# Probabilidades y Estadística

**Ramiro Dibur**

**2025**

# Índice general

# Prefacio

Estas son mis notas de Probabilidades y Estadística del segundo cuatrimentre de 2025. Las escribo más que nada para estudiar yo, pero las publico por si le llegan a ser útil a alguien.

# 1

# Nociones básicas

Formalizamos algunas conceptos de probabilidad que vienen de la intuición.

## 1.1 Modelo probabilístico

Consideremos un experimento con distintos posibles resultados.

**Definición 1.1.** El ***espacio muestral*** de un experimento es el conjunto de posibles resultados del experimento.

Usualmente denotamos un espacio muestral con $\Omega$.

*Observación* 1.2. Todo resultado corresponde con un único elemento $\omega \in \Omega$.

Veamos algunos ejemplos.

**Ejemplo 1.3.** Consideremos el siguiente experimento:

1. Se tira un dado balanceado de 6 caras.
2. Se graba el resultado.

En este caso, el espacio muestral es el conjunto

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}.$$

Cabe aclarar que no importa de qué manera escribimos los resultados siempre y cuando la correspondencia con el resultado sea clara. Por ejemplo, podríamos haber definido el espacio muestral como

$$\Omega = \{\epsdice{1}, \epsdice{2}, \epsdice{3}, \epsdice{4}, \epsdice{5}, \epsdice{6}\}.$$

**Ejemplo 1.4.** Consideremos el siguiente experimento:

1. Se tira una moneda 3 veces.
2. Se graba el resultado.

El espacio muestral es

$$\Omega = \{CCC, CCS, \ldots, SSC, SSS\}.$$

Nótese que $\Omega$ se puede escribir como $\{C, S\}^3$.

**Ejemplo 1.5.** Consideremos el siguiente experimento:

1. Se elije un habitante de Buenos Aires al azar.
2. Se mide su altura en metros.

El espacio muestral podría ser

$$\Omega = \mathbb{R}.$$

Uno podría argumentar que el espacio muestral debería ser

$$\Omega = [0, 3],$$

ya que es imposible que alguien mida $-1\,\mathrm{m}$ o $100\,\mathrm{m}$. Sin embargo, lo único que nos interesa es que, al medir a alguien, caiga dentro de $\Omega$.

## 1.2 Eventos

**Definición 1.6.** Sea $\Omega$ un espacio muestral. Un ***evento*** es un subconjunto de $\Omega$.

Veámoslo en algunos ejemplos.

**Ejemplo 1.7.** Consideramos el experimento del ejemplo 1.3. El conjunto

$$A = \{\text{el resultado es un número par}\} = \{2, 4, 6\}$$

es un evento dado que $A \subseteq \Omega$.

Por ahora, usemos la noción intuitiva de probabilidades.

La probabilidad se le asigna a un evento, no a un resultado. Por ejemplo, cuando decimos

$$P(\text{⚂}) = \frac{1}{6}$$

en realidad queremos decir

$$P(\{\text{⚂}\}) = \frac{1}{6}.$$

No obstante, por practicidad acudiremos a la primera notación.

Usualmente calculamos la probabilidad de un evento de la siguiente manera:

$$P(A) = \frac{\#\text{ casos donde sucede } A}{\#\text{ casos totales}}.$$

Veamos por qué esto no es generalizable.

**Ejemplo 1.8.** Consideremos el siguiente experimento:

1. Se tiran 2 dados balanceados de 6 caras.
2. Se suman los números de las caras.
3. Se graba el resultado.

Un espacio muestral podría ser

$$\Omega = \{2, 3, \dots, 12\}.$$

Sin embargo, $P(2) \neq \frac{1}{10}$. Esto se puede resolver tomando el espacio muestral

$$\Omega = \{\text{⚀⚀}, \text{⚀⚁}, \dots, \text{⚅⚄}, \text{⚅⚅}\}.$$

Por lo tanto, para todo resultado $\omega \in \Omega$,

$$P(\omega) = \frac{\#\text{ casos donde sucede } A}{\#\text{ casos totales}} = \frac{1}{36}.$$

A partir de este ejemplo surge una definición.

