



86.15 Robótica, 2ºC 2020
TP5, Dinámica

Alumno:

Eichenbaum, Daniel P. 95233
Vera Guzman, Ramiro P.95887

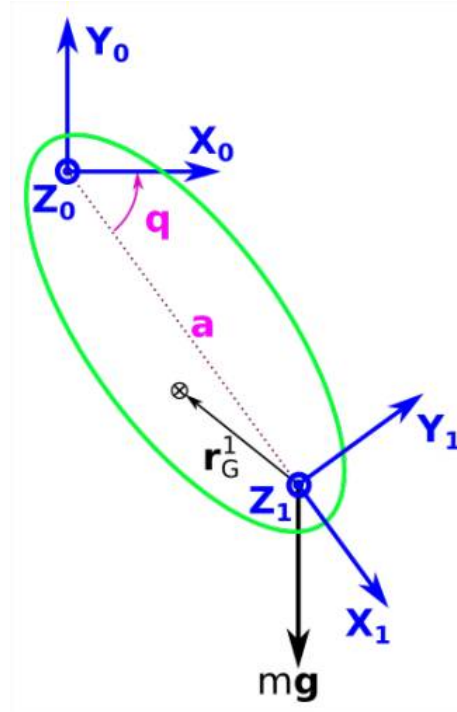
leinaxd@gmail.com
ramiro.vera.g@gmail.com

Índice

PARTE 1, Obtención del modelo dinámico.	Pág. 2
PARTE 2, Estimación de parámetros	Pág. 6
PARTE 3, Simulación	Pág. 8
PARTE 4, Verificación	Pág. 11
PARTE 5, Término disipativo	Pag. 11
Conclusiones	Pág. 13

Parte 1, Obtención del modelo dinámico.

Para el mecanismo mostrado en la figura consistente en un eslabón móvil articulado por un eje de revolución situado según la dirección de z_0 , hallar las ecuaciones del modelo dinámico inverso que vinculan el torque τ expresado sobre el eje z_0 y posiciones generalizadas q y sus derivadas según se indica.



PARTE 1, determinación del modelo

Para comenzar con el análisis, se plantean las ecuaciones de Euler-Lagrange

$$L = T - V$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} = \psi_j$$

Para obtener el sistema expresado de la siguiente estructura:

$$\tau = M(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + G(q)$$

Para continuar, resultará útil obtener la matriz de rototraslación entre sistemas de referencias:

$$A_{01}^1 = \begin{bmatrix} c(q) & -s(q)c(\alpha) & s(q) \cdot s(\alpha) & a \cdot c(q) \\ s(q) & c(q)c(\alpha) & -c(q) \cdot s(\alpha) & a \cdot s(q) \\ 0 & s(\alpha) & c(\alpha) & d \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- Como colocamos ambos sistemas de coordenadas a la misma altura, forzamos al parámetro $d = 0$
- Como el eje z_0 es paralelo al eje z_1 obtenemos que $\alpha = 0$

La matriz A_0^1 queda:

$$A_0^1 = \begin{bmatrix} c(q) & -s(q) & 0 & a \cdot c(q) \\ s(q) & c(q) & 0 & a \cdot s(q) \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

También, resultará útil obtener

$$\frac{\partial A_0^1}{\partial q} = \begin{bmatrix} -s(q) & -c(q) & 0 & -a \cdot s(q) \\ c(q) & -s(q) & 0 & a \cdot c(q) \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Comenzamos con el coeficiente M del modelo

$$m_{sk} = \sum_{i=1}^N Tr \left[\frac{\partial A_0^i}{\partial q_s} J_i \left(\frac{\partial A_0^i}{\partial q_k} \right)^t \right]$$

con

$$J_i = \begin{bmatrix} \frac{-I_{oxx} + I_{oyy} + I_{ozz}}{2} & -I_{oxy} & -I_{oxz} & x_g \cdot m \\ -I_{oxy} & \frac{I_{oxx} - I_{oyy} + I_{ozz}}{2} & -I_{oyz} & y_g \cdot m \\ -I_{oxz} & -I_{oyz} & \frac{I_{oxx} + I_{oyy} - I_{ozz}}{2} & z_g \cdot m \\ x_g \cdot m & y_g \cdot m & z_g \cdot m & m \end{bmatrix}$$

