



*Mini Projet – Résolution numérique des équations
différentielles*

Année universitaire 2020-2021

Ramel EL ZENARY

Table des matières

3 Équation intégrale	3
3.3 Équation de Love en électrostatique	4
4.Circuit RLC.....	4
5. Moteur à courant continue	5
6. Mouvement d'une fusée	6
7. Modèle proie-prédateur.....	7

3 Équation intégrale

Questions :

1. Écrire le problème sous la forme matricielle suivante :

$$\left(I - \frac{h}{2} * A\right) * U = F \text{ où } A, U \text{ et } F \text{ à déterminer}$$

Voici donc les matrices :

- A est une matrice de taille NxN avec i étant l'indice sur les lignes et j celui sur les colonnes.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & K(x_i, t_0) + 2K(x_i, t_1) & 2K(x_i, t_j) & K(x_i, t_j) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & K(x_N, t_0) + 2K(x_N, t_1) & 2K(x_N, t_N) & K(x_N, t_N) \end{pmatrix}$$

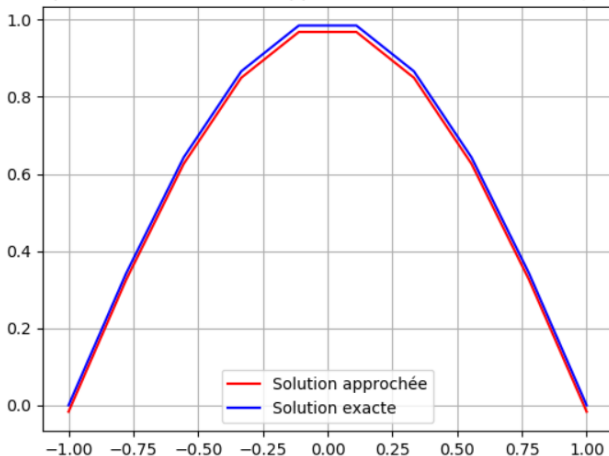
(A noter que la troisième colonne représente toutes les colonnes de la matrice de la troisième à l'avant dernière colonne inclus.)

- F et U sont des vecteurs de tailles N.

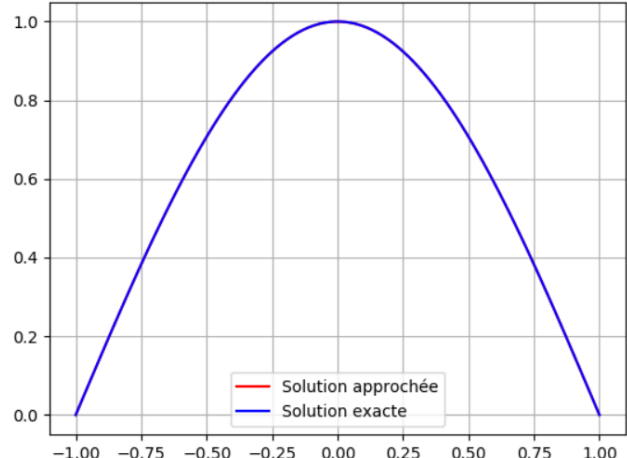
$$U = \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \\ \vdots \\ u_N \end{pmatrix} \quad F = \begin{pmatrix} f(x_0) \\ f(x_1) \\ \vdots \\ f(x_N) \end{pmatrix}$$

2. Tracer dans le même graphique les courbes de la solution exacte et approchée :

Comparaison de la solution approchée à la solution exacte (n=10)



Comparaison de la solution approchée à la solution exacte (n=100)

