (r^p - a) = a.$$

Mit dem Satz des Archimedes können wir ein $m \in \mathbb{N}$ so wählen, dass $m > \max\{\frac{1}{r}, \frac{pr^p}{r(r^p - a)}\}$ ist. Für ein solches m gilt $(r - \frac{1}{m})^p > a$. Da aber $r - \frac{1}{m}$ wegen $r - \frac{1}{m} < r$ kein Supremum von M ist, gibt es ein $y_0 \in M$ mit $y_0 > r - \frac{1}{m}$. Mit dem Lemma 11.2.66 gilt $y_0^p > (r - \frac{1}{m})^p > a$, ein Widerspruch dazu, dass y_0 in M liegt.

Da $r^p > a$ und $r^p < a$ zum Widerspruch führen, muss $r^p = a$ gelten, und es folgt, dass r eine p-te Wurzel aus a ist. □

Fassen wir Bemerkung 11.2.67 und Satz 11.2.68 zusammen, so erhalten wir:

11.2.69 Korollar: (Existenz und Eindeutigkeit von p-ten Wurzeln)

Zu jeder reellen Zahl $a \geq 0$ und jeder natürlichen Zahl p gibt es genau eine p-te Wurzel aus a.

11.2.70 Notation: Sei $a \geq 0$, und sie $p \in \mathbb{N}$. Die nach Korollar 11.2.69 eindeutig bestimmte p-te Wurzel aus a wird mit $\sqrt[p]{a}$ bezeichnet. Ist $p = 2$, so wird die Wurzel aus a mit $\sqrt{a}$ bezeichnet.

11.2.71 Aufgabe: Sei $a \geq 0$, und seien $p, s \in \mathbb{N}$.

Beweisen Sie: Es gilt $\sqrt[p]{a^s} = (\sqrt[p]{a})^s$.

Und jetzt sind wir endlich in der Lage, ohne zu Schummeln die erste irrationale Zahl anzuschauen.

11.2.72 Proposition: Die reelle Zahl $\sqrt{2}$ ist irrational.

Beweis: Angenommen, $\sqrt{2}$ ließe sich als gekürzter Bruch $\frac{a}{b}$ mit $a, b \in \mathbb{N}$ darstellen. Quadrieren ergibt $2 = \frac{a^2}{b^2}$ und somit $a^2 = 2b^2$. Da $2b^2$ eine gerade Zahl ist, muss auch a^2 und damit auch a gerade sein. Denn wäre a ungerade, ließe sich a als $2k+1$ schreiben; $(2k+1)^2$ ist aber $4k^2 + 4k + 1$ und somit immer ungerade. Daher ist $a = 2k$ und $a^2 = 4k^2 = 2b^2$, also $2k^2 = b^2$. Somit muss auch b gerade sein. Das ist ein Widerspruch dazu, dass $\frac{a}{b}$ gekürzt ist. Es gibt also keine ganzen Zahlen a und b mit $\frac{a}{b} = \sqrt{2}$. $\square$

11.2.73 Aufgabe: Beweisen Sie, dass $\sqrt{3}$ irrational ist.

Wir kommen zum Schluss dieses Abschnitts noch zu einer weiteren wichtigen Ungleichung. Vorweg aber noch eine Definition:

11.2.74 Definition: Sind a und b positive reelle Zahlen, so wird $\sqrt{ab}$ das **geometrische Mittel** von a und b genannt.

Die folgende Proposition vergleicht das arithmetische Mittel $\frac{a+b}{2}$ (vergleiche Definition 11.2.25 und Proposition 11.2.25) mit dem geometrischen Mittel.

11.2.75 Proposition: (Vergleich von arithmetischem und geometrischem Mittel)

Sind a und b positive reelle Zahlen, so gilt $\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$.

Beweis: Angenommen, es gibt positive reelle Zahlen a und b mit $\frac{a+b}{2} < \sqrt{ab}$.

Da gleichgerichtete Ungleichungen miteinander multipliziert werden dürfen, sofern alle Glieder positiv sind (vergleiche Proposition 11.2.12), folgt aus $\frac{a+b}{2} < \sqrt{ab}$ und $\frac{a+b}{2} < \sqrt{ab}$ die Ungleichung $\frac{(a+b)^2}{4} < ab$. Es folgt $a^2 + 2ab + b^2 < 4ab$, also

$a^2 - 2ab + b^2 = (a-b)^2 < 0$. Das ist aber ein Widerspruch, denn es gibt keine reelle Zahl, deren Quadrat < 0 ist (vergleiche Korollar 11.2.7). □

Potenz mit rationalem Exponenten

Wir haben in 11.1.3 an die Potenzregeln mit natürlichen Exponenten erinnert, die Sie von der Schule kennen. Wir werden hier Potenzen mit rationalen Exponenten einführen und zeigen, dass in dieser Situation die analogen Potenzregeln gelten.

11.2.76 Definition: Sei $a > 0$, und sei $r = \frac{s}{p}$ mit $s, p \in \mathbb{N}$. Wir definieren a^r und a^{-r} durch

$$a^r = \sqrt[p]{a^s} \text{ und } a^{-r} = \frac{1}{\sqrt[p]{a^s}}.$$

Für $a = 0$ setzen wir $0^r = 0$. Beachten Sie, dass $a^{-r} = \frac{1}{a^r}$ ist. Ferner definieren wir $a^0 = 1$ für alle $a > 0$.

Bei dieser Bezeichnung ist darauf zu achten, dass a^r eindeutig ist, das heißt, dass a^r seinen Wert nicht ändert, wenn der Bruch $r = \frac{s}{p}$ durch Erweitern oder Kürzen zu anderen natürlichen Zählern und Nennern übergeht. Das zu beweisen ist eine Aufgabe für Sie:

11.2.77 Aufgabe: Sei $a > 0$, und sei $r = \frac{s}{p} = \frac{ts}{tp}$ mit $p, s, t \in \mathbb{N}$. Dann gilt $a^{\frac{s}{p}} = a^{\frac{st}{pt}}$ und $a^{-\frac{s}{p}} = a^{-\frac{st}{pt}}$.

Mit dieser Bezeichnung gelten die folgenden Potenzregeln:

11.2.78 Proposition: (Potenzregeln für rationale Exponenten)

Seien $a, b > 0$, und sei $r = \frac{s}{p}$ und $r' = \frac{s'}{p'}$ mit $s, s', p, p' \in \mathbb{N}$. Dann gilt:

1. $a^r a^{r'} = a^{r+r'}$
2. $\dfrac{a^r}{a^{r'}} = a^{r-r'}$
3. $(a^r)^{r'} = a^{rr'}$
4. $a^r b^r = (ab)^r$
5. $\dfrac{a^r}{b^r} = \left(\dfrac{a}{b}\right)^r$

Beweis:

1. Wir gehen von $a^{r+r'}$ aus und erhalten:
$$\begin{aligned} a^{r+r'} &= a^{\frac{p's+ps'}{pp'}} = \sqrt[pp']{a^{p's+ps'}} \\ &= (\sqrt[pp']{a})^{p's+ps'} \text{ mit Aufgabe 11.2.71} \\ &= (\sqrt[pp']{a})^{p's}(\sqrt[pp']{a})^{ps'} \text{ mit Bemerkung 11.1.3} \\ &= (\sqrt[pp']{a^{p's}})(\sqrt[pp']{a^{ps'}}) = a^{\frac{p's}{pp'}}a^{\frac{ps'}{pp'}} \\ &= a^{\frac{s}{p}}a^{\frac{s'}{p'}} \text{ mit Aufgabe 11.2.77} \\ &= a^r a^{r'}. \end{aligned}$$

2. Falls $r = r'$, so ist $a^{r-r'} = a^0 = 1 = \frac{a^r}{a^{r'}}$, die Behauptung. Ist $r - r' > 0$, so gilt:
$$\begin{aligned} a^{r-r'} &= a^{\frac{p's-ps'}{pp'}} = \sqrt[pp']{a^{p's-ps'}} = (\sqrt[pp']{a})^{p's-ps'} \\ &= \frac{(\sqrt[pp']{a})^{p's}}{(\sqrt[pp']{a})^{ps'}} \text{ mit Bemerkung 11.1.3} \\ &= \frac{\sqrt[pp']{a^{p's}}}{\sqrt[pp']{a^{ps'}}} = \frac{a^{\frac{p's}{pp'}}}{a^{\frac{ps'}{pp'}}} = \frac{a^r}{a^{r'}}. \end{aligned}$$
Ist $r - r' < 0$, so ist $r' - r > 0$ und
$$a^{r-r'} = a^{-(r'-r)} = \frac{1}{a^{r'-r}} = \frac{1}{\frac{a^{r'}}{a^r}} = \frac{a^r}{a^{r'}}.$$

3. Es ist $a^{rr'} = \sqrt[pp']{a^{ss'}}$ die eindeutig bestimmte, positive reelle Zahl,deren pp'-te Potenz $a^{ss'}$ ist. Wir zeigen, dass auch $(a^r)^{r'} = \sqrt[p']{(\sqrt[p]{a^s})^{s'}}$ diese Eigenschaft hat.

   Es gilt
$$\begin{aligned} \left(\sqrt[p']{(\sqrt[p]{a^s})^{s'}}\right)^{p'p} &= \left(\left(\sqrt[p']{(\sqrt[p]{a^s})^{s'}}\right)^{p'}\right)^p = \left((\sqrt[p]{a^s})^{s'}\right)^p \\ &= \left((\sqrt[p]{a^s})^p\right)^{s'} = (a^s)^{s'} = a^{ss'}. \end{aligned}$$

4. Es ist $(ab)^r = \sqrt[p]{(ab)^s}$ die eindeutig bestimmte, positive reelle Zahl, deren p-te Potenz $(ab)^s = a^s b^s$ ist. Es gilt
$$\begin{aligned} (a^r b^r)^p &= (a^{\frac{s}{p}} b^{\frac{s}{p}})^p = (a^{\frac{s}{p}})^p (b^{\frac{s}{p}})^p \text{ mit Bemerkung 11.1.3} \\ &= a^{\frac{sp}{p}} b^{\frac{sp}{p}} \text{ mit 3.} \\ &= a^s b^s = (ab)^s. \end{aligned}$$

   Es folgt $a^r b^r = (ab)^r$.

5. Analog zu den Fällen oben reicht es, zu zeigen, dass $(\frac{a^r}{b^r})^p = (\frac{a}{b})^s$ ist. Auf geht's:
$$\left(\frac{a^r}{b^r}\right)^p = \frac{(a^r)^p}{(b^r)^p} = \frac{a^{rp}}{b^{rp}} = \frac{a^s}{b^s} = \left(\frac{a}{b}\right)^s.$$

$\square$

In den nächsten beiden Propositionen untersuchen wir, wie a^r (r rational) sich ändert, wenn wir die Basis a beziehungsweise den Exponenten r vergrößern.

11.2.79 Proposition: Seien $a, b > 0$, und sei $r \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$.

1. Falls $r > 0$, so gilt: $a < b \Leftrightarrow a^r < b^r$.
2. Falls $r < 0$, so gilt: $a < b \Leftrightarrow a^r > b^r$.

Beweis:

1. Sei $r = \frac{s}{p}$ mit $s, p \in \mathbb{N}$. Es gilt
$$\begin{aligned} a < b &\Leftrightarrow a^{\frac{p}{p}} < b^{\frac{p}{p}} \\ &\Leftrightarrow (a^{\frac{1}{p}})^p < (b^{\frac{1}{p}})^p \text{ mit 11.2.78, 3.} \\ &\Leftrightarrow a^{\frac{1}{p}} < b^{\frac{1}{p}} \text{ mit Lemma 11.2.66} \\ &\Leftrightarrow a^{\frac{s}{p}} < b^{\frac{s}{p}} \text{ mit Lemma 11.2.66} \\ &\Leftrightarrow a^r < b^r. \end{aligned}$$

2. Sei $r < 0$. Wenn $a < b$, so folgt mit (A 6) und 1. die Ungleichung $a^r \geq b^r$. Da $r \neq 0$, kann Gleichheit nicht auftreten, und es folgt $a^r > b^r$. Wenn umgekehrt $a^r > b^r$, so folgt $a \neq b$, und mit 1., dass a nicht größer als b sein kann. Somit gilt $a < b$.

$\square$

11.2.80 Proposition: Sei $a > 0$, und seien $r, r' \in \mathbb{Q}$ mit $r < r'$. Dann gilt
$$a^r < a^{r'} \Leftrightarrow a > 1 \text{ und } a^r > a^{r'} \Leftrightarrow a < 1.$$

Beweis: Da $r < r'$ folgt $r' - r > 0$. Weiter ist $1^{r'-r} = 1$.

Mit dem ersten Teil von Proposition 11.2.79 folgt:
$$a > 1 \Leftrightarrow a^{r'-r} > 1 \text{ und } a < 1 \Leftrightarrow a^{r'-r} < 1.$$

Also gilt

$$a > 1 \Leftrightarrow \frac{a^{r'}}{a^r} > 1 \Leftrightarrow a^{r'} > a^r \text{ und } a < 1 \Leftrightarrow \frac{a^{r'}}{a^r} < 1 \Leftrightarrow a^{r'} < a^r.$$

Im letzten Schritt haben wir benutzt, dass a^r positiv ist. $\square$

Lösungen der Aufgaben

Lösungen der Aufgabe in 11.2.1

Aufgabe 11.2.2

Es gilt

$$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{ab^{-1}}{cd^{-1}} = (ab^{-1})(cd^{-1})^{-1} = (ab^{-1})(c^{-1}d) = (ad)(bc)^{-1} = \frac{ad}{bc}.$$

Lösungen der Aufgaben in 11.2.2

Aufgabe 11.2.10

Sei $a < b$, und sei $c < 0$. Dann gilt $-c > 0$, und mit dem Monotoniegesetz folgt $a(-c) < b(-c)$, also $-ac < -bc$. Mit der letzten Aussage von Proposition 11.2.3 folgt $ac > bc$, die Behauptung von Proposition 11.2.9.

Aufgabe 11.2.13

Da $b > 0$, folgt $a < \frac{bc}{d}$, und da $d > 0$, folgt $ad < bc$, die Behauptung.

