Chapter 1

数论

1.1 一些理论

1.1.1 大整数取模

把大整数写成“从左向右”的形式: 如：$1234 = ((1 * 10 + 2) * 10 + 3) * 10 + 4$. 然后根据 $(n + m)\%p = ((n\%p) + (m\%p))\%p$，每步取模。

```
scanf("%s%d", &s, &p);
int len = strlen(s);
if(s[0] == '0' && len == 1){
    printf("divisible\n");
    continue;
}
if(p < 0) p = -p; //判断负数
int ans = 0, st = 0;
if(s[0] == '-') st = 1;
for(int i = st; i < len; i++){
    ans = (int)(((ll) ans * 10 + s[i] - '0') % p); //注意爆int
}
if(ans == 0) printf("divisible\n");
else printf("not divisible\n");
```

1.1.2 哥德巴赫猜想（$1 + 1$ 问题）

大于 2 的所有偶数都可以表示为两个素数的之和，大于 5 的所有奇数均可以表示为三个素数之和。陈景润证明了：所有大于 2 的偶数均是一个素数和只有两个素数因数的合数之和（$1 + 2$ 问题），称为陈氏定理。

1.1.3 费马小定理

p 是素数，且 $a \,! \equiv 0(mod\ p)$，则：$a^{p-1} \equiv 1(mod\ p)$.

1.1.4 素数定理

$f(x) \approx \frac{x}{ln(x)}$ ($f(x)$ 为不超过 x 的素数的个数)
10^8 级别的素数筛筛选出的素数个数约为 $6 * 10^6$ 级别
10^7 级别的素数筛筛选出的素数个数约为 $7 * 10^5$ 级别

1.1.5 算数基本定理

任何一个大于 1 的自然数 n，若其不为素数则必可唯一的分解为有限个素数的乘积, 即 $n = p_1^{a1} * p_2^{a2} * p_3^{a3} * ... * p_k^{ak}$，那么同时 n 的因子个数为 $num = \prod(a_i + 1)(1 \le i \le k)$【$LightOJ$ 1341】。

1.1.6 $ax+by=c$ 的任意整数解

a,b,c 为任意整数，若 $ax+by=c$ 的一组整数解为 (x_0,y_0), 则它的任意整数解为 (x_0+kb',y_0-ka'). 其中 $a'=\frac{a}{gcd(a,b)}$,$b'=\frac{b}{gcd(a,b)}$,k 取任意整数。

证明：令 $g=gcd(a,b)$. 设另一组解为 (x_1,y_1)，则 $ax_0+by_0=ax_1+by_1(=c)$. 移项：$a(x_1-x_0)=b(y_0-y_1)$. 同除以 g 可得:$\frac{a}{g}*(x_1-x_0)=\frac{b}{g}*(y_0-y_1)$. 令 $a'=\frac{a}{g},b'=\frac{b}{g}$。则 $a'(x_1-x_0)=b'(y_0-y_1)$ 此时 a' 与 b' 互质. 所以:x_1-x_0 一定是 b' 的整数倍，设倍数为 k。则有：$x_1-x_0=kb',y_0-y_1=ka'$，可得：$x_1=x_0+kb',y_1=y_0-ka'$. 结论加强：a,b,c 为任意整数，$g=gcd(a,b)$，方程 $ax+by=g$ 的一组解是 (x_0,y_0). 则当 c 是 g 的倍数时，$ax+by=c$ 的一组解为 $(\frac{x_0*c}{g},\frac{y_0*c}{g})$. 当 c 不为 g 的倍数时 $ax+by=c$ 无整数解。

1.1.7 n 是 m 的倍数，$[1,n]$ 中和 m 互素数个数

对于两个正整数 m 和 n，如果 n 是 m 的倍数，那么 $1\sim n$ 中与 m 互素的数的个数为 $\frac{n}{m}*\phi(m)$.($\phi(m)$ 为小于等于 m 的且与 m 互素的数的个数）

1.1.8 p 为奇素数，$1\sim(p-1)$ 模 p 的逆元对应全部 $1\sim(p-1)$ 中的所有数，既是单射也是满射

也就是 $(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{(p-1)})\ mod(\ p)=(1+2+...+(p-1))\ mod(\ p)$.

1.1.9 调和级数求和

令 $h[n]$ 表示 n 级调和级数的和，即:$h[n]=\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+...+\frac{1}{n}$. 则当 $n>10^6$ 时可以用公式：

$$h[n]=\ log(n*1.0)+\frac{log(n+1.0)}{2.0}+\frac{1.0}{(6.0*n*(n+1))}-\frac{1.0}{(30.0*n*n*(n+1)*(n+1))}+r$$

其中 r 为欧拉常数:$r=0.57721566490153286060651209008240243104215933593992$。上述公式误差不超过 10^{-8}.

1.1.10 如果 $gcd(a,m)=1$, 那么 $gcd(a+k*m,m)=1,k\in Z$

【POJ 2773】

证明: 只需要证明 $gcd(a+m,m)=1$. 令 $d=gcd(a+m,m)$，设 $a+m=d*p_1,m=d*p_2\ p_1>p_2$,, 移项可得:$a=d*(p_1-p_2)$, 如果 $d!=1$，那么 $gcd(a,m)!=1$，与原条件不符，故 $gcd(a,m)=1$，同理可证 $gcd(a+k*m,m)=1,k\in Z$.

1.1.11 指数降幂公式

$$A^x\ \%\ p=A^{x\%\phi(p)+\phi(p)}\ \%\ p\ (x\geq\phi(p))$$

其中 $\phi(p)$ 是 p 的欧拉函数值

1.2 素数筛

```
void GetPrime(int n ) //获得 n 以内的所有质数
{
    prime_cnt = 0;
    int m = sqrt(n + 0.5);
    memset(vis, 0, sizeof(vis));
    for(int i = 2; i <= m; i++){
        if(vis[i] == 0){
            prime[prime_cnt++] = i;
            for(int j = i * i; j < n; j+= i){
                vis[j] = 1;
            }
        }
    }
}

//线性时间素数筛：利用每个合数必有一个最小素因子，每个合数仅被它的最小素因子筛去
//代码核心：if(i % prime[j] == 0) break;
void GetPrime()
{
    prime_cnt = 0;
    memset(vis, 0, sizeof(vis));
    for(int i = 2; i < MAX_N; i++){
        if(vis[i] == 0) { prime[prime_cnt++] = i; }
        for(int j = 0; j < prime_cnt && i * prime[j] < MAX_N; j++){
            vis[i * prime[j]] = 1;
            //将所有合数标记， prime[j] 是 i * prime[j] 的最小素因子
            if(i % prime[j] == 0) break;
        }
    }
}
```

1.2.1 区间素数筛

```
const int MAX_N = 100010; // 最大区间长度

int prime_cnt;
int prime_list[MAX_N];
bool prime[MAX_N]; //prime[i] = true:i + L 是素数

void SegmentPrime(int L, int R)
{
    int len = R - L + 1; // 区间长度
    for(int i = 0; i < len; i++) prime[i] = true; // 初始全部为素数
    int st = 0;
    if(L % 2) st++; // L 是奇数
    for(int i = st; i < len; i += 2) { prime[i] = false; }
    // 相当于 i + L 是合数，把 [L, R] 的偶数都筛掉
    int m = (int)sqrt(R + 0.5);
    for(int i = 3; i <= m; i += 2){ // 用 [3, m] 之间的数筛掉 [L, R] 之间的合数
        if(i > L && prime[i - L] == false) { continue; }
        // i 是 [L, R] 区间内的合数此时, [L, R] 区间中中以 i 为基准的合数已经被筛掉了
        int j = (L / i) * i; // 此时 j 是 i 的倍数中最接近 L 小于等于( L 的数)
        if(j < L) j += i; // j >= L
        if(j == i) j += i;
        // 如果 j>=L 且 j==i 且 i 为素数，则相当于 [L, R] 中的 i 也为素数，所以要 j+=i
        j -= L; // 把 j 调整为 [0, len) 之间
        for(; j < len; j += i) {
            prime[j] = false;
        }
    }
    if(L == 1) prime[0] = false;
```

```
    if(L <= 2) prime[2 - L] = true;    // 特别注意 2 的情况!
    prime_cnt = 0;
    for(int i = 0; i < len; i++){
        if(prime[i]) prime_list[prime_cnt++] = i + L;
    }
}
```

1.3 分解质因数

```
void factor(int x)
{ // factot: 存质因数, factor_cnt[i] :存 factor[i] 的指数, factor_num :质因数的个数
    GetPrime();
    factor_num = 0;
    memset(factor_cnt, 0, sizeof(factor_cnt));
    for(int i = 0; i < prime_cnt && prime[i] * prime[i] <= x; i++){
        if(x % prime[i] == 0){
            int tmp = 0;
            while(x % prime[i] == 0){
                x /= prime[i];
                tmp ++;
            }
            factor[factor_num] = prime[i];
            factor_cnt[factor_num++] = tmp;
        }
    }
}
```

1.3.1 给定 n 求满足 $a^p = n$ 的最大 p

【LightOJ 1220】

需要考虑 n 的正负。对于正数 n 只要对 n 进行质因子分解，然后在所有质因子的幂中找 gcd 即可。对于负整数 n 需要考虑质因子的幂为偶数的情况，因为得到的质因子实际上是它的相反数，如果是偶数次幂的话得到的是正数，所以需要将偶数次幂除以 2 找到把幂变为奇数。例如对于 -16，分解质因子得到 2 和幂次 4. 需要将 $\frac{4}{2}$ 得 2，再除以 2 得 1，所以答案就是 1. 然而对于 $n = -32$ 来说，就不用了，因为得到 2 的幂次是 5 是个奇数，答案就是 5.