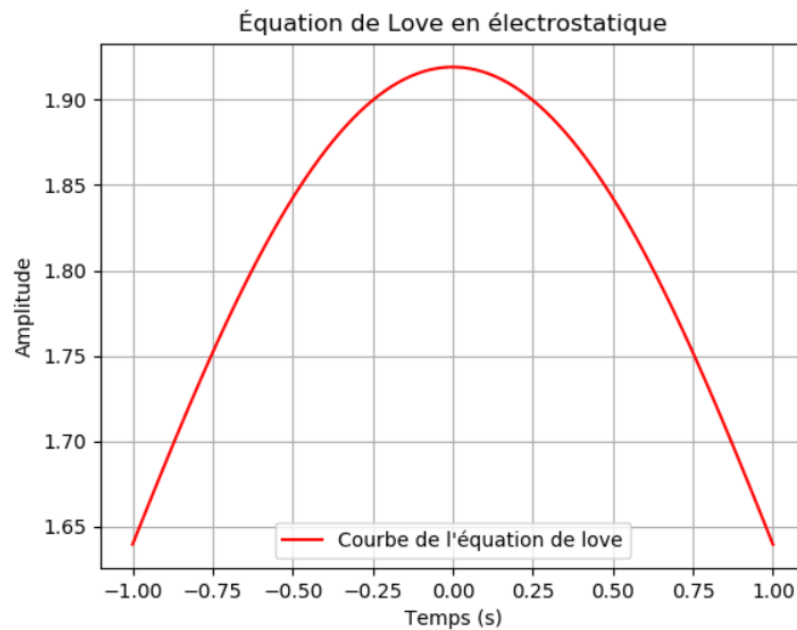


On s'aperçoit que, dans un cas général l'algorithme est efficace car il permet d'approximer correctement la solution exacte. Ici on peut voir que l'algorithme est plus ou moins efficace en fonction de si le nombre d'intervalle n sont nombreux ou non.

La norme de l'erreur de l'approximation est de 0.05 pour n=10 et de 0.001 pour n = 100.

On observe donc que dans les deux cas l'erreur est très faible bien que celle-ci soit inversement proportionnelle avec la valeur de n. En effet plus n est élevé plus l'erreur est faible.

3.3 Équation de Love en électrostatique



Ici après avoir déterminé la courbe grâce à l'algorithme ainsi qu'aux paramètres fourni on peut observer qu'elle ressemble assez similairement à la fonction $\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)$ cependant son maximum n'est pas à 1 mais aux alentours de 1.95 dans notre cas.

4. Circuit RLC

Questions :

1. Mettre ce système sous forme d'un problème de Cauchy

Déterminons Y_0, Y et F :

$$Y = \begin{pmatrix} s(t) \\ i(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{pmatrix} \quad Y_0 = \begin{pmatrix} s(0) \\ i(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad Y' = \begin{pmatrix} s'(t) \\ i'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{Y_2}{C} \\ \frac{e - Y_1 - RY_2}{L} \end{pmatrix} = F(t, Y)$$

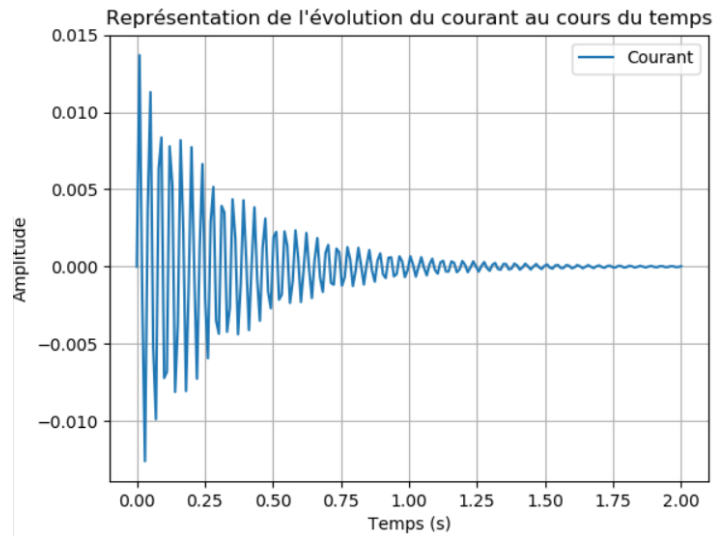
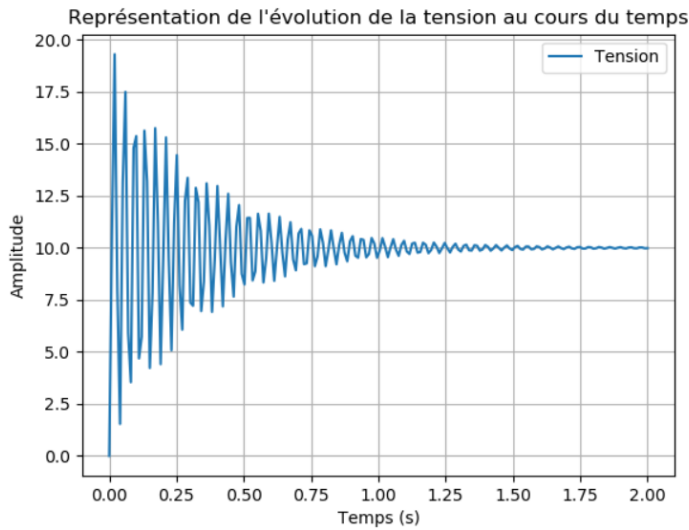
2. Montrer que le problème (P) admet une unique solution

