# Julia 集的分析和探索

杨钧尹 3200103573

信息与计算科学

**摘要**

本文简要介绍了朱莉娅集 (Julia Set) 的背景、基本理论与算法；同时，引入曼德博集 (Mandelbrot Set) 与之比较，试图探索二者在理论与图像上的内在关系。最后，在多维参数的情形下通过具象的数值算例探索了二者图像特性之异同，得出了诸多实用的结论。

**关键词:** 朱莉娅集合，曼德博集合，分形理论，几何学

## 1 引言

Julia 集是一种在复平面上非发散点形成的分形点的集合，由法国数学家 Gaston Maurice Julia 等人所提出。同 Mandelbrot 集一样，它可以由复数域下的简单多项式迭代而来，图像奇异美妙，又具有一定的几何规则。

几何学与人类文明如影随形。从古典的欧式几何到 Mandelbrot 提出的分形理论，在数学家们的眼中，具象的现实世界所刻画的纷繁形态似乎总是可以被抽象为简练的数学语言。

1967 年，Mandelbrot 在研究海岸线长度时提出自然界中总是普遍存在着"自相似"的结构，并将此种整体与局部以某种方式相似的形体称作"分形"(Fractal)，由此建立了一套未来将广泛用于工程、经济等各个领域的崭新理论。[1] 作为迭代理论和现代分形理论的两位主要发明者之一，Julia 在研究复数多项式函数迭代的过程中意识到，随着迭代的进行，趋向于限制位置的点和从未稳定下来的点之间存在关键的区别，而后者便属于迭代的 Julia 集。[2]

图 1: Gaston Maurice Julia[3]

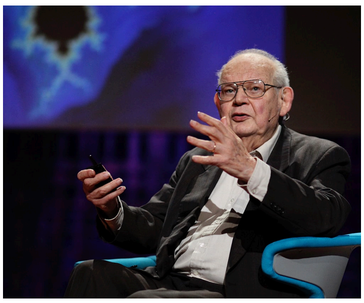

图 2: Benoit B. Mandelbrot[4]

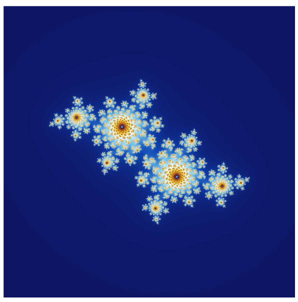

图 3: Julia 集:$c = -0.4 + 0.6i$[5]

只需利用最简单的迭代关系便能绘制出一幅极为规整复杂的图案，这是二者的精妙所在。本文将从 Julia 集出发，在分析其特性与算法的基础上，通过实例展现二者的内在联系与重要意义。

# 2 理论

## 2.1 定义

Julia 集和 Mandelbrot 集使用相同的复二次多项式（式中 $c$ 为复数参数）来定义：

$$f_c(z) = z^2 + c$$

对于固定的复数 c，取某一 z 值（如 $z = z_0$），可以得到序列

$$(z_0, f_c(z_0), f_c(f_c(z_0)), f_c(f_c(f_c(z_0)))\cdots)$$

这一序列可能发散于无穷大或始终处于某一范围之内并收敛于某一值。我们将使其不扩散的 z 值的集合称为 Julia 集。[5]

而若从 $z = 0$ 开始对 $f_c(z)$ 进行 $z_{n+1} = z_n^2 + c, n = 0, 1, 2, \cdots$ 迭代，可以得到序列

$$(0, f_c(0), f_c(f_c(0)), f_c(f_c(f_c(0)))\cdots)$$

此时不同的参数 $c$ 可能使迭代值的模逐渐发散到无限大，也可能收敛在有限的区域内，从而构建出使序列不延伸至无限大的所有复数 $c$ 的集合——Mandelbrot 集。

由此可见，相较后者，Julia 集是在固定 $c$ 的情形下计算发散的 $z$ 的值，这意味着不同的 $c$ 可以得到迥然不同的图形，且决定图案形状的因素有且仅有 $c$。倘若将所有 $c$ 情形的 Julia 集刻画于同一复域平面上，则可以得到 Mandelbrot 集。

