

IPSA

# Résolution numérique des équations différentielles

TP n°2

Ramel El zenary  
11/04/2021

## Table des matières

Résolution de l'équation linéarisée.....	2
Équation exacte.....	3
Travail Supplémentaire.....	5
Suspension d'un véhicule.....	6

## Résolution de l'équation linéarisée

Pour les petits mouvements ( $\theta \approx 0$ ), on linéarise l'équation différentielle en posant  $\sin(\theta) \approx \theta$ .

1. Ecrire l'équation linéarisée et vérifier que :  $\theta(t) = A \cos\left(\sqrt{\frac{g}{L}}t + \phi\right)$  où  $A, \phi \in \mathbb{R}$  est une solution.

Dans un premier temps, on linéarise l'équation (1) de l'énoncé avec l'approximation  $\sin \theta \approx \theta$ .

On obtient alors l'équation suivante :

$$\theta''(t) = -\frac{g}{L}\theta$$

On dérive ensuite  $\theta(t) = A \cos\left(\sqrt{\frac{g}{L}}t + \phi\right)$  deux fois pour vérifier si on tombe bien sur l'équation linéarisée obtenu précédemment.

$$\theta'(t) = -A\sqrt{\frac{g}{L}}\sin\left(\sqrt{\frac{g}{L}}t + \phi\right)$$

$$\theta''(t) = -A\sqrt{\frac{g}{L}}\sqrt{\frac{g}{L}}\cos\left(\sqrt{\frac{g}{L}}t + \phi\right)$$

$$\theta''(t) = -\frac{g}{L}\theta(t)$$

L'expression est donc bien solution à l'équation, de plus en effectuant l'approximation dans le sens inverse on tombe bien sur l'expression de base comme on peut le voir ci-dessous :

$$\text{avec } \theta(t) \approx \sin \theta(t)$$

$$\theta''(t) = -\frac{g}{L}\sin \theta(t).$$

2. Soit  $g = 9.81 \text{ m/s}^2$ ,  $L = 1 \text{ m}$  et  $\omega_0 = 2\pi f$

- a. La pulsation  $\omega_0$  du mouvement est

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{L}}$$

- b. La fréquence  $f$  du mouvement est

$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{L}}$$

- c. La période  $T$  du mouvement est

$$T = \frac{1}{\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{L}}} = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$$

- d. Notre pendule est considéré comme idéale les frottements de l'air sont donc négligés,

sans frottement il n'y a pas de résistance, sans résistance le mouvement s'effectue de manière plus libre et par conséquent, plus rapidement. Le mouvement réel subissant les frottements de l'air, on en déduit que le mouvement calculé est plus rapide que le mouvement réel.

- e. Plus le mouvement est rapide plus la période sera petite, donc la période du pendule réel sera inférieure à la valeur calculée.
- f. Pour conclure, le pendule réel avec forces de frottements dispose d'un mouvement rapide correspondant à une petite période, contrairement aux pendules idéals qui lui dispose d'un faible mouvement correspondant à une période plus grande.

3. On utilise les conditions initiales données sur l'énoncé et l'équation :

$$\theta(t) = A \cos\left(\sqrt{\frac{g}{L}}t + \phi\right).$$

Pour  $\theta'(0) = 0$ :

$$\theta'(0) = -A\sqrt{\frac{g}{L}}\sin\left(\sqrt{\frac{g}{L}}*0 + \phi\right)$$

$$-A\sqrt{\frac{g}{L}}\sin(\phi) = 0, \text{ avec } A > 0 \text{ et } \sqrt{\frac{g}{L}} > 0$$

$$\phi = 0$$

Pour  $\theta(0) = \frac{\pi}{2}$  :

$$\theta(0) = A \cos\left(\sqrt{\frac{g}{L}}*0 + \phi\right)$$

$$A \cos(\phi) = \frac{\pi}{2}$$

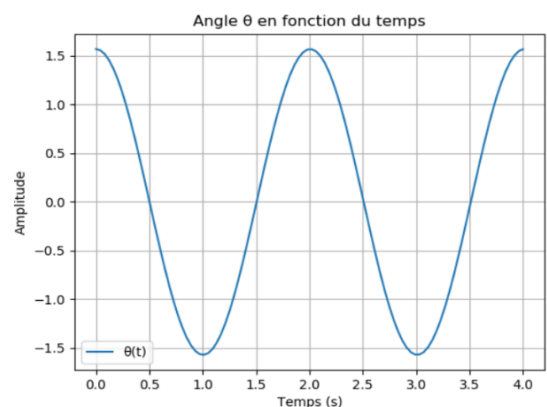
$$A \cos(\phi) = \frac{\pi}{2}, \text{ avec } \cos(\phi) = 1$$

