Recherche Opérationnelle
Optimisation appliquée en ingénierie

Doctorant
Abdourahmane GUEYE
77 509 95 64 gueyeabou17@gmail.com

Sous la supervision de
Pr Salimata GUEYE DIAGNE
Chef de l'équipe de Recherche en Mathématiques
de la Décision / Recherche Opérationnelle

Programme du cours

Chapitre 1 Introduction à la Recherche Opérationnelle

1 – Définitions et Historique

2 - Modélisation de PSC

Chapitre 2 Programmation Linéaire

1 – Modélisation et Formulation de PL

2 – Résolution Graphique

3 – Méthode du Simplexe

Chapitre 3 Initiation à la Théorie des Graphes

1 – Vocabulaire et Exemples

2 – Représentation

3 – Méthode de Résolution par la TG

Chapitre 4 Optimisation des flux

1 – Formulation

2 – Recherche de flot maximal

3 – Algorithme de Ford-Fulkerson

Chapitre 5 Problème d'Ordonnancement

1 – Méthode d'Ordonnancement

2 – Diagrammes de Gantt – Méthodes PMP et PERT

3 – Réduction de la durée d'un projet

Présentation du cours

1 Objectifs

- ✓ *Modéliser et résoudre des problèmes d'optimisation,*
- ✓ *Ordonnancer pour minimiser de la durée totale de réalisation des travaux d'un projet .*
- ✓ *Donner un plan de distribution de charge dans un réseau .*
- ✓ *Analyse et Interprétation des résultats d'une simulation.*

2 Pré-requis

Notion d'Algèbre Linéaire - Résolution de Système d'inéquation à 2 variables – Relation Binaire.

3 Volume Horaire 40 h

Cours 28h - Travaux Dirigés 12 h

4 Mode d'évaluation

1 Test de connaissance par chapitre *1 Devoir surveillé* *1 Examen*

5 Documentation

- ✓ *Livre Blanc de la RO par la ROADEF.*
- ✓ *M. Minoux* *Graphe et Hypergraphe (DJVIEWER).*
- ✓ *Claudio Benedetti* *Gestion Opérationnelle*

Chapitre 1

Introduction à la Recherche Opérationnelle

Doctorant
Abdourahmane GUEYE
gueyeabou17@gmail.com *77 509 95 64*

Sous la supervision du
Pr Salimata GUEYE DIAGNE
Chef de l'équipe de Recherche en Mathématiques de la Décision / Recherche Opérationnelle

Plan

1 Introduction

1 - Définition

2 – Historique

3 – Grands Problèmes - Success Stories

2 Problèmes de Satisfaction de Contraintes

1 – Caractéristique et Typologie des Contraintes

2 – Formulation d'un CSP

3 – Solution d'un CSP

3 CSP avancée

1 – CSP sur-contraint - MaxCSP - VCSP

2 – CSP sous-contraint CSOP

4 Travaux Dirigées

1 – Problème de coloriage

2 – SEND + MORE = MONEY

3 – Partage de Machine

4 – Problème d'Einstein

1 – Définitions

Qu'est ce que la RO

Recherche Opérationnelle « RO » traduction littérale de « Operationel Research »

Terme employer pour la première fois par Sir Robert Watson Watt pour désigner :

« Recherche scientifique du rendement optimal d'une opération militaire »

La RO est la discipline des méthodes scientifique (Maths – Info – Gestion) pour résoudre de maniéré efficiente des problèmes opérationnels et organiques.

Porté d'une étude en Recherche Opérationnelle

- ✓ *Porté Stratégique : problèmes d'organisation (réseaux de distribution), de structuration (choix d'équipements, dimensionnement de flottes) la conduite des opérations au sens économique (choix d'implantations, décisions d'investissement) ...*

- ✓ *Porté Opérationnelle : gestion de flux et fonctionnement des réseaux de distribution, ordonnancement de tâches dans les chantiers, mise en œuvre d'outils de production, plans de maintenance ...*

- ✓ *Porté Technique : Elaboration et l'évaluation d'éléments (optimisation de composants) ...*

Introduction

Le mot « opérations » un terme uniquement militaire s'est imposé de lui-même, et cela, en raison de l'analogie entre les applications : dans les milieux militaires et civils, la recherche opérationnelle est utilisée dans le même but et emploie des méthodes et des techniques identiques caractérisées par les mêmes mots-clés :

- ✓ *Modélisation : Ecriture d'un problème sous une formulation mathématique,*
- ✓ *Optimisation : Résolution efficiente d'un problème.*

2 – Historique

À partir de 1940, les Anglo-Saxons demandaient en permanence à des groupes composés de scientifiques et de militaires de préparer certaines grandes décisions.

Face à la menace d'invasion de la Grande Bretagne 7 000 scientifiques et ingénieurs volontaires s'associèrent sous l'égide de la Royal Society.

Grâce à des chefs militaires d'une largeur de vue exceptionnelle et aux succès initiaux de la RO dans la bataille d'Angleterre, l'idée de « faire des mathématiques pour les états-majors » s'instaura définitivement selon les mots de Sir Watson-Watt,

Introduction

En 1936 un groupe de jeunes scientifiques dirigé par Sir Robert Watson Watt fut chargé de recherches sur l'efficacité du radar.

- ✓ ***Etudier comment la technologie radar peut d'intercepter les avions ennemis.***
- ✓ ***Préconisa la création d'un système de commande au sol des interceptions qui en 1941. améliora l'implantation des radars et permit de doubler la probabilité d'interception.***

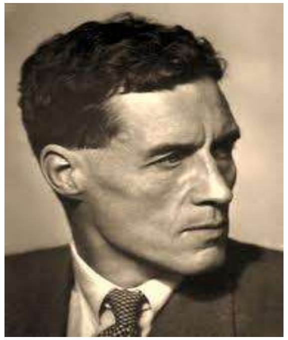
Sir Watson-Watt

Premier directeur d'un centre de recherche sur les radars dans le manoir de Bawdsey (Suffolk).

En août 1940 le Pr Blackett, ancien officier de Marine (prix Nobel de physique en 1948) se vue confié par le général Pile, commandant en chef de la DCA anglaise une série de recherches sur la défense aérienne, en liaison avec l'aviation.