Soient $Y = Y(t)$ et $Z = Z(t)$ appartenant à \mathbb{R}^2 . On a :

$$\begin{aligned} \|F(t, Y) - F(t, Z)\|_1 &= \left| \frac{e - Y_2 - RY_1}{L} - \left(\frac{e - Z_2 - RZ_1}{L} \right) \right| + \left| \frac{Y_1}{C} - \frac{Z_1}{C} \right| \\ &\leq \left| \frac{-Y_2 + Z_2}{L} \right| + \frac{1}{C} |Y_1 - Z_1| \\ &\leq \frac{1}{C} (|Y_2 - Z_2| + |Y_1 - Z_1|) \\ &\leq \frac{1}{C} \|Y - Z\|_1 \end{aligned}$$

D'après le théorème de Cauchy-Lipschitz le problème admet une unique solution car F est $\frac{1}{C}$ lipschitzienne par rapport à la deuxième variable et est continue sur $[0, 2] \times \mathbb{R}$.

Voici les représentations :



On a l'équation :

$$e = s(t) + Ri(t) + L \frac{di(t)}{dt} \Leftrightarrow e = s(t) + RC \frac{ds(t)}{dt} + LC \frac{d^2s(t)}{dt^2}$$

Son polynôme caractéristique est égal à :

$$LCr^2 + RCr + 1 = 0 \Leftrightarrow r^2 + \frac{R}{L}r + \frac{1}{LC} = 0$$

Finalement on a :

$$\Delta = \frac{R^2}{L^2} - \frac{4}{LC} < 0$$

Comme Δ est négatif on se retrouve dans le cas d'un régime pseudo-périodique, la caractéristique de ce régime étant que l'amplitude des courbes s'atténue au cours du temps est vérifié par l'observation de ses dernières.

5. Moteur à courant continue

Questions :

1. Mettre ce système sous forme d'un problème de Cauchy

Déterminons Y_0, Y et F :

$$Y = \begin{pmatrix} i(t) \\ \omega(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{pmatrix} \quad Y_0 = \begin{pmatrix} i(0) \\ \omega(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad Y' = \begin{pmatrix} i'(t) \\ \omega'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{u(t) - RY_1 - K_e Y_2}{L} \\ \frac{c_m - c_f}{J_m} \end{pmatrix} = F(t, Y)$$