Como hay solo 1 eslabón $N = 1$ y una sola variable generalizada q , la matriz se simplifica:

$$M = m_{11} = Tr \left[\frac{\partial A_0^1}{\partial q} J_i \left(\frac{\partial A_0^1}{\partial q} \right)^t \right]$$

$$= Tr \left(\begin{bmatrix} -s(q) & -c(q) & 0 & -a \cdot s(q) \\ c(q) & -s(q) & 0 & a \cdot c(q) \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{-I_{oxx} + I_{oyy} + I_{ozz}}{2} & -I_{oxy} & -I_{oxz} & x_g \cdot m \\ -I_{oxy} & \frac{I_{oxx} - I_{oyy} + I_{ozz}}{2} & -I_{oyz} & y_g \cdot m \\ -I_{oxz} & -I_{oyz} & \frac{I_{oxx} + I_{oyy} - I_{ozz}}{2} & z_g \cdot m \\ x_g \cdot m & y_g \cdot m & z_g \cdot m & m \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -s(q) & c(q) & 0 & 0 \\ -c(q) & -s(q) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -a \cdot s(q) & a \cdot c(q) & 0 & 0 \end{bmatrix} \right)$$

$$= Tr \begin{bmatrix} -s(q) \cdot \frac{-I_{oxx} + I_{oyy} + I_{ozz}}{2} + c(q) \cdot I_{oxy} - a s(q) x_g m & s(q) I_{oxy} - c(q) \frac{I_{oxx} - I_{oyy} + I_{ozz}}{2} - a s(q) y_g m & s(q) I_{oxz} + c(q) I_{oyz} - a s(q) z_g m & -s(q) x_g m - c(q) y_g m - a s(q) m \\ c(q) \cdot \frac{-I_{oxx} + I_{oyy} + I_{ozz}}{2} + s(q) \cdot I_{oxy} + a c(q) x_g m & -c(q) I_{oxy} - s(q) \frac{I_{oxx} - I_{oyy} + I_{ozz}}{2} + a c(q) y_g m & -c(q) I_{oxz} + s(q) I_{oyz} + a c(q) z_g m & c(q) x_g m - s(q) y_g m + a c(q) m \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -s(q) & c(q) & 0 & 0 \\ -c(q) & -s(q) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -a \cdot s(q) & a \cdot c(q) & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Como se aplica la traza, solamente me molesto en calcular los elementos de la diagonal

$$\begin{aligned} &= \left[\left(s^2(q) \frac{-I_{oxx} + I_{oyy} + I_{ozz}}{2} - s(q)c(q) \cdot I_{oxy} + a s^2(q) x_g m \right) + \left(-s(q)c(q) I_{oxy} + c^2(q) \frac{I_{oxx} - I_{oyy} + I_{ozz}}{2} + a s(q)c(q) y_g m \right) + (a s^2(q) x_g m + a s(q)c(q) y_g m + a^2 s^2(q) m) \right] \\ &+ \left[\left(c^2(q) \frac{-I_{oxx} + I_{oyy} + I_{ozz}}{2} + s(q)c(q) \cdot I_{oxy} + a c^2(q) x_g m \right) + \left(s(q)c(q) I_{oxy} + s^2(q) \frac{I_{oxx} - I_{oyy} + I_{ozz}}{2} - a s(q)c(q) y_g m \right) + (a c^2(q) x_g m - a s(q)c(q) y_g m + a^2 c^2(q) m) \right] \\ &+ [0] \\ &+ [0] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= s^2(q) \left[\frac{-I_{oxx} + I_{oyy} + I_{ozz}}{2} + a x_g m + a x_g m + a^2 m + \frac{I_{oxx} - I_{oyy} + I_{ozz}}{2} \right] \\ &+ c^2(q) \left[\frac{I_{oxx} - I_{oyy} + I_{ozz}}{2} + \frac{-I_{oxx} + I_{oyy} + I_{ozz}}{2} + a x_g m + a x_g m + a^2 m \right] \\ &+ s(q)c(q) [-I_{oxy} - I_{oxy} + a y_g m + a y_g m + I_{oxy} + I_{oxy} - a y_g m - a y_g m] \\ &+ 1 [m] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= s^2(q) [I_{ozz} + 2 a x_g m + a^2 m] \\ &+ c^2(q) [I_{ozz} + 2 a x_g m + a^2 m] \\ &+ s(q)c(q) [0] \\ &+ 1 [0] \end{aligned}$$

$$\boxed{\mathbf{M} = \mathbf{m}_{11} = [I_{ozz} + 2 a x_g m + a^2 m]}$$

La matriz de componentes centrípetas por:

$$C_{sj} = \sum_{k=1}^N \frac{1}{2} \left[\frac{\partial m_{sj}}{\partial q_k} + \frac{\partial m_{js}}{\partial q_j} - \frac{\partial m_{jk}}{\partial q_s} \right] \dot{q}_k$$

Como hay un solo eslabón $\mathbf{N} = \mathbf{1}$ y una sola variable generalizada \mathbf{q}

$$\mathbf{C} = \mathbf{C}_{11} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial m_{11}}{\partial q} + \frac{\partial m_{11}}{\partial q} - \frac{\partial m_{11}}{\partial q} \right] \dot{q}$$

$$\boxed{\mathbf{C} = \mathbf{C}_{11} = \frac{1}{2} \left[\underbrace{\frac{\partial m_{11}}{\partial q}}_{=0} \right] \dot{q} = 0}$$

