Diamniadio

Recherche Opérationnelle

Optimisation appliquée en ingénierie

Drt Abdourahmane GUEYE
77 509 95 64
gueyeabou17@gmail.com

Plan

Présentation du cours

1 Objectifs

- ✓ *Modéliser et résoudre des problèmes d'optimisation,*
- ✓ *Ordonnancer pour minimiser de la durée totale de réalisation des travaux d'un projet .*
- ✓ *Donner un plan de distribution de charge dans un réseau .*
- ✓ *Analyse et Interprétation des résultats d'une simulation.*

2 Pré-requis

Notion d'Algèbre Linéaire - Résolution de Système d'inéquation à 2 variables – Relation Binaire.

3 Volume Horaire 40 h

Cours 28h - Travaux Dirigés 12 h

4 Mode d'évaluation

1 Test de connaissance par chapitre *1 Devoir surveillé* *1 Examen*

5 Documentation

- ✓ *Livre Blanc de la RO par la ROADEF.*
- ✓ **M. Minoux** **Graphe et Hypergraphe (DJVIEWER).**
- ✓ **Claudio Benedetti** **Gestion Opérationnelle**

isep
Diamniadio

Chapitre 0

Introduction à la R.O.

Drt Abdourahmane GUEYE
77 509 95 64
gueyeabou17@gmail.com

Plan

1 *Introduction*

1 - Définition

2 – Porté d'une étude en RO

2 *Historique*

1 – Caractéristique et Typologie des Contraintes

2 – Les premières équipes de RO

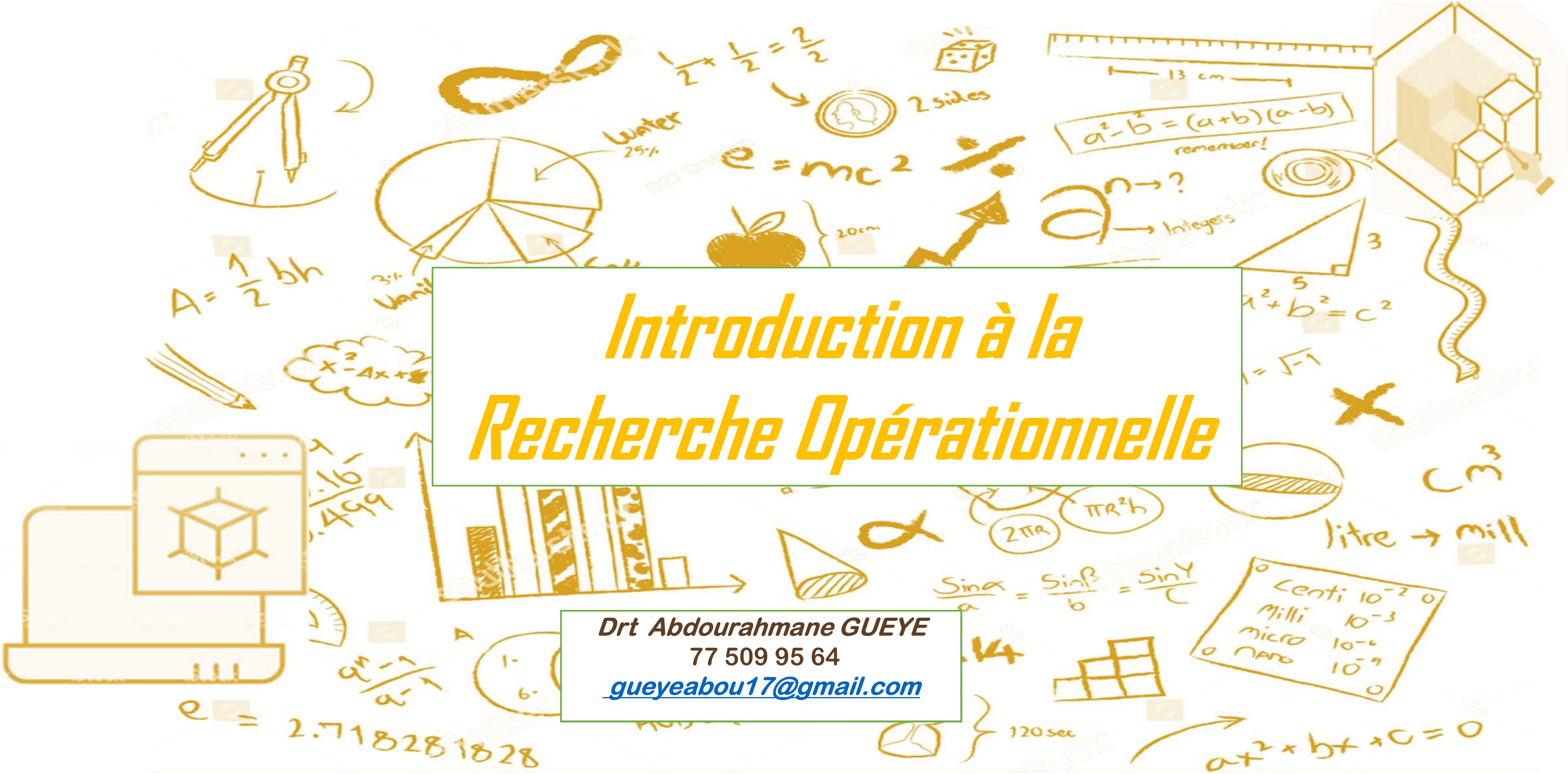
3 *Grands Problèmes*

1 – Problème de flot

2 – Prolèmes d'Ordonancemants

4 *Success Stories*

Chapitre 0



Introduction à la Recherche Opérationnelle

Drt Abdourahmane GUEYE
77 509 95 64
gueyeabou17@gmail.com

Introduction

1 – Définitions

Qu'est ce que la RO

Recherche Opérationnelle « RO » traduction littérale de « Operationel Research »

Terme employer pour la première fois par Sir Robert Watson Watt pour désigner :

« Recherche scientifique du rendement optimal d'une opération militaire »

La RO est la discipline des méthodes scientifique (Maths – Info – Gestion) pour résoudre de maniéré efficiente de problèmes opérationnels et organiques.

Porté d'une étude en Recherche Opérationnelle