Introduction

Le Pr Blackett constitua le « Blackett Circus » avec 3 physiologues, 5 physiciens et mathématiciens, un astronome, un topographe et un officier.



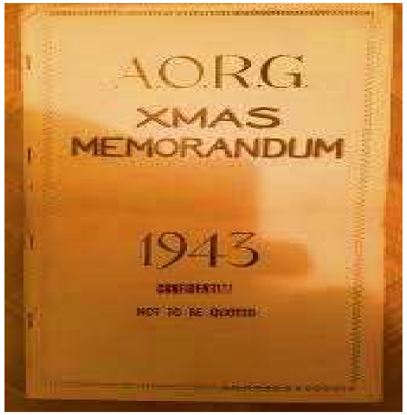
Pr Blackett, ancien officier de Marine

(prix Nobel de physique en 1948)

- ✓ *Après étude statistique des tirs, Blackett diminua le tir de DCA sur éléments fixes de 20000 à 4000 du fait que les avions ennemis ne changeaient de cap pendant le tir qu'une fois sur quatre.*

- ✓ *Etudiant la corrélation entre les erreurs de pointage radar et la nature du terrain, il détermina la taille idéale des treillis métalliques constituant ces systèmes de détection.*

« Army Operational Research Group » disposa de huit sections pour les problèmes de défense aérienne, radar, transmissions, infanterie, artillerie, appui aérien, armement, mines, obstacles et armes spéciales.



3 – Les grands classe de problèmes

Les problèmes d'affectation

Maximiser la rentabilité par une répartir des ressources limitées entre des tâches à réaliser.

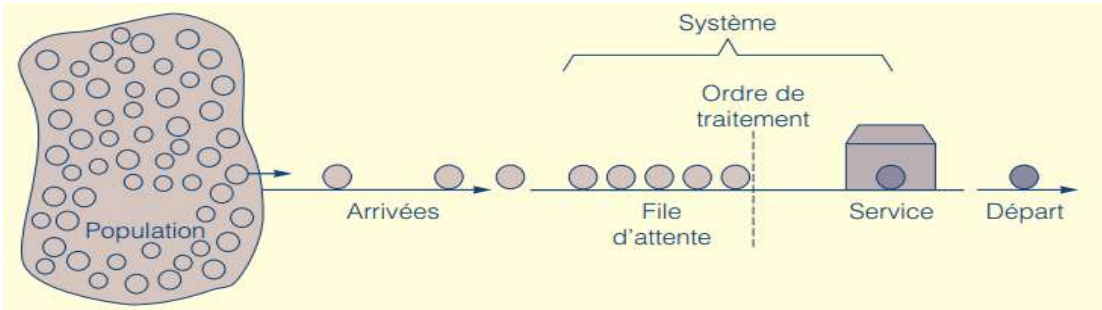
Les problèmes d'ordonnancement

Chaîne d'assemblage d'avions.

lir l'ordre d'exécution des tâches afin produire le maximum de produits et de éduire le temps total de production.

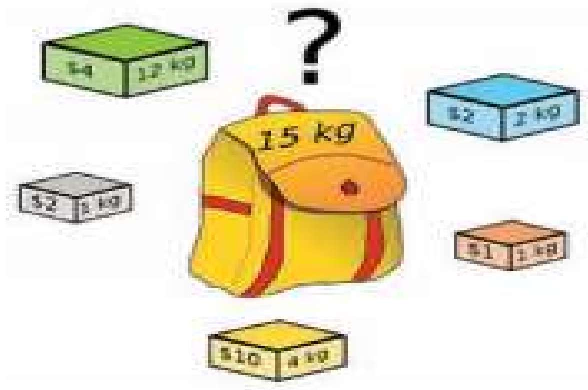
Les problèmes de file d'attente

Déterminer le nombre minimum de guichets qu'il convient de mettre en place afin de limiter au maximum l'attente des clients.



3 – Les grands classe de problèmes

Le problème du Sac à dos



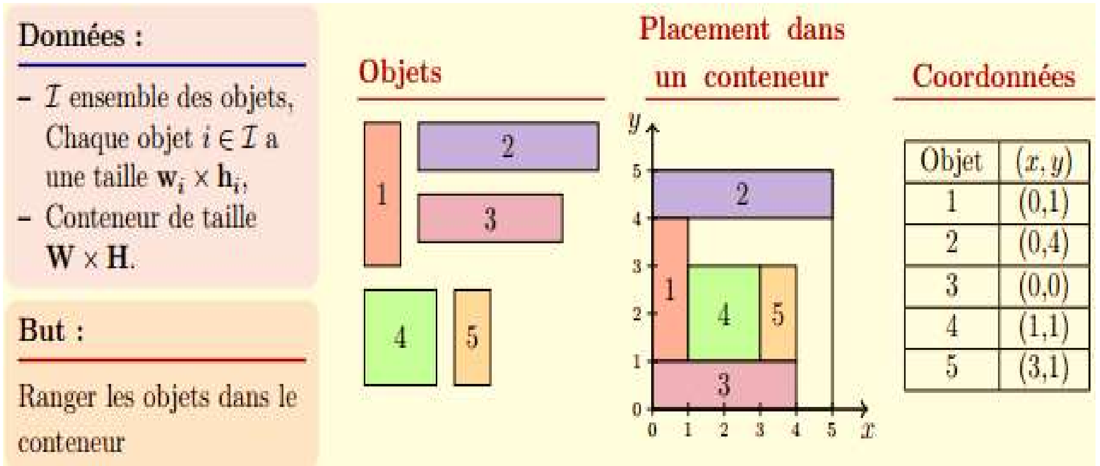
Déterminer quels sont, parmi plusieurs éléments, ceux qui respectent les dimensions offertes par une capacité fixe. Les éléments ont des propriétés différentes du point de vue de l'utilisation de la capacité et de leur valeur.

Exemple

– le personnel d'une entreprise est réparti idéalement entre certaines tâches parmi un ensemble. La sélection des tâches à accomplir doit tenir compte de leur rentabilité mais aussi du nombre de personnes à y consacrer ;

– la surface utile d'une usine est occupée par des équipes spécialisées. Quelles équipes faut-il choisir sachant qu'elles n'utilisent pas toutes la même surface et qu'elles n'ont pas toutes la même utilité ?

