

Chapitre III : Les intérêts Simples

I- Notion d'intérêts simple

1- Définition

L'intérêt est le revenu que donne à un capital placé dans une institution financière à un taux donné. C'est aussi le loyer versé par l'emprunteur d'un capital à son créancier après avoir contracté une dette. L'intérêt est dit simple lorsqu'il est calculé une seule fois à la fin de la dernière période.

2- Calcul d'intérêts simple

Les calculs en intérêts simple regroupent souvent une période de un an. Ce sont des opérations à court terme. Pour calculer l'intérêt simple d'un capital placé à un taux t donné on utilisera la formule suivante :

$$I = \frac{C \ t \ n}{100}$$

NB : C représente le capital

t représente le taux de placement (t pour 100)

n représente la durée de placement

Le dividende peut varier, cela dépend de la durée :

- si la durée n est année alors on utilise 100
- si la durée est mois alors on utilise 1200
- si la durée est en jours alors on utilise 36000

en résumé on les formules suivantes pour l'intérêts simple :

$$I = \frac{C \ t \ n}{100} \quad \text{si la durée } n \text{ est en année}$$

$$I = \frac{C \ t \ n}{1200} \quad \text{si la durée } n \text{ est en mois}$$

$$I = \frac{C \ t \ n}{36000} \quad \text{si la durée } n \text{ est en jour}$$

Remarque : Les intérêts simples peuvent être calculés par la méthode des nombres et des diviseurs. On sait que

$$I = \frac{C \cdot t \cdot n}{36000} \quad \text{soit} \quad I = \frac{\frac{C \cdot t \cdot n}{t}}{\frac{36000}{t}} \quad \text{soit} \quad I = \frac{C \cdot n}{\frac{36000}{t}}$$

Posons $N = C \cdot n$ et $D = \frac{36000}{t}$ donc on a : $I = \frac{N}{D}$

N est appelé le Nombre et D le diviseur. Pour plusieurs capitaux le nombre total $N = \sum C_i \cdot n_i$.

NB : le cas pris ici est quand le durée est jour, si la durée est en mois il faut utiliser 1200 et si c'est en année il faut utiliser 100.

3- La Valeur acquise (V_a)

La valeur acquise est l'ensemble du capital et des intérêts. Si nous notons V_a cette valeur acquise on a : **$V_a = C + I$**

Application :

Exercice 1 : Quelle est la valeur acquise par un capital de 300 000 francs placé au taux de 6% pendant 9 mois.

Exercice 2 : Un capital de 900 000 francs est placé au taux de 3% du 15 Avril au 26 juin. Quelle est la valeur acquise par ce capital.

Résultat :

Exercice 1 : Calculons la valeur acquise

$$V_a = C + I$$

$$C = 300\,000$$

$$I = \frac{C \cdot t \cdot n}{1200} \quad \text{car } n \text{ est en mois} \quad \text{soit } I = \frac{300000 \times 6 \times 9}{1200} \quad \text{soit } I = 13\,500 \text{ francs}$$

$$V_a = 300\,000 + 13\,500$$

$V_a = 313\,500 \text{ francs CFA}$

Exercice 2 : Calculons la valeur acquise par ce capital

Soit V_a cette valeur acquise

$$V_a = C + I$$

Soit $C = 900\,000$ francs

Avant de calculer I nous allons calculer la durée n de placement

Cette durée sera calculée au prorata : soit

15 Avril au 30 Avril = 15 jours

1^{er} Mai au 31 Mai = 31 jours

1^{er} Juin au 26 Juin = 26 jours

$$\text{Durée} = 72 \text{ jours}$$

$$\text{Donc on a } I = \frac{900000 \times 3 \times 72}{36000} \text{ soit } I = 5\,400 \text{ francs}$$

$$V_a = 900\,000 + 5\,400 \text{ soit } \mathbf{V_a = 905\,400 \text{ francs}}$$

4- Taux Moyens de Placement

Considérons trois capitaux C_1, C_2, C_3 placés respectivement aux taux t_1, t_2, t_3 pendant respectivement n_1, n_2, n_3 périodes.

