Análisis Complejo

Ramiro Dibur

2025

Aclaración

Estas son mis notas de Análisis Complejo del segundo cuatrimestre de 2025. No son la gran cosa, pero me funcionan a mí. Por lo tanto, recomiendo cierto escepticismo al leer dado que seguramente haya errores de todo tipo —mi mayor miedo son los de ortografía—.

También, quiero remarcar que me inspiré fuertemente en los apuntes de Luca Martínez. ¡Péguenles un vistazo!

Suerte.

Índice general

1

Números complejos

Comenzamos con un repaso de la definición de los números complejos, algunas funciones relevantes, propiedades, conceptos topológicos, la esfera de Riemann y homografías.

1.1 Definición y propiedades

Recordemos cómo se definien los números comlejos.

Definición 1.1. Definimos a los ***números complejos*** como el conjunto

$$\mathbb{C} = \{a + bi \mid a, b \in \mathbb{R}\} \quad \text{donde } i^2 = -1 \text{ es la unidad imaginaria,}$$

provisto de la suma

$$(a + bi) + (c + di) = (a + b) + (c + d)i$$

y el producto

$$(a + bi) \cdot (c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i.$$

Observación 1.2. Si tratamos a un número complejo como una expresión algebraica y luego utilizamos que $i^2 = -1$, obtenemos el producto definido.

Naturalmente, para un número complejo $z = a + bi$, decimos que $\mathrm{Re}(z) = a$ es la *parte real* e $\mathrm{Im}(z) = b$ la *parte imaginaria*. También, definimos el *módulo* (o *valor absoluto*) como $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$. Por último, definimos el conjugado.

Definición 1.3. El ***conjugado*** de un número complejo $z = a + bi \in \mathbb{C}$ es

$$\overline{z} = a - bi.$$

Nos interesa averiguar cómo es el inverso de un número complejo.

Proposición 1.4. *Sea $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Entonces, el inverso es*

$$z^{-1} = \frac{\overline{z}}{|z|^2}.$$

Demostración. Basta con probar que $z\overline{z} = |z|^2$. Escribimos a $z = a + bi$ y entonces

$$\begin{aligned} z\overline{z} &= (a+bi)(a-bi) \\ &= (a)^2 - (bi)^2 \\ &= a^2 + b^2 \\ &= |z|^2. \end{aligned}$$

Reordenando la ecaución, obtenemos el resultado. □

1.2 Forma polar

Una de las formas más útiles de expresar a un número complejo es en su forma polar.

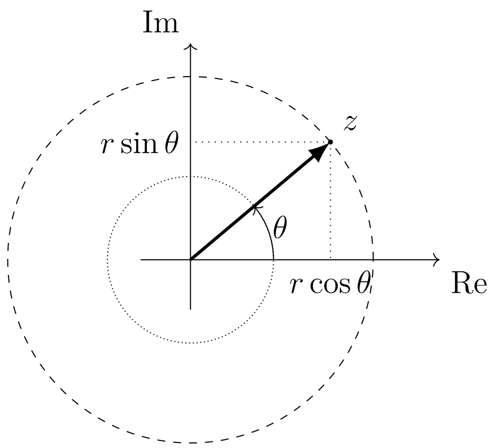
Definición 1.5. Sea $z = a + bi \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Definimos el ***argumento*** de un número complejo como todo $\theta \in \mathbb{R}$ que cumple

$$\mathrm{Re}(z) = |z| \cos\theta \quad \text{e} \quad \mathrm{Im}(z) = |z| \sin\theta$$

y lo denotamos $\arg(z)$. También, si $\theta \in [0, 2\pi)$, lo llamamos el ***argumento principal*** y lo denotamos $\mathrm{Arg}(z)$.

Observación 1.6. Para el cero las condiciones se cumplen trivialmente.

El argumento y el módulo se trasladan intuitivamente a una representación gráfica.



Por trigonometría, podemos deducir la siguiente expresión:

$$z = r(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta),$$

donde $r = |z|$ y $\theta = \operatorname{Arg}(z)$.

Así también surge la *fórmula de Euler*.

Teorema 1.7 (Fórmula de Euler)**.** *Sea $z \in \mathbb{C}$. Entonces, podemos expresarlo como*

$$z = |z|e^{i \operatorname{Arg}(z)} = re^{i\theta}.$$

La demostración de esto la vemos más adelante.

1.3 Raíces

Para encontrar la raíz n-ésima de un número complejo, lo más fácil es escribirlo en forma de Euler y luego elevar a $\frac{1}{n}$. (No voy a ir más en detalle que esto.)

Proposición 1.8. *Sean $z_0, z_1, \ldots, z_{n-1} \in \mathbb{C}$ las raíces n-ésimas de $w \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, con $m, n \in \mathbb{N}$ y $n \geq 2$. Entonces*

$$\sum_{i=0}^{n-1} z_i^m = \begin{cases} n\, w^k & \text{si } m = kn,\ k \in \mathbb{N}, \\ 0 & \text{en caso contrario.} \end{cases} \tag{1.1}$$

(No lo demuestro, pero sale expresando las raíces en forma de Euler y utilizando la expresión de la suma de la progresión geométrica.)

1.4 Topología y continuidad

TODO: ESCRIBIR PROPIEDADES

1.5 Esfera de Riemann

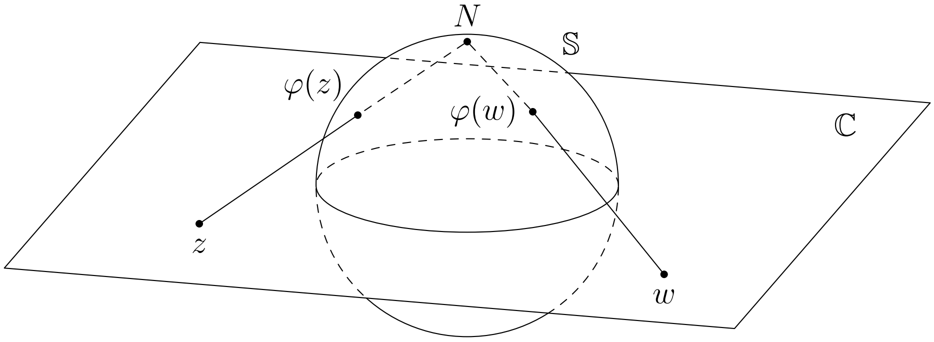
Consideramos antes a $\mathbb{C}$ junto con el infinito.

