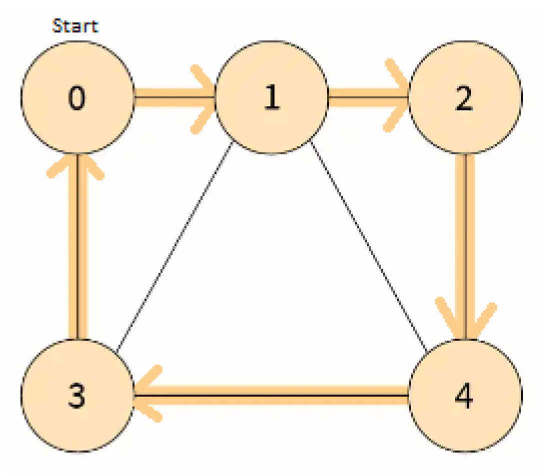
Problema Ciclului Hamiltonian

Martie 2024

1 Descrierea Problemei

Problema Ciclului Hamiltonian constă în găsirea unui ciclu într-un graf orientat sau neorientat care să înceapă dintr-un nod și să treacă prin toate celelalte noduri exact o dată ca la final să se întoarcă în nodul de pornire.



Un exemplu de graf cu un ciclu Hamiltonian cu nodul de pornire 0 și trecând prin restul nodurilor o singură dată astfel ajungând în final la nodul de pornire.

Câteva exemple de aplicații practice ale ciclului Hamiltonian în diverse domenii sunt următoarele:

- **Transport public:**
  În planificarea traseelor pentru mijloacele de transport în comun, cum ar fi autobuzele sau tramvaiele, Ciclul Hamiltonian poate fi utilizat pentru a optimiza rutele și frecvența de sosire pentru a acoperi toate zonele importante și pentru a minimiza timpul de călătorie al pasagerilor.
  Pentru a aplica Ciclul Hamiltonian în acest context, putem reprezenta

stațiile de autobuz sau tramvai ca noduri într-un graf, iar căile dintre aceste stații ca muchii. Obiectivul este să găsim un ciclu Hamiltonian care să treacă prin fiecare stație exact o dată, reprezentând astfel o rută completă pentru mijlocul de transport respectiv.

- **Design de proteine:**
  În biologie și biochimie, Ciclul Hamiltonian este folosit pentru a modela și a optimiza structura tridimensională a proteinelor. Găsirea unui ciclu Hamiltonian poate ajuta la determinarea unei secvențe de aminoacizi care formează o structură proteică stabilă și funcțională.
  În acest context, fiecare nod din graf reprezintă un aminoacid, iar muchiile reprezintă legăturile covalente între aceștia. Un ciclu Hamiltonian în acest graf ar reprezenta o secvență de aminoacizi care formează o structură proteică.

- **Proiectarea circuitelor integrate:**
  În proiectarea circuitelor integrate, problema Ciclului Hamiltonian poate fi aplicată pentru a găsi conexiuni eficiente între diferitele componente ale unui circuit, cum ar fi tranzistoarele sau porțile logice. Găsirea unui ciclu Hamiltonian poate ajuta la minimizarea lungimii liniilor de interconexiune, reducând astfel timpul de propagare și consumul de energie.
  În acest context, nodurile pot reprezenta componentele circuitului, iar muchiile pot reprezenta conexiunile între aceste componente. Găsirea unui ciclu Hamiltonian în acest graf poate aduce la optimizarea designului circuitului.