Aufgabe 11.2.18

Wir setzen $x = 1$ in der Bernoulli'schen Ungleichung und erhalten $2^n \geq 1 + n$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Aufgabe 11.2.28

Nach Voraussetzung ist $a \geq 0$. Angenommen, $a > 0$. Mit der Ungleichung des arithmetischen Mittels, Proposition 11.2.25, folgt $0 < \frac{a}{2} < a$. Für $\varepsilon = \frac{a}{2}$ gilt also

$\varepsilon > 0$ und $a > \varepsilon$. Das ist ein Widerspruch, und dieser Widerspruch zeigt, dass die Annahme $a > 0$ falsch ist. Es folgt $a = 0$, die Behauptung.

Aufgabe 11.2.34

Sei $x \in U_\varepsilon[x_0]$. Dann gilt $x_0 - \varepsilon \leq x \leq x_0 + \varepsilon$ nach Definition eines abgeschlossenen Intervalls mit Randpunkten $x_0 - \varepsilon$ und $x_0 + \varepsilon$. Aus dem Monotoniegesetz (A 8) der Addition folgt $-\varepsilon \leq x - x_0 \leq \varepsilon$. Ist $x - x_0 \geq 0$, so folgt $|x - x_0| = x - x_0 \leq \varepsilon$, also $x \in \{x \in \mathbb{R} \mid |x - x_0| \leq \varepsilon\}$. Ist $x - x_0 < 0$, so folgt aus der Ungleichung $-\varepsilon \leq x - x_0$ mit Merkregel 11.2.11 die Ungleichung $-(-\varepsilon) \geq -(x - x_0)$. Es sind aber $-(-\varepsilon) = \varepsilon$ und $-(x - x_0) = |x - x_0|$. Somit gilt auch in diesem Fall $|x - x_0| \leq \varepsilon$ und $x \in \{x \in \mathbb{R} \mid |x - x_0| \leq \varepsilon\}$. Also haben wir gezeigt, dass $U_\varepsilon[x_0] \subseteq \{x \in \mathbb{R} \mid |x - x_0| \leq \varepsilon\}$ gilt.

Sei umgekehrt $x \in \mathbb{R}$ mit $|x - x_0| \leq \varepsilon$. Ist $x - x_0 \geq 0$, so gilt $|x - x_0| = x - x_0 \leq \varepsilon$ und wir bekommen die Ungleichungskette $-\varepsilon \leq x - x_0 \leq -\varepsilon$. Mit dem Monotoniegesetz folgt $x_0 - \varepsilon \leq x \leq x_0 + \varepsilon$. Ist $x - x_0 < 0$, so gilt $-(x - x_0) = |x - x_0|$, also $-\varepsilon \leq -(x - x_0) \leq \varepsilon$. Wieder mit Merkregel 11.2.11 folgt $\varepsilon \geq x - x_0 \geq -\varepsilon$, und mit dem Monotoniegesetz erhalten wir $x_0 - \varepsilon \leq x \leq x_0 + \varepsilon$. Es folgt $\{x \in \mathbb{R} \mid |x - x_0| \leq \varepsilon\} \subseteq U_\varepsilon[x_0]$, also $U_\varepsilon[x_0] = \{x \in \mathbb{R} \mid |x - x_0| \leq \varepsilon\}$.

Lösungen der Aufgaben in 11.2.3

Aufgabe 11.2.37

Es ist $1 = \frac{1}{1}$ in M, und $\frac{1}{n} \leq 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Somit ist 1 ein Maximum von M.

Angenommen, es gibt ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass $\frac{1}{n_0}$ ein Minimum von M ist. Dann gilt $\frac{1}{n_0+1} < \frac{1}{n_0}$, ein Widerspruch. Dieser Widerspruch zeigt, dass M kein Minimum besitzt.

Aufgabe 11.2.38

Angenommen es gibt verschiedene $a, a' \in M$, die beide Minima von M sind. Dann ist eines kleiner als das andere, also etwa $a < a'$. Das ist ein Widerspruch dazu, dass a' ein Minimum von M ist.

Analog argumentieren wir für Maxima. Angenommen, es gibt verschiedene $b, b' \in M$, die beide Maxima von M sind. Eines ist kleiner als das andere, also etwa $b < b'$. Das ist ein Widerspruch dazu, dass b ein Maximum von M ist.

Aufgabe 11.2.41

Angenommen, $\min M$ existiert. Dann gilt $0 < \min M$, und es folgt $0 < \frac{\min M}{2} < \mathrm{M}$ (beispielsweise mit der Abschätzung des arithmetischen Mittels 11.2.25). Das ist ein Widerspruch, denn $\frac{\min M}{2} \in M$. Analog zeigt man, dass M kein Maximum besitzt.

Aufgabe 11.2.43

Da $0 < \frac{1}{n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$, folgt, dass 0 eine untere Schranke von M ist. Da $1 \geq \frac{1}{n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$, folgt, dass 1 eine obere Schranke von M ist.

Aufgabe 11.2.46

Wenn $M \cap N = \emptyset$, so ist $M \cap N$ mit Vereinbarung 11.2.45 beschränkt. Anderenfalls ist $M \cap N$ eine nicht leere Teilmenge der beschränkten Menge M. Jede obere/untere Schranke von M ist auch eine von $M \cap N$. Es folgt, dass $M \cap N$ beschränkt ist.

Aufgabe 11.2.49

3. Angenommen, eine nicht leere Teilmenge M von $\mathbb{R}$ hätte zwei verschiedene Infima s und s'. Dann ist eines größer als das andere, etwa $s < s'$. Es folgt $s' - s > 0$. Setze $\varepsilon = s' - s$. Da s ein Infimum von M ist, gibt es ein $x \in M$ mit $x < s + \varepsilon$. Dann gilt:

$$x < s + \varepsilon = s + (s' - s) = s',$$

ein Widerspruch dazu, dass s' ein Infimum von M ist.

4. Sei $m = \min M$. Nach Definition gilt $m \leq x$ für alle $x \in M$, das heißt, m ist eine untere Schranke von M. Ist $\varepsilon > 0$, so gilt $m < m + \varepsilon$, das heißt, es gibt ein $x \in M$ (nämlich $x = m$) mit $x < m + \varepsilon$. Somit erfüllt m die Bedingungen eines Infimums in Definition 11.2.47 und ist mit 3. in 11.2.48 das Infimum von M.

Aufgabe 11.2.51

Sei $s = \inf M$. Es gilt $x \geq s$ für alle $x \in M$. Es folgt $-x \leq -s$ für alle $x \in M$. Somit ist $-s$ eine obere Schranke von $-M$. Sei $\varepsilon > 0$. Dann gibt es $x \in M$ mit $x < s + \varepsilon$. Somit gibt es $x \in M$ mit $-s - \varepsilon < -x$. Es folgt, dass $-s$ die zweite Bedingung für ein Supremum von $-M$ in Definition 11.2.47 erfüllt. Also gilt $\sup(-M) = -\inf M$.

Sei $S = \sup M$. Es gilt $x \leq S$ für alle $x \in M$. Es folgt $-S \leq -x$ für alle $x \in M$, und $-S$ ist eine untere Schranke von $-M$. Sei $\varepsilon > 0$. Dann gibt es ein $y \in M$ mit $y > S - \varepsilon$. Damit gibt es ein $y \in M$ mit $-y < -S + \varepsilon$. Es folgt, dass $-S$ die zweite Bedingung für ein Infimum von $-M$ in Definition 11.2.47 erfüllt. Also gilt $\inf(-M) = -\sup M$.

Aufgabe 11.2.54

Beweis 1: Sei $M \neq \emptyset$ eine nach unten beschränkte Menge. Sei A die Menge der unteren Schranken von M. Dann ist $A \neq \emptyset$. Sei $B = \mathbb{R} \setminus A$. Da M mindestens ein Element z enthält, liegen alle $b > z$ in B, das heißt, auch B ist nicht die leere Menge. Nach Konstruktion gilt $A \cup B = \mathbb{R}$ und $a < b$ für alle $a \in A$ und alle $b \in B$. Die Mengen A und B bilden also einen Dedekind'schen Schnitt $(A|B)$. Besitzt M ein Minimum, so ist dieses ein Infimum, und wir sind fertig. Wir können also annehmen, dass M kein Minimum besitzt. Dann ist $A \cap M = \emptyset$, und es folgt $M \subseteq B$. Sei t die eindeutig bestimmte Trennungszahl von $(A|B)$. Diese erfüllt $a \leq t \leq b$ für alle $a \in A$ und alle $b \in B$. Somit ist t eine untere Schranke von M. Es folgt $t \in A$. Es ist t das größte Element in A, denn anderenfalls gäbe es ein $t' \in A$ mit $t < t'$. Dieses t' würde ebenfalls $a \leq t' \leq b$ für alle $a \in A$ und alle $b \in B$ erfüllen, wäre also eine zweite Trennungszahl, was mit (A 9) ausgeschlossen ist. Es ist also $t = \sup A$ die größte untere Schranke von M, also ein Infimum von M.

Beweis 2: Sei $M \neq \emptyset$ eine nach unten beschränkte Menge. Dann ist $-M \neq \emptyset$ eine nach oben beschränkte Menge. Mit dem Supremumsprinzip besitzt $-M$ ein Supremum $\sup(-M)$. Mit Aufgabe 11.2.51 besitzt $-(-M) = M$ ein Infimum, und es gilt $\inf M = -\sup(-M)$.

Aufgabe 11.2.61 Es ist $\displaystyle\binom{5}{3} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 10.$

Aufgabe 11.2.63

Es ist $(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$. Weiter gilt $\binom{2}{1} = \frac{2}{1} = 2$, also $(a+b)^2 = a^2+\binom{2}{1}ab+b^2$.

Es ist $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$. Die zugehörigen Binomialkoeffizienten sind $\binom{3}{1} = \frac{3}{1} = 3$ und $\binom{3}{2} = \frac{3 \cdot 2}{1 \cdot 2} = 3$. Es folgt $(a+b)^3 = a^3 + \binom{3}{1}a^2b + \binom{3}{2}ab^2 + b^3$.

Es ist $(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$. Die Binomialkoeffizienten sind $\binom{4}{1} = \frac{4}{1} = 4$, $\binom{4}{2} = \frac{4 \cdot 3}{1 \cdot 2} = 6$ und $\binom{4}{3} = \frac{4 \cdot 3 \cdot 2}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 4$. Es folgt $(a+b)^4 = a^4 + \binom{4}{1}a^3b + \binom{4}{2}a^2b^2 + \binom{4}{3}ab^3 + b^4$.

Aufgabe 11.2.71

Die reelle Zahl $\sqrt[p]{a^s}$ ist die eindeutig bestimmte positive reelle Zahl, deren p-te Potenz a^s ist. Wir zeigen, dass $(\sqrt[p]{a})^s$ diese Eigenschaft hat. Es gilt

$$((\sqrt[p]{a})^s)^p = (\sqrt[p]{a})^{sp} = (\sqrt[p]{a})^{ps} = ((\sqrt[p]{a})^p)^s = a^s.$$

Es folgt $\sqrt[p]{a^s} = (\sqrt[p]{a})^s$, die Behauptung.

Aufgabe 11.2.73 Angenommen, $\sqrt{3} = \frac{a}{b}$, wobei $\frac{a}{b}$ ein gekürzter Bruch ist. Quadrieren liefert $3 = \frac{a^2}{b^2}$, also $a^2 = 3b^2$. Da $3b^2$ durch 3 teilbar ist, ist auch a^2 durch

3 teilbar.

Behauptung: a ist durch 3 teilbar.

Beweis: Angenommen, a ist nicht durch 3 teilbar. Dann gilt $a = 3k + 1$ oder $a = 3k+2$ für ein $k \in \mathbb{N}$. Im ersten Fall gilt $a^2 = 9k^2+6k+1 = 3(3k^2+2k)+1$, und a^2 ist nicht durch 3 teilbar. Im zweiten Fall gilt $a^2 = 9k^2+12k+4 = 3(3k^2+4k+1)+1$, und a^2 ist ebenfalls nicht durch 3 teilbar. Dieser Widerspruch zeigt, dass a durch 3 teilbar sein muss.

Es gilt also $a = 3k$ für ein $k \in \mathbb{N}$. Es folgt $a^2 = 9k^2 = 3b^2$, und Kürzen liefert $b^2 = 3k^2$, das heißt, b^2 ist durch 3 teilbar. Wie oben folgt, dass b durch 3 teilbar ist, ein Widerspruch zu unserer Annahme, dass $\frac{a}{b}$ gekürzt war. Dieser Widerspruch zeigt, dass $\sqrt{3}$ irrational ist.

Aufgabe 11.2.77

$\sqrt[tp]{a^{st}}$ ist die eindeutig bestimmte, positive reelle Zahl, deren tp-te Potenz a^{st} ist. Wir zeigen, dass $\sqrt[p]{a^s}$ diese Eigenschaft hat. Sie ist positiv, und es gilt

$$(\sqrt[p]{a^s})^{pt} = ((\sqrt[p]{a^s})^p)^t = (a^s)^t = a^{st}.$$

Bei dieser Rechnung haben wir die Potenzregeln für natürliche Exponenten, Bemerkung 11.1.3, verwendet. Es folgt $a^{\frac{s}{p}} = a^{\frac{st}{pt}}$, die Behauptung.

Für den zweiten Teil der Aufgabe verwenden wir den ersten: Es gilt

$$a^{-\frac{st}{pt}} = \frac{1}{\sqrt[pt]{a^{st}}} = \frac{1}{\sqrt[p]{a^s}} = a^{-\frac{s}{p}}.$$

Kapitel 12

Grenzwerte von Folgen

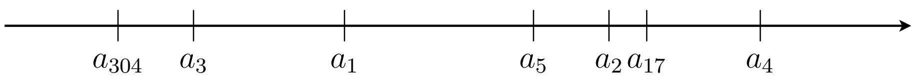
Die Analysis lässt sich als die Theorie der Grenzprozesse auffassen. Die wichtigste Art des Grenzprozesses, auf die alle in diesem Kurs betrachteten zurückgeführt werden, ist die Konvergenz von Folgen, der sich dieses Kapitel widmet.

12.1 Der Grenzwertbegriff

12.1.1 Definition: Eine **reelle Folge**, im Folgenden kurz **Folge** genannt, ist eine Abbildung $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$.

Wir haben eine Folge $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ vollständig im Griff, wenn wir ihre Bilder $f(1) = a_1,\ f(2) = a_2,\ f(3) = a_3, \ldots$ kennen. Wir schreiben also statt $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ mit $f(n) = a_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ kurz $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, oder, noch kürzer (a_n).