2. Montrer que le problème (P) admet une unique solution

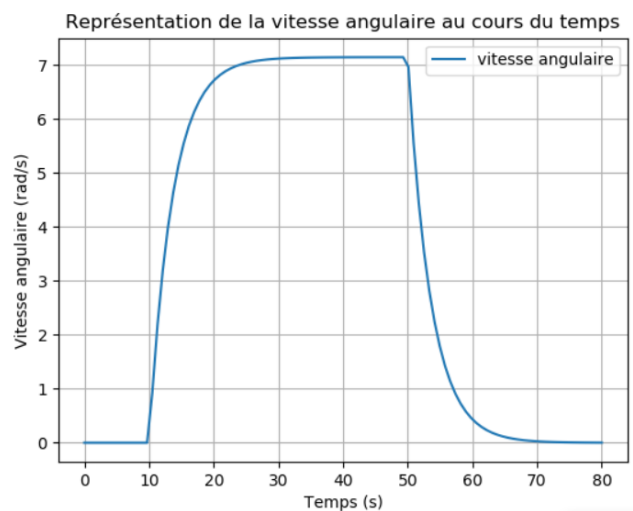
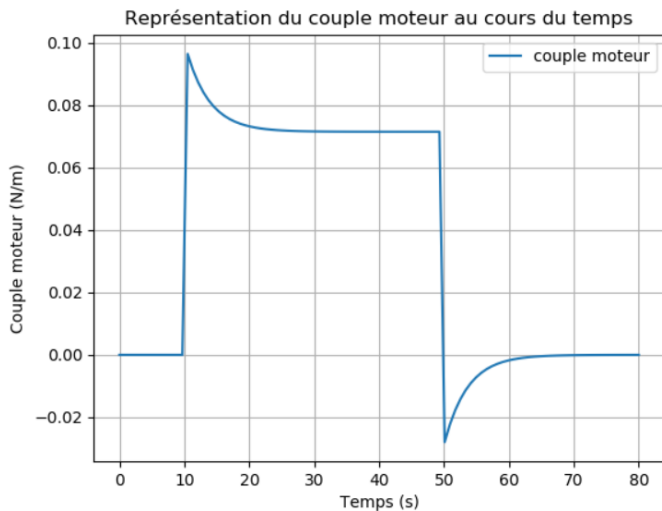
Soient $Y = Y(t)$ et $Z = Z(t)$, appartenant à \mathbb{R}^2 . On a alors :

$$\begin{aligned} \|F(t, Y) - F(t, Z)\|_1 &= \left| \frac{u(t) - RY_1 - K_e Y_2}{L} - \left(\frac{u(t) - RZ_1 - K_e Z_2}{L} \right) \right| \\ &\leq \frac{R}{L} |Y_1 - Z_1| + \frac{K_e}{L} |Y_2 - Z_2| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\leq \frac{R}{L} (|Y_1 - Z_1| + |Y_2 - Z_2|) \\ &\leq \frac{R}{L} \|Y - Z\|_1 \end{aligned}$$

D'après le théorème de Cauchy-Lipschitz le problème admet une unique solution car F est $\frac{R}{L}$ lipschitzienne par rapport à la deuxième variable et est continue sur $[0,80] \times \mathbb{R}$.