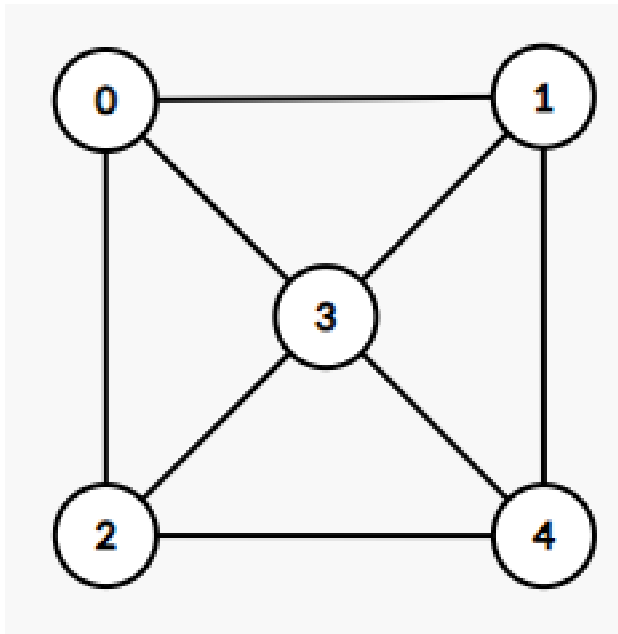
2 Demonstrarea că Problema este în NP

Problema Ciclului Hamiltonian este în clasa NP deoarece pentru orice ciclu propus ca soluție (certificat), putem verifica în timp polinomial dacă acesta este corect. Un certificat pentru problema Ciclului Hamiltonian ar fi propriu-zis ciclul propus în graful dat.
Verificarea unui certificat pentru Ciclul Hamiltonian poate fi realizată în câțiva pași simpli, iar timpul necesar pentru această verificare crește în mod polinomial odată cu mărimea grafului. Verificarea se poate realiza în modul următor:

1. Verificăm dacă ciclul propus începe și se termină în același nod.
2. Verificăm dacă fiecare nod al grafului este vizitat o singură dată în ciclul propus.
3. Verificăm dacă există o muchie între fiecare pereche consecutivă de noduri în ciclul propus.

Această verificare poate fi realizată în timp O(n), unde n este numărul de noduri din graf. Deoarece numărul de noduri este limitat de mărimea grafului, iar toți acești pași sunt realizabili într-un timp care este polinomial în raport cu

dimensiunea grafică, putem concluziona că Problema Ciclului Hamiltonian este în clasa NP.
Exemplu:



Pentru a verifica dacă un ciclu Hamiltonian există în acest graf, luăm în considerare un posibil certificat:
Ciclul propus este: 0, 1, 4, 3, 2, 0
Pentru a verifica dacă acest ciclu este Hamiltonian, vom urma pașii de verificare menționați anterior:

1. Ciclul începe și se termină în același nod, acela fiind nodul 0.
2. Fiecare nod (0, 1, 2, 3, 4) al grafului este vizitat o singură dată.
3. Există o muchie între fiecare pereche consecutivă de noduri (între 0 și 1, între 1 și 4, etc.).

Astfel, ciclul propus este într-adevăr un ciclu Hamiltonian în graf și, prin urmare, este o soluție corectă pentru Problema Ciclului Hamiltonian în acest graf. Verificarea certificatului (ciclului propus) a fost realizată cu succes într-un timp polinomial, ceea ce confirmă că Problema Ciclului Hamiltonian este în clasa NP.

3 NP-completitudine

Pentru a demonstra că Problema Ciclului Hamiltonian este NP-completă, vom folosi o reducere de la problema 3SAT. Problema 3SAT este cunoscută pentru

a fi NP-completă, deci reducerea de la 3SAT la Ciclul Hamiltonian arată că aceasta din urmă este, de asemenea, NP-completă.
Pentru a reduce problema 3SAT la problema Ciclului Hamiltonian, trebuie să construim un graf care să corespundă unei instanțe a problemei 3SAT. Avem următorii pași:

1. Construim n drumuri, n fiind numărul de variabile ale funcției boolene. Fiecare drum are 2*k noduri, k fiind numărul de clauze.

2. Adăugăm arcele de la stânga la dreapta între nodurile fiecărui drum cărora îi vor corespunde lui x_i = true și adăugăm arcele de la dreapta la stânga între nodurile fiecărui drum cărora îi vor corepunde lui x_i = false.

3. Adăugăm arce de la $v_{i,1}$ și $v_{i,2k}$ spre $v_{i+1,1}$ și $v_{i+1,2k}$, unde v este poziția nodului având coordonatele i,j care i este drumul și j al câtelea nod.

4. Adăugăm nodul de start și de final. Adăugăm arcele de la nodul de start la $v_{1,1}$ și $v_{1,2k}$. Adăugăm arcele de la nodul de final la $v_{P,1}$ și $v_{P,2k}$, P fiind ultimul drum. Mai adăugăm și un arc de la nodul final la nodul de start.

