Análisis Complejo

Ramiro Dibur

2025

Índice general

Prefacio

Estas son mis notas de Análisis Complejo del segundo cuatrimestre de 2025. Las escribo más que nada para estudiar yo, pero las publico por si le llegan a ser útiles a alguien.

1

Nociones básicas

Formalizamos algunas conceptos de probabilidad que vienen de la intuición.

1.1 Modelo probabilístico

Consideremos un experimento con distintos posibles resultados.

Definición 1.1. El ***espacio muestral*** de un experimento es el conjunto de posibles resultados del experimento.

Usualmente denotamos un espacio muestral con Ω.

Observación 1.2. Todo resultado corresponde con un único elemento $\omega \in \Omega$.

Veamos algunos ejemplos.

Ejemplo 1.3. Consideremos el siguiente experimento:

1. Se tira un dado balanceado de 6 caras.
2. Se graba el resultado.

En este caso, el espacio muestral es el conjunto

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}.$$

Cabe aclarar que no importa de qué manera escribimos los resultados siempre y cuando la correspondencia con el resultado sea clara. Por ejemplo, podríamos haber definido el espacio muestral como

$$\Omega = \{\text{⚀}, \text{⚁}, \text{⚂}, \text{⚃}, \text{⚄}, \text{⚅}\}.$$

Ejemplo 1.4. Consideremos el siguiente experimento:

1. Se tira una moneda 3 veces.
2. Se graba el resultado.

El espacio muestral es

$$\Omega = \{CCC, CCS, \ldots, SSC, SSS\}.$$

Nótese que Ω se puede escribir como $\{C, S\}^3$.

Ejemplo 1.5. Consideremos el siguiente experimento:

1. Se elije un habitante de Buenos Aires al azar.
2. Se mide su altura en metros.

El espacio muestral podría ser
$$\Omega = \mathbb{R}.$$

Uno podría argumentar que el espacio muestral debería ser
$$\Omega = [0, 3],$$
ya que es imposible que alguien mida $-1\,\mathrm{m}$ o $100\,\mathrm{m}$. Sin embargo, lo único que nos interesa es que, al medir a alguien, caiga dentro de Ω.

1.2 Eventos

Definición 1.6. Sea Ω un espacio muestral. Un ***evento*** es un subconjunto de Ω.

Veámoslo en algunos ejemplos.

Ejemplo 1.7. Consideramos el experimento del ejemplo 1.3. El conjunto
$$A = \{\text{el resultado es un número par}\} = \{2, 4, 6\}$$
es un evento dado que $A \subseteq \Omega$.

Por ahora, usemos la noción intuitiva de probabilidades.

La probabilidad se le asigna a un evento, no a un resultado. Por ejemplo, cuando decimos
$$P(⚂) = \frac{1}{6}$$
en realidad queremos decir
$$P(\{⚂\}) = \frac{1}{6}.$$
No obstante, por practicidad acudiremos a la primera notación.

Usualmente calculamos la probabilidad de un evento de la siguiente manera:
$$P(A) = \frac{\#\text{ casos donde sucede } A}{\#\text{ casos totales}}.$$

Veamos por qué esto no es generalizable.

Ejemplo 1.8. Consideremos el siguiente experimento:

1. Se tiran 2 dados balanceados de 6 caras.
2. Se suman los números de las caras.
3. Se graba el resultado.

Un espacio muestral podría ser

$$\Omega = \{2, 3, \dots, 12\}.$$

Sin embargo, $P(2) \neq \frac{1}{10}$. Esto se puede resolver tomando el espacio muestral

$$\Omega = \{\text{⚀⚀}, \text{⚀⚁}, \dots, \text{⚅⚄}, \text{⚅⚅}\}.$$

Por lo tanto, para todo resultado $\omega \in \Omega$,

$$P(\omega) = \frac{\#\text{ casos donde sucede } A}{\#\text{ casos totales}} = \frac{1}{36}.$$

A partir de este ejemplo surge una definición.

