Julia 集的分析和探索

杨钧尹 3200103573

信息与计算科学

摘要

本文简要介绍了朱莉娅集 (Julia Set) 的背景、基本理论与算法，在多维参数的情形下通过具象的数值算例探索其图像的特性；同时，引入曼德博集 (Mandelbrot Set) 与之比较，试图探索二者在理论与图像上的内在关系。

关键词: 朱莉娅集合，曼德博集合，分形理论，几何学

1　引言

Julia 集是一种在复平面上非发散点形成的分形点的集合，由法国数学家 Gaston Maurice Julia 等人所提出。同 Mandelbrot 集一样，它可以由复数域下的简单多项式迭代而来，图像奇异美妙，又具有一定的几何规则。

几何学与人类文明如影随形。从古典的欧式几何到 Mandelbrot 提出的分形理论，在数学家们的眼中，具象的现实世界所刻画的纷繁形态似乎总是可以被抽象为简练的数学语言。

1967 年，Mandelbrot 在研究海岸线长度时提出自然界中总是普遍存在着“自相似”的结构，并将此种整体与局部以某种方式相似的形体称作“分形”(Fractal)，由此建立了一套未来将广泛用于工程、经济等各个领域的崭新理论。[1] 作为迭代理论和现代分形理论的两位主要发明者之一，Julia 在研究复数多项式函数迭代的过程中意识到，随着迭代的进行，趋向于限制位置的点和从未稳定下来的点之间存在关键的区别，而后者便属于迭代的 Julia 集。[2]

图 1: Gaston Maurice Julia[3]

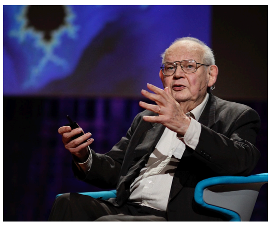

图 2: Benoit B. Mandelbrot[4]

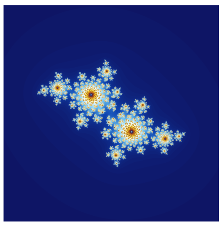

图 3: Julia 集:$c = -0.4 + 0.6i$[5]

只需利用最简单的迭代关系便能绘制出一幅极为规整复杂的图案，这是二者的精妙所在。本文将从 Julia 集出发，在分析其特性与算法的基础上，通过实例展现二者的内在联系与重要意义。

2 理论

2.1 定义

Julia 集和 Mandelbrot 集使用相同的复二次多项式（式中 c 为复数参数）来定义：

$$f_c(z) = z^2 + c$$

对于固定的复数 c，取某一 z 值（如 $z = z_0$），可以得到序列

$$(z_0, f_c(z_0), f_c(f_c(z_0)), f_c(f_c(f_c(z_0))) \cdots)$$

这一序列可能发散于无穷大或始终处于某一范围之内并收敛于某一值。我们将使其不扩散的 z 值的集合称为 Julia 集。[5]

而若从 $z = 0$ 开始对 $f_c(z)$ 进行 $z_{n+1} = z_n^2 + c, n = 0, 1, 2, \cdots$ 迭代，可以得到序列

$$(0, f_c(0), f_c(f_c(0)), f_c(f_c(f_c(0))) \cdots)$$

此时不同的参数 c 可能使迭代值的模逐渐发散到无限大，也可能收敛在有限的区域内，从而构建出使序列不延伸至无限大的所有复数 c 的集合——Mandelbrot 集。

由此可见，相较后者，Julia 集是在固定 c 的情形下计算发散的 z 的值，这意味着不同的 c 可以得到迥然不同的图形，且决定图案形状的因素有且仅有 c。倘若将所有 c 情形的 Julia 集刻画于同一复域平面上，则可以得到 Mandelbrot 集。

2.2 特性

- 迭代方式决定了 Julia 集是无限的。[6]
- **定理** (Fundamental Dichotomy Theorem)[7]

  一个 Julia 集或者是完全连通的，任意两点间都有一条通路；或者是完全不连通的，整个图形全是一个个孤立的点。
- Julia 集和 Mandelbrot 集都具有自相似性。

