

Julia 集的分析 and 探索

杨钧尹

浙江大学数学科学学院

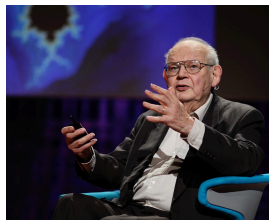
2022 年 7 月 4 日

从分形理论说起

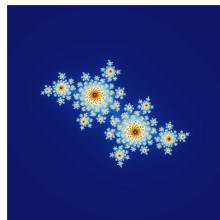
Julia 集是一种在复平面上非发散点形成的分形点的集合。



Gaston Maurice Julia



Benoit B. Mandelbrot



$c = -0.4 + 0.6i$ 的例子

自相似性 整体与局部以某种方式相似。

分形 具有自相似性的形体。

Fractal: 具有不规则、支离破碎等意义。

复二次多项式定义

迭代公式:

$$f_c(z) = z^2 + c$$

Julia 集

对于固定的复数 c , 取某一 z 值 (如 $z = z_0$), 可以得到序列

$$(z_0, f_c(z_0), f_c(f_c(z_0)), f_c(f_c(f_c(z_0)))) \cdots$$

这一序列可能发散于无穷大或始终处于某一范围之内并收敛于某一值。我们将使其不扩散的 z 值的集合称为 Julia 集。

Mandelbrot 集

而若从 $z = 0$ 开始对 $f_c(z)$ 进行 $z_{n+1} = z_n^2 + c, n = 0, 1, 2, \cdots$ 迭代, 可以得到序列

$$(0, f_c(0), f_c(f_c(0)), f_c(f_c(f_c(0)))) \cdots$$

构建出使序列不延伸至无限大的所有复数 c 的集合, 称为 Mandelbrot 集。

Julia 集是在固定 c 的情形下计算发散的 z 的值, 决定图案形状的因素有且仅有 c 。倘若将所有 c 情形的 Julia 集刻画于同一复域平面上, 则可以得到 Mandelbrot 集。

基本定义

- 迭代方式决定了 Julia 集是无限的。
- **【定理】 Fundamental Dichotomy Theorem**
一个 Julia 集或者是完全连通的，任意两点间都有一条通路；或者是完全不连通的，整个图形全是一个个孤立的点。
- Julia 集和 Mandelbrot 集都具有自相似性。

结论

连通的 Julia 集所对应的参数就是 Mandelbrot 集中的点 Mandelbrot 集则可以视作所有二次 Julia 集的缩略图。他们在相同 c 的情形下存在结构与形态上的紧密联系。

设计算法的步骤和思路

我们通常假设 $|c| < 2$ ，那么经过 k 次迭代后，倘若 $|z| > 2$ ，这意味着 $|z^2| = |z|^2 > 2 \cdot |z|$ ，显然， $|z|$ 自此随着迭代越来越大，即该点发散。反之，这样的点可以构成的模抵消到原来的水平。因此，在迭代运算过程中，一旦某一步结果的模大于 2 了，可以断定它必将发散到无穷。

但在实际计算中，我们无法找出所有的收敛点；
采取有限逼近的方法寻找所有模不大于 2 的点集；
转化为对平面网格上所有点遍历的一般算法：

- 收敛判定，确定是否填色。
- 填充颜色，输出为 bmp 图像。

- 迭代次数 N ：控制最大迭代次数，理论上数值越大，图像越精细。
- 图像中心坐标 ox, oy ：控制生成图像在画布上的中心位置。
- 图像半径尺寸 $Dimension$ ：实现缩放效果。
- Julia 迭代参数 c 的实部和虚部：控制该参数，改变生成图像形态。

设计算法的步骤和思路

算法伪代码:

```

R = escape radius  #  $R > 0$  &&  $R^2 - R \geq \sqrt{cx^2 + cy^2}$ 
For Each Pixel(x,y) on the screen:
    zx = scaled x coordinate of pixel;
    zy = scaled y coordinate of pixel;
    iteration = 0;
    max_iteration = 1000;
    while (zx * zx + zy * zy <  $R^2$  && iteration < max_iteration)
        xtemp = zx * zx - zy * zy;
        zy = 2 * zx * zy + cy;
        zx = xtemp + cx;
        iteration = iteration + 1;
    if (iteration == max_iteration): let the pixel be black;
    else: return iteration;
Finish drawing pixels, output the bmp file.

```

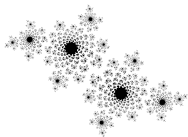


图: 100,0,0,2,-0.4,0.6

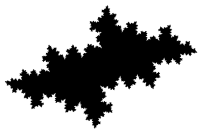


图: 100,0,0,2,-0.6,-0.4

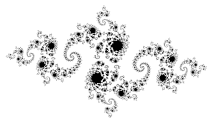


图: 100,0,0,2,-0.8,0.16

首先输入不同参数 c ，成功生成了不同条件下的 Julia 集图像。对于不同的参数 c ，得到的图像也迥然各异；然而，这些图像基本都具有一定的自相似性，组成图案的要素是富有规则的几何图形。

算法检验

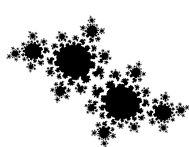


图: 40,0,0,2,-0.4,0.6



图: 100,0,0,1,-0.6,-0.4



图: 100,0.6,0.5,2,-0.8,0.16

紧接着控制变量，分别改变图1、图2、图3的 N , $Deminsion$ 与 ox, oy ，可见算法的各项功能得到了良好的实现。

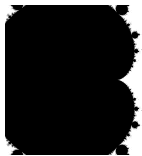
随着迭代次数减少，图像精细程度不断下降；随着 $Deminsion$ 减少，图像相应放大；改变 ox 与 oy 的值，图像则相应平移。

对比还可以发现，图1与前文示例图??的参数 c 相同，得到的结果也基本一致，验证了算法的可行性；同理， c 相同的图1和图4只存在精细程度的差异，也说明了理想的 **Julia** 集图形态只与 c 的取值有关；此外，图像在放大后只要求迭代次数足够大，仍能保证足够的精细度。

特性比较



Julia,100,0,0,3,0.25,0



Mandelbrot,100,0.4,0,1

对比 Julia 集图和 Mandelbrot 集的局部放大图，可以发现二者在结构上的相似性。我们已经知道，所有 c 情形的 Julia 集图全体便是后者。

总结

- Julia 集合图像具有中心对称的特性；
- Mandelbrot 集合本质是所有参数 c 情形的 Julia 集合的全体；
- 二者都具有无限精细、自相似的特性；
- 二者使用相同且简洁的复二次多项式作为迭代意义上的基本定义；
- 二者差异在于迭代的参数有所不同；
- 当 c 的取值在 Mandelbrot 集合内部时，Julia 集合是连通的，反之同理。

自然界的纷繁被简洁公式所极尽刻画的奇妙
自相似性在自然界中的普遍存在与美学价值