

Estatística aplicada

Tópicos especiais em Estatística Aplicada

Prof. Celso J. Munaro (cjmunaro@gmail.com)

XI - Controle estatístico de qualidade (SQC)

Introdução

Objetivo de SQC: melhoria da qualidade dos produtos.

Se cada peça de um carro é produzida com requisitos mínimos de qualidade, a probabilidade de que o carro como um todo tenha boa qualidade aumenta.

Introdução

O planejamento de experimentos estudados permite identificar fatores que afetam a qualidade e escolher valores que permitam atender determinados requisitos.

Controle estatístico de qualidade

1924: Dr. Walter A. Shewhart, Bell Telephone Laboratories

Gráficos de controle para auxiliar processos de manufatura

1924: Harold F. Dodge and Harry G. Romig, aplicaram e aperfeiçoaram os métodos na mesma empresa

A indústria japonesa se beneficiou muito desta metodologia e se destacou entre outros países pela qualidade dos produtos gerados

Controle estatístico de processos

O controle estatístico de processos em tempo real visa reduzir a variabilidade nos produtos gerados.

Controle estatístico de processos

Ferramentas para controle estatístico de processos:

- Histograma
- Gráfico de Pareto
- Diagrama causa-efeito
- Gráfico de controle
- Diagrama de dispersão

Introdução aos gráficos de controle

A variabilidade em processos decorre de causas comuns e de causas especiais.

Também se usa a terminologia causas aleatórias e causas atribuíveis.

A primeira é inerente ao processo de produção, e se devem a pequenas causas que não podem ser evitadas.

A segunda gera desvios maiores e se deve a algum fator que deve ser investigado

Introdução aos gráficos de controle

Seja o procedimento de assar um bolo.

A repetição do processo de assar bolos gera bolos levemente diferentes, devido a fatores aleatórios sem controle.

Causas especiais ao assar o mesmo bolo podem ser uma receita que esquece o fermento em pó como ingrediente necessário. A falta de fermento em pó é uma causa especial, pois "causa" a falha do processo de assar bolos. Portanto, é necessário descobrir por que o processo de assar bolos falhou primeiro (falta de fermento em pó) e depois corrigir.

Gráfico de controle

Seu objetivo é detectar rapidamente desvios e produzir correções

Elementos:

CL, UCL, LCL

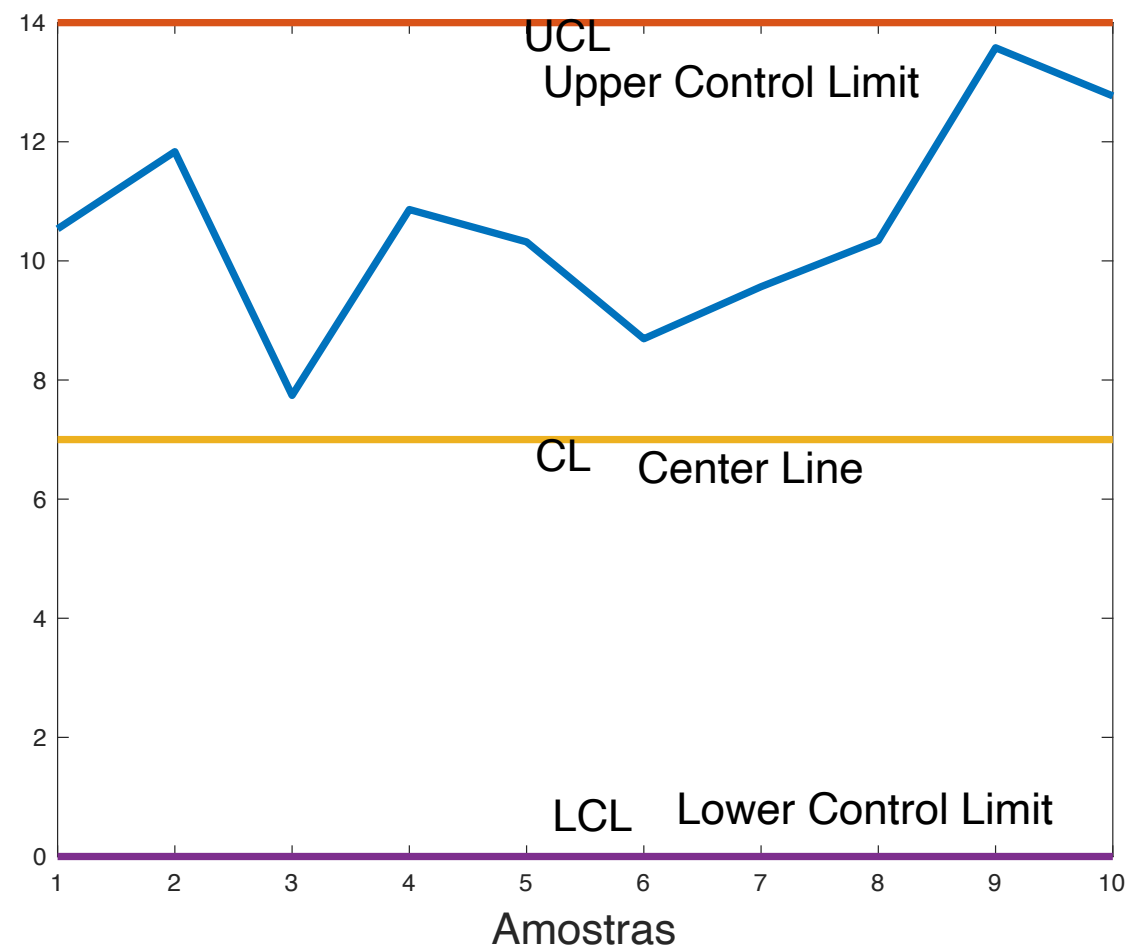


Gráfico de controle

Os limites de controle são escolhidos de modo que quando o processo está em controle, a variável está quase sempre dentro dos limites [UCL LCL].

Um ponto fora dos limites requer investigação.

Gráfico de controle

Melhoria de processos
usando gráfico de controle

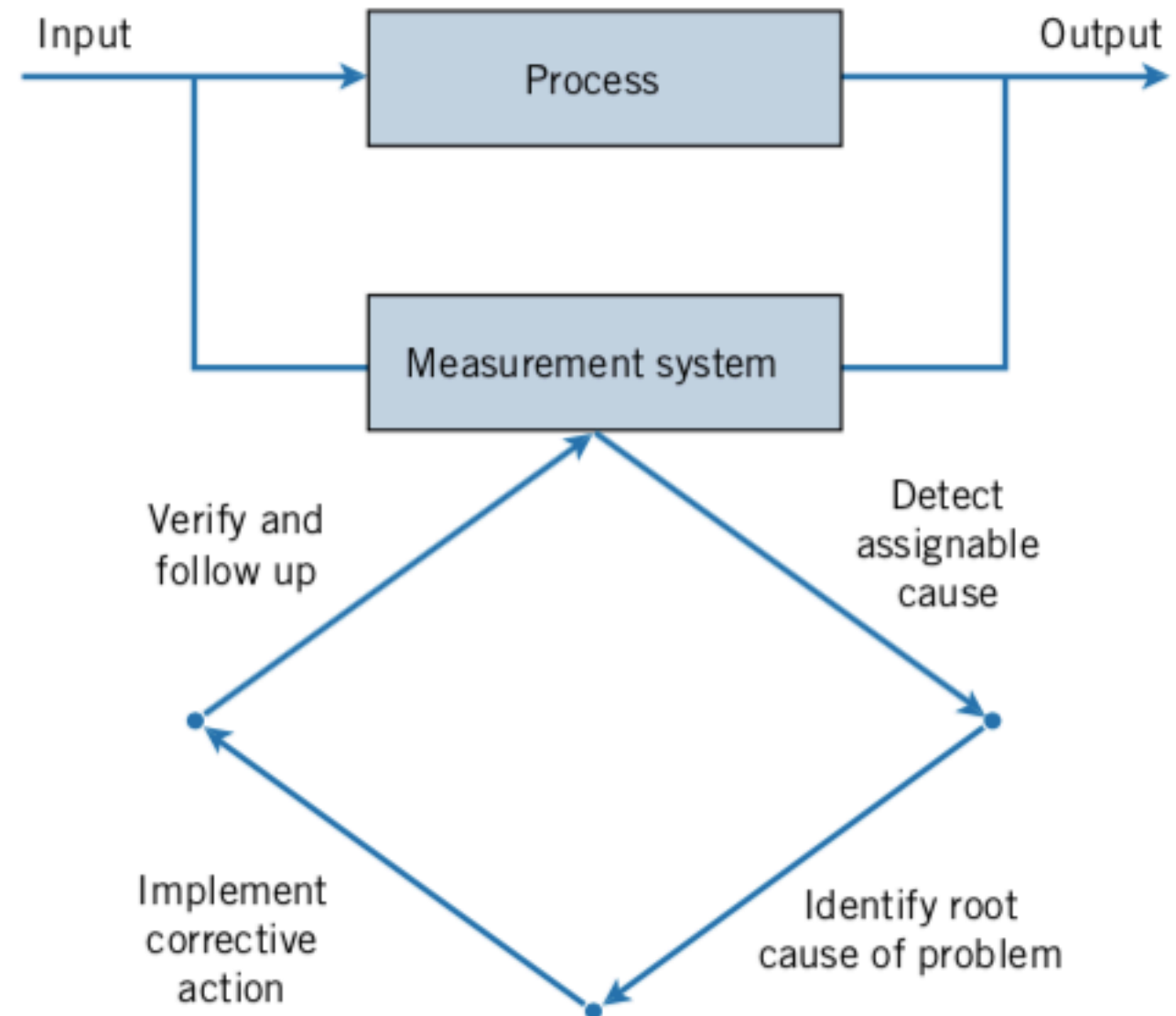


Gráfico de controle

Gráfico de controle e teste de hipótese.

O gráfico de controle é um teste de hipótese de que o processo está em estado de controle estatístico.

Um ponto dentro dos limites corresponde a falha ao rejeitar a hipótese de que o processo não está em controle estatístico.

Um ponto fora corresponde a rejeitar a hipótese de que o processo está em controle estatístico.

