Análisis Complejo

Ramiro Dibur

2025

Índice general

Prefacio

Estas son mis notas de Análisis Complejo del segundo cuatrimestre de 2025. Las escribo más que nada para estudiar yo, pero las publico por si le llegan a ser útiles a alguien.

1

Nociones básicas

Formalizamos algunas nociones de números complejos que usamos todo el tiempo y que conviene fijar desde el inicio.

1.1 El cuerpo de los números complejos

Definición 1.1. Definimos $\mathbb{C}$ como el conjunto $\mathbb{R}^2$ con las operaciones

$$(x,y)+(u,v)=(x+u,y+v), \qquad (x,y)\cdot(u,v)=(xu-yv,\, xv+yu).$$

Identificamos $x+iy \leftrightarrow (x,y)$ y escribimos $i=(0,1)$, de modo que $i^2=-1$.

Observación 1.2. Con estas operaciones, $\mathbb{C}$ es un cuerpo con unidad $1=(1,0)$ y $\mathbb{R}=\{(x,0):x\in\mathbb{R}\}$ se inyecta de modo natural en $\mathbb{C}$.

Ejemplo 1.3. Si $z=x+iy$, entonces

$$z\cdot\overline{z}=(x+iy)(x-iy)=x^2+y^2\in\mathbb{R}_{\geq 0}.$$

Conjugación

Definición 1.4. La ***conjugación*** es la aplicación $\mathbb{C}\to\mathbb{C}$, $z=x+iy\mapsto\overline{z}=x-iy$.

Proposición 1.5. *Para todo $z,w\in\mathbb{C}$ y $\lambda\in\mathbb{R}$ se cumple:*

1. $\overline{\overline{z}}=z$ *y* $\overline{z+w}=\overline{z}+\overline{w}$.
2. $\overline{zw}=\overline{z}\,\overline{w}$.
3. $\overline{\lambda z}=\lambda\,\overline{z}$.
4. $z\in\mathbb{R} \iff \overline{z}=z$.

Demostración. Son identidades directas de las definiciones. □

Valor absoluto y argumento

Definición 1.6. El ***valor absoluto*** (o ***módulo***) de $z = x + iy$ es $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$. Un ***argumento*** de $z \neq 0$ es cualquier $\theta \in \mathbb{R}$ tal que $z = |z|(\cos\theta + i\sin\theta)$. El ***argumento principal*** se nota $\operatorname{Arg} z \in (-\pi, \pi]$.

Proposición 1.7. *Para $z, w \in \mathbb{C}$:*

1. $|z| \geq 0$ *y* $|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$.
2. $|zw| = |z|\,|w|$ *y* $|z/w| = |z|/|w|$ *si* $w \neq 0$.
3. ***Desigualdad triangular:*** $|z + w| \leq |z| + |w|$.
4. $|z - w|$ *es la distancia euclídea entre los puntos de* $\mathbb{R}^2$ *que representan* z *y* w.

Demostración. (*3.*) Se puede ver expandiendo $|z + w|^2$ o vía Cauchy–Schwarz en $\mathbb{R}^2$. □

Observación 1.8. Usaremos libremente la notación $B(z_0, r) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < r\}$ para el ***disco abierto*** de centro z_0 y radio r; y $\overline{B}(z_0, r)$ para el ***disco cerrado***.

1.2 Forma polar y exponencial

Definición 1.9. Para $z \neq 0$, su ***forma polar*** es $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ con $r = |z|$ y $\theta \in \mathbb{R}$ un argumento. Usamos la abreviatura $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ (***fórmula de Euler***) y escribimos $z = re^{i\theta}$.

Proposición 1.10 (Producto y cociente en forma polar)**.** *Si $z = re^{i\theta}$ y $w = \rho e^{i\varphi}$ con $r, \rho \geq 0$, entonces*

$$zw = (r\rho)\, e^{i(\theta+\varphi)}, \qquad \frac{z}{w} = \left(\frac{r}{\rho}\right) e^{i(\theta-\varphi)} \quad (\rho > 0).$$

Ejemplo 1.11. Las rotaciones alrededor del origen son $z \mapsto e^{i\alpha}z$. Son isometrías: preservan distancias y ángulos.

1.3 Potencias y raíces

Proposición 1.12 (De Moivre)**.** *Para $n \in \mathbb{Z}$ y $\theta \in \mathbb{R}$,*

$$\big(\cos\theta + i\sin\theta\big)^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta).$$

Definición 1.13. Una ***n-ésima raíz*** ($n \in \mathbb{N}$) de $w \in \mathbb{C}$ es un z tal que $z^n = w$.

Proposición 1.14 (Fórmula de las raíces). *Si $w = \rho e^{i\phi}$ con $\rho \geq 0$ y $n \in \mathbb{N}$, entonces las n-ésimas raíces de w son*

$$z_k = \rho^{1/n}\, e^{i\frac{\phi+2\pi k}{n}}, \qquad k = 0, 1, \ldots, n-1.$$

Son n puntos igualmente espaciados sobre el círculo de radio $\rho^{1/n}$.