$$A = \frac{\pi}{2}$$

On en arrive à la conclusion que :

$$\phi = 0 \text{ et } A = \frac{\pi}{2}$$

4. Voici la courbe :



## Équation exacte

### 1. Mise en equation : problème de Cauchy

Posons :

$$\begin{cases} \theta_1 = \theta \\ \theta_2 = \theta' \end{cases}$$

En dérivant on obtient :

$$\begin{cases} \theta_1' = \theta_2 \\ \theta_2' = \theta'' = f(t, \theta_1) \end{cases}$$

Posons également :

$$Y = \begin{pmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{pmatrix}$$

En dérivant on obtient :

$$Y' = \begin{pmatrix} \theta_1' \\ \theta_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \theta_2 \\ -\frac{g}{L} \sin \theta_1(t) \end{pmatrix} = F(t, Y)$$

En appliquant les conditions initiales on obtient :

$$Y_0 = \begin{pmatrix} \theta_1(0) \\ \theta_2(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \theta(0) \\ \theta'(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\pi}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$$

Montrons que  $F$  est lipschitzienne par rapport à  $Y$ .

Soulignons tout d'abord que la fonction  $F$  est continue sur  $I * \mathbb{R}^2$ .

Nous pouvons maintenant démontrer que  $\|F(t, Y) - F(t, Z)\| \leq l\|Y - Z\|$

Posons alors  $Y = \begin{pmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{pmatrix}$  et  $Z = \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \end{pmatrix}$

On a :

$$F(t, Y) = \begin{pmatrix} \theta_2 \\ -\frac{g}{L} \sin \theta_1 \end{pmatrix}$$

$$F(t, Z) = \begin{pmatrix} \gamma_2 \\ -\frac{g}{L} \sin \gamma_1 \end{pmatrix}$$

On a alors :

$$\|F(t, Y) - F(t, Z)\| \leq |\theta_2 - \gamma_2| + \left| \frac{g}{L} (\sin \theta_1 - \sin \gamma_1) \right|$$

$$\leq |\theta_2 - \gamma_2| + \frac{g}{L} |\sin \theta_1 - \sin \gamma_1|$$

Or, nous savons que la fonction sinus est 1-lipschitzienne.

Par conséquent :

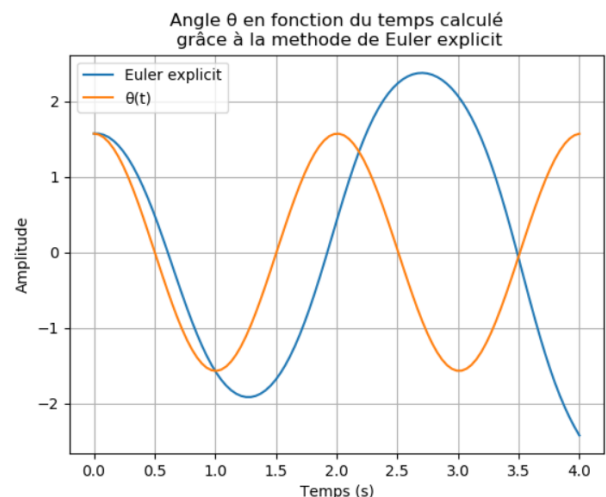
$$\begin{aligned} \|F(t, Y) - F(t, Z)\| &\leq |\theta_2 - \gamma_2| + \frac{g}{L} |\sin \theta_1 - \sin \gamma_1| \\ &\leq \frac{g}{L} (|\theta_2 - \gamma_2| + |\sin \theta_1 - \sin \gamma_1|) \\ &\leq \frac{g}{L} \|Y - Z\| \end{aligned}$$

$F$  est donc  $\frac{g}{L}$  lipschitzienne.

On en conclut, que d'après le théorème de Cauchy-Lipschitz qu'il existe une unique solution du problème de Cauchy (P).