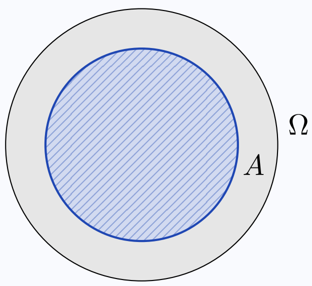
Definición 1.9. Sea Ω un espacio muestral. Si Ω es finito y todos sus elementos tienen la misma probabilidad, decimos que Ω es un ***espacio muestral equiprobable***.

Sin embargo, hasta ahora únicamente tratamos con espacios muestrales finitos. Veamos qué pasa con los infinitos.

Ejemplo 1.10. Consideremos el siguiente experimento:

1. Se elije un punto del disco unitario $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$ al azar.
2. Se graba el resultado.

Sea $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq \frac{1}{2}\}$.



Por lo que

$$P(A) = \frac{\text{área}(A)}{\text{área}(\Omega)}.$$

1.3 Eventos aleatorios

No podemos definirle una probablidad a todos los eventos de un espacio muestral.

Definición 1.11. Un evento al cual le podemos definir una probabilidad es llamado un ***evento aleatorios***.

Agregamos algunas reglas adicionales.

Definición 1.12. Llamamos $\mathcal{F}$ a una familia de eventos a los cuales podemos calcularles su probabilidad si cumple los siguientes axiomas:

(F1) $\Omega \in \mathcal{F}$.

(F2) Si $A \in \mathcal{F}$, entonces $A^{\mathrm{c}} \in \mathcal{F}$.

(F3) Si $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{F}$, entonces $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{F}$.

Observación 1.13. Si una familia cumple los axiomas (F1), (F2) y (F3), entonces se llama una σ-álgebra de conjuntos.

Ejemplo 1.14. En el ejemplo 1.3, el espacio muestral

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

tiene a la familia de eventos $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$ que se les puede asignar una probabilidad.

Veamos algunas propiedades que podemos deducir.

Proposición 1.15. *Sea Ω un espacio muestral y $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ una σ-álgebra. Las siguientes proposiciones son verdaderas:*

1. $\varnothing \in \mathcal{F}$.
2. *Si* $\{A_n\}_{1\leq n\leq N} \subseteq \mathcal{F}$, *entonces* $\bigcup_{1\leq n\leq N} A_n \in \mathcal{F}$.
3. *Si* $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{F}$, *entonces* $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{F}$. *(También la versión finita.)*
4. *Si* $A, B \in \mathcal{F}$, *entonces* $A \setminus B \in \mathcal{F}$.

Demostración. (*1.*) Dado que $\Omega \in \mathcal{F}$ por (F1), obtenemos que $\varnothing = \Omega^{\mathrm{c}} \in \mathcal{F}$ por (F2).

(*2.*) Sea $\{A_n\}_{1\leq n\leq N} \subseteq \mathcal{F}$. Consideremos la familia $\{B_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tal que

$$B_n = \begin{cases} A_n & \text{si } 1 \leq n \leq N, \\ \varnothing & \text{si } n \geq N. \end{cases}$$

Entonces, por (F3),

$$\bigcup_{1\leq n\leq N} A_n = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n \in \mathcal{F}.$$

(*3.*) Sea $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{F}$. Por (F3),

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n = \left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n^{\mathrm{c}}\right)^{\mathrm{c}} \in \mathcal{F}.$$

(*4.*) Sean $A, B \in \mathcal{F}$. Dado que B^{c},

$$A \setminus B = A \cap B^{\mathrm{c}} \in \mathcal{F}.$$

□

Ejemplo 1.16. Consideremos el siguiente experimento:

1. Se elije un número real del intervalo $[0,1]$ al azar.
2. Se graba el resultado.

Sea $\Omega = [0,1]$ el espacio muestral y sea $\mathcal{F}$ la familia de eventos a los cuales les podemos asignar una probabilidad. Para un intervalo $[a,b]$ la probabilidad se puede calcular como

$$P([a,b]) = b - a.$$

Aplicando las propiedades de la proposición 1.15, podemos deducir que en $\mathcal{F}$ están los eventos:

- Los intervalos abiertos y cerrados.
- Uniones e intersecciones numerables de cerrados y/o abiertos.
- Los puntos $\{x\}$ con $x \in [0,1]$.
- Los números racionales $\mathbb{Q}$.