- ✓ *Porté Stratégique : problèmes d'organisation (réseaux de distribution), de structuration (choix d'équipements, dimensionnement de flottes) la conduite des opérations au sens économique (choix d'implantations, décisions d'investissement) ...*

- ✓ *Porté Opérationnelle : gestion de flux et fonctionnement des réseaux de distribution, ordonnancement de tâch dans les chantiers, mise en œuvre d'outils de production, plans de maintenance ...*

- ✓ *Porté Technique : Elaboration et l'évaluation d'éléments (optimisation de composants) ...*

Introduction

Le mot « opérations » un terme uniquement militaire s'est imposé de lui-même, et cela, en raison de l'analogie entre les applications : dans les milieux militaires et civils, la recherche opérationnelle est utilisée dans le même but et emploie des méthodes et des techniques identiques caractérisées par les mêmes mots-clés :

- ✓ *Modélisation : Ecriture d'un problème sous une formulation mathématique,*
- ✓ *Optimisation : Résolution efficiente d'un problème.*

2 – Historique

À partir de 1940, les Anglo-Saxons demandaient en permanence à des groupes composés de scientifiques et de militaires de préparer certaines grandes décisions.

Face à la menace d'invasion de la Grande Bretagne 7 000 scientifiques et ingénieurs volontaires s'associèrent sous l'égide de la Royal Society.

Grâce à des chefs militaires d'une largeur de vue exceptionnelle et aux succès initiaux de la RO dans la bataille d'Angleterre, l'idée de « faire des mathématiques pour les états-majors » s'instaura définitivement selon les mots de Sir Watson-Watt,

Introduction

En 1936 un groupe de jeunes scientifiques dirigé par Sir Robert Watson Watt fut chargé de recherches sur l'efficacité du radar.

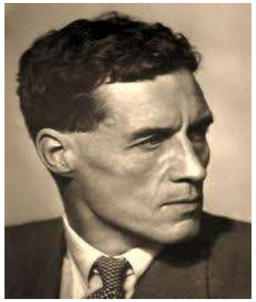
- ✓ *Etudier comment la technologie radar peut d'intercepter les avions ennemis.*
- ✓ *Préconisa la création d'un système de commande au sol des interceptions qui en 1941. améliora l'implantation des radars et permit de doubler la probabilité d'interception.*

Sir Watson-Watt
Premier directeur d'un centre de recherche sur les radars dans le manoir de Bawdsey (Suffolk).