### 2. Résolution numérique de l'équation exacte, par la méthode d'Euler

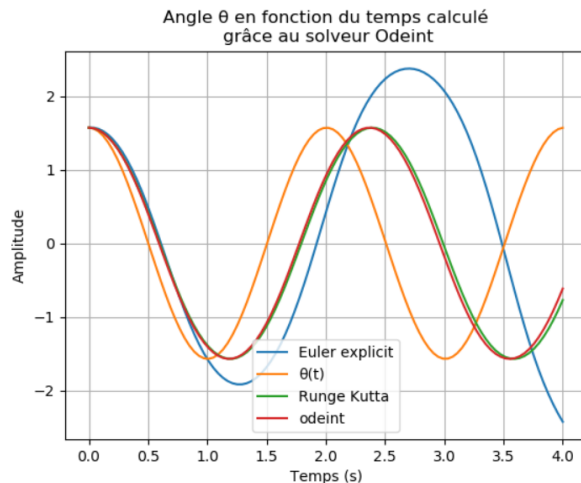
Voici le graphique obtenu grâce à la fonction de Euler explicite comparé avec la première courbe obtenu précédemment :



La courbe de Euler explicite commence à  $\frac{\pi}{2}$  ce qui est correct, cependant l'amplitude augmente avec le temps et la période également ce qui est incorrect, par conséquent on en conclut que la méthode d'Euler explicite, étant la plus simple des méthodes de résolution numérique d'équations différentielles n'est pas efficace pour cette équation.

### 3. Résolution numérique de l'équation exacte, par la méthode de Runge Kutta d'ordre 4

Voici le graphique obtenu grâce à la fonction de Runge Kutta d'ordre 4 comparé avec les deux premiers courbes obtenus précédemment :



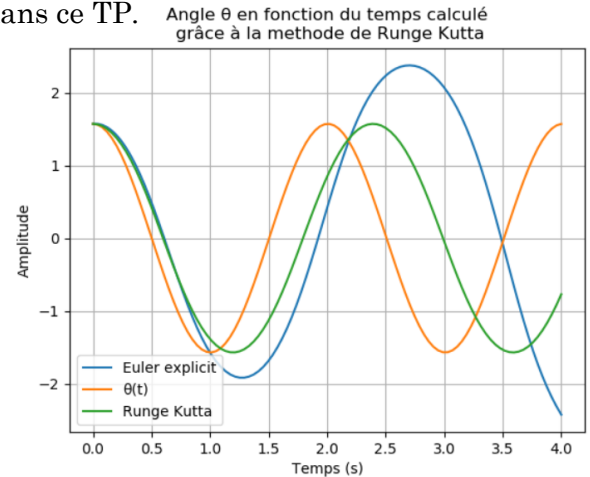
La courbe de Runge Kutta commence à l'amplitude  $\frac{\pi}{2}$  ce qui est correct.

Néanmoins on peut observer que la courbe engendrer pas la méthode de Runge Kutta conserve la même amplitude que celle de la courbe calculée au départ, cependant un déphasage apparait au fil du temps.

Pour conclure, la méthode de Euler explicite est la moins fiable, cela peut s'expliquer par le fait qu'elle est très simple à réaliser et ne compte que très peu d'opération. La méthode de Runge Kutta, quant à elle, présente de meilleurs résultats, cela peut s'expliquer par le fait que celle-ci compte plus d'opération.

### 4. Résolution numérique de l'équation exacte, avec le solveur odeint

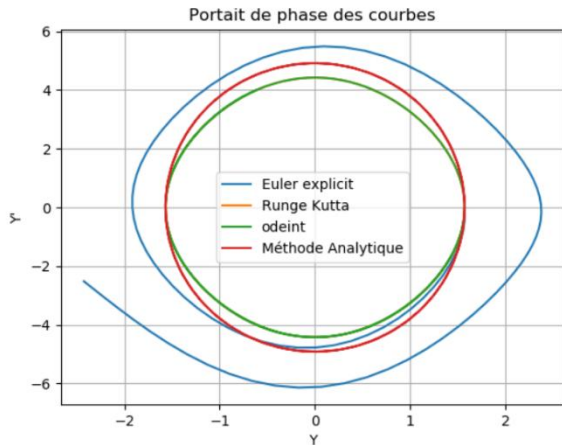
Grâce au solveur odeint, nous avons obtenu la courbe ci-dessous, accompagnée des courbes obtenues précédemment dans ce TP.



Il est aisé de remarquer que la courbe du solveur odeint se superpose avec celle de Runge Kutta, par conséquent la courbe engendrée par le solveur odeint présente les mêmes caractéristiques que celle de Runge Kutta.

