Inhalt Lineare Abbildungen, Kern und Bild einer linearen Abbildung, Dimensionsformel für lineare Abbildungen, Matrizen, Rang einer Matrix, Matrizenprodukt, invertierbare Matrizen, lineare Gleichungssysteme in Matrixform

Seien U, V, W reelle Vektorräume.

1 Lineare Abbildungen

Definition Eine Abbildung $f : V \to W$ heißt *linear*, falls für alle $v, v' \in V$ und $a \in \mathbb{R}$ gilt: $f(v+v') = f(v) + f(v')$ und $f(av) = af(v)$.

Bemerkungen
a) $f : V \to W$ linear $\iff$ $f(av + a'v') = af(v) + a'f(v')$ für alle $v, v' \in V,\ a, a' \in \mathbb{R}$.
b) Ist $f : V \to W$ linear, so ist $f(0_V) = 0_W$.

Beweis: a) „$\Rightarrow$": Ist f linear, so gilt $f(av + a'v') = f(av) + f(a'v') = af(v) + a'f(v')$.
„$\Leftarrow$": Für $a = a' := 1$ folgt $f(v + v') = f(v) + f(v')$, für $a' := 0$ folgt $f(av) = af(v)$.
b) Aus $f(0) = f(0 + 0) = f(0) + f(0)$ folgt $f(0) = 0$ durch Subtraktion von $f(0)$.

Definition $\mathrm{Hom}(V, W) := \{f \mid f : V \to W \text{ linear}\}$, $\mathrm{End}(V) := \mathrm{Hom}(V, V)$.

Satz 1 a) *Für $f, g \in \mathrm{Hom}(V, W)$, $a \in \mathbb{R}$ sind $f + g : V \to W$, $af : V \to W$ wieder linear, wobei*

$$(f + g)(v) := f(v) + g(v) \quad \textit{und} \quad (af)(v) := af(v) \quad \textit{für alle } v \in V.$$

b) $\mathrm{Hom}(V, W)$ *ist mit den Verknüpfungen aus a) ein reeller Vektorraum mit dem Nullelement* $\hat{0} : V \to W,\ \hat{0}(v) := 0$ *für alle* $v \in V$.

Definition $f : V \to W$ heißt *(Vektorraum-)Isomorphismus*, falls f linear und bijektiv ist. V heißt *isomorph* zu W (in Zeichen: $V \cong W$), falls ein Isomorphismus $V \to W$ existiert.

Bemerkungen $\mathrm{id}_V : V \to V,\ v \mapsto v$ ist ein Isomorphismus.
Sind $f : V \to W,\ g : U \to V$ Isomorphismen, so ist $f \circ g : U \to W$ ein Isomorphismus.
Ist $f : V \to W$ ein Isomorphismus, so ist auch die Umkehrabbildung $f^{-1} : W \to V$ ein Isomorphismus. Ist V isomorph zu W, so ist auch W isomorph zu V.

2 Kern und Bild einer linearen Abbildung

Definition Für eine lineare Abbildung $f : V \to W$ heißt $\mathrm{Kern}\, f := \{v \in V \mid f(v) = 0\}$ *Kern* von f, $\mathrm{Bild}\, f := \{f(v) \mid v \in V\} = \{w \in W \mid \text{Es gibt ein } v \in V \text{ mit } w = f(v)\}$ *Bild* von f.
$\mathrm{Kern}\, f$ ist ein Untervektorraum von V, $\mathrm{Bild}\, f$ ist ein Untervektorraum von W.

Satz 2 (Injektivitätskriterium)
Für lineares $f : V \to W$ gilt: f injektiv $\iff$ $\mathrm{Kern}\, f = \{0\}$.

Beweis: „$\Rightarrow$": Sei f injektiv. Wegen $f(0) = 0$ ist $0 \in \mathrm{Kern}\, f$. Ist $v \in \mathrm{Kern}\, f$, also $f(v) = 0 = f(0)$, so folgt (da f injektiv ist) $v = 0$. Also ist $\mathrm{Kern}\, f = \{0\}$.
„$\Leftarrow$": Sei $\mathrm{Kern}\, f = \{0\}$. Sind $v, v' \in V$ mit $f(v) = f(v')$, so ist $f(v - v') = f(v) - f(v') = 0$, also $v - v' \in \mathrm{Kern}\, f = \{0\}$ und damit $v = v'$. Also ist f injektiv.

