# Análisis Complejo

**Ramiro Dibur**

**2025**

# Aclaración

Estas son mis notas de Análisis Complejo del segundo cuatrimestre de 2025. No son la gran cosa, pero me funcionan a mí. Por lo tanto, recomiendo cierto escepticismo al leer dado que seguramente haya errores de todo tipo —mi mayor miedo son los de ortografía—.

También, quiero remarcar que me inspiré fuertemente en los apuntes de Luca Martínez. ¡Péguenles un vistazo!

Suerte.

# Índice general

**1. Números complejos** **1**
1.1. Definición y propiedades . . . 1
1.2. Forma polar . . . 2
1.3. Raíces . . . 3
1.4. Topología y continuidad . . . 3
1.5. Esfera de Riemann . . . 3
1.6. Homografías . . . 5

**2. Funciones de variable compleja** **8**
2.1. Derivabilidad . . . 8
2.2. Holomorfía . . . 9

# 1

# Números complejos

Comenzamos con un repaso de la definición de los números complejos, algunas funciones relevantes, propiedades, conceptos topológicos, la esfera de Riemann y homografías.

## 1.1 Definición y propiedades

Recordemos cómo se definien los números comlejos.

**Definición 1.1.** Definimos a los ***números complejos*** como el conjunto

$$\mathbb{C} = \{a + bi \mid a, b \in \mathbb{R}\} \quad \text{donde } i^2 = -1 \text{ es la unidad imaginaria,}$$

provisto de la suma

$$(a + bi) + (c + di) = (a + b) + (c + d)i$$

y el producto

$$(a + bi) \cdot (c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i.$$

*Observación* 1.2. Si tratamos a un número complejo como una expresión algebraica y luego utilizamos que $i^2 = -1$, obtenemos el producto definido.

Naturalmente, para un número complejo $z = a + bi$, decimos que $\mathrm{Re}(z) = a$ es la *parte real* e $\mathrm{Im}(z) = b$ la *parte imaginaria*. También, definimos el *módulo* (o *valor absoluto*) como $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$. Por último, definimos el conjugado.

**Definición 1.3.** El ***conjugado*** de un número complejo $z = a + bi \in \mathbb{C}$ es

$$\overline{z} = a - bi.$$

Nos interesa averiguar cómo es el inverso de un número complejo.

**Proposición 1.4.** *Sea $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Entonces, el inverso es*

$$z^{-1} = \frac{\overline{z}}{|z|^2}.$$

*Demostración.* Basta con probar que $z\overline{z} = |z|^2$. Escribimos a $z = a + bi$ y entonces

$$\begin{aligned} z\overline{z} &= (a+bi)(a-bi) \\ &= (a)^2 - (bi)^2 \\ &= a^2 + b^2 \\ &= |z|^2. \end{aligned}$$

Reordenando la ecaución, obtenemos el resultado. □

## 1.2 Forma polar

Una de las formas más útiles de expresar a un número complejo es en su forma polar.

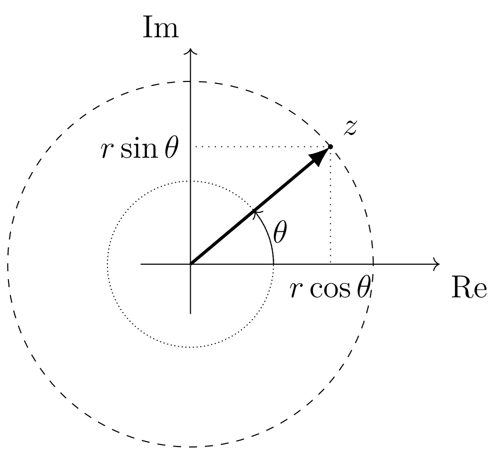
**Definición 1.5.** Sea $z = a + bi \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Definimos el ***argumento*** de un número complejo como todo $\theta \in \mathbb{R}$ que cumple

$$\mathrm{Re}(z) = |z|\cos\theta \quad \text{e} \quad \mathrm{Im}(z) = |z|\sin\theta$$

y lo denotamos $\arg(z)$. También, si $\theta \in [0, 2\pi)$, lo llamamos el ***argumento principal*** y lo denotamos $\mathrm{Arg}(z)$.