Definición 1.9. Definimos el ***plano complejo extendido*** $\widehat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$.

El plano complejo extendido tiene una interpretación intuitiva dada por la *proyección estereográfica*. (En realidad, voy a arrancar con la inversa de la proyección estereográfica porque me resulta más intuitivo.)

Nos situamos en $\mathbb{R}^3$ y consideramos a la esfera unitaria $\mathbb{S}^2$. Identificamos el plano xy con $\mathbb{C}$ y definimos la biyección $\varphi : \mathbb{C} \to \mathbb{S}^2 \setminus \{N\}$ de la siguiente forma: si $z = x + iy$,

$$\varphi(z) = \left(\frac{2x}{|z|^2+1}, \frac{2y}{|z|^2+1}, \frac{|z|^2-1}{|z|^2+1} \right).$$



Observamos que para conseguir $\varphi(z)$, se traza una recta de z a N y $\Phi(z)$ es el punto donde $\mathbb{S}^2$ y la recta se intersecan. Sin embargo, ningún punto de $\mathbb{C}$ termina en N. ¿Podemos extender φ? La respuesta es sí y se relaciona con el plano complejo extendido.

Si $|z| \to \infty$, entonces $\varphi(z) \to N$. Entonces, en $\widehat{\mathbb{C}}$, definimos $\varphi(\infty) = N$.

Proposición 1.10. *La proyección estereográfica envía circunferencias en $\mathbb{S}^2$ a circunferencias o rectas en $\mathbb{C}$.*

Demostración. Sea $\mathcal{C} \subset \mathbb{S}^2$ una circunferencia y sea $\Pi :\ ax + by + cz = d$ el plano que la contiene. Escribimos la inversa de la proyección estereográfica:

$$x = \frac{2u}{|w|^2+1}, \quad y = \frac{2v}{|w|^2+1}, \quad z = \frac{|w|^2-1}{|w|^2+1}, \qquad w = u + iv \in \mathbb{C}.$$

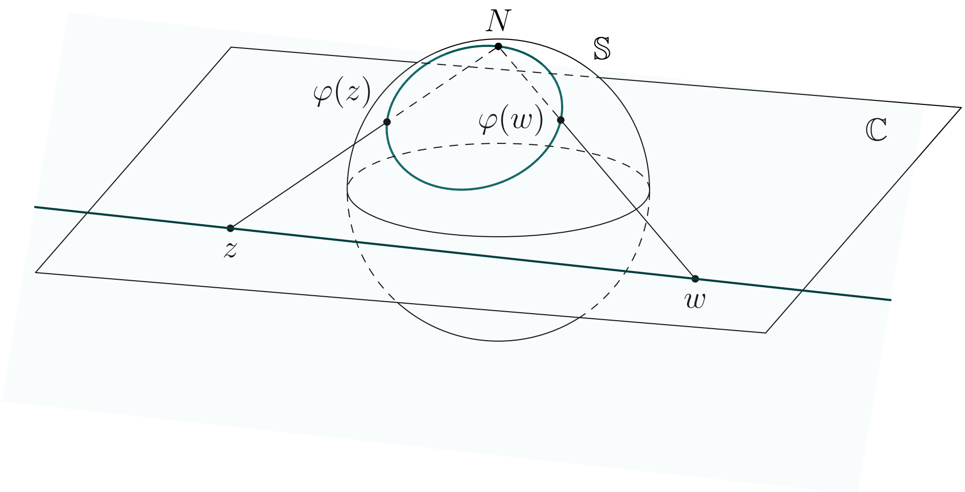
Sustituyendo en la ecuación de Π y multiplicando por $|w|^2 + 1$ llegamos a

$$(c-d)|w|^2 - 2au - 2bv - (c+d) = 0.$$

Si $c \neq d$, esto equivale a $|w|^2 + \alpha u + \beta v + \gamma = 0$, que describe una circunferencia en $\mathbb{C}$. Si $c = d$, obtenemos $2au + 2bv + (c+d) = 0$, que describe una recta en $\mathbb{C}$. $\square$

Observación 1.11. Observemos que que $c = d$ equivale a que el polo norte $(0,0,1)$ pertenezca a Π, *i.e.* a que $\mathcal{C}$ pase por el polo norte. (El caso tangencial $a = b = 0,\ c = d$ no produce circunferencia en la esfera y queda excluido por hipótesis.)

Si bien la demostración es puramente algebraica, tenemos una interpretación gráfica.



Dado que la circunferencia pasa por N, la proyección es una recta en vez de una circunferencia.

1.6 Homografías

Definimos las homografías que luego van a ser útiles.

Definición 1.12. Una **homografía** es una función $f : \widehat{\mathbb{C}} \to \widehat{\mathbb{C}}$

$$f(z) = \frac{az+b}{cz+d},$$

donde $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ y $ad - bc \neq 0$.

