

TP3-Méthodes itératives de résolution de
systèmes linéaires

Compte rendu
MA313



EL ZENARY Ramel
GINET Paul
VINCENNE—CORREGE Mathilde
AERO 3, CLASSE B1

Table des matières

Table des matières	2
I. Introduction.....	3
II. Expérimentation des méthodes	4
A. Question 1	4
B. Question 2	9
C. Question 3 :	12
III. Expérimentation des méthodes sur des matrices générées aléatoirement.....	17
IV. Conclusion	20

I. Introduction

À travers ce TP3, nous allons expérimenter des fonctions simples permettant d'appliquer les méthodes itératives de résolution de systèmes linéaires.

Les méthodes vues précédemment (Gauss, Cholesky, QR avec Gram-Schmidt) pour résoudre des systèmes linéaires $Ax = b$ sont des méthodes que l'on qualifie de directes. Elles sont qualifiées de directes car elles s'appuient sur des calculs permettant d'obtenir la solution exacte.

Les erreurs dans la résolution proviennent uniquement du fait que lors de la mise en pratique des méthodes, on utilise des nombres flottants, et que des erreurs d'arrondi ont lieu à chaque opération élémentaire de calcul.

Les méthodes itératives sont construites sur un autre principe.

Dans une méthode itérative, on construit une suite de vecteurs $x^{(k)}$ qui va tendre vers la solution du système $Ax = b$.

L'algorithme consiste à calculer un terme de cette suite, qui sera une approximation de la solution du système. On va s'intéresser dans ce module à une grande classe de méthodes itératives, dites basées sur une décomposition $A = M - N$ avec M est une matrice inversible. On suppose M inversible. En pratique, elle est choisie de sorte que la résolution d'un système $Mx = b$ soit aisée : souvent M est diagonale ou triangulaire. On construit une suite de vecteurs $x^{(k)} \in \mathbb{R}^n$ par la relation suivante : $Mx^{(k+1)} = Nx^{(k)} + b$ avec $x^{(0)} \in \mathbb{R}^n$ un vecteur initial choisi.

Nous allons dans ce TP programmer les différentes méthodes itératives pour calculer une solution d'un système $Ax=b$. Nous testerons la résolution de $Ax=b$ en prenant des matrices A et b définis puis x aléatoire, puis nous testerons les méthodes en générant toutes les matrices de manière aléatoire.

L'un des objectifs de ce TP est bien évidemment de tester les méthodes itératives pour résoudre un système $Ax=b$ mais nous allons également nous intéresser à son efficacité à la convergence entre les différentes méthodes itératives c'est-à-dire entre la méthode de Jacobi, Gauss-Seidel et la méthode de relaxation.

Petit Historique :

- GAUSS Karl Friedrich (1777-1855) Mathématicien et physicien astronome. Il établit l'orbite de Cérès en utilisant la méthode des moindres carrés. Ce grand savant sera surnommé par ses pairs Prince des mathématiciens. Le "gauss" est l'unité d'induction magnétique.
- JACOBI Carl, Gustav (1804-1851), Professeur de mathématiques à Berlin. Ses travaux portent essentiellement, sur l'étude des fonctions elliptiques, les équations différentielles et aux dérivées partielles, les systèmes d'équations linéaires, la théorie des déterminants.
- SEIDEL Philipp Von (1821-1896) Astronome et physicien allemand, on lui doit des progrès importants photographies astronomiques. En mathématiques, il fut l'élève de Dirichlet et de Jacobi. On lui doit la méthode, dite de Gauss-Seidel, améliorant la méthode de Jacobi relative à la résolution par itérations d'un système d'équations linéaires.

II. Expérimentation des méthodes

Dans cette première partie du TP, nous réalisons nos courbes avec des matrices prédéfinies selon les conditions du TP et une valeur arbitraire d' ω qui sera égale à 1,2.

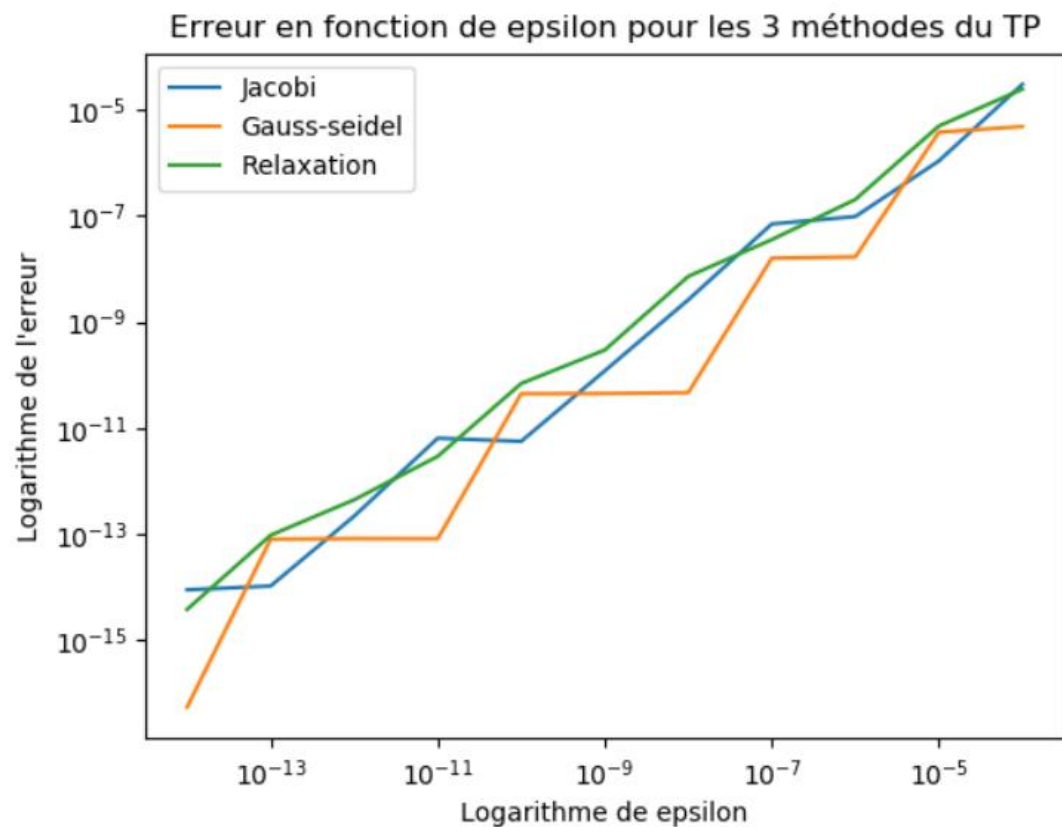
De plus, nous prendrons un nombre d'itération maximum de 100 000.

Par la suite, nous essayerons de définir la valeur optimal d' ω pour ces matrices.

Et pour finir, nous étudierons ces méthodes sur des matrices aléatoires.

A. Question 1

$$\text{Si } i \neq j, a_{i,j} = \frac{1}{12 + (3i - 5j)^2}. \quad \text{Si } i = j, a_{i,i} = 3 \quad \text{Et } b_i = \cos\left(\frac{i}{8}\right)$$