En août 1940 le Pr Blackett, ancien officier de Marine (prix Nobel de physique en 1948) se vue confié par le général Pile, commandant en chef de la DCA anglaise une série de recherches sur la défense aérienne, en liaison avec l'aviation.

Introduction

Le Pr Blackett constitua le « Blackett Circus » avec 3 physiologues, 5 physiciens et mathématiciens, un astronome, un topographe et un officier.

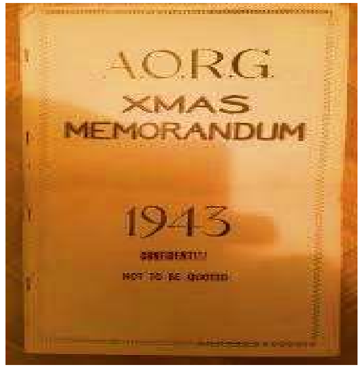


Pr Blackett, ancien officier de Marine
(prix Nobel de physique en 1948)

- ✓ *Après étude statistique des tirs, Blackett diminua le tir de DCA sur éléments fixes de 20000 à 4000 du fait que les avions ennemis ne changeaient de cap pendant le tir qu'une fois sur quatre.*

- ✓ *Etudiant la corrélation entre les erreurs de pointage radar et la nature du terrain, il détermina la taille idéale des treillis métalliques constituant ces systèmes de détection.*

« Army Operational Research Group » disposa de huit sections pour les problèmes de défense aérienne, radar, transmissions, infanterie, artillerie, appui aérien, armement, mines, obstacles et armes spéciales.



Les Classes de Problème

3 – Les grands classe de problèmes

Les problèmes d'affectation

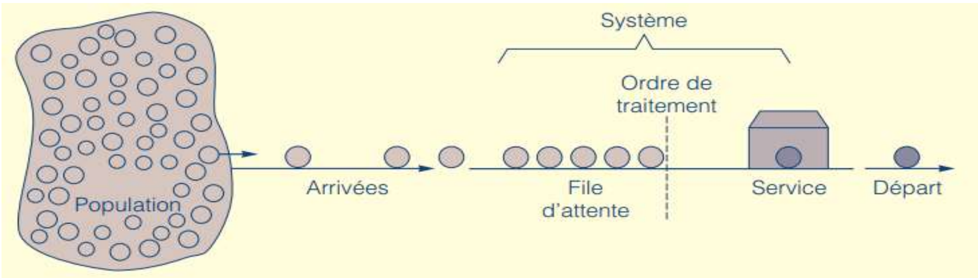
Maximiser la rentabilité par une répartir des ressources limitées entre des tâches à réaliser.

Les problèmes d'ordonnancement

Etablir l'ordre d'exécution des tâches afin de produire le maximum de produits et de réduire le temps total de production.

Les problèmes de file d'attente

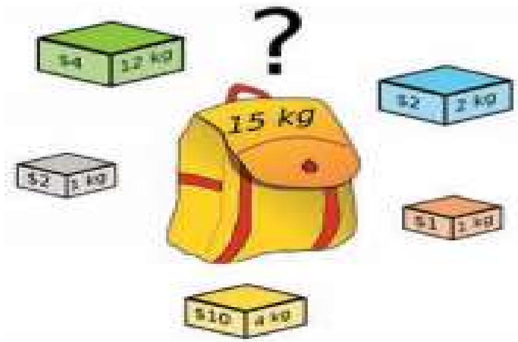
Déterminer le nombre minimum de guichets qu'il convient de mettre en place afin de limiter au maximum l'attente des clients.



