Année 2020-2021

CALCUL DE PROBABILITE & ETUDE DES LOIS

ESAG-NDE DESCOGEF

Chargé : Eric AGBODJAN

Chapitre 1 ANALYSE COMBINATOIRE

DEFINITION

L'analyse combinatoire ou le dénombrement est l'ensemble des techniques mathématiques utilisées pour dénombrer les dispositions d'un ensemble fini.

I- ALGORITHME DU DENOMBREMENT

Pour dénombrer il faut préciser :

1. La structure de l'ensemble fondamental (Le référentiel) Ω

1.1. Ensemble d'éléments discernables (les éléments sont distincts deux à deux)

-

$$\Omega = \{ a , b , c , \ldots , y , z \}$$

1.2. Ensemble d'éléments indiscernables (les éléments sont identiques)

$$\Omega = \{ a , a , a , \ldots , a , a \}$$

1.3. Ensemble d'élément partiellement discernables

$$\Omega = \{ a , a , a , b , b , \ldots , y , z , z \}$$

2. La structure de la disposition

Soit une disposition de trois éléments a, b, c

- Si (a, b, c) ≠ (b, a, c) ≠ (c, a, b) =…. alors la disposition est ordonnée c'est-à-dire on tient compte de l'ordre des éléments.
- Si (a, b, c) = (b, a, c) = (c, a, d) = ….alors la disposition est non ordonnée c'est-à-dire on ne tient pas compte de l'ordre.

D e plus si (a, a, a) existe alors la répétition est permise

II- ARRANGEMENTS-PERMUTATIONS-COMBINAISON

1. ARRANGEMENTS

Une disposition ordonnée fait toujours appel à l'arrangement

1.1. Arrangement avec répétition

Une disposition ordonnée d'un ensemble à p éléments pris dans un ensemble à n éléments avec répétition est un arrangement avec répétition d'un ensemble à p éléments pris dans un ensemble à n éléments

On note :

C’est aussi le nombre d’applications d’un ensemble à p élément pris dans un ensemble à n éléments

1.2. Arrangement sans répétition

Une disposition ordonnée d’un ensemble à p éléments pris dans un ensemble à n éléments sans répétition est un arrangement sans répétition d’un ensemble à p éléments pris dans un ensemble à n éléments. On le note :

$$A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!}$$

C’est aussi le nombre d’injection d’un ensemble à p éléments pris dans un ensemble à n éléments

2. PERMUTATIONS

2.1. Permutation sans répétition

Une disposition ordonnée d’un ensemble à n éléments pris dans un ensemble à n éléments sans répétition est un arrangement sans répétition n à n qui n’est autre chose qu’une permutation de ses n éléments $A_n^n = P_n = n!$ c’est aussi le nombre de bijection

2.2. Permutation avec répétition

Pour permuter n objets dans lequel un type d’objet se répète **α** fois un autre **β** fois jusqu’à **γ** fois on utilise la formule de la permutation avec répétition.

3. COMBINAISONS:

Une disposition non ordonnée fait toujours appel à la combinaison

3.1. Combinaison sans répétition :

Une disposition non-ordonnée d’un ensemble à p éléments pris dans un ensemble à n éléments sans répétition est une combinaison sans répétition d’un ensemble à p éléments pris dans un ensemble à n élément.

$$C_n^p = \frac{n!}{p!(n-p)!}$$

3-2 Combinaison avec répétition

Une disposition non ordonnée d'un ensemble à p éléments pris dans un ensemble à n éléments est une combinaison avec répétition d'un ensemble à p élément pris dans un ensemble à n éléments

$$K_n^p = C_{n+p-1}^p$$

RECAPITULATION

<table>
<tr><th>Répétition
Disposition</th><th>Permise</th><th>Non permise</th></tr>
<tr><td rowspan="2">ORDONNEE</td><td rowspan="2">$A_n^p = n^p$</td><td>$A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!}$</td></tr>
<tr><td>$A_n^p = n!$</td></tr>
<tr><td>NON ORDONNEE</td><td>$K_n^p = C_{n+p-1}^p$</td><td>$C_n^p = \frac{n!}{p!(n-p)!}$</td></tr>
</table>

TRAVAUX DIRIGES DE DENOMBREMENT

Exercice 1

On lance sept fois une pièce de monnaie. A chaque lancée elle présente le côté pile ou face.
Combien de résultats peut-on avoir ?

Exercice 2

Avec les lettres de l'alphabet français combien de mots de :
- cinq lettres peut-on écrire ?
- de cinq lettres différentes peut-on écrire ?

Exercice 3

On demande à chacun des 4 boulangers d'un quartier quel jour hebdomadaire de fermeture lui conviendrait.

1- a) De combien de façon peuvent à priori s'énoncer les choix des 4 boulangers ?
   b) de combien de façon peuvent s'énoncer les choix si les jours de fermeture ne doivent pas se coïncider ?

2- On s'aperçoit qu'aucun n'entend fermer le samedi ni le dimanche.
   a) De combien de façon peuvent à priori s'énoncer les choix des 4 boulangers ?
   b) de combien de façon peuvent s'énoncer les choix si les jours de fermeture ne doivent pas se coïncider ?