1.3.2 求满足 $lcm(i, j) = n(1 \le i \le j \le n \le 10^{14})$ 的 (i, j) 对数

【LightOJ 1236】

假设 n 质因子分解为：$n = p_1^{e_1} * p_2^{e_2} * p_3^{e_3} * ... * p_k^{e_k}$。对于任意 p_i 的幂 e_i，当对 i j 进行质因数分解后，相应的到的 p_i 的幂为 a_i 和 b_i，那么一定满足 $max(a_i, b_i) = e_i$. 如果 $a_i = e_i$，那么 b_i 可以取 $[0, e_i]$，共 $e_i + 1$ 种，如果 $a_i < e_i$，那么 b_i 只取 e_i，这时 a_i 可以取 $[0, e_i)$, 共 e_i 种。合起来一共是 $2 * e_i + 1$ 种。所以对每个质因子这样考虑的话可以得到:$ans = \ (2 * e_i + 1)$. 但是要考虑到 $i \le j$，所以 $ans = \frac{ans}{2}$, 但是上面的考虑在所有的 p_i 当中 $a_i = e_i$ 同时 $b_i = e_i$ 只考虑了一次，也就是 $i = j = n$ 只考虑了一次。所以还要 $ans = ans + 1$.

1.4 逆元

1.4.1 介绍

对于正整数 a, p 满足 $ax \equiv 1(\% \ p)$ 的最小正整数 x 称为 a 的逆元。
乘法逆元的存在条件是：$gcd(a, p) = 1$。
≡：同余符号。$a \equiv b(mod\ n)$ 的含义是"a 和 b 关于模 n 同余"，即 $a\ mod\ n = b\ mod\ n$，其充要条件是:$a - b$ 是 n 的整数倍. 当 $gcd(a, n) = 1$ 时，该方程有唯一解，否则该方程无解。
特例：

1：当 p 是素数且 $a != 0(mod\ p)$ 时由费马小定理可得：$x \equiv a^{(p-2)}(mod\ p)$.
2：已知 $b \mid a$, 则 $(\frac{a}{b})\ mod\ m = \frac{a\ mod\ (mb)}{b}$。这个式子通常用于模数和分母不互素的情况，这样就不能用费马小定理和扩展欧几里德求解，必须将模数扩大为 $m*b$，最后答案除以 b。
证明：假设 $\frac{a}{b}\ mod(m) = x$，
即：$\frac{a}{b} = k*m + x(x < m)$
$-->a = k*b*m + b*x$
$-->a\ mod\ (bm) = bx$
$-->\frac{a\ mod\ (bm)}{b} = x$
$-->\frac{a}{b}\ mod(m) = \frac{a\ mod\ (bm)}{b}\ =\ x$

1.4.2 模素数逆元连乘

如果有的题目需要用到 $1 \sim n$ 模 M 的所有逆元（M 为奇质数），如果用快速幂求解时间复杂度为 $O(M*log(M))$. 实际上有 $O(M)$ 的算法，递推式如下：

$$inv[i] = (M - \frac{M}{i}) * inv[M\ \%\ i]\%M$$

推导过程如下：
设 $t = \frac{M}{i}, k = M\%i --> t*i + k = 0\ (mod\ M) --> -t*i = k\ (mod\ M)$. 两边同时除以 $i*k$ 得：$--> -t*inv[k] = inv[i](mod\ M)$. 再把 t 和 k 替换掉最终得到:

$$inv[i] = (M - \frac{M}{i}) * inv[M\ \%\ i]\%\ M$$

初始化 $inv[1] = 1$. 这样就可以通过递推法求出 $1 \sim n$ 模 M 的所有逆元了。

```
ll inv(ll a, ll p) // 利用 inv[a] = (p - p / a) * inv[p % a] % p 求逆元
{ // 需要保证 a < p 且 gcd(a, p) = 1
    if(a == 1) return 1;
    return inv(p % a, p) * (p - p / a) % p;
}
```

1.5 欧拉函数

1.5.1 介绍

定义：$\phi[n]$: 小于等于 n 且与其互素的正整数的个数
欧拉定理：$a^{\phi(n)} \equiv 1(mod\ n)\ (gcd(a,\ n) = 1)$
特例是费马小定理。利用这个定理求模意义下的乘法逆元:$a^{-1} \equiv a^{\phi(n)-1}(mod\ n)$
性质：

- $\phi(1) = 1$
- $\phi(N) = N \cdot \prod \frac{p-1}{p}$ (p 为 N 的所有素因数)
- $\phi(p^k) = p^k - p^{k-1} = (p-1) \cdot p^{k-1}$, 其中 p 为素数
- $\phi(m*n) = \phi(m) \cdot \phi(n)$，其中 $gcd(m, n) = 1$
- $\sum_{d|n} \phi(d) = n$
- 当 p 为素数时：
$$\phi(t*p) = \begin{cases} p*\phi(t) & t\%p = 0 \\ (p-1)*\phi(t) & t\%p! = 0 \end{cases}$$
- 当 $n > 1$ 时，$1...n$ 中与 n 互质的整数和是 $\frac{n\phi(n)}{2}$
- 当 $n \geq 3$ 时，$\phi[n]$ 是偶数
- 两相邻质数之间合数的欧拉函数值小于较小的素数，所以对于一个数 x 要找到最小的 t 使得 t 的欧拉函数值 $\phi[t] \geq x$ 则 t 必然是大于 x 的第一个素数。

- 若 $(n \% p == 0 \&\& \frac{n}{p} \% p == 0)$ 则有:$\phi(n) = \phi(\frac{n}{p}) * p$;
- 若 $(n \% p == 0 \&\& \frac{n}{p} \% p != 0)$ 则有:$\phi(n) = \phi(\frac{n}{p}) * (p-1)$;

其中 p 是 n 的质因数

1.5.2 求单个数的欧拉函数

求欧拉函数: 先令 $\phi[i] = i$, 根据性质 2，遍历所有素数 p，令 $\phi[kp] = \frac{\phi[kp]}{p} * (p-1)$

```
// 任何一个大于 1 的自然数 n ，若其不为素数则必可唯一的分解为有限个素数的乘积
int Euler(int n)
{
    int ans = 1;
    for(int i = 2; i * i <= n; i++){
        if(n % i == 0){
            n /= i;
            ans *= (i - 1);
            while(n % i == 0){
                n /= i;
                ans *= i;
            }
        }
    }
    if(n > 1) ans *= (n -1);
    return ans;
}
```

```
int Euler(int n)
{
    int res = n, a = n;
    for(int i = 2; i * i <= a; i++){
        if(a % i == 0){
            res = res / i * (i - 1); // 先进行除法防止数据溢出
            while(a % i ==0) a /= i;
        }
    }
    if(a > 1) res = res / a * (a - 1);
    return res;
}
```

1.5.3 欧拉筛

```
void GetPhi() // 埃氏筛
{
    phi[1] = 1;
    for(int i = 2; i < MAX_N; i++){
        if(phi[i] == 0){
            for(int j = i; j < MAX_N; j += i){
                if(!phi[j]) phi[j] = j;
                phi[j] = phi[j] / i * (i - 1);
            }
        }
    }
}
```

```
bitset<MAX_N> bs;
int prime_cnt, prime[MAX_N], phi[MAX_N];
void GetPhi() // 欧拉筛同时获得素数表和欧拉表,
{
    prime_cnt = 0;
    bs.set();
    for(int i = 2; i < MAX_N; ++i ) {
```

```
            if(bs[i] == 1) {
                prime[prime_cnt++] = i;
                phi[i] = i - 1;
            }
            for(int j = 0; j < prime_cnt && i * prime[j] < MAX_N; ++j ) {
                bs[i * prime[j]] = 0;
                if(i % prime[j]) {
                    phi[i * prime[j]] = (prime[j] - 1) * phi[i];
                }else {
                    phi[i * prime[j]] = prime[j] * phi[i];
                    break;
                }
            }
        }
}
```

[UVA 11428 GCD - Extreme (II): 给定 n 求：$G = \sum_{i=1}^{i<N} \sum_{j=i+1}^{j \le N} GCD(i,j) (n \le 4000000)$

令 $sum[n]$ 为题式中答案。考虑递推 $sum[n] = sum[n-1] + gcd(1,n) + gcd(2,n) + gcd(3,n) + ... + gcd(n-1,n)$ 。令 $f[n] = gcd(1,n) + gcd(2,n) + gcd(3,n) + ... + gcd(n-1,n)$. 设满足 $gcd(x,n) = t...$ 的 $x(x<n)$ 的个数有 $h[t]$ 个，显然 x,t 均是 n 的约数, 又因为不包含 $gcd(n,n)$, 所以 $t<n$。将等式 两边同除以 t 可得:$gcd(\frac{x}{t}, \frac{n}{t}) = 1$. 所以 $h[t] = \phi[\frac{n}{t}]$. 那么枚举 n 的约数可以得到:$f[n] = \sum(t * \phi[\frac{n}{t}])$($t$ 为 n 的所有约数) $-n$(相当于去掉 $gcd(n,n)$) 需要预处理 $f[n]$ 然后对于每个 n 有:$sum[i] = sum[i-1] + f[i]$,$sum[1] = 0$; 递推即可。

```
typedef long long ll;
const int MAX_N = 4000010;

int n;
ll phi[MAX_N], f[MAX_N], sum[MAX_N];

void init()
{
    GetPhi();
    memset(f, 0, sizeof(f));
    for(int i = 1; i < MAX_N; i++){
        for(int j = i; j < MAX_N; j += i){
            f[j] += i * phi[j / i];
        }
    }
}

int main()
{
    init();
    while(~scanf("%d", &n) && n){
        sum[1] = 0;
        for(int i = 2; i <= n; i++){
            sum[i] = sum[i - 1] + f[i] - i;
        }
        printf("%lld\n", sum[n]);
    }
    return 0;
}
```

1.6 扩展欧几里德

1.6.1 裴蜀定理

$ax + by = gcd(a,b) \quad (x,y)$.