5. Adăugăm k noduri, k fiind numărul de clauze, fiecare nod reprezent o clauză.

6. Adăugăm arce în funcție dacă clauza îl conține pe x și cum este acesta. Conexiunea de face între nodul clauză și nodurile $v_{i,2j-1}$ și $v_{i,2j}$. Direcția arcelor se decide în funcție de cum e x în clauză, dacă x este true atunci avem muchiile: $v_{i,2j-1}$ - clauză și clauză - $v_{i,2j}$, altfel dacă x este false atunci avem muchiile: clauză - $v_{i,2j-1}$ și $v_{i,2j}$ - clauză.

Prin urmare, pașii de construire a grafului și de conectare a nodurilor sunt esențiale pentru a obține un graf care să aibă un ciclu Hamiltonian dacă și numai dacă formula 3SAT este satisfiabilă. Astfel, acești pași sunt validați în cadrul reducerii de la problema 3SAT la problema Ciclului Hamiltonian. După construirea grafului verificăm dacă există un ciclu Hamiltonian și dacă există îi atribuim variabilelor valorea sa. Astfel, dacă cliclul Hamiltonian a trecut prin toate nodurile de tip clauză și cel puțin odată drumul P_i a fost traversat în direcția corectă spre clauză, atunci 3SAT este satisfiabilă.

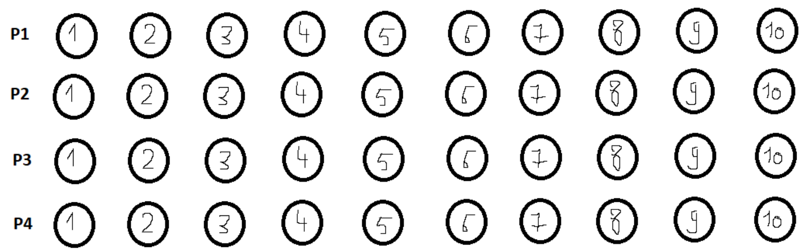
4 Exemplificați reducerea

Pentru a exemplifica reducerea pentru o funcție booleană în forma 3SAT, având 4 variabile și 5 clauze, vom lua în considerare o formulă 3SAT simplă cu următoarele clauze:

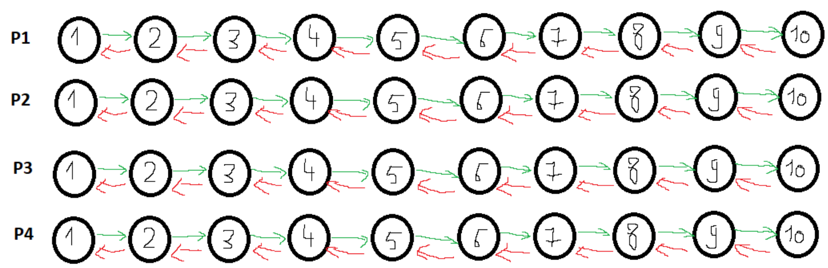
$$(x_1 \vee x_2 \vee \bar{x}_3) \wedge (\bar{x}_1 \vee x_2 \vee x_4) \wedge (\bar{x}_2 \vee \bar{x}_3 \vee x_4) \wedge (x_1 \vee \bar{x}_3 \vee \bar{x}_4) \wedge (\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 \vee x_4)$$

Pentru a construi graful corespunzător și a demonstra că acesta are un ciclu Hamiltonian dacă și numai dacă formula 3SAT este satisfiabilă, vom urma pașii

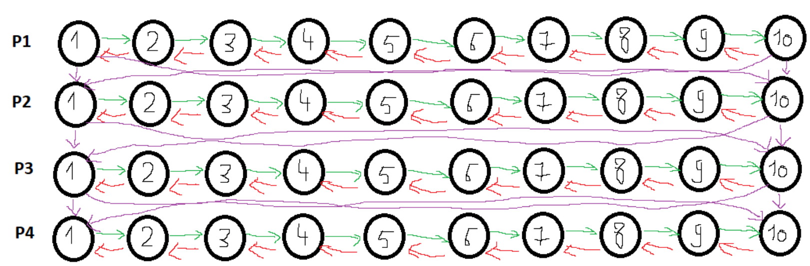
de reducere detaliați anterior.
Construim 4 drumuri deoarece avem 4 variabile și fiecare drum va avea câte 10 noduri întrucât avem 5 clauze.