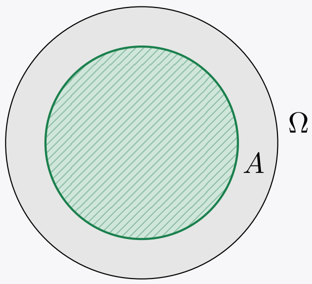
**Definición 1.9.** Sea $\Omega$ un espacio muestral. Si $\Omega$ es finito y todos sus elementos tienen la misma probabilidad, decimos que $\Omega$ es un ***espacio muestral equiprobable***.

Sin embargo, hasta ahora únicamente tratamos con espacios muestrales finitos. Veamos qué pasa con los infinitos.

**Ejemplo 1.10.** Consideremos el siguiente experimento:

1. Se elije un punto del disco unitario $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$ al azar.
2. Se graba el resultado.

Sea $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq \frac{1}{2}\}$.




Por lo que

$$P(A) = \frac{\text{área}(A)}{\text{área}(\Omega)}.$$

## 1.3 Eventos aleatorios

No podemos definirle una probablidad a todos los eventos de un espacio muestral.

**Definición 1.11.** Un evento al cual le podemos definir una probabilidad es llamado un ***evento aleatorios***.

Agregamos algunas reglas adicionales.

**Definición 1.12.** Llamamos $\mathcal{F}$ a una familia de eventos a los cuales podemos calcularles su probabilidad si cumple los siguientes axiomas:

(F1) $\Omega \in \mathcal{F}$.

(F2) Si $A \in \mathcal{F}$, entonces $A^{\mathrm{c}} \in \mathcal{F}$.

(F3) Si $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{F}$, entonces $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{F}$.

*Observación* 1.13. Si una familia cumple los axiomas (F1), (F2) y (F3), entonces se llama una $\sigma$-álgebra de conjuntos.

**Ejemplo 1.14.** En el ejemplo 1.3, el espacio muestral

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

tiene a la familia de eventos $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$ que se les puede asignar una probabilidad.

Veamos algunas propiedades que podemos deducir.

**Proposición 1.15.** *Sea $\Omega$ un espacio muestral y $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ una $\sigma$-álgebra. Las siguientes proposiciones son verdaderas:*

1. *$\varnothing \in \mathcal{F}$.*
2. *Si $\{A_n\}_{1\leq n\leq N} \subseteq \mathcal{F}$, entonces $\bigcup_{1\leq n\leq N} A_n \in \mathcal{F}$.*
3. *Si $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{F}$, entonces $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{F}$. (También la versión finita.)*
4. *Si $A, B \in \mathcal{F}$, entonces $A \setminus B \in \mathcal{F}$.*

*Demostración.* (*1.*) Dado que $\Omega \in \mathcal{F}$ por (F1), obtenemos que $\varnothing = \Omega^{\mathrm{c}} \in \mathcal{F}$ por (F2).

(*2.*) Sea $\{A_n\}_{1\leq n\leq N} \subseteq \mathcal{F}$. Consideremos la familia $\{B_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tal que

$$B_n = \begin{cases} A_n & \text{si } 1 \leq n \leq N, \\ \varnothing & \text{si } n \geq N. \end{cases}$$

Entonces, por (F3),

$$\bigcup_{1\leq n\leq N} A_n = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n \in \mathcal{F}.$$

(*3.*) Sea $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{F}$. Por (F3),

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n = \left( \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n^{\mathrm{c}} \right)^{\mathrm{c}} \in \mathcal{F}.$$