求解过程：因为 $ax + by = gcd(a,b)$ 且 $gcd(a,b) = gcd(b, a\%b)$。那么有：$bx + (a\%b)y = gcd(b, a\%b)$，

即有:$bx + (a\%b)y = ax + by$. 所以：$bx' + (a - \frac{a}{b} * b)y' = ax + by$ 移项：$ay' + b(x' - \frac{a}{b} * y') = ax + by$. 得到: $x = y', y = (x' - \frac{a}{b} * y')$, 也就是 $x' = y - \frac{a}{b} * x, y' = x$. 所以可以使用递归求解。

```
//需保证系数 a, b 应同为正数，但是求解出来的 x, y 可正可负
int ex_gcd(int a, int b, int& x,int& y)
{
    if(b == 0) {
        x = 1, y = 0;
        return a;
    }
    int r = ex_gcd(b, a % b, y, x);
    y -= a / b * x;
    return r;
}
```

<u>解释 1：$y- = \frac{a}{b} * x$</u>

由前面的推导可知: $x' = y - \frac{a}{b} * x, y' = x$, 其中 x, y 是真正解，x', y' 是递归调用时的下一层的解。所以需要将上一层的 x 传递给下一层的 y'，另一方面因为 x 和 y 是未知的所以不能直接将上一层的 $y - a/b * x$ 传递给下一层的 x'，但是可以先传递 y, 相当于人为的增加了 $\frac{a}{b} * x$, 所以当计算出真正的 x, y 时需要减去 $\frac{a}{b} * x$. <u>解释 2：$x = 1, y = 0$</u>

递归的最后一层的方程式的是：$gcd(a, b) * x + 0 * y = gcd(a, b)$. 要使这个式子恒成立，显然需要 $x = 1$ 递归的倒数第二层的方程式是：$k * gcd(a, b) * x' + gcd(a, b) * y' = gcd(a, b)$. 其中 k 为任意整数。约掉 $gcd(a, b)$ 可得：$k * x' + y' = 1$. 此式要恒成立显然 $x' = 0, y' = 1$。又因为此式中的 $x' = y, y' = x - \frac{a}{b} * y$. 所以 $y = 0$. 当然这时 $y' = x - \frac{a}{b} * y = 1 - \frac{a}{b} * 0 = 1$. 正好也是符合的。

1.6.2 求解逆元 $ax \equiv 1(mod\ n)$ 的最小非负数解

先求解:$ax + ny = gcd(a, n)$. 如果 $gcd(a, n) = 1$, 则 $ans = (x\%n + n)\%n$. 否则无解。所以题目中经常是 n 为一个很大的素数，这样保证了 $gcd(a, n) = 1$.
这里得到的是最小非负数解 x ，如果要求 x 为正数还要在 $return$ 时特判:$if(x == 0)x = n;$

```
int Inv(int a, int n) // Module Inverse 模逆元
{
    int d, x, y;
    d = ex_gcd(a, n, x, y);
    if(d == 1) return (x % n + n) % n;
    // a 和 n 的最小公倍数是 1 此时解存在,
    else return -1; //no solution
}
```

1.6.3 求所有解中 $C = |x| + |y|$ 最小值

假设基础解为 (x_0, y_0), 那么通解可以表示为:$x = x_0 + k * b, y = y_0 - k * a(k\ Z)$。如果令 $x = 0$ 得：$k = -\frac{x_0}{b}...$，令 $y = 0$ 得：$k = \frac{y_0}{a}...$ 当两者同时满足并根据分数的性质:$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{(a+c)}{(b+d)}$ 可得:$k = \frac{(y_0 - x_0)}{(b+a)}$，但是考虑到这个数的真实值可能为浮点数，需要左右考虑。

```
ll solve(ll a, ll b, ll t) // 方程为 a * x + b * y = t
{
    ll x, y, d, res;
    d = ex_gcd(a, b, x, y);
    if(t % d) return -1;
    a /= d, b /= d, t /= d;
    x *= t, y *= t; //此时 x, y 为基础解
    res = (ll)1e18;
    ll tmpx, tmpy, c = (y - x) / (a + b);
    for(int i = c - 1; i <= c + 1; i++){ //左右考虑
        tmpx = x + i * b, tmpy = y - i * a;
        res = min(res, abs(tmpx) + abs(tmpy));
    }
    return res;
}
```

1.6.4 求最小非负整数解 x 和此时的 y

```
ll extra = 0;
if(x < 0) extra = 1;
ll t = x / b - extra;
printf("%lld %lld\n", x - t * b, y + t * a);
```

1.7 模线性方程组

输入正整数 a, b, n，解方程 $ax\ b(mod\ n).a, b, n \leq 10^9$

把 $ax \equiv b(modn)$ 转化为 $ax - ny = b$, 当 $d = gcd(a, n)$ 不是 b 的约数时无解，否则两边同时除以 d，得到 $a'x - n'y = b'$，即 $ax' \equiv b'(modn')$(这里 $a' = \frac{a}{d}, b' = \frac{b}{d}, n' = \frac{n}{d}$). 此时 a' 和 n' 已经互素，因此只需要左乘 a' 在模 n' 下的逆，则解为 $x\ (a')^{-1} * b'(mod\ n')$，这个解是模 n' 剩余系中的一个元素。还需要把解表示成模 n 剩余系中的元素。
令 $p = (a')^{-1} * b'$，上述解相当于 $x = p, p + n', p + 2 * n', p + 3 * n' ...$。对于模 n 来说，假定 $p + i * n'$ 和 $p + j * n'$ 同余，则 $(p + i * n') - (p + j * n') = \ i - j) * n'\ n$ 的倍数。因此 $(i - j)$ 必须是 d 的倍数。也就是说，在模 n 剩余系下，$ax \equiv b(modn)$ 恰好有 d 个解，为 $p, p + n', p + 2 * n', ..., p + (d - 1) * n'$.

1.7.1 利用扩展欧几里德求解模线性同余方程 $ax \equiv b(modn)$

如果 $gcd(a, b)$ 不能整除 c 则 $ax + by = c$ 无整数解。对于 $ax \equiv b(modn)(n > 0)$, 上式等价于二元一次方程 $ax - ny = b$

```
bool ModularLinearEquation(int a, int b, int n)
{
    int x, y, x0;
    int d = ex_gcd(a, n, x, y); //d = gcd(a,n)
    if(b % d) return false; // d 不能整除b
    x0 = x * (b / d) % n; //basic solution
    for(int i = 1;i <= d; i++){
        printf("%d\n", (x0 + i * (n / d) % n));
    }
    return true;
}
```

[SGU 106] 给出 $a, b, c, x_1, x_2, y_1, y_2$ 求满足 $ax + by + c = 0$ 且 $x \in [x_1, x_2]$,$y \in [y_1, y_2]$ 的 x, y 有多少组。

相当于问在直线 $ax + by + c = 0$ 上有多少整点 (x, y) 满足 $x \in [x_1, x_2]$,$y \in [y_1, y_2]$. 扩展欧几里德的应用。需要特别注意 $a = 0, b = 0, c = 0$ 的特判。

```
typedef long long ll;
double eps = 1e-8;

ll a, b, c, x1, yy1, x2, y2, ans;

ll ex_gcd(ll n, ll m, ll& x, ll& y) // 返回值是 gcd(a, b)
{
    if(m == 0){
        x = 1, y = 0;
        return n;
    }
    ll d = ex_gcd(m, n % m, y, x);
    y -= n / m * x;
    return d;
}

void ModularLinearEquation() // 模线性方程组
{
    ll x, y, x0, y0;
    ll d = ex_gcd(a, b, x, y);// 求解方程ax+by=gcd(a, b)
    if(c % d) {
        printf("0\n");
```

```
            return ;
        }
        // 此时的 x, y 是方程 ax + by = gcd(a, b) 的一组基础解
        a /= d, b /= d, c /= d;
        x0 = x * c, y0 = y * c; // x0, y0 是 ax + by = c 的一组基础解
        // a * x + b * y = c 通解满足： a * (x0 + k * b) + b * (y0 - k * a) = c
        //所以： x' = x0 + k * b ..., y' = y0 - k * a ..., k  Z
        //先求出满足 1:x1 <= x0 + k * b <= x2 的 k 的范围 [l1, r1]
        //再求出满足 2:yy1 <= y0 - k * a <= y2 的 k 的范围 [l2, r2] 两者取交集即可
        //l1 = ceil((x1 - x0)/b, )r1 = floor((x2 - x0)/b)
        //l2 = ceil((y0 - y2)/a), r2 = floor((y0 - yy1)/a)
        ll l1 = (ll)ceil((double)(x1 - x0) / b);
        ll r1 = (ll)floor((double)(x2 - x0) / b);
        ll l2 = (ll)ceil((double)(y0 - y2) / a);
        ll r2 = (ll)floor((double)(y0 - yy1) / a);
        ll l = max(l1, l2), r = min(r1, r2);
        ans = (r - l + 1 < 0) ? 0 : (r - l + 1);
        printf("%lld\n", ans);
        return ;
}

int main()
{
        while(~scanf("%lld%lld%lld", &a, &b, &c)){
            scanf("%lld%lld%lld%lld", &x1, &x2, &yy1, &y2);
            int flag = 0;
            c = -c; // 移项，得到方程a * x + b * y = -c
            // 下面将方程的所有系数 a, b, c 变为非负数
            if(c < 0){
                c = -c , a = -a, b = -b;
            }
            if(a < 0){
// 需要将 a 取相反数，相当于把 x 也取了相反数，所以需要将 [x1, x2] 的范围变为[-x2, -x1]
                ll tmpx1 = x1, tmpx2 = x2;
                x1 = -tmpx2, x2 = - tmpx1;
                a = -a;
            }
            if(b < 0){ // 同理
                ll tmpyy1 = yy1, tmpy2 = y2;
                yy1 = -tmpy2, y2 = -tmpyy1;
                b = -b;
            }

            if(a == 0 && b == 0) { //0 * x + 0 * y = c
                flag = 1;
                if(c == 0) ans = (x2 - x1 + 1) * (y2 - yy1 + 1);
                else ans = 0;
            }else if(a == 0){  // b != 0
                flag = 1;
                if(c % b == 0){ // 0 * x + b * y = c --> b * y = c
                    ll tmpy = c / b;
                    if(yy1 <= tmpy && tmpy <= y2) ans = x2 - x1 + 1;
                    else ans = 0;
                }else ans = 0;
            }else if(b == 0) { //a != 0
                flag = 1;
                if(c % a == 0) { // a * x + 0 * y = c --> a * x = c
                    ll tmpx = c / a;
                    if(x1 <= tmpx && tmpx <= x2) ans = y2 - yy1 + 1;
                    else ans = 0;
                }else ans = 0;
            }
            // 以上处理完了 a = 0 或者 b = 0 的所有特例
            if(flag)  printf("%lld\n", ans);
            else ModularLinearEquation();
```

```
    }
    return 0;
}
```