Projeto de gráficos de controle

Exemplo: Na fabricação de anéis de pistão de motores de automóveis, o diâmetro interno dos anéis é uma característica crítica de qualidade. A média do diâmetro interno do anel é de 74 milímetros, e sabe-se que o desvio padrão do diâmetro do anel é de 0,01 milímetros

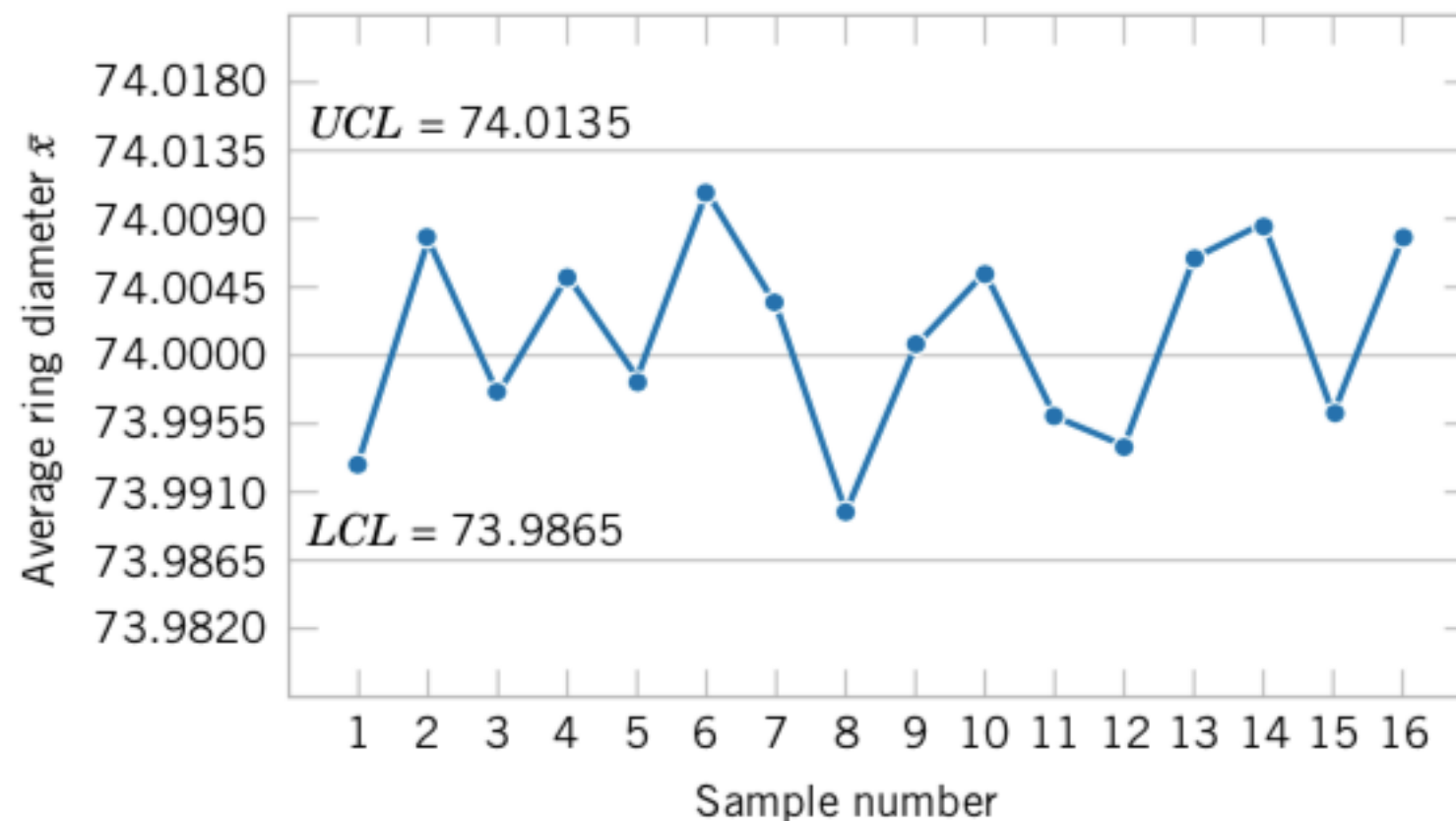


Gráfico de controle do exemplo

Projeto de gráficos de controle

A cada 1h, 5 anéis são escolhidos aleatoriamente e sua média \bar{x} é calculada e plotada no gráfico. Como esse gráfico usa a média amostral para monitorar o processo, ele é denominado gráfico de controle \bar{X} .

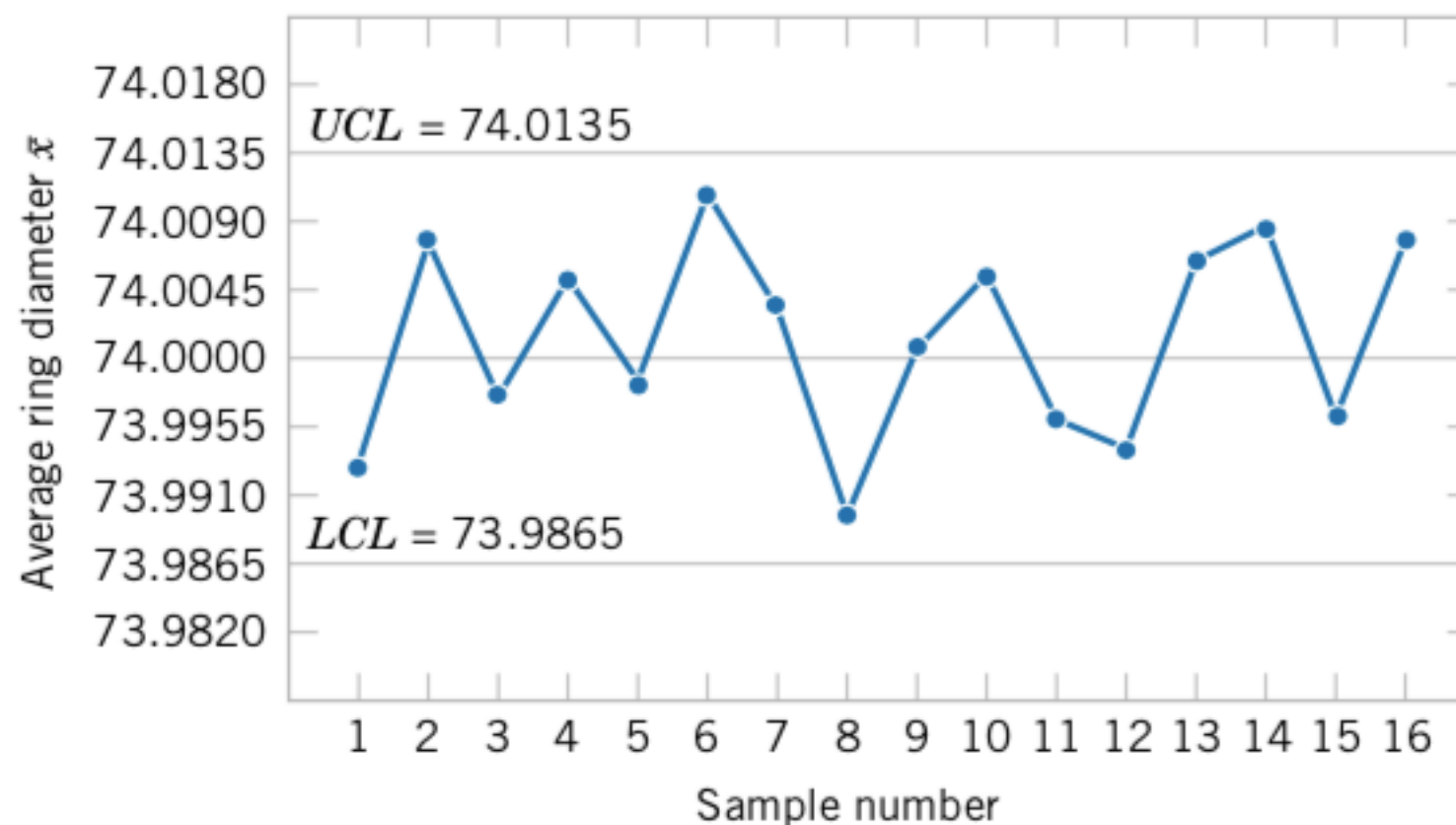


Gráfico de controle do exemplo

Projeto de gráficos de controle

Analisemos agora como os limites são calculados. A média de \bar{X} é 74mm e o desvio padrão σ é 0.01mm.

Selecionando 5 amostras, o desvio padrão da média amostral é

$$\sigma_{\bar{X}} = \frac{\sigma}{\sqrt{(n)}} = \frac{0.01}{\sqrt{(5)}} = 0.0045$$

Assumindo que \bar{X} tem distribuição normal, espera-se que $100(1 - \alpha) \%$ das médias amostrais dos diâmetros \bar{X} fiquem dentro do intervalo

$$74 + z_{\alpha/2}(0.0045) \text{ e } 74 - z_{\alpha/2}(0.0045)$$

Projeto de gráficos de controle

Intervalo: $74 + z_{\alpha/2}(0.0045)$ e $74 - z_{\alpha/2}(0.0045)$

Um valor de $z_{\alpha/2}$ igual a 3, que corresponderia a $\alpha = 0.0027$ gera os limites

$$\text{UCL: } 74 + 3(0.0045) = 74.0135$$

$$\text{LCL: } 74 - 3(0.0045) = 73.9865$$

Esse limite é conhecido como 3σ

Projeto de gráficos de controle

A largura dos limites de controle está inversamente relacionada ao tamanho da amostra n para um dado múltiplo de σ . Escolher os limites de controle é equivalente a definir a região crítica para o teste e hipótese:

$$H_0 : \mu = 74$$

$$H_1 : \mu \neq 74$$

onde $\sigma = 0.01$.

O gráfico de controle testa esta hipótese repetidamente em diferentes instantes de tempo.

Projeto de gráficos de controle

Ao projetar um gráfico de controle, precisamos especificar o tamanho n da amostra a ser usado e a frequência da amostragem.

Amostras maiores facilitarão a detecção de pequenas mudanças no processo.

Ao escolher o tamanho da amostra, devemos ter em mente o tamanho da mudança que estamos tentando detectar. Se estivermos interessados em detectar uma mudança de processo relativamente grande, usamos tamanhos de amostra menores do que aqueles que seriam empregados se a mudança de interesse fosse relativamente pequena.

Projeto de gráficos de controle

Também devemos determinar a frequência da amostragem. A situação mais desejável, do ponto de vista da detecção de mudanças, seria coletar amostras grandes com muita frequência; no entanto, isso geralmente não é economicamente viável.

A prática atual da indústria tende a favorecer amostras menores e mais frequentes.

Projeto de gráficos de controle

À medida que a tecnologia automática de detecção e medição se desenvolve, torna-se possível aumentar bastante a frequência de análises.

Exemplo: amostragem por imagem: tábuas de pinho



Projeto de gráficos de controle

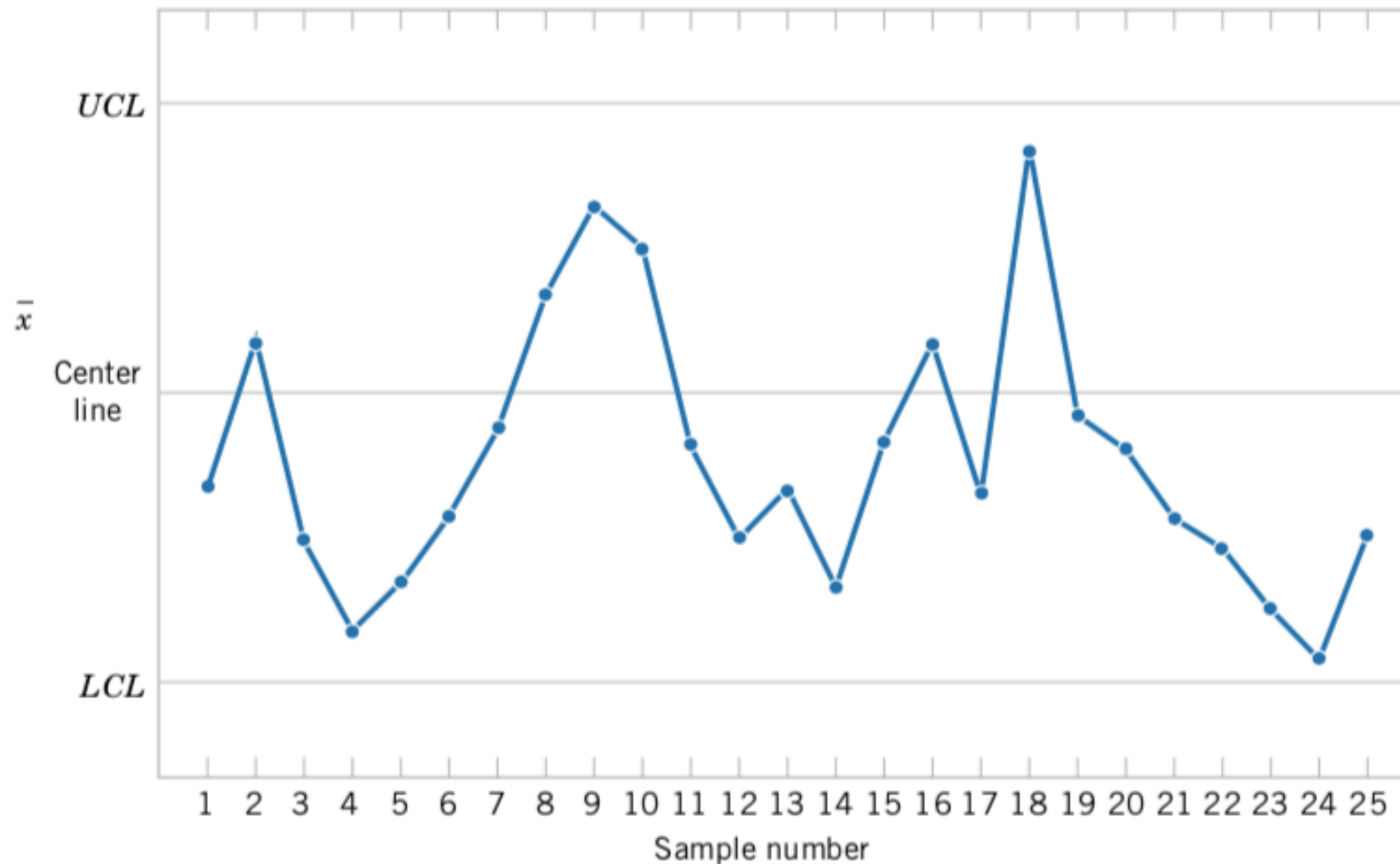
Observação importante: usando 3σ para definir os limites, implica que $(1 - 0.0027) \% = 99.73 \%$ das amostras estará em controle estatístico. Ou seja, 0.27% das amostras estão fora de controle.