– la surface d'un jardin doit être répartie entre plusieurs types de plantation. Quelle surface faut il consacrer à la culture de chaque légume sachant qu'ils n'ont pas le même rendement énergétique, ni le même prix à la vente.



3 – Les grands classe de problèmes

Les problèmes de tournées

Comment visiter un ensemble de lieux si on ne peut passer qu'une seule fois sur chaque lieux avant de revenir à son point de départ ?

Trajet Minimal : Problèmes NP-complets très difficiles à résoudre

Voyageur de commerce : (n-1)!/2 chemins possibles !

Si un ordinateur est capable d'évaluer 1 milliard de chemins / s.

16 villes : 653.109 chemins = 653s = 0,18h.

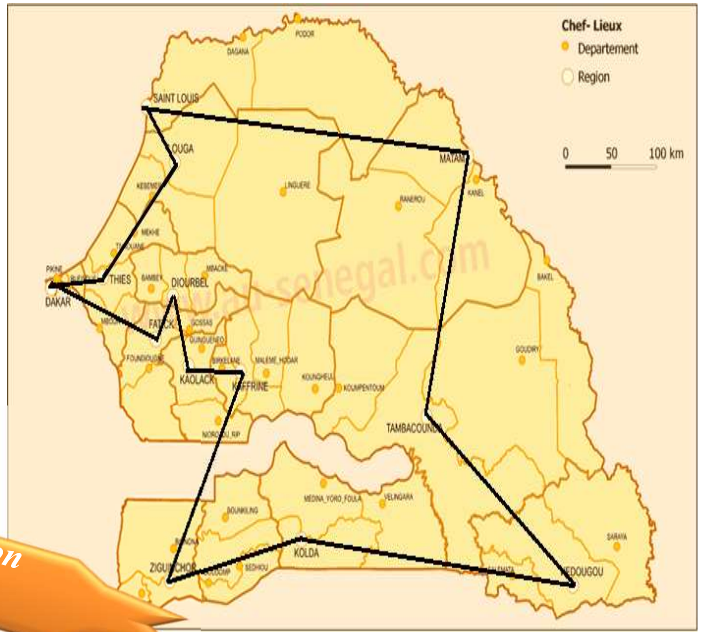
17 villes : 10461.109 chemins = 10461s = 2,9h.

18 villes : 177843.109 chemins = 177843 s = 49 h = 2,05 j

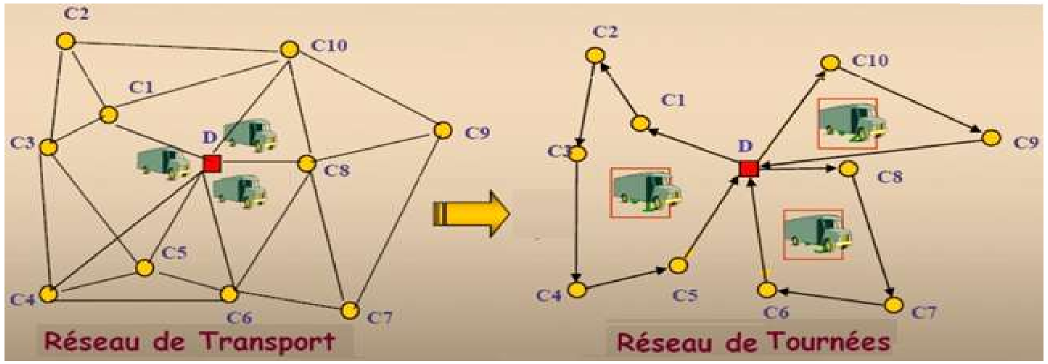
25 villes :

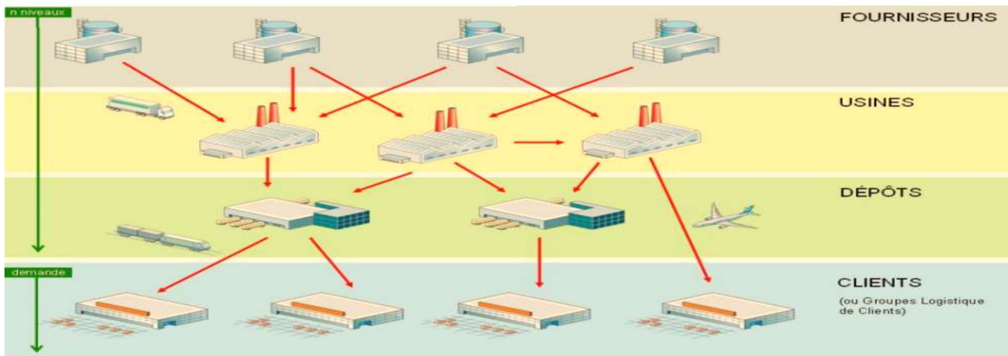
3,10.1023 = 3,10.1014s = 86 milliards d'heures

= 9,8 millions d'années !!!



Voici une Explosion Combinatoire !





3 – Les grands classe de problèmes

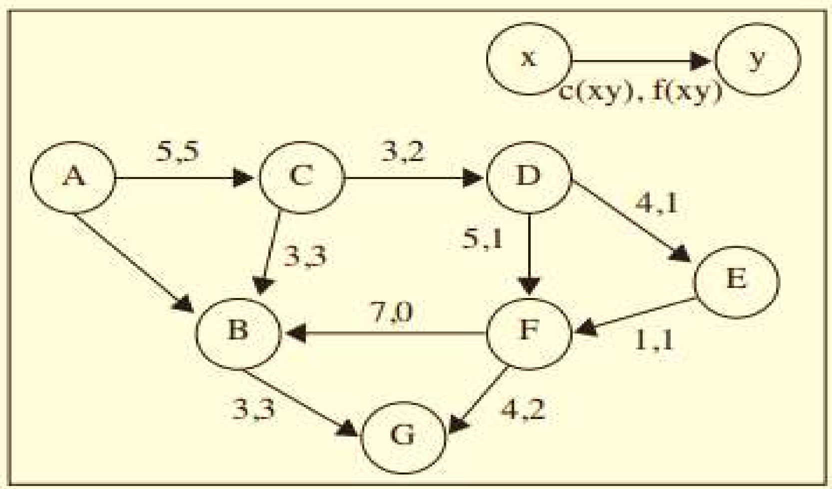
Les problèmes de flux

Considérons un réseau routier urbain. Il relie différentes parties de la ville : les quartiers d'habitation, les zones industrielles, les zones commerciales, etc. Il s'ensuit que la circulation

routière privilégie certains axes quand d'autres sont moins empruntés. Il faut alors adapter la largeur des axes afin d'éviter les embouteillages, tout en restant dans des limites acceptables

pour le contribuable. Il s'agit d'un problème de flux qui peut se mettre sous la forme d'un graphe (le réseau urbain) dont chaque arc a des capacités propres (nombre de véhicule maximum

par heure, coût de construction et d'entretien au kilomètre).