Les Classes de Problème

Le problème du Sac à dos

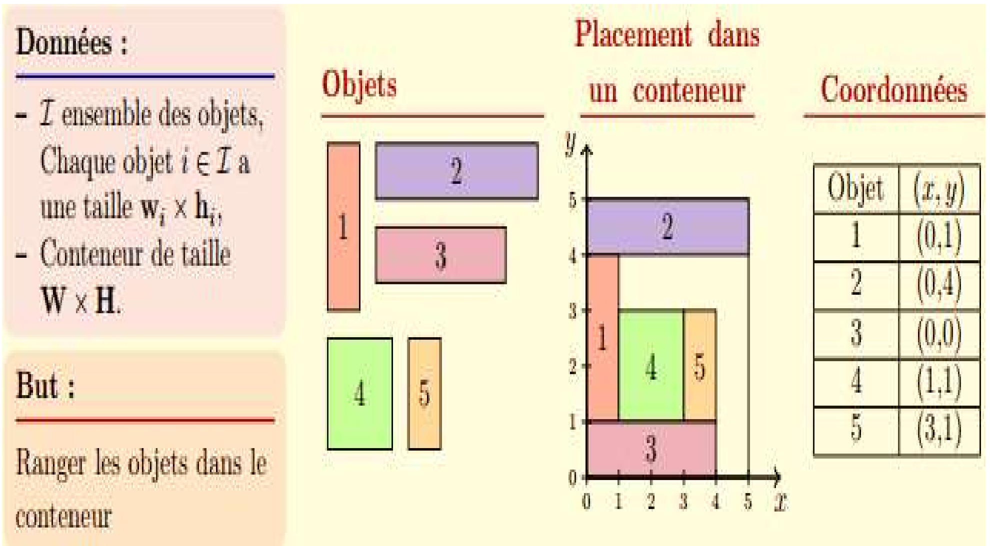
Déterminer quels sont, parmi plusieurs éléments, ceux qui respectent les dimensions offertes par une capacité fixe. Les éléments ont des propriétés différentes du point de vue de l'utilisation de la capacité et de leur valeur.



Exemple

– le personnel d'une entreprise est réparti idéalement entre certaines tâches parmi un ensemble. La sélection des tâches à accomplir doit tenir compte de leur rentabilité mais aussi du nombre de personnes à y consacrer ;

– la surface utile d'une usine est occupée par des équipes spécialisées.
Quelles équipes faut-il choisir sachant qu'elles n'utilisent pas toutes la même surface et qu'elles n'ont pas toutes la même utilité ?



Les Classes de Problème

Les problèmes de tournées

Comment visiter un ensemble de lieux si on ne peut passer qu'une seule fois sur chaque lieux avant de revenir à son point de départ ?

Trajet Minimal : Problèmes NP-complets très difficiles à résoudre

Voyageur de commerce : (n-1)!/2 chemins possibles !

Si un ordinateur est capable d'évaluer 1 milliard de chemins / s.

16 villes : 653.109 chemins = 653s = 0,18h.

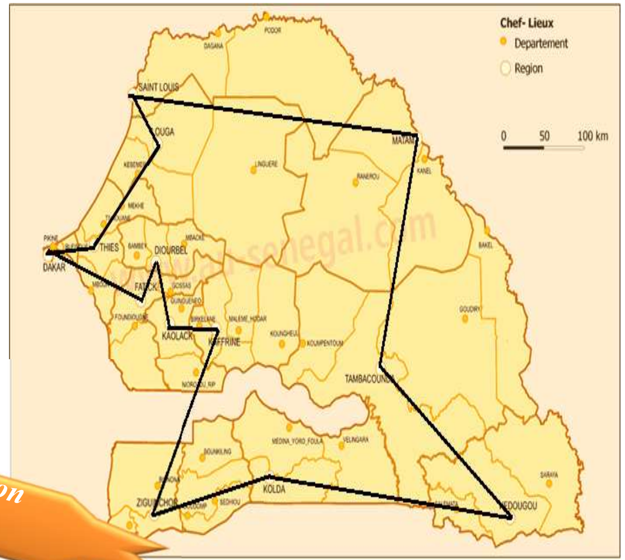
17 villes : 10461.109 chemins = 10461s = 2,9h.

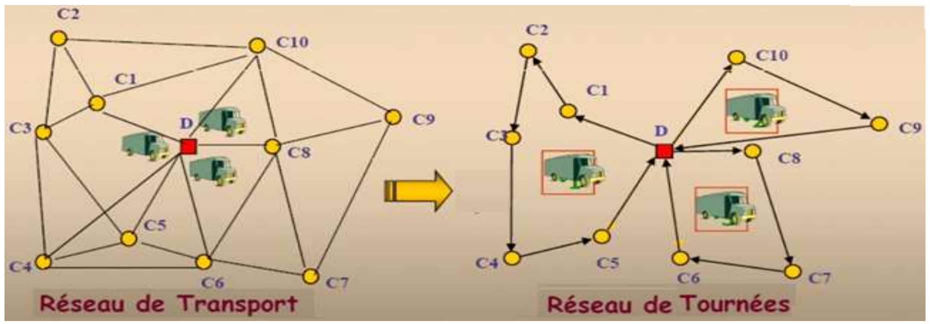
18 villes : 177843.109 chemins = 177843 s = 49 h = 2,05 j