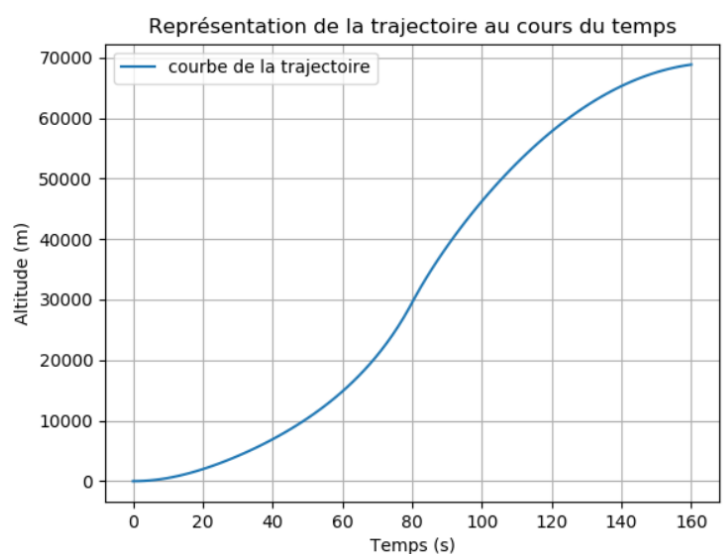
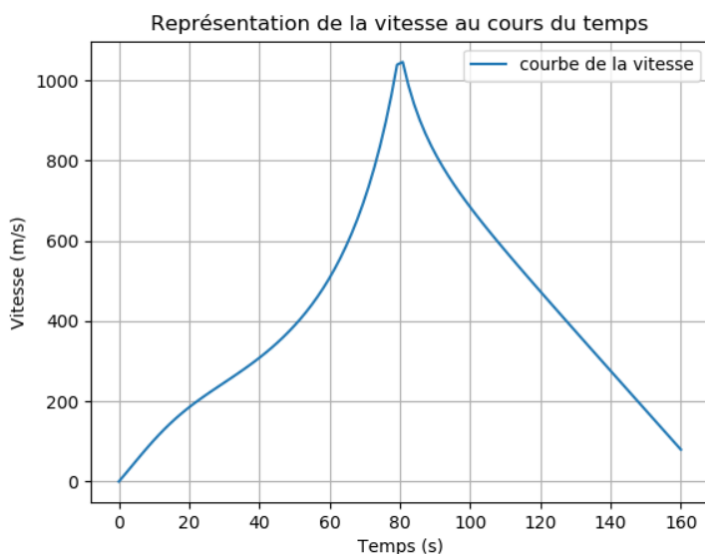
Voici les représentations :



$U(t)$ est nul jusqu'à 10 secondes ce qui explique la valeur nul du couple, une fois à 10 secondes, sous l'effet de la tension le couple moteur se met en marche brusquement puis se stabilise, puis, à 50 secondes, le couple s'arrête brusquement puis se stabilise encore.

En ce qui concerne la vitesse angulaire, les raisons de sa valeur nul sont les mêmes que pour le couple moteur, cependant contrairement au couple moteur, la vitesse angulaire se stabilise progressivement vers ses valeurs et non brusquement, ceci s'explique du fait qu'elle tourne de plus en plus vite et de plus en plus lentement progressivement dans le monde physique.

6. Mouvement d'une fusée

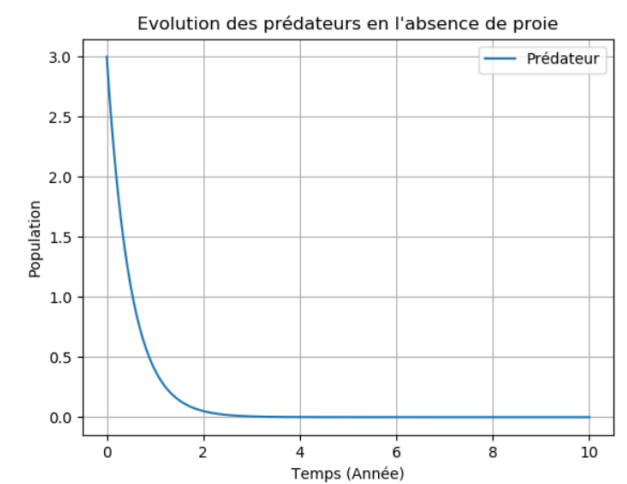
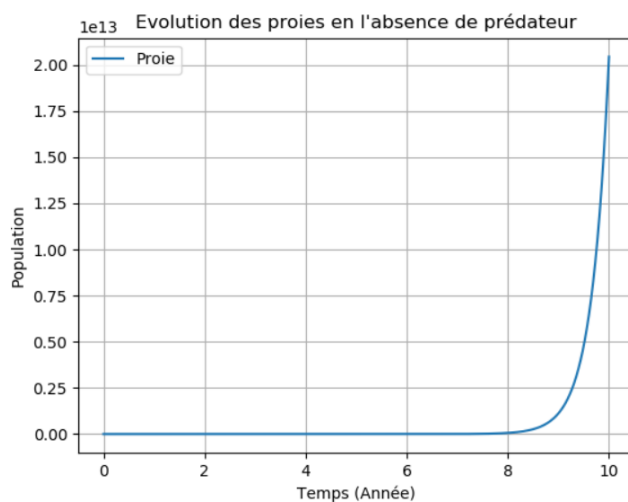