Un graphe orienté et flux associés.

3 – Les succès dans le monde militaire

Tout en GRAND.









1 – Caractérisation des Contraintes

Définition : *Une contrainte est une relation logique entre différentes inconnues (variables), elle restreint les valeurs que peuvent prendre simultanément les variables.*

Exemple : *la contrainte « $x + 3y = 12$ » restreint les valeurs que l'on peut affecter simultanément aux variables x et y.*

Une contrainte peut être définie :

- ✓ *En extension par l'énumération des tuplets de valeurs appartenant à la relation.*
- ✓ *En intention avec des propriétés mathématiques connues.*

Exemple : *si les domaines des variables x et y contiennent les valeurs 0, 1 et 2 alors on peut définir la contrainte « $x < y$ » en extension par « ($x=0$ et $y=1$) ou ($x=0$ et $y=2$) ou ($x=1$ et $y=2$) » , ou encore par « (x, y) élément-de { (0,1), (0,2), (1,2) } » .*

Une contrainte est relationnelle si elle n'est pas "dirigée" comme une fonction qui définit la valeur d'une variable en fonction des valeurs des autres variables. ***Exemple*** *"$x - 2y = z$"*

Une contrainte est déclarative si elle spécifie quelle relation on doit retrouver entre les variables, sans donner de procédure opérationnelle pour effectivement vérifier cette relation.

Exemple *"$x - 2y = F(z)$ " on ne s'occupe pas de déterminer F qui permet de résoudre l'équation.*

2 – Typologie des Contraintes

Il existe différents types de contraintes en fonction des domaines de valeurs des variables :

- ***Contraintes numériques, portant sur des variables à valeurs numériques : une contrainte numérique est une égalité (=) , une différence (≠) ou une inégalité (<, ≤, >, ≥) entre 2 expressions arithmétiques.***

Contraintes numériques sur les réels, quand les variables de la contrainte peuvent prendre des valeurs réelles.

Exemple : contrainte physique comme « U = RI »

Contraintes numériques sur les entiers, quand les variables de la contrainte ne peuvent prendre que des valeurs entières
Exemple : contrainte sur le nombre de passagers dans un avion.

- ***Contraintes numériques linéaires, quand les expressions arithmétiques sont linéaires.***

Exemple : « $4x - 3y + 8z < 10$ »

Contraintes numériques non linéaires , quand les expressions arithmétiques contiennent des produits de variables, ou des fonctions logarithmiques, exponentielles...

Exemple : "$x^2 = 2$" ou "$\sin(x) + z \log(y) = 4$".

- ***Contraintes booléennes portant sur des variables à valeur booléenne (vrai ou faux) est une implication (=>), une équivalence (<=>) ou une non équivalence (<≠>) entre 2 expressions logiques.***

Exemple "(non a) ou b => c" ou encore "non (a ou b) <=> (c et d)".

3 – Formulation d'un CSP

Définition

Un CSP (Problème de Satisfaction de Contraintes) est un problème modélisé sous la forme d'un ensemble de contraintes posées sur des variables, chacune de ces variables prenant ses valeurs dans un domaine.

Formulation

De façon plus formelle, on définira un CSP par un triplet (X,D,C) tel que :

- ✓ $X = \{ X_1 , X_2 , ..., X_n \}$ est l'ensemble des variables (les inconnues) du problème ;
- ✓ **D** est la fonction qui associe à chaque variable X_i son domaine $D(X_i)$; l'ensemble des valeurs que peut prendre X_i
- ✓ $C = \{ C_1 , C_2 , ..., C_k \}$ est l'ensemble des contraintes.

Chaque contrainte C_j est une relation entre certaines variables de X, restreignant les valeurs que peuvent prendre simultanément ces variables.

3 – Formulation d'un CSP

Exemple

On veut définir le CSP (X,D,C) suivant :

Donner un quadruplet de valeurs binaires telle que la première est différente de la deuxième ; la troisième différente de la quatrième et la somme de la première et de la troisième doit être inférieure strictement à la deuxième.

Formulation

Ce CSP comporte 4 variables a, b, c et d.

$$X = \{ a, b, c, d \}$$

Chacune des variables pouvant prendre que 2 valeurs (0 ou 1).

$$D(a) = D(b) = D(c) = D(d) = \{ 0, 1 \}$$

Ces variables doivent respecter les contraintes suivantes :

a doit être différente de b ;

c doit être différente de d ;

la somme de a et c doit être inférieure strictement à b.

$$C = \{ a \neq b , c \neq d , a + c < b \}$$

4 – Solution d'un CSP

Etant donné un CSP (X,D,C), sa résolution consiste à affecter des valeurs aux variables, de telle sorte que toutes les contraintes soient satisfaites.

Affectation : le fait d'instancier certaines variables par des valeurs.

On note $A = \{ (X_1,V_1), (X_2,V_2), ..., (X_r,V_r) \}$ l'affectation qui instancie la variable X_1 par la valeur V_1, la variable X_2 par la valeur V_2, ..., et la variable X_r par la valeur V_r.

Exemple Sur le CSP précédent, $A=\{(b,0),(c,1)\}$ est l'affectation qui instancie b à 0 et c à 1.

Affectation totale instancie toutes les variables du problème sinon elle est dite partielle.