On appelle taux moyen de placement le taux unique t_m auxquels ces capitaux produisent ensemble un intérêt égal à la somme des intérêts produit par ces mêmes capitaux, chacun à son propre taux de placement.

$$\frac{C t_m n_1}{100} + \frac{C t_m n_2}{100} + \frac{C t_m n_3}{100} = \frac{C t_1 n_1}{100} + \frac{C t_2 n_2}{100} + \frac{C t_3 n_3}{100}$$

$$C t_m n_1 + C t_m n_2 + C t_m n_3 = C t_1 n_1 + C t_2 n_2 + C t_3 n_3$$

$$t_m (C n_1 + C n_2 + C n_3) = C t_1 n_1 + C t_2 n_2 + C t_3 n_3$$

$$t_m = \frac{C t_1 n_1 + C t_2 n_2 + C t_3 n_3}{C n_1 + C n_2 + C n_3}$$

II – Notion d'intérêt précompté

1- Définition d'intérêt précompté

L'intérêt est dit précompté lorsqu'il est calculé et prélevé par anticipation. Soit C le nominal d'un emprunt t le taux d'intérêt précompté et n la durée de remboursement.

2- Calcul d'intérêt précompté

L'intérêt précompté $I_p = \frac{C t n}{100}$

A ce niveau, si la durée est en année alors on divise par 100, si la durée est en mois on divise par 1200 et si la durée est en jours on divise par 36 000.

3- Somme effectivement placée (S)

La somme effectivement placée est la différence entre le nominal de l'emprunt et les intérêts précomptés. Soit S cette somme :

$$S = C - \frac{C t n}{36\,000} \quad \text{soit} \quad S = C \left(1 - \frac{t n}{36\,000}\right)$$

4- Taux effectif de placement (te)

Le taux effectif de placement est le taux aux quel la somme effective placée produit un intérêt égal à l'intérêt précompté. Soit la formule suivante :

$$\frac{S t e n}{100} = \frac{C t n}{100} \quad \text{soit} \quad S t e n = C t n \quad \text{or} \quad S = C \left(1 - \frac{t n}{100}\right)$$

$$C \left(1 - \frac{t n}{100}\right) t e = C t \quad \text{soit} \quad \frac{100 - t n}{100} t e = t$$

$$\text{Soit} \quad 100t = t e (100 - t n) \quad \text{soit} \quad t e = \frac{100t}{100 - t n} \quad (n \text{ est en année})$$

$$t e = \frac{1200 t}{1200 - t n} \quad (n \text{ est mois}) \quad t e = \frac{36000t}{36000 - t n} \quad (n \text{ est en jours})$$

Application :

On négocie à la BOA des bons de trésor de nominal 3 000 000 échéant dans 4 mois. Sachant que les intérêts sont précomptés au taux de 5%, déterminez :

- a- Les intérêts précomptés
- b- La somme effectivement placée
- c- Le taux effectif de placement

Résultat :

Déterminons :

- a- Les intérêts précomptés (I_p)

$$I_p = \frac{C \cdot t \cdot n}{1200} \quad \text{soit} \quad I_p = \frac{3000000 \times 5 \times 4}{1200} \quad \text{soit} \quad I_p = 50\,000 \text{ francs}$$

- b- La somme effective placée (S)

$$S = C \left(1 - \frac{t \cdot n}{1200}\right) \quad \text{soit} \quad S = 3000000 \left(1 - \frac{5 \times 4}{1200}\right) \quad \text{soit} \quad S = 2950000 \text{ francs}$$

- c- Le taux effectif de placement (te)

$$te = \frac{1200 \cdot t}{1200 - t \cdot n} \quad \text{soit} \quad te = \frac{1200 \times 5}{1200 - 5 \times 4} \quad \text{soit} \quad te = 5.084746\%$$

III – Notion d'escompte d'effet de commerce

1- Définition

L'escompte est une opération de crédit par laquelle le banquier met à la disposition de son client une certaine somme contre remise d'effet de commerce moyennant des agios.