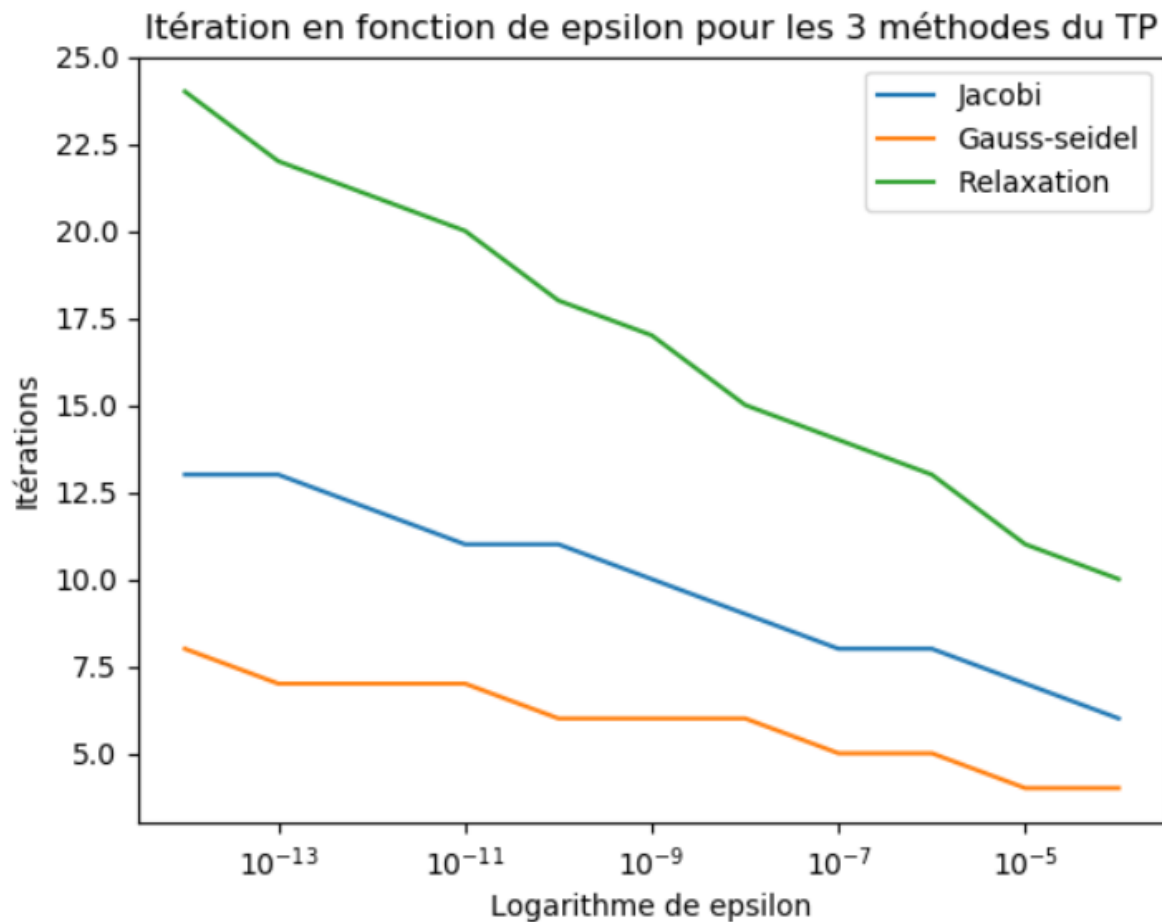


Sur ce graphique, nous avons calculé l'erreur des trois méthodes (Jacobi, Gauss-Seidel et Relaxation) en fonction d' ϵ .

Pour nous permettre d'exploiter les données du graphique, nous utiliserons la fonction logarithme pour avoir une échelle lisible. On notera que ce graphique se lit de droite à gauche. Ainsi pour les trois méthodes, plus l' ϵ est petit plus l'erreur sera négligeable. Nous remarquons que les trois courbes montrent que les fonctions itératives rendent une erreur proche d' ϵ .

En effet, elles se rapprochent de l'allure d'une fonction linéaire de forme $Y = X$.

Pour rappel, ϵ représente l'écart entre la solution x_{k+1} et x_k , ainsi plus l'écart est petit plus la solution sera précise. Nous observons sur le graphique que la méthode de Gauss-Seidel est celle qui représente le moins d'erreur et Relaxation celle qui en représente le plus. En effet, la méthode Relaxation possède plus de calcul avec le coefficient ω , c'est pourquoi il est normal qu'elle comporte une erreur plus conséquente comparée aux deux autres méthodes qui soustraient ou additionnent des matrices.

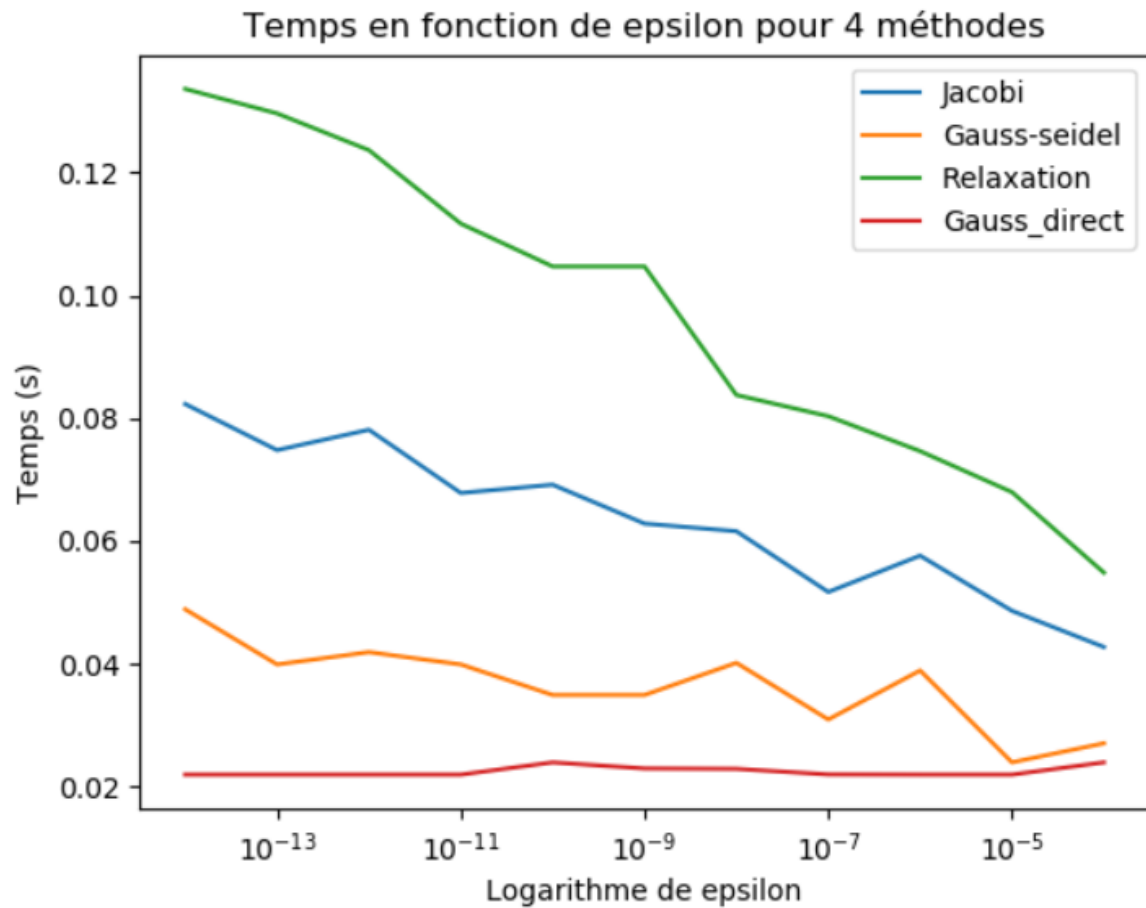


Sur ce graphique, nous avons calculé l'itération des trois méthodes (Jacobi, Gauss-seidel et Relaxation) en fonction de l'épsilon.

Pour nous permettre d'exploiter les courbes, nous avons utilisé la fonction logarithme sur les valeurs d'épsilon. Ce graphique se lit aussi de droite à gauche.

Pour les trois méthodes, le nombre d'itération augmente lorsque l'épsilon devient petit.

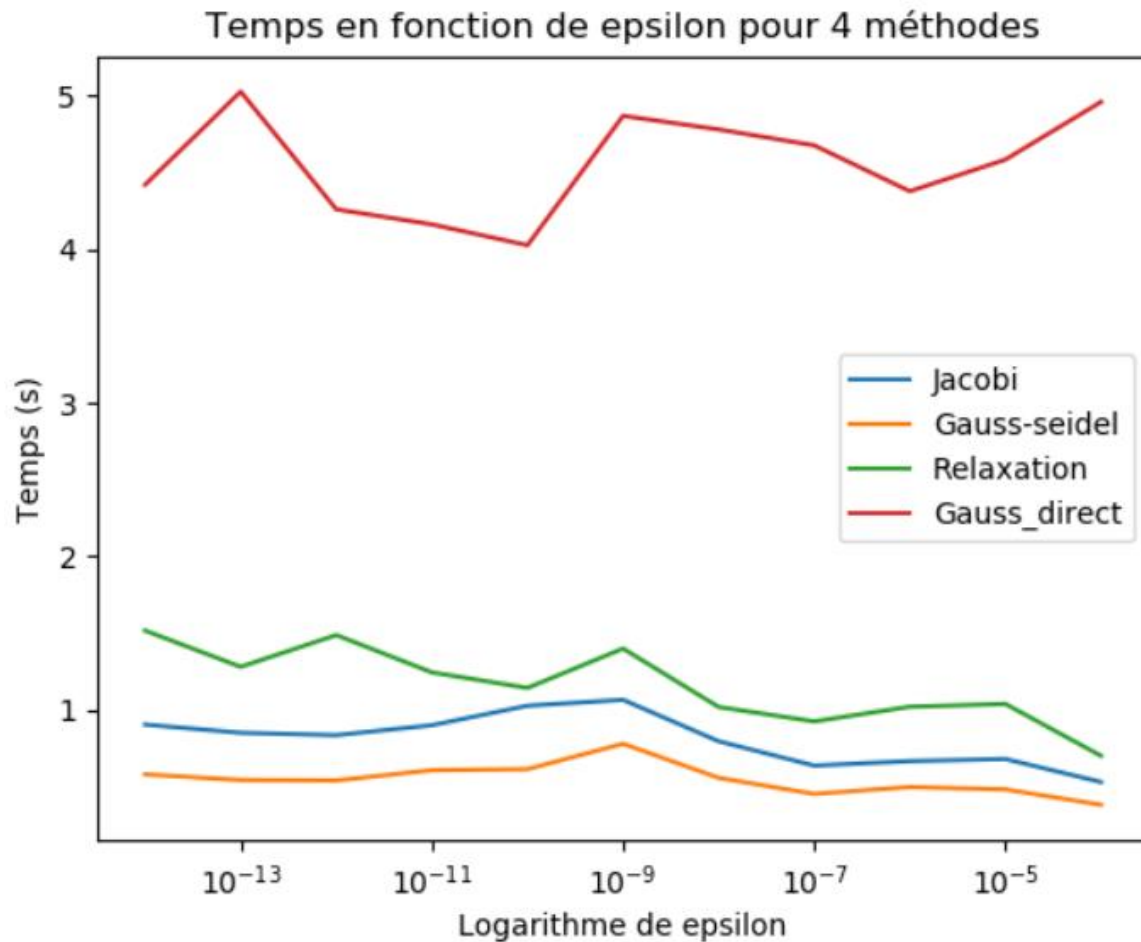
Nous remarquons que la méthode de Gauss-seidel est la méthode qui nécessite le moins d'itération pour avoir une solution précise. La différence d'itération avec la méthode de Jacobi est expliquée par le fait que les deux méthodes ont la même décomposition mais elles ne réalisent pas les mêmes calculs, on en conclut qu'il est préférable d'utiliser la soustraction avec $M = D - E$ et $N = F$. Enfin, la méthode Relaxation a une différence d'itération considérable avec les deux autres lorsque epsilon est petit. Cela peut être dû à la valeur d'omega qui ne doit pas être optimal pour les calculs.