*Observación* 1.6. Para el cero las condiciones se cumplen trivialmente.

El argumento y el módulo se trasladan intuitivamente a una representación gráfica.



Por trigonometría, podemos deducir la siguiente expresión:

$$z = r(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta),$$

donde $r = |z|$ y $\theta = \operatorname{Arg}(z)$.

Así también surge la *fórmula de Euler*.

**Teorema 1.7** (Fórmula de Euler)**.** *Sea $z \in \mathbb{C}$. Entonces, podemos expresarlo como*

$$z = |z|e^{i\operatorname{Arg}(z)} = re^{i\theta}.$$

La demostración de esto la vemos más adelante.

## 1.3 Raíces

Para encontrar la raíz $n$-ésima de un número complejo, lo más fácil es escribirlo en forma de Euler y luego elevar a $\frac{1}{n}$. (No voy a ir más en detalle que esto.)

**Proposición 1.8.** *Sean $z_0, z_1, \dots, z_{n-1} \in \mathbb{C}$ las raíces $n$-ésimas de $w \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$, con $m, n \in \mathbb{N}$ y $n \geq 2$. Entonces*

$$\sum_{i=0}^{n-1} z_i^m = \begin{cases} n\,w^k & \textit{si } m = kn,\ k \in \mathbb{N}, \\ 0 & \textit{en caso contrario.} \end{cases} \tag{1.1}$$

(No lo demuestro, pero sale expresando las raíces en forma de Euler y utilizando la expresión de la suma de la progresión geométrica.)

## 1.4 Topología y continuidad

TODO: ESCRIBIR PROPIEDADES

## 1.5 Esfera de Riemann

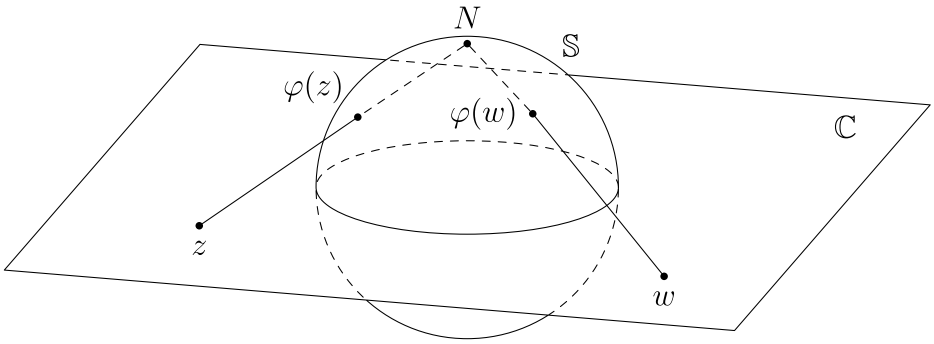
Consideramos antes a $\mathbb{C}$ junto con el infinito.

**Definición 1.9.** Definimos el ***plano complejo extendido*** $\widehat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$.

El plano complejo extendido tiene una interpretación intuitiva dada por la *proyección estereográfica*. (En realidad, voy a arrancar con la inversa de la proyección estereográfica porque me resulta más intuitivo.)

Nos situamos en $\mathbb{R}^3$ y consideramos a la esfera unitaria $\mathbb{S}^2$. Identificamos el plano $xy$ con $\mathbb{C}$ y definimos la biyección $\varphi : \mathbb{C} \to \mathbb{S}^2 \setminus \{N\}$ de la siguiente forma: si $z = x + iy$,

$$\varphi(z) = \left( \frac{2x}{|z|^2+1}, \frac{2y}{|z|^2+1}, \frac{|z|^2-1}{|z|^2+1} \right).$$




Observamos que para conseguir $\varphi(z)$, se traza una recta de $z$ a $N$ y $\Phi(z)$ es el punto donde $\mathbb{S}^2$ y la recta se intersecan. Sin embargo, ningún punto de $\mathbb{C}$ termina en $N$. ¿Podemos extender $\varphi$? La respuesta es sí y se relaciona con el plano complejo extendido.