Un commerçant qui a dans son portefeuille un effet de commerce peut négocier auprès d'une banque commerciale. Lorsque l'effet est accepté par le banquier, ce dernier se chargera de calculer un intérêt par rapport à la valeur nominale de l'effet en tenant compte du nombre de jour

restant à courir par l'effet. Cet intérêt calculé dans ces conditions est appelé escompte commercial.

2- Escompte commercial

Soit V la valeur nominale d'un effet, t le taux d'escompte et n le nombre de jour restant à courir par l'effet de la date de négociation à la date d'échéance de l'effet. L'escompte commercial e prélevé est :

$$e = \frac{V t n}{36\,000}$$

3- Valeur actuelle commerciale

C'est la différence entre le nominal de l'effet et l'escompte commercial prélevé. Soit v cette valeur actuelle commerciale :

$$v = V - e$$

Application :

Le 14 Janvier 2008 un commerçant négocie à la BIBE un effet de commerce de nominal 360 000 francs crée le 4 Janvier 2008 sachant que l'effet échoit le 17 Avril 2008 et que le taux d'escompte est de 6%.

Déterminer

- a- l'escompte commercial prélevé
- b- la valeur actuelle commerciale.

Résultat :

Déterminons :

- a- l'escompte commercial prélevé

$$e = \frac{V t n}{36\,000}$$

Déterminons la durée n

14 Janvier au 31 Janvier = 17 jours
Février = 29 jours
Mars = 30 jours
17 Avril = 17 jours

Réalisé par Dr Yaya SAGNA = 94 jours

Donc on a $e = \frac{360\,000 \times 6 \times 94}{36\,000}$ soit $e = 5\,640 \text{ francs}$

b- la valeur actuelle commerciale.

$$v = V - e \text{ soit } v = 360\,000 - 5\,640 \text{ soit } v = 354\,360 \text{ francs}$$

4- Notion d'agios

Lors de la négociation d'un effet de commerce en plus de l'escompte commercial prélevé, le banquier prélève d'autre commission et une taxe spéciale pour le compte de l'état appelé la taxe sur activité financière (TAF).

- Les commissions

Il existe trois grandes catégories de commissions :

- Les commissions proportionnelles à la fois à la valeur nominale et au temps. Elles se calculent comme l'escompte.
Exemple : Commission d'endosse.
- Les commissions uniquement proportionnelles à la valeur nominale. Elles se calculent par simple pourcentage de la valeur nominale.
Exemple : Commission de bordereau, commission de manipulation parfois commission d'acceptation.
- Les commissions fixes : leur montant ne varie pas.
- La taxe
Elle est calculée sur toutes les commissions sauf la commission d'endosse et d'acceptation.
- L'agio est l'ensemble des prélèvements opéré par le banquier. On distingue l'agio HT et l'agio TTC chez le client.

$$\text{Agio HT} = \text{Escompte} + \text{Commission}$$

$$\text{Agio TTC} = \text{Agio HT} + \text{Taxe}$$

5- Valeur nette négociée

C'est la différence entre la valeur nominale de l'effet et l'agio prélevé.

$$V_{\text{nette}} = V - \text{agio}$$

Application :

Un effet de nominal 1 200 000 échéant dans 24 jours est négocié dans les conditions suivantes : Taux d'escompte 4%, commission de bordereau 1%, commission d'endosse 2%, commission de service 1800/effet, commission de manipulation 0,5%, commission d'acceptation 1 pour 1000, TAF : 17,5.

Déterminer le net de la négociation.