Por último, el término relacionado con el torque cuando la velocidad es nula es:

$$G(q) = - \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{g}^t \frac{\partial A_0^i}{\partial q_s} \mathbf{r}_G^i$$

Como hay un solo eslabón $N = 1$ y una sola variable generalizada q queda

$$\begin{aligned} \mathbf{G} &= -m \cdot \mathbf{g}^t \frac{\partial A_0^1}{\partial q} \mathbf{r}_g \\ &= -m \begin{bmatrix} g_x & g_y & g_z & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -s(q) & -c(q) & 0 & -a \cdot s(q) \\ c(q) & -s(q) & 0 & a \cdot c(q) \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_g \\ y_g \\ z_g \\ 1 \end{bmatrix} \\ &= -m \begin{bmatrix} 0 & -g & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -s(q)x_g - c(q)y_g - a s(q) \\ c(q)x_g - s(q)y_g + a c(q) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ &= mg [c(q)x_g - s(q)y_g + a c(q)] \end{aligned}$$

Finalmente colocamos todas las matrices en la ecuación para obtener:

$$\tau = \mathbf{M}(q)\ddot{q} + \mathbf{C}(q, \dot{q})\dot{q} + \mathbf{G}(q)$$

$$\tau = \left[I_{ozz} + 2 a x_g m + a^2 m \right] \ddot{q} + mg \left[c(q)x_g - s(q)y_g + a c(q) \right]$$

Que es la ecuación que representa la dinámica inversa del sistema.

PARTE 2, Estimación de parámetros

Para la siguiente parte del ejercicio, necesitamos encontrar una expresión de la siguiente forma

$$\tau = \phi(q, \dot{q}, \ddot{q}) \mathbf{P}$$

Donde los parámetros desconocidos son

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} I_{ozz} \\ x_g \\ y_g \end{bmatrix}$$

Y los conocidos son:

$$\cdot a = 0.2\text{m}$$

$$\cdot m = 2\text{kg}$$

Partiendo de la expresión anterior

$$\tau = [I_{ozz} + 2 a x_g m + a^2 m] \ddot{q} + mg [c(q)x_g - s(q)y_g + a c(q)]$$

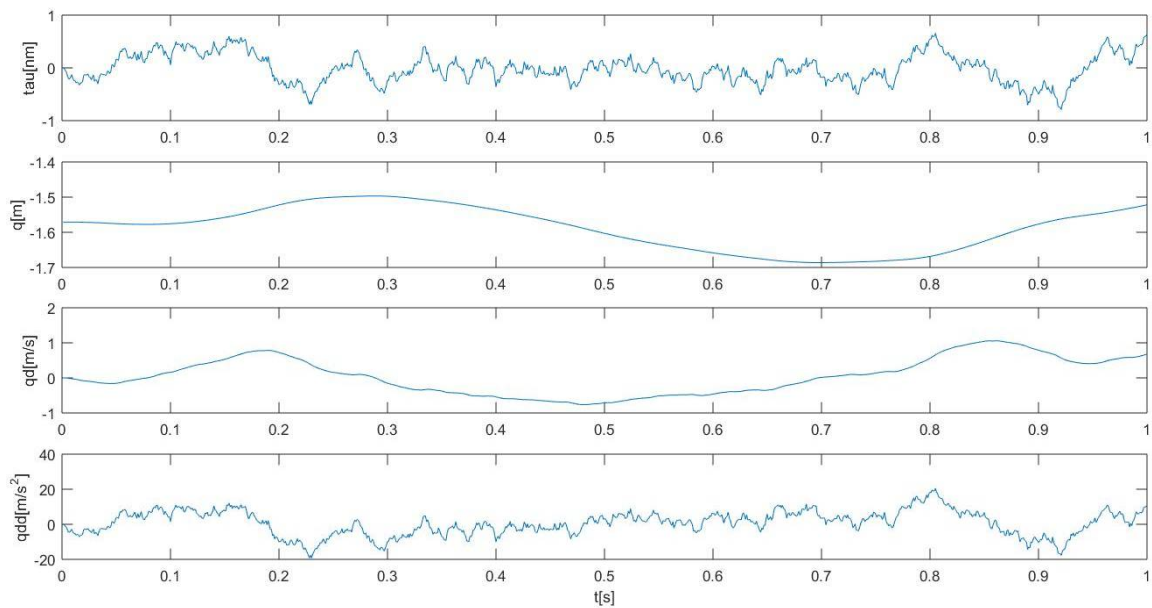
Reordenamos como

$$\tau = \ddot{q} I_{ozz} + 2 a m \ddot{q} x_g + a^2 m \ddot{q} + mg c(q) x_g - mg s(q) y_g + mg a c(q)$$

