1. Обычная вероятность (Классическая вероятность)

Когда применять:

- Когда вам нужно определить вероятность одного события из множества всех возможных исходов.
- Рассчитывается как отношение количества благоприятных исходов к общему количеству всех возможных исходов.

Формула:

$$P(A) = \frac{\text{Количество благоприятных исходов}}{\text{Общее количество исходов}}$$

Примеры:

- Вероятность выпадения орла при подбрасывании монеты.
- Вероятность выпадения четного числа на игральной кости.

Признак задачи: Задача касается одного события, для которого известны все возможные исходы и их количество.

Задача: В мешке лежат 3 красных, 5 синих и 2 зеленых шара. Какова вероятность того, что случайно выбранный шар окажется синим?

Решение: Общее количество шаров: $3 + 5 + 2 = 10$

Количество синих шаров: 5.

Вероятность того, что выбранный шар будет синим: $P(\text{синий}) = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$

Ответ: Вероятность $\frac{1}{2}$.

1) В коробке лежат 12 шоколадных и 8 ореховых конфет. Какова вероятность случайно взять шоколадную конфету?
2) Игральный кубик бросают один раз. Какова вероятность того, что выпавшее число будет четным?
3) В классе 30 учеников: 18 девочек и 12 мальчиков. Какова вероятность того, что случайно выбранный ученик окажется мальчиком?
4) В урне лежат 15 одинаковых на вид шаров: 7 белых и 8 черных. Какова вероятность того, что случайно выбранный шар окажется черным?

1. Перестановки (Permutations)

Описание: Используются, когда нужно расставить все элементы множества в определённом порядке. Важно, что порядок элементов имеет значение, и все элементы выбираются.

Формула:

$$P_n = n!$$

Когда применять:

- Если все элементы множества используются, и важно, в каком порядке они расположены.
- Примеры: расставить книги на полке, распределить людей в очередь.

Примеры:

- Сколькими способами можно расположить 5 книг на полке? Ответ: $5!$.

Задача: Сколькими способами можно расположить 5 разных книг на полке?

Решение: Количество перестановок 5 различных элементов равно $5!$. $5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$

Ответ: 120 способов.

1) Сколькими способами можно расставить 4 разных человека в ряд для фотографии?
2) В ящике лежат 3 разные игрушки. Сколькими способами можно расположить эти игрушки в ряд?
3) На собрании присутствуют 6 человек. Сколькими способами можно их всех усадить за круглый стол?
4) В слове "КОТ" 3 буквы. Сколькими способами можно расположить все эти буквы в разных порядках?

2. Размещения (Arrangements)

Описание: Используются, когда из n элементов выбирается m элементов, и порядок этих m элементов имеет значение.

Формула:

$$A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}$$

Когда применять:

- Если порядок выбранных элементов важен, но выбираются не все элементы.
- Примеры: выбор и расстановка 3 человек из 10 на первые 3 места.

Примеры:

- Сколькими способами можно выбрать и расставить 3 из 10 участников в забеге? Ответ: $A_{10}^3 = \frac{10!}{7!}$.

Задача: Сколькими способами можно выбрать и расположить 2 из 5 различных книг на полке?

Решение: Для размещения m элементов из n используется формула $A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}$. В данном случае $n = 5$, $m = 2$. $A_5^2 = \frac{5!}{(5-2)!} = \frac{5\times4\times3!}{3!} = 5 \times 4 = 20$

Ответ: 20 способов.

1) В классе 7 учеников. Учитель хочет выбрать и посадить 3 учеников на первые 3 парты. Сколько существует различных способов сделать это?
2) В группе из 4 студентов нужно выбрать 2 для участия в конкурсе и назначить их на разные роли (капитан и помощник). Сколько существует способов это сделать?
3) В корзине лежат 6 разных фруктов. Сколькими способами можно выбрать и разложить 3 фрукта на 3 тарелки (по одному на каждую)?
4) В библиотеке есть 8 разных книг. Сколькими способами можно выбрать 4 книги и поставить их в ряд на полке?

---

3. Сочетания (Combinations)

Описание: Используются, когда из n элементов выбирается m элементов, и порядок выбранных элементов не имеет значения.