Elemente einer Folge nennen wir auch **Folgenglieder**. Wir stellen uns die Glieder einer Folge wieder auf der Zahlengeraden vor:



Dieses Bild ist etwas irreführend, denn wir können nur endlich viele Folgenglieder in ihm unterbringen.

Wichtig: Eine Folge hat immer unendlich viele Elemente. Diese Elemente müssen nicht verschieden sein. Folgenglieder a_n und a_m werden als verschieden angesehen, auch wenn $f(n) = f(m)$ für $n \neq m$ sind.

Um künftig den Sprachgebrauch zu vereinfachen, führen wir folgende Definition ein:

12.1.2 Definition: Sei (a_n) eine Folge.

1. Für jeden Index $n_0 \in \mathbb{N}$ heißt $(a_{n_0+1}, a_{n_0+2}, \dots)$ ein **Endstück** der Folge (a_n). Ein Endstück $(a_{n_0+1}, a_{n_0+2}, \dots)$ der Folge (a_n) bezeichnen wir mit $(a_n)_{n>n_0}$.
2. Wir sagen, dass **fast alle** Glieder der Folge (a_n) eine Eigenschaft $\mathcal{A}$ haben, wenn alle a_n – bis auf endlich viele Ausnahmen – die Eigenschaft $\mathcal{A}$ haben.

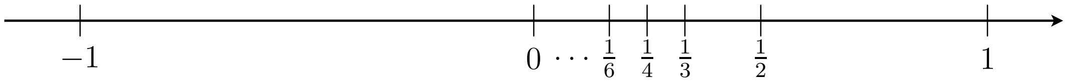
Der Gebrauch des „fast alle“ ist vielleicht etwas gewöhnungsbedürftig. Wenn wir eine Folge (a_n) haben, deren erste 12 Millionen Folgenglieder 1 sind, und danach sind alle Folgenglieder 0, so sagen wir trotzdem, dass fast alle Folgenglieder 0 sind. Wenn in einer Folge (b_n) erst 12 Millionen Einsen kommen, dann eine 0, dann wieder 12 Millionen Einsen, gefolgt von einer 0 und so weiter, dann können wir nicht sagen, dass fast alle Folgenglieder 1 sind, denn es kommen ja noch immer unendlich viele Nullen in (b_n) vor. Dass fast alle Glieder einer Folge (a_n) eine Eigenschaft $\mathcal{A}$ haben, bedeutet, dass es einen Index n_0 so gibt, dass alle Glieder des Endstücks $(a_n)_{n>n_0}$ die Eigenschaft $\mathcal{A}$ haben.

12.1.3 Aufgabe: Sei $(a_n) = (\frac{1}{n})$. Sei $\varepsilon = 0{,}001$. Beweisen Sie, dass fast alle $\frac{1}{n}$ in $U_\varepsilon(0)$ liegen. (Zur Definition des Umgebungsbegriffes vergleichen Sie Definition 11.2.32 und Korollar 11.2.35.)

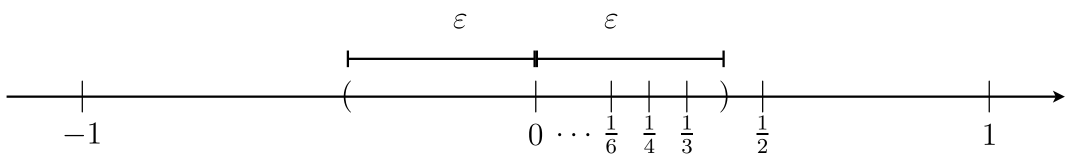
In Aufgabe 12.1.3 haben Sie gezeigt, dass bei der Folge $(\frac{1}{n})$ fast alle $\frac{1}{n}$ in $U_\varepsilon(0)$ liegen, wobei $\varepsilon = 0{,}001$ fest vorgegeben war. Vermutlich hatten Sie schon den Eindruck, dass bei dieser Aufgabe gar nicht so entscheidend war, wie ε speziell gewählt war. Das ε hätte man vermutlich durch andere positive Zahlen ersetzen können. Dieser Eindruck ist richtig, und das werde ich im folgenden Beispiel vorführen.

12.1.4 Beispiel: Behauptung: Sei $(a_n) = (\frac{1}{n})$. Sei $\varepsilon > 0$ eine beliebige, fest vorgegebene, positive reelle Zahl. Dann liegen fast alle $\frac{1}{n}$ in $U_\varepsilon(0)$.

Beweis: Mit dem Satz 11.2.58 des Eudoxos gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $\frac{1}{n_0} < \varepsilon$. Für alle $n > n_0$ gilt $\frac{1}{n} < \frac{1}{n_0}$, also $\frac{1}{n} = \left|\frac{1}{n}\right| < \varepsilon$. Es folgt $\frac{1}{n} \in U_\varepsilon(0)$ für alle $n \geq n_0$ mit Korollar 11.2.35. Da alle Folgenglieder des Endstücks $(\frac{1}{n})_{n>n_0}$ in $U_\varepsilon(0)$ liegen, folgt, dass fast alle $\frac{1}{n}$ in $U_\varepsilon(0)$ liegen. Veranschaulichen wir uns grafisch, was passiert:



Die Folgenglieder nähern sich von rechts dem Nullpunkt. Legen wir eine ε-Umgebung um 0, so gibt es nur endlich viele Folgenglieder, die nicht in dieser Umgebung liegen. Fast alle (also alle bis auf endlich viele) sind in der ε-Umgebung enthalten.



Verkleinern wir die ε-Umgebung, so werden nur endlich viele Folgenglieder aus der neuen ε-Umgebung herausfallen; fast alle werden auch in der kleineren ε-Umgebung liegen.

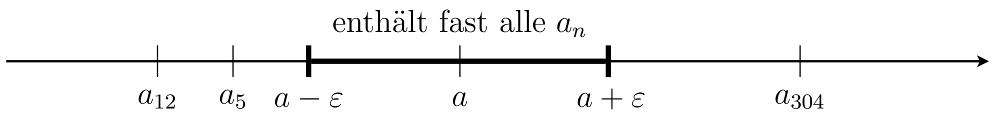
Noch eine Aufgabe für Sie:

12.1.5 Aufgabe: Sei $(a_n) = (2+\frac{(-1)^n}{n})$. Sei $\varepsilon > 0$ eine beliebige, fest vorgegebene, positive reelle Zahl. Beweisen Sie, dass fast alle a_n in $U_\varepsilon(2)$ liegen.

Nachdem wir uns mit den Aufgaben und dem Beispiel etwas warm gemacht haben, ist nun die Zeit für die wohl wichtigste Definition der Analysis gekommen – die der Konvergenz einer Folge gegen einen Grenzwert.

12.1.6 Definition: Eine Folge (a_n) **konvergiert** gegen a, wenn in jeder ε-Umgebung von a fast alle Glieder von (a_n) liegen.

Auf der Zahlengerade visualisiert: **Jede** ε-Umgebung von a enthält fast alle a_n:



12.1.7 Beispiel: In Beispiel 12.1.4 haben wir, und in Aufgabe 12.1.5 haben Sie gezeigt, dass die betrachteten Folgen konvergieren. Die Folge $(\frac{1}{n})$ konvergiert gegen 0, und die Folge $(2 + \frac{(-1)^n}{n})$ konvergiert gegen 2.

Da die Definition der Konvergenz einer Folge so wichtig ist, sollten wir uns die Zeit nehmen, Definition 12.1.6 noch einmal in Ruhe durchzugehen. Sei also (a_n) eine Folge, die gegen a konvergiert.

1. Für alle $\varepsilon > 0$ müssen fast alle a_n in $U_\varepsilon(a)$ liegen. Es reicht also nicht aus, für ein festes $\varepsilon > 0$ zu beweisen, dass fast alle a_n in $U_\varepsilon(a)$ liegen – wie wir es in Aufgabe 12.1.3 für $(a_n) = (\frac{1}{n})$ mit $\varepsilon = 0,001$ gemacht haben. Wir müssen vorgehen wie in Beispiel 12.1.4: Wir müssen uns ein ε abstrakt vorgeben, von

dem wir nichts weiter annehmen dürfen, als dass es > 0 ist. Dann müssen wir zeigen, dass fast alle a_n in $U_\varepsilon(a)$ liegen.

2. Dass fast alle a_n in $U_\varepsilon(a)$ liegen, bedeutet, dass es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ geben muss, sodass das Endstück $(a_n)_{n>n_0}$ ganz in $U_\varepsilon(a)$ liegt. Für verschiedene ε werden dann auch die n_0 verschieden sein, das n_0 ist also abhängig von ε. Betrachten wir etwa unser Beispiel $(a_n) = (\frac{1}{n})$. Ist $\varepsilon = \frac{1}{2}$, so liegt $(\frac{1}{n})_{n>2}$ vollständig in $U_\varepsilon(0)$, in diesem Fall wäre also schon $n_0 = 2$ ausreichend. Ist $\varepsilon = \frac{1}{1000}$, so liegt erst das Endstück $(\frac{1}{n})_{n>1000}$ ganz in $U_\varepsilon(0)$. Hier wäre also $n_0 = 1000$ ausreichend. Übrigens will man gar nicht wissen, wie genau so ein n_0 beschaffen ist. Es reicht bei vorgegebenem $\varepsilon > 0$ eine Begründung, dass ein n_0 existiert, sodass $(a_n)_{n>n_0}$ ganz in $U_\varepsilon(a)$ ist.

3. Kommen wir noch einmal zu dem Begriff der ε-Umgebung eines Punktes a. In Proposition 11.2.33 haben wir gezeigt:

$$U_\varepsilon(a) = \{x \in \mathbb{R} \mid |x - a| < \varepsilon\}.$$

Wenn also zu gegebenem $\varepsilon > 0$ das Endstück $(a_n)_{n>n_0}$ ganz in $U_\varepsilon(a)$ liegt, so ist dies gleichbedeutend damit, dass $|a_n - a| < \varepsilon$ ist, für alle $n > n_0$.

Nachdem wir die Definition einer Folge (a_n), die gegen a konvergiert, auseinander genommen haben, können wir den Konvergenzbegriff noch einmal ausführlicher definieren:

12.1.8 Definition: Eine reelle Folge (a_n) **konvergiert** gegen $a \in \mathbb{R}$, wenn es zu jeder positiven Zahl ε einen Index n_0 so gibt, dass für alle Indizes $n > n_0$ stets $|a_n - a| < \varepsilon$ ist.

Die Definitionen 12.1.6 und 12.1.8 sind gleichwertig, besagen also dasselbe. In den meisten Lehrbüchern zur Analysis wird der Konvergenzbegriff mit Definition 12.1.8 eingeführt. Die Definition 12.1.6 hat den Vorteil, dass sie so schön anschaulich ist. Definition 12.1.8 hat ihrerseits den Vorteil, dass man mit ihr weit besser rechnen kann, wenn man beispielsweise überprüfen möchte, ob eine gegebene Folge (a_n) gegen a konvergiert. Definition 12.1.8 gibt nahezu einen Algorithmus, was zu tun ist: Wähle $\varepsilon > 0$ beliebig. Zeige, dass es ein n_0 so gibt, dass $|a_n - a| < \varepsilon$ für alle $n > n_0$ gilt. Beide Definitionen sollten Sie auswendig lernen.

12.1.9 Definition: Sei (a_n) eine Folge, die gegen a konvergiert. Die Zahl a wird **Grenzwert** oder **Limes** von (a_n) genannt.

12.1.10 Notation: Konvergiert (a_n) gegen a, so sagen wir auch, dass (a_n) **konvergent** gegen a ist, oder, dass (a_n) gegen a **strebt**.

12.1.11 Beispiele: (Konvergente Folgen)

1. Die konstante Folge $(a, a, a, \dots)$ konvergiert gegen a. Für jedes $\varepsilon > 0$ und jedes $n \in \mathbb{N}$ ist nämlich, wenn $a_n = a$ gesetzt wird, $|a_n - a| = 0 < \varepsilon$.

2. Sei $p \in \mathbb{N}$. Die Folge $(\frac{1}{\sqrt[p]{n}})$ konvergiert gegen 0.

   Zum Beweis sei $\varepsilon > 0$ vorgegeben. Da die Folge $(\frac{1}{n})$ gegen 0 konvergiert, gibt es zu der positiven Zahl ε^p ein n_0, sodass für alle $n > n_0$ stets $\frac{1}{n} < \varepsilon^p$ ist. Für diese n ist dann (vergleichen Sie Proposition 11.2.79)

$$\left| \frac{1}{\sqrt[p]{n}} - 0 \right| = \frac{1}{\sqrt[p]{n}} < \varepsilon.$$

3. Die Folge $(\sqrt[n]{n})$ konvergiert gegen 1. Der Beweis dieser Tatsache ist allerdings schon ziemlich trickreich:

   Da $1 \leq n$, folgt mit Proposition 11.2.79, dass $1 \leq \sqrt[n]{n}$ gilt. Wir definieren $a_n = \sqrt[n]{n} - 1$, und dann gilt $|a_n| = a_n$.

   Sei nun $\varepsilon > 0$ vorgegeben. Wir müssen zeigen, dass es ein $n_0 \in \mathbb{N}$ so gibt, dass $|\sqrt[n]{n} - 1| = |a_n| = a_n < \varepsilon$ für alle $n > n_0$ ist. Aus dem binomischen Lehrsatz 11.2.62 folgt

$$n = (1 + a_n)^n = 1 + \binom{n}{1} a_n + \binom{n}{2} a_n^2 + \dots + \binom{n}{n} a_n^n \geq 1 + \binom{n}{2} a_n^2.$$

   Für $n \geq 2$ erhalten wir daraus (vergleichen Sie mit der Definition des Binomialkoeffizienten 11.2.60)

$$a_n^2 \leq \frac{n-1}{\binom{n}{2}} = \frac{2}{n}, \text{ und somit } a_n \leq \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{n}}.$$

   Wie wir im vorherigen Beispiel gesehen haben, gibt es zu jeder positiven Zahl $\frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}$ ein $n_0 \geq 2$, sodass $\frac{1}{\sqrt{n}} < \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}$ für alle $n > n_0$ ist. Für diese n gilt dann

$$a_n \leq \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{n}} < \sqrt{2} \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}} = \varepsilon.$$

   Da $a_n = |a_n| = |\sqrt[n]{n} - 1| < \varepsilon$ für alle $n > n_0$, folgt, dass $(\sqrt[n]{n})$ gegen 1 konvergiert.