El problema expresado

$$\boxed{\underbrace{\tau - [a^2 m \ddot{q} + mg a c(q)]}_{\hat{Y}} = \underbrace{[\ddot{q} \quad 2 a m \ddot{q} + m g c(q) \quad -mg s(q)]}_{\hat{\Phi}} \underbrace{\begin{bmatrix} I_{ozz} \\ x_g \\ y_g \end{bmatrix}}_{\mathbf{P}}}$$

A continuación, a partir de un ensayo de laboratorio se obtienen datos entre torques y variables q , \dot{q} y \ddot{q} .



Se plantea cuadrados mínimos utilizando la expresión recientemente obtenida.

$$\underbrace{\begin{bmatrix} Y_1 \\ \vdots \\ Y_n \end{bmatrix}}_Y = \Phi \begin{bmatrix} P_1 \\ \vdots \\ P_2 \end{bmatrix}$$

El cual planteando cuadrados mínimos se obtiene

$$\hat{P} = (\Phi^t \Phi)^{-1} \Phi^t Y$$

Luego, como originalmente se tienen 1000 muestras, y queremos saber también si nuestros parámetros y modelo dan buenos resultados, se propone dividir el dataSet en un porcentaje de entrenamiento y uno de validación. Además se quiere ver la relación entre número de muestras, si la matriz Φ está bien condicionada y si los parámetros elegidos tienen bajo error.

Porcentaje de Entrenamiento[%]	Número de muestras de entrenamiento	Número de condición de Φ	Error sobre todo el dataSet	Error sobre las Muestras de validación
0.1	100	1140	1.49	1.48
0.3	300	55	0.69	0.59
0.4	400	56	0.65	0.47
0.5	500	50	0.81	0.54
0.7	700	25	0.69	0.37
0.9	900	24	0.64	0.08

Según la ley de los grandes números, la estimación de error será más certera sobre aquellas variables con más muestras. Por ende para tener una buena estimación del error sobre las muestras de validación, se divide el set de datos en 400 muestras de entrenamiento y 600 de validación. Los resultados fueron los siguientes

$$P_{400 \text{ muestras}} = \begin{bmatrix} I_{ozz} \\ x_g \\ y_g \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.006 \text{ kg m}^2 \\ -0.05 \text{ m} \\ 0 \end{bmatrix}$$

PARTE 3, Simulación

Para poder simular nuestro modelo, lo primero que tenemos que hacer es definir las variables de estado, las cuales son:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q \\ \dot{q} \end{bmatrix}$$

Y recordando que nuestro modelo era:

$$\tau = [I_{ozz} + 2 a x_g m + a^2 m] \ddot{q} + mg [c(q)x_g - s(q)y_g + a c(q)]$$

Despejando \ddot{q} obtenemos:

$$\ddot{q} = [I_{ozz} + 2 a x_g m + a^2 m]^{-1} (\tau - mg [c(q)x_g - s(q)y_g + a c(q)])$$

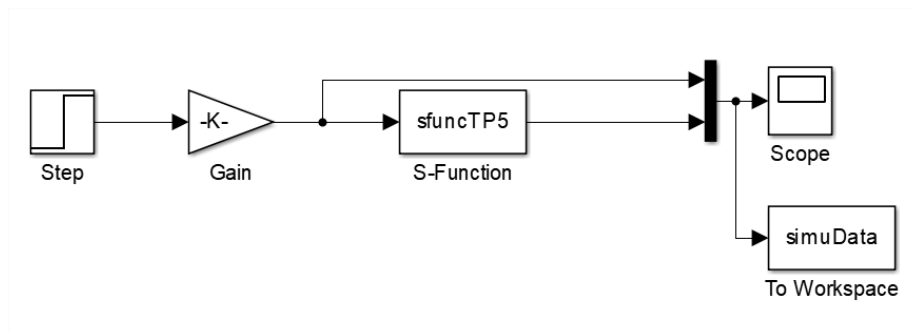
Por ende la derivada de nuestras variables de estado quedan:

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ [I_{ozz} + 2 a x_g m + a^2 m]^{-1} (u - mg [c(x_1)x_g - s(x_1)y_g + a c(x_1)]) \end{bmatrix}$$

Siendo la variable de entrada el torque del motor

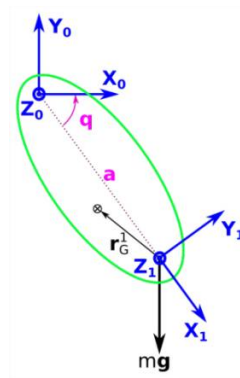
$$u = \tau$$

Ya obtenido el modelo, se puede introducir en una s-function en la parte de mdlDerivatives.