(*4.*) Sean $A, B \in \mathcal{F}$. Dado que $B^{\mathrm{c}}$,

$$A \setminus B = A \cap B^{\mathrm{c}} \in \mathcal{F}.$$

□

**Ejemplo 1.16.** Consideremos el siguiente experimento:

1. Se elije un número real del intervalo $[0,1]$ al azar.
2. Se graba el resultado.

Sea $\Omega = [0,1]$ el espacio muestral y sea $\mathcal{F}$ la familia de eventos a los cuales les podemos asignar una probabilidad. Para un intervalo $[a,b]$ la probabilidad se puede calcular como

$$P([a,b]) = b - a.$$

Aplicando las propiedades de la proposición 1.15, podemos deducir que en $\mathcal{F}$ están los eventos:

- Los intervalos abiertos y cerrados.
- Uniones e intersecciones numerables de cerrados y/o abiertos.
- Los puntos $\{x\}$ con $x \in [0,1]$.
- Los números racionales $\mathbb{Q}$.

¿Cuál es la probabilidad de $\mathbb{Q}$? Basta con tomar $\{B_m\} = \{B(q_m, \frac{\varepsilon}{2^{m+1}})\}_{m\in\mathbb{N}}$ y ver que

$$\begin{aligned} P\left(\bigcup_{m\in\mathbb{N}} B_m\right) &\leq \sum_{m\in\mathbb{N}} P(B_m) \\ &\leq \sum_{m\in\mathbb{N}} \frac{\varepsilon}{2^m} \\ &\leq \varepsilon. \end{aligned}$$

Tomando $\varepsilon \to 0$, obtenemos que $P(\mathbb{Q}) = 0$.

## 1.4 Definición de probabilidad

La *idea de Laplace* de probabilidad consta en que la probabilidad de un evento es el límite de la frecuencia con la que sucede cuando la cantidad de ensayos tiende a infinito.

Por otro lado, está la *axiomatización de Kolmogorov*:

**Definición 1.17.** Sea $\Omega$ un espacio muestra y $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ una $\sigma$-álgebra. Una función probabilidad es una función $P : \mathcal{F} \to [0,1]$ que cumple los siguientes axiomas:

(P1) $P(\Omega) = 1$.

(P2) $P(A) \geq 0$ para todo $A \in \mathcal{F}$.

(P3) Si $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{F}$ una familia de eventos disjuntos, entonces $P(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n)$.

Con esto podemos definir un espacio de probabilidad.

**Definición 1.18.** Sea $\Omega$ un espacio muestral, $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ una familia de eventos y $P : \mathcal{F} \to [0, 1]$ una función probabilidad. Entonces, la terna $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ es un ***espacio de probabilidad***.

Probamos algunos resultados inmediatos.

**Proposición 1.19.** *Sea $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un espacio de probabilidad. Entonces, las siguientes proposiciones son verdaderas:*

1. $P(\varnothing) = 0$.
2. *Si $A$ y $B$ son eventos disjuntos, entonces $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.*
3. *Si $\{A_n\}_{1 \leq n \leq N}$ es una familia de eventos disjuntos, entonces $P(\bigcup_{1 \leq n \leq N} A_n) = \sum_{n=1}^{N} P(A_n)$.*
4. $P(A^c) = 1 - P(A)$.
5. *Si $A \subseteq B$, entonces $P(A) \leq P(B)$.*
6. $P(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n)$.

*Demostración.* (*1.*) Consideremos la familia $\{\Omega, \varnothing, \ldots\}$. Por (P3),

$$\begin{aligned} P(\Omega) &= P(\Omega \cup \varnothing \cup \cdots) \\ &= P(\Omega) + \underbrace{P(\varnothing) + \cdots}_{=0} \end{aligned}$$

(*2.*) La propiedad sale utilizando (P3) y tomando la familia $\{A, B, \varnothing, \ldots\}$.
(*3.*) Se prueba por inducción y ussando la proposición anterior.
(*4.*) Podemos escribir como unión disjunta $\Omega = A \cup A^c$. Y con la propiedad *2.* obtenemos que

$$1 = P(\Omega) = P(A) + P(A^c),$$

entonces

$$P(A^c) = 1 - P(A).$$

(*5.*) Como $B = (B \setminus A) \cup A$,

$$P(A) \leq P(B \setminus A) + P(A) = P(B).$$

(*6.*) Sea $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una familia de eventos. Consideremos $\{B_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ tal que

$$B_n = A_n \setminus \bigcup_{1 \leq k \leq n-1} A_k.$$

Como los eventos $B_n$ son disjuntos dos a dos,

$$P\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) = P\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} P(B_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n).$$