3 Die Dimensionsformel für lineare Abbildungen

Satz 3 (Dimensionsformel)

Sei V endlich-dimensional, $f : V \to W$ linear. Dann sind auch $\operatorname{Kern} f$ *und* $\operatorname{Bild} f$ *endlich-dimensional, und es gilt*

$$\dim \operatorname{Bild} f + \dim \operatorname{Kern} f = \dim V.$$

Satz 4

Seien V, W endlich-dimensional mit $\dim V = \dim W$. *Für lineares $f : V \to W$ gilt dann: f injektiv $\iff$ f surjektiv $\iff$ f bijektiv.*

Beweis: Es genügt zu zeigen: f injektiv $\iff$ f surjektiv.
„$\Rightarrow$": Sei f injektiv, also $\operatorname{Kern} f = \{0\}$. Die Dimensionsformel (Satz 3) liefert

$$\dim W = \dim V = \dim \operatorname{Bild} f + \dim \operatorname{Kern} f = \dim \operatorname{Bild} f;$$

da $\operatorname{Bild} f$ ein Untervektorraum von W ist, folgt $\operatorname{Bild} f = W$, also ist f surjektiv.
„$\Leftarrow$": Sei f surjektiv, also $\operatorname{Bild} f = W$. Dann ist

$$\dim \operatorname{Bild} f = \dim W = \dim V = \dim \operatorname{Bild} f + \dim \operatorname{Kern} f,$$

also $\dim \operatorname{Kern} f = 0$ und damit $\operatorname{Kern} f = \{0\}$, also f injektiv (nach Satz 2).

Satz 5 (Dimensionsformel für homogene lineare Gleichungssysteme)

Seien $m, n \in \mathbb{N}$, $v_1, \dots, v_n \in \mathbb{R}^m$ und G $\sum_{j=1}^{n} x_j v_j = 0$ ein homogenes *lineares Gleichungssystem von m Gleichungen in n Unbekannten $x_1, \dots, x_n$. Für den Lösungsraum $L(G)$ von G gilt dann*

$$\dim L(G) = n - \dim \operatorname{Lin}(v_1, \dots, v_n).$$

(Man setzt $\operatorname{rang}\{v_1, \dots, v_n\} := \dim \operatorname{Lin}(v_1, \dots, v_n)$.)

Beweis: $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \mapsto \sum_{j=1}^{n} x_j v_j$ ist eine lineare Abbildung. Es gilt

$$\operatorname{Kern} f = L(G) \quad \text{und} \quad \operatorname{Bild} f = \operatorname{Lin}(v_1, \dots, v_n).$$

Mit der Dimensionsformel (Satz 3) folgt also

$$\dim L(G) = \dim \operatorname{Kern} f = \dim \mathbb{R}^n - \dim \operatorname{Bild} f = n - \dim \operatorname{Lin}(v_1, \dots, v_n).$$

Satz 6 (Klassifikation endlich-dimensionaler Vektorräume bis auf Isomorphie)

a) *Sei V endlich-dimensional mit $n := \dim V \geq 1$. Dann gilt $V \cong \mathbb{R}^n$.*
b) *Sei V endlich-dimensional. Dann gilt: $V \cong W$ $\iff$* $\dim V = \dim W$.

Beweis: a) Sei $\{v_1, \dots, v_n\}$ eine Basis von V. Wir definieren

$$f : \mathbb{R}^n \to V, \; f\left(\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}\right) := \sum_{j=1}^{n} a_j v_j \quad \text{für alle } a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}.$$

Man zeigt leicht, dass f linear ist. f ist surjektiv, denn jedes $v \in V$ hat eine Darstellung $v = \sum_{j=1}^{n} a_j v_j$ mit $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$. Wegen $\dim V = n = \dim \mathbb{R}^n$ ist f dann auch injektiv. Also ist $f : \mathbb{R}^n \to V$ ein Isomorphismus.

b) „$\Leftarrow$“: Sei $n := \dim V = \dim W$. Für $n = 0$ ist $V = \{0_V\}$, $W = \{0_W\}$, also gilt $V \cong W$. Für $n \geq 1$ gilt nach a) $V \cong \mathbb{R}^n$, $W \cong \mathbb{R}^n$, also ist $V \cong W$.
„$\Rightarrow$“: Gelte $V \cong W$, also existiert ein Isomorphismus $f : V \to W$. Da f injektiv ist, ist $\operatorname{Kern} f = \{0\}$; weil f surjektiv ist, ist $\operatorname{Bild} f = W$. Nach der Dimensionsformel (Satz 3) gilt dann

$$\dim V = \dim \operatorname{Bild} f + \dim \operatorname{Kern} f = \dim \operatorname{Bild} f = \dim W.$$