Hay dos valores de f que quizás no son inmediatamente obvios: para $c \neq 0$,

$$\begin{cases} f(-\frac{d}{c}) = \infty, \\ f(\infty) = \frac{a}{c}. \end{cases}$$

Las *homografías básicas* son:

1. **Traslación:**
$$T_a(z) = z + a, \qquad a \in \mathbb{C}.$$
2. **Homotecia:**
$$H_r(z) = rz, \qquad r > 0.$$
3. **Rotación:**
$$R_\alpha(z) = \alpha z, \qquad |\alpha| = 1.$$
4. **Inversión:**
$$I(z) = \frac{1}{z}.$$

Proposición 1.13. *Sea $f : \widehat{\mathbb{C}} \to \widehat{\mathbb{C}}$ una homografía con $c \neq 0$. Entonces, existen aplicaciones afines $g, h : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ tales que*

$$f = g \circ i \circ h, \qquad \text{donde } i(z) = \frac{1}{z}.$$

Demostración. Sea $q \in \mathbb{C}$ tal que $ad - qc = 0$, o sea $q = \frac{ad}{c}$. Entonces

$$f(z) = \frac{az+b}{cz+d} = \frac{az+b+q-q}{cz+d} = \frac{az+\frac{ad}{c}}{cz+d} + \frac{b-q}{cz+d}.$$

De este modo,

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{az+\frac{d}{c}c}{cz+d} + \frac{b-\frac{ad}{c}}{cz+d} \\ &= \frac{a}{c} + \left(b - \frac{ad}{c}\right)(cz+d)^{-1}. \end{aligned}$$

Luego, definiendo

$$h(z) = cz + d, \qquad g(w) = \frac{a}{c} + \left(b - \frac{ad}{c}\right)w,$$

se obtiene que $f = g \circ i \circ h$. $\square$

Proposición 1.14. *La imagen de cualquier circunferencia o recta por una homografía es una circunferencia o una recta.*

Demostración. El único caso complicado es el de las inversiones. Consideramos una circunferencia dada por la ecuación

$$|z - z_0| = r, \qquad r \in \mathbb{R}_{\geq 0}.$$

Equivalentemente,

$$(z - z_0)(\overline{z} - \overline{z_0}) = r^2.$$

Como en la inversión $i(z) = \dfrac{1}{z}$ tenemos $\overline{z} = \dfrac{1}{\overline{i(z)}} = \dfrac{1}{\overline{w}}$ con $w = i(z)$, resulta

$$\left(\frac{1}{w} - z_0\right)\left(\frac{1}{\overline{w}} - \overline{z_0}\right) = r^2.$$

Multiplicando ambos lados por $|w|^2$, se obtiene

$$(1 - z_0 w)(1 - \overline{z_0}\,\overline{w}) = r^2|w|^2.$$

Desarrollando,

$$1 - z_0 w - \overline{z_0}\,\overline{w} + |z_0|^2|w|^2 = r^2|w|^2.$$

Es decir,
$$(|z_0|^2 - r^2)|w|^2 - z_0 w - \overline{z_0}\,\overline{w} + 1 = 0,$$
que es la ecuación de una circunferencia o de una recta en el plano complejo, según que $|z_0|^2 - r^2 \neq 0$ o $|z_0|^2 - r^2 = 0$. Por lo tanto, la inversión envía circunferencias en circunferencias o rectas, y lo mismo vale para toda homografía. □

Veamos que toda homografía está determinada unívocamente por tres puntos.

Proposición 1.15. *Sean $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$. Hay una única homografía que satisface*
$$f(z_1) = 0, \quad f(z_2) = 1, \quad f(z_3) = \infty.$$

Demostración. COMPLETAR □

2

Funciones de variable compleja

En este capítulo se introducen nuevos conceptos como la holomorfía, aplicaciones conformes y más.

2.1 Derivabilidad

La definición de derivabilidad en $\mathbb{C}$ es practicamente indistinguible a la de $\mathbb{R}$.

Definición 2.1. Sea $f : D \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ con D abierto. Decimos que f es ***derivable*** en z_0 si existe

$$f'(z_0) = \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}.$$

En general, vamos a identificar a $f : D \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ con la función $g : D' \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dada por

$$g(x, y) = (u(x, y), v(x, y)) = (\mathrm{Re}(f(x + iy)), \mathrm{Im}(f(x + iy))).$$

Sin embargo, usaremos de forma intercambiable ambas funciones, dado que gran parte de los conceptos son aplicables a las dos.

Tal como en $\mathbb{R}^2$ vale el álgebra de límites.

Proposición 2.2. *Sean $f : D \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ y $g : E \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ derivables (y que cumplan todas las hipótesis necesarias). Entonces,*

1. $(f + g)' = f' + g'$.
2. $(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$.

Muchas veces vamos a querer escribir la derivabilidad de f en z_0 de la siguiente manera equivalente: existe $L \in \mathbb{C}$ tal que para todo $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ que cumple que

$$\text{si } |z - z_0| < \delta, \text{ entonces } |f(z) - f(z_0) - L(z - z_0)| < |z - z_0|\epsilon.$$

A continuación probamos las condiciones de Cauchy–Riemann, que son extremadamente útiles para probar la derivabilidad de una función compleja.

Proposición 2.3 (condiciones de Cauchy–Riemann)**.** *Sea $f : D \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ con D abierto. Entonces, f es derivable en $z_0 = x_0 + iy_0$ si y sólo si u y v son diferenciables en (x_0, y_0) y*

$$\begin{cases} u_x(x_0, y_0) = v_y(x_0, y_0) \\ u_y(x_0, y_0) = -v_x(x_0, y_0). \end{cases}$$

Demostración. La demostración no es tan complicada, pero sí es bastante larga. Por lo tanto, no la incluyo acá. □

2.2 Holomorfía

Definamos qué es una función holomorfa.

Definición 2.4. Sea $f : D \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ con D abierto. Decimos que f es ***holomorfa*** en z_0 si es derivable en algún entorno de z_0. Más en general, f es holomorfa si es holomorfa en todo punto de su dominio.

Llamamos *dominio* a un conjunto a un conjunto abierto y conexo. Esto no se debe confundir con el dominio de una función, aunque usualmente terminan siendo lo mismo.

Proposición 2.5. *Sea $f : D \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ holomorfa, con D dominio. Si $u(x, y)$ es constante, entonces f es constante.*

Demostración. Dado que f es holomorfa, entonces se cumplen las condiciones de Cauchy–Riemann. Entonces,

$$\begin{cases} 0 = u_x(x_0, y_0) = v_y(x_0, y_0) \\ 0 = u_y(x_0, y_0) = -v_x(x_0, y_0). \end{cases}$$

Integrando las derivadas parciales, obtenemos que u y v son constantes y, por lo tanto, f es constante. □

Otra propiedad útil.