根据上述定理，我们可以认为：连通的 Julia 集所对应的参数就是 Mandelbrot 集中的点，Mandelbrot 集则可以视作所有二次 Julia 集的缩略图。他们在相同 c 的情形下存在结构与形态上的紧密联系。[8]

3 算法

3.1 基本思路

设计算法时，我们一般采用下述收敛判断方法以在有限的运算量中不断逼近 Julia 集。

我们通常假设 $|c| < 2$，那么经过 k 次迭代后，倘若 $|z| > 2$，这意味着 $|z^2| = |z|^2 > 2 \cdot |z|$，显然，$|z|$ 自此随着迭代越来越大，即该点发散。反之，这样的点可以构成的模抵消到原来的水平。因此，在迭代运算过程中，一旦某一步结果的模大于 2 了，可以断定它必将发散到无穷。[7]

但在实际计算中，我们自然无法找出所有的收敛点，但可以采取有限逼近的方法寻找所有模不大于 2 的点集；而由于图像的精度是有限的，最终可以转化为对平面网格上所有点进行收敛判定 → 填充的一般算法，伪代码如下：

```
R = escape radius  # R > 0 && R^2 - R >= sqrt(cx^2 + cy^2)
For Each Pixel(x,y) on the screen:
    zx = scaled x coordinate of pixel;
    zy = scaled y coordinate of pixel;
    iteration = 0;
    max_iteration = 1000;
    while (zx * zx + zy * zy < R^2  &&  iteration < max_iteration)
        xtemp = zx * zx - zy * zy;
        zy = 2 * zx * zy  + cy;
        zx = xtemp + cx;
        iteration = iteration + 1;
    if (iteration == max_iteration): let the pixel be black;
    else: return iteration;
Finish drawing pixels, output the bmp file.
```

3.2 测试算法

为了更为自由地呈现生成图片的细节以便于测试，算法中还设计了一些可调的参数：

- 迭代次数`N`：控制最大迭代次数，理论上数值越大，图像越精细。
- 图像中心坐标`ox,oy`：控制生成图像在画布上的中心位置。
- 图像半径尺寸`Dimension`：实现缩放效果。
- Julia 迭代参数 c 的实部和虚部：控制该参数，改变生成图像形态。

4 算例分析

设定迭代次数 N Iteration 图像中心点 ox/oy 图像半径尺寸 Dimension

5 结论

由以上的数值算例我们不难得出结论: 迭代次数 N 在一定范围内时，N 越大，所得到的 Julia Set 图像就越精确。也不难看出，所得图像是一个中心对称图形，与 Mandelbrot Set 图像类似，Julia Set 图像也能被无限放大，也同样具有自相似性。同时我们可以发现，当 c 的取值在 Mandelbrot Set 之内时，Julia Set 是连接的，但当 c 不属于 Mandelbrot Set 时，Julia Set 相应的是断开的。

参考文献

[1] Wikipedia, “Mandelbrot Set,” https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Mandelbrot_set, 2022, accessed:2022-07-04.

[2] Britannica, “Gaston Maurice Julia | French mathematician | Britannica,” https://www.britannica.com/biography/Gaston-Maurice-Julia, 2022, accessed:2022-07-04.

[3] MacTutor, "Gaston Julia (1893 - 1978) - Biography - MacTutor History of Mathematics," https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Julia/, 2022, accessed:2022-07-04.

[4] Wikipedia, "Benoit Mandelbrot," https://en.wikipedia.org/wiki/Benoit_Mandelbrot, 2022, accessed:2022-07-04.

[5] Wikipedia, "The Julia Set," https://en.wikipedia.org/wiki/Julia_set, 2022, accessed:2022-07-04.

[6] G. Julia, "Mémoire sur l'iteration des fonctions rationnelles," *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées*, vol. vol.8.47, 1918.

[7] Complex Analysis, "再谈 julia 集与 mandelbrot 集," http://www.matrix67.com/blog/archives/4570, 2022, accessed:2022-07-04.

[8] Juan Carlos Ponce Campuzano, "The Julia Set," https://complex-analysis.com/content/julia_set.html, 2022, accessed:2022-07-04.