Particiones de Enteros

Página web interactiva.

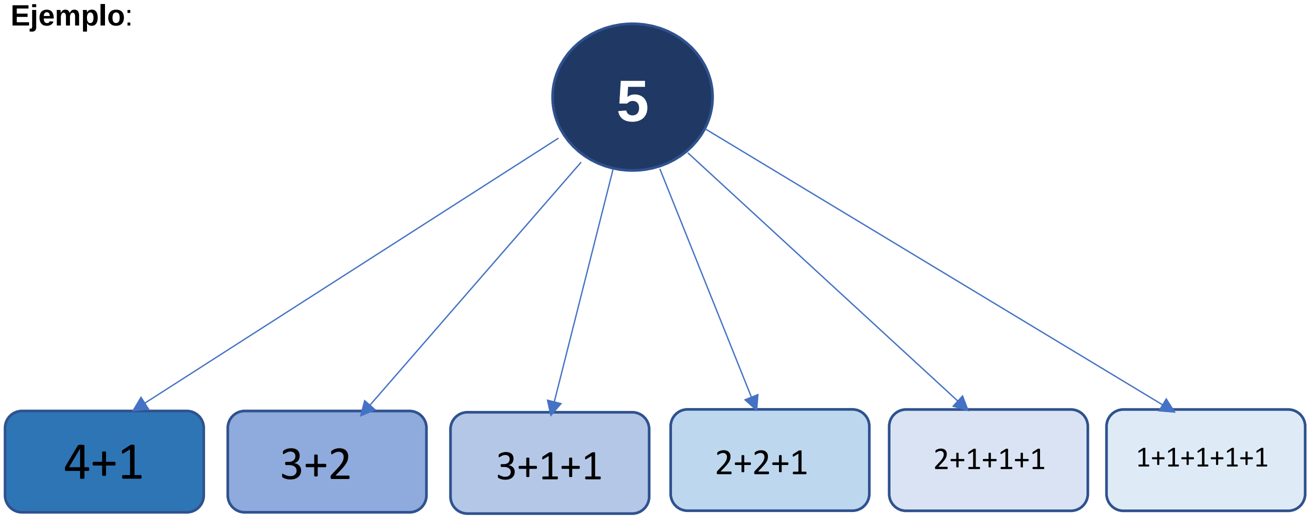
Luis José Ordoñez.

El objetivo del tema es desarrollar un tutor o una herramienta que ayude y facilite el entendimiento del tema ‘Particiones de Enteros’ el cual será desarrollado como una pagina web utilizando HTML para su estructura básica, CSS para su mejora visual y JAVASCRIPT para hacer este sitio web más interactivo y amigable para el usuario.

El tema particiones de enteros será abordado por partes, que están compuestas por la introducción, la definición, los tipos de particiones, las propiedades sus teoremas y su aplicación práctica. Todo esto será desarrollado en un ámbito amigable para que el estudiante entienda de manera visual todo este contenido.

Las particiones de enteros nacen cuando Leibniz le pregunta mediante una carta dirigida a Bernoulli el número de maneras en las que se puede escribir a un número entero positivo n como suma de enteros no negativos, es decir el número de particiones de n.

Ejemplo:



(Desarrollo para N números) Ir mas paso a paso para explicar bien todo

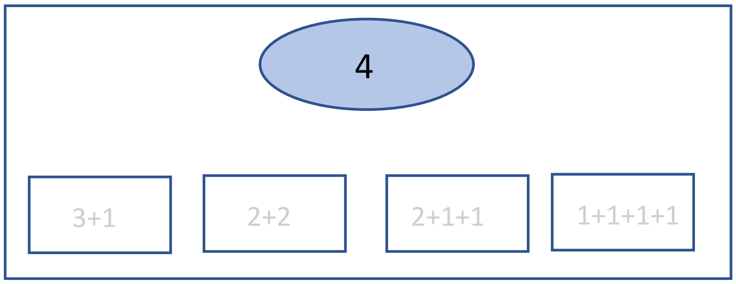
Podemos definir que una partición (Ordenada) de un entero positivo n es una n-tupla α=(a,…,an) de números naturales que cumplen que a1 ≥ 2 ≥ … ≥ an ≥ 0 y n = a1 + a2 + … + an. Es una forma de descomponer el numero n que tenemos en sumas de números enteros más pequeños

Ejemplo 2:

(3,2,2,1) es una de las particiones del número **8**, ya que como se mostró anteriormente 3 ≥ 2 ≥ 2 ≥ 1 y 3 + 2 + 2 + 1 = 8

Ejercicio:

Coloque las particiones en orden del número 4.