> **Proposición 2.6.** *Sea $f : D \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ holomorfa, con D dominio. Si $|f|$ es constante, entonces f también lo es.*

Demostración. Supongamos $|f(z)| = c$ para algún $c \geq 0$. Si $c = 0$, entonces $f = 0$, que es constante.

Supongamos $c > 0$. Escribimos $f = u + iv$. La condición $|f|^2 = u^2 + v^2 = c^2$ implica

$$uu_x + vv_x = 0 \quad \text{y} \quad uu_y + vv_y = 0.$$

Como f es holomorfa, u y v satisfacen las ecuaciones de Cauchy–Riemann:

$$u_x = v_y \quad \text{y} \quad u_y = -v_x.$$

Reemplazando, obtenemos

$$uu_x + vv_x = uv_y - vu_y = 0,$$

$$uu_y + vv_y = -uv_x + vu_x = 0.$$

Es decir,

$$\begin{cases} uv_y - vu_y = 0, \\ -uv_x + vu_x = 0. \end{cases}$$

Esto significa que el determinante

$$\begin{vmatrix} u & v \\ u_x & v_x \end{vmatrix} = 0, \quad \text{y} \quad \begin{vmatrix} u & v \\ u_y & v_y \end{vmatrix} = 0.$$

Como u y v no son ambas nulas, se deduce que $u_x = v_x = u_y = v_y = 0$. sPor lo tanto u, v son constantes, y en consecuencia f es constante. $\square$

2.3 Funciones armónicas

Más adelante veremos que una función sea holomorfa es condición suficiente para que sea infinitamente derivable. Por lo que, de ahora en adelatne, supondremos que las funciones $u : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ y $v : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ son infinitamente diferenciables.

> **Definición 2.7.** Sea $u : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Decimos que u es ***armónica*** si su laplaciano es nulo. Es decir,
>
> $$\Delta u = u_{xx} + u_{yy} = 0.$$

Consideremos ahora $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tal que $f(x, y) = u(x, y) + iv(x, y)$. Nos interesa ver si f es holomorfa.

Definición 2.8. Sean $u, v : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Decimos que v es una ***armónica conjugada*** de u si la función $f(x,y) = u(x,y) + iv(x,y)$ es holomorfa en todo su dominio.

Probemos que siempre existe para dominios simplemente conexos y que es (casi) única.

Proposición 2.9. *Sea $u : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ armónica, con D simplemente conexo. Existe una armónica conjugada $v : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ y está determinada de manera única salvo por una constante aditiva.*

Demostración. Notemos primerarmente que la condición de Cauchy–Riemann es equivalente a pedir que

$$\nabla v = (-u_y, u_x).$$

Por lo tanto, basta con encontrar una función v que cumpla.

Dado que nuestro dominio es simplemente conexo, el campo vectorial $(-u_y, u_x)$ es el gradiente de una función v si y sólo si el rotor del campo es nulo. Entonces,

$$\nabla \times (-u_y, u_x) = u_{xx} - (-u_{yy}) = u_{xx} + u_{yy} = 0,$$

dado que u es armónica. $\square$

Proposición 2.10. *Sea $f : D \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ holomorfa con D dominio. Si $\operatorname{Im} f$ está contenida en una recta, entonces f es constante.*

Demostración. Sea $f(x,y) = u(x,y) + iv(x,y)$ tal que cumple las hipótesis e $\operatorname{Im} f$ está contenida en una recta. Entonces, existen $a, b, c \in \mathbb{R}$, donde a y b no son ambos nulos, tales que todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ cumple

$$au(x,y) + bu(x,y) = c.$$

Tomamos derivadas parciales respecto a x e y:

$$\begin{cases} au_x(x,y) + bv_x(x,y) = 0 \\ au_y(x,y) + bv_y(x,y) = 0. \end{cases}$$

Como f es holomorfa, aplicamos Cauchy–Riemann, entonces

$$\begin{cases} au_x(x,y) + bv_x(x,y) = 0 \\ -av_x(x,y) + bu_x(x,y) = 0. \end{cases}$$

Finalmente, escribimos al sistema en forma matricial:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_x \\ v_x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

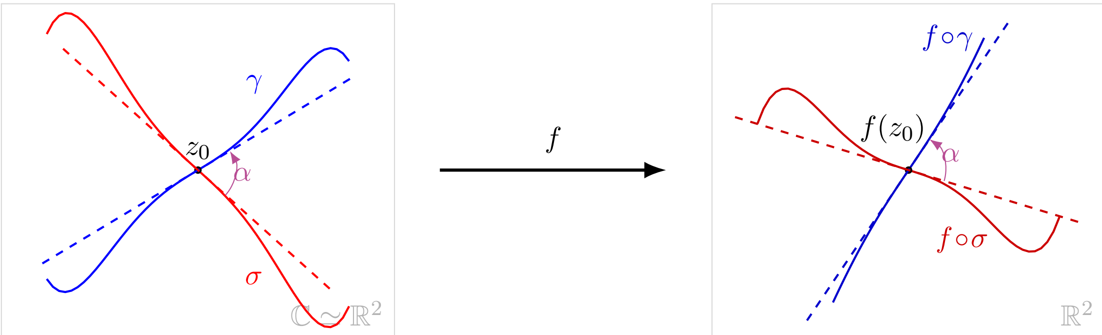
El determinante de la matriz es $-a^2 - b^2 \neq 0$. Por ende, $u_x = v_x = 0$ y, por Cauchy–Riemann, $u_y = v_y = 0$. $\square$

2.4 Transformaciones conformes

Las *transformaciones conformes* en esencia son funciones que preservan ángulos. Veamos qué quiere decir esto.