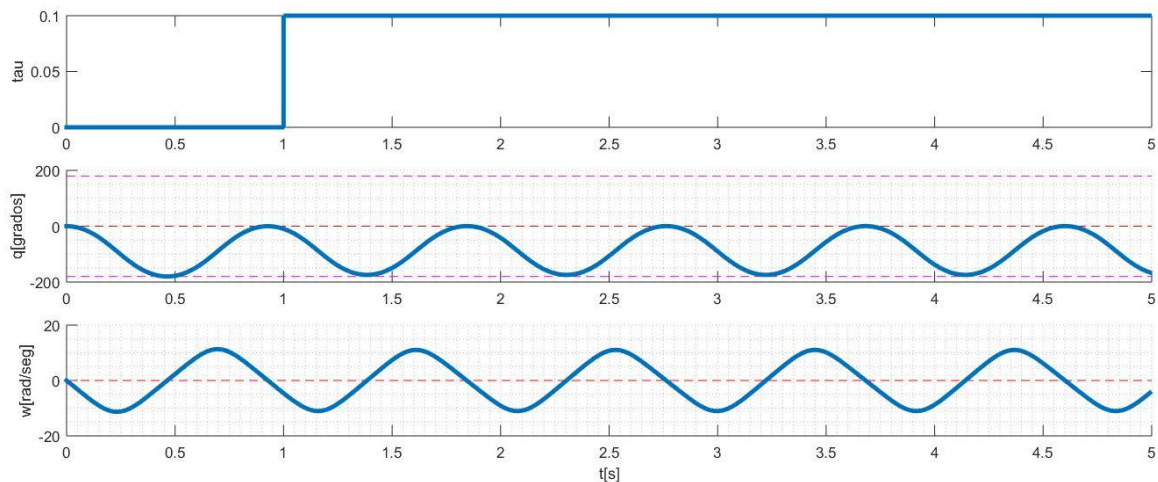


El modelo es muy sencillo, consiste en un escalón que es amplificado según el script de matlab para tener valores de torques de 0.1 nm o 2nm o 3nm. Pasa por la sFunction y los resultados se grafican desde matlab.

Para proceder al análisis siguiente, se recuerdan los sistemas de referencia.



La respuesta del sistema para un torque de 0.1 nm se muestra en la figura a continuación, debajo el ángulo q donde se trazó en rojo los 0° y en magenta los 180° para facilitar la visualización. El último gráfico corresponde a la velocidad angular en función del tiempo.

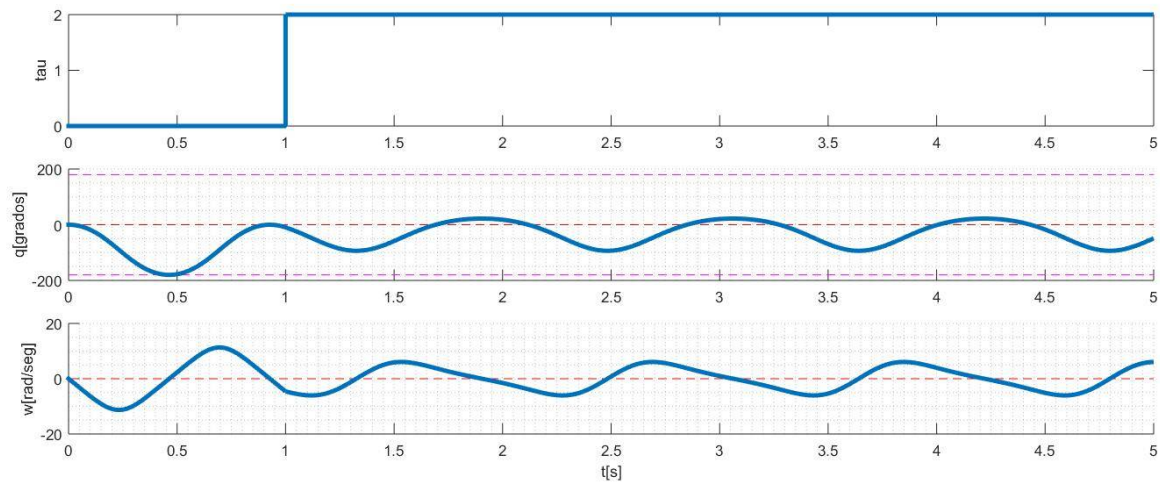


De este gráfico, se observa que la perturbación de torque apenas modifica la dinámica, esta simulación resulta útil para observar el movimiento oscilatorio natural de este eslabón.

