Algoritmo de la raíz cuadrada

Facultad de Ingeniería, Universidad de Buenos Aires

22 de septiembre de 2014

Problemas.

- Estabilidad numérica del Filtro de Kalman.
- Pérdida de simetría en la matriz P con la evolución de los cálculos.
- La matriz P deja de ser definida positiva, por lo tanto no es inversible.

Solución.

Se plantea hacer uso de lo que llama factorización de Cholesky, que dice que las matrices definidas positivas ($A > 0 \in \mathbb{C}^{pxp}$) tienen la propiedad de tener una única matriz triangular con diagonal positiva tal que $A = A^{c*}A^{c}$. Donde

$$A^{c} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1(p-1)} & a_{1p} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2(p-1)} & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{(p-1)(p-1)} & a_{(p-1)p} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{pp} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Solución.

De esta forma, se puede expresar a la matriz de covarianza con la factorización de Cholesky, y nunca tener una diagonal negativa en la matriz de covarianza, ni asimétrica.
Y para poder resolver el filtro de Kalman sin calcular inversas se plantea, a su vez, la factorización QR.

Factorización QR.

Dada $A \in \mathbb{C}^{nxm}$ existe $Q = Q^*$ unitaria y R triangular tal que

$$A = QR$$

Suposiciones:

- Los elementos de R cumplen con la condición: $r_{ii} \geqslant 0$, para todo i.
- Todas las columnas de A son linealmente independientes y $n > m$.
- Las matrices Q y R son únicas.

Definiciones

- Se define la matriz M, que ayudará a predecir las variables de estado del sistema utilizando Kalman:

$$M = \begin{bmatrix} R_k^c & C_k P_{k|k-1}^c & 0_{pxq} \\ \\ 0_{nxp} & A_k P_{k|k-1}^c & B_k Q_k^c \end{bmatrix}$$

- Se define a Θ, tal que $\Theta = \Theta^*$ y

$$M\Theta = \begin{bmatrix} X & 0 & 0 \\ Y & Z & 0 \end{bmatrix}$$

donde X y Z son triangulares inferiores.

- Siguiendo la idea de la factorización QR:

$$R^* = \begin{bmatrix} X & 0 & 0 \\ Y & Z & 0 \end{bmatrix}$$

- Se renombró a Q de la factorización QR como Θ para no confundir con la covarianza del ruido de proceso, sin embargo, prestar especial atención ya que no se hizo lo mismo con R.

- Para que haya una única factorización QR se debe verificar, como bien se dijo antes, que las columnas de $A = M^*$ sean linealmente independientes.

Desarrollo

- ¿Cómo se sabe cuales son X, Y y Z? Se conoce MQ, y M, y se sabe que $QQ^* = I$, luego se puede calcular $MQ(MQ)^*$ que se obtendrá MM^*. Esto es:

$$MQ(MQ)^* = \begin{bmatrix} X & 0 & 0 \\ Y & Z & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X^* & Y^* \\ 0 & Z^* \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} XX^* & XY^* \\ YX^* & ZZ^* \end{bmatrix}$$

O bien:

$$MM^* = \begin{bmatrix} R_k^c & C_k P_{k|k-1}^c & 0_{pxq} \\ & & \\ 0_{nxp} & A_k P_{k|k-1}^c & B_k Q_k^c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R_k^{c*} & 0_{nxp} \\ {P_{k|k-1}^c}^* C_k^* & {P_{k|k-1}^c}^* A_k^* \\ 0_{pxq} & Q_k^{c*} B_k^* \end{bmatrix}$$

- Haciendo las cuentas, se ve que:

$$MM^* = \begin{bmatrix} R_k + C_k P_{k|k-1} C_k^* & C_k P_{k|k-1} A_k^* \\ A_k P_{k|k-1} C_k^* & A_k P_{k|k-1} A_k^* + B_k Q_k B_k^* \end{bmatrix}$$

- Como $R_k + C_k P_{k|k-1} C_k^* > 0$,

$$X = (R_k + C_k P_{k|k-1} C_k^*)^c$$

- Al obtener X se puede despejar Y, teniendo en cuenta que:

$$XY^* = C_k P_{k|k-1} A_k^*$$

Entonces:

$$Y = A_k P_{k|k-1} C_k^* \left(\left(\left(R_k + C_k P_{k|k-1} C_k^* \right)^c \right)^* \right)^{-1}$$

- Finalmente para obtener Z, se debe despejar de la siguiente ecuación:

$$YY^* + ZZ^* = A_k P_{k|k-1} A_k^* + B_k Q_k B_k^*$$

Luego:

$$ZZ^* = P_{k+1|k}$$

Entonces se concluye que la única solución posible, dado que $ZZ^* > 0$ es:

$$Z = P_{k+1|k}^c$$

¿Cómo se propaga el estado?