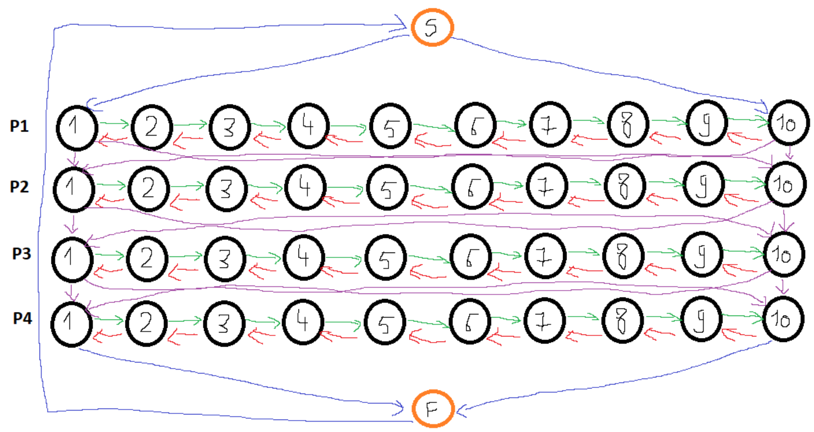
Adăugăm arcele la drumuri astfel:



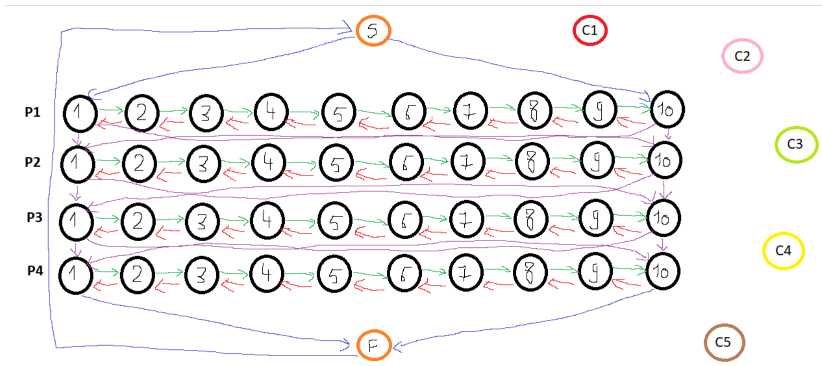
Arc de la stânga la dreapta pentru x_i = true (săgeata verde) și arc de la dreapta la stânga pentru x_i = false (săgeata roșie).
Adăugăm arce între nodurile de pe prima coloană (1, 1, 1, 1), între nodurile de pe ultima colonă (10, 10, 10, 10), între nodurile de pe prima coloană cu nodurile de pe ultima coloană care sunt pe un drum mai în jos decât ele (P1: 1 - P2: 10, P2: 1 - P3: 10, etc.) și între nodurile de pe ultima coloană cu nodurile de pe prima coloană care sunt pe un drum mai în jos decât ele (P1: 10 - P2: 1, P2: 10 - P3:1, etc.). Toate aceste arce fiind reprezentate prin săgeata mov.



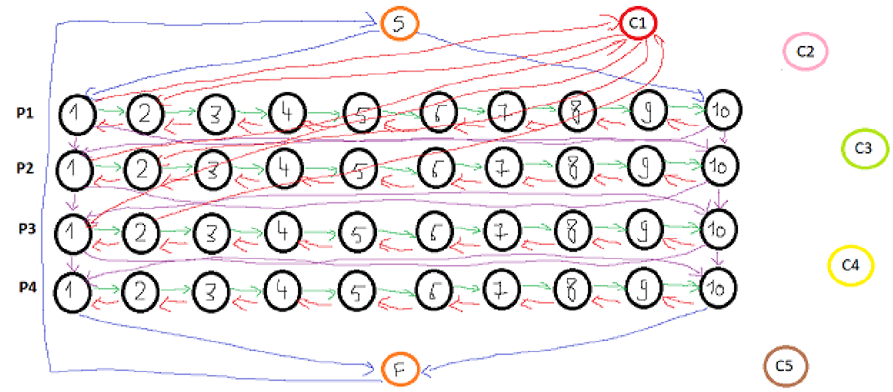
Adăugăm nodul de start și nodul de final (nodurile cu portocaliu). Mai adăugăm și arcul dintre noduril de final și cel de start, arcul dintre nodul de start și primul nod din prima coloană, arcul dintre nodul de start și primul nod din ultima coloană, arcul dintre nodul de final și ultimul nod din prima coloană și arcul dintre nodul de final și ultimul nod fin ultima coloană.