Definición 2.11. Decimos que $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ es una ***transformación conforme*** si dado un par de curvas $\gamma, \sigma : [a, b] \to R^2$ que intersecan en z_0 con un ángulo α, la imagen por f preserva el mismo ángulo.

Para entender un poco mejor, veamos un ejemplo gráfico:



Decimos que, en particular, esta transformación es conforme en z_0. Notemos que las tangentes a las curvas γ y σ forman un ángulo α y, luego de aplicar f, aún se preserva el ángulo.

Las transformaciones conformes elementales en $\mathbb{R}^n$ son:

1. **Homotecias:** $f(x) = \lambda x$, con $\lambda \in \mathbb{R}_{>0}$.

2. **Traslaciones:** $f(x) = x + a$, con $a \in \mathbb{R}^n$.

3. **Ortogonales:** $f(x) = Ax$, donde $A \in O(n)$.

4. **Inversiones:** $f(x) = \dfrac{x}{\|x\|^2}$.

Toda transformación conforme en $\mathbb{R}^n$ $(n \geq 3)$ se obtiene como composición de estas transformaciones —esto es el teorema de Liouville, pero por ahora no lo demostramos—.

Consideremos las trasformaciones $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ lineales conformes. Es decir, las que cumplen

$$\frac{Tv \cdot Tw}{\|Tv\| \, \|Tw\|} = \frac{v \cdot w}{\|v\| \, \|w\|}.$$

En particular, las transformaciones ortogonales preservan el producto interno y, por lo tanto, los ángulos.

Proposición 2.12. *Sea $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ una transformación. Entonces, T es conforme si y sólo si $T = \lambda U$ con U ortogonal.*

Demostración. ($\Rightarrow$) Sea T conforme y sea $\{v, w\}$ una base ortonormal de $\mathbb{R}^2$. Por conformidad de T, $\{Tv, Tw\}$ es ortogonal. Calculamos

$$\begin{aligned}(v+w)\cdot(v-w) &= \|v\|^2 - \|w\|^2\\ &= 1-1\\ &= 0.\end{aligned}$$

Recordemos que el producto interno entre dos vectores es el producto entre las normas y coseno del ángulo; por lo tanto, por conformidad,

$$\begin{aligned}0 = T(v+w)\cdot T(v-w) &= (Tv+Tw)\cdot(Tv-Tw)\\ &= \|Tv\|^2 - \|Tw\|^2.\end{aligned}$$

Entonces, $\|Tv\| = \|Tw\|$. Con definir $U = \|Tv\|^{-1}T$ obtenemos una transformación ortonormal.

Como $T = \lambda U$ con $\lambda = \|Tv\|$ y U ortogonal, queda probada la implicación.

($\Leftarrow$) Es inmediato. □

Una función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ es un ***difeomorfismo*** si es diferenciable, biyectiva y su inversa es diferenciable.

Proposición 2.13. *Sea $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ un difeomorfismo con D dominio. Entonces, f es conforme si y sólo si f es holomorfa o $\overline{f}$ es holomorfa.*

Demostración. No lo probamos. □

Teorema 2.14. *Sea $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ conforme. Entonces, f puede escribirse como composición de a lo sumo una traslación, una homotecia, una transformación ortogonal y una inversión.*

Demostración. Ídem. □

Proposición 2.15. *Sea $D \subseteq \mathbb{C}$, $f : D \to \mathbb{C}$ y $z_0 \in D^\circ$. Si f es holomorfa en z_0 y $f'(z_0) \neq 0$, entonces f es conforme en z_0.*

Demostración. Escribimos $f = u + iv$ con $u, v : D \to \mathbb{R}$ de clase C^1 cerca de z_0. Como f es holomorfa en z_0, satisface las ecuaciones de Cauchy–Riemann en z_0:

$$u_x(z_0) = v_y(z_0), \qquad u_y(z_0) = -\,v_x(z_0).$$

El jacobiano en z_0 es

$$Df(z_0) = \begin{pmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{pmatrix}_{z_0} = \begin{pmatrix} u_x & -v_x \\ v_x & u_x \end{pmatrix}_{z_0}.$$

Sea $f'(z_0) = a + ib$ (con $a = u_x(z_0)$ y $b = v_x(z_0)$). Entonces

$$Df(z_0) = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}.$$

Esta matriz es, en notación real, la multiplicación compleja por $a + ib$. Descompone como

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} = \sqrt{a^2 + b^2} \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}, \qquad \theta = \arg(a + ib).$$

Es decir, $Df(z_0)$ es una homotecia de razón $\lambda = |f'(z_0)| > 0$ seguida de una rotación. Por lo tanto, $Df(z_0)$ preserva ángulos y orientaciones. En consecuencia, f es conforme en z_0. □

2.5 Funciones elementales

Nos hacemos la siguiente pregunta: dada una función en los reales, ¿existe una función compleja tal que la extiende?

Definición 2.16. Sea $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Decimos que $g : D \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ es una ***extensión al plano complejo*** de f si $g|_A = f$.

Las extensiones de algunas funciones típicas a $\mathbb{C}$ son:

1. Exponencial:
$$e^z = e^x(\cos y + i \sin y), \quad z = x + iy.$$

2. Seno:
$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}.$$

3. Coseno:
$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}.$$

4. Tangente:
$$\tan z = \frac{\sin z}{\cos z}.$$

Si intentamos extender log nos vamos a encontrar con un problema. Sea $w \in \mathbb{C}$. Buscamos $z \in \mathbb{C}$ tal que

$$e^z = w. \tag{2.1}$$

Primero, aplicamos módulo a la ecuación 2.1 y obtenemos

$$|w| = |e^z| = e^x.$$

Además, tomando argumento obtenemos

$$\arg w = \arg(e^z) = y + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Acá nos encontramos con el primer problema: hay múltiples elecciones para el arguento. Para resolver esto, se restringe el el argumento a $(-\pi, \pi]$. A la función

$$\operatorname{Arg}(z) = \begin{cases} \arccos\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) & \text{si } y \geq 0, \\ -\arccos\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) & \text{si } y < 0, \end{cases}$$

se le llama el *argumento principal*.