Résultat :

Déterminons le net de la négociation

- Déterminons l'escompte

$$e = \frac{V t n}{36\,000} \text{ soit } e = \frac{1\,200\,000 \times 4 \times 24}{36\,000} \text{ soit } e = 3\,200 \text{ francs}$$

- Déterminons la commission de bordereau (cb)

$$cb = \frac{1\,200\,000 \times 1}{100} \text{ soit } cb = 12\,000 \text{ francs}$$

- Déterminons la commission d'endosse (ce)

$$ce = \frac{V t n}{36\,000} \text{ soit } ce = \frac{1\,200\,000 \times 2 \times 24}{36\,000} \text{ soit } ce = 1\,600 \text{ francs}$$

- Commission de service = 1 800 francs

- Déterminons la commission de manipulation (cm)

$$cm = \frac{1\,200\,000 \times 0.5}{100} \text{ soit } cm = 6\,000 \text{ francs}$$

- Déterminons la commission d'acceptation (ca)

$$ca = \frac{1\,200\,000 \times 1}{1000} \text{ soit } ca = 1\,200 \text{ francs}$$

- Déterminons la TAF

$$TAF = \frac{(12\,000 + 1\,800 + 6\,000) \times 17,5}{100} \text{ soit } TAF = 3\,465 \text{ francs}$$

- Déterminons l'agio HT

Agio HT = Escompte + Commission

$$\text{Agio HT} = 3\,200 + (12\,000 + 1\,600 + 1\,800 + 6\,000 + 1\,200)$$

$$\text{Agio HT} = 25\,800 \text{ francs}$$

- Déterminons l'agio TTC

$$\text{Agio TTC} = \text{Agio HT} + TAF$$

$$\text{Agio HT} = 25\,800 + 3\,465$$

$$\text{Agio HT} = 29\,265 \text{ francs}$$

- Déterminons la valeur nette de la négociation

$$V_{\text{nette}} = V - \text{Agio TTC}$$

$$V_{\text{nette}} = 1\,200\,000 - 29\,265$$

$$V_{\text{nette}} = 1\,170\,735 \text{ francs}$$

Remarque :

Jour de banque : Ce sont des jours fictifs fixés par le banquier pour les opérations. Ainsi le nombre de jours définitivement retenus pour les calculs est égal au nombre de jours réels à courir par l'effet augmenté des jours de banque.

6- Escompte rationnel-Valeur actuelle rationnelle

L'escompte rationnel est un intérêt produit par la valeur actuelle rationnelle. Si nous notons e' l'escompte rationnel, v' la valeur actuelle rationnelle on a :

$$e' = \frac{v' t n}{36\,000} \quad \text{et} \quad v' = V - e'$$

$$\text{Remplaçons } v' \text{ dans } e' \text{ soit } e' = \frac{(V - e') t n}{36\,000}$$

$$\text{Soit } 36\,000 e' = (V - e') t n \iff 36\,000 e' = V t n - e' t n$$

$$36000 e' + e' t n = V t n \iff e' (36000 + t n) = V t n$$

$\iff e' = \frac{V t n}{36000 + t n}$ cette formule est valable quand la durée est en jours.

Application :

On escompte rationnellement un effet de nominal 3 000 000 francs échéant dans 4 mois au taux de 7%.

Déterminer l'escompte rationnel et la valeur actuelle rationnelle.

Résultat :

Déterminons :

- L'escompte rationnel

$$e' = \frac{V t n}{1200 + t n} \text{ soit } e' = \frac{3000000 \times 7 \times 4}{1200 + (7 \times 4)} \quad e' = 68\,403,90879 \text{ francs}$$

- La valeur rationnelle

$$v' = V - e' \text{ soit } v' = 3000000 - 68\,403,90879 \text{ soit } v' = 2\,931\,596,091 \text{ francs}$$

7- Taux réel d'escompte (T)

Encore appelé taux d'agio, le taux réel d'escompte est le taux directement applicable sur la valeur nominale de l'effet et compte tenu du nombre de jours permet d'obtenir l'agio.

$$\text{Agio} = \frac{V T n}{36\,000} \iff T = \frac{36000 \text{ Agio}}{V n}$$

Ce taux peut être calculé hors taxe pour le banquier ou toutes taxes comprises pour le client. Si dans l'exercice on ne précise rien on calcule le taux hors taxe (pour le banquier). Ici on tient compte du jour réel de l'effet.