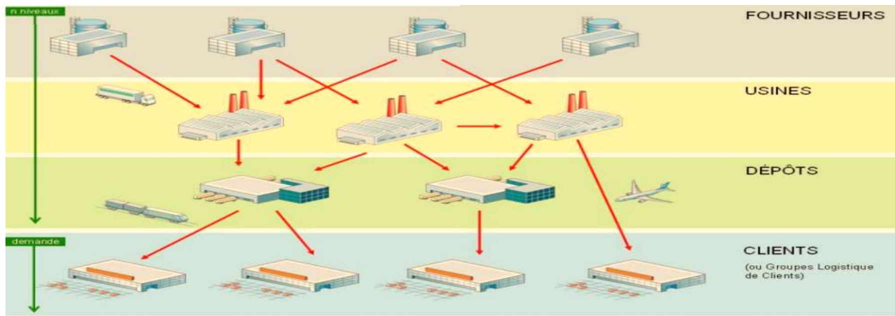
25 villes :

3,10.1023 = 3,10.1014s = 86 milliards d'heures

= 9,8 millions d'années !!!







Les Classes de Problème

3 – Les grands classe de problèmes

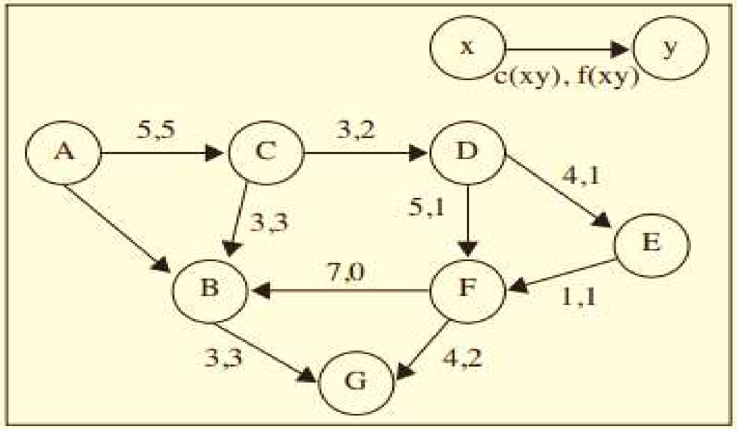
Les problèmes de flux

Considérons un réseau routier urbain.

Il relie différentes parties de la ville : les quartiers d'habitation, les zones industrielles, les zones commerciales, etc. Il s'ensuit que la circulation routière privilégie certains axes quand d'autres sont moins empruntés.

Il faut alors adapter la largeur des axes afin d'éviter les embouteillages, tout en restant dans des limites acceptables pour le contribuable.

Il s'agit d'un problème de flux qui peut se mettre sous la forme d'un graphe (le réseau urbain) dont chaque arc a des capacités propres (nombre de véhicule maximum par heure, coût de construction et d'entretien au kilomètre).



Un graphe orienté et flux associés.

isep
Diamniadio

Chapitre 1

Problèmes de Satisfaction de Contraintes

Drt Abdourahmane GUEYE
77 509 95 64
gueyeabou17@gmail.com

Plan

1 *Problèmes de Satisfaction de Contraintes*

- ***1 – Caractéristique et***
- ***2 – Typologie des Contraintes***
- ***3 – Formulation d'un CSP***
- ***4 – Solution d'un CSP***

2 *CSP avancée*

- ***1 – CSP sur-contraint - MaxCSP - VCSP***
- ***2 – CSP sous-contraint CSOP***

3 *Travaux Dirigées*

- ***1 – Problème de coloriage***
- ***2 – SEND + MORE = MONEY***
- ***3 – Partage de Machine***
- ***4 – Problème d'Einstein***

Diamniadio

Chapitre I

Problèmes de Satisfaction de Contraintes

Drt Abdourahmane GUEYE
77 509 95 64
gueyeabou17@gmail.com

Problèmes de Satisfaction de Contraintes

Définition

Un CSP (Problème de Satisfaction de Contraintes) est un problème modélisé sous la forme d'un ensemble de contraintes posées sur des variables, chacune de ces variables prenant ses valeurs dans un domaine.

1 – Caractérisation des Contraintes

Définition : ***Une contrainte est une relation logique entre différentes inconnues (variables), elle restreint les valeurs que peuvent prendre simultanément les variables.***

Exemple :

la contrainte « $x + 3y = 12$ » restreint les valeurs que l'on peut affecter simultanément aux variables x et y.