4. Für feste q mit $|q| < 1$ konvergiert die Folge (q^n) gegen 0.

Im Fall $q = 0$ ist die Behauptung mit dem ersten Beispiel richtig. Wir nehmen also an, dass $0 < |q| < 1$ gilt. Dann ist $\frac{1}{|q|} = 1 + h$ mit einem $h > 0$, also $|q| = \frac{1}{1+h}$. Mit der Bernoulli'schen Ungleichung 11.2.17 gilt

$$|q^n - 0| = |q^n| = |q|^n = \frac{1}{(1+h)^n} \leq \frac{1}{1+nh} < \frac{1}{nh}.$$

Geben wir uns nun ein $\varepsilon > 0$ beliebig vor, so gibt es mit dem Satz 11.2.57 des Archimedes ein $n_0 > \frac{1}{h\varepsilon}$. Dann gilt $n_0 h > \frac{1}{\varepsilon}$, und damit $\frac{1}{n_0 h} < \varepsilon$. Wir erhalten dann für alle $n > n_0$ die Abschätzung

$$|q^n - 0| < \frac{1}{nh} < \frac{1}{n_0 h} < \varepsilon.$$

Somit konvergiert (q^n) für alle $|q| < 1$ gegen 0.

12.1.12 Aufgabe: Sei $p \in \mathbb{N}$. Beweisen Sie, dass $(\frac{1}{n^p})$ gegen 0 konvergiert.

12.1.13 Notation: Dass eine Folge (a_n) gegen a konvergiert, drückt man wie folgt aus:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \text{ oder kürzer } \lim a_n = a.$$

Ausgesprochen werden diese Symbole als „Für n gegen unendlich konvergiert a_n gegen a“ oder „Der Grenzwert/Limes von a_n für n gegen unendlich ist a“.

12.1.14 Aufgabe: Beweisen Sie:

Genau dann gilt $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, wenn $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n - a) = 0$.

12.2 Eigenschaften konvergenter Folgen

Wenn (a_n) eine Folge ist, die gegen a konvergiert, so sagen wir auch einfach nur, dass (a_n) konvergent ist. Dabei verschweigen wir also, was der Grenzwert von (a_n) ist.

Die folgenden Propositionen fassen erste Eigenschaften konvergenter Folgen zusammen.

12.2.1 Proposition: Eine konvergente Folge besitzt genau einen Grenzwert.

Beweis: Angenommen, a und b sind verschiedene Grenzwerte von (a_n). Wir können annehmen, dass $a < b$ gilt, anderenfalls benennen wir a und b entsprechend um. Wir betrachten das Intervall (a, b). Dieses hat den Radius $\frac{b-a}{2}$ (vergleichen Sie Definition 11.2.30). Dann ist $\frac{b-a}{2} > 0$, und wir setzen $\varepsilon = \frac{b-a}{2}$. Nach Konstruktion ist $U_\varepsilon(a) \cap U_\varepsilon(b) = \emptyset$.

Da a und b Grenzwerte sind, enthält jede der Umgebungen $U_\varepsilon(a)$ und $U_\varepsilon(b)$ ein Endstück von (a_n). Damit gibt es unendlich viele a_n, die in $U_\varepsilon(a)$ und in $U_\varepsilon(b)$, also in $U_\varepsilon(a) \cap U_\varepsilon(b)$ liegen. Das ist aber unmöglich, denn die Umgebungen haben keinen Punkt gemeinsam. Dieser Widerspruch zeigt, dass $a = b$ gelten muss. □

Der mit Proposition 12.2.1 eindeutig bestimmte Grenzwert einer konvergenten Folge (a_n) erhält eine eigene Bezeichnung:

12.2.2 Notation: Konvergiert die Folge (a_n) gegen den Grenzwert a, so wird a mit $\lim a_n$ bezeichnet.

12.2.3 Definition: Ist $(n_1, n_2, \dots)$ eine streng wachsende Folge von natürlichen Zahlen (also $n_i < n_{i+1}$ für alle $i \in \mathbb{N}$), so nennen wir $(a_{n_1}, a_{n_2}, \dots)$ eine **Teilfolge** von (a_n).

Beachten Sie, dass Teilfolgen von Folgen wieder Folgen sind, also unendlich viele Folgenglieder besitzen müssen. Insbesondere ist ein Endstück eine Teilfolge und somit eine Folge.

Anschaulich ausgedrückt erhalten wir eine Teilfolge einer Folge (a_n), indem wir an der ursprünglichen Folge entlanggehen und dabei immer wieder einmal ein Folgenglied herausgreifen (wobei die so ausgewählten Glieder in der Reihenfolge angeordnet werden, in der sie herausgegriffen wurden, also in derselben Reihenfolge, die sie in der ursprünglichen Folge hatten). Allerdings müssen wir das Herausgreifen unendlich oft machen.

12.2.4 Proposition: Jede Teilfolge einer konvergenten Folge (a_n) konvergiert gegen $\lim a_n$.

Beweis: Sei $(a_{n_1}, a_{n_2}, \dots)$ eine Teilfolge der konvergenten Folge (a_n), und sei $\lim a_n = a$. Sei $\varepsilon > 0$ vorgegeben. Dann liegen in $U_\varepsilon(a)$ fast alle Folgenglieder von (a_n), also auch fast alle Folgenglieder von $(a_{n_1}, a_{n_2}, \dots)$. Mit Definition 12.1.6 folgt, dass $(a_{n_1}, a_{n_2}, \dots)$ gegen a konvergiert. □

12.2.5 Aufgabe: Beweisen Sie, dass die Folge $((-1)^n)$ nicht konvergent ist.

12.2.6 Definition: Eine Folge (a_n) heißt **beschränkt**, wenn die Menge $\{a_1, a_2, \dots\}$ beschränkt ist (vergleichen Sie Definition 11.2.42)

12.2.7 Proposition: Jede konvergente Folge (a_n) ist beschränkt.

Beweis: Da (a_n) konvergent ist, liegt in der 1-Umgebung $U_1(a)$ von $\lim a_n = a$ ein Endstück $(a_m, a_{m+1}, \dots)$. Dieses Endstück ist beschränkt, durch $a+1$ nach oben und $a-1$ nach unten. Dann ist aber auch die ganze Folge $(a_1, \dots, a_{m-1}, a_m, a_{m+1}, \dots)$ beschränkt, da jede endliche Menge $\{a_1, \dots, a_{m-1}\}$ beschränkt ist. □

12.2.8 Aufgabe: Beweisen Sie, dass die Folge (n) nicht konvergent ist.

Wir schließen diesen Abschnitt mit einem Resultat, das die große Bedeutung des Grenzwertbegriffes in der Theorie der reellen Zahlen hervorhebt.

12.2.9 Proposition: Jede reelle Zahl a ist Grenzwert einer Folge rationaler Zahlen.

Beweis: Sei $a \in \mathbb{R}$. Wir wissen mit Korollar 11.2.59, dass $\mathbb{Q}$ dicht in $\mathbb{R}$ liegt. Zu jeder natürlichen Zahl n gibt es daher eine rationale Zahl r_n mit $|r_n - a| < \frac{1}{n}$. Wir zeigen nun, dass die Folge (r_n) gegen a konvergiert. Sei $\varepsilon > 0$ vorgegeben. Wähle $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ so, dass $\frac{1}{n_\varepsilon} < \varepsilon$ gilt. Dann gilt für alle $n > n_\varepsilon$:

$$|r_n - a| < \frac{1}{n} < \frac{1}{n_\varepsilon} < \varepsilon.$$

Es folgt, dass (r_n) gegen a konvergiert. □

12.3 Divergente Folgen

Sie haben im letzten Abschnitt schon von gewissen Folgen gezeigt, dass sie nicht konvergent sind. Folgen, die nicht konvergent sind, erhalten einen eigenen Begriff:

12.3.1 Definition: Eine reelle Folge (a_n) heißt **divergent**, wenn sie nicht konvergent ist.

Divergenz einer Folge (a_n) bedeutet also, dass es keine reelle Zahl a gibt, gegen die (a_n) konvergiert. Dass (a_n) nicht gegen a konvergiert, bedeutet: Nicht in jeder ε-Umgebung liegt ein Endstück von (a_n), vielmehr existiert eine „Ausnahmeumgebung“ $U_{\varepsilon_0}(a)$, sodass jedes noch so späte Endstück einen „Ausreißer“ enthält, also ein Folgeglied a_n, das nicht in $U_{\varepsilon_0}(a)$ liegt. In $(a_1, a_2, \dots)$ gibt es also ein

$a_{n_1} \notin U_{\varepsilon_0}(a)$, in $(a_{n_1+1}, a_{n_1+2}, \dots)$ ein $a_{n_2} \notin U_{\varepsilon_0}$ und so weiter. Mit anderen Worten, es gibt Indizes $n_1 < n_2 < n_3 < \dots$, sodass durchweg $|a_{n_i} - a| \geq \varepsilon_0$ ist. Mit dem Begriff der Teilfolge in Definition 12.2.3 können wir das auch so formulieren: Wenn (a_n) nicht gegen a konvergiert, dann gibt es eine ε_0-Umgebung von a, sodass es eine Teilfolge von (a_n) gibt, die vollständig außerhalb von U_{ε_0} liegt.

Nehmen wir nun umgekehrt an, (a_n) wäre eine Folge und a eine reelle Zahl, für die es eine ε_0-Umgebung $U_{\varepsilon_0}(a)$ gibt, sodass eine Teilfolge vollständig außerhalb von U_{ε_0} liegt. Da Teilfolgen unendlich viele Folgenglieder enthalten, kann (a_n) nicht gegen a konvergieren. Unsere Überlegungen zeigen:

12.3.2 Proposition: Genau dann konvergiert (a_n) nicht gegen a, wenn es eine ε_0-Umgebung von a so gibt, dass eine Teilfolge von (a_n) vollständig außerhalb von U_{ε_0} liegt. □

12.3.3 Beispiele: (Divergente Folgen)

1. Die Folgen $((-1)^n)$ und (n) sind divergent. Das haben Sie in den Aufgaben 12.2.5 und 12.2.8 bewiesen.

2. Die Folge $(a_n) = (\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i}) = (1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n})$ ist divergent.

   Zum Beweis zeigen wir, dass die Folge unbeschränkt ist. Sei $G > 0$ beliebig, und sei $k \in \mathbb{N}$ mit $k > 2G$. Dann gilt

$$\begin{aligned} a_{2^{k+1}} &= 1 + \tfrac{1}{2} + \left(\tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{2^2}\right) + \left(\tfrac{1}{2^2+1} + \cdots \tfrac{1}{2^3}\right) + \left(\tfrac{1}{2^k+1} + \cdots + \tfrac{1}{2^{k+1}}\right) \\ &> \tfrac{1}{2} + \tfrac{2}{2^2} + \tfrac{2^2}{2^3} + \cdots + \tfrac{2^k}{2^{k+1}} \\ &= \tfrac{k+1}{2} \\ &> G. \end{aligned}$$

   Da die Folge nicht beschränkt ist, kann sie mit Proposition 12.2.7 nicht konvergent sein.

3. Die Folge $(a_n) = ((-1)^{n+1} + \frac{1}{n})$ ist divergent.

   Zum Beweis betrachten wir die Teilfolgen (a_{2n-1}) und (a_{2n}). Es ist $(a_{2n-1}) = ((-1)^{2n} + \frac{1}{2n-1}) = (1 + \frac{1}{2n-1})$ und $(a_{2n}) = ((-1)^{2n+1} + \frac{1}{2n}) = (-1 + \frac{1}{2n})$. Die erste Teilfolge konvergiert gegen 1, die zweite gegen -1 (vergleichen Sie Aufgabe 12.3.4). Da diese Grenzwerte verschieden sind, kann (a_n) mit Proposition 12.2.4 nicht konvergent sein.

4. In Beispiel 12.1.11 haben wir gezeigt, dass die Folge (q^n) für $|q| < 1$ konvergent ist. Hier zeigen wir, dass die Folge (q^n) für $|q| > 1$ divergent ist. Dazu werden wir zeigen, dass diese Folge nicht beschränkt ist.

   Ist $|q| > 1$, so gibt es ein $r > 0$ mit $|q| = 1 + r$. Mit der Bernoulli'schen Ungleichung 11.2.17 folgt
   $$|q^n| = |q|^n = (1+r)^n \geq 1 + rn > rn.$$
   Angenommen, die Folge (q^n) ist beschränkt. Dann gibt es ein $S \in \mathbb{R}$ mit $|q^n| \leq S$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Dann folgt $rn \leq S$, also $n \leq \frac{S}{r}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Somit wäre $\frac{S}{r}$ eine obere Schranke für $\mathbb{N}$. Das ist aber ein Widerspruch zum Satz des Archimedes 11.2.57. Dieser Widerspruch zeigt, dass (q^n) für $|q| > 1$ nicht beschränkt und somit nicht konvergent ist.

12.3.4 Aufgabe: Beweisen Sie, dass $(1 + \frac{1}{2n-1})$ gegen 1 und $(-1 + \frac{1}{2n})$ gegen -1 konvergiert.

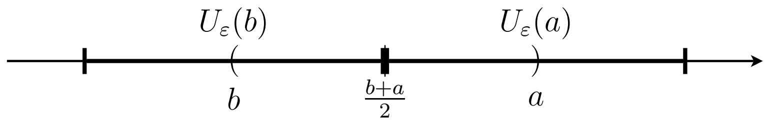
12.4 Das Rechnen mit konvergenten Folgen

Die Ergebnisse dieses Abschnitts sind unentbehrlich für den Umgang mit konvergenten Folgen. Ich bitte Sie daher, sie sich besonders einzuprägen.

12.4.1 Proposition: (Vergleichssatz)

Konvergieren (a_n) gegen a und (b_n) gegen b, und ist fast immer $a_n \leq b_n$, so folgt $a \leq b$.