## 2.2 特性

- 迭代方式决定了 Julia 集是无限的。[6]
- **定理** (Fundamental Dichotomy Theorem)[7]

  一个 Julia 集或者是完全连通的，任意两点间都有一条通路；或者是完全不连通的，整个图形全是一个个孤立的点。
- Julia 集和 Mandelbrot 集都具有自相似性。

根据上述定理，我们可以认为：连通的 Julia 集所对应的参数就是 Mandelbrot 集中的点，Mandelbrot 集则可以视作所有二次 Julia 集的缩略图。他们在相同 $c$ 的情形下存在结构与形态上的紧密联系。[8]

# 3 算法

## 3.1 基本思路

设计算法时，我们一般采用下述收敛判断方法以在有限的运算量中不断逼近 Julia 集。

我们通常假设 $|c| < 2$，那么经过 $k$ 次迭代后，倘若 $|z| > 2$，这意味着 $|z^2| = |z|^2 > 2 \cdot |z|$，显然，$|z|$ 自此随着迭代越来越大，即该点发散。反之，这样的点可以构成的模抵消到原来的水平。因此，在迭代运算过程中，一旦某一步结果的模大于 2 了，可以断定它必将发散到无穷。[7]

但在实际计算中，我们自然无法找出所有的收敛点，但可以采取有限逼近的方法寻找所有模不大于 2 的点集；而由于图像的精度是有限的，最终可以转化为对平面网格上所有点进行收敛判定 → 填充的一般算法，伪代码如下：

```
R = escape radius  # R > 0 && R^2 - R >= sqrt(cx^2 + cy^2)
For Each Pixel(x,y) on the screen:
    zx = scaled x coordinate of pixel;
    zy = scaled y coordinate of pixel;
    iteration = 0;
    max_iteration = 1000;
    while (zx * zx + zy * zy < R^2  &&  iteration < max_iteration)
        xtemp = zx * zx - zy * zy;
        zy = 2 * zx * zy  + cy;
        zx = xtemp + cx;
        iteration = iteration + 1;
    if (iteration == max_iteration): let the pixel be black;
    else: return iteration;
Finish drawing pixels, output the bmp file.
```

### 3.2 测试算法

为了更为自由地呈现生成图片的细节以便于测试，算法中还设计了一些可调的参数：

- 迭代次数`N`：控制最大迭代次数，理论上数值越大，图像越精细。
- 图像中心坐标`ox,oy`：控制生成图像在画布上的中心位置。
- 图像半径尺寸`Dimension`：实现缩放效果。
- Julia 迭代参数 $c$ 的实部和虚部：控制该参数，改变生成图像形态。

## 4 算例分析

由前述算法构建的测试算例源文件附于 src 目录，测试流程体现于 Shell 脚本。以下图像标题以 N , ox , oy , Deminsion , creal , cimag 的顺序标注参数数据，其中后两者仅限于 Julia 集。

**Step.1** 图像分析

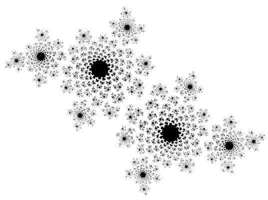

图 4: 100,0,0,2,-0.4,0.6

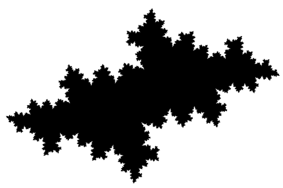

图 5: 100,0,0,2,-0.6,-0.4

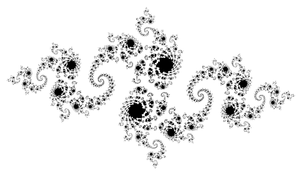

图 6: 100,0,0,2,-0.8,0.16

首先输入不同参数 $c$，成功生成了不同条件下的 Julia 集图像。对于不同的参数 $c$，得到的图像也迥然各异；然而，这些图像基本都具有一定的自相似性，组成图案的要素是富有规则的几何图形。