Sur ce graphique, nous avons calculé le temps des quatre méthodes (Jacobi, Gauss-seidel, Relaxation et Gauss-direct) en fonction de l'épsilon. Pour nous permettre d'exploiter les courbes, nous avons utilisé la fonction logarithme sur les valeurs d'épsilon. Ce graphique se lit aussi de droite à gauche, et il nous montre que pour les quatre méthodes, le temps augmente lorsque l'épsilon devient petit.

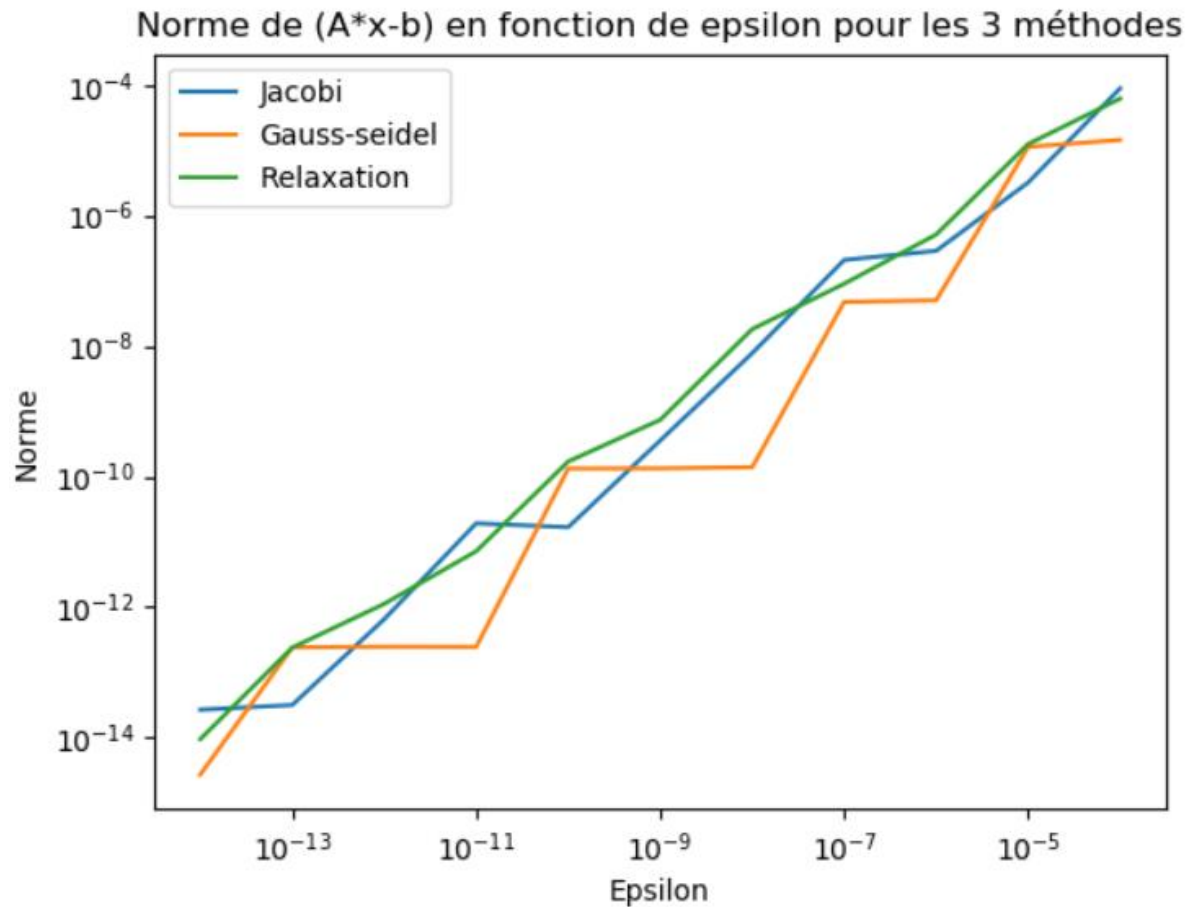
Nous remarquons dans un premier temps, une très grande différence entre les trois méthodes vues précédemment et la méthode Gauss-direct. En effet, cette méthode est non itérative et par conséquent, le calcul est grand mais se fait de manière directe. Nous verrons par la suite du TP que ce graphique changera lorsque la taille de la matrice augmentera, mais pour des matrices de taille 100 comme celle-là, la méthode Gauss-direct est très rapide.

Ensuite, pour les trois autres méthodes, nous observons une grande ressemblance avec le graphe précédent, cela est due au fait que plus une méthode a d'itération plus elle mettra du temps à résoudre le système. Ainsi, c'est pour cela que nous conservons le même ordre de rapidité que le graphique précédent.



Ce graphique est similaire à celui vu précédemment, nous avons calculé le temps des quatre méthodes (Jacobi, Gauss-seidel, Relaxation et Gauss-direct) en fonction de l'épsilon, mais nous avons augmenté la taille de la matrice. En effet, cette fois-ci, il ne s'agirait plus d'une matrice de taille 100 mais de taille 1000. Nous remarquons que les trois méthodes itératives conservent leur ordre, c'est-à-dire que la méthode Gauss-seidel est plus rapide que celle de Jacobi et que Jacobi est plus rapide que Relaxation qu'importe la taille de la matrice.

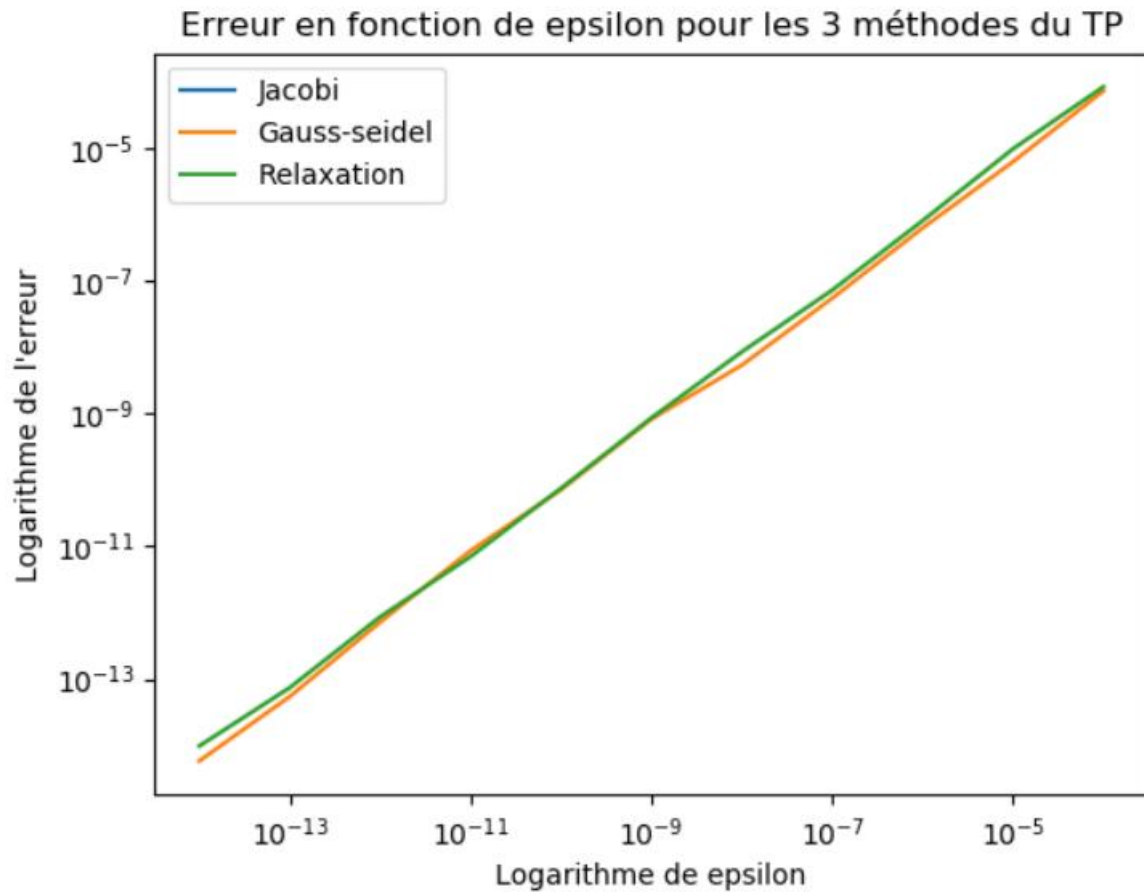
Bien sûr, plus la matrice aura une taille importante plus le temps de résolution de ces méthodes augmenteront. Cependant, nous observons une grande différence avec la méthode Gauss-direct, son temps de résolution a énormément augmenté comparer au graphe précédent. Cette différence s'explique par le fait que le calcul dans cette méthode est trop important. On en conclut donc que les méthodes non-itératives sont intéressantes pour les petites matrices de taille 100 par exemple, mais lorsque la taille devient trop grande, il est plus intéressant d'utiliser les méthodes itératives.