Beweis: Angenommen, $a > b$. Wir betrachten das Intervall (b, a) mit Mittelpunkt $\frac{a+b}{2}$ und Radius $\frac{a-b}{2}$ (vergleiche Definition 11.2.30). Sei $\varepsilon = \frac{a-b}{2}$. Die Umgebungen $U_\varepsilon(a)$ und $U_\varepsilon(b)$ sind wie folgt auf dem Zahlenstrahl verteilt:



In $U_\varepsilon(a)$ liegen fast alle a_n, und in $U_\varepsilon(b)$ fast alle b_n. Aber dann gilt $a_n > b_n$ für fast alle Indizes, im Widerspruch zu unserer Voraussetzung. Dieser Widerspruch zeigt, dass $a \leq b$ gelten muss. □

12.4.2 Aufgabe: Seien $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Beweisen Sie: Konvergiert (a_n) gegen a, und gilt fast immer $\alpha \leq a_n \leq \beta$, so folgt $\alpha \leq a \leq \beta$.

12.4.3 Proposition: (Einschnürungssatz)

Konvergieren (a_n) und (b_n) gegen a, und gilt für fast immer $a_n \leq c_n \leq b_n$, so konvergiert (c_n) gegen a.

Beweis: Sei $\varepsilon > 0$ vorgegeben. Dann liegen fast alle a_n und fast alle b_n in $U_\varepsilon(a)$. Dann müssen auch fast alle c_n in $U_\varepsilon(a)$ liegen, und es folgt, dass (c_n) gegen a konvergiert. $\square$

12.4.4 Aufgabe: Beweisen Sie mit Hilfe des Einschnürungssatzes, dass $(\frac{1}{2n+1})$ gegen 0 konvergiert.

12.4.5 Definition: Eine Folge, die gegen 0 konvergiert, wird **Nullfolge** genannt.

12.4.6 Proposition: Ist (α_n) eine Nullfolge, und gilt fast immer $|a_n - a| < \alpha_n$, so konvergiert (a_n) gegen a.

Beweis: Mit dem Einschnürungssatz gilt $\lim\limits_{n\to\infty} |a_n - a| = 0$, denn fast immer gilt $0 \leq |a_n - a| \leq \alpha_n$, und als einschnürende Folgen können wir die konstante Folge (0) und die Nullfolge (α_n) nehmen. Dann gibt es für jedes $\varepsilon > 0$ ein n_0, sodass für alle $n \geq n_0$ stets $|(a_n - a) - 0| = |a_n - a| < \varepsilon$ ist. Das bedeutet aber gerade, dass (a_n) gegen a konvergiert. $\square$

12.4.7 Proposition: (Betragssatz)

Konvergiert (a_n) gegen a, so konvergiert $(|a_n|)$ gegen $|a|$.

Beweis: In Proposition 11.2.21 haben wir gesehen, dass stets $||a_n| - |a|| \leq |a_n - a|$ gilt. Da (a_n) gegen a konvergiert, gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein n_0, sodass für alle $n \geq n_0$ stets $||a_n| - |a|| \leq |a_n - a| < \varepsilon$ ist. Das bedeutet aber gerade, dass $(|a_n|)$ gegen $|a|$ konvergiert. $\square$

12.4.8 Aufgabe: Geben Sie ein Beispiel für eine Folge (a_n), sodass $(|a_n|)$ konvergent ist, aber (a_n) nicht konvergent ist.

Das nächste Ergebnis besagt, dass man Nullfolgen mit beschränkten Folgen multiplizieren darf, ohne die Konvergenz gegen Null zu zerstören.

12.4.9 Proposition: Ist (a_n) eine Nullfolge, und ist (b_n) beschränkt, so ist $(a_n b_n)$ eine Nullfolge.

Beweis: Da (b_n) beschränkt ist, gibt es eine positive reelle Zahl β mit $|b_n| < \beta$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Sei $\varepsilon > 0$ vorgegeben. Dann ist $\frac{\varepsilon}{\beta} > 0$. Da (a_n) eine Nullfolge ist, gibt es ein n_0, sodass $|a_n| < \frac{\varepsilon}{\beta}$ für alle $n > n_0$ ist. Für diese n gilt dann

$$|a_n b_n - 0| = |a_n b_n| = |a_n||b_n| < |a_n|\beta < \frac{\varepsilon}{\beta}\beta = \varepsilon.$$

Es folgt, dass $(a_n b_n)$ eine Nullfolge ist. □

12.4.10 Aufgabe: Beweisen Sie, dass $((-1)^n \frac{17}{n})$ eine Nullfolge ist.

Sind (a_n) und (b_n) Folgen, so definieren wir eine Addition $(a_n) + (b_n)$ durch $(a_n) + (b_n) = (a_n + b_n)$. Die Summe der Folgen erfolgt also – wie bei Zeilenvektoren – komponentenweise. Ist $a \in \mathbb{R}$, und ist (a_n) eine Folge, so definieren wir eine Skalarmultiplikation $a(a_n)$ durch $a(a_n) = (aa_n)$. Ein Standardbeweis zeigt:

12.4.11 Bemerkung: Die Menge der reellen Folgen ist mit der Addition und der Skalarmultiplikation ein $\mathbb{R}$-Vektorraum.

Wie bei Vektorräumen üblich bezeichnet $(a_n) - (b_n)$ die Folge $(a_n) + (-(b_n)) = (a_n - b_n)$.

In Vektorräumen war ja kein Produkt von Vektoren erklärt. Das ist bei Folgen anders. Sind (a_n) und (b_n) reelle Folgen, so definieren wir $(a_n)(b_n) = (a_n b_n)$, also wieder durch komponentenweise Multiplikation. Sind in (b_n) fast alle $b_n \neq 0$ so definieren wir $\frac{(a_n)}{(b_n)}$ also die Folge $(\frac{a_n}{b_n})$, wobei wir vereinbaren wollen, dass $(\frac{a_n}{b_n})$ erst bei einem Index beginnt, ab dem alle $b_n \neq 0$ sind. Wie sich Grenzwerte konvergenter Folgen bei Summen-, Differenz-, Produkt- und Quotientenbildung verhalten, ist Inhalt der folgenden Proposition.

12.4.12 Proposition: (Rechenregeln für konvergente Folgen)

Sei (a_n) konvergent gegen a, und sei (b_n) konvergent gegen b. Dann gilt

1. $(a_n + b_n)$ konvergiert gegen $a + b$.
2. $(a_n b_n)$ konvergiert gegen ab.
3. Ist $\alpha \in \mathbb{R}$, so konvergiert (αa_n) gegen αa.
4. $(a_n - b_n)$ konvergiert gegen $a - b$.
5. Ist $b \neq 0$, und sind fast alle $b_n \neq 0$, so konvergiert $(\frac{a_n}{b_n})$ gegen $\frac{a}{b}$. (Beachten Sie, dass $(\frac{a_n}{b_n})$ erst bei einem Index beginnen soll, ab dem alle $b_n \neq 0$ sind.)

Beweis:

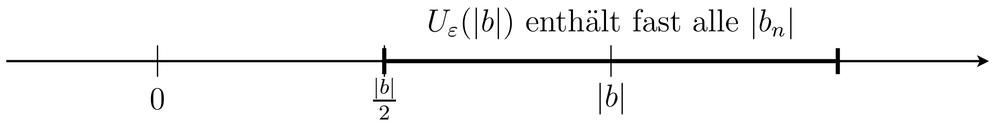
1. Sei $\varepsilon > 0$ vorgegeben. Da (a_n) und (b_n) konvergent sind, gibt es Indizes n_0 und n_1, sodass $|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$ für alle $n > n_0$ und $|b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2}$ für alle $n > n_1$ gilt. Für alle $n > \max\{n_0, n_1\}$ gilt dann
$$|(a_n + b_n) - (a + b)| = |(a_n - a) + (b_n - b)| \leq |a_n - a| + |b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$
Bei der ersten Abschätzung haben wir die Dreiecksungleichung verwendet (vergleiche Definition 11.2.22). Es folgt, dass $(a_n + b_n)$ gegen $a + b$ konvergiert.

2. Da (a_n) gegen a und (b_n) gegen b konvergiert, sind $(a_n - a)$ und $(b_n - b)$ Nullfolgen (vergleiche Aufgabe 12.1.14). Mit Proposition 12.2.7 ist (b_n) beschränkt. Aus Proposition 12.4.9 folgt, dass $((a_n - a)b_n)$ und $((b_n - b)a)$ Nullfolgen sind. Mit der ersten Aussage dieser Proposition gilt, dass
$$(a_n b_n - ab) = ((a_n - a)b_n) + ((b_n - b)a)$$
eine Nullfolge ist. Somit konvergiert $(a_n b_n)$ gegen ab (vergleiche Aufgabe 12.1.14).

3. Diese Aussage folgt aus der zweiten indem wir für (b_n) die konstante Folge (α) nehmen.

4. Es ist $(a_n - b_n) = (a_n + (-b_n))$. Mit der dritten Aussage dieser Proposition konvergiert $(-b_n) = (-1)(b_n)$ gegen $-b$, und mit der ersten Aussage folgt, dass $(a_n - b_n)$ gegen $a - b$ konvergiert.

5. Sei $b \neq 0$. Mit dem Betragssatz 12.4.7 konvergiert $(|b_n|)$ gegen $|b|$. Da $|b| > 0$, ist $\frac{|b|}{2} > 0$. Sei $\varepsilon = \frac{|b|}{2}$. Da $U_\varepsilon(|b|)$ fast alle $|b_n|$ enthält (vergleiche Skizze),



gibt es ein n_0, sodass $|b_n| > \frac{|b|}{2}$ für alle $n > n_0$ ist. Für diese n ist $b_n \neq 0$, und es gilt die Abschätzung
$$0 \leq \left|\frac{1}{b_n} - \frac{1}{b}\right| = \left|\frac{b - b_n}{b_n b}\right| = \frac{|b - b_n|}{|b_n||b|} < \frac{2}{|b|^2}|b - b_n|.$$
Die Folge $(|b - b_n|) = (|b_n - b|)$ ist eine Nullfolge, und die konstante Folge $(\frac{2}{|b|^2})$ ist konvergent. Mit der zweiten Aussage dieser Proposition folgt, dass $(\frac{2}{|b|^2}|b - b_n|)$ eine Nullfolge ist. Mit Proposition 12.4.6 konvergiert $(\frac{1}{b_n})$ gegen $\frac{1}{b}$. Mit der zweiten Aussage konvergiert $(\frac{a_n}{b_n}) = (a_n \frac{1}{b_n})$ gegen $\frac{a}{b}$.

$\square$

12.4.13 Aufgabe: Geben Sie ein Beispiel für eine Nullfolge (b_n) deren Folgenglieder alle $\neq 0$ sind, sodass $(\frac{1}{b_n})$ divergent ist.

12.4.14 Aufgabe: Sei V der $\mathbb{R}$-Vektorraum der reellen Folgen, und sei $U \subseteq V$ die Menge der konvergenten Folgen.

1. Beweisen Sie, dass U ein Unterraum von V ist.
2. Beweisen Sie, dass $f : U \to \mathbb{R}$, definiert durch $f((a_n)) = \lim a_n$ für alle $(a_n) \in U$, linear ist.

Proposition 12.4.12 schreibt man gern in der Kurzform

$$\lim(a_n \pm b_n) = \lim a_n \pm \lim b_n \text{ und } \lim a_n b_n = \lim a_n \cdot \lim b_n.$$

So suggestiv diese Schreibweise auch ist, so fehleranfällig ist sie. Wir müssen uns nämlich darüber im klaren sein, dass diese Formeln von rechts nach links gelesen werden müssen. Wenn die Grenzwerte von (a_n) und (b_n) existieren, dann existieren auch die von $(a_n \pm b_n)$ und $(a_n b_n)$. Keineswegs darf man aus der Tatsache, dass der Grenzwert von $(a_n + b_n)$ existiert, schließen, dass die Folgen (a_n) und (b_n) existieren, wie es die Kurzschreibweise oben suggeriert.

12.4.15 Aufgabe: Geben Sie ein Beispiel für Folgen (a_n) und (b_n), sodass (a_n+b_n) konvergiert und (a_n) und (b_n) divergieren.

Die Ergebnisse in diesem Abschnitt ermöglichen uns, von vielen Folgen Grenzwerte zu berechnen, sofern wir über einen gewissen Fundus von Folgen verfügen, von denen wir die Grenzwerte kennen.

12.4.16 Beispiel:

1. Die Folge $(\frac{(3n+1)(n-3)}{4n^2-1})$ konvergiert gegen $\frac{3}{4}$, denn

$$\frac{(3n+1)(n-3)}{4n^2-1} = \frac{3n^2-8n-3}{4n^2-1} = \frac{3-\frac{8}{n}-\frac{3}{n^2}}{4-\frac{1}{n^2}}.$$

Die Folge $(4-\frac{1}{n^2})$ unter dem Bruchstrich konvergiert gegen 4, denn $(\frac{1}{n^2})$ ist eine Nullfolge. Die Folge $(3-\frac{8}{n}-\frac{3}{n^2})$ konvergiert gegen 3, denn $(-\frac{8}{n})$ und $(-\frac{3}{n^2})$ sind Nullfolgen. Somit gilt $\lim \frac{(3n+1)(n-3)}{4n^2-1} = \frac{3}{4}$.

2. **Behauptung:** Sei $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, und sei $a_n \geq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{a_n} = \sqrt{a}$.

   Beweis: Sei $\varepsilon > 0$ vorgegeben.

   Falls $a = 0$, so gibt es ein n_0, sodass $0 \leq a_n < \varepsilon^2$ für alle $n > n_0$ gilt. Für diese n gilt $0 \leq \sqrt{a_n} < \varepsilon$, und es folgt, dass $(\sqrt{a_n})$ gegen $0 = \sqrt{a}$ konvergiert.

Sei $a > 0$. Es gilt $|\sqrt{a_n} - \sqrt{a}||\sqrt{a_n} + \sqrt{a}| = |(\sqrt{a_n} - \sqrt{a})(\sqrt{a_n} + \sqrt{a})| = |a_n - a|$, und es folgt

$$|\sqrt{a_n} - \sqrt{a}| = \frac{|a_n - a|}{\sqrt{a_n} + \sqrt{a}} \leq \frac{|a_n - a|}{\sqrt{a}}.$$

Da $(|a_n - a|)$ eine Nullfolge ist, ist $(\frac{|a_n - a|}{\sqrt{a}})$ eine Nullfolge. Mit 12.4.6 folgt, dass $(\sqrt{a_n})$ gegen $\sqrt{a}$ konvergiert.