De vuelta, nos encontramos con otro problema: el argumento principal no es continua en la semirrecta real negativa. Más adelante podemos probar que, no importa como definamos la extensión, es imposible extender de forma continua el logaritmo a todo $\mathbb{C} \setminus \{0\}$. No obstante, si consideramos el dominio $\mathbb{C} \setminus \{x + 0 \cdot i \mid x < 0\}$, la extensión es continua.

Definición 2.17. Definimos el ***logaritmo principal*** como

$$\operatorname{Log}(z) = \ln|z| + i \operatorname{Arg}(z), \qquad z \in \mathbb{C} \setminus \{x \leq 0\}.$$

3

Series en el plano complejo

3.1 Series numéricas y criterios de convergencia

Definición 3.1. Sea $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ una sucesión de números complejos. Decimos que la serie $\sum a_n$ ***converge*** si existe el límite

$$\lim_{N\to\infty} \sum_{n=0}^{N} a_n,$$

y lo denotamos por $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$. Además, si la serie de valores absolutos converge,

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| < +\infty,$$

decimos que $\sum a_n$ ***converge absolutamente***.

Un primer hecho importante es que la convergencia absoluta implica la convergencia usual.

Proposición 3.2. *Si $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0} \subseteq \mathbb{C}$ y la serie $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$ converge, entonces $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge.*

Demostración. Sean $m < n$ y

$$S_n = \sum_{j=0}^{n} a_j, \qquad \sigma_n = \sum_{j=0}^{n} |a_j|.$$

Entonces

$$|S_n - S_m| = \left| \sum_{j=0}^{n} a_j - \sum_{j=0}^{m} a_j \right| = \left| \sum_{j=m+1}^{n} a_j \right| \leq \sum_{j=m+1}^{n} |a_j| = \sigma_n - \sigma_m.$$

Como la serie de valores absolutos converge, la diferencia $\sigma_n - \sigma_m$ se puede hacer arbitrariamente pequeña. Por lo tanto, (S_n) es de Cauchy y la serie converge. $\square$

A continuación presentamos algunos criterios prácticos para decidir la convergencia de series.

Proposición 3.3 (Criterio de la comparación). *Sean* (a_n), (b_n) *sucesiones de números reales positivos tales que* $a_n \leq b_n$. *Entonces:*

1. *Si* $\sum b_n$ *converge, también lo hace* $\sum a_n$.
2. *Si* $\sum a_n = +\infty$, *entonces* $\sum b_n = +\infty$.

Este criterio se usa sobre todo para comparar con series conocidas (geométrica, armónica, p-series, etc.).

Proposición 3.4 (Criterio de la raíz n-ésima de Cauchy). *Sea* (a_n) *sucesión de números complejos y sea*

$$\alpha = \limsup_{n\to\infty} |a_n|^{1/n}.$$

Entonces:

1. *Si* $\alpha < 1$, *la serie* $\sum a_n$ *converge absolutamente.*
2. *Si* $\alpha > 1$, *la serie* $\sum a_n$ *diverge.*
3. *Si* $\alpha = 1$, *el criterio no es concluyente.*

El criterio de la raíz es particularmente útil cuando a_n involucra potencias elevadas en n, por ejemplo $a_n = \frac{n^k}{m^n}$.

Proposición 3.5 (Criterio de D'Alembert). *Sea* (a_n) *sucesión de números complejos y sea*

$$\beta = \limsup_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|.$$

Entonces:

1. *Si* $\beta < 1$, *la serie* $\sum a_n$ *converge absolutamente.*
2. *Si* $\beta > 1$, *la serie* $\sum a_n$ *diverge.*
3. *Si* $\beta = 1$, *el criterio no es concluyente.*

Este último criterio, también llamado del *cociente*, es uno de los más usados en la práctica, sobre todo cuando los términos de la serie contienen factoriales o potencias encadenadas.

Proposición 3.6 (Criterio de la comparación en el límite). *Sean (a_n), (b_n) sucesiones de números reales positivos.*

1. *Si* $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = c > 0$, *entonces* $\sum a_n$ *y* $\sum b_n$ *convergen o divergen simultáneamente.*
2. *Si* $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$ *y* $\sum b_n$ *converge, entonces* $\sum a_n$ *también converge.*
3. *Si* $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = +\infty$ *y* $\sum b_n = +\infty$, *entonces* $\sum a_n = +\infty$.

Este criterio refina al de comparación directa y es muy útil cuando la razón de los términos se estabiliza.

Proposición 3.7 (Criterio de la integral). *Sea (a_n) una sucesión de números reales no negativos y $f : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ una función continua y decreciente tal que $f(n) = a_n$ para todo $n \in \mathbb{N}_0$. Entonces, la serie $\sum a_n$ converge si y sólo si converge la integral impropia*

$$\int_0^\infty f(t)\, dt.$$

Este criterio se conoce también como *criterio de la integral de Cauchy* y permite conectar la teoría de series con el análisis de integrales impropias.

Definición 3.8. Sean (a_n) y (b_n) dos sucesiones de números complejos. Definimos el ***producto de Cauchy*** como la sucesión (c_k) dada por

$$c_k = \sum_{j=0}^{k} a_{k-j} b_j.$$

Este producto aparece de manera natural al multiplicar series de potencias, y será especialmente relevante en el estudio de funciones analíticas.