Si $|z| \to \infty$, entonces $\varphi(z) \to N$. Entonces, en $\widehat{\mathbb{C}}$, definimos $\varphi(\infty) = N$.

**Proposición 1.10.** *La proyección estereográfica envía circunferencias en $\mathbb{S}^2$ a circunferencias o rectas en $\mathbb{C}$.*

*Demostración.* Sea $\mathcal{C} \subset \mathbb{S}^2$ una circunferencia y sea $\Pi :\ ax + by + cz = d$ el plano que la contiene. Escribimos la inversa de la proyección estereográfica:

$$x = \frac{2u}{|w|^2+1}, \quad y = \frac{2v}{|w|^2+1}, \quad z = \frac{|w|^2-1}{|w|^2+1}, \qquad w = u + iv \in \mathbb{C}.$$

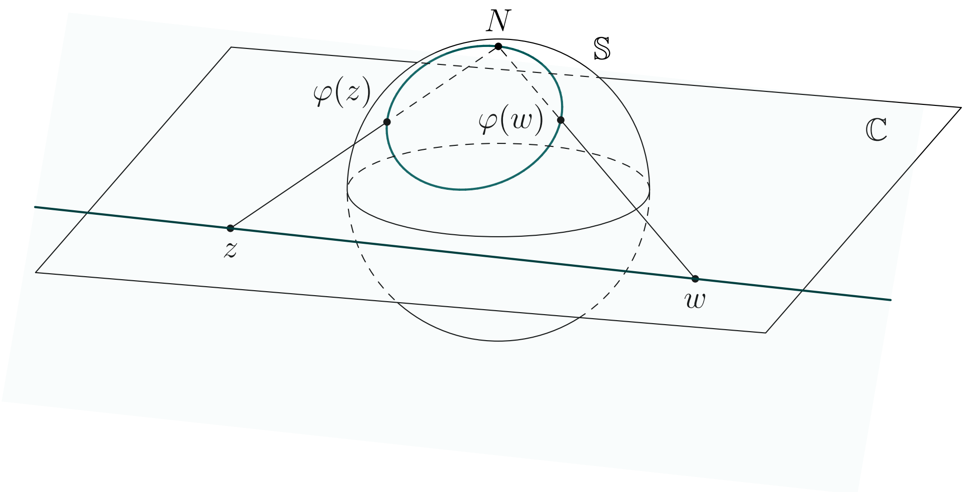
Sustituyendo en la ecuación de $\Pi$ y multiplicando por $|w|^2+1$ llegamos a

$$(c-d)|w|^2 - 2au - 2bv - (c+d) = 0.$$

Si $c \neq d$, esto equivale a $|w|^2 + \alpha u + \beta v + \gamma = 0$, que describe una circunferencia en $\mathbb{C}$. Si $c = d$, obtenemos $2au + 2bv + (c+d) = 0$, que describe una recta en $\mathbb{C}$. $\square$

*Observación* 1.11. Observemos que que $c = d$ equivale a que el polo norte $(0, 0, 1)$ pertenezca a $\Pi$, *i.e.* a que $\mathcal{C}$ pase por el polo norte. (El caso tangencial $a = b = 0,\ c = d$ no produce circunferencia en la esfera y queda excluido por hipótesis.)

Si bien la demostración es puramente algebraica, tenemos una interpretación gráfica.




Dado que la circunferencia pasa por $N$, la proyección es una recta en vez de una circunferencia.

## 1.6 Homografías

Definimos las homografías que luego van a ser útiles.

**Definición 1.12.** Una **homografía** es una función $f : \widehat{\mathbb{C}} \to \widehat{\mathbb{C}}$

$$f(z) = \frac{az+b}{cz+d},$$

donde $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ y $ad - bc \neq 0$.