4 Matrizen

Definition a) Eine reelle *Matrix* vom Typ (m, n) oder eine $m \times n$-*Matrix* ist ein rechteckiges Schema

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \text{ mit } a_{ij} \in \mathbb{R} \text{ für } 1 \leq i \leq m, \; 1 \leq j \leq n.$$

Schreibweise: $A = (a_{ij})_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n} = (a_{ij})$.
Sei $\operatorname{Mat}_{m,n}(\mathbb{R})$ die Menge aller $m \times n$-Matrizen über $\mathbb{R}$, $\operatorname{Mat}_n(\mathbb{R}) := \operatorname{Mat}_{n,n}(\mathbb{R})$.
b) Zwei Matrizen $A = (a_{ij})$ vom Typ (m, n), $B = (b_{ij})$ vom Typ (p, q) heißen *gleich*, wenn $m = p$, $n = q$ und $a_{ij} = b_{ij}$ für alle $i = 1, \dots, m$, $j = 1, \dots, n$ gilt.

Spezielle Matrizen

$m \times n$-Nullmatrix $\mathbf{0}_{m,n} = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$, $n \times n$-Einheitsmatrix $\mathbf{1}_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Für p, q mit $1 \leq p \leq m$, $1 \leq q \leq n$ heißen die Matrizen

$$E_{pq} := E_{p,q} := \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \vdots & & \vdots \\ \vdots & & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ \leftarrow p\text{-te Zeile} \\ \\ \\ \\ \end{array} \\ \uparrow \\ q\text{-te Spalte} \end{array}$$

Matrizeneinheiten aus $\operatorname{Mat}_{m,n}(\mathbb{R})$.

Definition Für $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij}) \in \operatorname{Mat}_{m,n}(\mathbb{R})$ und $a \in \mathbb{R}$ seien

$$A + B := (a_{ij} + b_{ij}) \in \operatorname{Mat}_{m,n}(\mathbb{R}) \quad \text{und} \quad aA := (aa_{ij}) \in \operatorname{Mat}_{m,n}(\mathbb{R}).$$

Satz 7 a) $\operatorname{Mat}_{m,n}(\mathbb{R})$ *ist mit diesen Verknüpfungen ein reeller Vektorraum mit Null* $\mathbf{0}_{m,n}$.
b) *Die Matrizeneinheiten* E_{pq}, $1 \leq p \leq m$, $1 \leq q \leq n$ *bilden eine Basis von* $\operatorname{Mat}_{m,n}(\mathbb{R})$.
c) $\dim \operatorname{Mat}_{m,n}(\mathbb{R}) = mn$.

5 Der Rang einer Matrix

Definition Sei $A \in \operatorname{Mat}_{m,n}(\mathbb{R})$. Für $j \in \{1, \dots, n\}$ bezeichne $v_j \in \mathbb{R}^m$ die j-te Spalte von A, für $i \in \{1, \dots, m\}$ sei $u_i \in \operatorname{Mat}_{1,n}(\mathbb{R})$ die i-te Zeile von A. Wir setzen

$$\begin{aligned} \operatorname{spaltenrang} A &:= \operatorname{rang}\{v_1, \dots, v_n\} &= \dim \operatorname{Lin}(v_1, \dots, v_n), \\ \operatorname{zeilenrang} A &:= \operatorname{rang}\{u_1, \dots, u_m\} &= \dim \operatorname{Lin}(u_1, \dots, u_m). \end{aligned}$$

Satz 8 (Ranggleichung) $\operatorname{spaltenrang} A = \operatorname{zeilenrang} A$.

Definition $\operatorname{rang} A := \operatorname{spaltenrang} A = \operatorname{zeilenrang} A$ heißt *Rang* von $A \in \operatorname{Mat}_{m,n}(\mathbb{R})$.