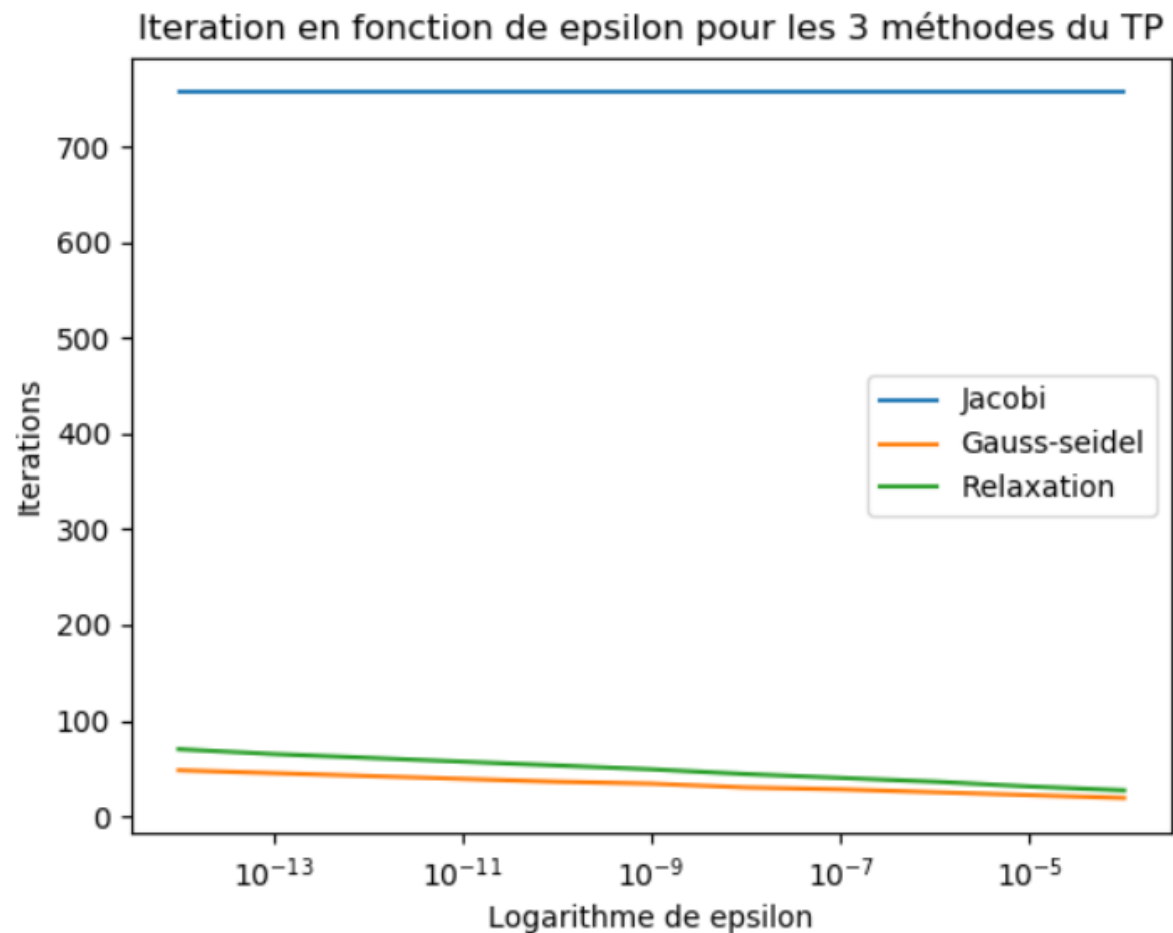
Sur ce graphique, nous avons calculé la norme $(A*x-b)$ des trois méthodes (Jacobi, Gauss-seidel et Relaxation) en fonction de l'épsilon. Pour nous permettre d'exploiter les données du graphique, nous utiliserons la fonction logarithme pour avoir une échelle lisible. On notera que ce graphique se lit de droite à gauche, ainsi pour les trois méthodes, plus l'épsilon est petit plus la norme sera petite. Nous remarquons ici que ce graphe est très similaire au premier graphe vu précédemment qui représentait l'erreur $x_{k+1} - x_k$ en fonction d'épsilon. Ainsi, nous pouvons conclure que l'erreur et la norme sont équivalentes dans ce cas. Et par conséquent, pour la suite du TP, nous ne calculerons plus les normes car cela revient à étudier l'erreur.

B. Question 2

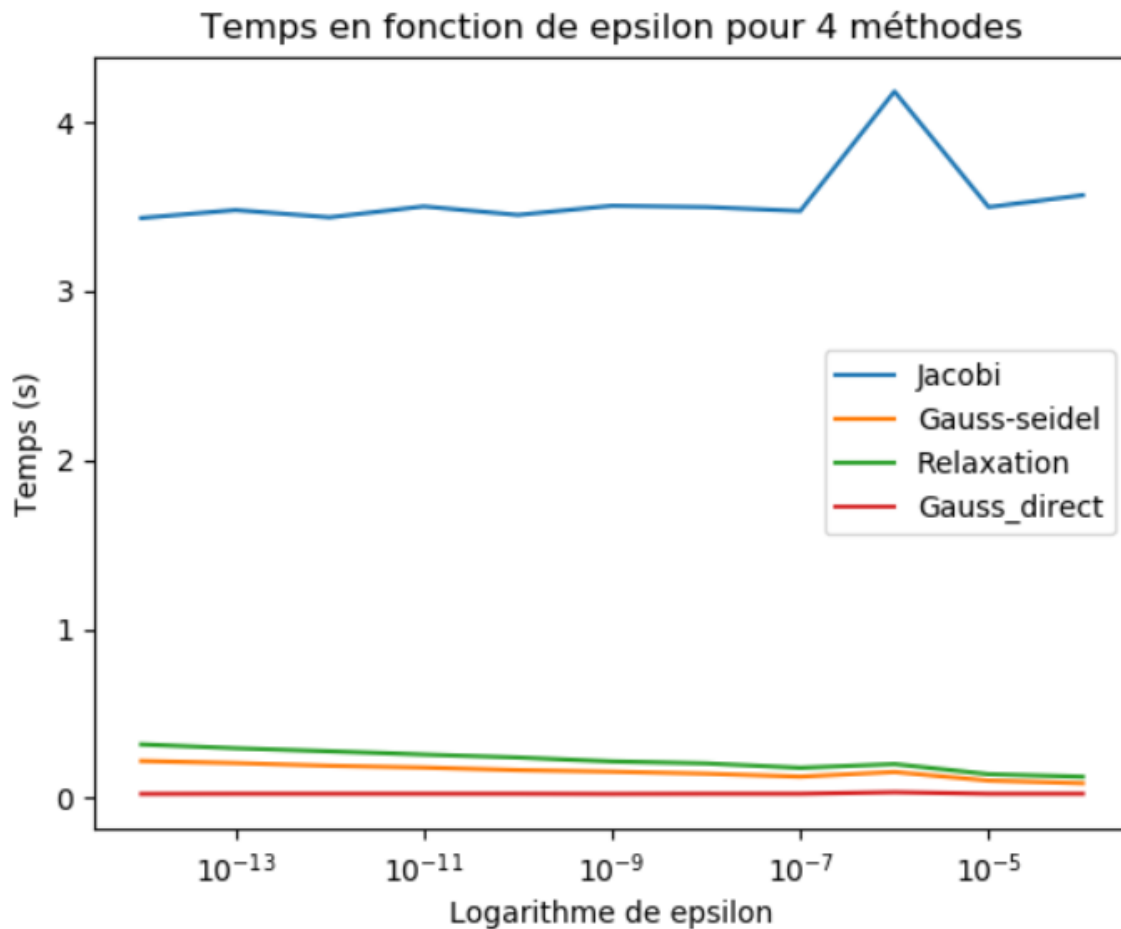
$$a_{i,j} = \frac{1}{1 + 3|i - j|} \quad b_i = \cos\left(\frac{i}{8}\right)$$



Sur ce graphique, nous avons calculé l'erreur des trois méthodes (Jacobi, Gauss-seidel et Relaxation) en fonction de l'épsilon. Pour nous permettre d'exploiter les données du graphique, nous utiliserons la fonction logarithme pour avoir une échelle lisible. On notera que ce graphique se lit de droite à gauche, ainsi pour les trois méthodes, plus l'épsilon est petit plus l'erreur sera négligeable. Nous remarquons que les courbes des trois méthodes sont presque confondues et qu'elles correspondent à des fonctions linéaires $Y = X$. Ainsi, nous pouvons en conclure que ces trois méthodes sont très bien optimisées pour cette matrice.