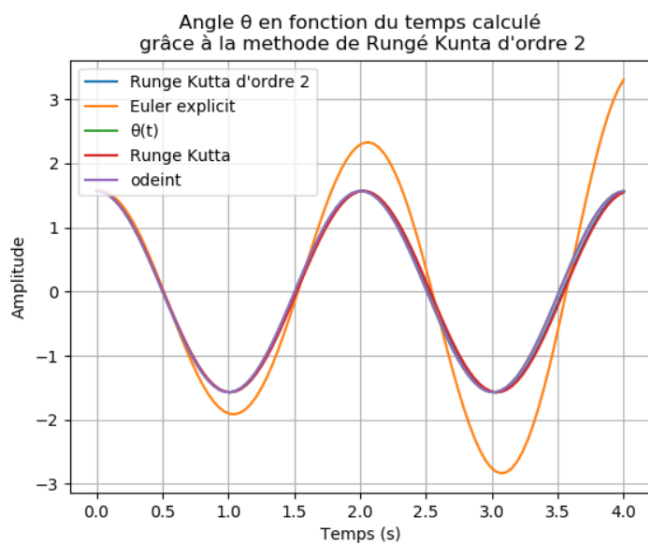
## Travail Supplémentaire

### 1. Portait de phase des courbes



La forme circulaire des courbes est un indice quant à leur stabilité et nous montre que toutes les méthodes sont stables hormis celle de Euler-explicite qui elle, devient divergent au cours du temps.

Grâce à la méthode de Runge Kutta d'ordre 2, nous avons pu générer la courbe ci-dessous, accompagnée de toutes les courbes générées précédemment.



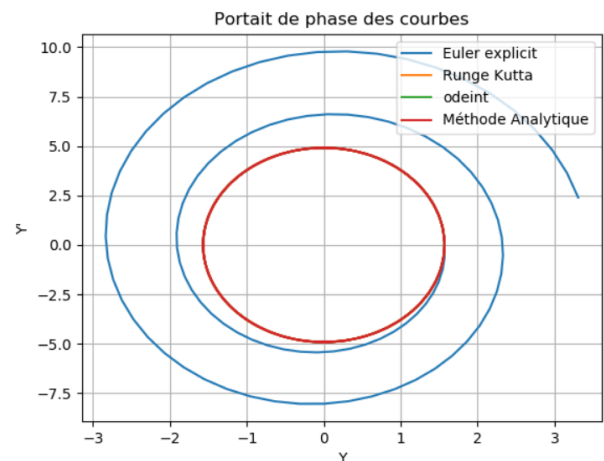
On s'aperçoit que la courbe de Runge Kutta d'ordre 2 est parfaitement superposée avec la courbe de Runge Kutta d'ordre 4 la rendant indiscernable l'une

de l'autre, la courbe de Runge Kutta d'ordre 2 a donc les mêmes caractéristiques que celle générée par la méthode de Runge Kutta d'ordre 4.

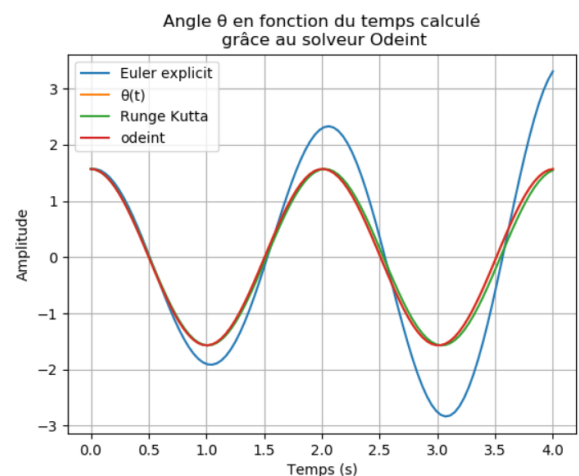
Il est intéressant de noter que l'on a obtenu les mêmes courbes avec moins d'opérations, en effet la méthode de Runge Kutta d'ordre 2 est moins complexe que celle d'ordre 4, on en conclut que la complexité de la méthode à l'ordre 4 n'est pas nécessaire pour notre problème.