1.8 中国剩余定理

给定整数 n 和 n 个整数 $a[i], m[i]$, 求满足方程 $x \equiv a[i](mod\ m[i])(0 \le i < n)$ 的最小正整数解。

例如求解：满足 $n = 3, a[0] = 2, m[0] = 3, a[1] = 3, m[1] = 5, a[2] = 2, m[2] = 7$. 即：
$n\%3 = 2 - - > 5*7*a\%3 = 1 - - > a = 2, a[0] = 2 \therefore a = 4$ 得 $5*7*4$
$n\%5 = 3 - - > 3*7*b\%5 = 1 - - > b = 1, a[1] = 3 \therefore b = 3$ 得 $3*7*3$
$n\%7 = 2 - - > 3*5*c\%7 = 1 - - > c = 1, a[2] = 2 \therefore c = 2$ 得 $3*5*2$
累加得：$5*7*4+3*7*3+3*5*2 = 233$
取余得：$233\%(3*5*7) = 23$, 所以最终答案就是 23

1.8.1 模数互素

```
//前提条件： m[i] > 0 且, m[i] 中任意两数互质
ll CRT(ll a[], ll m[], ll n)
{ // Chinese Remainder Theorem
    ll M = 1, ans = 0;
    for(int i = 0; i < n; i++) { M *= m[i]; }
    for(int i = 0; i < n; i++){
        ll x, y, e;
        e = M / m[i];
        ex_gcd(e, m[i], x, y);
        ans = (ans + e * x % M * a[i] % M) % M;
    }
    return (ans + M) % M; //最小正整数解
}
```

1.8.2 模数不互素

当 m[i] 不满足两两互素时，假设 $x \equiv a1(mod\ m1)...(1), x \equiv a2(mod\ m2)...(2)$.
令 $d = gcd(m1, m2)$. 由 (1)(2) 得：$x = a1+m1*k1, x = a2+m2*k2$. 合并可得：$m1*k1 = (a2-a1)+m2*k2$
两边同除以 d 得：$m1/d*k1 = (a2-a1)/d+m2/d*k2$.
也就是：$m1*k1/d\ (a2-a1)/d(mod\ m2/d)$.
也就是：$m1*k1 = (a2-a1)(mod\ m2)$.
易知 $k1$ 有多个解，假设 k' 为 $k1$ 的最小非负整数解则：$k1 \equiv k'(mod\ m2/d)$
即：$k1 = k'+(m2/d)*C$（C 为某一整数）. 将其带入 $x = a1+m1*k1$
可得：$x = a1+m1*(k'+m2/d*C)$
也就是：$x = a1+m1*k'+m1*m2/d*C$。
也就是: $x = (a1+m1*k')(mod\ m1*m2/d)$
也就是: $x = (a1+m1*k')(mod\ lcm(m1, m2))....(3)$;
那么求解出 k' 后，就可以将方程 (1)(2) 合并为一个方程 (3) 了，依次迭代就能出解了。
[HDU 1573 X 问题]: 求解在 $(0, N]$ 区间满足 $x \equiv a[i](mod\ m[i])(0 \le i < M)$ 的 x 的个数。

利用中国剩余定理求解出最小非负整数解 $a0$(如果有解) 和解的周期 $m0$, 假设解的个数为 k 个则：$a0+k*m0 <= N - - > k <= (N-a0)/m0$ $(N >= a0)$。当 $a0 = 0$ 时解的个数是 $(N-a0)/m0$. 当 $a0 > 0$ 时解的个数是 $(N-a0)/m0+1$.

```
typedef long long ll;
const int MAX_N = 15;

int T, M;
ll N, a0, m0, a[MAX_N], m[MAX_N];

ll ex_gcd(ll aa, ll bb, ll& xx, ll& yy)
{
```

```
    if(bb == 0) {
        xx = 1, yy = 0;
        return aa;
    }
    ll dd = ex_gcd(bb, aa % bb, yy, xx);
    yy -= aa / bb * xx;
    return dd;
}

//求解: m0 * x = (aa - a0) (mod mm)
bool ModularLinearEquation(ll& m0, ll& a0, ll mm, ll aa)
{
    ll x, y, d;
    d = ex_gcd(m0, mm, x, y);
    if(labs(aa - a0) % d != 0) return false;
    mm /= d;
    x = x * (aa - a0) / d % mm;
    a0 += x * m0;
    m0 *= mm;
    a0 = (a0 % m0 + m0) % m0;
    return true;
}

bool CRT(ll& m0, ll&a0)
{
    bool flag = true;
    m0 = 1, a0 = 0; //任意数 mod m0 = a0 恒成立
    for(int i = 0; i < M; i++){
        if(ModularLinearEquation(m0, a0, m[i], a[i]) == false){
            flag = false;
            break;
        }
    }
    return flag;
}

int main()
{
    scanf("%d", &T);
    while(T--){
        scanf("%lld%d", &N, &M);
        for(int i = 0; i < M; i++){
            scanf("%lld", &m[i]);
        }
        for(int i = 0; i < M; i++){
            scanf("%lld", &a[i]);
        }
        if(CRT(m0, a0) == false || N < a0) printf("0\n");
        else {
            //printf("a0 = %lld m0 = %lld\n", a0, m0);
            printf("%lld\n", (N - a0) / m0 + (a0 == 0 ? 0 : 1));
        }
    }
    return 0;
}
```

1.9 法雷级数

1.9.1 介绍

真分数：若 p,q 是正整数，$0 < \frac{p}{q} < 1$，则称 $\frac{p}{q}$ 为真分数。
定理：若 $\frac{a}{d}, \frac{c}{d}$ 是最简真分数（也可以是 $\frac{0}{1}, \frac{1}{1}$），且 $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ 则有：

- 数 $\frac{a+c}{b+d}$ 是一个最简真分数
- $\frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d}$

1.9.2 n 级法雷数列

对于任意给定的自然数 n，将分母小于等于 n 的不可约的真分数按升序排列，并且在第一个分数之前加上 $\frac{0}{1}$，在最后一个分数之后加上 $\frac{1}{1}$, 这个序列称为 n 级法雷数列，用 F_n 表示。例如：F_5 $\frac{0}{1}, \frac{1}{5}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{2}{5}, \frac{1}{2}, \frac{3}{5}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{1}{1}$.

1.9.3 法雷数列的构造

应用上面的定理，如果 $\frac{a}{b}$ $\frac{c}{d}$ 是一个法雷数列，则在它们中间可以插入 $\frac{(a+c)}{(b+d)}$，这样一直二分构造，直到不能构造为止 (分母大于 n). 例如 F_5 的构造:
$step1$: 在 $\frac{0}{1}$ 和 $\frac{1}{1}$ 之间插入 $\frac{1}{2}$ 可得：$\frac{0}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{1}$
$setp2$: 在每对相邻两个数之间插入 1 个数得：$\frac{0}{1}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{1}{1}$
$setp3$ 重复上述操作 $\frac{0}{1}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{2}{5}, \frac{1}{2}, \frac{3}{5}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{1}{1}$
$setp4$: 重复上述操作需保证分母不大于 5 $\frac{0}{1}, \frac{1}{5}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{2}{5}, \frac{1}{2}, \frac{3}{5}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{1}{1}$
构造结束。

1.9.4 求 n 级法雷级数个数

设 F_n 的个数为 $f[n]$ 个，则 Fn 比 $F(n-1)$ 增加的的分母是 n，所以增加的个数是分子比 n 小且与 n 互质的数个数，这就是欧拉函数 $\phi[n]$！
递推式：$f[n] = f[n-1] + phi[n]$。所以有 $f[n] = 1 + \phi[1] + \phi[2] + ... + \phi[n]$。

1.9.5 性质

- 因为 $n \geq 3$ 时，欧拉函数 $\phi[n]$ 是偶数，由此可得: 除 $f[1] = 2$ 是偶数外，法雷级数其他各级的个数都是奇数。
- 如果 $\frac{a}{b}, \frac{c}{d}$ 是相邻的两项, 则 $abs(a*d - b*c) = 1$
- 如果 $\frac{a}{b}, \frac{c}{d}, \frac{e}{f}$ 是相邻的三项，则 $\frac{a+e}{b+f} = \frac{c}{d}$。

```
// 求 MAX_N 以内每个数的法雷数
int f[MAX_N];
void GetFarey()
{
    GetEuler(); //先筛得欧拉表
    f[1] = 2;
    for(int i = 2; i < MAX_N; i++){
        f[i] = f[i - 1] + phi[i];
    }
    for(int i = 1; i < 10; i++){
        printf("%d ", f[i]);
    }
    printf("\n");
}
```

可以边筛素数边计算欧拉函数

```
void GetFarey()
{
    memset(phi, 0, sizeof(phi));
    phi[1] = 1;
    for(int i = 2; i < MAX_N; i++){
        if(phi[i] == 0){   // i 同时也是素数
            for(int j = i; j < MAX_N; j += i){
                if(phi[j] == 0) phi[j] = j;
                phi[j] = phi[j] / i * (i - 1);
            }
        }
```

```
    }
    f[1] = 2;
    for(int i = 2; i < MAX_N; i++){
        f[i] = f[i - 1] + phi[i];
    }
}
```