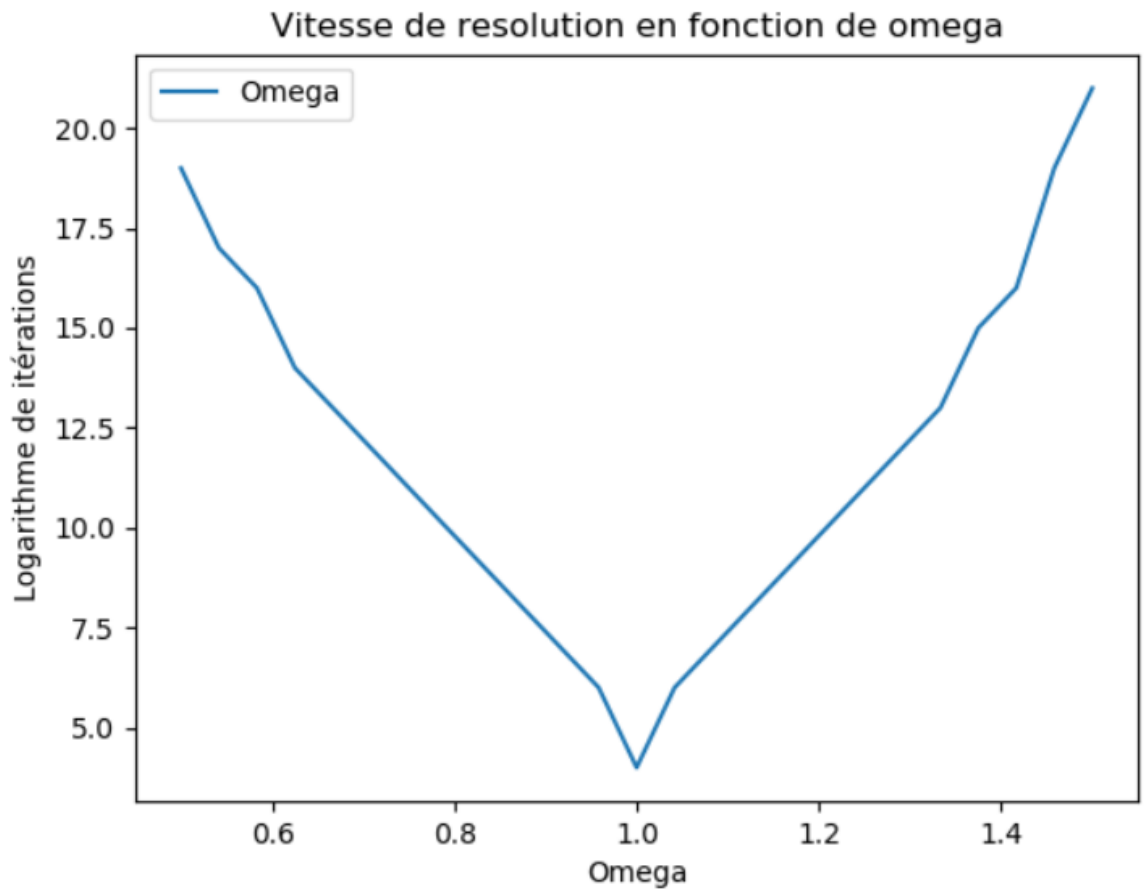


Sur ce graphique, nous avons calculé l'itération des trois méthodes (Jacobi, Gauss-seidel et Relaxation) en fonction de l'épsilon. Pour nous permettre d'exploiter les courbes, nous avons utilisé la fonction logarithme sur les valeurs d'épsilon. Ce graphique se lit aussi de droite à gauche, et c'est pourquoi, pour les trois méthodes, le nombre d'itération augmente lorsque l'épsilon devient petit. Nous remarquons un grand écart entre la méthode de Jacobi et les deux autres. Ainsi, pour cette matrice, la méthode de Jacobi devra effectuer un très grand nombre d'opération pour résoudre le système linéaire. Les méthodes Gauss-seidel et Relaxation sont assez similaires avec un petit avantage pour la méthode de Gauss-seidel. Ainsi, on en déduit que la méthode Gauss-seidel sera la plus rapide pour cette matrice donnée.

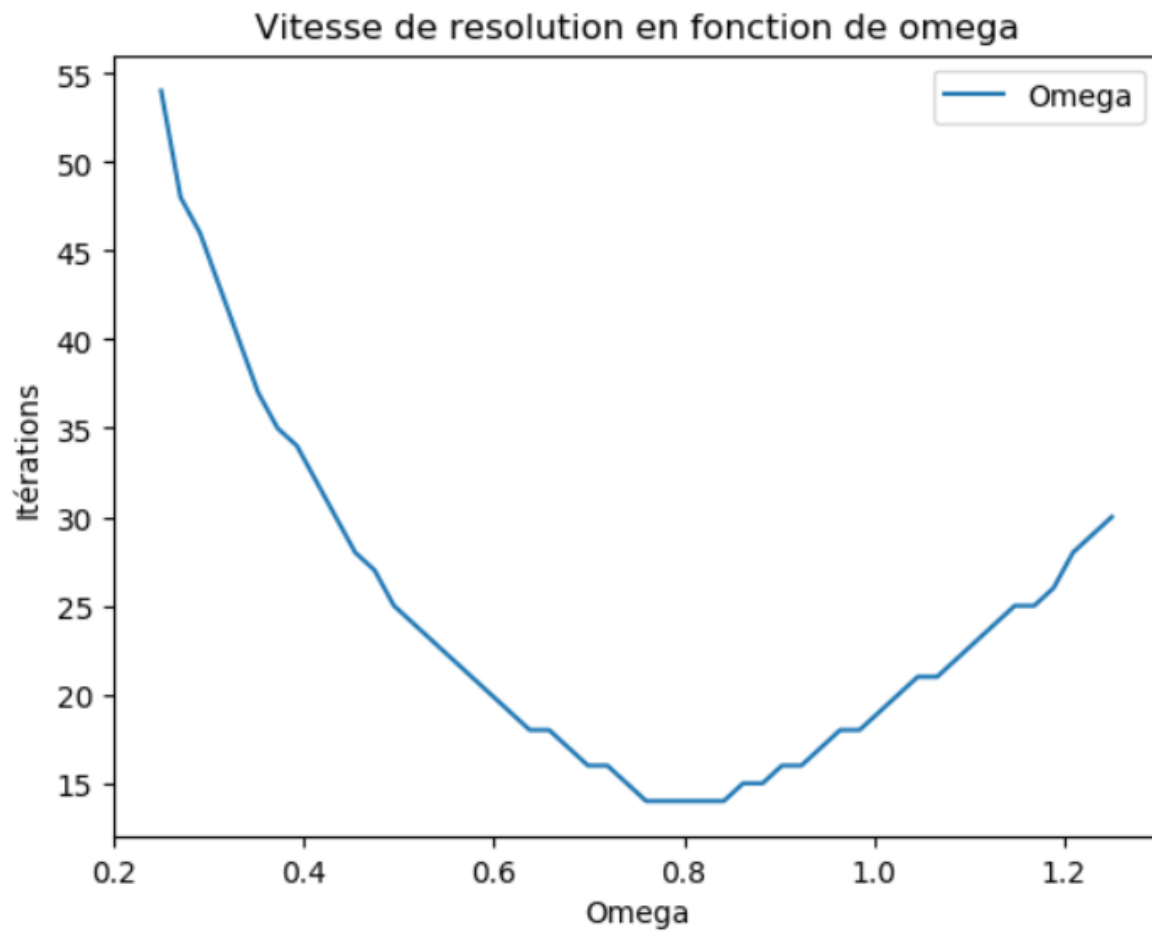


Sur ce graphique, nous avons calculé le temps des quatre méthodes (Jacobi, Gauss-seidel, Relaxation et Gauss-direct) en fonction de l'épsilon. Pour nous permettre d'exploiter les courbes, nous avons utilisé la fonction logarithme sur les valeurs d'épsilon. Ce graphique se lit aussi de droite à gauche, et c'est pourquoi, pour les quatre méthodes, le temps augmente lorsque l'épsilon devient petit. Et comme convenu, nous remarquons que la méthode Gauss-seidel est la plus rapide entre les trois méthodes itératives. Nous observons une similitude avec le graphique précédent et cela est expliqué par le fait que plus une méthode possède d'itérations plus elle mettra du temps à effectuer tous les calculs. Cependant, nous remarquons qu'encore une fois la méthode Gauss-direct est la plus rapide de ces méthodes. Mais nous rappelons que cela est due au fait que la taille de la matrice n'est pas très conséquente, dans le cas d'une matrice plus grande la méthode non itérative mettrait plus de temps que les méthodes itératives.