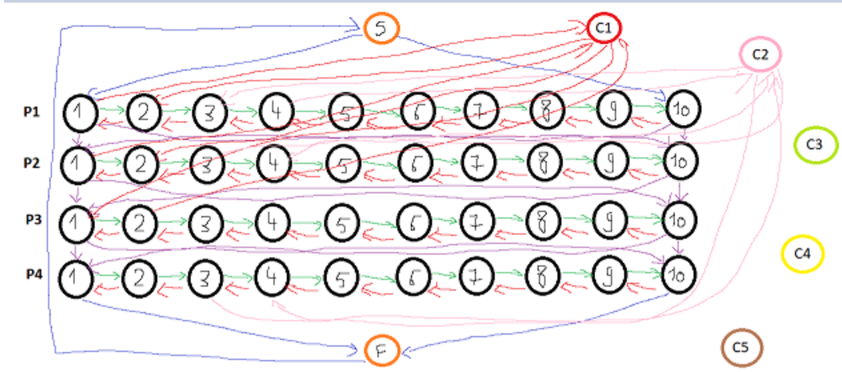
Am adăugat 5 noduri care fiecare corespunde unei clauze.



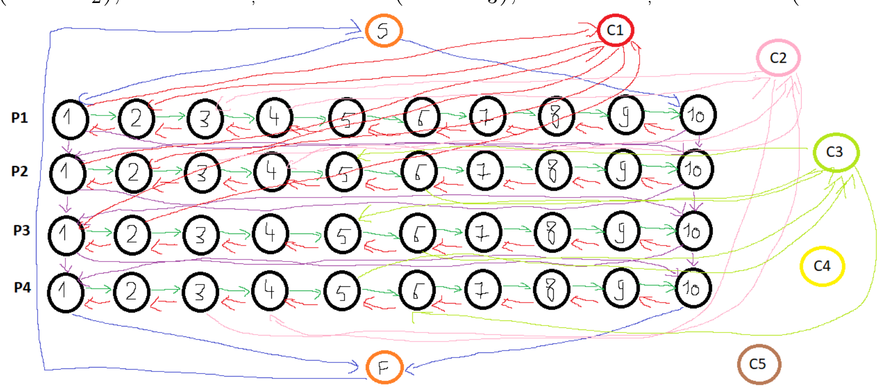
Pentru prima clauză am adăugat următoarele arce: P1:1 - C1 și C1 - P1:2 (avem x_1), P2:1 - C1 și C1 - P2:2 (avem x_2), C1 - P3:1 și P3:2 - C1 (avem $\bar{x}_3$).



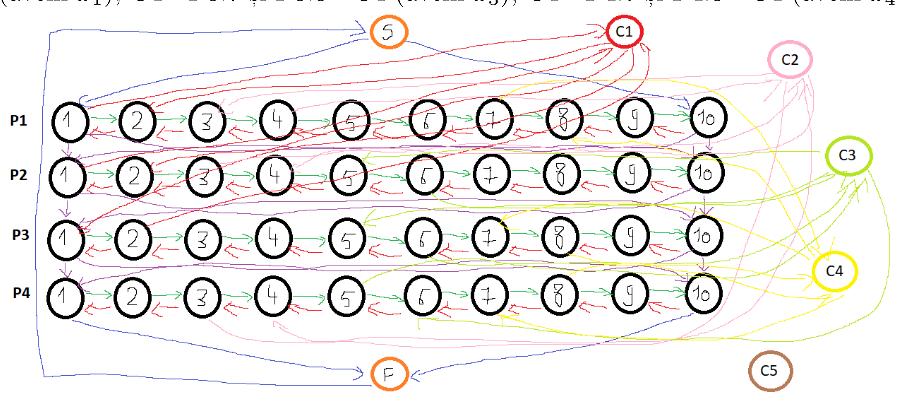
Pentru a doua clauză am adăugat următoarele arce: C2 - P1:3 și P1:4 - C2 (avem $\bar{x}_1$), P2:3 - C2 și C2 - P2:4 (avem x_2), P4:3 - C2 și C2 - P4:4 (avem x_4).