Exercice 4

a) Quelle est la capacité (théorique) du réseau téléphonique togolais ?
Un numéro d'appel étant constitué de 7 chiffres.
b) Combien de numéros peut-on avoir dans la zone où 225 débute ?

Exercice 5

Trois joueurs A, B, C lancent chacun un dé à 6 faces.
Combien y a-t-il de résultats possibles ?
Combien y a-t-il de résultats où les points amenés sont tous différents ?

Exercice 6

Un assemblé élit son bureau, un président, un vice président et un trésorier.
Combien y a-t-il de bureaux possibles s'il y a 5 candidats ?

Exercice 7

Une assemblée élit son bureau de 3 membres, il y a 5 candidats.
Combien y a-t-il de bureaux possibles ?

Exercice 8

En utilisant les lettres du mot PARIS, combien peut-on écrire de mots de :
a) Trois lettres ?
b) Trois lettres distinctes ?
c) Mot de trois lettres distinctes dont la $2^{ème}$ est A ?

Exercice 9

Un tournoi de football se joue entre cinq équipes.
Chaque équipe doit rencontrer une fois et une seule les 4 autres.
a) Combien y a-t-il de match joué en tout ?
b) Combien chaque équipe joue-t-elle de match ?

Chapitre 2 CALCUL DE PROBABILITE

I- VOCABULAIRE ENSEMBLISTE & PROBABILISTE

On lance un dé à 6 faces

- L'ensemble des résultats possibles ou l'ensemble fondamental $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
- Obtenir un numéro pair c'est l'évènement A dont les éléments sont : $A = \{2\ ,\ 4\ ,\ 6\}$
- Obtenir un numéro impair c'est l'évènement B dont les éléments sont : $B = \{1,\ 3,\ 5\}$
- Obtenir le numéro 8 est l'événement C impossible.
- Obtenir un numéro pair est un type d'évènement C=A∩B = ∅

A et B sont des évènements incompatibles c'est-à-dire ne pouvant pas se produire simultanément

- Obtenir un numéro pair ou impair est un évènement certain

$D = A \cup B = \Omega$ l'événement D est certain

- Le complémentaire de A dans Ω $C_{\Omega}^{A} = \bar{A}$ est l'ensemble des éléments de Ω ∉ A, $\bar{A}$ est l'évènement contraire de A.

II- PROBABILITE

1. Définition

La probabilité est une application P définie sur l'ensemble des parties **Ω** noté P(Ω) à valeurs sur l'intervalle $[\ 0\ ;\ 1\ ]$ qui, à tout événement A de P(Ω) on associe sa probabilité $P(A)$

2- Conséquences et propriétés

$$\begin{aligned} P: \mathrm{P}(\Omega) &\longrightarrow [0,1] \\ A &\longrightarrow P(A) \end{aligned}$$

- $\forall A \in [0,1]\ 0 \leq P(A) \leq 1$
- $P(\Omega) = 1$; $P(\Phi) = 0$
- $P(A) + P(\bar{A}) = 1$
- $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

TRAVAUX DIRIGES DE PROBABILITE

Exercice 1

Un sac contient deux boules rouges ; trois jaunes et quatre blanches indiscernable au toucher.
Calculer la probabilité des évènements suivants :
A « Obtenir des boules de couleurs différentes »
B « Obtenir des boules de même couleurs »
C « Obtenir une boule rouge »
D « Obtenir au plus deux boules jaunes »
E « Obtenir trois boules rouges »
F « Ne pas obtenir de boules blanches »
G « Obtenir au moins une boule blanche »

Exercice 2

Une urne non transparente contient 10 boules : dont 3 rouges , 2bleus, et 5 noires.
1- On tire au hasard une boule de l'urne Quelle est la probabilité pour qu'elle soit :
  a) rouge ; b) bleu ; c) verte.
2- On tire au hasard 3boule simultanément. Quelle est la probabilité pour :
  a) Qu'elles soient toutes noires
  b) qu'il y ait 2 rouge et une bleue
  c) qu'il n'y ait aucune boule rouge.

Exercice 3

Dans une urne non transparente sont placées 15 boules dont :cinq noires numérotées de 0 à 4 ; trois boules rouges numérotées de 1 à 3 ; sept boules blanches numérotées de 1 à 7.

1- On choisit au hasard une boule dans l'urne. Quelle est la tribalité pour que :
   a- La boule soit rouge b- la boule soit noire. c- la boule porte le numéro 0
2- On tire au hasard 4 boules simultanément. Quelle est la probabilité pour que :
   a. Toutes les boules soient noires b. deux boules soient rouges c. trois boules soient numérotées 3

Exercice 4

On dispose de deux urnes, désignées respectivement par A et B.
L'urne A contient 5 boule bleues et 4 boules rouges
L'urne B contient 6 boules bleues et 5 boules rouges.
On tire une boule dans chaque urne (l'ordre de tirage dans les urnes n'est pas pris en considération). Calculer :

1- La probabilité de tirer deux boules rouges
2- La probabilité de tirer deux boules bleues
3- La probabilité de tirer deux boules de même couleur
4- La probabilité de tirer deux boules de couleurs différentes.