$\square$

**Ejemplo 1.20.** Consideremos el siguiente experimento:

1. Se tira una moneda balanceada hasta que salga cara.
2. Se anota la cantidad total de lanzamientos.

El espacio muestral es
$$\Omega = \mathbb{N},$$
con
$$P(1) = \frac{1}{2}, \quad P(i) = \frac{1}{2^i}, \quad i \geq 1.$$

Ahora pensémoslo con infinitas tiradas de moneda.

**Ejemplo 1.21.** Consideremos el experimento del ejemplo 1.20. Entonces, el espacio muestral es
$$\Omega = \{0,1\}^{\mathbb{N}}.$$

Sea $C_k = \{\text{la } k\text{-ésima moneda es cara}\}$ y definimos
$$A_n = \{\text{las primeras } n \text{ monedas son cara}\} = \bigcap_{k=1}^{n} C_k.$$

Entonces, $P(A_n) = \frac{1}{2^n}$. Consideremos
$$A = \{\text{sale siempre cara}\} = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n.$$

Por lo tanto $A \subseteq A_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Así, $P(A) \leq P(A_n) = \frac{1}{2^n} \to 0$ y $P(A) = 0$.

Veamos otro evento:
$$B = \{\text{a partir de algún momento salen sólo caras}\}.$$

Es decir, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $k \geq n_0$ la moneda $k$ es cara. En notación,
$$B = \bigcup_{n_0 \in \mathbb{N}} \bigcap_{k=n_0}^{\infty} C_k.$$

Para cada $n_0$ fijo,
$$\begin{aligned} P\left(\bigcap_{k=n_0}^{\infty} C_k\right) &= \lim_{m \to \infty} P\left(\bigcap_{k=n_0}^{m} C_k\right) \\ &= \lim_{m \to \infty} \frac{1}{2^{m-n_0+1}} \\ &= 0. \end{aligned}$$

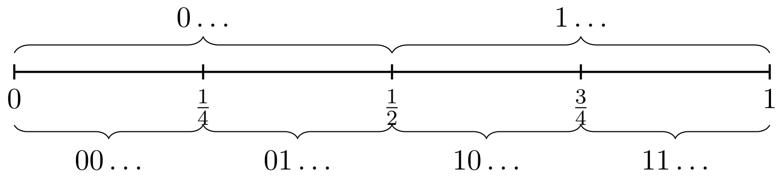
Entonces, por subaditividad numerable,
$$P(B) \leq \sum_{n_0 \in \mathbb{N}} 0 = 0.$$

Podemos mirar a $\omega = (\omega_k)_{k \in \mathbb{N}} \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ como la expansión binaria de un número real

$x \in [0,1]$:

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\omega_k}{2^k}.$$

De esta forma, elegir una secuencia infinita de lanzamientos es equivalente a elegir un número real en $[0,1]$.




> **Proposición 1.22.** *Sea $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una familia de eventos con $A_n \subseteq A_{n+1}$ para todo $n$. Entonces*
> $$P\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \lim_{n\to\infty} P(A_n).$$

*Demostración.* Definimos $B_n = A_n \setminus A_{n-1}$ (con $A_0 = \varnothing$). Entonces

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \qquad \text{y} \qquad B_i \cap B_j = \varnothing \ \text{ si } i \neq j.$$

Como $P(B_n) = P(A_n) - P(A_{n-1})$, tenemos

$$\begin{aligned} P\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) &= \sum_{n=1}^{\infty} P(B_n) \\ &= \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} \left(P(A_n) - P(A_{n-1})\right) \\ &= \lim_{N\to\infty} \left(P(A_N) - P(A_0)\right). \end{aligned}$$