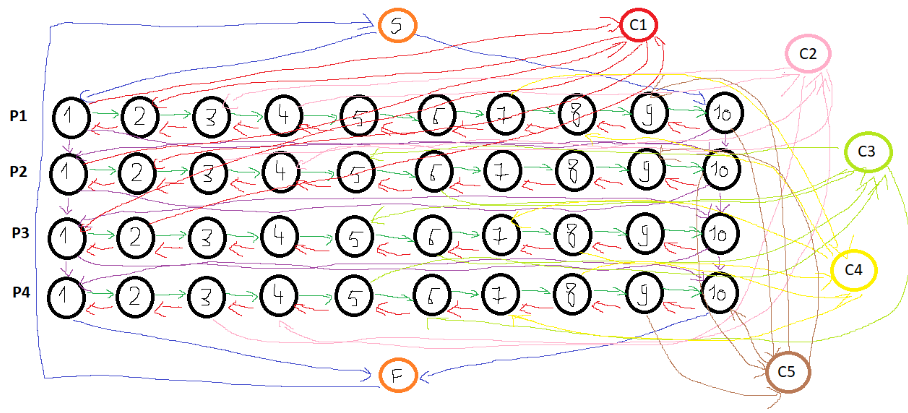
Pentru a treia clauză am adăugat următoarele arce: C3 - P2:5 și P2:6 - C3 (avem $\bar{x}_2$), C3 - P3:5 și P3:6 - C3 (avem $\bar{x}_3$), P4:5 - C3 și C3 - P4:6 (avem x_4).



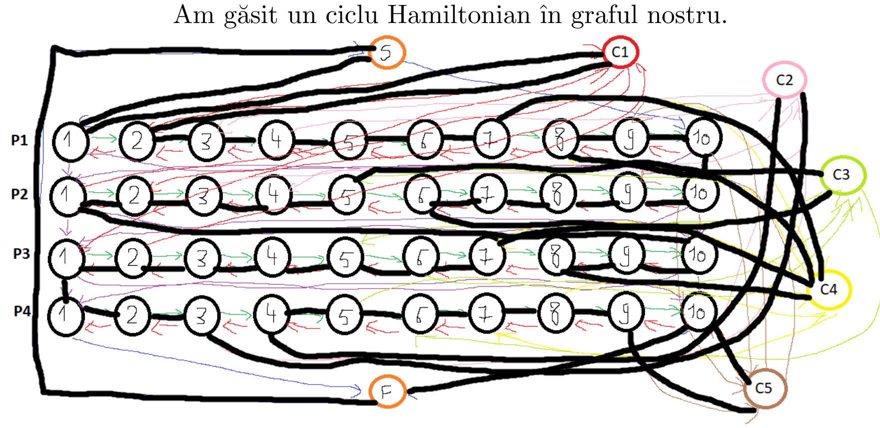
Pentru a patra clauză am adăugat următoarele arce: P1:7 - C4 și C4 - P1:8 (avem x_1), C4 - P3:7 și P3:8 - C4 (avem $\bar{x}_3$), C4 - P4:7 și P4:8 - C4 (avem $\bar{x}_4$).



Pentru a cincea clauză am adăugat următoarele arce: C5 - P1:9 și P1:10 - C5 (avem $\bar{x}_1$), C5 - P2:9 și P2:10 - C5 (avem $\bar{x}_2$), P4:9 - C5 și C5 - P4:10 (avem x_4).



Am găsit un ciclu Hamiltonian în graful nostru.



Din ciclul Hamiltonian rezultă x_1 = true (trecem de la stânga la dreapta), x_2 = false (trecem de la dreapta la stânga), x_3 = false (trecem de la dreapta la stânga) și x_4 = true (trecem de la stânga la dreapta). În final, forma 3SAT este satisfabilă astfel rezultând că ciclul Hamiltonian este NP - completă deoarece ciclul găsit îndeplineste toate cerințele detaliate în secțiunea anterioară.