8- Taux d'aggravation (Ta)

C'est la différence entre le taux réel d'escompte et la somme des taux d'escompte et d'endosse.

9- Taux de placement pour le banquier (Tp)

C'est le taux auquel la valeur actuelle commerciale produit un intérêt égal à l'escompte commercial.

$$e = \frac{v T_p n}{36\,000} \quad T_p = \frac{36\,000 e}{v n}$$

10 – Taux de revient de l'opération pour le client (Tr)

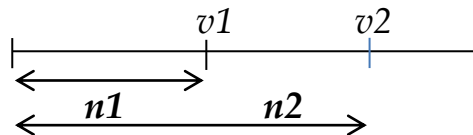
C'est le taux qui appliqué sur la valeur nette négociée et compte tenu du nombre de jours permet d'obtenir l'agio toutes taxes comprises.

$$\text{Agio TTC} = \frac{V_{\text{nette}} Tr n}{36\,000} \quad Tr = \frac{36\,000 \text{ Agio TTC}}{V_{\text{nette}} \times n}$$

IV- Equivalence des effets

1- Equivalence de deux effets

Les effets du nominal v_1 ; v_2 échéant respectivement dans n_1 ; n_2 périodes sont dit équivalent si et seulement si escompté au même taux et à une même date (appelée date de l'équivalence). Ils ont la même valeur actuelle à ces dates.



$$V_1 - \frac{V_1 t n_1}{36\,000} = V_2 - \frac{V_2 t n_2}{36\,000}$$

2- Equivalence de deux groupes d'effets

Deux groupes d'effet sont dits équivalent si et seulement si escompté au même taux et à une même date la somme des valeurs actuelles des effets à remplacer est égale à la somme des valeurs actuelles des effets de remplacement.

3- Remplacement de plusieurs effets par un effet unique

Les effets de nominal V_1, V_2, \dots, V_k échéant respectivement dans n_1, n_2, \dots, n_k périodes pourraient être remplacés par un effet unique de nominal V échéant dans n période si et seulement si escompté au taux même taux à une même date la valeur actuelle de l'effet unique de remplacement est égal à la somme des valeurs actuelles des effets à remplacer. Deux cas sont possibles :

1^{er} cas : $V \neq V_1 + V_2 + \dots + V_k$

Dans ce cas l'échéance de l'effet unique est appelée échéance commune.

2^{ème} cas : $V = V_1 + V_2 + \dots + V_k$

Ici l'échéance de l'effet unique est appelé échéance moyenne. Elle est obtenue par :

$$n = \frac{\sum V_i n_i}{\sum V_i}$$

Remarque :

Dans les problèmes d'échéance moyenne l'équivalence peut s'établir à n'importe quelle date. Il revient à chacun de choisir sa date d'équivalence.

Application :

Exercice 1 :

Un effet de commerce de nominal 4 000 échéant le 7 mai doit être remplacé par un autre effet de nominal 4 100 à une certaine date d'échéance.

Déterminer au taux d'escompte de 9% la date d'échéance du 2nd effet.

Exercice 2 :

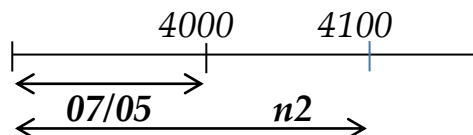
Un débiteur retrouve dans son portefeuille les dettes suivantes 450 000 francs payable dans 42 jours, 930 000 francs payable dans 45 jours et 1 500 000 francs payable dans 63 jours.