Une contrainte peut être définie :

- ✓ ***En extension par l'énumération des tuplets de valeurs appartenant à la relation.***
- ✓ ***En intention avec des propriétés mathématiques connues.***

Exemple : ***si les domaines des variables x et y contiennent les valeurs 0, 1 et 2 alors on peut définir la contrainte « $x < y$ » en extension par « (x=0 et y=1) ou (x=0 et y=2) ou (x=1 et y=2) » , ou encore par « (x, y) élément-de { (0,1), (0,2), (1,2) } » .***

2 – Typologie des Contraintes ½

Il existe différents types de contraintes en fonction des domaines de valeurs des variables

✓ ***Contraintes numériques**, portant sur des variables à valeurs numériques :*
une contrainte numérique est une égalité (=) , une différence (≠)
ou une inégalité (<, ≤, >, ≥) entre 2 expressions arithmétiques.

Contraintes numériques sur les réels :
Quand les variables de la contrainte peuvent prendre des valeurs réelles.

Exemple : *contrainte physique comme « U = RI »*

Contraintes numériques sur les entiers :
Quand les variables de la contrainte ne peuvent prendre que des valeurs entières.

Exemple : *contrainte sur le nombre de passagers dans un avion.*

2 – Typologie des Contraintes ½

Il existe différents types de contraintes en fonction des domaines de valeurs des variables

- ✓ *Contraintes numériques linéaires, quand les expressions arithmétiques sont linéaires.*

Exemple : « $4x - 3y + 8z < 10$ »

Contraintes numériques non linéaires , quand les expressions arithmétiques contiennent des produits de variables, ou des fonctions logarithmiques, exponentielles...

Exemple : "$x^2 = 2$" ou "$sinus(x) + z \log(y) = 4$".

- ✓ *Contraintes booléennes portant sur des variables à valeur booléenne (vrai ou faux) est une implication (=>), une équivalence (<=>) ou une non équivalence (<≠>) entre 2 expressions logiques.*

Exemple "(non a) ou b => c" ou encore "non (a ou b) <=> (c et d)".

3 – Formulation d'un CSP

De façon plus formelle, on définira un CSP par un triplet (X,D,C) tel que :

- ✓ $X = \{ X_1, X_2, ..., X_n \}$ *est l'ensemble des variables (les inconnues) du problème ;*
- ✓ D *est la fonction qui associe à chaque variable* X_i *son domaine* $D(X_i)$ *;*
  l'ensemble des valeurs que peut prendre X_i
- ✓ $C = \{ C_1, C_2, ..., C_k \}$ *est l'ensemble des contraintes.*

Chaque contrainte C_j *est une relation entre certaines variables de X, restreignant les valeurs que peuvent prendre simultanément ces variables.*

Exemple

On veut définir le CSP (X,D,C) suivant :
Donner un quadruplet de valeurs binaires telle que la première est différente de la deuxième ;
la troisième différente de la quatrième et la somme de la première et de la troisième doit être inférieure strictement à la deuxième.

3 – Formulation d'un CSP

Modélisation

Ce CSP comporte 4 variables a, b, c et d.

$$X = \{ a, b, c, d \}$$

Chacune des variables pouvant prendre que 2 valeurs (0 ou 1).

$$D(a) = D(b) = D(c) = D(d) = \{ 0, 1 \}$$

Ces variables doivent respecter les contraintes suivantes :
a doit être différente de b ;
c doit être différente de d ;
la somme de a et c doit être inférieure strictement à b.

$$C = \{ a \neq b , c \neq d , a + c < b \}$$

```
Un peu de code python

import itertools
for x1,x2,x3,x4 in itertools.product
([0,1],[0,1],[0,1],[0,1])  :
        if x1!=x2 and x3!=x4 and x1+x3<x2 :
              print(f" x1= (x1) \n ")
```

4 – Solution d'un CSP

Etant donné un CSP (X,D,C), sa résolution consiste à affecter des valeurs aux variables, de telle sorte que toutes les contraintes soient satisfaites.

Affectation : le fait d'instancier certaines variables par des valeurs.

On note $A = \{ (X_1,V_1), (X_2,V_2), ..., (X_r,V_r) \}$ l'affectation qui instancie la variable X_1 par la valeur V_1, la variable X_2 par la valeur V_2, ..., et la variable X_r par la valeur V_r.