Il est également intéressant d'observer qu'en effectuant la simplification  $\sin(\theta) \approx \theta$  on obtient les courbes suivantes

Pour le portrait de phase :

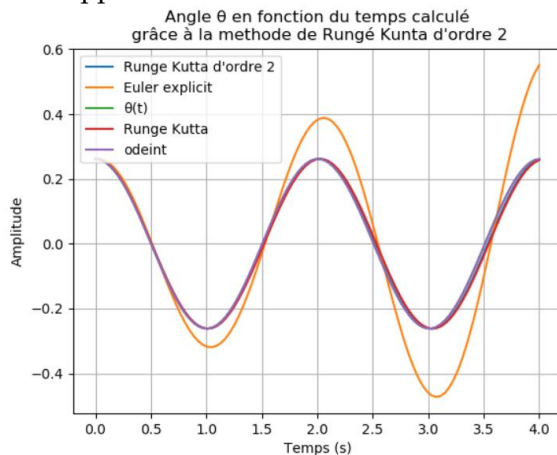


Pour les courbes résultantes des différentes méthodes de résolutions élaborées durant ce TP :

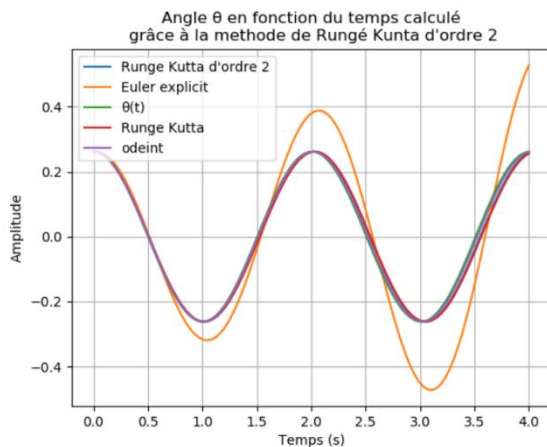


Il est intéressant de noter que le problème du déphasage disparaît en posant  $\sin(\theta) \approx \theta$  ce qui veut implicitement dire que l'approximation est mauvaise, on peut l'admettre car c'est une approximation pour les petits angles. Effectuons ces courbes avec une conditions initiales de  $\frac{\pi}{12}$  et non  $\frac{\pi}{2}$  cette fois ci.

Sans l'approximation :



Avec l'approximation :



On peut observer que les deux graphiques générer précédemment sont identiques, ce qui signifie que l'approximation est correcte lorsque l'angle traité est  $\frac{\pi}{12}$  mais devient incorrect lorsque c'est  $\frac{\pi}{2}$  car ce dernier est trop grand.

## Suspension d'un véhicule

### 1. Mise en équation : problème de Cauchy

2. On a :

$$\begin{cases} x_1''(t) = \frac{-C_2x_1' + C_2x_2' - (K_1 + K_2)x_1 + k_2x_2}{M_1} \\ x_2''(t) = \frac{C_2x_1' - C_2x_2' + K_2x_1 - K_2x_2 + f(t)}{M_2} \\ x_1(0) = x_2(0) = x_1'(0) = x_2'(0) = 0 \end{cases}$$

Avec  $\forall t \geq 0$

Posons :

$$Y = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_1' \\ x_2' \end{pmatrix}$$

Donc :

$$Y' = \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_1'' \\ x_2'' \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ \frac{-C_2x_1' + C_2x_2' - (K_1 + K_2)x_1 + k_2x_2}{M_1} \\ \frac{C_2x_1' - C_2x_2' + K_2x_1 - K_2x_2 + f(t)}{M_2} \end{pmatrix}$$

$$= F(t, Y)$$

D'après les conditions initiales :

$$Y_0 = \begin{pmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \\ x_1'(0) \\ x_2'(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

3. Montrons que F est lipschitzienne par rapport à Y. Notons d'abord que la fonction F est continue sur  $I * \mathbb{R}^2$ .

Maintenant, il faut que  $\|F(t, Y) - F(t, Z)\| \leq l\|Y - Z\|$ .

$$\text{Soient } Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix} \text{ et } Z = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \end{pmatrix}$$

On a :  $F(t, Y) =$

$$\begin{pmatrix} y_3 \\ y_4 \\ \frac{-C_2 y_3 + C_2 y_4 - (K_1 + K_2)y_1 + k_2 y_2}{M_1} \\ \frac{C_2 y_3 - C_2 y_4 + K_2 y_1 - K_2 y_2 + f(t)}{M_2} \end{pmatrix}$$

et

$F(t, Z) =$

$$\begin{pmatrix} z_3 \\ z_4 \\ \frac{-C_2 z_3 + C_2 z_4 - (K_1 + K_2)z_1 + k_2 z_2}{M_1} \\ \frac{C_2 z_3 - C_2 z_4 + K_2 z_1 - K_2 z_2 + f(t)}{M_2} \end{pmatrix}$$