构造 n 级法雷级数

```
int farey[MAX_N][2], total;
// faery[i][0],farey[i][1] 分别是第 i 个 farey 数列的分子和分母
void Make_Farey_Sequence(int a, int b, int c, int d)
{
    if(a + c > n || b + d > n) return ;
    Make_Farey_Sequence(a, b, a + c, b + d);
    // 保证了法雷序列的有序性
    farey[total][0] = a + c;
    farey[total++][1] = b + d;
    Make_Farey_Sequence(a + c, b + d, c, d);
}

int main()
{
    scanf("%d", &n);
    farey[0][0] = 0, farey[0][1] = 1;
    total = 1;
    Make_Farey_Sequence(0, 1, 1, 1);
    farey[total][0] = 1;
    farey[total++][1] = 1;
    for(int i = 0; i < total; i++){
        printf("%d/%d\n", farey[i][0], farey[i][1]);
    }
    printf("\n");
}
```

1.10 原根

1.10.1 介绍

定义：设 $m > 1, gcd(a, m) = 1$, 使得 $a^r \equiv 1(mod\ m)$ 成立的最小 r，成为 a 对模 m 的阶。
定义 1：如果 a 模 m 的阶等于 $\phi(m)$，则称 a 为模 m 的一个原根。
定义 2：在模运算中，若存在一个整数 g 使得式子 $g^k\ a(mod\ n)$,$1 \le k < n$ 结果 a 各不相同，则称 g 为模 n 的一个原根。
例如：
$3^1 = 3\ \ = 3^0 * 3 = 1\times 3 = 3 \equiv 3(mod\ 7)$
$3^2 = 9\ \ = 3^1 * 3 = 3\times 3 = 9 \equiv 2(mod\ 7)$
$3^3 = 27\ \ = 3^2 * 3 = 2\times 3 = 6 \equiv 6(mod\ 7)$
$3^4 = 81\ \ = 3^3 * 3 = 6\times 3 = 18 \equiv 4(mod\ 7)$
$3^5 = 243 = 3^4 * 3 = 4\times 3 = 12 \equiv 5(mod\ 7)$
$3^6 = 729 = 3^5 * 3 = 5\times 3 = 15 \equiv 1(mod\ 7)$
所以 3 为模 7 的一个原根。
定理：

- 模 m 有原根的充要条件是：$m = 2, 4, p^a, 2 * p^a(p$ 为奇素数）
- 如果模 m 有原根，那么一共有 $\phi((\phi(m))$ 个原根。$\phi(m)$ 为欧拉函数值
- 如果 p 为素数，那么 p 一定存在原根，且模 p 的原根的个数为 $\phi(p-1)$.

1.10.2 求模素数 p 的所有原根

对 $p-1$ 素因子分解, 即 $p-1=p_1^{a_1}*p_2^{a_2}*p_3^{a_3}*...*p_k^{a_k}$ 是 $p-1$ 的标准分解式，若恒有 $g^{\frac{p-1}{p_i}}!=1(mod\ p)$ 成立则 g 就是 p 的原根。枚举 $g:2\sim p-1$. 对于合数求原根只需把 $p-1$ 换成 $\phi(p)$ 即可。

```
int factor[MAX_N], factor_cnt;
void Factor(int x) // 获得 x 的所有素因数
{
    factor_cnt = 0;
    int t = (int) sqrt(x + 0.5);
    for(int i = 0; prime[i] <= t; i++){
        if(x % prime[i] == 0){
            factor[factor_cnt++] = prime[i];
            while(x % prime[i] == 0) x /= prime[i];
        }
    }
    if(x > 1) factor[factor_cnt++] = x;
}

ll quick_pow(ll a, ll b, ll m)
{
    ll ans = 1, tmp = a % m;
    while(b){
        if(b & 1) ans = ans * tmp % m;
        tmp = tmp * tmp % m;
        b >>= 1;
    }
    return ans;
}

int ans[MAX_N];
int main()
{
    int p, total;
    GetPrime();
    while(~scanf("%d", &p)){
        Factor(p - 1);
        total = 0;
        for(int g = 2; g < p; g++){
            bool flag = true;
            for(int i = 0; i < factor_cnt; i++){
                int t = (p - 1) / factor[i];
                if(quick_pow(g, t, p) == 1){
                    flag = false;
                    break;
                }
            }
            if(flag){
                ans[total++] = g;
            }
        }
        for(int i = 0; i < total; i++){
            printf("%d\n", ans[i]);
        }
    }
}
```

1.11 *BSGS* 算法

BSGS 算法用于求解:$a^x=b(mod\ p)$ 在已知 $a\in[2,p), b\in[1,p)$,(p 为质数) 的情况下的最小解 x。
时间复杂度 $O(\sqrt{p})$。
令 $x=i*m+j$，其中 $m=ceil(\sqrt{p})\ 0\le i<m, 0\le j<m$，那么就相当于求解：$a^{i*m+j}\equiv b(mod\ p)-->a^j=b*a^{-i*m}(mod\ p), a^{-i*m}$ 是 a^{i*m} 模 p 的逆元。所以可以先处理出 $a^j(mod\ p)$ 的答案放入一个 *hash*

表中【$BabyStep$】，然后枚举 $i : 0 \sim m$【$GaintStep$】，查找 $b * a^{-i*m}(mod\ p)$ 是否在 $hash$ 表中出现，如果出现，令出现的编号为 id, 则答案就是 $id + i * m$. 在时间允许的情况下，$hash$ 表采用 map 也可以。为什么枚举 $i < m$ 就可以了呢？显然枚举 $i < m$ 就枚举完了 $x < p$ 的所有情况, 当 $x \geq p$ 时可以令 $x = k * p + t(t < p)$，则 $a^x(mod\ p) = a^{k*p+t}(mod\ p) = a^{k*p} * a^t(mod\ p) = a^{k*k}(mod\ p) * a^t(mod\ p)$. 由费马小定理得:$a^p \equiv 1(mod\ p)$ （p 为素数），那么 $a^x(mod\ p) = 1^k(mod\ p) * a^t(mod\ p) = a^t(mod\ p)$。所以只需要枚举所有 x 小于 p 的情况就可以了，也就是枚举 $i < m$ 就可以了 (m 是向上取整的).

```
const ll MOD = 100007;
ll hs[MOD + 100], id[MOD + 100];

ll find(ll x)
{
    ll t = x % MOD;
    while(hs[t] != x && hs[t] != -1) t = (t + 1) % MOD;
    return t;
}

void insert(ll x, ll ii)
{
    ll pos = find(x);
    if(hs[pos] == -1){
        hs[pos] = x;
        id[pos] = ii;
    }
}

ll get(ll x)
{
    ll pos = find(x);
    return hs[pos] == x ? id[pos] : -1;
}

ll inv(ll a, ll p) //求解: a * x   1 (mod p)
{
    ll x, y, d;
    d = ex_gcd(a, p, x, y); // ax + py = gcd(a, p) 本段代码省略了ex_gcd()
    return d == 1 ? (x % p + p) % p : -1;
}

ll BSGS(ll a, ll b, ll p)
{//求解a^x    b (mod p)
    memset(hs, -1, sizeof(hs));
    memset(id, -1, sizeof(id));
    ll m = (ll)ceil(sqrt( p + 0.5));
    ll tmp = 1;
    for(ll i = 0; i < m; ++i) {
        insert(tmp, i);
        tmp = tmp * a % p;
    }
    ll base = inv(tmp, p); //tmp = a ^ m % p
    ll res = b;
    for(ll i = 0; i < m; ++i) {
        if(get(res) != -1) return i * m + get(res);
        res = res * base % p;
    }
    return -1;
}
```

1.11.1 扩展 $BSGS(gcd(a,p)\ != \ 1)$

初始化 $cnt = 0$(消因子轮数), $d = 1$(消掉的 gcd 乘积). 令 $tmp = gcd(a,p)$ 当 $tmp! = 1$ 时, 修改变量值:$b/ = tmp$(先判断 b 是否是 tmp 的倍数), $p\ / = \ tmp, d = \frac{a}{tmp} * d\ \%p$; 通过若干轮消掉 a, p 的因子使得最终 $gcd(a,p) = 1$. 这时再调用普通的 $BSGS$ 得到解为 res，则最终答案是 $res + cnt$。但是这样求得的解是

$\geq cnt$ 的，需要先判断下是否有 $< cnt$ 的解。考虑 cnt 的最大值。因为每次消去的最小因子是 2，可以得到 cnt 的最大值是 log_2p，先跑一遍 50 次遍历的循环是绰绰有余的。

```
ll gcd(ll x, ll y)
{
    return y == 0 ? x : gcd(y, x % y);
}

ll solve(ll a, ll b, ll p)
{
    ll tmp = 1;
    for(int i = 0; i <= 50; ++i) {
        if(tmp == b) return i;
        tmp = tmp * a % p;
    }
    ll cnt = 0, d = 1 % p;
    while((tmp = gcd(a, p)) != 1) {
        if(b % tmp) return -1;
        b /= tmp;
        p /= tmp;
        d = a / tmp * d % p;
        cnt++;
    }
    b = b * inv(d, p) % p;
    ll ans = BSGS(a, b, p); // 这里就是调用普通的BSGS
    if(ans == -1) return -1;
    else return ans + cnt;
}
```

1.12 莫比乌斯反演

1.12.1 积性函数

定义域为 N^+ 的函数 f，对于任意两个互质的正整数 $a, b : gcd(a, b) = 1$，均满足 $f(ab) = f(a) * f(b)$，则函数 f 被称为积性函数。假如对于任意两个正整数 a, b 均有 $f(ab) = f(a) * f(b)$，则称 f 为完全积性函数。
欧拉函数时积性函数，但不是完全积性函数。
积性函数的性质：

- $f(1) = 1$

- 考虑一个大于 1 的正整数 N，设 $N = \prod p_i^{a_i}$, 其中 p_i 为互不相同的质数，那么对于一个积性函数 f,$f(N) = f(\prod p_i^{a_i}) = \prod f(p_i^{a_i})$, 如果 f 还满足完全积性，则 $f(N) = \prod f(p_i)^{a_i}$