Exemple $A1 = \{(a,1),(b,0),(c,0),(d,0)\}$ est une affectation totale ;

$A2 = \{(a,0),(b,0)\}$ est une affectation partielle.

Une affectation A viole une contrainte C_k si toutes les variables de C_k sont instanciées dans A, et si la relation définie par C_k n'est pas vérifiée pour les valeurs des variables de C_k définies dans A.

Exemple L'affectation partielle $A2 = \{(a,0),(b,0)\}$ viole la contrainte $a \neq b$.

En revanche, elle ne viole pas les deux autres contraintes dans la mesure où certaines de leurs variables ne sont pas instanciées dans A2.

4 – Solution d'un CSP

Une affectation (totale ou partielle) est consistante si elle ne viole aucune contrainte, et inconsistante si elle viole une ou plusieurs contraintes.

Exemple

L'affectation partielle {(c,0),(d,1)} est consistante, tandis que l'affectation partielle {(a,0),(b,0)} est inconsistante.

Une solution est une affectation totale consistante, c'est-à-dire une valuation de toutes les variables du problème qui ne viole aucune contrainte.

Exemple

A = {(a,0),(b,1),(c,0),(d,1)} est une affectation totale consistante : c'est une solution du CSP.

Travaux Dirigées

Objectif de la session de TD

Lors de la session précédente, on a vu qu'un "problème de satisfaction de contraintes", ou CSP en abrégé, est un problème modélisé sous la forme d'un ensemble de contraintes posées sur des variables, chacune de ces variables prenant ses valeurs dans un domaine.

L'objectif de cette session de TD est de vous entrainer à modéliser un problème sous la forme d'un CSP, en identifiant l'ensemble des variables X et leurs domaines de valeurs D, ainsi que les contraintes C entre les variables.

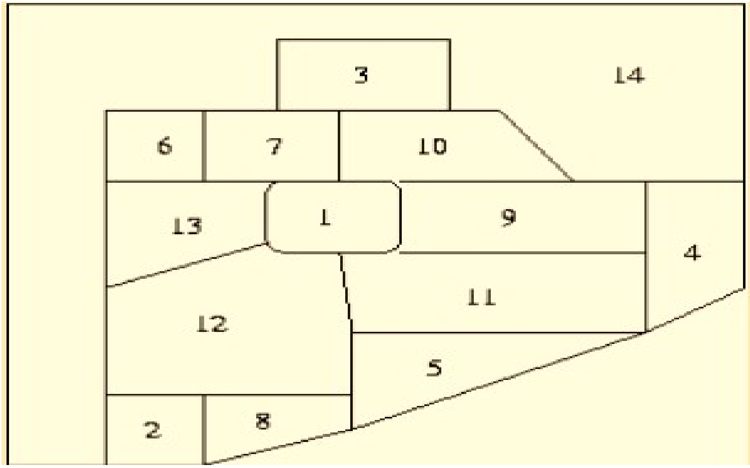
Nous vous proposons pour cela 5 problèmes différents que vous devez modéliser sous la forme de CSPs (X,D,C).

Notons que cette phase de modélisation avec laquelle vous vous familiarisez aujourd'hui est un préliminaire indispensable à l'utilisation de la programmation par contraintes pour résoudre des problèmes.

Les 5 problèmes que vous allez modéliser aujourd'hui seront repris dans les dernières sessions de cours afin d'être résolus à l'aide de la programmation par contraintes.

Travaux Dirigées

Exercice 1 : Coloriage d'une carte (Affectation d'équipe)



Il s'agit de colorier les 14 régions de la carte ci-contre, de sorte que deux régions ayant une frontière en commun soient coloriées avec des couleurs différentes. On dispose pour cela des 4 couleurs suivantes : bleu, rouge, jaune et vert.

Modélisez ce problème sous la forme d'un CSP.

Exercice 2 : Send more money

On considère l'addition suivante :

```
   SEND
 + MORE
 ----------
  MONEY
```

où chaque lettre représente un chiffre différent (compris entre 0 et 9). On souhaite connaitre la valeur de chaque lettre, sachant que la première lettre de chaque mot représente un chiffre différent de 0.

Modélisez ce problème sous la forme d'un CSP.

Exercice 3 : ***Retour de monnaie***

On s'intéresse à un distributeur automatique de boissons.

L'utilisateur insère des pièces de monnaie pour un total de T centimes d'Euros, puis il sélectionne une boisson, dont le prix est de P centimes d'Euros

(T et P étant des multiples de 10).

Il s'agit alors de calculer la monnaie à rendre, sachant que le distributeur a en réserve

E_2 ***pièces de 2 €,*** E_1 ***pièces de 1 €,*** C_{50} ***pièces de 50 centimes,***

C_{20} ***pièces de 20 centimes et*** C_{10} ***pièces de 10 centimes.***

1. ***Modélisez ce problème sous la forme d'un CSP.***
2. ***Comment pourrait-on exprimer le fait que l'on souhaite que le distributeur rende le moins de pièces possibles ?***

<u>Exercice 4 :</u>

On s'intéresse au problème suivant, posé initialement par Lewis Caroll :

Cinq amis, Barnabé, Casimir, Désiré, Ludovic et Martial, se retrouvent chaque jour au restaurant. Ils ont établi les règles suivantes, qu'ils appliquent chaque fois qu'on leur sert du bœuf :

B prend du sel si et seulement si C ne prend que du sel ou que de la moutarde. Il prend de la moutarde si et seulement si, ou bien D ne prend ni sel ni moutarde, ou bien M prend les deux.

C prend du sel si et seulement si, ou bien B ne prend qu'un des deux condiments, ou bien M n'en prend aucun. Il prend de la moutarde si et seulement si D ou L prennent les deux condiments.

D prend du sel si et seulement si ou bien B ne prend aucun condiment, ou bien C prend les deux. Il prend de la moutarde si et seulement si Ludovic ou M ne prennent ni sel ni moutarde.

L prend du sel si et seulement si B ou D ne prennent ni sel ni moutarde. Il prend de la moutarde si et seulement si C ou M ne prennent ni sel, ni moutarde.

M prend du sel si et seulement si B ou L prennent des deux condiments. Il prend de la moutarde si et seulement si C ou D ne prennent qu'un seul condiment.