Donc :

$$\|F(t, Y) - F(t, Z)\| \leq |y_3 - z_3| + |y_4 - z_4| + \left| \frac{1}{M_1} (-C_2(y_3 - z_3) + C_2(y_4 - z_4) - (K_1 + K_2)(y_1 - z_1) + k_2(y_2 - z_2)) \right| + \left| \frac{1}{M_2} (C_2(y_3 - z_3) - C_2(y_4 - z_4) + K_2(y_1 - z_1) - K_2(y_2 - z_2) + (f(t) - f(t))) \right|$$

$$\begin{aligned} &\leq |y_3 - z_3| + |y_4 - z_4| + \frac{C_2}{M_1} |y_3 - z_3| + \frac{C_2}{M_1} |y_4 - z_4| + \frac{K_1 + K_2}{M_1} |y_1 - z_1| + \frac{K_2}{M_1} |y_2 - z_2| + \frac{C_2}{M_2} |y_3 - z_3| + \frac{C_2}{M_2} |y_4 - z_4| + \frac{K_2}{M_2} |y_1 - z_1| + \frac{K_2}{M_2} |y_2 - z_2| \\ &\leq \left(1 + \frac{C_2}{M_1} + \frac{C_2}{M_2}\right) |y_3 - z_3| + \left(1 + \frac{C_2}{M_1} + \frac{C_2}{M_2}\right) |y_4 - z_4| + \left(\frac{K_1 + K_2}{M_1} + 1\right) |y_1 - z_1| + \left(\frac{K_2}{M_1} + \frac{K_2}{M_2}\right) |y_2 - z_2| \end{aligned}$$

$$\leq \sup \left( \left(1 + \frac{C_2}{M_1} + \frac{C_2}{M_2}\right), \left(1 + \frac{C_2}{M_1} + \frac{C_2}{M_2}\right), \left(\frac{K_1 + K_2}{M_1} + 1\right), \left(\frac{K_2}{M_1} + \frac{K_2}{M_2}\right) \right) [|y_3 - z_3| + |y_4 - z_4| + |y_1 - z_1| + |y_2 - z_2|]$$

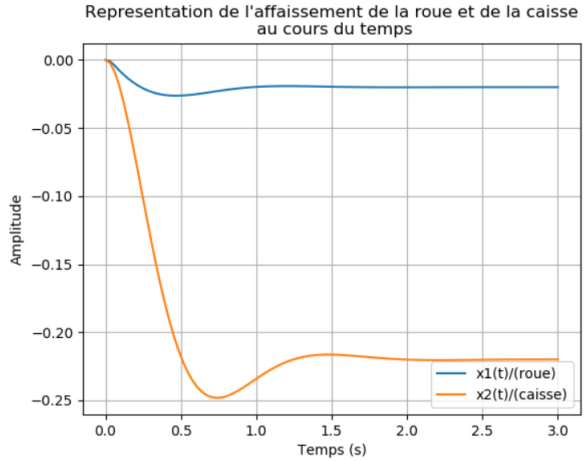
Donc :

$$\|F(t, Y) - F(t, Z)\| \leq \sup \left( \left(1 + \frac{C_2}{M_1} + \frac{C_2}{M_2}\right), \left(1 + \frac{C_2}{M_1} + \frac{C_2}{M_2}\right), \left(\frac{K_1 + K_2}{M_1} + 1\right), \left(\frac{K_2}{M_1} + \frac{K_2}{M_2}\right) \right) \|Y - Z\|$$

La fonction  $F$  est donc  $\sup \left( \left(1 + \frac{C_2}{M_1} + \frac{C_2}{M_2}\right), \left(1 + \frac{C_2}{M_1} + \frac{C_2}{M_2}\right), \left(\frac{K_1 + K_2}{M_1} + 1\right), \left(\frac{K_2}{M_1} + \frac{K_2}{M_2}\right) \right)$  – lipschitzienne

On en conclut, que d'après le théorème de Cauchy-Lipschitz qu'il existe une unique solution du problème de Cauchy (P).

## 2. Résolution numérique



Ici on voit que la courbe de la roue descend beaucoup plus faiblement car la courbe bleue ne présente que très peu d'oscillation, cependant la courbe de la caisse elle connaît de plus forte fluctuation, ce qui représente bien ce qui se passe dans la vie réelle.

## Conclusion

Pour conclure les méthodes les plus efficaces sont trop Runge Kutta et le solveur odeint, la méthode Euler-explicit quant à elle est une méthode peu fiable et cela s'explique par le fait que c'est une méthode relativement simple.