12.4.17 Aufgabe: Was ist falsch an folgendem „Beweis" der Aussage 2 in Beispiel 12.4.16?

$$a = \lim a_n = \lim \sqrt{a_n}\sqrt{a_n} = \lim \sqrt{a_n} \cdot \lim \sqrt{a_n} = z \cdot z$$

für ein $z \in \mathbb{R}$. Da $\sqrt{a_n} \geq 0$, folgt $z \geq 0$. Somit gilt $\lim \sqrt{a_n} = z = \sqrt{a}$. (Vorsicht, kein Beweis!)

12.4.18 Aufgabe: Beweisen Sie, dass $(\frac{1}{2^{n-1}})$ eine Nullfolge ist. Hinweis: Aufgabe 11.2.18 könnte hilfreich sein.

12.5 Vier Prinzipien der Konvergenztheorie

Wenn wir bisher die Konvergenz einer Folge (a_n) bewiesen haben, ging das nicht ohne die Kenntnis des Grenzwertes. Entweder mussten wir den Grenzwert „raten" (oder unsere gute Fee legte uns nahe, doch mal Folgendes auszuprobieren), und wir haben die Konvergenz dann mit Hilfe der Definition 12.1.8 verifiziert. Oder wir haben die Konvergenz von (a_n) mit Hilfe der Tricks des letzten Abschnittes bewiesen – dafür mussten wir aber die Grenzwerte der Folgen kennen, die für die Herleitung des Grenzwertes von (a_n) benötigt wurden.

Manchmal möchte man aber nur wissen, ob eine Folge konvergiert oder nicht. Die Ergebnisse dieses Abschnitts zeigen, dass dies möglich ist. Alle Ergebnisse sind Folgerungen aus dem Supremumsprinzip, Satz 11.2.52.

Das Monotonieprinzip

12.5.1 Definition: Eine Folge (a_n) heißt **monoton**, falls gilt:

1. $a_n \leq a_{n+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$, oder
2. $a_n \geq a_{n+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Im ersten Fall nennt man (a_n) **monoton wachsend**, im zweiten Fall **monoton fallend**.

Eine Folge ist genau dann monoton wachsend, wenn $a_{n+1} - a_n \geq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ ist, und monoton fallend, wenn $a_{n+1} - a_n \leq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ ist. Sind alle Folgenglieder positiv, so ist (a_n) genau dann monoton wachsend, wenn $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$, und monoton fallend, wenn $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$ ist.

In Definition 12.2.6 haben wir gesagt, wann wir eine Folge (a_n) beschränkt nennen: Die Menge $\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ muss beschränkt sein. Ist (a_n) beschränkt, so besitzt $\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ ein Supremum a (vergleiche Satz 11.2.52) und ein Infimum (vergleiche Korollar 11.2.53). Dieses Supremum hat folgende Eigenschaften (vergleiche Definition 11.2.47):

1. Es gilt $a_n \leq a$ für alle Folgenglieder a_n, und

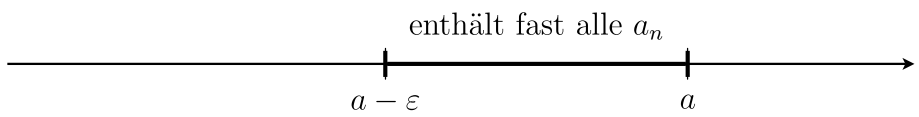
2. zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es ein a_{n_0} mit $a_{n_0} > a - \varepsilon$.

In Proposition 12.2.7 haben wir gezeigt, dass jede konvergente Folge beschränkt ist. Das folgende Resultat zeigt, dass für monotone Folgen auch die Umkehrung gilt:

12.5.2 Satz: (Monotonieprinzip)

Jede monotone, beschränkte Folge (a_n) konvergiert. Ist (a_n) monoton wachsend und beschränkt, so konvergiert sie gegen $\sup\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$, ist (a_n) monoton fallend, so konvergiert sie gegen $\inf\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$.

Beweis: Sei (a_n) monoton wachsend und beschränkt, und sei $a = \sup\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$. Sei $\varepsilon > 0$. Dann gibt es ein n_0 mit $a_{n_0} > a - \varepsilon$. Da (a_n) monoton wachsend ist, folgt $a_n > a - \varepsilon$ für alle $n > n_0$. Da $a_n \leq a$ für alle $n \in \mathbb{N}$ sind wir in folgender Situation:



Da fast alle a_n in $U_\varepsilon(a)$ liegen, folgt, dass (a_n) gegen a konvergiert.

Sei nun (a_n) monoton fallend. Sei $a' = \inf\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$. Die Folge $(-a_n)$ ist monoton wachsend. Wie wir oben gezeigt haben, konvergiert $(-a_n)$ gegen $\sup\{-a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$. In Aufgabe 11.2.51 haben Sie gezeigt, dass $\sup\{-a_n \mid n \in \mathbb{N}\} = -\inf\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ ist. Da $(-a_n)$ gegen $-\inf\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ konvergiert, folgt mit Proposition 12.4.12, dass (a_n) gegen $\inf\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ konvergiert. $\square$

In Kombination mit 12.2.7 erhalten wir:

12.5.3 Korollar: Eine monotone Folge konvergiert genau dann, wenn sie beschränkt ist. □

Es folgen Beispiele, in denen zum Nachweis der Konvergenz das Monotonieprinzip verwendet wird.

12.5.4 Beispiele: 1. Die Folge $(a_n) = (\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2})$ ist monoton wachsend und beschränkt, also konvergent.

Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $a_{n+1} - a_n = \frac{1}{(n+1)^2} > 0$. Dies zeigt, dass (a_n) monoton wachsend ist. Weiter gilt für alle $n \geq 2$:

$$\begin{aligned} |a_n| &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} = 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^2} \leq 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k(k-1)} \\ &= 1 + \sum_{k=2}^{n} (\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}) \text{ (bitte nachrechnen)} \\ &= 1 + (1 - \frac{1}{2}) + (\frac{1}{2} - \frac{1}{3}) + \cdots + (\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}) \\ &= 2 - \frac{1}{n} < 2. \end{aligned}$$

Es gilt auch $|a_1| < 2$, das heißt, $\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ ist beschränkt. Somit ist (a_n) beschränkt, und mit dem Monotonieprinzip folgt, dass (a_n) konvergent ist.

Sie möchten den Grenzwert wissen? Okay, aber weil der gar nicht einfach zu bestimmen ist, gibt es den nur ohne Beweis. Es ist $\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{1}{6}\pi^2$, wobei π die Kreiszahl bezeichnet.

2. Die Folge $(a_n) = (\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!})$ ist konvergent. Dabei bezeichnet $k!$ das Produkt der ersten k natürlichen Zahlen, also $k! = k(k-1)\cdots 2 \cdot 1$, und $0!$ wird als 1 definiert.

Zum Beweis dieser Behauptung zeigen wir wieder, dass (a_n) monoton wachsend und beschränkt ist.

Für alle $n \in \mathbb{N}$ ist $a_{n+1} - a_n = \frac{1}{(n+1)!} > 0$, und es folgt, dass (a_n) monoton wachsend ist.

Weiter gilt für alle $n \geq 2$:

$$\begin{aligned} a_1 \leq a_n &= 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{2\cdot 1} + \cdots + \frac{1}{n(n-1)\cdots 1} \\ &\leq 1 + 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k(k-1)} \\ &= 2 + 1 - \frac{1}{n} \text{ wie in Beispiel oben (12.5.4 1)} \\ &< 3. \end{aligned}$$

Also ist (a_n) durch 3 beschränkt, und mit dem Monotonieprinzip folgt, dass (a_n) konvergent ist.

3. Die Folge $(a_n) = ((1+\frac{1}{n})^{n+1})$ ist konvergent.

   Zum Beweis zeigen wir, dass (a_n) monoton fallend ist. Da alle Folgenglieder positiv sind, reicht es, zu zeigen, dass $\frac{a_{n-1}}{a_n} \geq 1$ für alle $n \geq 2$ ist. Auf geht's: Sei $n \geq 2$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
\frac{a_{n-1}}{a_n} &= \left(1+\frac{1}{n-1}\right)^n : \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} \\
&= \left(1+\frac{1}{n^2-1}\right)^n \frac{n}{n+1} \text{ (nachrechnen, Aufgabe 12.5.5)} \\
&\geq \left(1+\frac{n}{n^2-1}\right) \frac{n}{n+1} \text{ (Bernoulli'sche Ungleichung)} \\
&\geq \left(1+\frac{n}{n^2}\right) \frac{n}{n+1} \\
&= \left(1+\frac{1}{n}\right) \frac{n}{n+1} = 1.
\end{aligned}$$

   Wir haben also gezeigt, dass (a_n) monoton fallend ist. Somit gilt $a_n \leq a_1 = 4$, und da alle Folgenglieder positiv sind, ist $\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ beschränkt. Mit dem Monotonieprinzip folgt, dass (a_n) konvergent ist.

12.5.5 Aufgabe: Rechnen Sie nach, dass $\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^n : \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} = \left(1+\frac{1}{n^2-1}\right)^n \frac{n}{n+1}$ gilt.

Ich habe noch gar nichts zu den Grenzwerten der Folgen $(\sum\limits_{k=0}^{n} \frac{1}{k!})$ und $((1+\frac{1}{n})^{n+1})$ gesagt. Das möchte ich jetzt nachholen.

12.5.6 Definition: Der Grenzwert der Folge $((1+\frac{1}{n})^{n+1})$ wird mit e bezeichnet und **Euler'sche Zahl** genannt.

Mit dieser Bezeichnung ehrt man den schweizer Mathematiker Leonhard Euler (1707-1783). Näherungsweise ist $e \approx 2,7182818$. Wir werden in 12.5.9 zeigen, dass e auch der Grenzwert der Folge $(\sum\limits_{k=0}^{n} \frac{1}{k!})$ ist. Die Zahl e ist irrational, wie wir in Kurseinheit 6 zeigen werden.

Die Euler'sche Zahl e wird später noch eine wichtige Rolle spielen, daher sollten wir sie hier schon etwas genauer anschauen – sie ist nämlich auch Grenzwert von anderen Folgen als der, die wir in Beispiel 12.5.4 betrachtet haben.

12.5.7 Proposition: Es sind $\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n = e$ und $\lim\limits_{n\to\infty}(1-\frac{1}{n})^n = \frac{1}{e}$.

Beweis: Es ist $(1+\frac{1}{n})^n = \frac{(1+\frac{1}{n})^{n+1}}{1+\frac{1}{n}}$. Für $n \to \infty$ konvergiert der Zähler der rechten Seite der Gleichung gegen e, und der Nenner konvergiert gegen 1. Mit den Rechenregeln für konvergente Folgen, Proposition 12.4.12, konvergiert $((1+\frac{1}{n})^n)$ gegen $\frac{e}{1} = e$, die erste Behauptung. Um die zweite Gleichung zu beweisen, stellen wir fest, dass für alle $n \geq 2$ gilt:

$$(1+\frac{1}{n-1})^n(1-\frac{1}{n})^n = (\frac{n}{n-1})^n(\frac{n-1}{n})^n = 1.$$

Es ist also $(1-\frac{1}{n})^n = \frac{1}{(1+\frac{1}{n-1})^n}$. Für $n \to \infty$ konvergiert der Nenner der rechten Seite der Gleichung gegen e, und der Zähler gegen 1. Somit konvergiert $((1-\frac{1}{n})^n)$ gegen $\frac{1}{e}$, die zweite Behauptung. □

Bevor es in Vergessenheit gerät wollen wir noch schnell eine bereits verwendete Notation festhalten:

12.5.8 Notation: Sei $k \in \mathbb{N}$. Mit $k!$ bezeichnen wir die Zahl $k! = k(k-1)\cdots 2\cdot 1$. Für $k = 0$ definieren wir $0!$ als $0! = 1$. Ausgesprochen wird $k!$ als „k Fakultät“.

12.5.9 Proposition: Es ist $e = \lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n = \lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}$, und $e \leq 3$.

Beweis: Sei $(a_n) = ((1+\frac{1}{n})^n)$, und sei $(s_n) = (\sum\limits_{k=0}^{n}\frac{1}{k!})$. Wir wissen bereits, dass (a_n) und (s_n) konvergent sind, und ebenfalls, dass $e = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$ ist. Sei $e' = \lim\limits_{n\to\infty} s_n$. Zu zeigen ist, dass $e = e'$ gilt.

Mit dem binomischen Lehrsatz 11.2.62 gilt $a_n = \sum\limits_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{1}{n^k}$. Es ist

$$\binom{n}{k}\frac{1}{n^k} = \frac{1}{k!}\frac{n}{n}\frac{n-1}{n}\cdots\frac{n-k+1}{n} \leq \frac{1}{k!}\frac{n^k}{n^k} = \frac{1}{k!}.$$

Es folgt $a_n = \sum\limits_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{1}{n^k} \leq \sum\limits_{k=0}^{n}\frac{1}{k!} = s_n$, also $e \leq e'$ mit mit dem Vergleichssatz 12.4.1.

Wir werden jetzt zeigen, dass auch $e \geq e'$ gilt. Zum Beweis wählen wir $n \in \mathbb{N}$. Für alle $m > n$ gilt

$$\begin{aligned} a_m &= \sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}\frac{1}{m^k} \geq \sum_{k=0}^{n}\binom{m}{k}\frac{1}{m^k} = \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}\cdot\frac{m}{m}\cdot\frac{m-1}{m}\cdots\frac{m-k+1}{m} \\ &\geq \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}\left(\frac{m-n}{m}\right)^n. \end{aligned}$$

Es folgt

$$e = \lim_{m\to\infty} a_m \geq \lim_{m\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}\left(1-\frac{n}{m}\right)^n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} = s_n,$$

denn $\sum\limits_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$ ist eine Konstante, und $\lim\limits_{m\to\infty}(1-\frac{n}{m})^n = 1$. Da $e \geq s_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt, folgt $e \geq e'$. Zusammen mit $e' \geq e$ folgt $e = e'$, die Behauptung. In zweiten Beispiel von 12.5.4 haben wir gesehen, dass (s_n) monoton fallend und durch 3 beschränkt ist. Somit gilt $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = e \leq 3$. □

Das Auswahlprinzip von Bolzano-Weierstraß

Als nächstes werden wir zeigen, dass jede Folge eine monotone Teilfolge enthält. Dazu definieren wir:

12.5.10 Definition: Sei (a_n) eine Folge. Wir nennen $m \in \mathbb{N}$ eine **Gipfelstelle** von (a_n), wenn für alle $n > m$ stets $a_n < a_m$ gilt.