Proposición 3.9 (Convolución de series absolutamente convergentes). *Sean (a_n) y (b_n) sucesiones de números complejos tales que $\sum a_n$ y $\sum b_n$ son absolutamente convergentes. Entonces, la serie formada por el producto de Cauchy (c_k) es absolutamente convergente y además*

$$\sum_{k=0}^{\infty} |c_k| \le \left(\sum_{k=0}^{\infty} |a_k|\right)\left(\sum_{k=0}^{\infty} |b_k|\right).$$

Demostración. Recordemos que el producto de Cauchy está dado por

$$c_n = \sum_{j=0}^{n} a_j b_{n-j}.$$

En particular,

$$
\begin{aligned}
|c_0| &\le |a_0 b_0|, \\
|c_1| &\le |a_0 b_1| + |a_1 b_0|, \\
|c_2| &\le |a_0 b_2| + |a_1 b_1| + |a_2 b_0|, \\
&\vdots \\
|c_n| &\le |a_0 b_n| + |a_1 b_{n-1}| + \cdots + |a_n b_0|.
\end{aligned}
$$

Sumando las desigualdades anteriores, obtenemos

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} |c_k| &\le \sum_{j=0}^{n} \sum_{m=0}^{n-j} |a_j|\,|b_m| \\
&= \sum_{j=0}^{n} |a_j| \left(\sum_{m=0}^{n-j} |b_m| \right).
\end{aligned}
$$

Como $\sum b_n$ converge absolutamente, el sumando interno está acotado por $\sum_{m=0}^{\infty} |b_m|$. Así,

$$
\sum_{k=0}^{n} |c_k| \le \left(\sum_{j=0}^{n} |a_j| \right) \left(\sum_{m=0}^{\infty} |b_m| \right).
$$

Finalmente, dejando $n \to \infty$,

$$
\sum_{k=0}^{\infty} |c_k| \le \left(\sum_{j=0}^{\infty} |a_j| \right) \left(\sum_{m=0}^{\infty} |b_m| \right).
$$

Esto prueba tanto la convergencia absoluta de la serie de Cauchy como la desigualdad deseada. □

Proposición 3.10 (Suma por partes). *Sean (a_n), (b_n) sucesiones de números complejos y definamos*

$$
A_n = \sum_{k=0}^{n} a_k.
$$

Entonces, para todo $N > k$ se cumple

$$
\sum_{n=k}^{N} a_n b_n = A_N b_N - A_{k-1} b_k - \sum_{n=k}^{N-1} A_n (b_{n+1} - b_n).
$$

Demostración. Comenzamos desarrollando la suma:

$$
\begin{aligned}
\sum_{n=k}^{N} a_n b_n &= \sum_{n=k}^{N} (A_n - A_{n-1}) b_n \\
&= \sum_{n=k}^{N} A_n b_n - \sum_{n=k}^{N} A_{n-1} b_n \\
&= A_N b_N - A_{k-1} b_k + \sum_{n=k}^{N-1} A_n b_n - \sum_{n=k+1}^{N} A_{n-1} b_n.
\end{aligned}
$$

Reordenando,

$$\sum_{n=k}^{N} a_n b_n = A_N b_N - A_{k-1} b_k + \sum_{n=k}^{N-1} A_n b_n - \sum_{n=k}^{N-1} A_n b_{n+1}$$
$$= A_N b_N - A_{k-1} b_k - \sum_{n=k}^{N-1} A_n (b_{n+1} - b_n),$$

que es la identidad buscada. □

Este resultado se conoce también como *fórmula de Abel* y es muy útil para analizar series con términos oscilantes.

Proposición 3.11 (Criterio de Dirichlet). *Sea* (a_n) *una sucesión de números reales con* $a_{n+1} \leq a_n$ *y* $a_n \to 0$. *Sea* (b_n) *una sucesión de números complejos tal que*

$$B_n = \left| \sum_{k=0}^{n} b_k \right| \leq C \quad \text{para todo } n.$$

Entonces, la serie $\sum a_n b_n$ *es convergente.*

Demostración. Usando suma por partes, para todo N se tiene

$$\left| \sum_{k=0}^{N} a_k b_k \right| \leq |B_N a_N| + \sum_{n=0}^{N-1} |B_n|\, |a_n - a_{n+1}|$$
$$\leq C|a_N| + C \sum_{n=0}^{N-1} (a_n - a_{n+1}).$$

Como $a_n \to 0$, al tomar $N \to \infty$ resulta

$$\left| \sum_{k=0}^{\infty} a_k b_k \right| \leq C a_0,$$

lo cual prueba la convergencia de la serie. □

Observación 3.12. Sea (a_n) una sucesión de reales no negativos, decreciente y tal que $a_n \to 0$. Entonces, la serie $\sum a_n z^n$ converge absolutamente si $|z| < 1$, y converge también si $|z| = 1$ pero $z \neq 1$.

Este resultado es una aplicación directa del criterio de Dirichlet al caso de las llamadas *series de Dirichlet*, y nos servirá para analizar ejemplos clásicos como la serie armónica alternada.

3.2 Series de funciones

Sea $(f_n : D \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C})_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de funciones. Denotamos por

$$S_n(z) = \sum_{i=0}^{n} f_i(z)$$

a las sumas parciales.

Definición 3.13. Decimos que una serie de funciones $\sum f_n$ ***converge puntualmente*** si $S_n(z)$ converge para todo $z \in \mathbb{D}$. Además, si S_n converge uniformemente, decimos que la serie $\sum f_n$ converge ***uniformemente***.

Observación 3.14. Notemos que la convergencia puntual habla sobre la convergencia de una sucesión numérica; en cambio, la convergencia uniforme habla sobre sucesión de funciones.

Proposición 3.15. *Sea $(f_n : D \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C})_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de funciones continuas tal que $\sum f_n$ converge uniformemente. Entonces, $\sum f_n$ es continua.*

Demostración. consideremos las sumas parciales S_n. En sí, la proposición vale para sucesiones de funciones en general. □

Para la convergencia puntual, simplemente podemos fijar algún $z \in \mathbb{C}$ y utilizar los criterios de las series numéricas. Sin embargo, no tenemos un criterio para la convergencia uniforme.

Proposición 3.16 (Criterio de Weierstrass). *Sea $(f_n : D \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C})_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de funciones que cumplen*

1. *Para cada $n \in \mathbb{N}$, existe $M_n > 0$ tal que $|f_n| < M_n$.*

2. *La serie $\sum M_n$ converge.*

Entonces, $\sum f_n$ converge uniformemente.