Hay dos valores de $f$ que quizás no son inmediatamente obvios: para $c \neq 0$,

$$\begin{cases} f(-\frac{d}{c}) = \infty, \\ f(\infty) = \frac{a}{c}. \end{cases}$$

Las *homografías básicas* son:

1. **Traslación:**
$$T_a(z) = z + a, \qquad a \in \mathbb{C}.$$
2. **Homotecia:**
$$H_r(z) = rz, \qquad r > 0.$$
3. **Rotación:**
$$R_\alpha(z) = \alpha z, \qquad |\alpha| = 1.$$
4. **Inversión:**
$$I(z) = \frac{1}{z}.$$

**Proposición 1.13.** *Sea $f : \widehat{\mathbb{C}} \to \widehat{\mathbb{C}}$ una homografía con $c \neq 0$. Entonces, existen aplicaciones afines $g, h : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ tales que*

$$f = g \circ i \circ h, \qquad \text{donde } i(z) = \frac{1}{z}.$$

*Demostración.* Sea $q \in \mathbb{C}$ tal que $ad - qc = 0$, o sea $q = \frac{ad}{c}$. Entonces

$$f(z) = \frac{az+b}{cz+d} = \frac{az+b+q-q}{cz+d} = \frac{az+\frac{ad}{c}}{cz+d} + \frac{b-q}{cz+d}.$$

De este modo,

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{az+\frac{d}{c}c}{cz+d} + \frac{b-\frac{ad}{c}}{cz+d} \\ &= \frac{a}{c} + \left(b - \frac{ad}{c}\right)(cz+d)^{-1}. \end{aligned}$$

Luego, definiendo

$$h(z) = cz+d, \qquad g(w) = \frac{a}{c} + \left(b - \frac{ad}{c}\right)w,$$

se obtiene que $f = g \circ i \circ h$. $\square$

**Proposición 1.14.** *La imagen de cualquier circunferencia o recta por una homografía es una circunferencia o una recta.*

*Demostración.* El único caso complicado es el de las inversiones. Consideramos una circunferencia dada por la ecuación

$$|z - z_0| = r, \qquad r \in \mathbb{R}_{\geq 0}.$$

Equivalentemente,

$$(z - z_0)(\overline{z} - \overline{z_0}) = r^2.$$

Como en la inversión $i(z) = \dfrac{1}{z}$ tenemos $\overline{z} = \dfrac{1}{\overline{i(z)}} = \dfrac{1}{\overline{w}}$ con $w = i(z)$, resulta

$$\left(\frac{1}{w} - z_0\right)\left(\frac{1}{\overline{w}} - \overline{z_0}\right) = r^2.$$

Multiplicando ambos lados por $|w|^2$, se obtiene

$$(1 - z_0 w)(1 - \overline{z_0}\,\overline{w}) = r^2|w|^2.$$

Desarrollando,

$$1 - z_0 w - \overline{z_0}\,\overline{w} + |z_0|^2|w|^2 = r^2|w|^2.$$

Es decir,

$$(|z_0|^2 - r^2)|w|^2 - z_0 w - \overline{z_0}\,\overline{w} + 1 = 0,$$

que es la ecuación de una circunferencia o de una recta en el plano complejo, según que $|z_0|^2 - r^2 \neq 0$ o $|z_0|^2 - r^2 = 0$. Por lo tanto, la inversión envía circunferencias en circunferencias o rectas, y lo mismo vale para toda homografía. □

Veamos que toda homografía está determinada unívocamente por tres puntos.

**Proposición 1.15.** *Sean $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$. Hay una única homografía que satisface*

$$f(z_1) = 0, \quad f(z_2) = 1, \quad f(z_3) = \infty.$$

*Demostración.* COMPLETAR □

# 2

# Funciones de variable compleja

En este capítulo se introducen nuevos conceptos como la holomorfía, aplicaciones conformes y más.

## 2.1 Derivabilidad

La definición de derivabilidad en $\mathbb{C}$ es practicamente indistinguible a la de $\mathbb{R}$.

**Definición 2.1.** Sea $f : D \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ con $D$ abierto. Decimos que $f$ es ***derivable*** en $z_0$ si existe

$$f'(z_0) = \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}.$$

En general, vamos a identificar a $f : D \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ con la función $g : D' \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dada por

$$g(x, y) = (u(x, y), v(x, y)) = (\mathrm{Re}(f(x + iy)), \mathrm{Im}(f(x + iy))).$$

Sin embargo, usaremos de forma intercambiable ambas funciones, dado que gran parte de los conceptos son aplicables a las dos.

