Trabajo práctico N°3

Filtro de Kalman

Enunciado

Considere un vehículo que se desplaza definiendo una trayectoria, como la de la Figura 1, tal que la posición en cada instante resulta $\boldsymbol{p}$(t), con una velocidad $\boldsymbol{v}$(t) y una aceleración $\boldsymbol{a}$(t), definidas en un plano de coordenadas [x,y] de acuerdo a:

$$\boldsymbol{p} = \begin{bmatrix} p_x \\ p_y \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} a_x \\ a_y \end{bmatrix}$$

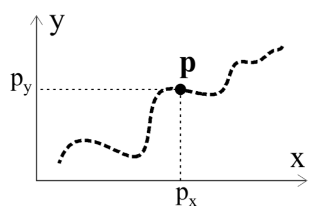

Figura 1: Trayectoria

Se desea estimar la trayectoria y las variables de estado (posición, velocidad y aceleración) que rigen la dinámica del vehículo para distintos parámetros y condiciones mediante un filtrado de Kalman. El sistema se discretiza con un período de muestreo de $h = 1\ s$ y se asume que tanto los ruidos de proceso como de medición son blancos y gaussianos.

Ejercicio 1

(a) A partir del modelo que surge de las ecuaciones de movimiento relacionadas con $\dot{\boldsymbol{p}}(t)$, $\dot{\boldsymbol{v}}(t)$ y $\dot{\boldsymbol{a}}(t)$, determine las ecuaciones de estado de tiempo continuo y exprese las matrices de estado A y covarianza del ruido de proceso Q. Para ello, suponga que en principio se asume que la aceleración $\boldsymbol{a}(t)$ es constante, es decir que $\dot{\boldsymbol{a}}(t) = 0$, pero que al hacer esa simplificación se comete un error tal que las componentes $\dot{a_x}$ y $\dot{a_y}$ (descorrelacionadas) se pueden modelar como una variable aleatoria $\sim N(0, 10^{-2})$.

(b) Defina la ecuación de estados de tiempo discreto y exprese su matriz de estados A_d y covarianza de ruido de proceso discreto Q_d.

(c) Implemente en *Matlab* las matrices A_d, Q_d y el algoritmo de Kalman.

Ejercicio 2

Utilice el archivo "`tp3_kalman.mat`" para extraer las muestras de posición, velocidad y aceleración "reales" (sin ruido), correspondientes al movimiento del vehículo. Dado el vector de estados $\boldsymbol{x} = [p_x\ p_y\ v_x\ v_y\ a_x\ a_y]^t$, considere los estados iniciales $\boldsymbol{x}_{0/0} = [40\ -200\ 0\ 0\ 0\ 0]^t$ y matriz de covarianza de los estados inicial $P_{0/0} = \mathrm{diag}([10^4\ 10^4\ 10^2\ 10^2\ 10\ 10])$. Defina para cada uno de los siguientes ítems las matrices C y de covarianza del ruido de medición R. Luego estime las variables de estado mediante Kalman, grafique los puntos $\boldsymbol{p} = [p_x, p_y]^t$ de la trayectoria (real y estimada) y los estados p_x, p_y, v_x, v_y, a_x y a_y en función del tiempo. Verifique la validez del algoritmo de Kalman mediante la autocorrelación de las innovaciones. También determine cuántos estados no observables tiene el sistema.

(a) **Mediendo posición:** utilice los datos suministrados para generar mediciones de posición agregando a las posiciones reales ruido gaussiano aditivo con una varianza $\sigma_p^2 = 100\ m^2$ (en este caso incluya también estas mediciones en el gráfico de la trayectoria para compararlas con las trayectorias real y estimada).

(b) **Mediendo velocidad:** utilice los datos suministrados para generar mediciones de velocidad agregando a las velocidades reales ruido aditivo con una varianza $\sigma_v^2 = 10\ m^2/s^2$.

(c) **Mediendo aceleración:** utilice los datos suministrados para generar mediciones de aceleración agregando a las aceleraciones reales ruido aditivo con una varianza $\sigma_a^2 = 1\ m^2/s^4$.

Ejercicio 3

Suponiendo que se mide la posición afectada por ruido blanco gaussiano con unavarianza $\sigma_p^2 = 100\ m^2$ y la covarianza inicial de los estados $P_{0/0} = \text{diag}([10^4\ 10^4\ 10^2\ 10^2\ 10\ 10])$. Grafique la trayectoria $\boldsymbol{p} = [p_x, p_y]^t$ y el error de cada estado en función del tiempo, observando la convergencia de la trayectoria estimada y verificando la autocorrelación de las innovaciones, para cada una de las siguientes condiciones iniciales:

(a)
- $\boldsymbol{x}_0 = [40\ \ -100\ 0\ 0\ 0\ 0]^t$
- $P'_{0/0} = P_{0/0}$

(b)
- $\boldsymbol{x}_0 = [500\ \ -1000\ 0\ 0\ 0\ 0]^t$
- $P'_{0/0} = P_{0/0}$

(c)
- $\boldsymbol{x}_0 = [40\ \ -100\ 0\ 0\ 0\ 0]^t$
- $P'_{0/0} = 10^{-5} P_{0/0}$

(d)
- $\boldsymbol{x}_0 = [500\ \ -1000\ 0\ 0\ 0\ 0]^t$
- $P'_{0/0} = 10^{-5} P_{0/0}$

Ejercicio 4

Se toman mediciones de la posición afectadas por ruido gaussiano aditivo con una varianza $\sigma_p^2 = 100\ m^2$, asumiendo condiciones iniciales $\boldsymbol{x}_{0/0} = [40\ \ -200\ 0\ 0\ 0\ 0]^t$ y $P_{0/0} = \text{diag}([10^4\ 10^4\ 10^2\ 10^2\ 10\ 10])$. Estime el filtrado de las posiciones $\boldsymbol{p} = [p_x, p_y]^t$ suponiendo que el algoritmo utiliza una covarianza de ruido de medición R' equivocada en lugar de aquella que se corresponde con el verdadero ruido, R. Grafique la trayectoria (real, estimada y medida) y analice la autocorrelación de las innovaciones, para los siguientes dos casos:

(a) Aumentando la matriz de covarianza de medición respecto de la real, tal que $R' = 10^3 R$.

(b) Disminuyendo la matriz de covarianza de medición respecto de la real, tal que $R' = 10^{-3} R$.