Otra noción de convergencia:

Definición 3.17. Sea $(f_n : D \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C})_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de funciones continuas. Decimos que $\sum f_n$ ***converge normalmente*** si, para todo $K \subseteq D$ compacto,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \|f_n\|_K \text{ converge.}$$

3.3 Series de potencias

Definición 3.18. Sea $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en $\mathbb{C}$ y $z_0 \in \mathbb{C}$. Le decimos ***series de potencias*** a las series de la forma

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n.$$

Nos limitamos a las seires de potencia centradas en 0.

Lema 3.19 (Abel)**.** *Sea $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en $\mathbb{C}$ y $z_0 \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$ tal que $\sum a_n z_0^n$ converge. Entonces, $\sum a_n z^n$ converge uniforme y absolutamente en toda bola $\overline{B}(0,r)$, con $r < |z_0|$.*

Demostración. Sea $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en $\mathbb{C}$ y $z_0 \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$ tal que $\sum a_n z_0^n$ converge. Necesariamente, $a_n z_0^n \to 0$; por lo tanto, existe $C > 0$ tal que $|a_n z_0^n|$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Sea $r < |z_0|$ y $z \in \overline{B}(0,r)$. Entonces,

$$|a_n z^n| = |a_n||z|^n \leq |a_n||z_0|^n \left(\frac{|z|}{|z_0|}\right)^n \leq C\left(\frac{|z|}{|z_0|}\right)^n.$$

La serie geométrica

$$\sum_{n=0}^{\infty} C\left(\frac{|z|}{|z_0|}\right)^n$$

es convergente. Por el criterio de Weierstrass, $\sum a_n z^n$ converge uniforme y absolutamente en $\overline{B}(0,r)$. □

Definición 3.20. Sea $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en $\mathbb{C}$. El ***radio de convergencia*** de la series $\sum a_n z^n$ es

$$R = \frac{1}{\limsup_{n\to\infty} |a_n|^{\frac{1}{n}}}.$$

Una de las propiedades más importantes del radio de convergencia es que, justamente, la serie converge para todo $z \in \mathbb{C}$ tal que $|z| < R$. (Si $R = \infty$, entonces converge en $\mathbb{C}$.)

Lema 3.21. *Sean $n \in \mathbb{N}$ y $z, h \in \mathbb{C}$. Entonces se cumple la desigualdad*

$$\left|\sum_{j=2}^{n} \binom{n}{j} z^{k-j} h^j\right| \leq |h|^2 \frac{n(n-1)}{2} (|z| + |h|)^{n-2}.$$

Demostración. Antes de continuar vamos a probar una desigualdad que nos va a ser de utilidad. Consideremos

$$\left|\sum_{j=2}^{n}\binom{n}{j}z^{k-j}h^{j}\right| = |h|^2\left|\sum_{j=2}^{n}\frac{n(n-1)}{j(j-1)}\binom{n-2}{j-2}z^{n-j}h^{j-2}\right|.$$

Como $j \geq 2$, se cumple que $\frac{1}{j(j-1)} \leq \frac{1}{2}$. Así,

$$\left|\sum_{j=2}^{n}\binom{n}{j}z^{k-j}h^{j}\right| \leq |h|^2\,\frac{n(n-1)}{2}\left|\sum_{j=2}^{n}\binom{n-2}{j-2}z^{n-j}h^{j-2}\right|.$$

Haciendo el cambio de índice $k = j-2$, queda

$$\begin{aligned}\left|\sum_{j=2}^{n}\binom{n}{j}z^{k-j}h^{j}\right| &\leq |h|^2\,\frac{n(n-1)}{2}\sum_{k=0}^{n-2}\binom{n-2}{k}|z|^{n-k-2}|h|^{k}\\ &= |h|^2\,\frac{n(n-1)}{2}(|z|+|h|)^{n-2}.\end{aligned}$$

Esto concluye la demostración. □

Teorema 3.22. *Sea $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en $\mathbb{C}$ y sea $S = \sum a_n z^n$ la serie de potencias asociada, con radio de convergencia R. Entonces, la derivada de S es*

$$S' = \left(\sum a_n z^n\right)' = \sum n a_n z^{n-1}$$

Demostración. Primero, como

$$\limsup_{n\to\infty}|n+1|^{\frac{1}{n}}|a_{n+1}|^{\frac{1}{n}} = \limsup_{n\to\infty}|a_{n+1}|^{\frac{1}{n+1}},$$

ambas S' y $\sum n a_n z^{n-1}$ tienen el mismo radio de convergencia.

Sean $z, h \in \mathbb{C}$ tales que $|z|+|h| < R$. Sea $\varepsilon > 0$. Buscamos un $\delta > 0$ tal que

$$\text{si } |h| < \delta, \text{ entonces } |S(z+h) - S(z) - S'(z)h| < \varepsilon|h|.$$

Consideremos

$$\begin{aligned}S(z+h) &= \sum_{k=0}^{\infty} a_k(z+h)^k\\ &= \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}z^{k-j}h^{j}\\ &= \sum_{k=0}^{\infty} a_k\left(z^k + kz^{k-1}h + \sum_{j=2}^{k}\binom{k}{j}z^{k-j}h^{j}\right)\end{aligned}$$

y también

$$\begin{aligned}S(z+h) &= \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k + \sum_{k=0}^{\infty} a_{k+1}(k+1)z^k h + \sum_{k=0}^{\infty} a_k\sum_{j=2}^{k}\binom{k}{j}z^{k-j}h^{j}\\ &= S(z) + S'(z)h + \sum_{k=0}^{\infty} a_k\sum_{j=2}^{k}\binom{k}{j}z^{k-j}h^{j}.\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$
\begin{aligned}
S(z+h) - S(z) - S'(z)h &= \sum_{k=0}^{\infty} a_k \sum_{j=2}^{k} \binom{k}{j} z^{k-j} \\
&=
\end{aligned}
$$

□