Seja um produto que dependa de 50 peças produzidas com este controle de qualidade. A probabilidade de que o produto final não atenda a especificação de qualidade será $1 - (1 - \alpha)^{50} = 1 - 0.9973^{50} = 1 - 0.8736 = 0.1664$

Nesse caso, $16,64 \%$ das amostras não atenderão a especificação!

O uso de 6σ se garantirá que produtos não conformes sejam reduzidos para 0.01 por milhão.

Padrões nos gráficos de controle



Padrões nos gráficos de controle

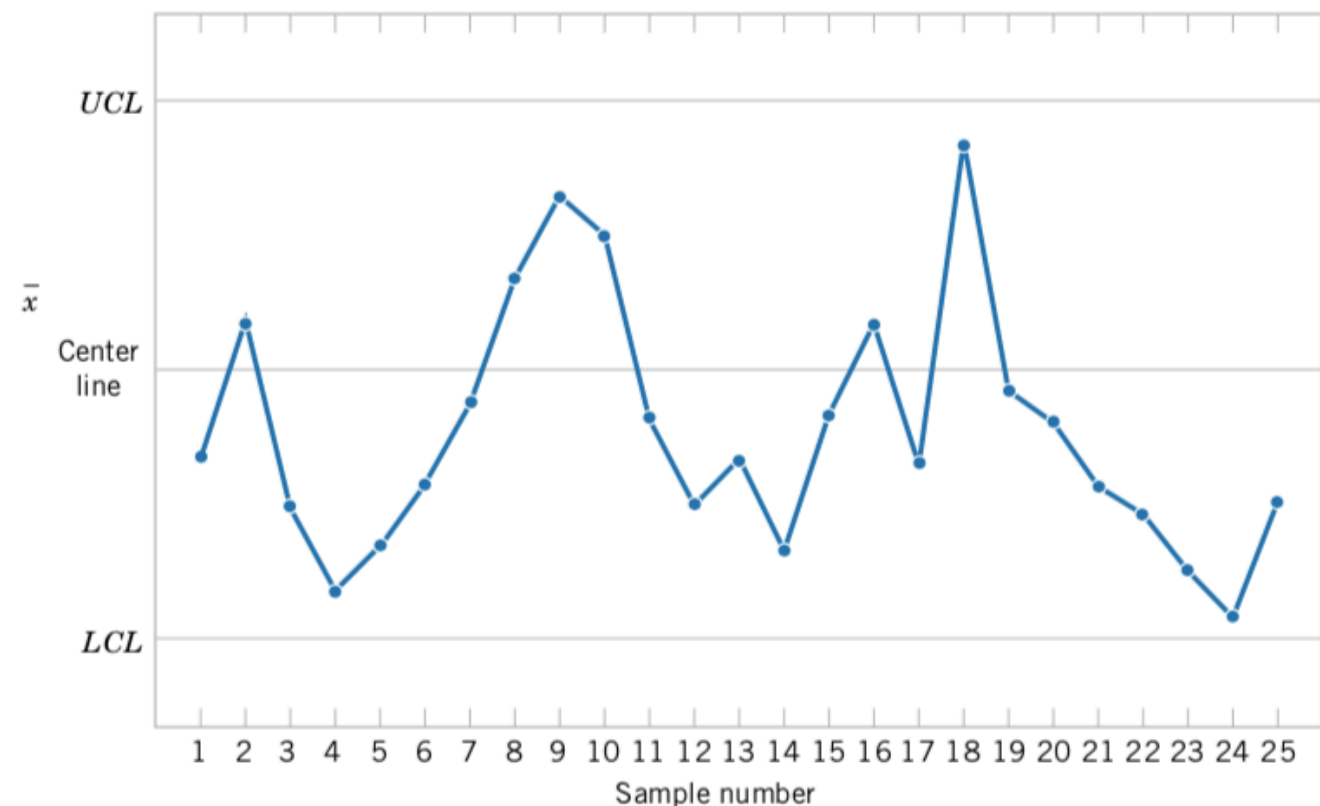
19 amostras das 25 abaixo de CL

Após amostra 4, as 5 subseqüentes têm aumentos consecutivos

Após a amostra 18, as 6 subseqüentes têm decréscimos consecutivos

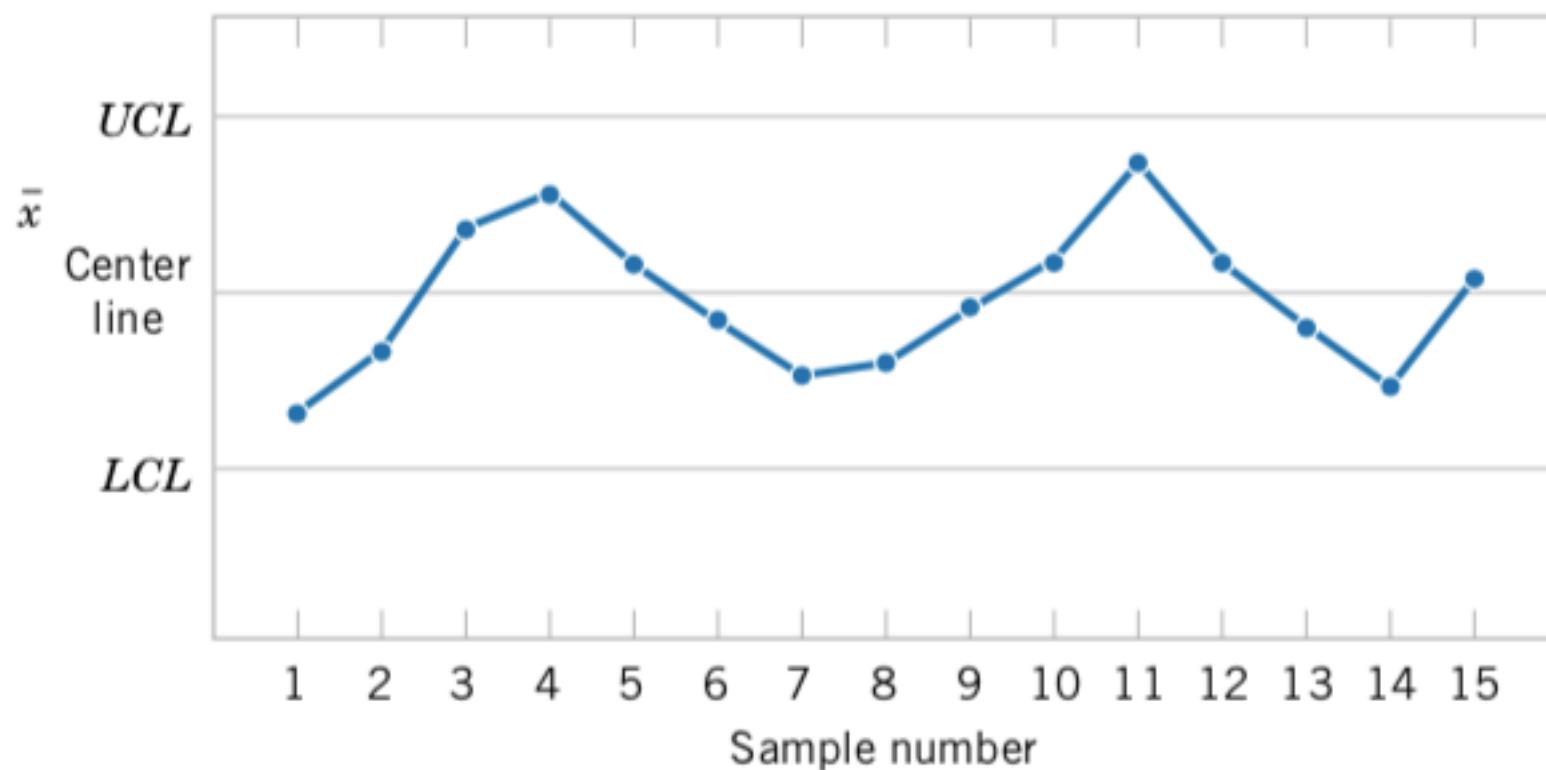
Essas situações dificilmente

ocorrem aleatoriamente



Padrões nos gráficos de controle

O comportamento cíclico indica algum problema



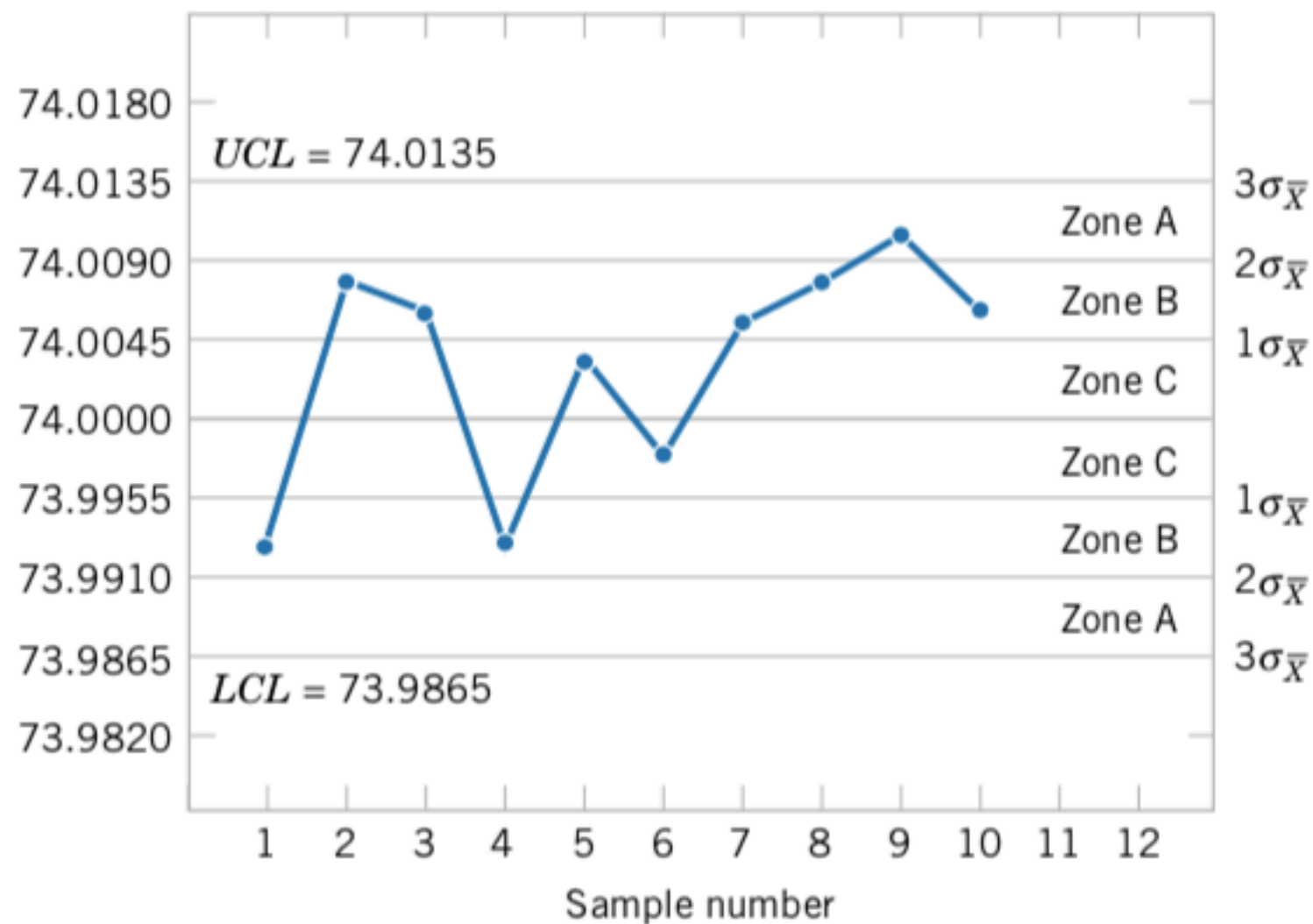
Padrões nos gráficos de controle

Sugestões de regras de decisão do Western Electric Handbook para decidir se o processo está fora de controle estatístico:

1. Um ponto fora do limite de 3σ
2. Dois de três pontos consecutivos ou além do limite 2σ
3. Quatro de cinco pontos consecutivos a uma distância de 1σ ou além da linha central
4. Oito pontos consecutivos em um dos lados da linha central

Padrões nos gráficos de controle

Procedimento da Western Electric Handbook:



Gráficos de controle da média e da variância (\bar{X} e R ou S)

Ao monitorar a qualidade de processos, é comum se monitorar tanto a média quanto a variabilidade, dada pelo desvio padrão ou pela variância. A variabilidade pode ser monitorada pelo gráfico R (range) ou o gráfico S (desvio padrão).

Gráficos de controle da média e da variância (\bar{X} e R ou S)

Suponha que a variável de processo monitorada tem distribuição normal com média e desvio padrão conhecidos μ e σ .

Usando o limite 3σ , os limites são:

$$UCL = \mu + 3\sigma/\sqrt{n}$$

$$LCL = \mu - 3\sigma/\sqrt{n}$$

$$CL = \mu$$

Gráficos de controle da média e da variância (\bar{X} e R ou S)

Caso a média e desvio padrão ***não sejam conhecidos***, μ e σ podem ser estimados usando **m** amostras prévias, todas com tamanho **n**.

Seja \bar{X}_i a i -ésima média amostral. Estimamos a média da população pela média geral

$$\hat{\mu} = \bar{\bar{X}} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \bar{X}_i$$

Assim, usamos $\bar{\bar{X}}$ como a linha central do gráfico de controle \bar{X} .

Gráficos de controle da média e da variância (\bar{X} e R ou S)

O desvio padrão σ pode ser estimado pelo desvio padrão ou pelo range de variação dentro de cada amostra.

Como o tamanho da amostra é relativamente pequeno, há pouca perda de eficiência na estimativa de σ a partir do range da amostra.

É necessário obter a relação entre o range R de uma amostra de uma população normal com parâmetros conhecidos e o desvio padrão σ dessa população .

Gráficos de controle da média e da variância (\bar{X} e R ou S)

Como R é uma variável aleatória, a quantidade $W = R/\sigma$, chamada de range relativo também é uma variável aleatória.

Gráficos de controle da média e da variância (\bar{X} e R ou S)

Os parâmetros da distribuição de W são obtidos para amostras de qualquer tamanho n . A média da distribuição W é d_2 e uma tabela de valores de d_2 para vários valores de n é mostrada a seguir.

Gráficos de controle da média e da variância (\bar{X} e R ou S)

Table X Factors for Constructing Variables Control Charts

n^*	Factor for Control Limits						
	\bar{X} Chart			R Chart		S Chart	
	A_1	A_2	d_2	D_3	D_4	c_4	n
2	3.760	1.880	1.128	0	3.267	0.7979	2
3	2.394	1.023	1.693	0	2.575	0.8862	3
4	1.880	.729	2.059	0	2.282	0.9213	4
5	1.596	.577	2.326	0	2.115	0.9400	5
6	1.410	.483	2.534	0	2.004	0.9515	6
7	1.277	.419	2.704	.076	1.924	0.9594	7
8	1.175	.373	2.847	.136	1.864	0.9650	8
9	1.094	.337	2.970	.184	1.816	0.9693	9
10	1.028	.308	3.078	.223	1.777	0.9727	10
11	.973	.285	3.173	.256	1.744	0.9754	11
12	.925	.266	3.258	.284	1.716	0.9776	12
13	.884	.249	3.336	.308	1.692	0.9794	13
14	.848	.235	3.407	.329	1.671	0.9810	14
15	.816	.223	3.472	.348	1.652	0.9823	15
16	.788	.212	3.532	.364	1.636	0.9835	16
17	.762	.203	3.588	.379	1.621	0.9845	17
18	.738	.194	3.640	.392	1.608	0.9854	18
19	.717	.187	3.689	.404	1.596	0.9862	19
20	.697	.180	3.735	.414	1.586	0.9869	20
21	.679	.173	3.778	.425	1.575	0.9876	21
22	.662	.167	3.819	.434	1.566	0.9882	22
23	.647	.162	3.858	.443	1.557	0.9887	23
24	.632	.157	3.895	.452	1.548	0.9892	24
25	.619	.153	3.931	.459	1.541	0.9896	25

* $n > 25$: $A_1 = 3/\sqrt{n}$ where n = number of observations in sample.

Gráficos de controle da média e da variância (\bar{X} e R ou S)

O desvio padrão de W é d_3 .

Como $R = \sigma W$,

$$\mu_r = d_2\sigma \quad \text{e} \quad \sigma_r = d_3\sigma$$

Seja R_i o range de i -ésima amostra, e seja o range médio

$$\bar{R} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m R_i$$

Gráficos de controle da média e da variância (\bar{X} e R ou S)

Então \bar{R} é um estimador de μ_r e um estimador não polarizado de σ é

$$\hat{\sigma} = \frac{\bar{R}}{d_2}$$

$$\hat{\mu} = \bar{\bar{X}} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \bar{X}_i$$

Os limites para o gráfico de \bar{X} são dados por

$$\bar{\bar{R}} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m R_i$$

$$UCL = \bar{\bar{X}} + \frac{3}{d_2\sqrt{n}} \bar{R} \quad LCL = \bar{\bar{X}} - \frac{3}{d_2\sqrt{n}} \bar{R}$$

Gráficos de controle da média e da variância (\bar{X} e R ou S)

Usando $A_2 = \frac{3}{d_2\sqrt{(n)}}$, resultam os limites do gráfico \bar{X}

The center line and upper and lower control limits for an \bar{X} control chart are

$$UCL = \bar{\bar{x}} + A_2\bar{r} \quad CL = \bar{\bar{x}} \quad LCL = \bar{\bar{x}} - A_2\bar{r} \quad (16-9)$$

where the constant A_2 is tabulated for various sample sizes in Appendix Table X.

$$\hat{\mu} = \bar{\bar{X}} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \bar{X}_i$$

$$\bar{R} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m R_i$$

Gráficos de controle da média e da variância (\bar{X} e R ou S)

Obtemos agora os parâmetros para o gráfico do range R .

A linha central obviamente é \bar{R} . Para os limites, precisamos obter o desvio padrão de R , σ_r .

De $\sigma_r = d_3\sigma$, $\hat{\sigma}_r = d_3\sigma = d_3 \frac{\bar{R}}{d_2}$ resultando em

$$UCL = \bar{R} + \frac{3d_3}{d_2} \bar{R} = \left(1 + \frac{3d_3}{d_2}\right) \bar{R}$$

$$LCL = \bar{R} - \frac{3d_3}{d_2} \bar{R} = \left(1 - \frac{3d_3}{d_2}\right) \bar{R}$$

Gráficos de controle da média

The center line and upper and lower control limits for an R chart are

$$UCL = D_4 \bar{r} \quad CL = \bar{r} \quad LCL = D_3 \bar{r} \quad (16-12)$$

where \bar{r} is the sample average range, and the constants D_3 and D_4 are tabulated for various sample sizes in Appendix Table X.

$$D_3 = 1 - 3d_3/d_2, \quad D_4 = 1 + 3d_3/d_2$$

Caso resulte um valor negativo para LCL , ele é feito igual a zero.

Gráficos de controle da média e da variância (\bar{X} e R ou S)

Gráfico de controle do desvio padrão S .

S é um estimador não polarizado para σ^2 , mas é um estimador polarizado para σ .

$E(s) = c_4\sigma$ onde c_4 é constante mas não é igual a 1. O desvio padrão para a estatística S pode ser estimada por

$$\sigma\sqrt{1 - c_4^2}$$

Gráficos de controle da média e da variância (\bar{X} e R ou S)

Os limites e a linha central do gráfico S são dados por

$$\begin{aligned} LCL &= c_4\sigma - 3\sigma\sqrt{1 - c_4^2} & CL &= c_4\sigma. \\ UCL &= c_4\sigma + 3\sigma\sqrt{1 - c_4^2} \end{aligned}$$

Gráficos de controle da média e da variância (\bar{X} e R ou S)

Sejam as m amostras disponíveis, cada uma de tamanho n , e seja S_i o desvio padrão da i -ésima amostra. Defina

$$\bar{S} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m S_i$$

Como $E(s) = c_4\sigma$, um estimador polarizado de σ é S/c_4 . Ou seja,

$$\hat{\sigma} = \bar{S}/c_4.$$

O gráfico de controle do desvio padrão pode ser construído com os limites

$$UCL = \bar{s} + 3 \frac{\bar{s}}{c_4} \sqrt{1 - c_4^2} \quad CL = \bar{s} \quad LCL = \bar{s} - 3 \frac{\bar{s}}{c_4} \sqrt{1 - c_4^2}$$

LCL=0 quando for negativo.

Gráficos de controle da média e da variância (\bar{X} e R ou S)

Quando o gráfico de controle do desvio padrão é usado, a estimativa de σ é usada para construir o gráfico de \bar{X} .

S Chart

$$UCL = \bar{s} + 3 \frac{\bar{s}}{c_4} \sqrt{1 - c_4^2} \quad CL = \bar{s} \quad LCL = \bar{s} - 3 \frac{\bar{s}}{c_4} \sqrt{1 - c_4^2}$$

\bar{X} Control Chart (from \bar{S})

$$UCL = \bar{\bar{x}} + 3 \frac{\bar{s}}{c_4 \sqrt{n}} \quad CL = \bar{\bar{x}} \quad LCL = \bar{\bar{x}} - 3 \frac{\bar{s}}{c_4 \sqrt{n}}$$

Gráficos de controle da média e da variância (\bar{X} e R ou S)

Exemplo: Um componente de um motor de avião a jato é fabricado por um processo de fundição especial. A abertura da palheta nesta peça fundida é um importante parâmetro funcional da peça. São coletadas 20 amostras com 5 peças cada.