Se observa que si se lanza en la posición $q = 0$, el sistema evolucionará a $q = 180^\circ$ aproximadamente al 0.5 segundo de ser lanzado, período donde es acelerado por la fuerza de la gravedad. En este momento la velocidad angular es cero y el giro se produce en el otro sentido.

Cuando la curva ω está por debajo del cero (línea punteada), el eslabón está moviéndose en dirección horaria (se aleja del sistema de referencia), cuando ω está encima del cero, el eslabón se mueve en dirección antihoraria (acercándose al sistema de referencia).

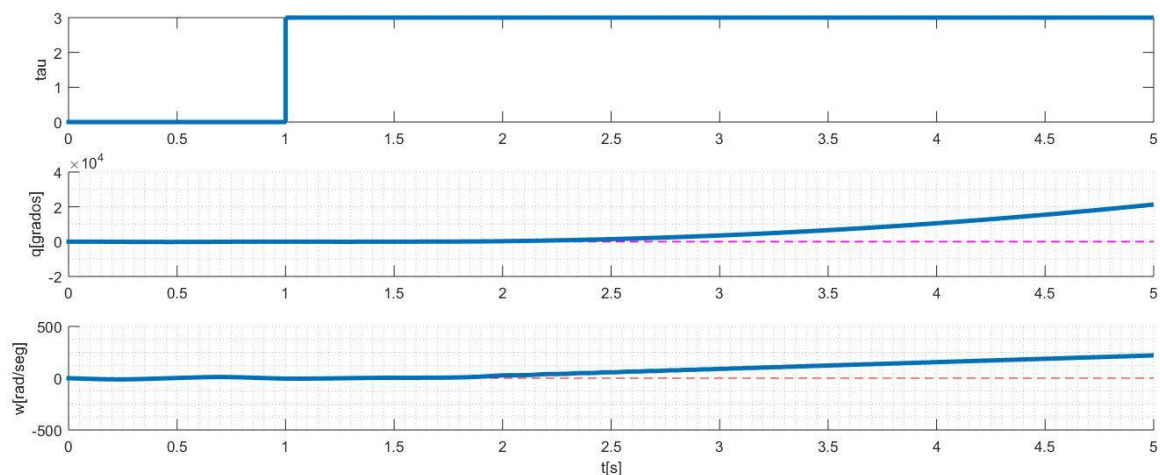
A continuación, se simula el eslabón con un torque de 2nm.



Lo que se observa es que el eslabón continúa oscilando de un lado a otro como ocurría antes con el torque $\tau = 0.1 \text{ nm}$, la diferencia ocurre donde la velocidad angular ω es negativa, el eslabón se acelera (el torque externo y el torque debido a la acción de la gravedad coinciden en dirección).

Cuando ω es positiva, el torque externo y la acción de la gravedad tienen sentidos diferentes, sin embargo la acción de gravedad gana, obteniendo una velocidad angular neta, bastante baja (zona plana en el gráfico de ω).

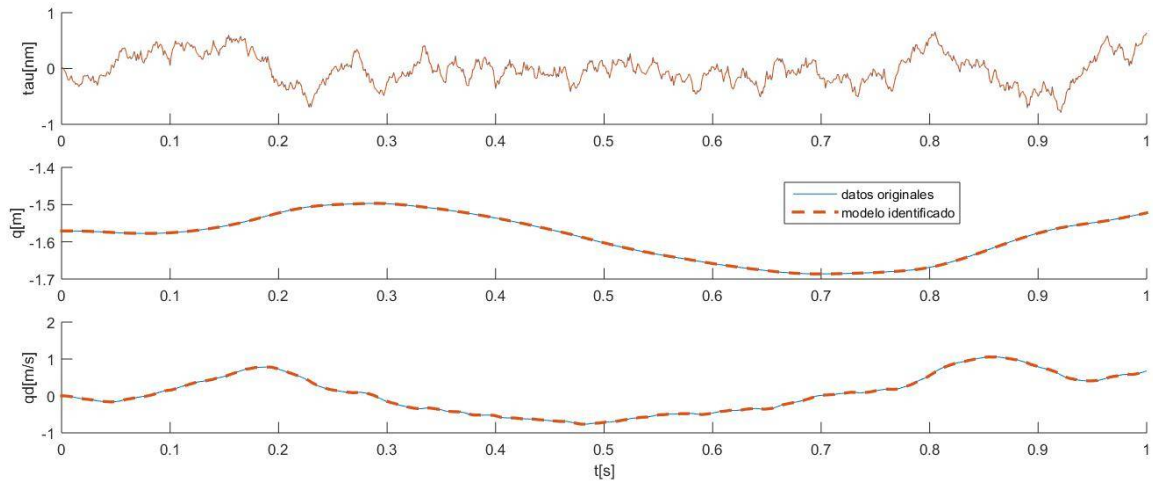
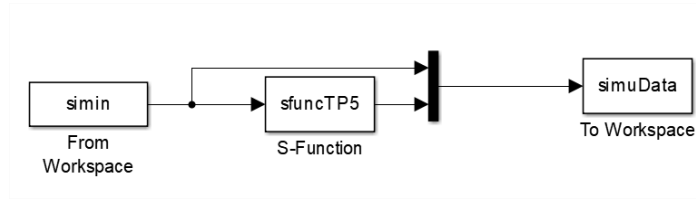
Finalmente, se simula el eslabón con un torque de 3nm.