- 若 $f(n), g(n)$ 均为积性函数，则函数 $h(n) = f(n)g(n)$ 也为积性函数。

- 若 $f(n)$ 为积性函数，则函数 $F(n) = \sum_{d|n} f(d)$ 也是积性函数，反之亦然。

1.12.2 狄利克雷卷积

对于函数 f, g, 定义它们的卷积为 $(f * g)(n) = \sum_{d|n} f(d)g(\frac{n}{d})$。
性质：

- $f*(g*h) = (f*g)*h$
- $f*(g + h) = f*g + f*h$
- $f*g = g*f$
- 两个积性函数的狄利克雷卷积仍是积性函数

1.12.3 莫比乌斯反演公式

$$F(n) = \sum_{d|n} f(d) \to f(n) = \sum_{d|n} \mu(d)F(\frac{n}{d})$$

$$F(n) = \sum_{n|d} f(d) \to f(n) = \sum_{n|d} \mu(\frac{d}{n})F(d)$$

1.12.4 莫比乌斯函数 μ

- $$\mu(d) = \begin{cases} 1 & n = 1 \\ (-1)^k & n = p_1 p_2 \dots p_k (p_i \textit{ are all prime numbers}) \\ 0 & \textit{other cases} \end{cases}$$

- $\sum_{d|n} \mu(d) = (n == 1?1 : 0)$

- 对任意正整数 n 有:$\sum_{d|n} \frac{\mu(d)}{d} = \frac{\phi(n)}{n}$

设 $f(n) = \sum_{d|n} \phi(d)$, 又有 $\sum_{d|n} \phi(d) = n$, 所以 $f(n) = n$, 根据莫比乌斯反演可得:
$\phi(n) = \sum_{d|n} \mu(d)f(\frac{n}{d}) = \sum_{d|n} \frac{\mu(d)n}{d}$

1.12.5 线性筛求解积性函数

观察线性筛中的步骤，筛掉 n 的同时还得到了它的最小质因数 p，我们希望知道 p 在 n 中的次数，这样就能利用 $f(n) = f(p^k)f(\frac{n}{p^k})$ 求出 $f(n)$.
令 $n = pm$，由于 p 是 n 的最小质因子，若 $p^2|n$, 则 $p|m$ 并且 p 也是 m 的最小质因子，这样在筛的同时记录每个合数最小质因子的次数，就能算出新筛去合数最小质因子的次数。但是这样时不够的，我们需要快速求出 $f(p^k)$，这时就要结合 f 函数的性质考虑。
例如欧拉函数 ϕ $\phi(p^k) = (p-1)p^{k-1}$ 因此在进行筛时，如果 $p|m$, 就乘上 p, 否则乘上 $p-1$. 而对于莫比乌斯函数 μ，只有当 $k = 1$ 时 $\mu(p^k) = -1$，$\mu(p^k) = 0$，和欧拉函数一样根据 m 是否被 p 整除进行判断。

```
void GetMu()
{
    memset(vis, 0, sizeof(vis));
    mu[1] = 1;
    prime_cnt = 0;
    for(int i = 2; i < MAX_N; i++) {
        if(vis[i] == 0) {
            prime[prime_cnt++] = i;
            mu[i] = -1;
        }
        for(int j = 0; j < prime_cnt && i * prime[j] < MAX_N; j++) {
            vis[i * prime[j]] = 1;
            if(i % prime[j]) mu[i * prime[j]] = -mu[i];
            else{
                mu[i * prime[j]] = 0;
                break;
            }
        }
    }
}
```

[ZOJ 3435]:$\sum_{i=0}^{i=a}\sum_{j=0}^{j=b}\sum_{k=0}^{k=c}[gcd(i,j,k) == 1], a, b, c \in [1, 1000000]$

1. 当 $i = j = k = 0$ 时是不成立的。
2. 当 i, j, k 中有两个为 0 时, 只有三种情况 $(0, 0, 1), (0, 1, 0), (1, 0, 0)$.
3. 当 i, j, k 中有一个为 0 时, 相当于求 $gcd(i, j) = 1, gcd(i, k) = 1, gcd(j, k) = 1)$ 的对数。
4. 当 i, j, k 均大于 0 时，相当于求 $gcd(i, j, k) = 1(i \in [1, a], j \in [1, b], k \in [1, c])$ 的对数。

对于 3.4 两种情况用莫比乌斯反演即可。

```
GetMu();
int a, b, c;
while(~scanf("%d%d%d", &a, &b, &c)){
a--, b--, c--;
if(a > b) swap(a, b);
if(a > c) swap(a, c);
if(b > c) swap(b, c);
// a <= b <= c
ll ans = 3, tmp;
int last, x, y, z;
for(int i = 1; i <= b; i = last + 1) { // 注意枚举的范围
    last = i;
    x = a / i, y = b / i, z = c / i;
    if(i <= a){
        last = min(a / x, b / y);
        last = min(last, c / z);
    }else { // 防止出现除以0
```

```
        last = min(b / y, c / z);
    }
    tmp = (ll) x * y * z + (ll)x * y + (ll)x * z + (ll)y * z;
    ans += tmp * (sum[last] - sum[i - 1]);
}
printf("%lld\n", ans);
```

$gcd(x, y) = p$ (p 为质数,$x \in [1, n], y \in [1, m]$), 有序对 (x, y) 有多少对？ $n, m \in [1, 10^7]$

$(2, 3)$ 和 $(3, 2)$ 是不同的有序对
定义:$f(d)$ 为满足 $gcd(x, y) = d$ $(x \in [1, n], y \in [1, m]$ 的 (x, y) 的对数。
定义:$F(d)$ 为满足 $d \mid gcd(x, y)$ $(x \in [1, n], y \in [1, m]$ 的 (x, y) 的对数。
那么有:$F(n) = \sum_{n|d} f(d) = \frac{n}{d} * \frac{m}{d}$, 根据第二种形式的莫比乌斯反演有:

$$f(x) = \sum_{x|d} \frac{\mu(d)}{x} F(d) = \sum_{x|d} \mu(\frac{d}{x}) * \frac{n}{d} * \frac{m}{d}$$

题目要求是求 $gcd(x, y)$ 为质数, 对于每个质数 p 相当于求 $x \in [1, \frac{n}{p}], y \in [1, \frac{m}{p}]$ 的 $gcd(x, y) = 1$ 的有序对 (x, y) 的对数. 我们枚举每个质数 p，就有 $ans = \sum_{p}^{min(n,m)} (\sum_{d}^{min(n,m)} \mu(d) * \frac{n}{pd} * \frac{m}{pd})$, 直接枚举的话会 TLE, 所以继续优化。令 $T = pd$，那么可得:$ans = \sum_{p}^{min(n,m)} (\sum_{d}^{min(n,m)} \mu(d) * \frac{n}{T} * \frac{m}{T}) = \sum_{T=1}^{min(n,m)} \frac{n}{T} * \frac{m}{T} * (\sum_{p|T} \mu(\frac{T}{p}))$. 所以我们可以预处理出所有的 T 对应的 $\sum_{p|T} \mu(\frac{T}{p})$.
设 $sum(x) = \sum_{p|x} \mu(\frac{x}{p})$, 这里 p 为素数, 令 $g(x) = \mu(\frac{x}{p})$. 我们枚举每一个 k, 得到 $g(kx) = \mu(\frac{kx}{p})$, 分情况讨论有:

- $x\%k == 0$,

$$g(kx) = \begin{cases} \mu(x) & k = p \\ 0 & k! = p \end{cases}$$

- $x\%k! = 0$,

$$g(kx) = \begin{cases} \mu(x) & k = p \\ \mu(x) - g(x) & k! = p \end{cases}$$

$\lfloor \frac{N}{d} \rfloor$ 的取值只有 $2\lfloor\sqrt{N}\rfloor$ 种, 同理 $\lfloor \frac{M}{d} \rfloor$ 的取值也只有 $2\lfloor\sqrt{M}\rfloor$ 种，并且相同取值对应的 d 是一个连续的区间，因此 $\lfloor \frac{N}{d} \rfloor$ 和 $\lfloor \frac{M}{d} \rfloor$ 都相同的区间最多有 $2\lfloor\sqrt{N}\rfloor + 2\lfloor\sqrt{M}\rfloor$ 个，这样 d 的枚举量就缩小为 $O(\sqrt{N} + \sqrt{M})$ 了。

```
typedef long long ll;
const int MAX_N = 10000010;

bitset<MAX_N> bs;
int prime_cnt, prime[MAX_N];
ll g[MAX_N], mu[MAX_N], sum[MAX_N];
//主函数中调用GetMu()
void GetMu()
{
    bs.set();
    mu[1] = 1;
    prime_cnt = 0;
    for(int i = 2; i < MAX_N; ++i) {
        if(bs[i]) {
            prime[prime_cnt++] = i;
            mu[i] = -1;
            g[i] = 1;
        }
        for(int j = 0; j < prime_cnt && i * prime[j] < MAX_N; ++j) {
            bs[i * prime[j]] = 0;
            if(i % prime[j]) {
                mu[i * prime[j]] = - mu[i];
                g[i * prime[j]] = mu[i] - g[i];
            }else {
```

```
                mu[i * prime[j]] = 0;
                g[i * prime[j]] = mu[i];
                break;
            }
        }
    }
    for(int i = 1; i < MAX_N; ++i) {
        sum[i] = sum[i - 1] + g[i];
    }
}

inline ll solve(int n, int m)
{
    int top = min(n, m), last;
    ll ans = 0;
    for(int i = 1; i <= top; i = last + 1) {
        last = min(n / (n / i), m / (m / i));
        ans +=(ll) (n / i) * (m / i) * (sum[last] - sum[i - 1]);
    }
    return ans;
}
```