Exemplo

Sample Number	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	\bar{x}	r	s
1	33	29	31	32	33	31.6	4	1.67332
2	33	31	35	37	31	33.4	6	2.60768
3	35	37	33	34	36	35.0	4	1.58114
4	30	31	33	34	33	32.2	4	1.64317
5	33	34	35	33	34	33.8	2	0.83666
6	38	37	39	40	38	38.4	3	1.14018
7	30	31	32	34	31	31.6	4	1.51658
8	29	39	38	39	39	36.8	10	4.38178
9	28	33	35	36	43	35.0	15	5.43139
10	38	33	32	35	32	34.0	6	2.54951
11	28	30	28	32	31	29.8	4	1.78885
12	31	35	35	35	34	34.0	4	1.73205
13	27	32	34	35	37	33.0	10	3.80789
14	33	33	35	37	36	34.8	4	1.78885
15	35	37	32	35	39	35.6	7	2.60768
16	33	33	27	31	30	30.8	6	2.48998
17	35	34	34	30	32	33.0	5	2.00000
18	32	33	30	30	33	31.6	3	1.51658
19	25	27	34	27	28	28.2	9	3.42053
20	35	35	36	33	30	33.8	6	2.38747
						$\bar{\bar{x}} = 33.32$	$\bar{r} = 5.8$	$\bar{s} = 2.345$

Gráficos de controle da média e da variância (\bar{X} e R ou S)

Os valores calculados $\bar{\bar{x}} = 33.3$, $\bar{r} = 5.8$, $\bar{s} = 2.345$ são calculados. O valor de A_2 para amostras de tamanho 5 é 0.577.

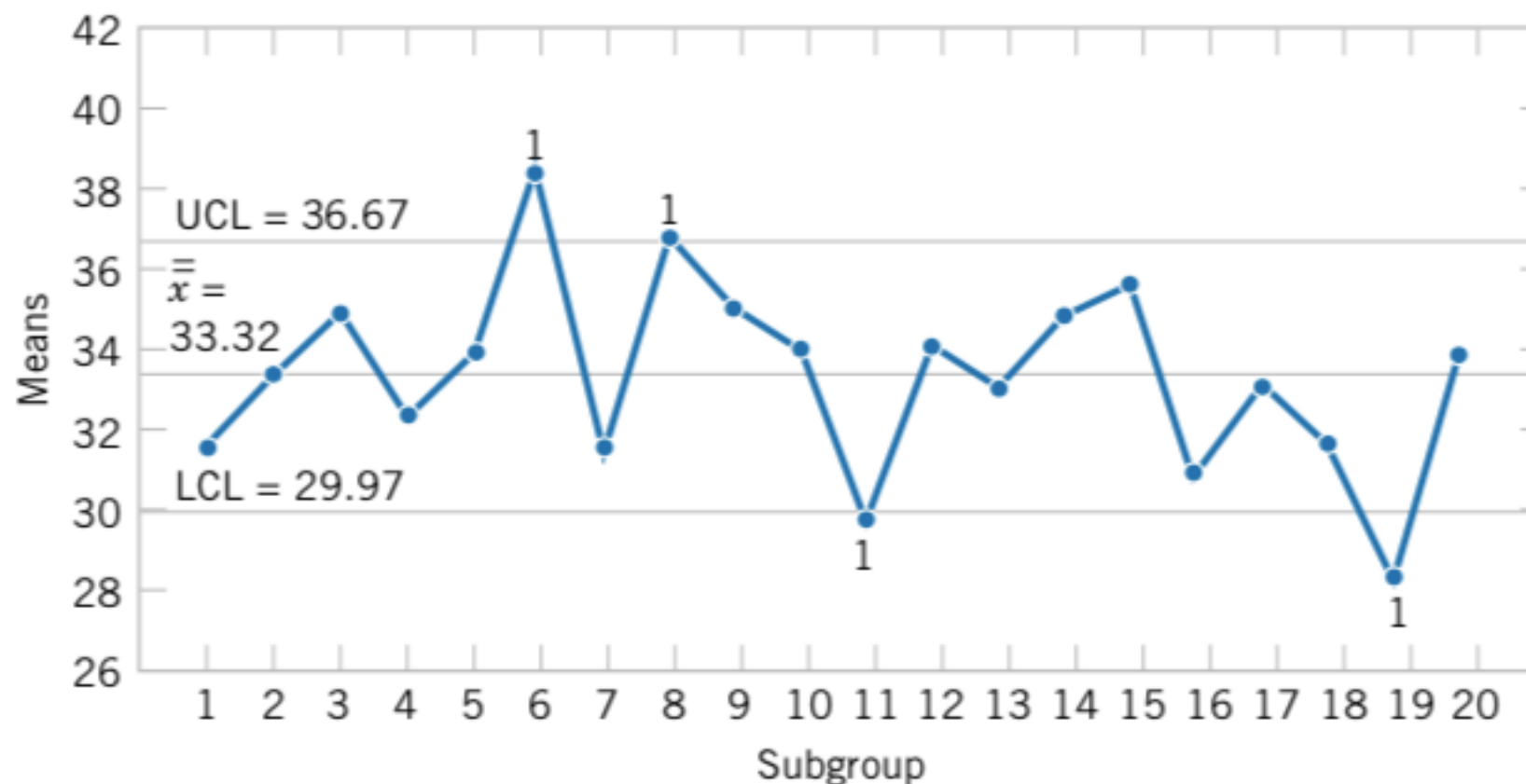
Os limites para o gráfico de \bar{X} são

$$\bar{\bar{x}} \pm A_2 \bar{r} = 33.32 \pm (0.577)(5.8) = 33.32 \pm 3.35$$

$$UCL = 36.67 \text{ e } LCL = 29.97$$

Gráficos de controle da média e da variância (\bar{X} e R ou S)

Gráfico de \bar{X}



Gráficos de controle da média e da variância (\bar{X} e R ou S)

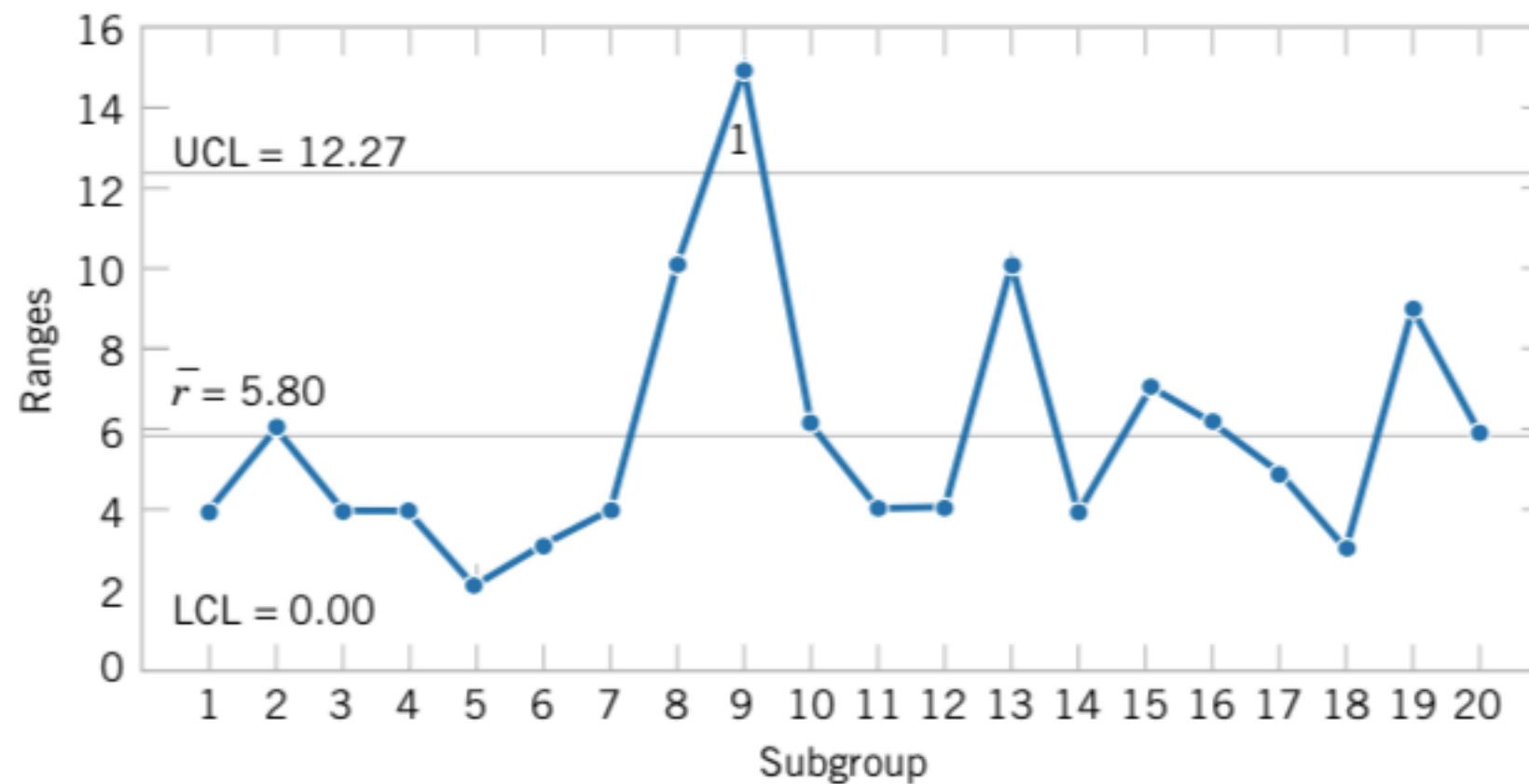
Os limites para o gráfico de R são

$$UCL = D_4 \bar{r} = (2.115)(5.8) = 12.27$$

$$LCL = D_3 \bar{r} = (0)(5.8) = 0$$

Gráficos de controle da média e da variância (\bar{X} e R ou S)

Gráfico de R



Gráficos de controle da média e da variância (\bar{X} e R ou S)

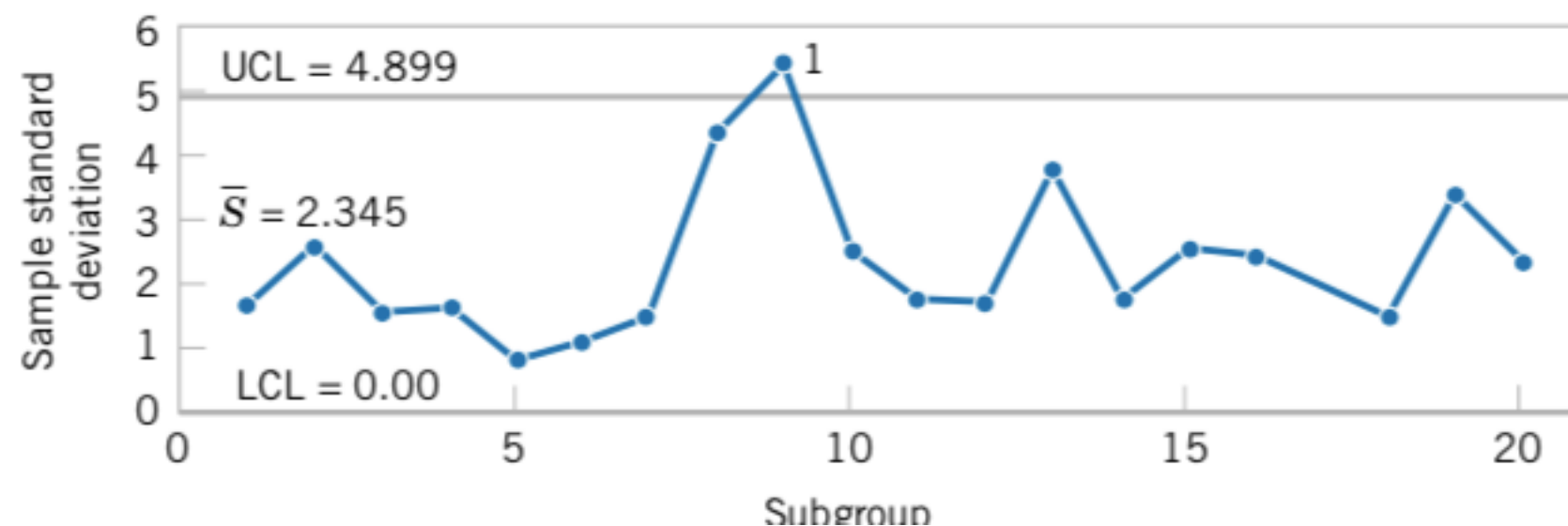
Para o gráfico de S , $c_4 = 0.94$. Portanto,

$$\frac{3\bar{s}}{c_4} \sqrt{1 - c_4^2} = \frac{3(2.345)}{0.94} \sqrt{1 - 0.94^2} = 2.553$$

e os limites são

$$UCL = 2.345 + 2.553 = 4.898$$

$$LCL = 2.345 - 2.553 = -0.208. \text{ Logo, } LCL = 0$$



Gráficos de controle da média e da variância (\bar{X} e R ou S)

Se \bar{s} é usado para obter os limites para o gráfico \bar{X} , os limites são

$$\bar{\bar{x}} \pm \frac{3\bar{s}}{c_4\sqrt{n}} = 33.32 \pm \frac{3(2.345)}{0.94} = 33.32 \pm 3.35$$

e o resultado é similar ao já obtido.