Para propagar el estado redefinimos la matriz M. Esto es, agregar una fila que considere la medición y el estado estimado:

$$\hat{\mathbf{M}} = \begin{bmatrix} R_k^c & C_k P_{k|k-1}^c & 0_{pxq} \\ 0_{nxp} & A_k P_{k|k-1}^c & B_k Q_k^c \\ -y_k^* {R_k^c}^{-1} & \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}^* {P_{k|k-1}^c}^{-1} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M \\ \text{fila} \end{bmatrix}$$

Y Q resulta:

$$\hat{\mathbf{M}}Q = \begin{bmatrix} \\ MQ \\ \\ \text{fila } Q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (R_k + C_k P_{k|k-1} C_k^*)^c & 0 & 0 \\ A_k P_{k|k-1} C_k^* (R_k + C_k P_{k|k-1} C_k^*)^{c-1} & P_{k|k-1}^c & 0 \\ W_1 & W_2 & W_3 \end{bmatrix}$$

Procediendo de forma análoga a la anterior, para encontrar W_1, W_2 y W_3, se calcula $\hat{\mathbf{M}}Q(\hat{\mathbf{M}}Q)^*$ que en definitiva es $\hat{\mathbf{M}}\hat{\mathbf{M}}^*$.

$$\hat{\mathbf{M}}Q(\hat{\mathbf{M}}Q)^* = \begin{bmatrix} XX^* & XY^* & XW_1^* \\ YX^* & ZZ^* & YW_1^* + ZW_2^* \\ W_1X^* & (YW_1^* + ZW_2^*)^* & W_1W_1^* + W_2W_2^* + W_3W_3^* \end{bmatrix}$$

Y calculando $\hat{\mathbf{M}}\hat{\mathbf{M}}^*$ se puede despejar W_1, W_2 y W_3. Recordando:

$$\hat{\mathbf{M}} = \begin{bmatrix} R_k^c & C_k P_{k|k-1}^c & 0_{pxq} \\ 0_{nxp} & A_k P_{k|k-1}^c & B_k Q_k^c \\ -y_k^* {R_k^c}^{-1} & \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}^* {P_{k|k-1}^c}^{-1} & 0 \end{bmatrix}$$

Y además:

$$\hat{\mathbf{M}}^* = \begin{bmatrix} R_k^{c*} & 0_{nxp} & -{R_k^c}^{-1^*} y_k \\ P_{k|k-1}^c {C_k}^* & P_{k|k-1}^c A_k^* & (P_{k|k-1}^c)^{-1} \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1} \\ 0_{pxq} & Q_k^{c*} B_k^* & 0 \end{bmatrix}$$

- Para despejar W_1, vemos que:

$$XW_1^* = -R_k^c R_k^{c-1^*} y_k + C_k P_{k|k-1}^c (P_{k|k-1}^c)^{-1} \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}$$

Luego, como sabemos, R_k es la matriz de covarianza del ruido de medición, esta es simétrica, por lo que $R_k^c = R_k^{c*}$. Consecuentemente:

$$XW_1^* = -y_k + C_k \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}$$

Inviertiendo X, se encuentra finalmente W_1

$$W_1^* = ((R_k + C_k P_{k|k-1} C_k^*)^c)^{-1} (C_k \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1} - y_k)$$

- Para despejar W_2, usamos la siguiente igualdad:

$$YW_1^* + ZW_2^* = A_k P_{k|k-1}^c (P_{k|k-1}^c)^{-1} \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}$$

Es decir que:

$$YW_1^* + ZW_2^* = A_k \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}$$

Haciendo cuentas, se llega a:

$$W_2 = \hat{\mathbf{x}}_{k+1|k}^* (P_{k+1|k}^c)^{-1}$$

- Se puede despejar también W_3, pero no es de utilidad dado que lo que se busca desde un principio es propagar el estado, lo cual ya se hizo cuando se encontró W_2 y que $ZW_2^* = \hat{\mathbf{x}}_{k+1|k}$.

Algoritmo

1. Calcular la matriz A correspondiente al momento de medición.
2. Armar $\hat{\mathbf{M}}$
3. Calcular mediante *square-root* $P_{k+1|k}$ y $\hat{\mathbf{x}}_{k+1|k}$.
4. Volver al paso 1.