6 Das Matrizenprodukt, invertierbare Matrizen

Definition Für $A = (a_{ij}) \in \mathrm{Mat}_{m,n}(\mathbb{R})$, $B = (b_{ij}) \in \mathrm{Mat}_{n,p}(\mathbb{R})$ heißt

$$AB = (c_{ij}) \in \mathrm{Mat}_{m,p}(\mathbb{R}) \text{ mit } c_{ij} := \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj} \quad (1 \le i \le m,\ 1 \le j \le p)$$

Matrizenprodukt von A, B. (Das Produkt von A mit B ist also nur dann definiert, wenn die Spaltenzahl von A mit der Zeilenzahl von B übereinstimmt.)
Die (i,j)-Komponente von AB erhält man aus der i-ten Zeile von A und der j-ten Spalte von B:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \dots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1j} & \dots & b_{1p} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & \dots & b_{nj} & \dots & b_{np} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} & \vdots & \\ \dots & \boxed{a_{i1}b_{1j} + \ldots + a_{in}b_{nj}} & \dots \\ & \vdots & \end{pmatrix}.$$

Spezialfall Für $A \in \mathrm{Mat}_{m,n}(\mathbb{R})$, $v \in \mathbb{R}^n = \mathrm{Mat}_{n,1}(\mathbb{R})$ ist $Av \in \mathrm{Mat}_{m,1}(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^m$.

Eigenschaften der Matrizenmultiplikation
a) *Assoziativgesetz* $(AB)C = A(BC)$ für $A \in \mathrm{Mat}_{m,n}(\mathbb{R}), B \in \mathrm{Mat}_{n,p}(\mathbb{R}), C \in \mathrm{Mat}_{p,q}(\mathbb{R})$.
b) *Distributivgesetze:* $A(B + B') = AB + AB'$, $(A + A')B = AB + A'B$ für alle $A, A' \in \mathrm{Mat}_{m,n}(\mathbb{R})$, $B, B' \in \mathrm{Mat}_{n,p}(\mathbb{R})$.
c) $(aA)B = a(AB) = A(aB)$ für alle $A \in \mathrm{Mat}_{m,n}(\mathbb{R})$, $B \in \mathrm{Mat}_{n,p}(\mathbb{R})$, $a \in \mathbb{R}$.
d) $A\mathbf{1}_n = A = \mathbf{1}_m A$ für alle $A \in \mathrm{Mat}_{m,n}(\mathbb{R})$.

Das Kommutativgesetz $AB = BA$ gilt für die Matrizenmultiplikation im Allgemeinen *nicht*.

Definition $P \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$ heißt *invertierbar*, falls eine Matrix $P' \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$ existiert mit $PP' = \mathbf{1}_n = P'P$.
Dann ist $P' \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$ mit $PP' = \mathbf{1}_n = P'P$ eindeutig bestimmt, heißt die *inverse Matrix* von P und wird mit P^{-1} bezeichnet.
Beweis der Eindeutigkeit: Gilt $PP' = \mathbf{1}_n = P'P$ und auch $PP'' = \mathbf{1}_n = P''P$, so folgt $P' = \mathbf{1}_n P' = (P''P)P' = P''(PP') = P''\mathbf{1}_n = P''$.

Satz 9 (Äquivalenzsatz für Invertierbarkeit)
Für $P \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$ sind folgende Aussagen äquivalent:
(i) P *invertierbar.*
(ii) $\mathrm{rang}\, P = n$.

7 Lineare Gleichungssysteme in Matrixform

Sei G $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i$ $(1 \le i \le m)$ ein lineares Gleichungssystem mit m Gleichungen in n Unbekannten $x_1, \ldots, x_n$. Wir setzen

$$A := (a_{ij}) \in \mathrm{Mat}_{m,n}(\mathbb{R}),\ x := \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad w := \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^m.$$

Das lineare Gleichungssystem G kann dann in der Form $Ax = w$ geschrieben werden.

Satz 10 (Lösbarkeitskriterium für lineare Gleichungssysteme)
Es bezeichne $(A, w) \in \mathrm{Mat}_{m,n+1}(\mathbb{R})$ die erweiterte Matrix. Dann sind äquivalent:
(i) G *ist lösbar.* (ii) $w \in \mathrm{Bild}\, A := \{Ax \mid x \in \mathbb{R}^n\}$. (iii) $\mathrm{rang}\, A = \mathrm{rang}(A, w)$.

Satz 11 *Für $A \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$ gilt: Für jedes $w \in \mathbb{R}^n$ ist $Ax = w$ lösbar $\iff$ A invertierbar. In diesem Fall ist $Ax = w$ eindeutig lösbar durch $x = A^{-1}w$.*