Ejemplo 1.15 (Raíces de la unidad). Las soluciones de $z^n = 1$ son $\omega_k = e^{2\pi i k/n}$, $0 \leq k \leq n-1$. Forman un subgrupo cíclico del círculo unitario.

Observación 1.16. La función argumento es multivaluada: $\arg z = \operatorname{Arg} z + 2\pi\mathbb{Z}$. Esto explica la periodicidad en las raíces.

1.4 Topología en $\mathbb{C}$ y continuidad

Definición 1.17. Consideramos en $\mathbb{C}$ la métrica euclídea $d(z, w) = |z - w|$. Un conjunto $U \subseteq \mathbb{C}$ es ***abierto*** si para todo $z \in U$ existe $r > 0$ tal que $B(z, r) \subseteq U$; es ***cerrado*** si su complemento es abierto.

Proposición 1.18 (Heine–Borel en $\mathbb{C}$). *Un conjunto $K \subseteq \mathbb{C}$ es compacto $\Leftrightarrow$ es cerrado y acotado.*

Definición 1.19. Una función $f : U \to \mathbb{C}$ (con $U \subseteq \mathbb{C}$) es ***continua en z_0*** si para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $|z - z_0| < \delta$ implica $|f(z) - f(z_0)| < \varepsilon$. Es ***continua*** si lo es en todo punto de U.

Proposición 1.20 (Criterios de continuidad). *Sean $U \subseteq \mathbb{C}$ abierto y $f : U \to \mathbb{C}$, $f = u + iv$ con $u, v : U \to \mathbb{R}$.*

1. *f es continua en z_0 $\Leftrightarrow$ u y v son continuas en z_0.*
2. *Si f, g son continuas, también lo son $f + g$, fg y, si $g \neq 0$, f/g.*
3. *Las funciones polinomiales y racionales (con denominador no nulo) son continuas en su dominio natural.*

Observación 1.21. Cuando sea útil, identificaremos $\mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$ y aplicaremos resultados de topología métrica en $\mathbb{R}^2$.

1.5 La esfera de Riemann

Definición 1.22. La ***esfera de Riemann*** es el plano complejo extendido

$$\widehat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}.$$

Topológicamente, se obtiene por ***proyección estereográfica*** desde la esfera unitaria $S^2 \subset \mathbb{R}^3$ (excluyendo el polo norte).

Proposición 1.23 (Proyección estereográfica)**.** *Sea* $z = x + iy \in \mathbb{C}$ *y* $r^2 = |z|^2$*. La proyección estereográfica* $\sigma : \mathbb{C} \to S^2 \setminus \{N\}$ *y su inversa son*

$$\sigma(z) = \left(\frac{2x}{1+r^2}, \frac{2y}{1+r^2}, \frac{r^2-1}{1+r^2} \right), \qquad \sigma^{-1}(X,Y,Z) = \frac{X+iY}{1-Z}.$$

El punto $N = (0,0,1)$ *se identifica con* ∞*.*

Observación 1.24. Una base de entornos de ∞ está dada por los complementos de compactos: $V_R = \{\,\infty\,\} \cup \{z \in \mathbb{C} : \ |z| > R\}$. Decimos que $z_n \to \infty$ si $|z_n| \to \infty$.

Definición 1.25 (Métrica cordal (opcional))**.** La ***distancia cordal*** en $\widehat{\mathbb{C}}$ se define por

$$\chi(z,w) = \frac{2|z-w|}{\sqrt{(1+|z|^2)(1+|w|^2)}}, \quad \chi(z,\infty) = \frac{2}{\sqrt{1+|z|^2}}.$$

Induce la topología usual de $\widehat{\mathbb{C}}$.

Ejemplo 1.26. Para un polinomio $p(z)$ de grado $n \geq 1$, definimos $p(\infty) = \infty$; para una racional $R(z) = p(z)/q(z)$ con $\deg p \leq \deg q$, se define $R(\infty) = 0$ si $\deg p < \deg q$ y $R(\infty) =$ coef. líderes si $\deg p = \deg q$.

1.6 Homografías (transformaciones de Möbius)

Definición 1.27. Una ***homografía*** (o ***transformación de Möbius***) es una aplicación

$$f(z) = \frac{az+b}{cz+d}, \qquad a,b,c,d \in \mathbb{C},\ ad-bc \neq 0,$$

entendida como $f : \widehat{\mathbb{C}} \to \widehat{\mathbb{C}}$ con las convenciones $f(-d/c) = \infty$ si $c \neq 0$ y $f(\infty) = a/c$ si $c \neq 0$ (si $c = 0$, f es afín: $f(\infty) = \infty$).

Observación 1.28 (Notación matricial)*.* A f le asociamos la clase de matrices

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{C}) \ / \ \mathbb{C}^\times,$$

donde multiplicar por un escalar no cambia f. La composición de homografías corresponde al producto matricial (bien definido en la clase).