[BZOJ 2154]:$\sum_{i=1}^{i=n}\sum_{j=1}^{j=m} lcm(i,j)\ \%\ 100000009\ \ (n,m \le 10^7)$

$$\begin{aligned} ans &= \sum_{d=1}^{d=n}\sum_{i=1}^{i=n}\sum_{j=1}^{j=m}\frac{i*j}{d}\ (gcd(i,j)=d) \\ &= \sum_{d=1}^{d=n}]\sum_{i=1}^{\frac{n}{d}}\sum_{j=1}^{\frac{m}{d}}\frac{i*j*d^2}{d}(gcd(i,j)=1) \\ &= \sum_{d=1}^{n} d\sum_{i=1}^{\frac{n}{d}}\sum_{j=1}^{\frac{m}{d}}(i*j)(gcd(i,j)=1) \end{aligned}$$

定义 $f(d)=\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}(i*j)\ (gcd(i,j)=d)$
定义 $F(d)=\sum_{i=1}^{i=a}\sum_{j=1}^{j=b}(i*j)\ (gcd(i,j)\ \%\ d=0)$
易得 $F(1)=sum(a,b)=\frac{a(a+1)}{2}*\frac{b(b+1)}{2}$
反演可得:

$$\begin{aligned} f(1) &= \sum_{i=1}^{i=a}\sum_{j=1}^{j=b}(i*j)(gcd(i,j)=1, a\le b) \\ &= \sum_{x=1}^{a}\mu(x)*x^2\sum_{i=1}^{\frac{a}{x}}\sum_{j=1}^{\frac{b}{x}}(i*j) \\ &= \sum_{x=1}^{a}\mu(x)*x^2\sum_{i=1}^{\frac{a}{x}}i*\sum_{j=1}^{\frac{b}{x}}j \\ &= \sum_{x=1}^{a}\mu_(x)*x^2*sum(\frac{a}{x},\frac{b}{x}) \end{aligned}$$

$$\therefore ans=\sum_{d=1}^{n}d\sum_{x=1}^{n'}\mu(x)*x^2*sum(\frac{n'}{x},\frac{m'}{x})(n'=\frac{n}{d},m'=\frac{m}{d})$$

此时如果预处理出 $\mu(x)*x^2$ 的前缀和求 ans 的复杂度是 $O(\sqrt{n}*\sqrt{n})=O(n)$，对于本题而言是不够的。令 $T=d*x$ 可得：$ans=\sum_{T=1}^{n}sum(\frac{n}{T},\frac{m}{T})\sum_{x|T}\frac{T}{x}*x^2*\mu(x)$. 令 $h[T]=\sum_{x|n}\frac{T}{x}*x^2*\mu(x)$，预处理出 $h[T]$【因为 $h(T)$ 是积性函数可以线性筛】，那么时间复杂度就变为 $O(\sqrt{n})$ 总的时间复杂度为 $O(T\sqrt{n})$(T 是测试组数)

```
typedef long long ll;
const int MAX_N =10000010;
const ll mod = 100000009;

bitset<MAX_N> bs;
int prime_cnt, prime[MAX_N / 100 * 7];
ll h[MAX_N], sum[MAX_N];
// 主函数中调用GetMu()
void GetMu()
{
    bs.set();
    prime_cnt = 0;
    h[1] = sum[1] = 1;
    for(int i = 2; i < MAX_N; ++i) {
        if(bs[i]) {
            prime[prime_cnt++] = i;
            h[i] = (ll)i * (1 - i) % mod;
        }
        for(int j = 0; j < prime_cnt && i * prime[j] < MAX_N; ++j ){
            bs[i * prime[j]] = 0;
            if(i % prime[j]) { // i 和 prime[j] 互质
                h[i * prime[j]] = h[i] * h[prime[j]] % mod;
            }else {
// 从原始式子 (T)=sigma(mu(d)*d*d*(T/d)) ，对 T 质因子分解只需要考虑前两项
                h[i * prime[j]] = h[i] * prime[j] % mod;
                break;
            }
        }
    }
    for(int i = 1; i < MAX_N; ++i ) {
        sum[i] = ((sum[i - 1] + h[i]) % mod + mod) % mod;
    }
}

inline ll  work(int n, int  m)
{
    ll res1 = (ll) n * (n + 1) / 2 % mod;
    ll res2 = (ll) m * (m + 1) / 2 % mod;
    return res1 * res2 % mod;
}

inline ll solve(int n, int m)
{
    int top = min(n, m), last;
    ll res = 0;
    for(int i = 1; i <= top; i = last + 1) {
        last = min( n / (n / i), m / (m / i));
        res = (res + (sum[last] - sum[i - 1] + mod) % mod
                * work(n / i, m / i) % mod) % mod;
    }
    return res;
}
```

1.13 反素数

1.13.1 介绍

定义：对于任何正整数 n，其约数个数记为 $f(n)$，例如 $f(6)=4$，如果某个正整数满足 x：对任意的正整 $i(0<i<n)$ 数，都有 $f(i)<f(n)$，那么称为 n 反素数。

性质：

1): 一个反素数的所有质因子必然是从 2 开始的连续若干个质数，因为反素数是保证约数个数为 x 的这个数 n 尽量小

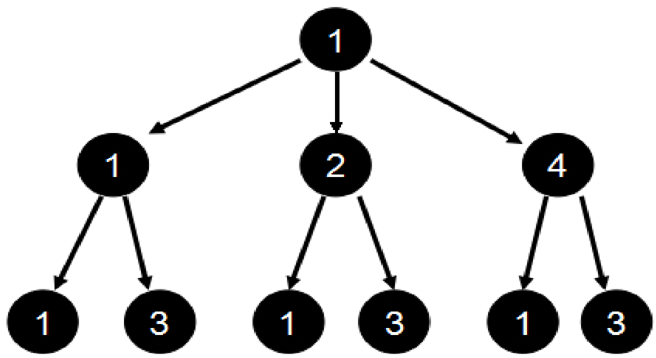
2): 同样的道理，如果 $n = 2^{p_1} * 3^{p_2} * 5^{p_3} \ldots$，那么必有 $p1 \geq p2 \geq p3 \ldots$

1.13.2 求最小的 n 使得其约数个数为 x

由算术基本定理定理我们知道：若一个数 $x = {p_1}^{a_1}{p_2}^{a_2}\ {p_s}^{a_s}$，那么 x 的约数个数

$$g(x) = \sum_{i=1}^{i=s}\prod(a_i + 1)$$

例如:$12 = 2^2 * 3$, 其约数个数为 6. 建立搜索树：



这棵树除了第一层外，每一层对应着一个素数，从上到下递增；每一层的每一个节点对应着素数的幂，从左到右递增，每一条从根节点到叶节点的路径上数字相乘即为一个约数。我们要想获得 $g(n) = x$ 的最小正整数，就要求 n 的质因子尽可能小，且尽可能多，换而言之就是幂次尽可能为 1，所以就要对上面的树进行从上到下从左到右的 dfs 直到约数个数满足 x 。

【Codeforces 27E】给定一个数 n，求一个最小的正整数，使得的约数个数为 n.

```
typedef unsigned long long lint;
const lint inf = ~0ull;
const int prime[]= {2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53};

int n;
lint ans;

void dfs(int depth, int limit, lint tmp, int num)
{
    if(num > n) return;
    if(num == n && tmp < ans) ans = tmp;
    for(int i = 1; i <= limit; ++i) { // i 相当于幂次
        if((double)tmp * prime[depth] > ans) break; // 不用扩展树的深度
        tmp *= prime[depth];
        if(n % (num * (i + 1)) == 0) {
            dfs(depth + 1, i, tmp, num * (i + 1));
        }
    }
}

int main()
{
    while(cin >> n){
        ans = inf;
        dfs(0, 63, 1, 1);
        cout << ans << endl;
    }
    return 0;
}
```

【URAL 1748】：给定一个数 n，求 $[1, n]$ 内约数个数最多的且数值最小的数，以及其约数个数 $(n \leq 10^{18})$。

```
//将搜索改为当前值 tmp > n 时终止，初始化ans = inf, cnt = 0
```

```
//主函数里调用 dfs(0, 63, 1, 1) 初始化, prime[] 同例1
void dfs(int depth, int limit, lint tmp, int num)
{
    if(tmp > n) return;
    if(num > cnt || (num == cnt && tmp < ans)) {
        ans = tmp;
        cnt = num;
    }
    for(int i = 1; i <= limit; ++i) {
        if((double)tmp * prime[depth] > n) break;
        //需要用 double 强制类型转换，否则爆数据
        tmp *= prime[depth];
        dfs(depth + 1, i, tmp, num * (i + 1));

    }
}
```

1.14 卢卡斯定理

用于解决组合数取模问题 $C_n^m \%p \ \ (m \le n \le 10^{18}, p$ 为素数)

当 $1 \le m \le n \le 10^{18}, 2 \le p \le 10^5$ 且 p 是素数时，如果：

$$n = n_k p^k + n_{k-1} p^{k-1} + ... + n_1 p + n_0$$
$$m = m_k p^k + m_{k-1} p^{k-1} + ... + m_1 p + m_0$$

那么：

$$C_n^m \%p = \prod_{i=0}^{k} C_{n_i}^{m_i} \ (mod\ p)$$

```
inline ll C(ll a, ll b)
{ //计算组合数 C[a][b] ，如果是小数据并且模数固定可以预处理阶乘
    if(b > a) return 0;
    ll res = 1, x, y;
    for(int i = 1; i <= b; ++i) {
        x = (a + i - b) % mod;
        y = i % mod;
        res = res * x % mod * quick_pow(y, mod - 2) % mod; //模素数逆元
    }
    return res;
}
inline ll Lucas(ll n, ll m)
{
    if (n < 0 || m < 0 || m > n) return 0;
    if (m == 0) return 1;
    return C(n % mod, m % mod) * Lucas(n / mod, m / mod) % mod;
}
```

1.14.1 给定 n 求 $C_n^m (0 \le m \le n \le 10^8)$ 为奇数的 m 个数

[HDU 4349]

