中 山 大 学 软 件 学 院 **2008** 级 软 件 工 程 专 业 (2009 秋季学期)

《概率统计》 期 末 试 题 解 案 (B)

1. （10 分）解：

因为 $P(A)=0.6$，$P(C)=0.4$，$P(A'B'C')=0.1$

所以 $P((A\bigcup B)\bigcap C')=1-P(C)-P(A'B'C')=0.5$

2. （10 分）解：

设事件 A：被检查的汽车通过检查
设事件 B：连续被检查的三辆汽车全部通过检查
设事件 C：连续被检查的三辆汽车恰好只有一辆通过检查
设事件 D：连续被检查的三辆汽车至少有一辆通过检查

$P(A)=0.7$

a. $P(B)=0.7\times0.7\times0.7=0.343$

b. $P(C)=0.7\times0.3\times0.3+0.3\times0.7\times0.3+0.3\times0.3\times0.7=0.198$

c. $P(A|D)=\dfrac{P(AD)}{P(D)}=\dfrac{0.343}{0.973}=0.353$

3. （15 分）解：

设事件 H 为硬币出现正面；
设事件 A_1 为选择的是无偏硬币；
设事件 A_2 为选择的是有偏硬币；

所以 $P(A_1)=\dfrac{1}{2},P(A_2)=\dfrac{1}{2},$

由题可知：$P(H|A_1)=\dfrac{1}{2},P(H|A_2)=\dfrac{1}{3},$

$$P(A_1|H)=\frac{P(A_1H)}{P(H)}=\frac{P(A_1)\cdot P(H|A_1)}{P(A_1)\cdot P(H|A_1)+P(A_2)\cdot P(H|A_2)}=\frac{1/4}{1/4+1/6}=3/5$$

4. （15 分）解：

a. assume that X and Y are independent, what is the value of α and β.

列出 X,Y 的边缘分布如下表：

X	1	2
$P(X=x_i)$	1/3	1/3+$\alpha+\beta$

Y	1	2	3
$P(X=x_i)$	1/2	1/9+α	1/18+β

由 X, Y 独立$\Rightarrow P\{X=x_i;Y=y_j\}=P\{X=x_i\}P\{Y=y_j\}$。

$$P\{X=1;Y=2\}=P\{X=1\}\{Y=2\}$$
$$\Rightarrow 1/9=(1/3)(1/9+\alpha)$$
$$\Rightarrow \alpha=2/9$$

$$P\{X=1\}+P\{X=2\}=1$$
$$\Rightarrow 1=(1/3)+(1/3+\alpha+\beta)$$
$$\Rightarrow \beta=1/9$$

得到如下表：

Y X	1	2	3
1	1/6	1/9	1/18
2	1/3	2/9	1/9

b. compute the expected value and the standard deviation of X and Y, respectively.

X 的期望：

$$E(X)=\sum_{i=1}^{2}x_iP\{X=x_i\}=(1)(1/3)+(2)(2/3)=5/3$$

$$E(X^2)=\sum_{i=1}^{2}x_i^2P\{X=x_i\}=(1)^2(1/3)+(2)^2(2/3)=3$$

D（X）$=E(X^2)-E^2(X)=3-(5/3)^2=2/9$

标准差为：$\sqrt{D(X)}=\sqrt{2/9}=\dfrac{\sqrt{2}}{3}$

同理，可得 Y 的期望：

$$E(Y)=\sum_{j=1}^{3}y_jP\{Y=y_j\}=(1)(1/2)+2(1/3)+(3)(1/6)=5/3$$

$$E(Y^2)=\sum_{j=1}^{3}y_j^2P\{Y=y_j\}=(1)^2(1/2)+(2)^2(1/3)+(3)^2(1/6)=10/3$$

D（X）$=E(Y^2)-E^2(Y)=10/3-(5/3)^2=5/9$

标准差为：$\sqrt{D(Y)}=\sqrt{5/9}=\dfrac{\sqrt{5}}{3}$

c. assume that Z = XY. Obtain the probability mass function (pmf) of Z

先列出 Z=X+Y 的值 以及 所取概率 如下表：

Y / X	1	2	3
1	2，p=1/6	3, p=1/9	4, p=1/18
2	3, p=1/3	4, p=2/9	5, p=1/9

把相同的 z 值的概率合并，得 Z 的 pmf 表如下：

Z	2	3	4	5
$P(Z=z_i)$	1/6	4/9	5/18	1/9

5. （15 分）解：

a. $E(X)=\int_0^1 x(\theta+1)x^\theta dx=1-\dfrac{1}{\theta+2}$，所以$\theta$的矩估计统计量为$\hat{\theta}=\dfrac{1}{1-\overline{X}}-2$