Exemple Sur le CSP précédent, $A=\{(b,0),(c,1)\}$ est l'affectation qui instancie b à 0 et c à 1.

Affectation totale instancie toutes les variables du problème sinon elle est dite partielle.

Exemple $A1 = \{(a,1),(b,0),(c,0),(d,0)\}$ est une affectation totale ;

$A2 = \{(a,0),(b,0)\}$ est une affectation partielle.

4 – Solution d'un CSP

Une affectation A viole une contrainte C_k si toutes les variables de C_k sont instanciées dans A, et si la relation définie par C_k n'est pas vérifiée pour les valeurs des variables de C_k définies dans A.

Exemple L'affectation partielle A2 = {(a,0),(b,0)} viole la contrainte $a \neq b$. En revanche, elle ne viole pas les deux autres contraintes dans la mesure où certaines de leurs variables ne sont pas instanciées dans A2.

Une affectation (totale ou partielle) est consistante si elle ne viole aucune contrainte, et inconsistante si elle viole une ou plusieurs contraintes.

Exemple

L'affectation partielle {(c,0),(d,1)} est consistante, tandis que l'affectation partielle {(a,0),(b,0)} est inconsistante.

Une solution est une affectation totale consistante.

C'est-à-dire une valuation de toutes les variables du problème qui ne viole aucune contrainte.

Exemple

A = {(a,0),(b,1),(c,0),(d,1)} est une affectation totale consistante : c'est une solution du CSP.

CSP avancés

1 – CSP sur-contraint

Lorsqu'un CSP n'a pas de solution, on dit qu'il est surcontraint : Il y a trop de contraintes et on ne peut pas toutes les satisfaire.

Dans ce cas, on peut souhaiter trouver l'affectation totale qui viole le moins de contraintes possible.

Un tel CSP est appelé max-CSP on cherche à maximiser le nombre de contraintes satisfaites.

Une autre possibilité est d'affecter un poids à chaque contrainte : une valeur proportionnelle à l'importance de cette contrainte, e chercher l'affectation totale qui minimise la somme des poids des contraintes violées.

Un tel CSP est appelé CSP valué (VCSP).

Il existe d'autre types de CSPs, appelés CSPs basés sur les semi-anneaux (semiring based CSPs), permettant de définir plus finement des préférences entre les contraintes

Exemple

CSP avancés

2 – CSP sous-contraint

Lorsqu'un CSP admet beaucoup de solutions différentes, on dit qu'il est sous-contraint.

Si les différentes solutions ne sont pas toutes équivalentes, dans le sens où certaines sont mieux que d'autres, on peut exprimer des préférences entre les différentes solutions.

Pour cela, on ajoute une fonction qui associe une valeur numérique à chaque solution, valeur dépendante de la qualité de cette solution.

L'objectif est alors de trouver la solution du CSP qui maximise cette fonction.

Un tel CSP est appelé CSOP (Constraint Satisfaction Optimisation Problem).
Exemple