Aquí se observa que el torque externo le gana al torque producido por la acción de la gravedad consiguiendo que el eslabón gire en círculos.

Parte 4, Verificación

En esta parte final, queremos verificar si el modelo planteado fue correctamente deducido, y para ello se propone repetir el ensayo provisto por la materia comparado con el modelo ya identificado.



Como se puede observar, repetir la simulación con los datos originales, recupera las mismas señales a la salida según los parámetros obtenidos:

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} I_{ozz} \\ x_g \\ y_g \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.006 \text{ kg m}^2 \\ -0.05 \text{ m} \\ 0 \end{bmatrix}$$

Parte 5, Término disipativo

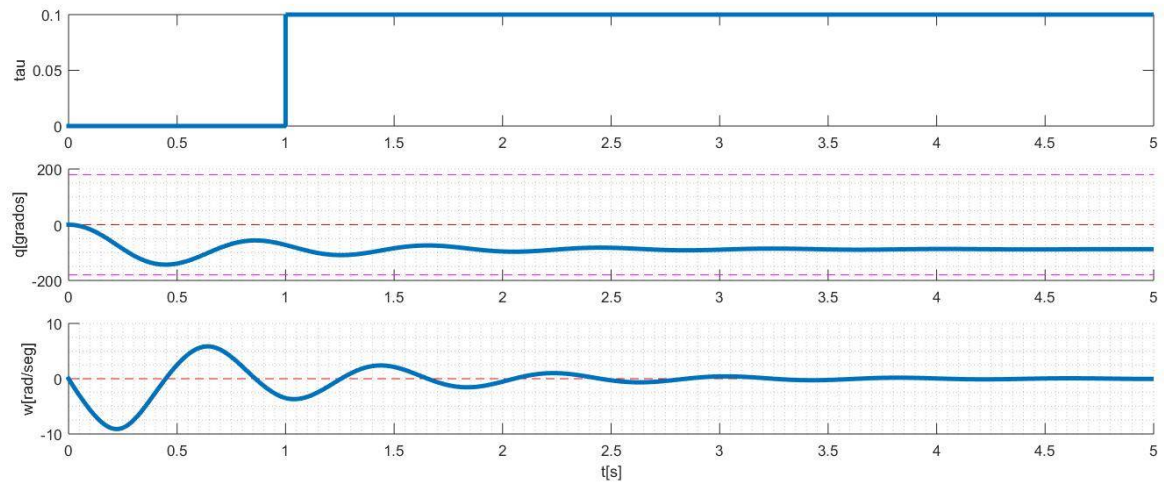
Finalmente, vamos a modelar también la fricción en el eje y la forma de hacerlo es añadiendo un término disipativo de la forma $B\dot{q}$ con $B = 0.1 \text{ nm}/(\text{rad}/\text{seg})$

$$\tau = [I_{ozz} + 2 a x_g m + a^2 m] \ddot{q} + B \dot{q} + mg [c(q)x_g - s(q)y_g + a c(q)]$$

El modelo en variables de estado queda

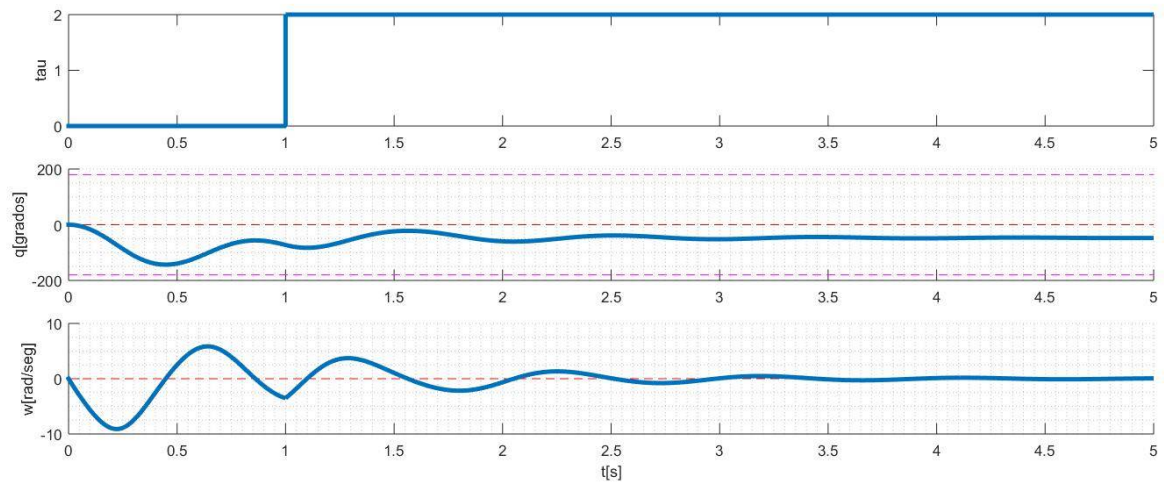
$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ [I_{ozz} + 2 a x_g m + a^2 m]^{-1} (u - mg [c(x_1)x_g - s(x_1)y_g + a c(x_1)] - Bx_2) \end{bmatrix}$$