Ici on peut voir que la vitesse augmente jusqu'à un maximum d'environ 1050 m/s puis décroît à partir de 80 secondes, cela peut s'expliquer par le fait que la fin de la combustion du carburant s'est effectué à partir de cet instant, la fusée n'exerce donc plus de force compensant son poids et les frottements de l'air. Les conséquences sont le freinage du véhicule.

La trajectoire ressemble à une demi-parabole jusqu'à $t=80s$ tandis qu'après cet instant, elle à l'air de tendre vers une valeur constante, cela est explicable par la diminution de la vitesse.

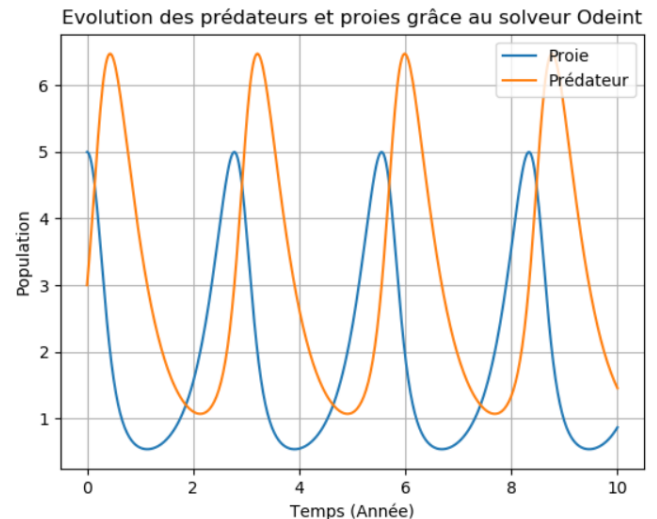
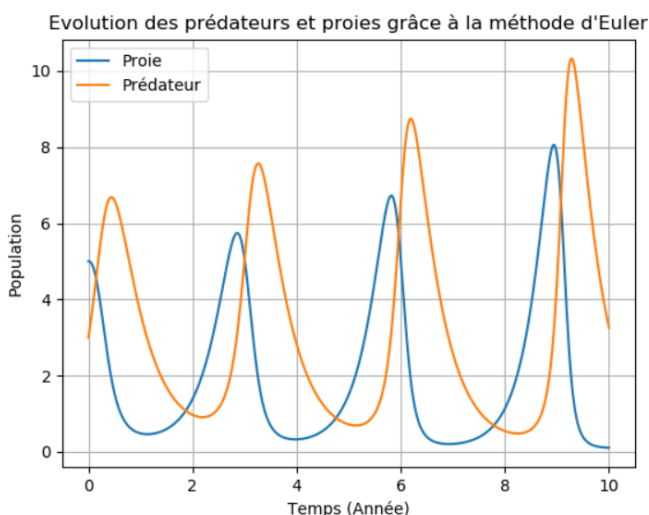
7. Modèle proie-prédateur

1. Pour déterminer l'évolution des proies en absences de prédateurs on a juste à fixer le nombre initial de prédateurs à 0, on effectue la même opération pour les prédateurs sans proies.



Sans les prédateurs la population des proies augmente car ils ne sont pas chassé tandis que sans proies les prédateurs disparaissent car ils ne peuvent pas se nourrir.