Como $A_0 = \varnothing$, queda

$$P\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \lim_{N\to\infty} P(A_N).$$

□

> **Corolario 1.23.** *Tomando complementos se obtiene que, si $A_n \supseteq A_{n+1}$, entonces*
> $$P\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = 1 - P\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n^{c}\right) = 1 - \lim_{n\to\infty} P(A_n^{c}) = \lim_{n\to\infty} P(A_n).$$

## 1.5 Probabilidad condicional

Ya vimos cómo calcular probabilidades de eventos. Ahora queremos formalizar qué significa calcular probabilidades *condicionadas* a que cierto evento ya ocurrió.

**Ejemplo 1.24.** Tiro dos dados y sumo los resultados. Consideremos los eventos

$$\begin{aligned} A &= \{\text{la suma es } 5\}, \\ B &= \{\text{el segundo dado es par}\}. \end{aligned}$$

El espacio muestral es

$$\Omega = \{(a, b) \mid a, b \in \{1, \ldots, 6\}\}.$$

En particular,

$$A = \{(1, 4), (4, 1), (2, 3), (3, 2)\}.$$

Luego,

$$P(A \mid B) = \frac{\#(A \cap B)}{\#B} = \frac{2}{18} = \frac{1}{9}.$$

El cálculo anterior nos motiva a introducir la definición general de probabilidad condicional.

**Definición 1.25.** Dados $A$ y $B$ eventos, con $P(B) \neq 0$, la ***probabilidad condicional*** de $A$ dado $B$ se define como

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}.$$

Veamos cómo aplica la definición en un ejemplo.

**Ejemplo 1.26.** Consideremos una urna con 9 bolitas de la siguiente forma:

- 5 naranjas,
- 4 violetas, de las cuales 3 tienen una cruz.

Denotemos $N = \{\text{naranja}\}$, $V = \{\text{violeta}\}$, $C = \{\text{tiene cruz}\}$. Entonces,

$$P(N) = \frac{5}{9}, \qquad P(N \mid V) = \frac{1}{3}, \qquad P(C \mid V) = \frac{1}{2}.$$

A partir de la definición, podemos verificar fácilmente que $P(\,\cdot \mid B)$ cumple los axiomas de probabilidad.

**Proposición 1.27.** *Sea $B$ un evento con $P(B) \neq 0$. Entonces la aplicación*

$$A \mapsto P(A \mid B)$$

*define una probabilidad sobre el espacio muestral condicionado.*

*Demostración.* Para todo $B$ con $P(B) > 0$:

(P1) $P(\Omega \mid B) = \frac{P(\Omega \cap B)}{P(B)} = \frac{P(B)}{P(B)} = 1.$

(P2) Como $P$ es una probabilidad, $P(A \mid B) \geq 0$.

(P3) Si $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ son eventos disjuntos dos a dos,

$$
\begin{aligned}
P\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \,\middle|\, B\right) &= \frac{P(\bigcup_{n\in\mathbb{N}}(A_n \cap B))}{P(B)} \\
&= \frac{\sum_{n\in\mathbb{N}} P(A_n \cap B)}{P(B)} \\
&= \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{P(A_n \cap B)}{P(B)} \\
&= \sum_{n\in\mathbb{N}} P(A_n \mid B).
\end{aligned}
$$

□

*Observación* 1.28. Es importante aclarar que $A \mid B$ no es un evento. Por lo tanto, expresiones como $P(A \mid B \mid C)$ no tienen sentido.

**Proposición 1.29.** *Para todo par de eventos $A, B$ con $P(B) \neq 0$, se cumple*

$$P(A \mid B)\,P(B) = P(A \cap B).$$

Este resultado es útil para calcular probabilidades conjuntas a partir de probabilidades condicionales.