又由于$\overline{x}=0.8$，所以θ的矩估计统计值$\hat{\theta}=5-2=3$。

b. 似然函数$L(\theta)=(\theta+1)^n(x_1x_2\dots x_n)^\theta$，

两边求对数 $\ln L(\theta)=n\ln(\theta+1)+\theta\ln(x_1x_2\dots x_n)$

再对θ求导，让导数等于零得θ的统计量为$\hat{\theta}=-\dfrac{n}{\sum\ln(X_i)}-1$，

统计值为$\hat{\theta}=3.12$

6. （15 分） 解：

a. 由题意得检验统计量为$\dfrac{\overline{x}-100}{5/4}$，拒绝域为$\dfrac{\overline{x}-100}{5/4}\ge 1.645 \text{ or } \dfrac{\overline{x}-100}{5/4}\le -1.645$

将$\overline{x}=94$代入拒绝域，可见$\dfrac{94-100}{5/4}=-4.8\le-1.645$，所以落在拒绝域内，故原假设应被拒绝。

b.

$$\boldsymbol{P\{\text{type II error}\} = P\{-1.645 \le \frac{\overline{x}-100}{5/4} \le 1.645\text{当真的均值为}98\}}$$

$$\boldsymbol{= P\{-1.645 \le \frac{\overline{x}-98}{5/4} - \frac{8}{5} \le 1.645\}}$$

$$\boldsymbol{= P\{-0.045 \le \frac{\overline{x}-98}{5/4} \le 3.245\}}$$

$$\boldsymbol{= \Phi(3.245) - \Phi(-0.045) = 0.9994 - 0.4825 = 0.5169}$$

7. （20 分） 解：

a. $Z = \max(X, Y)$. $F_Z(z) = P\{Z \le z\}$

当 $z < 0$ 时，$F_Z(z) = 0$

当 $0 \le z \le 1$ 时，$F_Z(z) = \int_{-\infty}^{z}\int_{-\infty}^{z} f(x, y)dxdy$

$$= \int_{0}^{z}\int_{0}^{z}(x+y)dxdy$$

$$= z^3$$

当 $z > 1$ 时， $F_Z(z) = 1$

即

$$F_Z(z) = \begin{cases} 0 & (z < 0) \\ z3 & (0 \le z \le 1) \\ 1 & (z > 1) \end{cases}$$

所以

$$f_Z(z) = F_Z{}'(z) = \begin{cases} 3z^2 & (0 \le z \le 1) \\ 0 & otherwise \end{cases}$$

b. 另 $Z = \min(X, Y)$. $F_Z(z) = P\{Z \le z\} = 1 - P\{Z \ge z\}$

当 $z < 0$ 时，$F_Z(z) = 1 - 1 = 0$

当 $0 \le z \le 1$ 时，$F_Z(z) = 1 - \int_{z}^{+\infty}\int_{z}^{+\infty} f(x, y)dxdy$

$$= 1 - \int_{z}^{1}\int_{z}^{1}(x+y)dxdy$$

$$= 1 - (1+z)(1-z)^2$$

当 $z > 1$ 时， $F_Z(z) = 1$

即

$$F_Z(z)=\begin{cases} 0 & (z<0) \\ 1-(1+z)(1-z)^2 & (0\le z\le 1) \\ 1 & (z>1) \end{cases}$$

所以

$$f_Z(z)=F_Z^{'}(z)=\begin{cases} (1-z)(1+3z) & (0\le z\le 1) \\ 0 & otherwise \end{cases}.$$