即 $C_n^m \%2 = 1$ 的 m 个数, 考虑将 n 和 m 都表示成 2 的幂次组合形式，则任意的系数 n_i 和 m_i 非 0 即 1. 因为 $C_0^0 = C_1^0 = C_1^1 = 1$，所以根据 $Lucas$ 定理，如果 $n_i = 0$, 则 $m_i = 0$，如果 $n_i = 1$，则 $m_i = 0$ 或 1, 根据乘法原理每个 $n_i = 1$，对于 m_i 都有 2 种选择，那么 $ans = 2^{cnt}$，其中 cnt 是 n 分解为 2 的幂次形式系数为 1 的项个数

```
scanf("%d", &n);
cnt = 0;
while (n) {
    if (n & 1) cnt ++;
```

```
    n >>= 1;
}
printf("%d\n", 1 << cnt);
```

1.15 特殊方法

1.15.1 n^k 的高三位

对于给定的一个数 n, 它可以写成 10^a, 其中 a 为浮点数，则 $n^k = (10^a)^k = 10^{a*k} = 10^x * 10^y$; 其中 x, y 分别是 $a*k$ 的整数部分和小数部分. 对于 $t = n^k$ 这个数，它的位数由 10^x 决定，它的位数上的值则有 10^y 决定，因此我们要求 t 的前三位，只需要将 10^y 求出，在乘以 100，就得到了它的前三位。$fmod(x, 1)$ 可以求出 x 的小数部分。(或者使用 $floor$ 函数)

```
high_three_digits = (int)pow(10.0, 2.0 + fmod(k * 1.0 * log10(n * 1.0), 1)).或者
double t = 1.0 * k * log10(n * 1.0);
high_three_digits = (int)(pow(10.0, t - (int)floor(t) + 2.0));
```

1.15.2 约数个数之和，定义 $d(i)$ 为 i 的约数个数

$$\sum_{i=1}^{a} d(i) = \sum \lfloor \frac{a}{i} \rfloor$$

$$\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b} d(i*j) = \sum_{gcd(i,j)=1} \lfloor \frac{a}{i} \rfloor \lfloor \frac{b}{j} \rfloor$$

$$\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\sum_{k=1}^{c} d(i*j*k) = \sum_{gcd(i,j)=gcd(j,k)=gcd(i,k)=1} \lfloor \frac{a}{i} \rfloor \lfloor \frac{b}{j} \rfloor \lfloor \frac{c}{k} \rfloor$$

这个性质可以推广到 n 维

[BZOJ 3994]: 求 $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} d(i*j)$, 定义 $d(i)$ 为 i 的约数个数.$n, m \in [1, 50000]$

$$ans = \sum_{gcd(i,j)=1} \lfloor \frac{n}{i} \rfloor \lfloor \frac{m}{j} \rfloor = \sum_{i=1}^{n} \lfloor \frac{n}{i} \rfloor \sum_{j=1}^{m} \lfloor \frac{m}{j} \rfloor$$

$g(n) = \sum_{i=1}^{n} \lfloor \frac{n}{i} \rfloor = \sum_{i=1}^{n} d(i)$, 只需要预处理出 $g(n)$ 就可以在 $O(\sqrt{n})$ 时间范围内解决问题。如果选择分步加速的话，预处理的复杂度是 $O(n\sqrt{n})$, 但是其实我们考虑每个数 i 的约数个数，然后 $g(n)$ 就是前缀和了。

在线性筛时每个合数是被最小质因子筛掉的, 我们只需要记录这个每个数 m 最小质因子的幂次 $num[m], d[m]$ 记录 m 的约数个数, 显然 $d(m)$ 是积性函数. 对于 $m = i * prime[j]$，如果 $i \ \% \ prime[j] \ = 0$, 根据积性函数性质 $num[m] = 1, d[m] = d[i] * d[prime[j]]$, 否则 $num[m] = num[i] + 1$, 因为 m 的约数个数是:$(e_1 + 1) * (e_2 + 1) * ... * (e_k + 1), e_i$ 是质因子分解后各质因子的幂次，我们考虑 m 从 i 的转移过程，m 只比 i 在 $prime[j]$ 的幂次上多 1, 所以 $d[m] = \frac{d[i]}{num[i]+1} * (num[i] + 2)$.

```
void GetMu()//线性时间预处理
{
    bs.set();
    prime_cnt = 0;
    mu[1] = d[1] = 1;
    for(int i = 2; i < MAX_N; ++i) {
        if(bs[i]) {
            prime[prime_cnt++] = i;
            mu[i] = -1;
            num[i] = 1;
            d[i] = 2;
        }
        for(int j = 0; j < prime_cnt && i * prime[j]  < MAX_N; ++j) {
            bs[i * prime[j]] = 0;
            if(i % prime[j]) {
                mu[i * prime[j]] = -mu[i];
                num[i * prime[j]] = 1;
                d[i * prime[j]] = d[i] * d[prime[j]];
            }else {
                mu[i * prime[j]] = 0;
```

```
                num[i * prime[j]] = num[i] + 1;
                d[i * prime[j]] = d[i] / (num[i] + 1) * (num[i] + 2);
                break;
            }
        }
    }
    for(int i = 1; i < MAX_N; ++i) {
        sum[i] = sum[i - 1] + mu[i];
        g[i] = g[i - 1] + d[i];
    }
}
void Get_g() // O(n * sqrt(n)) 的预处理
{
    int last;
    for(int n = 1; n < MAX_N; ++n) {
        for(int i = 1; i <= n; i = last + 1) {
            last = n / (n / i);
            g[n] += (ll) (last - i + 1) * (n / i);
        }
    }
}

inline ll solve(int n, int m)
{
    ll res = 0;
    int top = min(n, m), last;
    for(int i = 1; i <= top; i = last + 1) {
        last = min(n / (n / i), m / (m / i));
        res += (sum[last] - sum[i - 1]) * g[n / i] * g[m / i];
    }
    return res;
}
```

对于【Codeforces 235 E Number Challenge】:

$$\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\sum_{k=1}^{c}d(ijk), a, b, c \in [1, 2000]$$

利用上述结论反演可得:

$$Ans = \sum_{i=1}^{i=a}\lfloor\frac{a}{i}\rfloor\sum_{d}^{min(b,c)}(d)\sum_{d|j,(i,j)=1}\lfloor\frac{b}{j}\rfloor\sum_{d|k,(i,k)=1}\lfloor\frac{c}{k}\rfloor$$

记 $j = dj', k = dk'$, 则:

$$Ans = \sum_{i=1}^{i=a}\lfloor\frac{a}{i}\rfloor\sum_{d}^{min(b,c)}(d)\sum_{gcd(i,dj')=1}\lfloor\frac{b}{dj'}\rfloor\sum_{gcd(i,dk')=1}\lfloor\frac{c}{dk'}\rfloor$$

因为 $gcd(i, dj') = 1$，我们先保证 $gcd(i, d) = 1$, 然后枚举 $j' : 1 \to \frac{b}{d}$, 保证 $gcd(i, j') = 1$，这样就可以使得 $gcd(i, dj') = 1$，累加即可。对于 $gcd(i, dk') = 1$ 同样处理。时间复杂度是:$O(a * b * log(b))$

```
//需要预处理 GetMu() 和 GetGcd()
inline ll work(int n, int x)
{
    ll res = 0;
    for(int i = 1; i <= n; ++i) {
        if(gcd[i][x] == 1) {
            res = (res + (n / i)) % mod;
        }
    }
    return res;
}

```

```
inline ll solve(int a, int b, int c)
{
    ll res = 0;
    int top = min(b, c);
    for(int i = 1; i <= a; ++i) {
        for(int d = 1; d <= top; ++d){
            if(gcd[i][d] == 1) {
                ll tmp = 0;
                tmp = (ll) (a / i) * mu[d] * work(b / d, i)
                            % mod * work(c / d, i) % mod;
                res = ((res + tmp) % mod + mod) % mod;
            }
        }
    }
    return res;
}
```

1.15.3 给定 k，求最小的 n 使得 n 的约数个数恰为 $n-k$ 个 $(k \leq 47777)$

【HDU 4542】

```
const int MAX_N = 50010;
int id[MAX_N];
void init()
{
    for(int i = 1; i < MAX_N; ++i) id[i] = i;
// 初始化 id[i] 最多有 i 个数与其互质
    for(int i = 1; i < MAX_N; ++i) {
        for(int j = i; j < MAX_N; j += i) id[j]--;
//根据 j 的约数有， iid[j]--
        if(id[id[i]] == 0) id[id[i]] = i;
        // 因为我们最终是要将 id[k] 表示成约数个数为 n-k 的最小数 n ，
        // 如果此时 id[id[i]]=0 说明小于 i 的数中不存在数 x ， 使得 x 的约数个数为 x-id[i]
        // 那么实际上使得约数个数恰为 n-id[i] 的最小数 n 只能是 i 了
        id[i] = 0;
// 显然小于等于 i 的数不存在数 x 使得 x 的约数个数恰为 x-i 个，所以要赋 id[i]=0
    }
} // 对于 id[i] 等于 0 的 i ，实际上就不存在数 x 使得 x 的约数个数恰为 x-i 个
```

1.15.4 $C_n^m \mod p(p = p_1 * p_2$，且 p_1, p_2 为素数)

我们把 $C_n^m \ \% \ p$ 的值记为 x, 把 $C_n^m \% p_1$ 的值记为 $x1$, 把 $C_n^m \% p_2$ 的值记为 $x2$, 则有：

$$x \equiv x_1(\% \ p_1) \qquad x \equiv x_2(\% \ p_2)$$

因为 p_1, p_2 都是素数，所以 x_1 和 x_2 都可以用 *Lucas* 定理求解出来。利用中国剩余定理求解同余方程。定义：

inv_1 为:(p_2 在模 p_1 域下的逆元)$*p_2$
inv_2 为:(p_1 在模 p_2 域下的逆元)$*p_1$

```
//quick_pow( a, b, c): (a ^ b) % c
inv1 = quick_pow(p2, p1 - 2, p1) * p2;
inv2 = quick_pow(p1, p2 - 2, p2) * p1;
```

那么答案就是:

$$x = (inv_1 * x_1 \ + inv_2 * x_2)\% \ p$$