Chapitre 3 AXIOME DES PROBABILITES

I- AXIOME DES PROBABILITES TOTALES

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$$

Si $A\cap B=\phi$ alors $P(A\cup B)=P(A)+P(B)$

Théorème : Si les évènements A_1 , A_2 , …., A_n sont incompatibles deux à deux alors la probabilité de leur réunion est égale à la somme de leur probabilité

II- AXIOME DES PROBABILITES COMPOSEES : CONSEQUENCES DES PROBABILITES CONDITIONNELLES

La probabilité de réalisation de l'évènement A sachant que l'évènement B est réalisé est : $P_B(A)=P\left(A/B\right)=\dfrac{P(A\cap B)}{P(B)}$

La probabilité de réalisation simultanée de deux évènements est égale à la probabilité de réalisation du premier évènement que multiplie la probabilité de réalisation du second évènement sachant que le premier est réalisé

III- INDEPENDANCE EN PROBABILITE

Deux évènements A et B sont indépendants lorsque la réalisation de l'un n'est pas influencée par une quelconque réalisation préalable de l'autre

- $P\left(A/B\right)=P(A)$

$$\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=P(A) \quad\Rightarrow\quad P(A\cap B)=P(A).P(B)$$

- $P\left(B/A\right)=P(B)$

$$\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=P(B) \quad\Rightarrow\quad P(A\cap B)=P(A).P(B)$$

On déduit alors que si A et B sont indépendants alors $P(A\cap B)=P(A).P(B)$

Théorème :

Si A et B indépendants alors $\begin{cases}-A \text{ et } \overline{B}\\ -\overline{A} \text{ et } B\\ -\overline{A} \text{ et } \overline{B}\end{cases}$ sont indépendants

IV- PROBABILITE DE BAYES

Deux sacs S1 et S 2 contiennent des boucles blanches et noires dans les proportions respectives suivantes.

$$S_1 \begin{cases} p_1 \to B \\ q_1 \to N \end{cases} \quad \text{et} \quad S_2 \begin{cases} p_2 \to B \\ q_2 \to N \end{cases}$$

On choisit au hasard un sac et on en prélève au hasard une boule on constate que cette boule est blanche quelle est la probabilité qu'elle provient du sac S_2.

La formule de BAYES permet de répondre à une telle question.

$$P\left(S_2 / B \right) = \frac{P(S_2 \cap B)}{B}$$

$$= \frac{P(S_2 \cap B)}{P(S_1 \cap B) + P(S_2 \cap B)}$$

$$P\left(S_2 / B \right) = \frac{P(S_2).P\left(B / S_2 \right)}{P(S_1).P\left(B / S_1 \right) + P(S_2).P\left(B / S_2 \right)}$$

TRAVAUX DIRIGES DE PROBABILITES CONDITIONNELLES

Exercice 1

A la cafeteria, dans la vitrine pâtisserie, 60 % des gâteaux sont à base de crème. Parmi ceux-ci 30 % ont aussi des fruits.
Parmi ceux qui n'ont pas de crème, 80% ont des fruits.
On choisit un gâteau au hasard :

1- Calculer la probabilité des événements suivants :
   a. Avoir un gâteau à base de crème et comportant des fruits
   b. Avoir un gâteau avec des fruits mais sans crème
   c. Déduire la probabilité d'avoir un gâteau avec des fruits.

2- Le gâteau pris au hasard ne contient pas de fruit. Quelle est la probabilité qu'il soit à base de crème ?

On note **C** « l'événement le gâteau à base de crème » et **F** « l'événement le gâteau contient des fruits »

Exercice 2

Une entreprise vend des calculatrices d'une certaine marque. Le service après-vente s'est aperçu qu'elle pouvait présenter deux types de défaut, l'un lié au clavier et l'autre lié à l'affichage. Des études statistiques ont permis à l'entreprise d'utiliser la modélisation suivante : la probabilité pour une calculatrice tirée au hasard de présenter un défaut de clavier est égale à 0,04.
En présence du défaut de clavier la probabilité que la calculatrice soit en panne d'affichage est de 0,03. Alors qu'en absence de défaut de clavier, la probabilité de ne pas présenter le défaut d'affichage est de 0,94.
On choisit une calculatrice au hasard.

1- Calculer la probabilité pour que la calculatrice présente les deux défauts.
2- Calculer la probabilité pour qu'elle présente le défaut d'affichage mais pas le défaut de clavier.
3- En déduire la probabilité de présenter le défaut d'affichage.
4- Calculer la probabilité pour qu'elle ne présente aucun défaut.

On note **C** « la calculatrice présente une panne de clavier » et **A** « la calculatrice présente une panne d'affichage »

Exercice 3

Une enquête a montré que :

- Avant de passer l'épreuve théorique de permis de conduire (c'est-à-dire le code) 75% des candidats ont travaillé très sérieusement cette épreuve ;
- Lorsqu'un candidat a travaillé très sérieusement l'épreuve, il obtient le code dans 80% des cas ;
- Lorsqu'un candidat n'a pas beaucoup travaillé, il n'obtient pas le code dans 70% des cas.

On interroge un candidat qui vient qui vient de passer l'épreuve théorique et on note **T** l'événement « Le candidat a travaillé très sérieusement » et **R** « Le candidat a réussi »

1-a) Calculer la probabilité de l'événement « Le candidat a travaillé sérieusement et il a obtenu le code »
   b) déterminer la probabilité qu'un candidat réussisse l'épreuve théorique

2- Le candidat interrogé vient d'échouera ; quelle est la probabilité qu'il ait travaillé sérieusement ?