- a- Le débiteur négocie et obtient de son créancier de rembourser ses dettes par versement bimensuel qui sont entre eux comme des nombres 2 et 5. Quel est au taux de 9% la valeur de deux versements bimensuels.
- b- En réalité ces versements devaient être remboursés par un versement unique dans 36 jours. Déterminer dans les mêmes conditions de taux la valeur nominale du versement unique.
- c- Quelle est l'échéance moyenne de trois dettes.

Résultat :

Exercice 1 :

Déterminer au taux d'escompte de 9% la date d'échéance du 2nd effet.



$$V1 - \frac{V1 \times t \times n1}{36\,000} = V2 - \frac{V2 \times t \times n2}{36\,000}$$

$$4000 = 4100 - \frac{4100 \times 9 \times n2}{36\,000}$$

$$n2 = \frac{100 \times 36000}{4100 \times 9} \text{ soit } n2 = 97,560976 \text{ soit } \boxed{n2 \approx 98 \text{ jours}}$$

07/05 au 31/05 : 24 jours

Juin : 30 jours

Juillet : 31 jours

13 Août : 13 jours

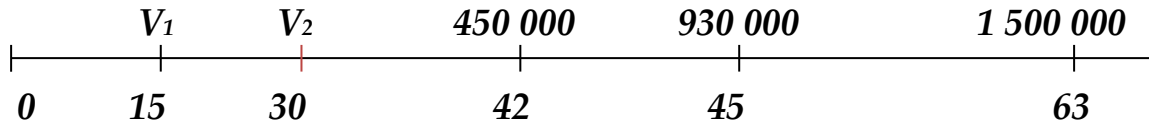
: 98 jours

La date de l'échéance du second effet est le 13 Août de la même année.

Exercice 2 :

Déterminons :

a- la valeur des deux versements bimensuels



$$\frac{V_1}{2} = \frac{V_2}{5} \quad \text{soit } 5V_1 = 2V_2$$

$$v_3 + v_4 + v_5 = v_1 + v_2$$

$$450\,000 - \frac{450\,000 \times 9 \times 42}{36\,000} + 930\,000 - \frac{930\,000 \times 9 \times 45}{36\,000} + 1\,500\,000 -$$

$$\frac{1\,500\,000 \times 9 \times 63}{36\,000} = V_1 - \frac{V_1 \times 9 \times 15}{36\,000} + V_2 - \frac{V_2 \times 9 \times 30}{36\,000}$$

$$445\,275 + 919\,537,5 + 1\,476\,375 = 0,99625 V_1 + 0,9925 V_2$$

$$2\,841\,187,5 = 0,99625 V_1 + 0,9925 V_2 \quad \text{or } V_1 = \frac{2V_2}{5}$$

$$2\,841\,187,5 = 0,99625 \times (0,4V_1) + 0,9925V_2$$

$$2\,841\,187,5 = 1,391V_2 \quad \text{soit } V_2 = 2\,042\,550,324 \text{ francs}$$

$$V_1 = 0,4 \times 2\,042\,550,324 \text{ soit } V_1 = 817\,020,1294 \text{ francs}$$

b- la valeur nominale du versement unique.

$$v = \sum v_i \quad \text{soit } V \left(1 - \frac{t n}{36\,000}\right) = 2\,841\,187,5 \quad \text{soit } V = \frac{2\,841\,187,5}{0,991}$$

$$V = 2\,866\,990,414 \text{ francs}$$

c- l'échéance moyenne de trois dettes.

$$n = \frac{\sum V_i n_i}{\sum V_i} \quad \text{soit } n = \frac{450\,000 \times 42 + 930\,000 \times 45 + 1\,500\,000 \times 63}{450\,000 + 930\,000 + 1\,500\,000}$$

$$\text{soit } n = 53,90625$$

$$n \approx 54 \text{ jours}$$