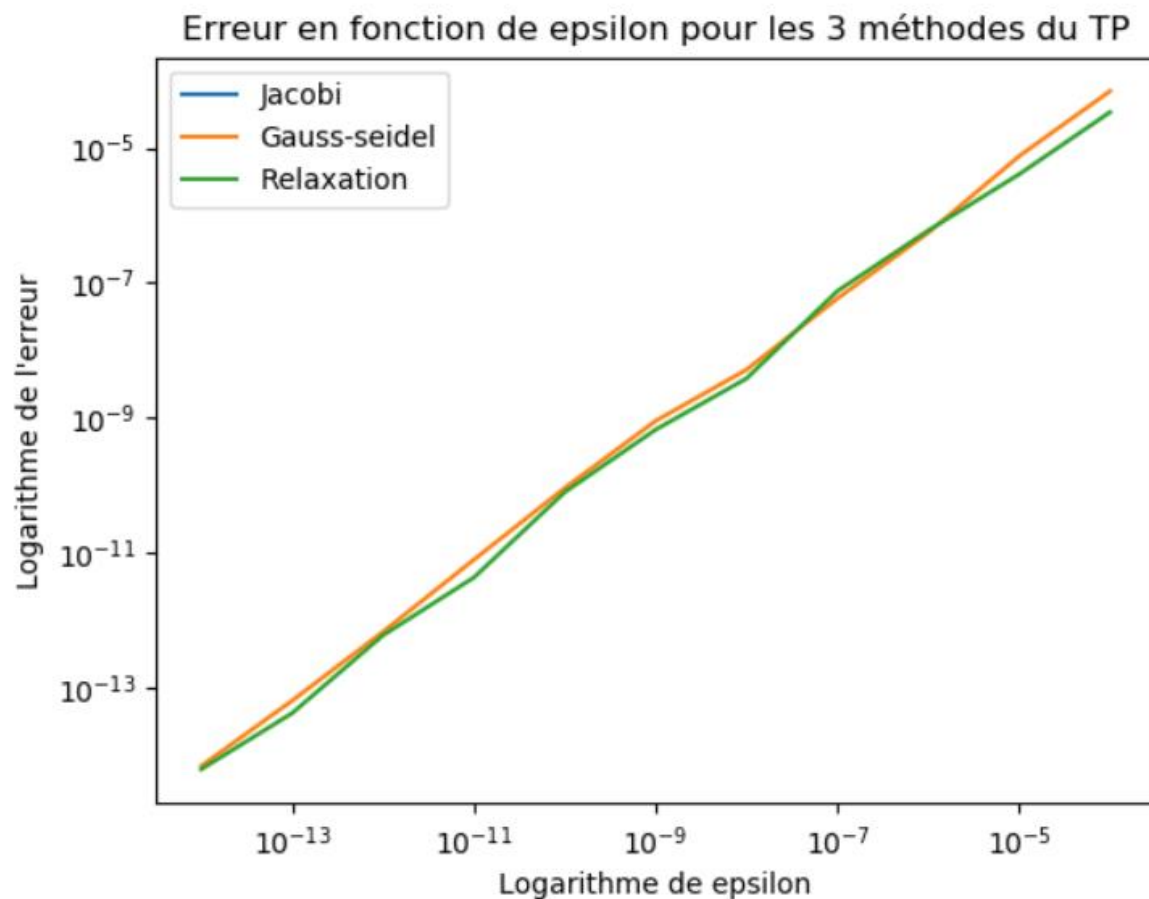
C. Question 3 :



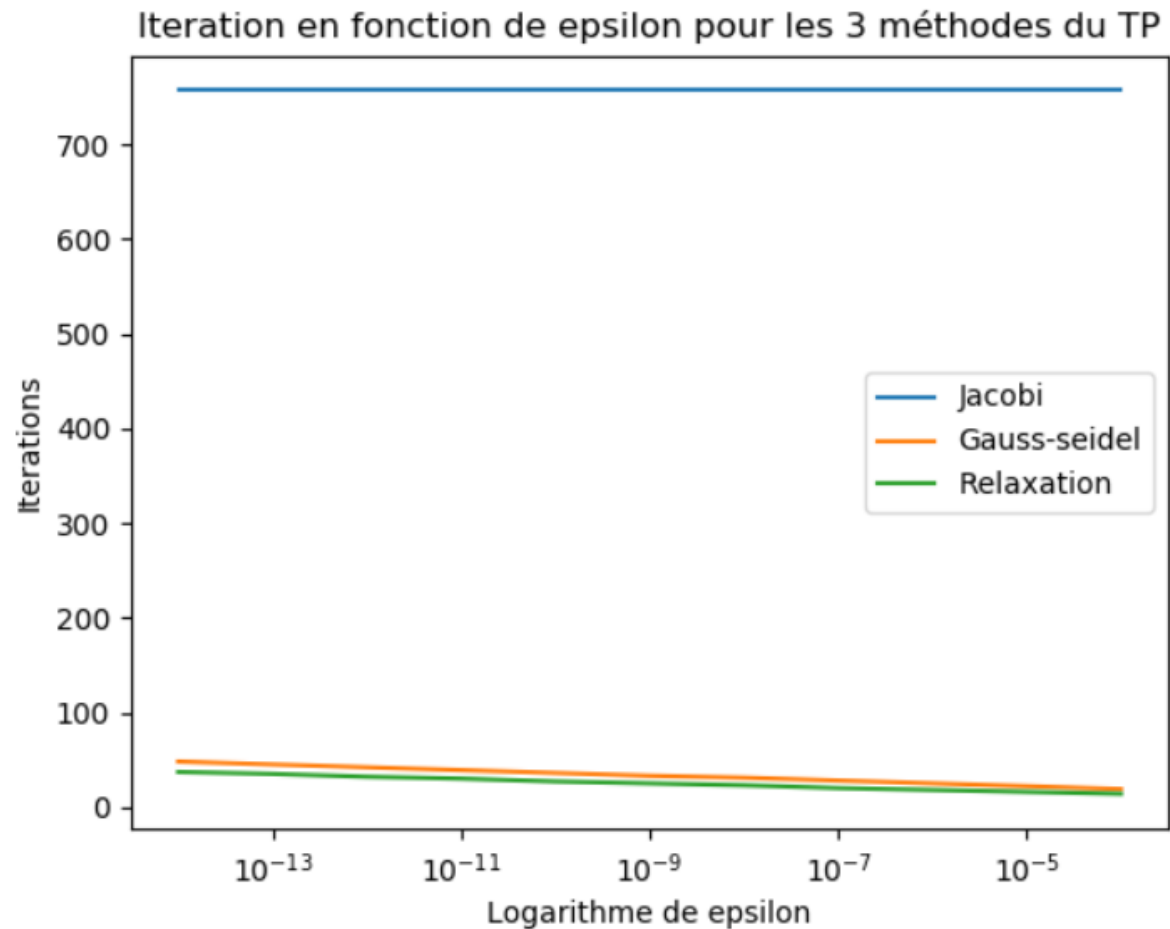
Dans cette partie, nous cherchons à trouver la valeur optimale d'omega, pour la première matrice pour optimiser la méthode de relaxation. Pour ce faire, nous calculons le nombre d'itération pour chaque omega que nous faisons varier de 0.5 à 1.5. Et d'après la lecture graphique, nous remarquons que la valeur optimale d'omega est égale à 1. Or cela revient à dire que la méthode Relaxation est égale à la méthode Gauss-seidel lorsque omega est égal à 1. On en déduit donc que Gauss-seidel est équivalent à la méthode Relaxation optimale pour traiter cette matrice.