**Step.2** 算法检验

紧接着控制变量，分别改变图4、图5、图6的 N,Deminsion 与 ox,oy，可见算法的各项功能得到了良好的实现。

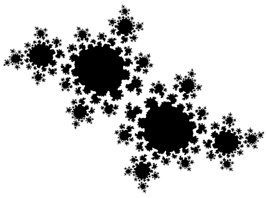

图 7: 40,0,0,2,-0.4,0.6

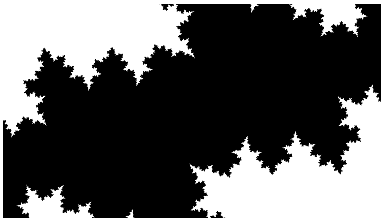

图 8: 100,0,0,1,-0.6,-0.4

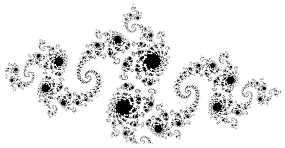

图 9: 100,0.6,0.5,2,-0.8,0.16

随着迭代次数减少，图像精细程度不断下降；随着 Deminsion 减少，图像相应放大；改变 ox 与 oy 的值，图像则相应平移。

对比还可以发现，图4与前文示例图3的参数 $c$ 相同，得到的结果也基本一致，验证了算法的可行性；同理，$c$ 相同的图4和图7只存在精细程度的差异，也说明了理想的 Julia 集图形态只与 $c$ 的取值有关；此外，图像在放大后只需要求迭代次数足够大，仍能保证足够的精细度。

**Step.3** 特性比较

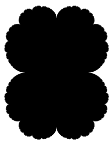

图 10: Julia,100,0,0,3,0.25,0

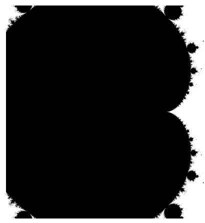

图 11: Mandelbrot,100,0.4,0,1

对比 Julia 集图和 Mandelbrot 集的局部放大图，可以发现二者在结构上的相似性。我们已经知道，所有 $c$ 情形的 Julia 集图全体便是后者。

## 5 结论

自此，本文在引入 Mandelbrot 集作为参照的情形下介绍了 Julia 集的背景、原理与算法实现方式，成功将迭代公式付诸计算机图像绘制的实践，探索了 Julia 图像的诸多特性。

总体而言，本文得出了以下结论：Julia 集合图像具有中心对称的特性；Mandelbrot 集合本质是所有参数 $c$ 情形的 Julia 集合的全体；二者使用相同且简洁的复二次多项式作为迭代意义上的基本定义，只是迭代的参数有所不同；二者都具有无限精细、自相似的特性；当 $c$ 的取值在 Mandelbrot 集合内部时，Julia 集合是连通的；反之同理。

通过算例的分析与比较，相信读者对二者所代表的分形几何理论有了更为深入的感知。我们可以明晰 Julia 集与 Mandelbrot 集在迭代方式上的共性，认识到此种自相似性在自然界中的普遍存在与美学价值，也或许会惊叹于自然界的纷繁被如此简洁公式所极尽刻画的奇妙。

# 参考文献

[1] Wikipedia, “Mandelbrot Set,” https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Mandelbrot_set, 2022, accessed:2022-07-04.

[2] Britannica, “Gaston Maurice Julia | French mathematician | Britannica,” https://www.britannica.com/biography/Gaston-Maurice-Julia, 2022, accessed:2022-07-04.

[3] MacTutor, “Gaston Julia (1893 - 1978) - Biography - MacTutor History of Mathematics,” https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Julia/, 2022, accessed:2022-07-04.

[4] Wikipedia, “Benoit Mandelbrot,” https://en.wikipedia.org/wiki/Benoit_Mandelbrot, 2022, accessed:2022-07-04.

[5] Wikipedia, “The Julia Set,” https://en.wikipedia.org/wiki/Julia_set, 2022, accessed:2022-07-04.

[6] G. Julia, “Mémoire sur l’iteration des fonctions rationnelles,” *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées*, vol. vol.8.47, 1918.

[7] Complex Analysis, “再谈 julia 集与 mandelbrot 集,” http://www.matrix67.com/blog/archives/4570, 2022, accessed:2022-07-04.

[8] Juan Carlos Ponce Campuzano, “The Julia Set,” https://complex-analysis.com/content/julia_set.html, 2022, accessed:2022-07-04.