En fin de compte, que vont-ils mettre sur leurs steaks ?

Modélisez ce problème sous la forme d'un CSP.

Chapitre 2

Programmation Linéaire

Doctorant
Abdourahmane GUEYE
gueyeabou17@gmail.com *77 509 95 64*

Sous la supervision du
Pr Salimata GUEYE DIAGNE
Chef de l'équipe de Recherche en Mathématiques de la Décision / Recherche Opérationnelle

Plan

1 Introduction

1 – Définitions

2 Modélisation de PL

1 – Exemple de Modélisation

2 – Formulation de PL

3 – Interprétation économique

3 Résolution Graphique

1 – Exemple de résolution

2 – Analyse de sensibilité

3 – Existence de Solution

4 Méthode du Simplexe

1 – Critères de Dantzig et Test d’optimalité

2 – Exemple de résolution

5 Travaux Dirigées

Introduction

Objectifs

- ***Formulation en modèles d'optimisation des problèmes,***
- ***Présenter les techniques de résolution de problèmes.***
- ***Analyse et Interprétation des résultats***

1 – Définitions

Optimisation Linéaire

C'est la détermination optimale d'un programme d'action pour un phénomène dont les conséquences sont proportionnelles aux causes.

On parle de problème d'optimisation lorsqu'il faut maximiser (le bénéfice) ou minimiser (les pertes) une fonction sous contraintes (satisfaire la demande et de respecter la capacité de production).

En mathématiques, les problèmes de Programmation Linéaire (PL) sont des problèmes d'optimisation où la fonction objectif et les contraintes sont toutes linéaires.

La programmation linéaire désigne également la manière de résoudre les problèmes de PL.

Introduction

1 – Définitions

La formulation d'un problème d'optimisation comporte trois étapes.

- ✓ *La première étape consiste à choisir les variables du problème.*

Définition 1 ***On appelle*** ***variable*** ***toute quantité utile à la résolution du problème dont le modèle doit déterminer la valeur.***

Cette définition permet de différencier les variables des paramètres, qui sont des données qui peuvent varier, par exemple d'une période à l'autre ou d'un scénario à l'autre.

- ✓ *La deuxième étape consiste à formuler mathématiquement l'objectif.*

Définition 2 ***On appelle*** ***fonction objectif*** ***d'un problème d'optimisation le critère de choix entre les diverses solutions possibles.***

- ✓ *La troisième étape est la formulation des contraintes du problème.*

Définition 3 ***On appelle*** ***contraintes*** ***du problème toutes les relations limitant le choix des valeurs possibles des variables.***

Ces relations peuvent être de simples bornes sur les variables.

Exemple ***Des quantités produites ne peuvent être négatives.***

Elles peuvent être plus complexes comme les contraintes de capacité des ressources.

1 – Exemple de Modélisation

L'entreprise « Back2Net » fabrique deux types de drone topométrique : le IBM4 et le IBM5.

Chacun d'eux comporte un processeur, le même, mais les deux modèles diffèrent en particulier par le nombre de barrettes mémoires.

Plus précisément, le IBM4 comporte 2 barrettes alors que le IBM5 en comporte 6.

Le marché pour ces composants est tel qu'on ne peut espérer acheter auprès des fournisseurs habituels plus de 10 000 processeurs pour le trimestre à venir et plus de 48 000 barrettes.

Une autre limitation risque d'intervenir sur la production. L'assemblage est caractérisé, en particulier, par une opération délicate, qui pour l'IBM4 est de 3 minutes alors que pour l'IBM5 elle n'est que d'une minute; on ne dispose a priori pour l'assemblage de ces deux types de machines que de 24 000 minutes pour le trimestre à venir.

Enfin, compte tenu des conditions actuelles du marché, on peut espérer retirer un profit de 40.000 Fcfa sur l'IBM4 et de 80.000 Fcfa sur l'IBM5.

L'objectif est de déterminer les quantités de chacun des deux types de drone à fabriquer de manière à obtenir le plus grand profit possible.

1 – Exemple de Modélisation

Modélisation du problème :

Nous examinons dans l'ordre la représentation des variables de décisions, des contraintes et du critère à optimiser.

Les variables de décisions :

Les décisions concernent les quantités à fabriquer, ce qui se représente naturellement par deux nombres positifs x pour l'IMB4 et y pour l'IMB5.

Soit x la quantité pour IMB4 à fabriquer et

y la quantité pour IMB5 à fabriquer.

Les contraintes :

Il s'agit de représenter les différentes contraintes limitant la production de ces deux types de drone.

La première porte sur la limitation du nombre de processeurs disponibles : chaque machine utilise un processeur et on peut en disposer de 10000.

On doit donc imposer :

$$x + y \leq 10000.$$

1 – Exemple de Modélisation

Les contraintes (suite):

De même, le nombre de barrettes est limité.

Compte tenu du nombre de barrettes dans chacun des 2 ordinateurs et du nombre de barrettes disponibles, cette contrainte se traduit

par : $2x + 6y \leq 48000$.

Enfin, la contrainte portant sur le temps d'assemblage s'écrit :

$3x + y \leq 24000$.

L'ensemble des décisions possibles est donc caractérisé par l'ensemble des valeurs de x et y vérifiant :

$$\begin{aligned} x + y &\leq 10000 \\ 2x + 6y &\leq 48000 \\ 3x + y &\leq 24000 \\ x \geq 0&, y \geq 0 \end{aligned}$$

Le critère : on souhaite maximiser le profit de l'entreprise représenté par :

$40.000\,x + 80.000\,y$.

1 – Exemple de Modélisation

Le problème initial est donc modélisé par le problème de programmation mathématique suivant :

$$
\begin{aligned}
\max f(x) &= 40.000\,x + 80.000\,y \\
\text{s.c.}\quad x + y &\leq 10000 \\
2x + 6y &\leq 48000 \\
3x + y &\leq 24000 \\
x \geq 0,\ y &\geq 0
\end{aligned}
$$

.

2 – Formulation de PL

La PL est essentiellement appliquée pour résoudre des problèmes d'optimisation à moyen et long terme (problèmes stratégiques et tactiques).