Diamniadio

Chapitre 2

Programmation Linéaire

Drt Abdourahmane GUEYE
77 509 95 64
gueyeabou17@gmail.com

Plan

1. *Problèmes de Satisfaction de Contraintes*

   1 – Caractéristique et Typologie des Contraintes

   2 – Formulation d'un CSP

   3 – Solution d'un CSP

2. *CSP avancée*

   1 – CSP sur-contraint - MaxCSP - VCSP

   2 – CSP sous-contraint CSOP

3. *Travaux Dirigées*

   1 – Problème de coloriage

   2 – SEND + MORE = MONEY

   3 – Partage de Machine

   4 – Problème d'Einstein

ISEP Diamniadio

Chapitre 2

Programmation Linéaire

Drt Abdourahmane GUEYE
77 509 95 64
gueyeabou17@gmail.com

Diamniadio

Chapitre 3

Initiation à la Théorie des Graphes

Drt Abdourahmane GUEYE
77 509 95 64
gueyeabou17@gmail.com

isep Diamniadio

Chapitre 3

Initiation à la Théorie des Graphes

Drt Abdourahmane GUEYE
77 509 95 64
gueyeabou17@gmail.com

Chapitre 4

Problème d'Ordonnancement

Drt Abdourahmane GUEYE
77 509 95 64
gueyeabou17@gmail.com

Chapitre 4

Problème d'Ordonnancement

Drt Abdourahmane GUEYE
77 509 95 64
gueyeabou17@gmail.com

Diamniadio

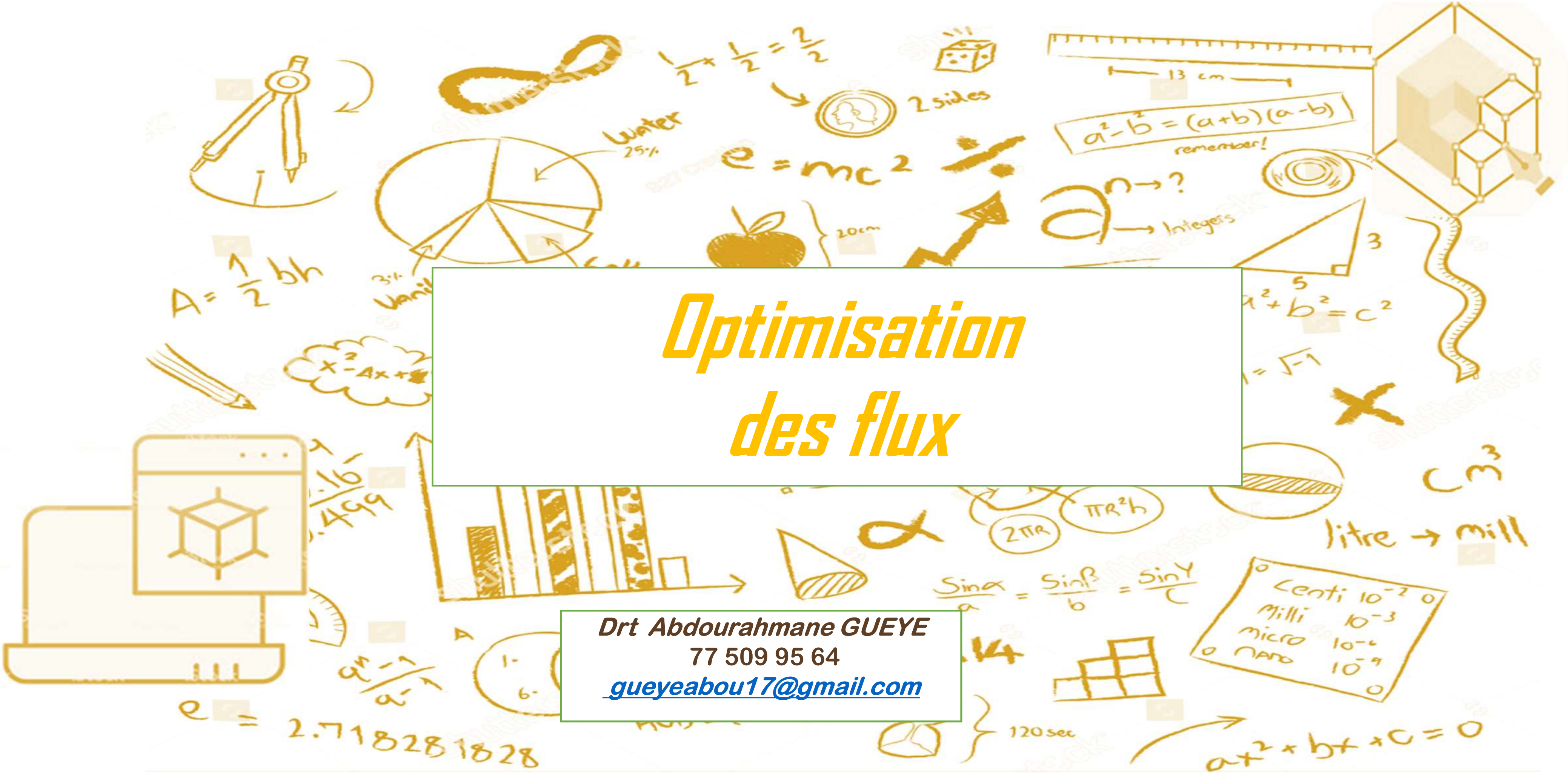
Chapitre 5

Optimisation des flux

Drt Abdourahmane GUEYE
77 509 95 64
gueyeabou17@gmail.com

Diamniadio

Chapitre 5



Optimisation des flux

Drt Abdourahmane GUEYE
77 509 95 64
gueyeabou17@gmail.com