Gráficos de controle da média e da variância (\bar{X} e R ou S)

Suponha que as causas para os pontos que violaram os limites sejam identificadas. Nesse caso, essas amostras poderiam ser eliminadas e os limites poderiam ser calculados com as demais amostras.

Para o gráfico \bar{X} ,
$$UCL = \bar{\bar{x}} + A_2 \bar{r} = 33.21 + (0.577)(5.0) = 36.10$$

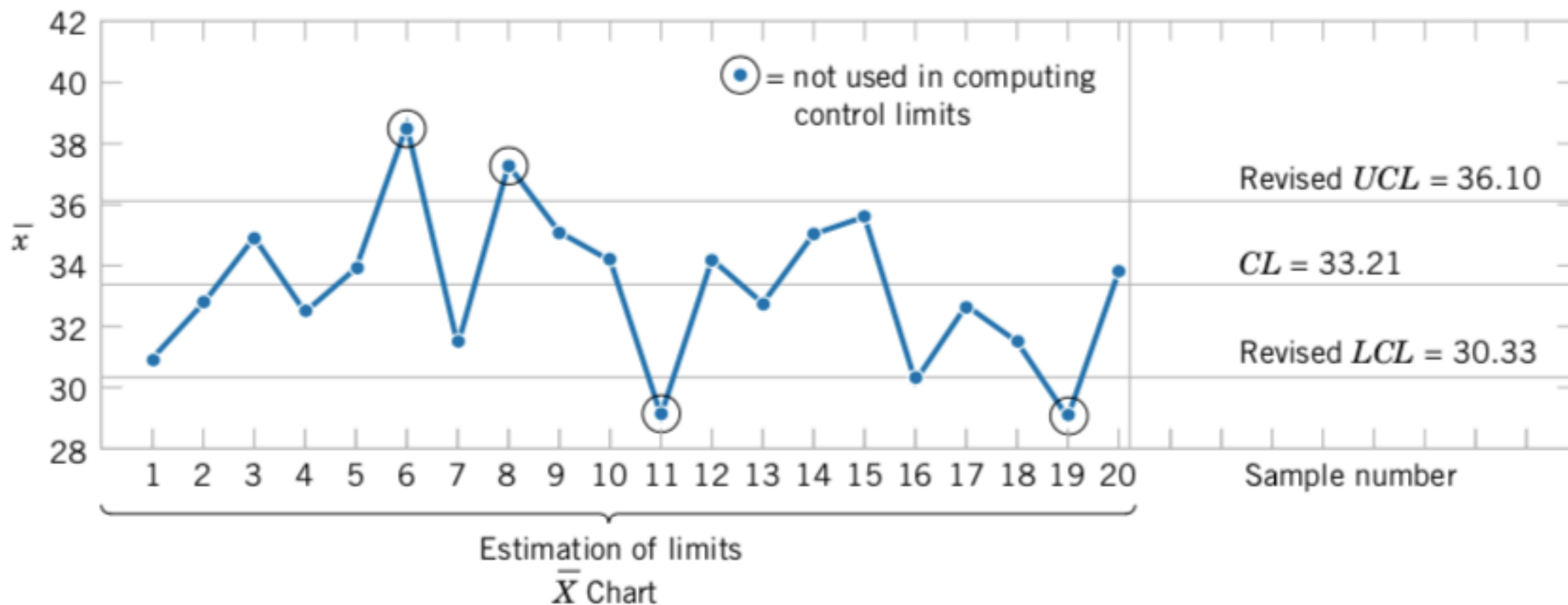
$$LCL = \bar{\bar{x}} - A_2 \bar{r} = 33.21 - (0.577)(5.0) = 30.33$$

Para o gráfico R ,

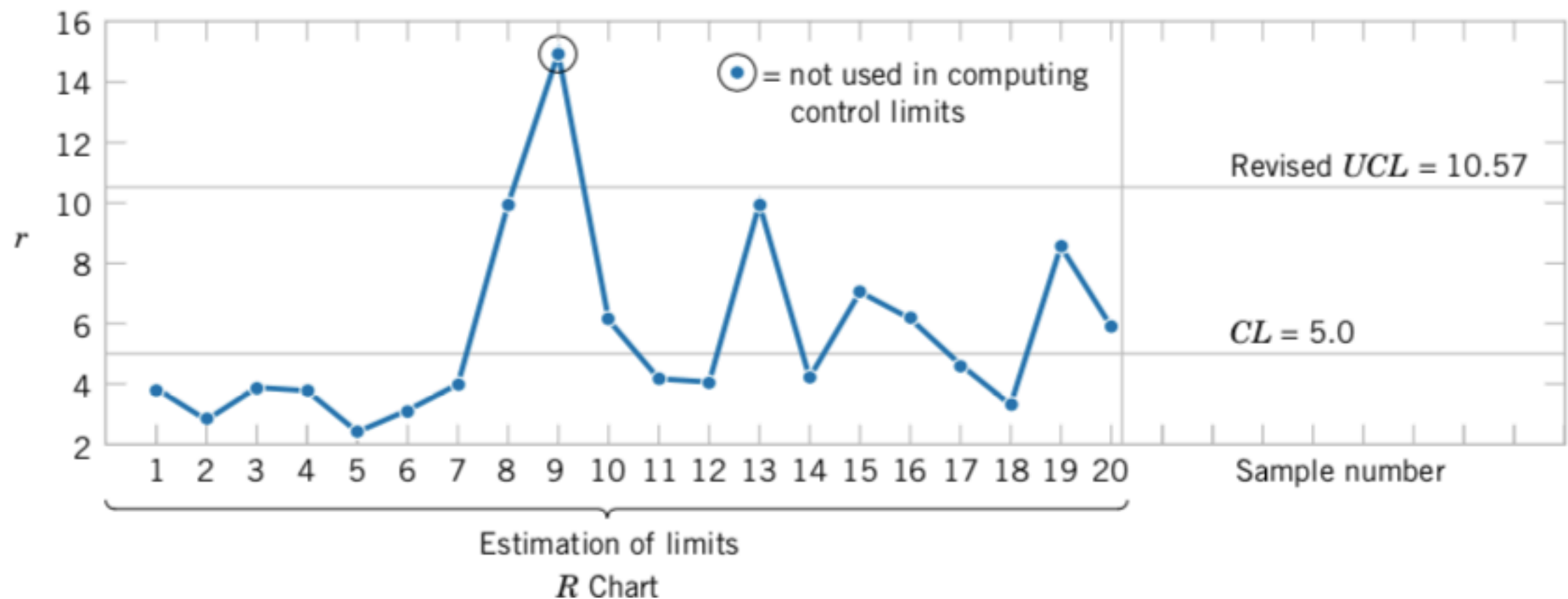
$$UCL = D_4 \bar{r} = (2.115)(5.0) = 10.57$$

$$LCL = D_3 \bar{r} = (0)(5.0) = 0$$

Gráficos de controle da média e da variância (\bar{X} e R ou S)



Gráficos de controle da média e da variância (\bar{X} e R ou S)



Gráficos de controle para amostras individuais

Situações que requerem medições individuais:

- Inspeção automatizada analisa cada item produzido
- Taxa de produção muito baixa e $n > 1$ não é adequado
- Medições repetidas diferem apenas por erro na análise ou procedimento laboratorial
- Planta de processos, nas quais as medições diferem muito pouco devido a ruído

Gráficos de controle para amostras individuais

O gráfico de controle para amostras individuais usa a média móvel de duas observações sucessivas para estimar a variabilidade do processo.

A média móvel é definida por $MR_i = |X_i - X_{i-1}|$.

Uma estimativa de σ é

$$\hat{\sigma} = \frac{\bar{MR}}{d_2} = \frac{MR}{1.128}$$

Gráficos de controle para amostras individuais

The center line and upper and lower control limits for a control chart for individuals are

$$\begin{aligned}UCL &= \bar{\bar{x}} + 3 \frac{\overline{mr}}{d_2} = \bar{\bar{x}} + 3 \frac{\overline{mr}}{1.128} \\CL &= \bar{\bar{x}} \\LCL &= \bar{\bar{x}} - 3 \frac{\overline{mr}}{d_2} = \bar{\bar{x}} - 3 \frac{\overline{mr}}{1.128}\end{aligned}\tag{16-19}$$

and for a control chart for moving ranges

$$\begin{aligned}UCL &= D_4 \overline{mr} = 3.267 \overline{mr} \\CL &= \overline{mr} \\LCL &= D_3 \overline{mr} = 0\end{aligned}$$

Gráficos de controle para amostras individuais

Table 16-3 Chemical Process Concentration Measurements

Exemplo 16-2

Observation	Concentration x	Moving Range mr
1	102.0	
2	94.8	7.2
3	98.3	3.5
4	98.4	0.1
5	102.0	3.6
6	98.5	3.5
7	99.0	0.5
8	97.7	1.3
9	100.0	2.3
10	98.1	1.9
11	101.3	3.2
12	98.7	2.6
13	101.1	2.4
14	98.4	2.7
15	97.0	1.4
16	96.7	0.3
17	100.3	3.6
18	101.4	1.1
19	97.2	4.2
20	101.0	3.8
$\bar{x} = 99.1$		$\overline{mr} = 2.59$