Tal como en $\mathbb{R}^2$ vale el álgebra de límites.

**Proposición 2.2.** *Sean $f : D \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ y $g : E \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ derivables (y que cumplan todas las hipótesis necesarias). Entonces,*

1. $(f + g)' = f' + g'$.
2. $(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$.

Muchas veces vamos a querer escribir la derivabilidad de $f$ en $z_0$ de la siguiente manera equivalente: existe $L \in \mathbb{C}$ tal que para todo $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ que cumple que

$$\text{si } |z - z_0| < \delta, \text{ entonces } |f(z) - f(z_0) - L(z - z_0)| < |z - z_0|\epsilon.$$

A continuación probamos las condiciones de Cauchy–Riemann, que son extremadamente útiles para probar la derivabilidad de una función compleja.

**Proposición 2.3** (condiciones de Cauchy–Riemann)**.** *Sea $f : D \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ con $D$ abierto. Entonces, $f$ es derivable en $z_0 = x_0 + iy_0$ si y sólo si $u$ y $v$ son diferenciables en $(x_0, y_0)$ y*

$$\begin{cases} u_x(x_0, y_0) = v_y(x_0, y_0) \\ u_y(x_0, y_0) = -v_x(x_0, y_0). \end{cases}$$

*Demostración.* La demostración no es tan complicada, pero sí es bastante larga. Por lo tanto, no la incluyo acá. □

## 2.2 Holomorfía

Definamos qué es una función holomorfa.

**Definición 2.4.** Sea $f : D \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ con $D$ abierto. Decimos que $f$ es ***holomorfa*** en $z_0$ si es derivable en algún entorno de $z_0$. Más en general, $f$ es holomorfa si es holomorfa en todo punto de su dominio.

Llamamos *dominio* a un conjunto a un conjunto abierto y conexo. Esto no se debe confundir con el dominio de una función, aunque usualmente terminan siendo lo mismo.

**Proposición 2.5.** *Sea $f : D \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ holomorfa, con $D$ dominio. Si $u(x, y)$ es constante, entonces $f$ es constante.*

*Demostración.* Dado que $f$ es holomorfa, entonces se cumplen las condiciones de Cauchy–Riemann. Entonces,

$$\begin{cases} 0 = u_x(x_0, y_0) = v_y(x_0, y_0) \\ 0 = u_y(x_0, y_0) = -v_x(x_0, y_0). \end{cases}$$

Integrando las derivadas parciales, obtenemos que $u$ y $v$ son constantes y, por lo tanto, $f$ es constante. □

Otra propiedad útil.

**Proposición 2.6.** *Sea $f : D \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ holomorfa, con $D$ dominio. Si $|f|$ es constante, entonces $f$ también lo es.*

*Demostración.* Supongamos $|f(z)| = c$ para algún $c \geq 0$. Si $c = 0$, entonces $f = 0$, que es constante.

Supongamos $c > 0$. Escribimos $f = u + iv$. La condición $|f|^2 = u^2 + v^2 = c^2$ implica

$$uu_x + vv_x = 0 \quad \text{y} \quad uu_y + vv_y = 0.$$

Como $f$ es holomorfa, $u$ y $v$ satisfacen las ecuaciones de Cauchy–Riemann:

$$u_x = v_y \quad \text{y} \quad u_y = -v_x.$$

Reemplazando, obtenemos

$$uu_x + vv_x = uv_y - vu_y = 0,$$

$$uu_y + vv_y = -uv_x + vu_x = 0.$$

Es decir,

$$\begin{cases} uv_y - vu_y = 0, \\ -uv_x + vu_x = 0. \end{cases}$$

Esto significa que el determinante

$$\begin{vmatrix} u & v \\ u_x & v_x \end{vmatrix} = 0, \quad \text{y} \quad \begin{vmatrix} u & v \\ u_y & v_y \end{vmatrix} = 0.$$

Como $u$ y $v$ no son ambas nulas, se deduce que $u_x = v_x = u_y = v_y = 0$. sPor lo tanto $u, v$ son constantes, y en consecuencia $f$ es constante. $\square$