Exercice 4

Une petite entreprise de textile commercialise des nappes et des lots de serviettes assorties. Quand un client se présente, il achète au plus une nappe et un lot de serviette.
La probabilité pour qu'un client achète la nappe est 0,2.
La probabilité pour qu'un client achète le lot de serviette quand il a acheté la nappe est de 0,7 et la probabilité qu'il achète le lot de serviette quand il n'a pas acheté la nappe est 0,1.

1- Déterminer la probabilité qu'un client achète les deux articles
2- En déduire la probabilité que la client achète le lots de serviette.
3- Calculer la probabilité pour qu'un client achète l'un au moins des deux articles
4- On choisit un client qui a acheté un lot de serviette. Quelle est la probabilité qu'il ait acheté la nappe ?

On note **N** « le client a acheté la nappe » et **S** « le client a acheté le lot de serviette »

Exercice 5

Une société de la place a confié le recrutement de ses agents à un cabinet. On a en tout 1000 postulants. Le dépouillement des dossiers a permis de constater que 8 % des candidats parlent couramment l'anglais, parmi ceux-ci, 15 % ont de solides notions en informatique. Et parmi ceux qui ne parlent pas anglais, 5% ont de solides notions en informatique.
On vous demande de déterminer :

1- L'effectif des candidats qui ont les deux compétences
2- L'effectif des candidats qui ne parlent pas couramment anglais mais qui ont de solides notions en informatique
3- L'effectif des candidats n'ayant pas de solides notions en informatiques et ne parlant pas couramment l'anglais
4- L'effectif des candidats qui ont au moins l'une des compétences
5- On a retenu le dossier d'une personne qui a de solides notions en informatiques. Quelle est la probabilité qu'elle ne parle pas couramment l'anglais ?

On note **A** « l'événement le candidat parle couramment l'anglais » et **I** « l'événement le candidat a de solides notions en informatique »

Exercice 6

A la ferme de la poule pondeuse, on produit des œufs de trois tailles différentes :
Les petits dans la proportion de 20 % ; des moyens dans la proportion de 50 % et des gros, dans la proportion de 30 %.
Ils sont de deux qualités :

- Ordinaire, étiquetés sous la dénomination « ŒUFS FRAIS »
- Supérieure, étiquetés sous la dénomination « ŒUFS EXTRA »

On a remarqué que

- 80 % des petits œufs sont de qualité ordinaire ; 50 % des œufs moyens sont de qualité ordinaire
- 80 % des gros œufs sont de qualité supérieure.

1- On prélève un œuf au hasard. Quelle est la probabilité qu'il soit :
a- de petite taille et de qualité ordinaire ? **b**- de qualité ordinaire ? **c**- de qualité supérieure
2- Calculer la probabilité pour un œuf d'être gros et de qualité supérieure ?
3- On prend au hasard un œuf de qualité supérieure, quelle est la probabilité pour qu'il soit gros ?

Exercice 7

Une usine fabrique des stylos à bille. Une étude statistique a montré que 90 % de la production ne présente aucun défaut. Chaque stylo est soumis à un contrôle de fabrication.
Ce contrôle refuse 94 % des stylos avec défaut et accepte 92 % des stylos sans défaut.
Le contrôle a rejeté un stylo. Quelle est la probabilité que ce soit une erreur ?

Exercice 8

Une étude des adultes d'une ville montre que 8 % d'eux ont des problèmes sociaux. Parmi ceux-ci 30 % sont fortement alcooliques, 60 % consomment modérément l'alcool et 10 % ne le consomment pas du tout.
Parmi ceux qui n'ont pas de problèmes sociaux, 5 % sont fortement alcooliques, 65 % consomment modérément l'alcool et 30 % n'en consomment pas du tout.

1- Un adulte est choisi au hasard, quelle est la probabilité qu'il soit fortement alcoolique ?
2- Si une personne est fortement alcoolique, quelle est la probabilité qu'elle ait des problèmes sociaux ?
3- Si une personne a des problèmes sociaux quelle est la probabilité pour qu'elle soit fortement alcoolique ?
4- Si une personne ne consomme pas du tout l'alcool quelle est la probabilité qu'elle ait des problèmes sociaux ?

Exercice 9

Une entreprise fabrique des appareils électroniques. La probabilité qu'un appareil ainsi fabriqué fonctionne parfaitement est de 9/10.
1- On note F l'événement : « l'appareil fonctionne parfaitement ».
On fait subir à chaque appareil un test avant sa livraison. On constate que :
-quand un appareil est en parfait état de fonctionnement, il est toujours accepté à l'issue du test ;
-quand un appareil n'est pas en parfait état de fonctionnement, il peut être néanmoins accepté, avec une probabilité de1/11.
On note T l'événement « l'appareil est accepté à l'issue du test.

a) Calculer la probabilité des événements ($T \cap F$) et ($T \cap \overline{F}$)
b) En déduire la probabilité de T

2-Un appareil est accepté à l'issu du test. Calculer la probabilité qu'il fonctionne parfaitement.