Gráficos de controle para amostras individuais

Exemplo 16-2

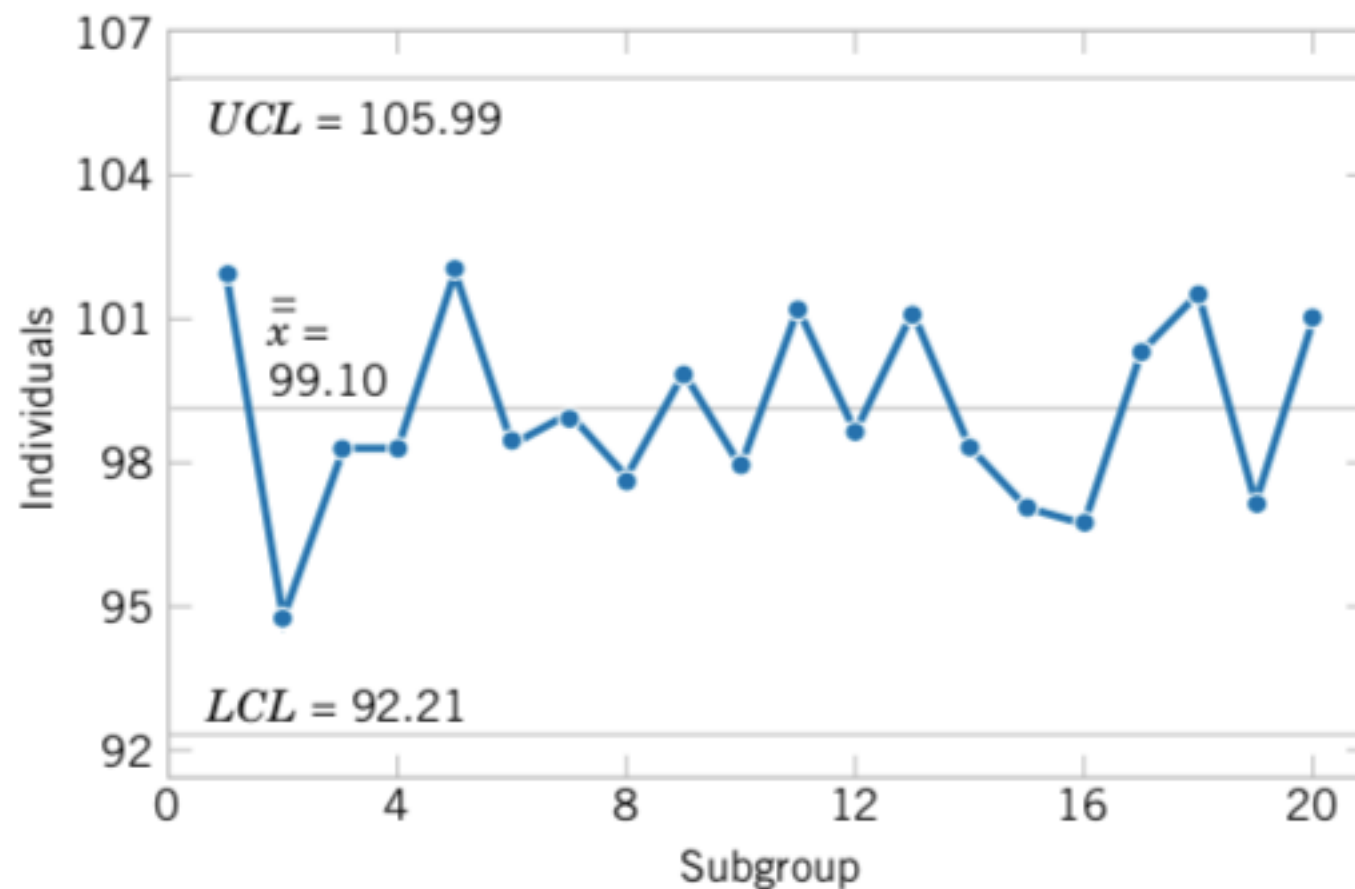
$$UCL = \bar{x} + 3 \frac{\overline{mr}}{d_2} = 99.1 + 3 \frac{2.59}{1.128} = 105.99$$

$$CL = \bar{x} = 99.1$$

$$LCL = \bar{x} - 3 \frac{\overline{mr}}{d_2} = 99.1 - 3 \frac{2.59}{1.128} = 92.21$$

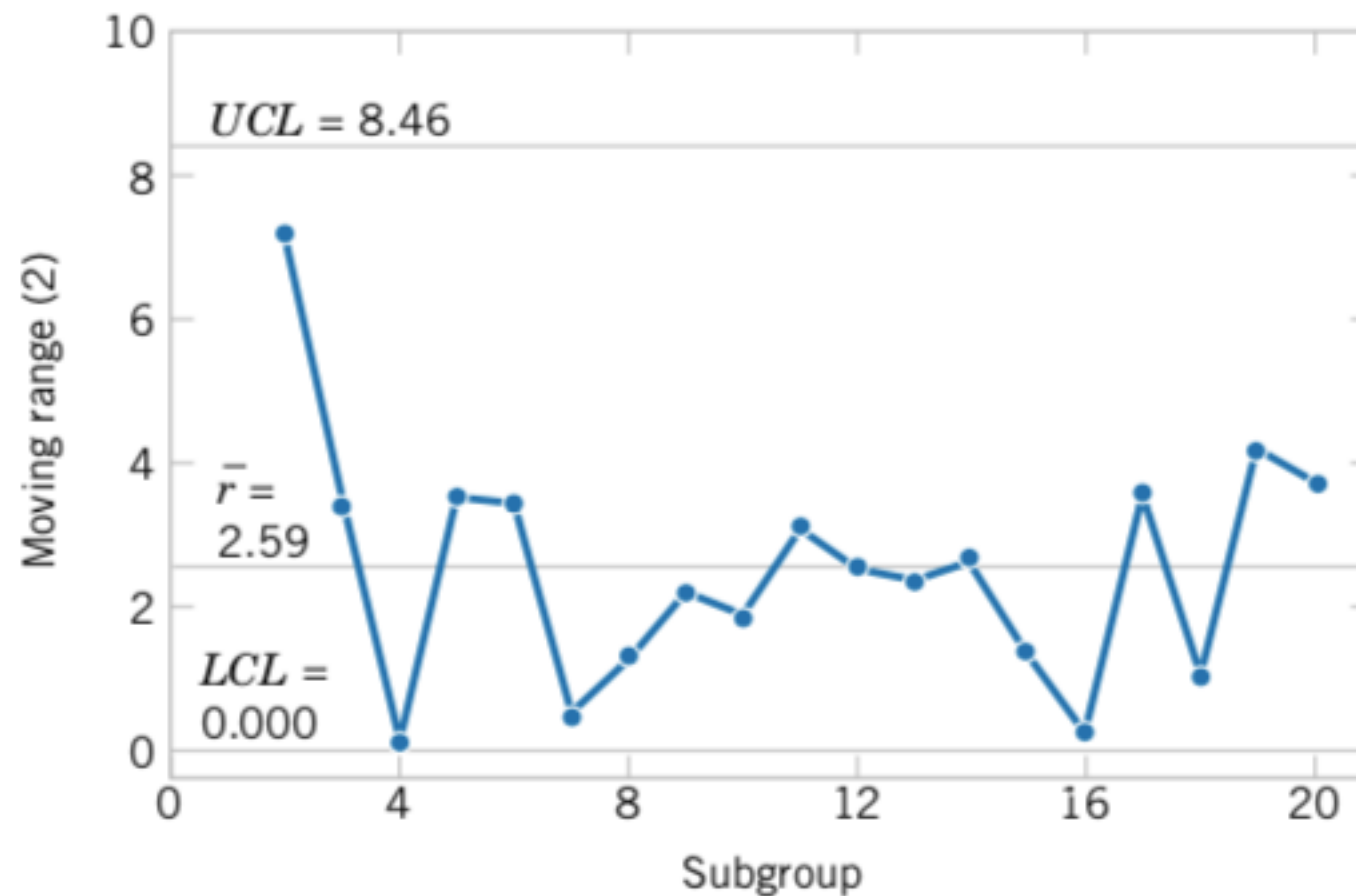
Gráficos de controle para amostras individuais

Exemplo 16-2: Gráfico de \bar{X}



Gráficos de controle para amostras individuais

Exemplo 16-2: Gráfico de R



Gráficos de controle para amostras individuais

Cuidados na análise:

Os ranges móveis estão correlacionados e essa correlação geralmente pode induzir um padrão de execuções ou ciclos no gráfico.

As medidas individuais são assumidas não correlacionadas, no entanto, qualquer padrão aparente na tabela de controle dos indivíduos deve ser cuidadosamente investigado.

Esse gráfico de controle é pouco sensível a variações pequenas da média. Não necessários 43.9 pontos para detectar uma mudança de um desvio padrão na média.

Dsempenho de gráficos de controle

O aumento dos limites reduz o erro tipo I, que é o erro de indicar uma situação de fora de controle quando não há falha (causa atribuível).

A ampliação dos limites, por outro lado, aumenta o erro tipo II, que é o risco do ponto estar dentro dos limites mas o processo estar fora de controle.

Desempenho de gráficos de controle

Uma maneira de avaliar decisões em relação ao tamanho da amostra e à frequência de amostragem é através do average run length (ARL) do gráfico de controle.

O ARL é o número médio de pontos que devem ser plotados antes que um ponto indique uma condição fora de controle.

Supondo que p seja a probabilidade de que um ponto exceda os limites de controle, então

$$ARL = \frac{1}{p}$$

Desempenho de gráficos de controle

Para um gráfico de controle de \bar{X} com limites 3σ ,
 $p = 0.0027$

e

$$ARL = \frac{1}{p} = \frac{1}{0.0027} = 370.$$

Mesmo que o processo esteja em controle, a cada 370 pontos o limite deve ser ultrapassado, em média.

Desempenho de gráficos de controle

Efeito do tamanho da amostra n .

Table 16-6 Average Run Length (ARL) for an \bar{X} Chart with 3-Sigma Control Limits

Magnitude of Process Shift	ARL $n = 1$	ARL $n = 4$
0	370.4	370.4
0.5σ	155.2	43.9
1.0σ	43.9	6.3
1.5σ	15.0	2.0
2.0σ	6.3	1.2
3.0σ	2.0	1.0

Gráfico de controle de soma cumulativa (CUSUM)

Gráficos de controle são pouco sensíveis a mudanças pequenas na média, entre 1 e 1.5σ . Isso ocorre por que informações sobre a sequência de amostras passadas.

O gráfico CUSUM plota as somas acumuladas dos desvios dos valores da amostra de um valor alvo.

Gráfico de controle de soma cumulativa (CUSUM)

Suponha que amostras de tamanho $n \geq 1$ e sejam coletadas e \bar{X}_j seja a média da j -ésima amostra.

Se μ_0 é o alvo da média do processo, o gráfico de controle da soma cumulativa é feito plotando

$$S_i = \sum_{j=1}^i (\bar{X}_j - \mu_0)$$

contra a amostra de número i . S_j é chamada soma cumulativa até a amostra i .

Gráfico de controle de soma cumulativa (CUSUM)

Como esses gráficos combinam informações de várias amostras, os gráficos de soma cumulativa são mais eficazes que os gráficos de Shewhart para detectar pequenas mudanças de processo.

Eles são muito eficientes para gráficos com amostras de tamanho $n = 1$.

Gráfico de controle de soma cumulativa (CUSUM)

Se o processo se mantiver em controle em torno do valor alvo μ_0 , a soma cumulativa variará em torno de zero.

Caso contrário, haverá uma tendência positiva ou negativa dessa soma cumulativa.

Gráfico de controle de soma cumulativa (CUSUM)

Sejam as amostras
individuais mostradas
na tabela ao lado.

Table 16-3 Chemical Process Concentration Measurements

Observation	Concentration x	Moving Range mr
1	102.0	
2	94.8	7.2
3	98.3	3.5
4	98.4	0.1
5	102.0	3.6
6	98.5	3.5
7	99.0	0.5
8	97.7	1.3
9	100.0	2.3
10	98.1	1.9
11	101.3	3.2
12	98.7	2.6
13	101.1	2.4
14	98.4	2.7
15	97.0	1.4
16	96.7	0.3
17	100.3	3.6
18	101.4	1.1
19	97.2	4.2
20	101.0	3.8
$\bar{x} = 99.1$		$\overline{mr} = 2.59$

Gráfico de controle de soma cumulativa (CUSUM)

Suponha que o valor alvo seja $\mu_0 = 99$. Então,

$$\begin{aligned} S_i &= \sum_{j=1}^i (X_j - 99) \\ &= (X_i - 99) + \sum_{j=1}^{i-1} (X_j - 99) \\ &= (X_i - 99) + S_{i-1} \end{aligned}$$

Gráfico de controle de soma cumulativa (CUSUM)