Anschaulich: m ist eine Gipfelstelle, wenn alle hinter a_m kommenden Folgenglieder unter a_m liegen.

12.5.11 Beispiel: Sei $(a_n) = (\frac{(-1)^n}{n})$. Alle positiven Folgenglieder sind Gipfelstellen von (a_n). Bei der Folge $(b_n) = (\frac{1}{n})$ sind alle Folgenglieder Gipfelstellen von (b_n). Bei der Folge $(c_n) = (n)$ gibt es keine Gipfelstellen.

12.5.12 Lemma: Jede Folge (a_n) enthält eine monotone Teilfolge.

Beweis: Besitzt (a_n) unendlich viele Gipfelstellen $n_1 < n_2 < n_3 < \ldots$, so ist $a_{n_1} > a_{n_2} > a_{n_3} > \ldots$, und (a_{n_k}) ist eine monoton fallende Teilfolge von (a_n). Gibt es nur endlich viele Gipfelstellen, so gibt es einen Index n_1, der echt größer als alle Gipfelstellen ist. Dieses n_1 ist selbst keine Gipfelstelle. Es folgt, dass es ein $n_2 > n_1$ gibt, sodass $a_{n_2} \geq a_{n_1}$ ist. Da auch n_2 keine Gipfelstelle ist, gibt es ein $n_3 > n_2$ mit $a_{n_3} \geq a_{n_2}$. So fortfahrend erhalten wir eine monoton wachsende Teilfolge von (a_n). □

Den Begriff der Gipfelstelle können Sie nun vergessen. Wir haben ihn nur für den Beweis des Lemmas gebraucht.

12.5.13 Satz: (Auswahlprinzip von Bolzano-Weierstraß)

Jede beschränkte Folge enthält eine konvergente Teilfolge.

Beweis: Sei (a_n) eine Folge, und sei (a_{n_k}) eine monotone Teilfolge von (a_n). Wir wissen mit Lemma 12.5.12, dass eine solche existieren muss. Mit dem Monotonieprinzip 12.5.2 folgt, dass (a_{n_k}) konvergent ist. □

Benannt ist der Satz nach dem Prager Philosoph, Theologen und Mathematiker Bernhard Bolzano (1781-1848) und dem deutschen Mathematiker Karl Weierstraß (1815-1897).

Das Cauchy'sche Konvergenzprinzip

Dieses Konvergenzprinzip ist nach dem französischen Mathematiker Augustin-Louis Cauchy (1789-1857) benannt, der fundamentale Resultate der Analysis bewiesen hat. Ausgesprochen wir der Name „Kohschi".

12.5.14 Definition: Eine Folge (a_n) heißt **Cauchyfolge**, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ einen Index n_0 so gibt, dass für alle $m, n > n_0$ stets $|a_m - a_n| < \varepsilon$ ist.

Anschaulich formuliert: Späte Glieder einer Folge liegen beliebig dicht beieinander.

Jede konvergente Folge ist eine Cauchyfolge, wie wir jetzt sehen werden.

12.5.15 Bemerkung: Jede konvergente Folge (a_n) ist eine Cauchyfolge.

Beweis: Sei (a_n) konvergent gegen a. Sei $\varepsilon > 0$ vorgegeben. Dann gibt es zu $\frac{\varepsilon}{2}$ ein n_0, sodass für alle $n > n_0$ stets $|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$ gilt. Seien nun $m, n > n_0$. Dann gilt

$$|a_m - a_n| = |(a_m - a) + (a - a_n)| \leq |a_m - a| + |a - a_n| = |a_m - a| + |a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Bei der ersten Abschätzung haben wir die Dreiecksungleichung benutzt. Es folgt, dass (a_n) eine Cauchyfolge ist. □

Jede konvergente Folge ist also eine Cauchyfolge. Das Überraschende ist, dass auch die Umkehrung gilt:

12.5.16 Satz: Jede Cauchyfolge konvergiert.

Beweis: Sei (a_n) eine Cauchyfolge. Wir zeigen zunächst, dass (a_n) beschränkt ist.

Zu $\varepsilon = 1$ gibt es ein n_0, sodass $|a_m - a_n| < 1$ für alle $m, n > n_0$ ist. Da $|a_m| - |a_n| \leq ||a_m| - |a_n|| \leq |a_m - a_n|$ ist (vergleiche 11.2.21), folgt $|a_m| - |a_n| < 1$ für alle $m, n > n_0$. Sei $N = n_0 + 1$. Dann gilt $|a_m| - |a_N| < 1$ für alle $m > n_0$, also $|a_m| < 1 + |a_N|$

für alle $m > n_0$. Somit ist das Endstück $(a_m)_{m>n_0}$ von (a_n) beschränkt. Dann gilt für alle Folgenglieder a_n die Abschätzung $|a_n| \leq \max\{|a_1|, \dots, |a_{n_0}|, 1+|a_N|\}$. Mit anderen Worten: (a_n) ist beschränkt.

Nach dem Auswahlprinzip von Bolzano-Weierstraß enthält (a_n) eine konvergente Teilfolge (a_{n_k}), die gegen a konvergiert.

Wir zeigen jetzt, dass (a_n) ebenfalls gegen a konvergiert. Sei $\varepsilon > 0$ vorgegeben. Dann gibt es ein n_0, sodass stets $|a_m - a_n| < \frac{\varepsilon}{2}$ für alle $n, m > n_0$ ist. Da (a_{n_k}) gegen a konvergiert, gibt es ein $n_k > n_0$ mit $|a_{n_k} - a| < \frac{\varepsilon}{2}$. Da $n_k > n_0$ gilt auch $|(a_n - a_{n_k})| < \frac{\varepsilon}{2}$. Jetzt verwenden wir noch einmal den Trick wie im Beweis der Bemerkung 12.5.15, nämlich geschickt 0 zu addieren. Für alle $n > n_0$ gilt

$$|a_n - a| = |(a_n - a_{n_k}) + (a_{n_k} - a)| \leq |a_n - a_{n_k}| + |a_{n_k} - a| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Es folgt, dass (a_n) gegen a konvergiert. □

Fassen wir Bemerkung 12.5.15 und Satz 12.5.16 zusammen, so erhalten wir:

12.5.17 Korollar: (Cauchy'sches Konvergenzprinzip für Folgen)

Eine Folge (a_n) ist genau dann konvergent, wenn sie eine Cauchyfolge ist. □

Das Monotonieprinzip und das Cauchy'sche Konvergenzprinzip sind Konvergenzkriterien, das heißt, Mittel, die es uns gestatten, aus dem Verhalten einer Folge Rückschlüsse auf ihr Konvergenzverhalten zu ziehen. Bisher konnten wir nur entscheiden, ob eine Folge gegen eine gewisse Zahl konvergiert. Von nun an können wir entscheiden, ob sie einen besitzt, ohne ihn – falls sie überhaupt einen hat – zu kennen.

Mit dem Cauchy'schen Konvergenzprinzip können wir auch entscheiden, ob eine Folge (a_n) divergent ist. Dies ist der Fall, wenn ein $\varepsilon_0 > 0$ existiert, sodass man zu jedem n_0 Indizes $m, n > n_0$ finden kann, für die $|a_m - a_n| \geq \varepsilon_0$ ist. Wenn es also hinter jedem noch so späten Folgenglied immer wieder Glieder gibt, die sich mindestens um ein festes ε_0 unterscheiden.

12.5.18 Beispiele: 1. Wir haben in Beispiel 12.3.3 bereits gesehen, dass die Folge $(a_n) = (\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k})$ divergent ist. Damit kann sie keine Cauchyfolge sein. Wir werden dies jetzt noch einmal explizit beweisen.

Zum Beweis betrachten wir für alle $n \in \mathbb{N}$ die Differenz

$$a_{2n} - a_n = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} = \frac{1}{n+1} + \dots + \frac{1}{2n} \geq \frac{1}{2n} + \dots + \frac{1}{2n} = n\frac{1}{2n} = \frac{1}{2}.$$

Wählen wir $\varepsilon_0 = \frac{1}{2}$, und betrachten wir irgendeinen Index n_0, so ist für $n > n_0$ und $m = 2n$ stets $a_m - a_n > \varepsilon$. Es folgt, dass (a_n) keine Cauchyfolge ist.

2. Die nicht monotone Folge $(a_n) = (\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k})$ ist eine Cauchfolge und mithin konvergent.

   Zum Beweis sei $m > n$, also $m = n + k$ für ein $k \in \mathbb{N}$. Dann gilt

$$\begin{aligned} a_{n+k} - a_n &= \tfrac{(-1)^n}{n+1} + \tfrac{(-1)^{n+1}}{n+2} + \cdots + \tfrac{(-1)^{n+k-1}}{n+k} \\ &= (-1)^n(\tfrac{1}{n+1} - \tfrac{1}{n+2} + \tfrac{1}{n+3} - \cdots + \tfrac{(-1)^{k-1}}{n+k}). \end{aligned}$$

   Schreiben wir den Ausdruck innerhalb der Klammer in der Form

$$(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}) + (\frac{1}{n+3} - \frac{1}{n+4}) \ldots,$$

   so sehen wir, dass er positiv ist, denn nur bei ungeradem k bleibt der letzte Summand $\frac{(-1)^{k-1}}{n+k}$ ungeklammert, und dann ist er positiv. Schreiben wir den Ausdruck in den Klammern in der Form

$$\frac{1}{n+1} - (\frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3}) - (\frac{1}{n+4} - \frac{1}{n+5}) \ldots,$$

   so sehen wir, dass er $< \frac{1}{n+1}$ ist. Es gilt also $|a_{n+k} - a_n| < \frac{1}{n+1}$, unabhängig von k. Ist also $\varepsilon > 0$, so gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$, sodass für alle $n, m > n_0$ stets $|a_m - a_n| < \varepsilon$ ausfällt. Dies zeigt, dass (a_n) eine Cauchyfolge ist.

12.5.19 Aufgabe: Seien $a_0 = 0$, $a_1 = 1$ und $a_n = \frac{a_{n-1}+a_{n-2}}{2}$ für alle $n \geq 2$.

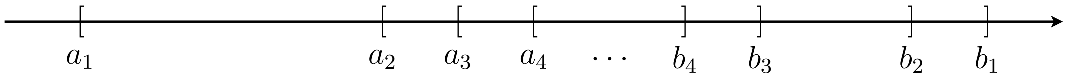
Beweisen Sie mit Induktion nach n, dass $a_{n+1} - a_n = \frac{(-1)^n}{2^n}$ ist. Benutzen Sie dieses Ergebnis um zu zeigen, dass (a_n) eine Cauchyfolge ist.

Das Prinzip der Intervallschachtelung

Seien M und N Mengen. Wir schreiben $M \subsetneqq N$, wenn M eine Teilmenge von N ist, und wenn $M \neq N$ ist. Man sagt auch, dass M eine **echte** Teilemenge von N ist.

12.5.20 Definition: Eine Folge abgeschlossener Intervalle $I_n = [a_n, b_n]$ heißt **Intervallschachtelung**, wenn $I_n \subsetneqq I_{n+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt, und wenn darüber hinaus die Folge der Intervalllängen $(b_n - a_n)$ eine Nullfolge ist.

Dass $I_n \supsetneqq I_{n+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$, gilt ist gleichbedeutend damit, dass die Folge (a_n) der linken Randpunkte monoton wächst und die Folge (b_n) der rechten Randpunkte monoton fällt. Grafisch dargestellt:



12.5.21 Notation: Eine Intervallschachtelung, wie sie in 12.5.20 definiert wurde, bezeichnen wir mit $\langle a_n | b_n \rangle$.

12.5.22 Satz: (Prinzip der Intervallschachtelung)

In jeder Intervallschachtelung $\langle a_n | b_n \rangle$ gibt es genau eine reelle Zahl a, die in allen Intervallen $[a_n, b_n]$ liegt.

Beweis: Die Folgen (a_n) und (b_n) der Randpunkte sind monoton. Mit dem Monotonieprinzip 12.5.2 konvergiert (a_n) gegen $a = \sup\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ und (b_n) konvergiert gegen $b = \inf\{b_n \mid n \in \mathbb{N}\}$. Nach Annahme konvergiert $(b_n - a_n)$ gegen 0, und mit Proposition 12.4.12 konvergiert $(b_n - a_n)$ gegen $b - a$. Es gilt also $b - a = 0$, also $a = b$. Da für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$a_n \leq \sup\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\} = a = b = \inf\{b_n \mid n \in \mathbb{N}\} \leq b_n,$$

liegt a in jedem der Intervalle der Schachtelung. Ist dies auch für die Zahl c der Fall, gilt also $a_n \leq c \leq b_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$, so folgt $a \leq c \leq a$, also $a = c$. $\square$

12.5.23 Beispiel: Wir beginnen mit dem Ausgangsintervall $[a_1, b_1]$. Dieses halbieren wir und betrachten $[a_1, \frac{a_1+b_1}{2}]$ und $[\frac{a_1+b_1}{2}, b_1]$. Wir wählen eine der Hälften aus und bezeichnen diese mit $[a_2, b_2]$. Nun halbieren wir $[a_2, b_2]$, wählen eine der Hälften aus und bezeichnen sie mit $[a_3, b_3]$. So machen wir weiter. Die Folge der Intervalllängen $(b_n - a_n)$ ist $(\frac{b_1-a_1}{2^{n-1}})$. In Aufgabe 12.4.18 haben Sie gezeigt, dass $(\frac{1}{2^{n-1}})$ eine Nullfolge ist. Es folgt, dass $(\frac{b_1-a_1}{2^{n-1}})$ eine Nullfolge ist. Auf diese Weise erhalten wir also eine Intervallschachtelung.

12.5.24 Aufgabe: Angenommen, Ihr Zahnarzt weiß, was ein Intervall ist. Erklären Sie ihm, wie die Folge in Aufgabe 12.5.19 konstruiert ist.

Lösungen der Aufgaben

Lösungen der Aufgaben in 12.1

Aufgabe 12.1.3

Es ist $\varepsilon = 0,001 = \frac{1}{1000}$. Für alle $n > 1000$ gilt $\frac{1}{n} = \left|\frac{1}{n}\right| < \varepsilon$. Es folgt mit Korollar 11.2.35, dass $\frac{1}{n} \in U_\varepsilon(0)$ für alle $n > 1000$ gilt. Somit liegen fast alle $\frac{1}{n}$ in $U_\varepsilon(0)$.