Формула:

$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}$$

Когда применять:

- Если порядок выбранных элементов не важен.
- Примеры: выбор команды из 5 человек из 12 участников.

Примеры:

- Сколькими способами можно выбрать 3 человека из 8 для участия в соревнованиях? Ответ: $C_8^3 = \frac{8!}{3!\times5!}$.

Задача: В группе из 6 студентов нужно выбрать 2 для участия в олимпиаде. Сколькими способами это можно сделать?

Решение: Для выбора m элементов из n без учета порядка используется формула сочетаний: $C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}$ В данном случае $n = 6, m = 2$. $C_6^2 = \frac{6!}{2!(6-2)!} = \frac{6\times5\times4!}{2\times1\times4!} = \frac{6\times5}{2\times1} = 15$

Ответ: 15 способов.

1) Из колоды в 52 карты нужно выбрать 5 карт. Сколькими способами можно это сделать?Из колоды в 52 карты нужно выбрать 5 карт. Сколькими способами можно это сделать?
2) На экзамене нужно ответить на 3 из 10 предложенных вопросов. Сколькими способами можно выбрать 3 вопроса?
3) В коробке лежат 8 разных конфет. Сколькими способами можно выбрать 4 конфеты?
4) В классе 12 учеников. Учитель хочет выбрать 5 учеников для участия в школьном спектакле. Сколько существует различных способов сделать это?

---

4. Условная вероятность (Conditional Probability)

Описание: Используется, когда вероятность события B зависит от того, что событие A уже произошло.

Формула:

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

Когда применять:

- Если нужно найти вероятность события, учитывая, что другое событие уже произошло.
- Примеры: вероятность того, что второй выбранный шар красный, если первый уже красный.

Примеры:

- В коробке 5 красных и 3 синих шара. Какова вероятность того, что оба шара будут красными при условии, что первый уже красный? Ответ: $\frac{4}{7}$.

Задача: В коробке 5 красных и 3 синих шара. Если случайным образом выбрать один шар и он окажется красным, какова вероятность того, что следующим выбранным шаром тоже будет красный?

Решение:

- Всего шаров: $5 + 3 = 8$.
- Вероятность того, что первый выбранный шар — красный: $P(A) = \frac{5}{8}$
- Если первый шар — красный, то в коробке остается 4 красных и 3 синих шара (всего 7).
- Вероятность того, что второй шар также красный при условии, что первый шар красный: $P(B|A) = \frac{4}{7}$

Ответ: Вероятность $P(B|A) = \frac{4}{7}$.

1) В группе 6 мужчин и 4 женщины. Если случайным образом выбрать одного человека и он окажется мужчиной, какова вероятность того, что следующий выбранный человек будет женщиной?
2) В ящике лежат 7 белых и 5 черных шаров. Какова вероятность того, что при вытаскивании двух шаров подряд, второй шар окажется черным, если известно, что первый шар был белым?

3) В корзине лежат 4 яблока и 2 груши. Какова вероятность того, что при выборе двух фруктов подряд первый фрукт будет грушей, а второй — яблоком?
4) В коробке лежат 3 зеленых и 2 синих шара. Какова вероятность того, что оба шара будут синими, если шары вытаскивают по одному без возврата?

3. Теорема Байеса (Bayes' Theorem)

Когда применять:

- Когда нужно найти обратную вероятность: вероятность того, что произошло событие A, при условии, что наблюдается событие B.
- Теорема Байеса используется для пересчета вероятности в обратном порядке: от следствия к причине.

Формула:

$$P(A|B) = \frac{P(B|A) \cdot P(A)}{P(B)}$$

где $P(B) = P(B|A) \cdot P(A) + P(B|\overline{A}) \cdot P(\overline{A})$.

Примеры:

- Вероятность того, что у человека грипп (событие A), если известно, что у него высокая температура (событие B).
- Вероятность того, что пациент болен (событие A), если тест показал положительный результат (событие B).

Признак задачи: В задаче нужно найти вероятность причины при наличии следствия. Часто это формулируется как "какова вероятность того, что произошло событие A, если мы знаем, что произошло событие B".

Задача: В городе 60% населения пользуется общественным транспортом, а 40% – личными автомобилями. Вероятность того, что человек опоздает на работу, если он использует общественный транспорт, составляет 30%, а если личный автомобиль – 10%. Найдите вероятность того, что опоздавший на работу человек пользовался общественным транспортом.