Gráfico da soma cumulativa

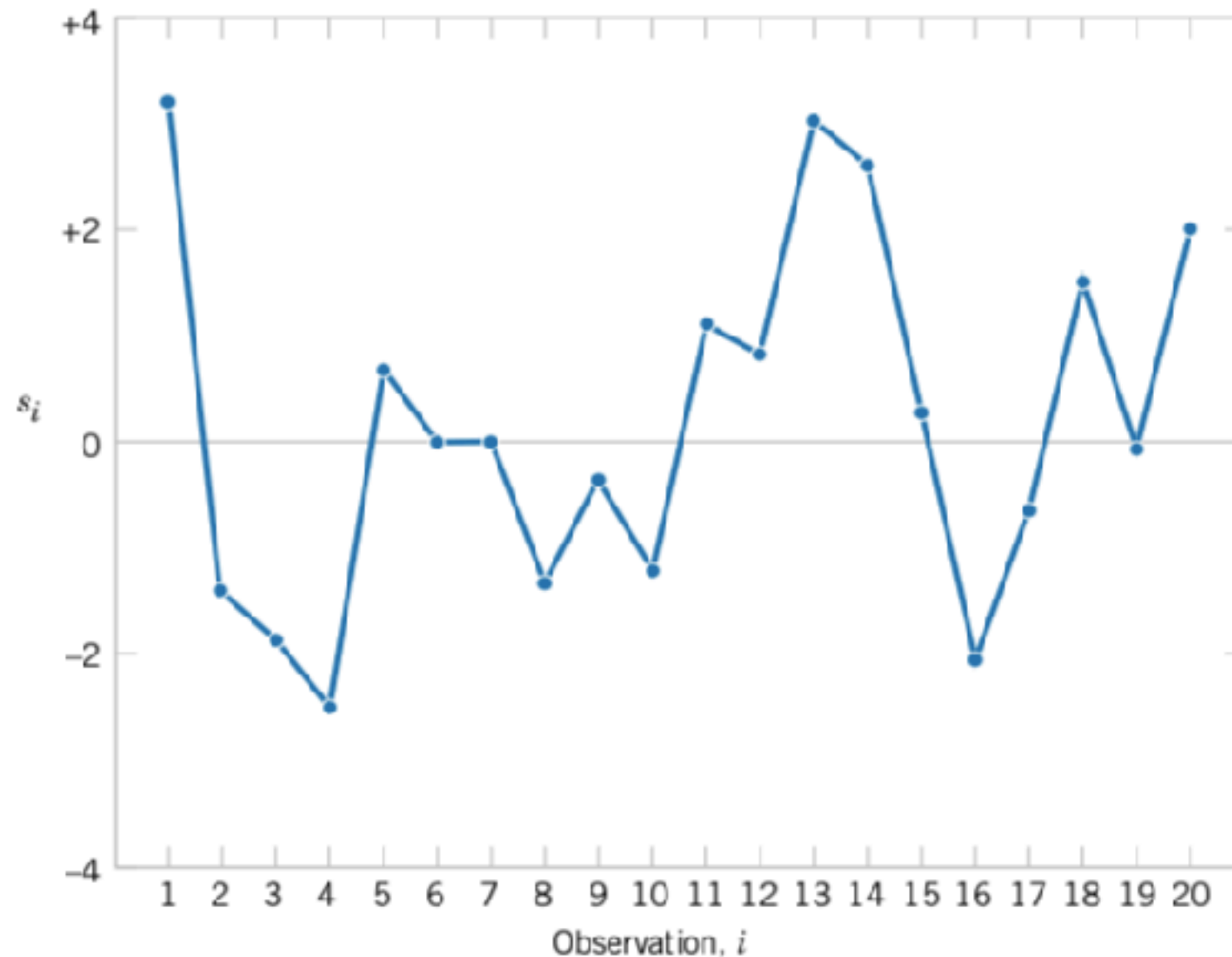


Gráfico de controle de soma cumulativa (CUSUM)

Cálculo dos limites para o gráfico da soma cumulativa

$$s_H(i) = \max[0, \bar{x}_i - (\mu_0 + K) + s_H(i - 1)]$$

and

$$s_L(i) = \max[0, (\mu_0 - K) - \bar{x}_i + s_L(i - 1)]$$

where the starting values $s_H(0) = s_L(0) = 0$.

K é chamado valor de referência. É obtido considerando o valor alvo μ_0 e o valor μ_1 considerado um valor que leva o processo a estar fora de controle.

Gráfico de controle de soma cumulativa (CUSUM)

Se $\mu_1 = \mu_0 + \Delta$, então $K = \frac{\Delta}{2}$.

Observe que $S_H(i)$ e $S_L(i)$ acumulam desvios do alvo que são maiores que K , sendo ambos resetados para zero quando se tornam negativos.

Se tanto $S_H(i)$ quanto $S_L(i)$ excedem um valor H , diz-se que o processo está fora de controle. Essa constante H é denominada intervalo de decisão.

Gráfico de controle de soma cumulativa (CUSUM)

Table 16-7 CUSUM Computations for the Chemical Process Concentration Data in Table 16-3

Exemplo

16-6:

Observation, i	x_i	$x_i - 99$	$s_i = (x_i - 99) + s_{i-1}$
1	102.0	3.0	3.0
2	94.8	-4.2	-1.2
3	98.3	-0.7	-1.9
4	98.4	-0.6	-2.5
5	102.0	3.0	0.5
6	98.5	-0.5	0.0
7	99.0	0.0	0.0
8	97.7	-1.3	-1.3
9	100.0	1.0	-0.3
10	98.1	-0.9	-1.2
11	101.3	2.3	1.1
12	98.7	-0.3	0.8
13	101.1	2.1	2.9
14	98.4	-0.6	2.3
15	97.0	-2.0	0.3
16	96.7	-2.3	-2.0
17	100.3	1.3	-0.7
18	101.4	2.4	1.7
19	97.2	-1.8	-0.1
20	101.0	2.0	1.9

Gráfico de controle de soma cumulativa (CUSUM)

Exemplo 16-6: Sejam os dados da Tabela 16-7, considerando o valor alvo $\mu_0 = 99$, $K = 1$, $H = 10$.

$$\begin{aligned} s_H(i) &= \max[0, x_i - (\mu_0 + K) + s_H(i - 1)] = \max[0, x_i - (99 + 1) + s_H(i - 1)] \\ &= \max[0, x_i - 100 + s_H(i - 1)] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} s_L(i) &= \max[0, (\mu_0 - K) - x_i + s_L(i - 1)] = \max[0, (99 - 1) - x_i + s_L(i - 1)] \\ &= \max[0, 98 - x_i + s_L(i - 1)] \end{aligned}$$

$$s_H(1) = \max[0, x_1 - 100 + s_H(0)] = \max[0, 102.0 - 100 + 0] = 2.0$$

$$s_L(1) = \max[0, 98 - x_1 + s_L(0)] = \max[0, 98 - 102.0 + 0] = 0$$

Gráfico de controle de soma cumulativa (CUSUM)

Exemplo 16-6:

n_H, n_L número

de períodos que

a soma não foi

zero.

Observation i	Upper CUSUM				Lower CUSUM	
	x_i	$x_i - 100$	$s_H(i)$	n_H	$98 - x_i$	$s_L(i)$
1	102.0	2.0	2.0	1	-4.0	0.0
2	94.8	-5.2	0.0	0	3.2	3.2
3	98.3	-1.7	0.0	0	-0.3	2.9
4	98.4	-1.6	0.0	0	-0.4	2.5
5	102.0	2.0	2.0	1	-4.0	0.0
6	98.5	-1.5	0.5	2	-0.5	0.0
7	99.0	-1.0	0.0	0	-1.0	0.0
8	97.7	-2.3	0.0	0	0.3	0.3
9	100.0	0.0	0.0	0	-2.0	0.0
10	98.1	-1.9	0.0	0	-0.1	0.0
11	101.3	1.3	1.3	1	-3.3	0.0
12	98.7	-1.3	0.0	0	-0.7	0.0
13	101.1	1.1	1.1	1	-3.1	0.0
14	98.4	-1.6	0.0	0	-0.4	0.0
15	97.0	-3.0	0.0	0	1.0	1.0
16	96.7	-3.3	0.0	0	1.3	2.3
17	100.3	0.3	0.3	1	-2.3	0.0
18	101.4	1.4	1.7	2	-3.4	0.0
19	97.2	-2.8	0.0	0	0.8	0.8
20	101.0	1.0	1.0	0	-3.0	0.0

Gráfico de controle de soma cumulativa (CUSUM)

Exemplo 16-6:

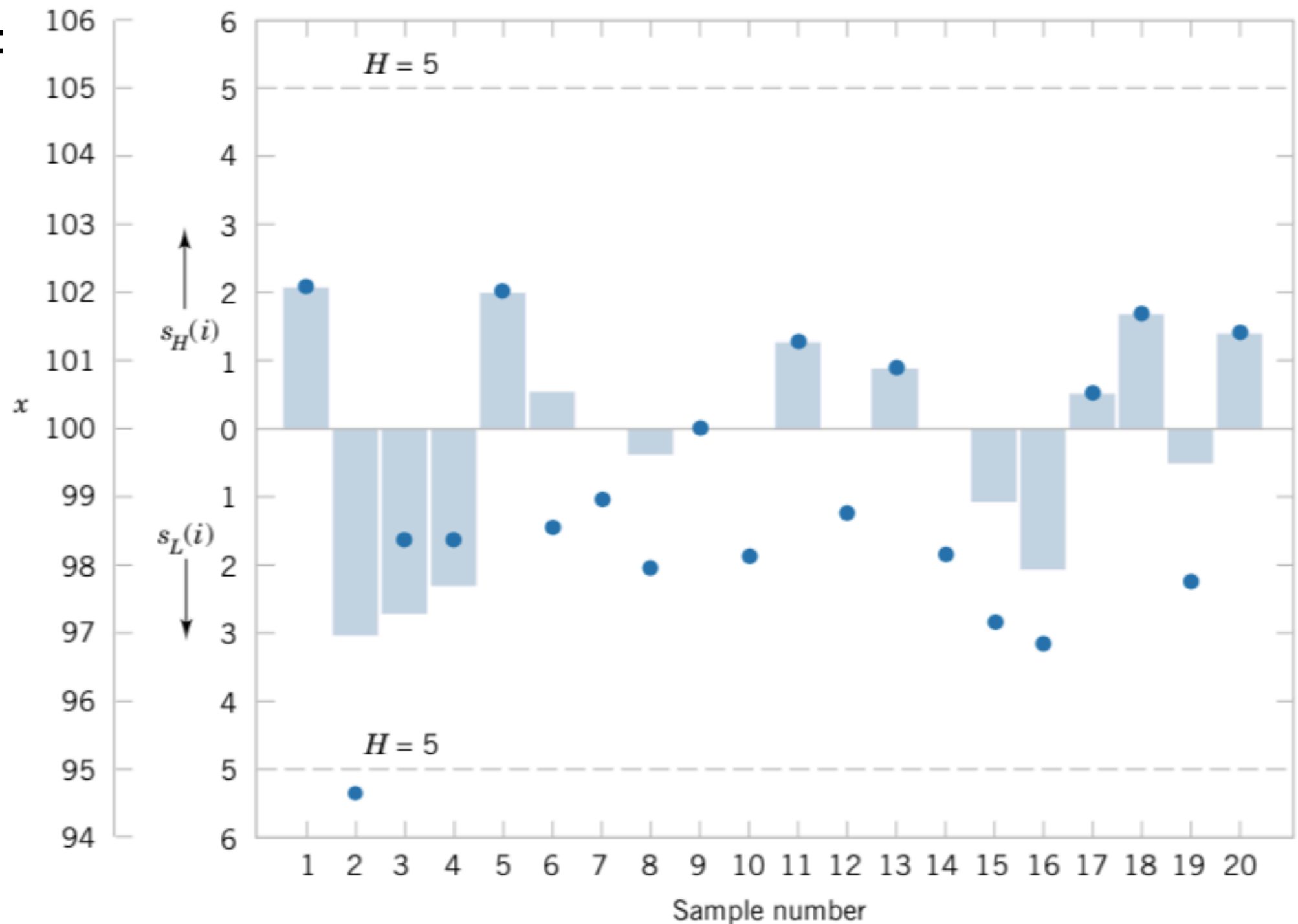


Gráfico de controle de soma cumulativa (CUSUM)

Seleção dos parâmetros K e H .

Seja σ_X o desvio padrão da variável usada para fazer o gráfico de soma cumulativa.

Defina $H = h\sigma_X$ e $K = k\sigma_X$.

O uso de $h = 4$ ou $h = 5$ e $k = 1/2$ em geral dão bons resultados em termos de ARL para desvios de $1\sigma_X$.