Aufgabe 12.1.5

Sei $\varepsilon > 0$ vorgegeben. Es ist $U_\varepsilon(2) = \{x \in \mathbb{R} \mid |x-2| < \varepsilon\}$. Es gilt

$$\left|(2 + \frac{(-1)^n}{n}) - 2\right| = \left|\frac{(-1)^n}{n}\right| = \frac{1}{n},$$

denn für gerade n ist $\frac{(-1)^n}{n} = \frac{1}{n}$, und für ungerade n ist $\frac{(-1)^n}{n} = -\frac{1}{n}$.

Ist also $n_0 > \frac{1}{\varepsilon}$, so gilt für alle $n > n_0$:

$$\left|(2 + \frac{(-1)^n}{n}) - 2\right| = \frac{1}{n} < \frac{1}{n_0} < \varepsilon.$$

Somit liegen fast alle $2 + \frac{(-1)^n}{n}$ in $U_\varepsilon(2)$.

Aufgabe 12.1.12

Sei $\varepsilon > 0$ vorgegeben. Ist $p = 1$, so haben wir in Beispiel 12.1.4 bereits gezeigt, dass $(\frac{1}{n^p})$ gegen 0 konvergiert. Wir können also annehmen, dass $p > 1$ ist.

Dann gilt $n^p > n$ für alle $n > 1$, also $\frac{1}{n^p} < \frac{1}{n}$ für alle $n > 1$. Sei $n_0 > \frac{1}{\varepsilon}$. Für alle $n > n_0$ ist $n > 1$, und es folgt

$$\frac{1}{n^p} < \frac{1}{n} < \frac{1}{n_0} < \varepsilon.$$

Es folgt $\left|\frac{1}{n^p} - 0\right| < \varepsilon$ für alle $n > n_0$, das heißt, $(\frac{1}{n^p})$ konvergiert gegen 0.

Aufgabe 12.1.14

Sei $\varepsilon > 0$ vorgegeben. Genau dann gilt $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, wenn es ein n_0 so gibt, dass $|a_n - a| < \varepsilon$ für alle $n > n_0$ gilt. Dies ist genau dann der Fall, wenn $|(a_n - a) - 0| < \varepsilon$ für alle $n > n_0$ ist. Das wiederum ist genau dann der Fall, wenn $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n - a) = 0$ ist.

Lösungen der Aufgaben in 12.2

Aufgabe 12.2.5

Wir betrachten die Teilfolgen (a_{2n}) und (a_{2n-1}) von $(a_n) = ((-1)^n)$. Alle Glieder der Teilfolge (a_{2n}) sind 1, und alle Glieder der Teilfolge (a_{2n-1}) sind -1. Somit konvergiert (a_{2n}) gegen 1 und (a_{2n-1}) gegen -1. Angenommen, (a_n) wäre konvergent gegen a. Mit Proposition 12.2.4 muss $1 = a = -1$ sein, ein Widerspruch. Es folgt, dass (a_n) nicht konvergent ist.

Aufgabe 12.2.8

Da (n) mit dem Satz des Archimedes nicht beschränkt ist, kann (n) mit Proposition 12.2.7 nicht konvergent sein.

Lösungen der Aufgabe in 12.3

Aufgabe 12.3.4

Sei $\varepsilon > 0$ vorgegeben.

Es ist $\left|(1 + \frac{1}{2n-1}) - 1\right| = \left|\frac{1}{2n-1}\right| = \frac{1}{2n-1}$. Diesen Ausdruck wollen wir gleich gegen ε abschätzen. Dazu eine Vorüberlegung: Für alle n_0 gilt $2n_0 + 1 > n_0$. (Das können wir mit Induktion beweisen. Der Induktionsanfang für $n_0 = 1$ liefert $3 > 1$, eine wahre Aussage. Für den Induktionsschritt von n_0 nach $n_0 + 1$ gilt $2(n_0 + 1) + 1 = 2n_0 + 3 = 2n_0 + 1 + 2 > n_0 + 2 > n_0 + 1$.) Sei nun $n_0 > \frac{1}{\varepsilon}$. Dann gilt für alle $n > n_0$:

$$\frac{1}{2n-1} < \frac{1}{2n_0 - 1} < \frac{1}{n_0} < \varepsilon.$$

Es folgt $\left|(1 + \frac{1}{2n-1}) - 1\right| < \varepsilon$ für alle $n > n_0$, das heißt, $(1 + \frac{1}{2n-1})$ konvergiert gegen 1.

Es ist $\left|(-1+\frac{1}{2n})+1\right| = \left|\frac{1}{2n}\right| = \frac{1}{2n}$. Sei wieder $n_0 > \frac{1}{\varepsilon}$. Dann gilt für alle $n > n_0$:

$$\frac{1}{2n} < \frac{1}{2n_0} < \frac{1}{n_0} < \varepsilon.$$

Es folgt $\left|(-1+\frac{1}{2n})+1\right| < \varepsilon$ für alle $n > n_0$, das heißt, $(-1+\frac{1}{2n})$ konvergiert gegen -1.

Lösungen der Aufgaben in 12.4

Aufgabe 12.4.2

Die konstante Folge (α) konvergiert gegen α. Mit dem Vergleichssatz folgt $\alpha \leq a$. Die konstante Folge (β) konvergiert gegen β. Wieder mit dem Vergleichssatz folgt $a \leq \beta$. Insgesamt gilt $\alpha \leq a \leq \beta$.

Aufgabe 12.4.4

Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $0 \leq \frac{1}{2n+1} \leq \frac{1}{n}$. Die konstante Folge (0) konvergiert gegen 0, und die Folge $(\frac{1}{n})$ konvergiert gegen 0. Mit dem Einschnürungssatz folgt, dass $(\frac{1}{2n+1})$ gegen 0 konvergiert.

Aufgabe 12.4.8

Sei $(a_n) = ((-1)^n)$. Wir haben gesehen, dass (a_n) divergent ist. Es ist aber $(|a_n|) = (1)$, und die konstante Folge (1) konvergiert gegen 1.

Aufgabe 12.4.10

Sei $(a_n) = (\frac{1}{n})$, und sei $(b_n) = ((-1)^n \cdot 17)$. Dann ist (a_n) eine Nullfolge, und (b_n) ist eine beschränkte Folge. Es ist $(a_n b_n) = ((-1)^n \frac{17}{n})$. Mit Proposition 12.4.9 folgt, dass $((-1)^n \frac{17}{n})$ eine Nullfolge ist.

Aufgabe 12.4.13

Sei $(b_n) = (\frac{1}{n})$. Es ist (b_n) eine Nullfolge, und $(\frac{1}{b_n}) = (n)$. Da (n) nicht beschränkt ist, ist $(\frac{1}{b_n})$ divergent.

Aufgabe 12.4.14

1. Zum Beweis verwenden wir das Unterraumkriterium 6.2.3.

   Der Nullvektor in V ist die konstante Folge (0). Diese ist konvergent, liegt also in U.

Sind (a_n) und (b_n) konvergente Folgen, so besagt die erste Aussage von Proposition 12.4.12, dass $(a_n) + (b_n)$ konvergent ist, also in U liegt.

Sei (a_n) konvergent, und sei $\alpha \in \mathbb{R}$. Die dritte Aussage von 12.4.12 besagt, dass $\alpha(a_n)$ konvergent ist, also in U liegt. Mit dem Unterraumkriterium folgt, dass U ein Unterraum von V ist.

2. Seien (a_n) und (b_n) konvergente Folgen. Dann gilt $f((a_n) + (b_n)) = \lim(a_n + b_n) = \lim(a_n) + \lim(b_n) = f((a_n)) + f((b_n))$ mit der ersten Aussage von 12.4.12.

   Sei $\alpha \in \mathbb{R}$. Dann gilt $f(\alpha(a_n)) = \alpha \lim(a_n) = \alpha f((a_n))$ mit der dritten Aussage von 12.4.12. Es folgt, dass f linear ist.

Aufgabe 12.4.15

Sei $(a_n) = ((-1)^n)$ und $(b_n) = ((-1)^{n+1})$. Dann ist $(a_n + b_n) = (0)$, konvergiert also, während (a_n) und (b_n) divergent sind (Beispiel 12.3.3).

Aufgabe 12.4.17

Beim vierten Gleichheitszeichen von links steckt man rein, dass $(\sqrt{a_n})$ konvergent ist, aber das sollte ja bewiesen werden. Aus der Konvergenz eines Produktes von Folgen darf nicht auf die Konvergenz der Folgen, die als Faktoren auftreten, geschlossen werden.

Aufgabe 12.4.18

Mit Aufgabe 11.2.18 gilt $2^n \geq n+1$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Es folgt $2^{n-1} = \frac{2^n}{2} \geq \frac{n+1}{2}$. Somit gilt

$$0 \leq \frac{1}{2^{n-1}} \leq \frac{2}{n+1}.$$

Die Folge $(\frac{1}{n+1})$ ist eine Nullfolge, denn es gilt $0 \leq \frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{n}$, und (0) und $(\frac{1}{n})$ sind Nullfolgen. Es ist daher auch $\frac{2}{n+1}$ eine Nullfolge. Mit dem Einschnürungssatz folgt, dass $(\frac{1}{2^{n-1}})$ eine Nullfolge ist.

Lösungen der Aufgaben in 12.5

Aufgabe 12.5.5

Es gilt

$$\begin{aligned}\frac{(1+\frac{1}{n-1})^n}{(1+\frac{1}{n})^{n+1}} &= \frac{(1+\frac{1}{n-1})^n}{(\frac{n+1}{n})^{n+1}} = (1+\tfrac{1}{n-1})^n(\tfrac{n}{n+1})^{n+1} = (1+\tfrac{1}{n-1})^n(\tfrac{n}{n+1})^n \cdot \tfrac{n}{n+1} \\ &= ((1+\tfrac{1}{n-1})(\tfrac{n}{n+1}))^n \cdot \tfrac{n}{n+1} = (\tfrac{n}{n-1}\tfrac{n}{n+1})^n \cdot \tfrac{n}{n+1} = (\tfrac{n^2}{n^2-1})^n \cdot \tfrac{n}{n+1} \\ &= ((\tfrac{n^2-1)+1}{n^2-1})^n \cdot \tfrac{n}{n+1} = (1+\tfrac{1}{n^2-1})^n \cdot \tfrac{n}{n+1}\end{aligned}$$

Aufgabe 12.5.19

Wir zeigen zunächst mit Induktion nach n, dass $a_{n+1} - a_n = \frac{(-1)^n}{2^n}$ gilt. Im Induktionsanfang sei $n = 0$. Dann gilt $a_1 - a_0 = 1 = \frac{(-1)^0}{2^0}$.

Im Induktionsschritt nehmen wir an, dass $a_{n+1} - a_n = \frac{(-1)^n}{2^n}$ für ein $n \geq 0$ gilt. Dann folgt

$$a_{n+2} - a_{n+1} = \frac{a_{n+1} + a_n - 2a_{n+1}}{2} = \frac{-a_{n+1} + a_n}{2} = \frac{1}{2}\left(\frac{(-1)^{n+1}}{2^n}\right) = \frac{(-1)^{n+1}}{2^{n+1}}.$$

Mit dem Prinzip der vollständigen Induktion folgt, dass $a_{n+1} - a_n = \frac{(-1)^n}{2^n}$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt.

Um zu beweisen, dass (a_n) eine Cauchyfolge ist, müssen wir $|a_{n+k} - a_n|$ für alle $k \in \mathbb{N}$ abschätzen. Wir zeigen mit Induktion nach k, dass $|a_{n+k} - a_n| \leq \frac{1}{2^n}$ ist. Den Fall $k = 1$ haben wir bereits erledigt. Da wir gleich den Ausdruck a_{n+k-2} betrachten werden, der für $n = 0$ und $k = 1$ keinen Sinn macht, untersuchen wir den Fall $k = 2$ wie den Induktionsanfang gesondert. Sei also $k = 2$. Dann gilt

$$|a_{n+2} - a_n| = \left|\frac{a_{n+1} + a_n - 2a_n}{2}\right| = \frac{1}{2}|a_{n+1} - a_n| = \frac{1}{2^{n+1}} < \frac{1}{2^n}.$$

In der Induktionsannahme nehmen wir an, dass $k \geq 2$ ist, und dass die Abschätzung $|a_{n+i} - a_n| \leq \frac{1}{2^n}$ für alle $1 \leq i \leq k$ gilt. Dann folgt:

$$\begin{aligned}|a_{n+k} - a_n| &= \left|\tfrac{a_{n+k-1}+a_{n+k-2}-2a_n}{2}\right| = \left|\tfrac{a_{n+k-1}-a_n}{2} + \tfrac{a_{n+k-2}-a_n}{2}\right| \\ &\leq \left|\tfrac{a_{n+k-1}-a_n}{2}\right| + \left|\tfrac{a_{n+k-2}-a_n}{2}\right| \leq \tfrac{1}{2}(\tfrac{1}{2^n} + \tfrac{1}{2^n}) = \tfrac{1}{2^n}.\end{aligned}$$

Sei nun $\varepsilon > 0$ vorgegeben. Wähle $n_0 > \frac{1}{\varepsilon}$. Dann gilt für alle $n > n_0$:

$$2^n \geq n + 1 > n_0 > \frac{1}{\varepsilon},$$

wobei wir bei der ersten Abschätzung Aufgabe 11.2.18 verwendet haben. Seien nun $m, n > n_0$. Dann gilt $\frac{1}{2^m} < \varepsilon$ und $\frac{1}{2^n} < \varepsilon$, also $|a_m - a_n| < \varepsilon$. Somit ist (a_n) eine Cauchyfolge.

Aufgabe 12.5.24

Wir fangen an mit dem Intervall $[0, 1]$. Dieses halbieren wir und betrachten die rechte Hälfte. Diese halbieren wir und betrachten die linke Hälfte. Diese halbieren wir und betrachten die rechte Hälfte. Und so weiter. Also immer die Intervalle halbieren, und im Wechsel mit der rechten und der linken Hälfte weitermachen. Die Eckpunkte 0 und 1 des Intervalls sowie alle Halbierungspunkte schreiben wir mit.