Les domaines d'application de ces problèmes sont très variés aussi bien dans la nature des problèmes abordés (planification et contrôle de la production, distribution dans des réseaux) que dans les secteurs d'industrie :

- ✓ Industrie manufacturière, énergie (pétrole, gaz, électricité, nucléaire),
- ✓ Transports (aériens, routiers et ferroviaires),
- ✓ Télécommunications,
- ✓ Industrie forestière,
- ✓ Finance ...

a - Forme algébrique d'un programme linéaire ;

$$\max f(x) = 400.000\, x + 800.000\, y$$

$$\text{s.c.} \quad \begin{aligned} x + y &\leq 10000 \\ 2x + 6y &\leq 48000 \\ 3x + y &\leq 24000 \\ x \geq 0,\ y &\geq 0 \end{aligned}$$

Forme (max , ≤) Forme (min , ≥)

2 – Formulation de PL

b - Forme Matricielle d'un programme linéaire

Soit n le nombre de variables et p le nombre de contraintes. Posons : $c^T = (c_1, c_2, ..., c_n)$ le vecteur des coefficients de la fonction objectif ; $b^T = (b_1, b_2, ..., b_p)$ le vecteur des seconds membres, c'est à dire des bornes supérieures. Soit A la matrice de p lignes et n colonnes, notée A(p, n) :

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{21} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{p1} & a_{p2} & \cdots & a_{pn} \end{bmatrix}$$

et $x^T = (x_1, x_2, ..., x_n)$ le vecteur des variables de décision.
La forme matricielle d'un programme linéaire s'écrit alors en trois (3) lignes :

$$\begin{aligned} &\max\ c^T x \\ &\text{s.c.} \quad Ax \le b \\ &\qquad\quad\ x \ge 0. \end{aligned}$$

.

2 – Interprétation économique

On considère le problème de programmation linéaire (P) mis sous la forme :

$$\max z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

$$\text{s.c.} \qquad \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i \qquad \forall i = 1, \ldots, p$$

$$x_j \geq 0, \qquad \forall j = 1, \ldots, n$$

Cette formulation correspond à la situation suivante :

Une entreprise exerce un ensemble de n activités j.

Chacune de ces activités consomme une certaine quantité de ressources i.

On connait la quantité bi de ressource i disponible pour chacune des m ressources.

Chaque activité j peut être exercée avec une quantité xj et on donne la consommation aij de la ressource i utilisée pour la production d'une unité de l'activité j.

Et cj est le profit unitaire que l'on tire de l'activité j.

Résoudre le problème (P), c'est déterminer les quantités xj (non négatives) auxquelles il faut exercer les activités j de manière que :

— pour toute ressource i la quantité de ressource i ne dépasse pas bi (ne pas consommer plus de ressources que l'on en dispose).

— le profit total soit maximum (maximiser le profit de la vente).

1 – Exemple de résolution

De manière très générale, la résolution d'un problème de programmation linéaire nécessite la mise en œuvre d'un algorithme.
Nous en verrons le principe dans la section suivante.

Lorsqu'il n'y a que deux variables de décision, un problème linéaire peut être résolu de manière purement graphique. C'est ce que nous verrons dans cette partie.

Cette résolution graphique permet de mettre en évidence certaines propriétés que possède n'importe quel problème de programmation linéaire.

Considérons le problème de l'exemple :

$$\begin{aligned} &\max f(X) = 40.000\,x + 80.000\,y \\ &\text{s.c.}\quad x + y \leq 10000 \\ &\qquad 2x + 6y \leq 48000 \\ &\qquad 3x + y \leq 24000 \\ &\qquad x \geq 0,\ y \geq 0 \end{aligned}$$

1 – Exemple de résolution

La première étape de la résolution c'est la résolution du système d'inéquation.

A chaque couple de variables x et y, on associe un point du plan dont les coordonnées correspondent aux valeurs des variables.

Les variables étant positives, ces points sont situés dans le quart Nord-Est du plan.

Chaque contrainte permet de délimiter une partie du plan.
Exemple : la droite Δ_1 d'équation $x + y = 10000$ définit 2 demi-plans.
Au-dessus de cette droite (Δ_1), les coordonnées des points du plan vérifient $x + y > 10000$.
On est donc conduit à exclure ces points.