**Ejemplo 1.30.** Sacamos dos cartas de un mazo de 52 cartas sin reemplazo. Sea

$$
\begin{aligned}
A_1 &= \{\text{la primera carta es trébol}\}, \\
A_2 &= \{\text{la segunda carta es trébol}\}.
\end{aligned}
$$

Entonces,

$$
\begin{aligned}
P(A_1) &= \frac{13}{52}, \\
P(A_2 \mid A_1) &= \frac{12}{51}.
\end{aligned}
$$

Aplicando la proposición anterior,

$$P(A_1 \cap A_2) = P(A_1)\,P(A_2 \mid A_1) = \frac{13}{52} \cdot \frac{12}{51}.$$

**Proposición 1.31** (Regla del producto)**.** *Para eventos $A_1, A_2, \ldots, A_n$ se cumple*

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n) = P(A_1)\,P(A_2 \mid A_1)\,P(A_3 \mid A_1 \cap A_2) \cdots P(A_n \mid A_1 \cap \cdots \cap A_{n-1}).$$

*Idea de demostración.* La demostración se hace fácilmente por inducción en $n$. □

## 1.6 Probabilidad total

La noción de probabilidad condicional nos permite descomponer probabilidades en términos de eventos disjuntos.

**Proposición 1.32** (Probabilidad total en dos partes). *Sea $B \subseteq \Omega$ un evento. Entonces, para todo $A \subseteq \Omega$,*

$$\begin{aligned} P(A) &= P(A \cap B) + P(A \cap B^c) \\ &= P(A \mid B)\, P(B) + P(A \mid B^c)\, P(B^c). \end{aligned}$$

Más en general, si $\{A_i\}_{i \in I}$ es una partición numerable de $\Omega$, se cumple la *ley de la probabilidad total*:

$$P(B) = \sum_{i \in I} P(B \mid A_i)\, P(A_i).$$

**Ejemplo 1.33.** Consideremos el siguiente experimento:

1. En una caja hay 3 monedas: una con dos caras y dos equilibradas.
2. Se elige una moneda al azar.
3. Se lanza la moneda.

Definamos los eventos

$$\begin{aligned} C &= \{\text{sale cara}\}, \\ A &= \{\text{la moneda elegida es la de dos caras}\}. \end{aligned}$$

Entonces,

$$\begin{aligned} P(C) &= P(C \mid A)\, P(A) + P(C \mid A^c)\, P(A^c) \\ &= 1 \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \\ &= \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

Este cálculo es un primer ejemplo de la ***fórmula de la probabilidad total***, que nos permite descomponer la probabilidad de un evento en función de una partición del espacio.

**Ejemplo 1.34.** Ahora consideremos otro experimento. Lanzamos un dado. Sea

$$\begin{aligned} A &= \{\text{saco un } 5\}, \\ B &= \{\text{saco un } 7\}, \\ C &= \{\text{ni 5 ni 7}\} = (A \cup B)^c. \end{aligned}$$

Supongamos que ganar depende de estos eventos: si ocurre $A$ se gana siempre, si ocurre $B$ nunca se gana, y si ocurre $C$ se gana con cierta probabilidad.

Denotemos $G = \{\text{ganar}\}$. Entonces, por probabilidad total,

$$P(G) = P(G \mid A)\, P(A) + P(G \mid B)\, P(B) + P(G \mid C)\, P(C).$$

Como $P(G \mid A) = 1$, $P(G \mid B) = 0$, y $P(A) = P(B) = \frac{1}{6}$, $P(C) = \frac{4}{6}$, se obtiene

$$P(G) = 1 \cdot \frac{1}{6} + 0 \cdot \frac{1}{6} + P(G \mid C)\, \frac{4}{6}.$$

Si además sabemos que $P(G \mid C) = \frac{1}{2}$, queda

$$P(G) = \frac{1}{6} + \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{6} = \frac{6}{15}.$$

Estos ejemplos muestran cómo las probabilidades condicionales y la probabilidad total se combinan para calcular probabilidades en situaciones más complejas.