¿Cuál es la probabilidad de $\mathbb{Q}$? Basta con tomar $\{B_m\} = \{B(q_m, \frac{\varepsilon}{2^{m+1}})\}_{m\in\mathbb{N}}$ y ver que

$$\begin{aligned} P\left(\bigcup_{m\in\mathbb{N}} B_m\right) &\leq \sum_{m\in\mathbb{N}} P(B_m) \\ &\leq \sum_{m\in\mathbb{N}} \frac{\varepsilon}{2^m} \\ &\leq \varepsilon. \end{aligned}$$

Tomando $\varepsilon \to 0$, obtenemos que $P(\mathbb{Q}) = 0$.

1.4 Definición de probabilidad

La *idea de Laplace* de probabilidad consta en que la probabilidad de un evento es el límite de la frecuencia con la que sucede cuando la cantidad de ensayos tiende a infinito.

Por otro lado, está la *axiomatización de Kolmogorov*:

Definición 1.17. Sea Ω un espacio muestra y $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ una σ-álgebra. Una función probabilidad es una función $P : \mathcal{F} \to [0,1]$ que cumple los siguientes axiomas:

(P1) $P(\Omega) = 1$.

(P2) $P(A) \geq 0$ para todo $A \in \mathcal{F}$.

(P3) Si $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{F}$ una familia de eventos disjuntos, entonces $P(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n)$.

Con esto podemos definir un espacio de probabilidad.

Definición 1.18. Sea Ω un espacio muestral, $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ una familia de eventos y $P : \mathcal{F} \to [0, 1]$ una función probabilidad. Entonces, la terna $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ es un ***espacio de probabilidad***.

Probamos algunos resultados inmediatos.

Proposición 1.19. *Sea $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un espacio de probabilidad. Entonces, las siguientes proposiciones son verdaderas:*

1. $P(\varnothing) = 0$.
2. *Si A y B son eventos disjuntos, entonces $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.*
3. *Si $\{A_n\}_{1\leq n\leq N}$ es una familia de eventos disjuntos, entonces $P(\bigcup_{1\leq n\leq N} A_n) = \sum_{n=1}^{N} P(A_n)$.*
4. $P(A^c) = 1 - P(A)$.
5. *Si $A \subseteq B$, entonces $P(A) \leq P(B)$.*
6. $P(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n)$.

Demostración. (*1.*) Consideremos la familia $\{\Omega, \varnothing, \ldots\}$. Por (P3),

$$\begin{aligned} P(\Omega) &= P(\Omega \cup \varnothing \cup \cdots) \\ &= P(\Omega) + \underbrace{P(\varnothing) + \cdots}_{=0} \end{aligned}$$

(*2.*) La propiedad sale utilizando (P3) y tomando la familia $\{A, B, \varnothing, \ldots\}$.

(*3.*) Se prueba por inducción y ussando la proposición anterior.

(*4.*) Podemos escribir como unión disjunta $\Omega = A \cup A^c$. Y con la propiedad *2.* obtenemos que

$$1 = P(\Omega) = P(A) + P(A^c),$$

entonces

$$P(A^c) = 1 - P(A).$$

(*5.*) Como $B = (B \setminus A) \cup A$,

$$P(A) \leq P(B \setminus A) + P(A) = P(B).$$

(*6.*) Sea $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una familia de eventos. Consideremos $\{B_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tal que

$$B_n = A_n \setminus \bigcup_{1\leq k\leq n-1} A_k.$$

Como los eventos B_n son disjuntos dos a dos,

$$P\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = P\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} P(B_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n).$$

□