NB : *Les résultats de l'exercice 3 sous forme de fraction irréductible*

Exercice 10

Dans la région de Dakar, 5% des PME (Petite et moyenne Entreprise) font faillite dans une année .Ce pourcentage est de 1% pour les grandes entreprises .Une entreprise de la ville de Dakar fait faillite.
Quelle est la probabilité que ce soit une PME sachant qu'il y'a 70% de PME dans la région de Dakar ?

Exercice 11

Une entreprise en matériel informatique fabrique des clés USB ; 4% des clés USB fabriquées sont défectueuses. A l'issue de cette fabrication, les clés sont contrôlées et triées en trois lots : Clés USB marquées, celles-ci portent la marque de l'entreprise ; Clés USB démarquées ; Clés USB à détruire.
L'unité de contrôle rejette 3% des bonnes clés USB et 95% des clés USB défectueuses.
A : l'événement « la clé USB est acceptée » ; D : l'événement « la clé USB est défectueuse »

1. quelle est la probabilité pour qu'une clé USB soit défectueuse et acceptée ?
2. quelle est la probabilité pour qu'une clé USB soit bonne et refusée ?
3. Une clé USB est rejetée. Quelle est la probabilité qu'elle soit bonne.

Exercice 12

Une usine fabrique des pièces dont 1,8 % sont défectueuses. Le contrôle des pièces s'effectue selon les probabilités conditionnelles suivantes :

- sachant qu'une pièce est bonne, elle est acceptée avec une probabilité de 0,97 ;
- sachant qu'une pièce est mauvaise, elle est refusée avec une probabilité de 0,99.

1- Quelle est la probabilité qu'une pièce soit défectueuse ?
2- a) Calculer la probabilité qu'une pièce soit défectueuse et acceptée.
b) Calculer la probabilité qu'une pièce soit bonne et refusée.
c) Calculer la probabilité qu'il y ait une erreur dans le contrôle.

Exercice 13

Dans un rayons d'un magasin ouvert 10 h par jour ; on peut trouver un vendeur conseil Jean pendant 6 heures, en l'absence de jean , un vendeur conseil Paul, pendant trois heures et on ne trouve pas de vendeur conseil pendant une heure.
Quand un client se présente au rayon, il cherche le vendeur-conseil :

- S'il est conseillé par Jean (J), il accepte le produit dans 70 % des cas ;
- S'il est conseillé par Paul (P), il achète le produit dans 50 % des cas ;
- S'il n'est pas conseillé du tout (N), il achète dans 20 % des cas.

1- Un client se présente au magasin, quelle est la probabilité :
a) qu'il soit conseillé par Jean et qu'il achète le produit ?
b) qu'il achète le produit ?
2- Un client se présente au magasin et achète le produit, quelle est la probabilité qu'il ait été conseillé par Jean ?
3- Un client se présente au magasin et n'achète pas le produit, quelle est la probabilité qu'il n'ait pas été conseillé ?

Exercice 14

Une entreprise en matériel informatique fabrique des clés USB ; 4% des clés USB fabriquées sont défectueuses. A l'issue de cette fabrication, les clés sont contrôlées et triées en trois lots : Clés USB marquées, celles-ci portent la marque de l'entreprise ; Clés USB démarquées ; Clés USB à détruire.
L'unité de contrôle rejette 3% des bonnes clés USB et 95% des clés USB défectueuses.
A : l'événement « la clé USB est acceptée » ; D : l'événement « la clé USB est défectueuse »

1. quelle est la probabilité pour qu'une clé USB soit défectueuse et acceptée ?
2. quelle est la probabilité pour qu'une clé USB soit bonne et refusée ?
3. Une clé USB est rejetée. Quelle est la probabilité qu'elle soit bonne.

Chapitre 4 VARIABLES ALEATOIRES

I- DEFINITION

Toute grandeur mesurable dont l'effet est lié au hasard est une variable aléatoire.
On distingue deux types de variables aléatoires :

- variable aléatoire discrète ;
- variable aléatoire continue.

II- ETUDE DE LA VARIABLE ALEATOIRE CONTINUE

1- Domaine :

Le domaine de définition d'une variable aléatoire discrète X est l'ensemble des valeurs possibles qu'on peut attribuer à X .

Exemple :

On lance deux fois de suite une pièce de monnaie. Le côté pile fait gagner 3 francs et le côté face fait perdre 2 francs puis l'on désigne par X la variable aléatoire égale au gain algébrique du joueur. Quelles sont les valeurs possibles qu'on peut attribuer à X .

2- Loi de probabilité :

La loi de probabilité d'une variable aléatoire discrète X est un tableau dans lequel à chaque valeur prise par la variable aléatoire X on fait correspondre sa probabilité.

x_i	x_1	x_2	. . .	x_i
$P(X = x_i)$	p_1	p_2	. . .	p_i

NB : Avec $\sum p_i = 1$

3- Espérance mathématique & variance :

L'espérance mathématique d'une variable aléatoire X est le réel :

$$E(X) = \sum x_i . p_i$$

La variance d'une variable aléatoire discrète X est le réel positif ou nul :

$$V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 \text{ avec } E(X^2) = \sum x_i^2 . p_i$$

4- Fonction de répartition :

La fonction de répartition de la variable aléatoire discrète X est :

$$F(x) = P(X < x)$$

Application :

Un sac contient une boule rouge, deux boules jaunes et quatre boules blanches indiscernable au toucher. On choisit simultanément et au hasard trois boule du sac et l'on désigne par X la variable aléatoire désignant le nombre de boules blanche obtenu.