Respuesta al escalón de $\tau = 0.1 \text{ nm}$ con Condiciones iniciales $\begin{bmatrix} q \\ \dot{q} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$



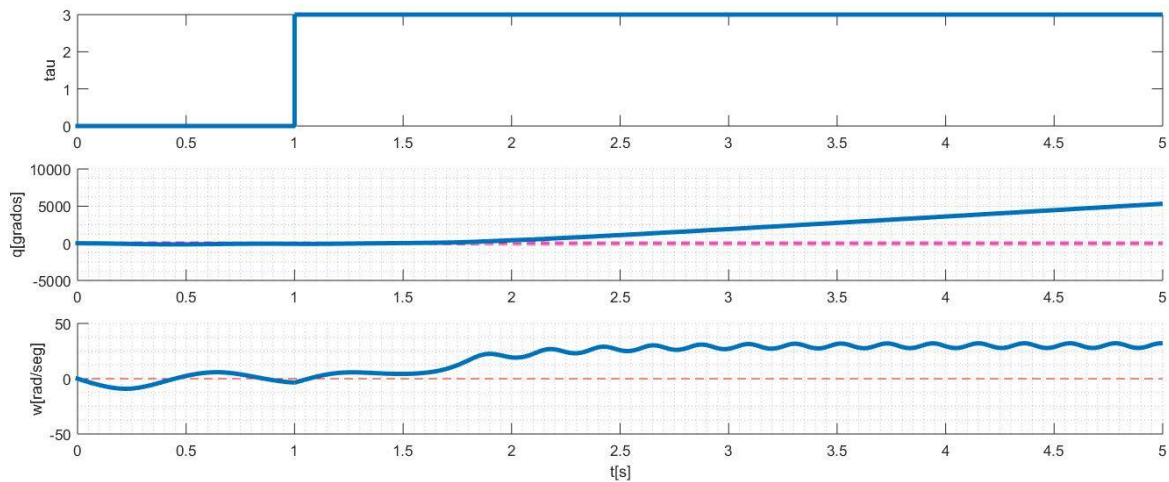
Se observa como no es novedad, que las oscilaciones se atenúan hasta alcanzar los -90°

Respuesta al escalón de $\tau = 2 \text{ nm}$ con Condiciones iniciales $\begin{bmatrix} q \\ \dot{q} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$



Con lo ya analizado, tampoco debería haber tanta novedad en los resultados obtenidos.

Respuesta al escalón de $\tau = 3 \text{ nm}$ con Condiciones iniciales $\begin{bmatrix} q \\ \dot{q} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$



Aquí se observa una diferencia respecto al mismo gráfico sin rozamiento. La misma radica en el hecho de que no todo el torque externo producirá aceleración y como consecuencia la velocidad final de giro será disminuida respecto a no tener rozamiento.

Si bien se observa que el eslabón se mantiene girando alrededor del eje, se observa una ondulación al final de la curva de velocidad angular ω . Este efecto, se puede interpretar como vibraciones mecánicas que es un fenómeno indeseable que produce desgaste por fatiga en los rodamientos.

Conclusiones:

El objetivo del trabajo práctico era poder modelar y simular un eslabón de una cadena cinemática, a partir de las ecuaciones de Euler-Lagrange, obtuvimos una expresión cerrada que describe la dinámica de la pieza.

En la segunda parte, el objetivo era identificar los parámetros desconocidos del modelo tales como momento de inercia I_{0zz} y baricentro \mathbf{r}_G^1 . Para ello, se utilizó el ensayo de laboratorio provisto por la materia, donde se estimaron los parámetros desconocidos mediante la técnica de cuadrados mínimos.

Finalmente, se simularon los modelos con y sin rozamiento e interpretaron los resultados con el fin de entender los diferentes comportamientos que el eslabón podrá someterse.