Las Particiones de números enteros también podemos verlas de manera visual con esquemas para que puedan ser entendidos de manera más sencilla, en este caso tenemos dos maneras de representarlas las cuales son:

- Esquemas de Ferrer: Es un esquema representado por bolas o puntos, donde cada punto representa una unidad y se ordenan acumulando, por ejemplo:

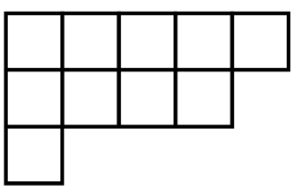
  O O O O O

  O O O O

  O

  Donde entendemos que es 5 + 4 + 1 = 10

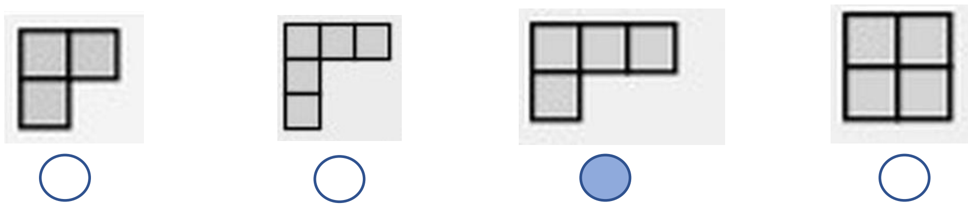
- Esquemas de Young: Es muy similar al esquema anterior, pero se representa con cajas o cuadrados, (muy parecido a las piezas del tetris), por ejemplo:

  Es similar a la representación anterior pero estos Esquemas de Young son utilizados en el estudio de funciones simétricas y en teoría de representación de grupos. Como consecuencia de la adyacencia de diferentes cuadrados

Ejercicio:

Seleccione cual esquema Young representa la partición de enteros de el numero 4:



¿Como podemos encontrar el numero de particiones que tiene cualquier número?

En la teoría de números, la función de partición **p(n)** representa el número de posibles particiones de un número natural n, o lo que es lo mismo, el número de formas de representar n como suma de números naturales. Por convenio, **p(0)**=1, y **p(n)**=0 para los números negativos.

La función de partición, denotada como p(n), representa el número de formas distintas de expresar un entero n como suma de uno o más números enteros positivos.

- **Fórmula:** No existe una fórmula algebraica simple para calcular p(n) para cualquier valor de n. Sin embargo, existen algunas identidades y recurrencias que pueden ser útiles para calcular valores específicos.
  - **Identidades:**
    - p(0) = 1 (por definición)
    - p(n) = p(n-1) + p(n-2) - p(n-5) - p(n-7) + p(n-12) + p(n-15) - ... (Fórmula de Hardy-Ramanujan)
- **Ejemplos:**
  - p(5) = 7: {5}, {4+1}, {3+2}, {3+1+1}, {2+2+1}, {2+1+1+1}, {1+1+1+1+1}
  - p(10) = 190.

Función Generatriz: Euler demostró que.

$$\sum_{n=0}^{\infty} p(n)x^n = \prod_{i=1}^{\infty} \frac{1}{1-x^i}$$

desarrolando la serie de potencia tenemos

$$\frac{1}{1-x^m} = 1 + x^m + x^{2m} + x^{3m} + x^{4m} + \cdots$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned}\prod_{m=1}^{\infty} \frac{1}{1-x^m} &= (1 + x + x^2 + x^3 + \cdots)(1 + x^2 + x^4 \\ &\quad + x^6 + \cdots)(1 + x^3 + x^6 + x^9 + \cdots)\cdots \\ &= 1 + x + 2x^2 + 3x^3 + 5x^4 + 7x^5 + 11x^6 + \cdots\end{aligned}$$

Relación asintótica Hardy y Ramanujan: fue obtenida por Godfrey Harold Hardy y Srinivasa Ramanujan en el año 1918, el teorema dice que la función de partición P(n) satisface la relación asintótica cuando n es lo suficientemente grande.

$$p(n) \sim \frac{e^{\pi\sqrt{2n/3}}}{4n\sqrt{3}} \text{ cuando } n \to \infty$$

Formula directa con sumatoria de Radamaher:

Teorema

Si $n \geq 1$, la función partición es representada por la serie convergente

$$p(n) = \frac{1}{\pi\sqrt{2}} \sum_{k=1}^{\infty} A_k(n)\sqrt{k}\frac{d}{dn}\left(\frac{\sinh\left\{\frac{\pi}{k}\sqrt{\frac{2}{3}\left(n-\frac{1}{24}\right)}\right\}}{\sqrt{n-\frac{1}{24}}}\right).$$

Donde

$$A_k(n) = \sum_{\substack{0 \le h < k \\ (h,k)=1}} e^{\pi i s(h,k) - 2\pi i n h/k}$$

y

$$s(h,k) = \sum_{r=1}^{k-1} \frac{r}{k}\left(\frac{hr}{k} - \left[\frac{hr}{k}\right] - \frac{1}{2}\right).$$