1- Quelles sont les valeurs possibles qu'on peut attribuer à X ?
2- Etablir la loi de probabilité de X .
3- Calculer l'espérance mathématique & la variance de X .

TRAVAUX DIRIGES VARIABLES ALEATOIRES

Exercice 1

Un sac de cartes contient : deux As, trois Rois et deux Dames.
Le tirage d'un As rapporte 5 points, celui d'un Roi rapporte 2 points et celui d'une Dame coûte 1 point.
On tire simultanément deux cartes du sac et on désigne par X la variable aléatoire égale à la somme des points obtenus en prélevant les deux cartes

1- Etablir la loi de probabilité de X
2- Calculer l'espérance mathématique et la variance de X

Exercice 2

Pour la promotion de son nouveau produit, Une société organise un jeu tombola avec 50 billets numérotés de 01 à 50.

- les billets dont les numéros se terminent par 0 gagnent 5000 francs chacun ;
- les billets dont les numéros se terminent par 2 ou 5 gagnent 3000 francs chacun ;
- les billets dont les numéros se terminent par 1, 3 ou 7 gagnent 1000 francs chacun ;
- les autres billets ne gagnent rien.

Chaque billet est vendu à 1000 francs. Un client achète un billet et on désigne par X la variable aléatoire égale au gain algébrique du joueur

1- Etablir la loi de probabilité de X
2- Calculer l'espérance mathématique et la variance de X

Exercice 3

Une urne contient trois jetons verts, chacun d'eux portant le numéro 1 et quatre jetons noirs chacun d'eux portant le numéro 2.

1- On tire simultanément deux jetons de l'urne. Quelle est la probabilité d'obtenir :
   a- Deux jetons verts
   b- Un jeton de chaque couleur
2- On tire simultanément trois jetons de l'urne et l'on considère la variable aléatoire X qui associe à chaque tirage de trois jetons le total des nombre obtenus.
   a- Etablir la loi de probabilité de X
   b- Calculer l'espérance mathématique et la variance de X

Exercice 4

Un tenancier présente le jeu suivant :
Tout joueur effectue une mise égale à 34 €
Il tire ensuite un jeton parmi 17 jetons numérotés respectivement 1, 2, 3, ..., 17.

- Si le numéro du jeton tiré est un multiple de trois, le joueur reçoit 20 €
- Si ce numéro est un multiple de 5 (15 excepté), le joueur reçoit 50 €
- Si ce numéro est un multiple de 7, le joueur reçoit 88 €
- Si ce numéro est le 8 le joueur reçoit 134 €

Le joueur est perdant dans toutes les autres éventualités et dans ce cas ne reçoit rien.

1- Enoncer la loi de probabilité de la variable aléatoire « Somme reçue par le joueur ».
2- Calculer l'espérance mathématique de cette variable aléatoire.
3- Calculer sa variance
4- Calculer le bénéfice moyen réaliser par l'organisateur du jeu après que 100 joueurs aient chacun joué une partie.

Exercice 5

Une association organise une tombola. Tous les billets, au nombre de 500, sont vendus.
L'un des billets permet de gagner un lot d'une valeur de 62 000 francs, 9 billets permettent chacun de gagner un lot d'une valeur de 7 000 francs, 50 billets permettent chacun de gagner un lot d'une valeur de 500 francs, les autres sont perdants.

1-On choisit au hasard un billet. Tous les billets ont la même probabilité d'être choisis.

Déterminer la probabilité de chacun des évènements suivants :

A « le billet choisi gagne un lot d'une valeur de 7 000 francs » ;

B « le billet choisi est perdant »

2-Les billets sont vendus 500 francs. Que rapportera la tombola au trésorier de l'association ?

3-On appelle gain d'un billet la différence entre le montant du lot et le prix d'achat du billet.

On désigne par X la variable aléatoire qui associe à chaque billet choisi au hasard le gain de ce billet.

a- Donner les différentes valeurs de X
b- Donner la loi de probabilité de X
c- Calculer l'espérance mathématique.

Exercice 6

A leur inscription, dans leur établissement les étudiants doivent souscrire une assurance scolaire ; deux types de contrats annuels sont proposés. D'après des études statistiques, le contrat A dont le coût est de 20 € est choisi avec une probabilité de 0,7 et le contrat B dont le coût est de 30 € est choisi avec une probabilité de 0,3. De plus, l'établissement propose une adhésion facultative au foyer coopératif, d'un montant de 15 €. Indépendamment du contrat d'assurance choisi, 40% des étudiants prennent une carte d'adhérent du foyer.
On note :

- A l'évènement : « l'étudiant a choisi le contrat A » ;
- B l'évènement : « l'étudiant a choisi le contrat B » ;
- F l'évènement : « l'étudiant est adhérent du foyer ».

1. Quelle est la probabilité qu'un étudiant ait pris le contrat B et soit adhérent du foyer ?
2. A chaque étudiant pris au hasard, on associe le coût X de son inscription (assurance scolaire plus adhésion éventuelle au foyer) ;

a) Quelles sont les valeurs possibles de ce coût ?

b) Etablir la loi de probabilité de ce coût et présenter le résultat dans un tableau.

c) Calculer l'espérance mathématique de cette loi et interpréter

Exercice 7

Un tenancier présente le jeu suivant :
Tout joueur effectue une mise égale à 34 €
Il tire ensuite un jeton parmi 17 jetons numérotés respectivement 1, 2, 3, ..., 17.