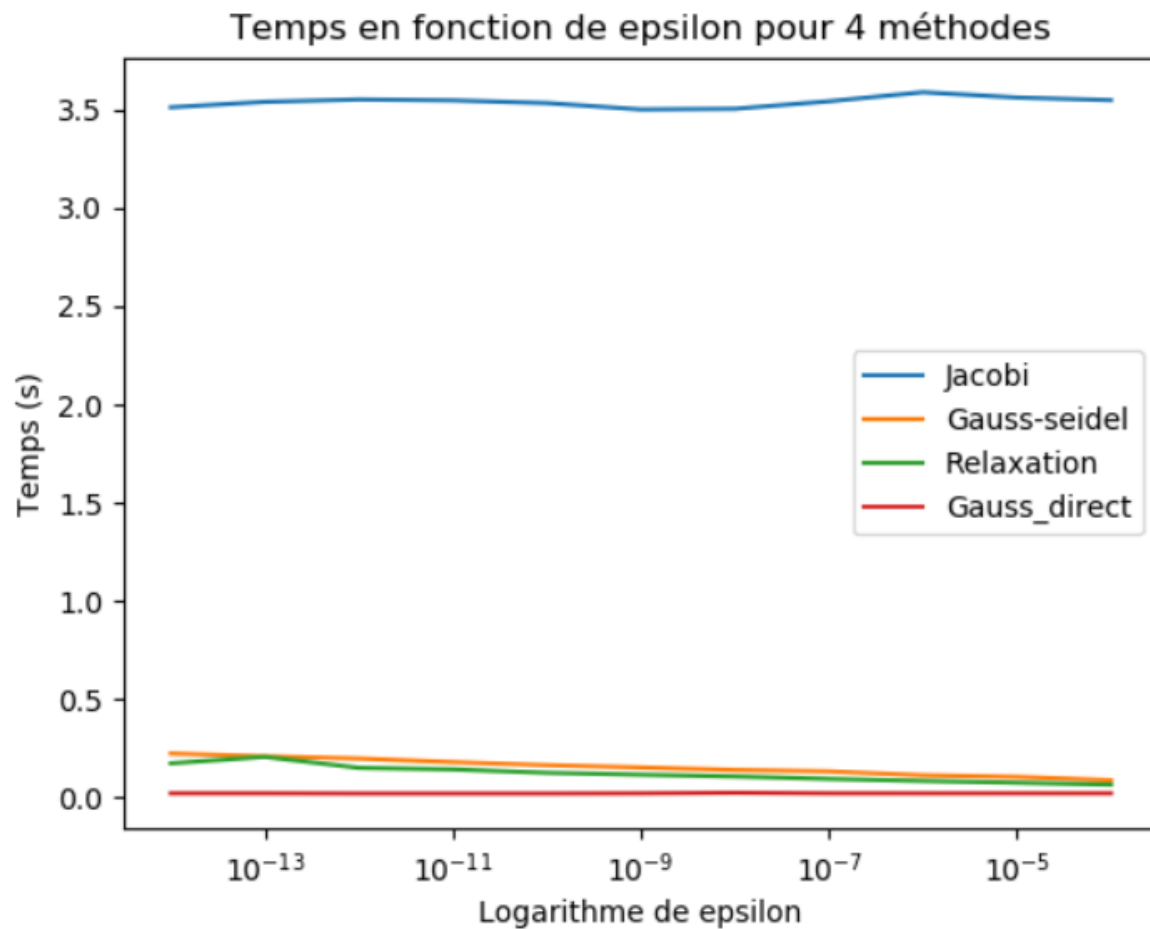
Ainsi, nous reproduisons la même méthode qu'à la question d'avant avec la matrice de la question 2. Cependant, nous faisons varier omega de 0.25 à 1.25 pour plus de precision. Et nous remarquons que l'omega optimal est égal à 0.8. Par conséquent, nous allons reproduire les courbes de la question 2 mais avec omega optimal et observer les différents changements avec la méthode relaxation.



Ce graphique correspond au même graphique qu'à la question 2 avec une légère différence au niveau du omega. Il ne s'agit plus d'un omega choisit arbitrairement mais du omega optimal qui est égal à 0.8. Dans ce cas précis, nous ne remarquons aucun changement avec la question 2. On en conclut que les différentes valeurs de omega ne diffèrent significativement pas la valeur de l'erreur en fonction de l'epsilon.



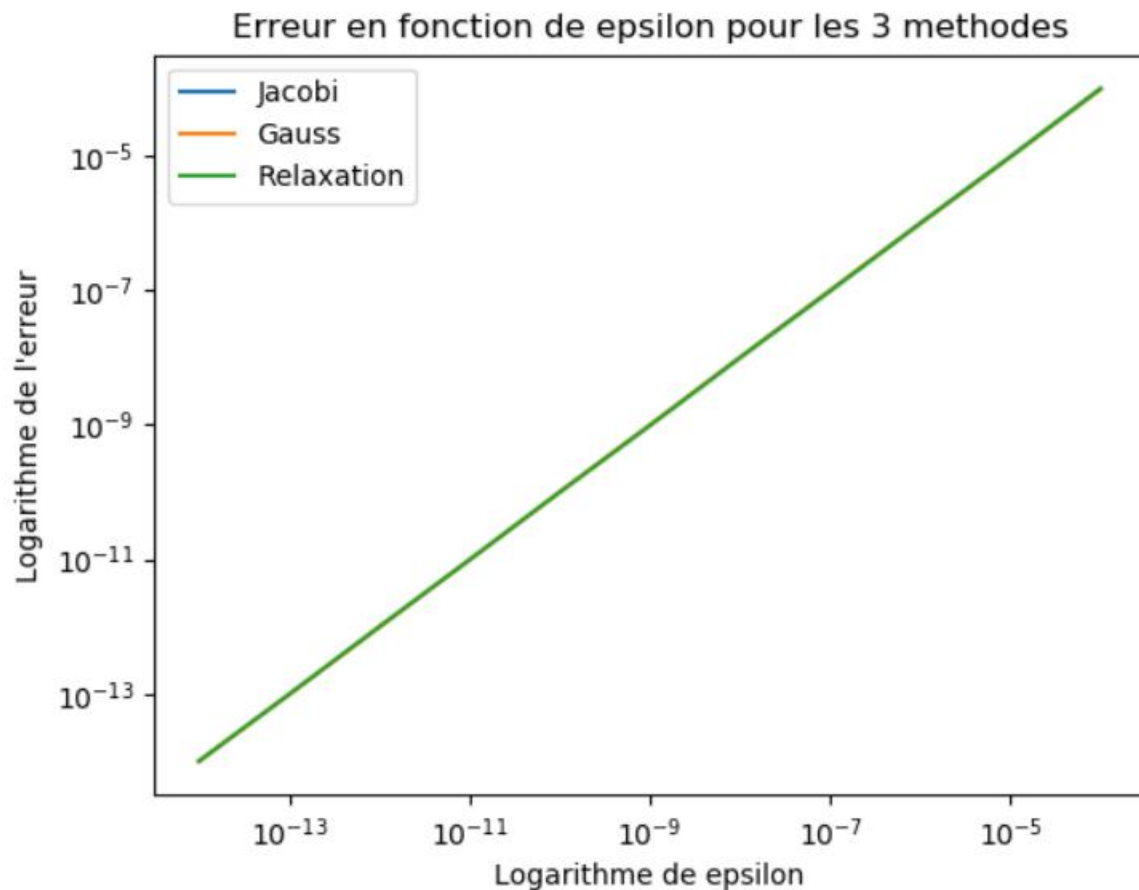
Contrairement au graphique d'avant, nous remarquons sur celui-ci une différence liée au changement d' ω . En effet, la méthode Relaxation possède désormais moins d'itérations que la méthode Gauss-Seidel, ce qui n'était pas le cas dans la question 2. Ainsi, la méthode Relaxation optimale est définie plus rapide que la méthode Gauss-Seidel.



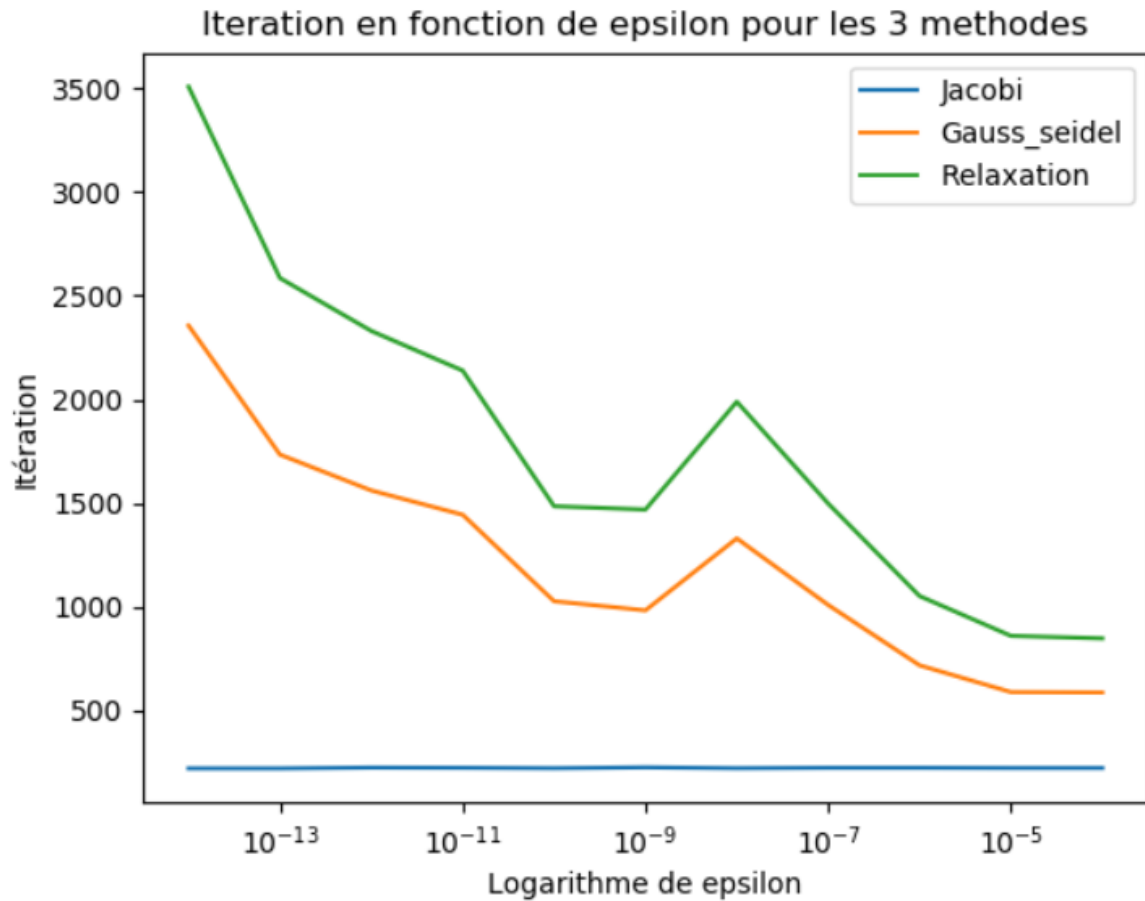
Comme indiqué au-dessus, la méthode Relaxation devient plus rapide que la méthode Gauss-seidel avec omega optimal. Cependant, la méthode Gauss-direct reste plus rapide. Mais nous rappelons que cela est uniquement dû grâce au fait que la taille de la matrice n'est pas vraiment importante. Dans le cas d'une matrice de taille 1000 la méthode de Gauss-direct aurait été plus lente.