Решение:

- $P(T) = 0.6$ — доля пользующихся общественным транспортом.
- $P(A) = 0.4$ — доля пользующихся автомобилем.
- $P(O|T) = 0.3$ — вероятность опоздания при использовании транспорта.
- $P(O|A) = 0.1$ — вероятность опоздания при использовании автомобиля.

Ищем $P(T|O)$ — вероятность того, что опоздавший человек пользовался транспортом:

$$P(T|O) = \frac{P(O|T) \cdot P(T)}{P(O|T) \cdot P(T) + P(O|A) \cdot P(A)} = \frac{0.3 \cdot 0.6}{0.3 \cdot 0.6 + 0.1 \cdot 0.4} = \frac{0.18}{0.22} \approx 0.818$$

Ответ: $P(T|O) \approx 0.818$.

1) В компании 70% сотрудников — мужчины и 30% — женщины. Вероятность того, что сотрудник получит повышение, если он мужчина, равна 20%, а если женщина — 40%. Какова вероятность того, что сотрудник, получивший повышение, оказался мужчиной?
2) В больнице 75% пациентов поступают с диагнозом "простуда" и 25% — с диагнозом "грипп". Вероятность того, что температура превышает 38°C при простуде, равна 10%, а при гриппе — 80%. Какова вероятность того, что у пациента с температурой выше 38°C грипп?
3) В университете 30% студентов учатся на математическом факультете, 20% — на физическом, и 50% — на гуманитарном. Вероятность того, что студент получает стипендию, если он учится на математическом факультете, равна 40%, на физическом — 60%, а на гуманитарном — 10%. Какова вероятность того, что стипендиат учится на физическом факультете?
4) В супермаркете три кассы: 40% клиентов обслуживаются на первой кассе, 35% — на второй и 25% — на третьей. Вероятность ошибки при расчете на первой кассе составляет 2%, на второй — 3%, на третьей — 1%. Какова вероятность того, что ошибка произошла на второй кассе?
5) В городе три больницы: маленькая, средняя и большая. В маленькой больнице лечится 20% всех пациентов, в средней — 30%, а в большой — 50%. Вероятность выздоровления пациента составляет 50% для маленькой, 70% для средней и 90% для большой больницы. Какова вероятность того, что выздоровевший пациент лечился в средней больнице?
6) В фирме три отдела. В первом отделе 30% сотрудников, во втором — 50%, в третьем — 20%. Вероятность того, что сотрудник будет повышен в должности,

если он из первого отдела, равна 10%, из второго — 15%, из третьего — 5%. Какова вероятность того, что повышенный сотрудник работает в первом отделе?

7) В лаборатории 4% тестов на COVID-19 дают ложноположительный результат, и 1% тестов дают ложноотрицательный результат. Если известно, что 10% людей действительно больны, какова вероятность того, что человек, получивший положительный результат, действительно болен?
8) В школе 60% учеников ходят на дополнительные занятия по математике, 40% — по физике. Вероятность того, что ученик сдает математику на "отлично", если он посещает дополнительные занятия, составляет 80%, а если не посещает — 50%. Какова вероятность того, что ученик сдал математику на "отлично", если он посещал дополнительные занятия?

Матрицы

Лучшее объяснение : https://www.cuemath.com/algebra/solve-matrices/

Задания:

Задание. Найти $A+B$, если $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 3 \\ 4 & 6 & 2 \end{pmatrix}$

Задание. Найти матрицу $C = A - 3B$, если $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

Вычислить AB и BA, если $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$

Задание. Найти матрицу A^T, если $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$

. Вычислить $A+B$, если $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 7 & 6 & -5 \\ -1 & 8 & 9 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & 3 & -4 \\ -7 & -5 & 5 \\ 1 & -8 & -8 \end{pmatrix}$.

. Вычислить $3A+4B-2C$, если $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & -4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \\ 1 & -5 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & -3 \\ 8 & 6 \end{pmatrix}$.

Найти произведения AB и BA, если это возможно:

) $A = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 7 \\ -1 & 6 & -3 \\ 2 & -4 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 3 \\ 4 & -2 & -6 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$; б) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \\ 3 & -2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$.