Proposición 1.29 (Estructura generadora). *Toda homografía es composición de transformaciones elementales:*

$$z \mapsto z+z_0 \quad (\textit{traslación}), \qquad z \mapsto \lambda z \quad (\textit{dilatación/rotación}), \qquad z \mapsto \frac{1}{z} \quad (\textit{inversión}).$$

Proposición 1.30 (Imagen de líneas y circunferencias). *Las homografías envían* ***líneas y circunferencias*** *(en $\widehat{\mathbb{C}}$) en* ***líneas o circunferencias****.*

Idea. Las circunferencias/líneas se describen por ecuaciones del tipo $\alpha z\overline{z} + \beta z + \overline{\beta}\,\overline{z} + \gamma = 0$ con $\alpha \in \mathbb{R}$, $\beta \in \mathbb{C}$, $\gamma \in \mathbb{R}$. La invariancia se verifica para $z \mapsto 1/z$ y se preserva por composiciones. $\square$

Definición 1.31 (Razón cruzada). Para cuatro puntos distintos $z_1, z_2, z_3, z_4 \in \widehat{\mathbb{C}}$ definimos

$$[z_1, z_2; z_3, z_4] = \frac{(z_1 - z_3)(z_2 - z_4)}{(z_1 - z_4)(z_2 - z_3)}.$$

Proposición 1.32. *La razón cruzada es invariante por homografías. Además, dada cualquier terna de puntos distintos (z_1, z_2, z_3) y otra terna (w_1, w_2, w_3) en $\widehat{\mathbb{C}}$, existe una única homografía f tal que $f(z_j) = w_j$ para $j = 1, 2, 3$.*

Ejemplo 1.33 (Cayley). La aplicación

$$C(z) = \frac{z - i}{z + i}$$

es una homografía que envía el semiplano superior $\{\operatorname{Im} z > 0\}$ en el disco unidad $\{|w| < 1\}$ y la recta real (más ∞) en el círculo unitario.

Ejemplo 1.34 (Automorfismos del disco). Para $a \in \mathbb{D} = \{z : |z| < 1\}$ y $\theta \in \mathbb{R}$,

$$\varphi_{a,\theta}(z) = e^{i\theta}\,\frac{z - a}{1 - \overline{a}\,z}$$

es una homografía que preserva $\mathbb{D}$, con $\varphi_{a,\theta}(a) = 0$ y $\varphi_{a,\theta}^{-1} = \varphi_{-e^{i\theta}a,-\theta}$.

Proposición 1.35 (Puntos fijos). *Los puntos fijos de $f(z) = \dfrac{az+b}{cz+d}$ (con $c \neq 0$) son las soluciones de*

$$cz^2 + (d - a)z - b = 0.$$

Hay 2, 1 o 0 puntos fijos en $\widehat{\mathbb{C}}$ según el discriminante.

Observación 1.36. Las homografías son holomorfas en $\mathbb{C} \setminus \{-d/c\}$ y conformes en todo punto donde son finitas y $cz + d \neq 0$; en ∞ también son conformes si $c = 0$.

1.7 Pequeario de cálculo en $\widehat{\mathbb{C}}$

Proposición 1.37. *Sea $f : \widehat{\mathbb{C}} \to \widehat{\mathbb{C}}$ continua en ∞. Entonces:*

1. $f(\infty) = \infty \Leftrightarrow$ *para todo R existe M tal que* $|z| > M \Rightarrow |f(z)| > R$.
2. $f(\infty) = w_0 \in \mathbb{C} \Leftrightarrow f(1/z)$ *es continua en* 0 *y* $\lim_{z\to 0} f(1/z) = w_0$.

Ejemplo 1.38. Si p y q son polinomios sin ceros comunes, la racional $R = p/q$ se extiende continuamente a $\widehat{\mathbb{C}}$ definiendo

$$R(\infty) = \begin{cases} \infty, & \deg p > \deg q, \\ \text{coef. líderes}, & \deg p = \deg q, \\ 0, & \deg p < \deg q. \end{cases}$$

Resumen operativo

- $z = re^{i\theta}$, $|z| = r$, $\arg z = \theta + 2\pi\mathbb{Z}$; $\operatorname{Arg} z \in (-\pi, \pi]$.
- $zw = (r\rho)e^{i(\theta+\varphi)}$, $z/w = (r/\rho)e^{i(\theta-\varphi)}$.
- Raíces: $z_k = \rho^{1/n} e^{i(\phi+2\pi k)/n}$.
- Topología: abiertos $B(z_0, r)$; compacto $\Leftrightarrow$ cerrado y acotado.
- $\widehat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$, vecindades de ∞ son exteriores de discos grandes.
- Homografías: $f(z) = \dfrac{az+b}{cz+d}$, $ad - bc \neq 0$; envían líneas/círculos en líneas/círculos; determinadas por la imagen de 3 puntos.