- Si le numéro du jeton tiré est un multiple de trois, le joueur reçoit 20 €
- Si ce numéro est un multiple de 5 (15 excepté), le joueur reçoit 50 €
- Si ce numéro est un multiple de 7, le joueur reçoit 88 €
- Si ce numéro est le 8 le joueur reçoit 134 €

Le joueur est perdant dans toutes les autres éventualités et dans ce cas ne reçoit rien.

1- Enoncer la loi de probabilité de la variable aléatoire « Somme reçue par le joueur ».
2- Calculer l'espérance mathématique de cette variable aléatoire.
3- Calculer sa variance
4- Calculer le bénéfice moyen réaliser par l'organisateur du jeu après que 100 joueurs aient chacun joué une partie.

Exercice 8

Une association organise une tombola. Tous les billets, au nombre de 500, sont vendus.
L'un des billets permet de gagner un lot d'une valeur de 62 000 francs, 9 billets permettent chacun de gagner un lot d'une valeur de 7 000 francs, 50 billets permettent chacun de gagner un lot d'une valeur de 500 francs, les autres sont perdants.

1-On choisit au hasard un billet. Tous les billets ont la même probabilité d'être choisis.
Déterminer la probabilité de chacun des évènements suivants :
A « le billet choisi gagne un lot d'une valeur de 7 000 francs » ;
B « le billet choisi est perdant »

2-Les billets sont vendus 500 francs. Que rapportera la tombola au trésorier de l'association ?

3-On appelle gain d'un billet la différence entre le montant du lot et le prix d'achat du billet.
On désigne par X la variable aléatoire qui associe à chaque billet choisi au hasard le gain de ce billet.

a- Donner les différentes valeurs de X
b- Donner la loi de probabilité de X
c- Calculer l'espérance mathématique.

Exercice 9

A leur inscription, dans leur établissement les étudiants doivent souscrire une assurance scolaire ; deux types de contrats annuels sont proposés. D'après des études statistiques, le contrat A dont le coût est de 20 € est choisi avec une probabilité de 0,7 et le contrat B dont le coût est de 30 € est choisi avec une probabilité de 0,3. De plus, l'établissement propose une adhésion facultative au foyer coopératif, d'un montant de 15 €. Indépendamment du contrat d'assurance choisi, 40% des étudiants prennent une carte d'adhérent du foyer.

On note :

- A l'évènement : « l'étudiant a choisi le contrat A » ;
- B l'évènement : « l'étudiant a choisi le contrat B » ;
- F l'évènement : « l'étudiant est adhérent du foyer ».

1. Quelle est la probabilité qu'un étudiant ait pris le contrat B et soit adhérent du foyer ?
2. A chaque étudiant pris au hasard, on associe le coût X de son inscription (assurance scolaire plus adhésion éventuelle au foyer) ;
a) Quelles sont les valeurs possibles de ce coût ?
b) Etablir la loi de probabilité de ce coût et présenter le résultat dans un tableau.
c) Calculer l'espérance mathématique de cette loi et interpréter

Chapitre 5 ETUDE DES LOIS DE LA VARIABLE ALEATOIRE DISCRETE

I- LOI BINOMILE

Lorsqu'une expérience aléatoire à deux issues (succès et échec) et qu'elle se répète dans les mêmes conditions n fois de suite il y a alors indépendance entre les épreuves répétées. La variable aléatoire X égale au nombre de succès obtenus à l'issue ou au terme des n épreuves suit une loi binomiale de paramètre n (égale au nombre de fois que l'on répète l'épreuve) et p (la probabilité liée au succès).

On note :

La probabilité d'obtention de k succès au terme des n épreuves est donnée par la formule
$P(X = k) = C_n^k \, p^k q^{n-k}$; avec $q = 1 - p$ et $k \in \{ 0 , 1 , 2 , \ldots , n \}$
L'espérance mathématique de la loi binomiale est $E(x) = np$ et sa variance est $V(X) = npq$

APPLICATION

A un jeu de tir une personne à une chance sur 5 de toucher la cible on lui remet 10 projectiles et on désigne par X la variable aléatoire égale au nombre de fois qu'elle touche la cible.

1- Quelle est la loi suivie par la variable aléatoire X
2- Calculer la probabilité des évènements suivant
   a- Toucher la cible deux fois exactement
   b- Ne pas toucher la cible
   c- Toucher la cible au plus deux fois
   d- Toucher la cible au moins une fois
3- Calculer l'espérance mathématique et la variance de X

TRAVAUX DIRIGES LOI BINOMIALE

Exercice 1

Dans une entreprise, une machine produit des pièces dont les dimensions très précises doivent être respectées.
Après un premier réglage, on constate une proportion de **30%** de pièces défectueuses. On examine **5** pièces choisies au hasard dans la production. Soit X la variable aléatoire : « nombre de pièces défectueuses parmi les **5** ».