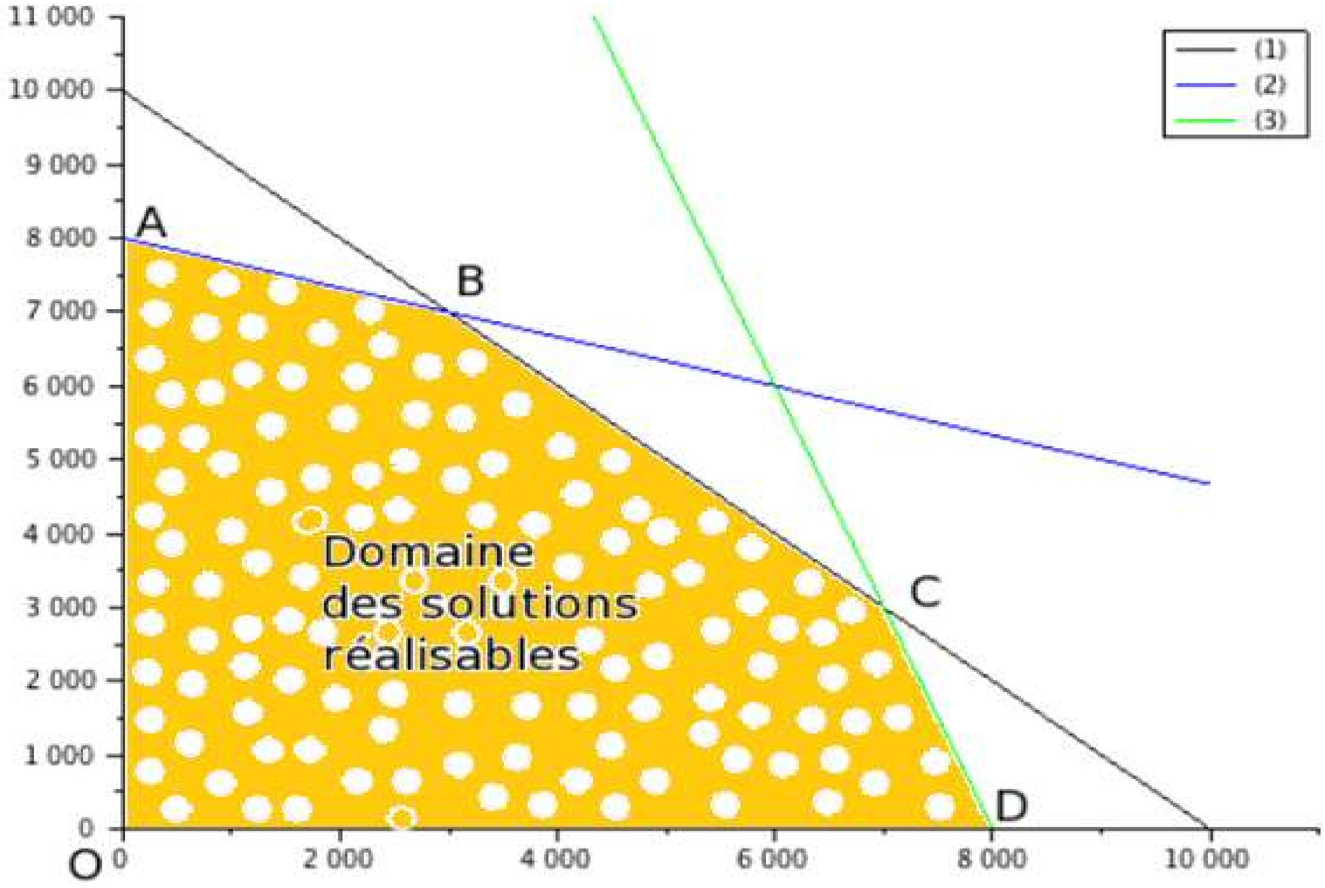
On fait de même pour les 2 autres contraintes. On trace les droites d'équation :
$\Delta_2 : 2x + 6y = 48000$ et $\Delta_3 : 3x + y = 24000$ et on élimine les points situés au dessus de ces droites.

Les solutions réalisables du problème correspondent aux points du plan situés à l'intérieur du polyèdre OABCD et sur ses bords.

Résolution Graphique

1 – Exemple de résolution

La première étape de la résolution c'est la résolution du système d'inéquation.



La résolution graphique ne concerne que des problèmes avec 2 variables alors que les problèmes réels peuvent en avoir plusieurs milliers.
Nous allons illustrer le principe d'un algorithme de résolution de PL qui marche quelques soit le nombre de variables : l'algorithme du simplexe du à Dantzig,

1 – Forme Standard

Un problème de programmation linéaire est dit sous forme standard si toutes les contraintes sont des contraintes d'égalité et toutes les variables sont positives..

On transforme le problème pour qu'il n'y ait que des contraintes d'égalité pour cela on introduit une variable positive appelée « variable d'écart » qui mesure l'écart entre le deuxième et le premier membre de l'inégalité.

Exemple

Proposition

Tout problème de programmation linéaire peut se mettre au choix sous la forme canonique ou sous la forme standard.

2 – Critères de Dantzig et Test d'optimalité

Premier critère :

On fait entrer dans la base le vecteur Ak tel que la quantité ek − ck (si l'on maximise la fonction objectif) ou ck − ek (si on minimise) soit en valeur absolue aussi grande que possible.

Deuxième critère :

On fait sortir de la base le vecteur Ai pour lequel λ = bi/xik est aussi petit que possible (mais positif).

Remarque

En faisant cette transformation, on a la solution initiale qui améliore la valeur de z.

Test d'optimalité :

Cette transformation est à faire jusqu'à ce que tous les coûts marginaux des variables xk soient négatives ou nulles.

3 – Exemple de résolution

Voir TD

3 – Exemple de résolution

Exercice 1 : Production d’acier

Un armateur doit construire un navire de guerre à partir de 50 tonnes d’acier contenant entre 0.5% et 1.25% de carbone (C), entre 0.3% and 0.5% de silicone, pas plus de 0.05% de sulfure, et pas plus de 0.04% de phosphore.

Un fournisseur produit de l’acier à partir de sept matières premières dont les qualités, les disponibilités en tonnes, et les coûts en Franc/tonne sont donnés dans la Table suivante :

Matière première	% C	% Si	% Su	% Ph	Disponibilité	Coût
limonite	3.0	0	0.013	0.015	40	200
taconite	2.5	0	0.008	0.001	30	250
hématite	0	0	0.011	0.05	60	150
magnétite	1.2	0	0.002	0.008	50	220
silicone 1	0	90	0.004	0.002	20	300
silicone 2	0	96	0.012	0.003	30	310
charbon	90	0	0.002	0.01	25	165

Quel programme de fabrication permet de réaliser un chiffre d’affaire optimal.

Exercice 2 : Allocation Machine

La compagnie WyndorGlass produit des produits verriers de haute qualité, incluant des fenêtres et des portes vitrées. Elle dispose à cette fin de trois usines (usine 1, usine 2, usine 3), qui ont chacune une capacité de production limitée. Les châssis en aluminium et les matériaux sont produits dans l'usine 1,les châssis en bois sont fabriqués dans l'usine 2, et l'usine 3 produit le verre et assemble les produits. La compagnie a décidé de mettre en place de ligne de production:

– produit 1: une porte vitrée avec un châssis d'aluminium ;

– produit 2: une fenêtre double-vritage avec châssis en bois.

Un lot de 20 unités donne lieu à un profit de 30000 Fcfa pour le produit 1 et 50000 Fcfa pour le produit 2.

Les données du problème sont synthétisées dans la Table suivante.

	Produit 1 Temps de prod. (h)	Produit 2 Temps de prod. (h)	Capacité de production (h)
Usine 1	1	0	4
Usine 2	0	2	12
Usine 3	3	2	18

Chaque lot d'un produit est le résultat combiné de la production dans les trois usines.

1) ***Déterminer le taux de production de façon à réaliser un chiffre d'affaire optimal.***
2) ***Présenter la solution graphique.***
3) ***Donner la signification de chaque variable d'écart au maximum.***