III. Expérimentation des méthodes sur des matrices générées aléatoirement

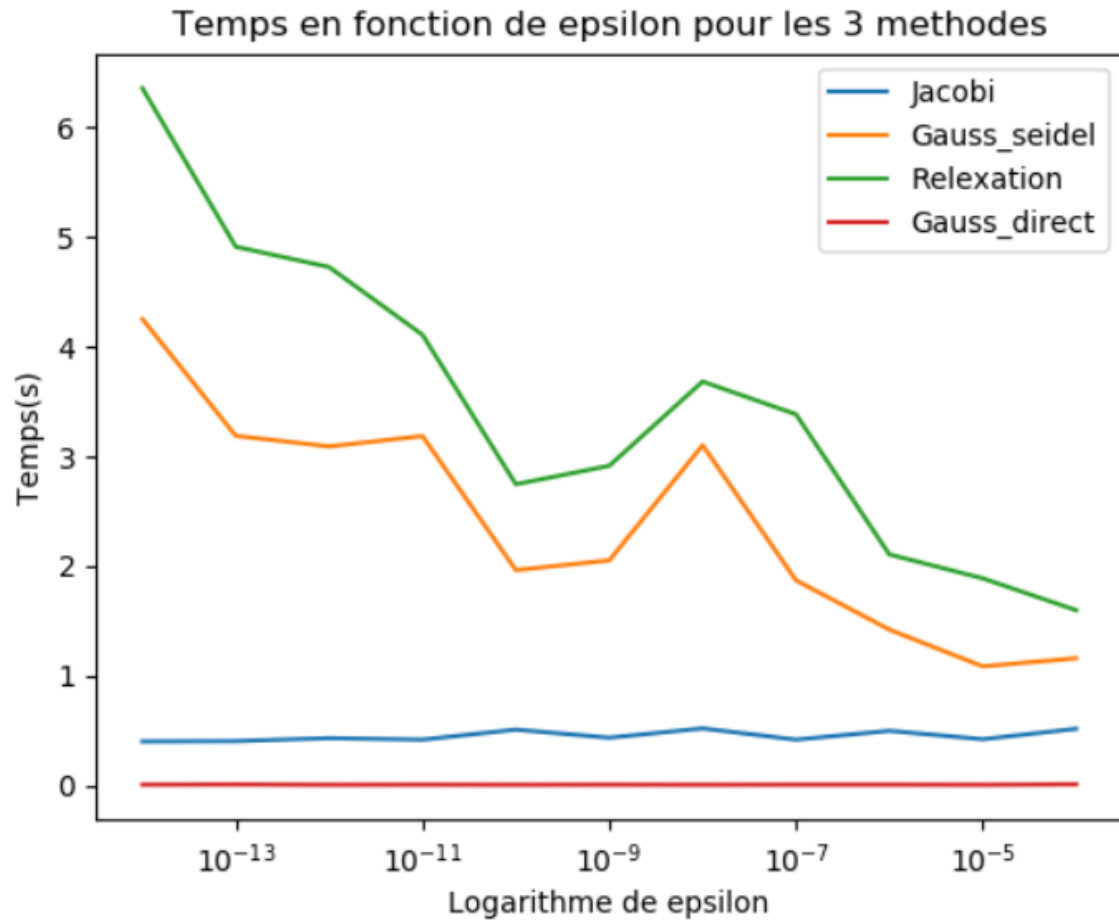
Dans cette dernière partie, nous allons appliquer les trois méthodes itératives vues précédemment sur des matrices de taille 50 générées aléatoirement avec un nombre d'itérations maximum de 100 000 et nous prendrons un ω à 1.2.



Sur ce graphique de l'erreur en fonction d'epsilon, nous remarquons que les trois méthodes sont équivalentes et que la courbe représente la fonction linéaire erreur = epsilon, en d'autre terme nous avons la droite identité. C'est exactement ce que l'on souhaité trouver car cela veut dire que la précision que nous avons imposé est la précision qui est rendue.



Nous remarquons, dans un premier temps sur ce graphique, que le nombre d'itérations de chaque méthode a considérablement augmenté par rapport aux matrices précédentes. Etrangement, nous trouvons que la méthode Jacobi a le moins d'itérations que les deux autres méthodes, ce qui n'était pas du tout le cas pour les cas précédents. De plus, nous constatons quelques pics sur les méthodes Relaxation et Gauss-seidel qui sont liés aux calculs de la matrice aléatoire, ces pics sont propres à chaque matrice.



Comme expliqué précédemment, nous retrouvons la même allure que le graphique précédent car le nombre d'itérations et le temps sont liés. Et nous remarquons que la courbe de la méthode Gauss-direct est encore une fois la plus rapide, ce qui est logique puisque la matrice générée est de taille 50 et donc par conséquent les méthodes non itératives sont plus rapides que les méthodes itératives.

IV. Conclusion

À travers ce TP3, nous avons exploité plusieurs méthodes itératives qui permettent de résoudre l'équation $Ax=b$. Nous avons utilisé les méthodes de Jacobi, de Gauss-Seidel et de relaxation. Dans un premier temps, nous avons expérimenté des fonctions simples permettant d'appliquer les différentes méthodes en sachant que $A = M - N$ avec M et N des matrices variables. Dans le cas de Jacobi, M est une matrice diagonale. Dans le cas de Gauss-Seidel, M est une matrice triangulaire supérieure de A et N une matrice triangulaire inférieure. Dans le cas de la méthode de relaxation, on définit la matrice D comme étant une matrice diagonale de A qui reprend les éléments de la diagonale de A et $M = \frac{1}{\omega}D - E$ et $N = \left(\frac{1}{\omega} - 1\right)D + F = F$. Nous avons testé la résolution de $Ax=b$ en prenant des matrices A et B aléatoires.

Ainsi, il y a plusieurs méthodes itératives pour résoudre $Ax= b$ comme il y a plusieurs manières de programmer la résolution de celle-ci. Nous avons pu comparer entre plusieurs méthodes itératives. La résolution par la méthode de Gauss-Seidel nécessite moins d'itérations que celle de Jacobi. De plus, la méthode de Gauss-Seidel commet moins d'erreur de calcul et est ainsi plus précise. Tandis qu'avec la méthode de relaxation, le facteur de relaxation ω varie selon la taille de la matrice et donc son rayon de convergence également. Pour un facteur de relaxation de 1, on tombe sur la méthode de Gauss-Seidel. Ainsi, le nombre d'itération pour réaliser le calcul est identique à celle de Gauss-Seidel et ainsi plus faible que celle de Jacobi. Le fait de trouver un ω optimal permet de résoudre le système avec moins d'erreur que les autres méthodes. Si l'on prend un ω très différents du ω optimal, le rayon de convergence sera très élevé ce qui montre l'influence et l'importance du facteur de relaxation sur la méthode SOR. Ainsi, après avoir créé l'ensemble des fonctions, il est possible de déterminer les solutions de l'équation de toute matrice A et B de manière plus efficace avec moins d'itérations et surtout avec des erreurs relativement faibles que si nous les réalisions à la main.

Les méthodes itératives contrastent avec les méthodes directes qui résolvent le problème en une seule étape. Les méthodes itératives se substituent avantageusement aux autres lorsque celles-ci sont inapplicables, coûteuses ou simplement inconnues ; lorsque le problème est mal conditionné ou comprend un grand nombre de variables car les solutions successives limitent la propagation des erreurs.