1- Quelle est la loi suivie par d X ?
2- Calculer l'espérance et l'écart-type de X .
3- Quelle est la probabilité que deux des pièces soient défectueuses ?
4- Quelle est la probabilité qu'il n'y ait pas plus d'une pièce défectueuse ?

Exercice 2

Un négociant vend le même jour, cinq ordinateurs identiques à des particuliers. Sachant que la probabilité pour que ce type d'ordinateur soit en état de fonctionner deux ans après est 0,7 ;
Calculer la probabilité pour :
1- que les cinq ordinateurs soient en service deux années plus tard ;
2- que les cinq ordinateurs soient hors service deux années plus tard ;
3- que trois ordinateurs soient hors service ;
4- que deux ordinateurs au plus soient hors service

Exercice 3

Un sondage réalisé en avril 2005, mentionne que 10% de l'ensemble des Bruxellois ayant accès à Internet avaient déjà réalisé un achat par voie électronique. On choisit dix Bruxellois ayant accès à internet pour connaître s'ils ont effectué ou non un achat par voie électronique.
Soit X la V.A. égale au nombre de bruxellois ayant effectué un achat par voie électronique
1- Quelle est la loi suivie par X
2- Quelle est la probabilité d'observer :

a) 2 Bruxellois (sur les 10) ayant effectué un achat par voie électronique ?
b) Au moins 3 Bruxellois ayant déjà effectué un achat par voie électronique ?
c) Au plus 3 Bruxellois ayant déjà effectué un achat par voie électronique ?
d) De 2 à 4 Bruxellois ayant déjà effectué un achat par voie électronique ?

Exercice 4

En raison vraisemblablement de l'augmentation des taux d'intérêt, une société constate que 30% de ses comptes-clients sont demeurés impayés. Un expert-comptable tire au hasard un échantillon de 5 comptes-clients.
Soit X la V.A. égale au nombre de compte en souffrance.
1- Quelle est la loi suivie par X
2- Calculer la probabilité des événements suivants

a- aucun des 5 comptes n'est en souffrance.
b- Il y en a exactement 2 qui sont impayés.
c- Au moins 3 comptes sont impayés.
d- Il y a exactement une proportion de 20% d'impayés.

II-LOI DE POISSON

La loi de poisson ou loi des petites probabilités ou encore loi des phénomènes rares se rencontre dans les processus suivants :

- Nombre de voitures arrivant à un péage d'autoroute sur une petite période de temps donnée ;
- Nombre d'appels téléphoniques reçu au niveau d'un standard téléphonique dans un laps de temps
- Nombre d'erreurs dans une longue suite d'opérations
- Nombre de personne arrivant à un guichet de vente sur une petite période de temps Δt

La loi de poisson est recommandée lorsque la réalisation de l'événement est au cours d'une petite période de temps Δt est proportionnelle à Δt, la probabilité de deux apparition de l'événement sur la mène période Δt est négligeable.
Lorsque la variable aléatoire suit la loi de poisson le paramètre est m

La fonction densité de probabilité de la loin de poisson est $P(X = x) = \dfrac{e^{-m} m^{x}}{x\,!}$

La loi de poisson est une loi particulière son espérance mathématique est égale à sa variance
$E(X) = V(X) = m$

TRAVAUX DIRIGES LOI DE POISSON

Exercice 1

Une société de location de voitures a calculé que la probabilité qu'une de ses voitures louées ait un accident dans une journée est 0,0004. Les voitures sont supposées indépendantes les unes des autres.
Chaque jour 10 000 voitures de la société sont en circulation. Soit X la variable aléatoire nombre de voiture de la société ayant un accident dans une journée.
1- Quelle est la loi suivie par X ?
2- Calculer la probabilité des événements suivants :

a- Le nombre des accidents en une journée est égal à 4.
b- Il y a au moins deux accidents.
c- Le nombre des accidents en une journée est au plus égal à 5 mais qu'il ya au moins deux accidents.

Exercice 2

Une étude statistique a permis d'estimer la probabilité qu'une personne choisie au hasard dans la clientèle d'un supermarché effectue un achat au rayon crèmerie est de 0,025.
On observe 200 clients pris au hasard dans ce supermarché. On suppose que ces clients font leurs achats en toute indépendance. Soit X la variable aléatoire mesurant le nombre de personne ayant fait un achat au rayon crèmerie.
1- quelle est la loi suivie par la variable aléatoire X
2- calculer la probabilité des événements suivants :
a- Avoir exactement deux clients ayant réalisé un achat dans ce rayon.
b- Avoir au moins deux clients ayant réalisé un achat dans ce rayon.
c- Avoir au pus deux clients ayant réalisé un achat dans ce rayon.
d- Que le nombre de clients ayant réalisé un achat au rayon soit compris entre 2 et 6.

Exercice 3

Dans l'entreprise « IC » la probabilité de rupture de stock en une semaine donnée est de $\frac{1}{13}$.
Soit X la variable aléatoire égale au nombre de ruptures de stock pendant une année d'activité de l'entreprise commerciale.
1- Quelle est la loi suivie par la variable aléatoire X
2- Déterminer son espérance mathématique et son écart-type
3- calculer la probabilité des événements suivants

a- Avoir au plus 2 ruptures de stock dans l'année
b- Ne pas avoir de rupture de stock dans l'année
c- Avoir au moins une fois une rupture de stock dans l'année