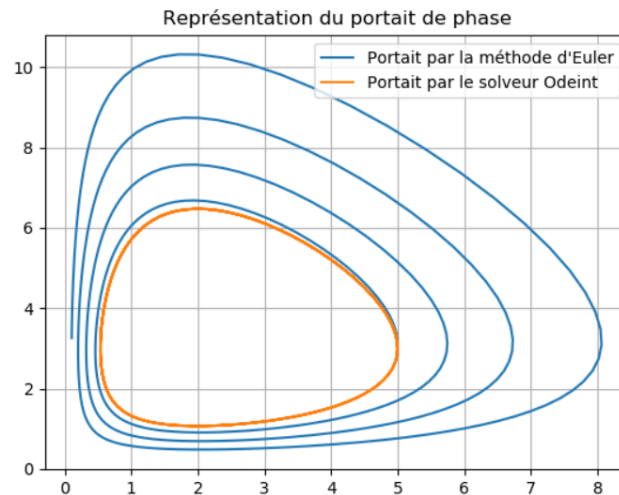
2. Voici les courbes de l'évolution de la population par la méthode de résolution « Euler explicite » et par le solveur Odeint :



On voit qu'avec la méthode de Euler explicite les courbes diverges ce qui est incorrect tandis qu'avec le solveur odeint elles sont périodique ce qui parait plus correct.

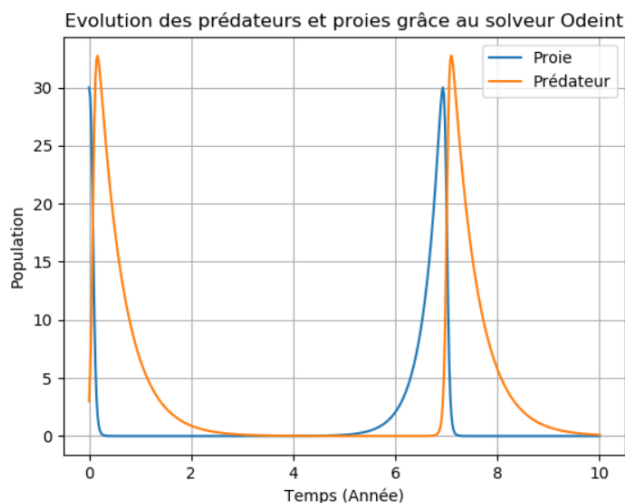
Plus généralement on observe qu'à mesure que les proies disparaissent les prédateurs suivent le mouvement jusqu'à ce que les proies réapparaissent pour que les prédateurs suivent le mouvement à nouveau. Cela s'explique tout simplement par le fait que quand les proies disparaissent les prédateurs ne peuvent pas se nourrir et dépérissent, ce qui implique que les proies ne sont plus chassées et réapparaissent et ainsi de suite.

3. Voici le portait de phase générée par les deux méthodes précédentes :

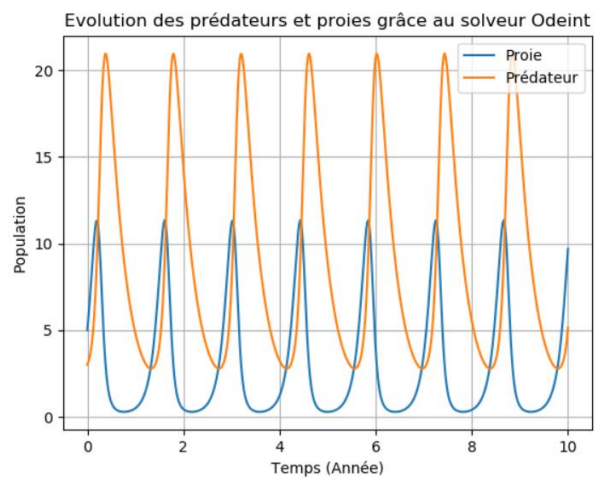


Le portait de phase par la méthode d'Euler diverge ce qui illustre l'instabilité de méthode sur ce problème tandis que pour le solveur odeint le portait de phase ne diverge pas et converge, ce qui illustre la stabilité de la méthode et confirme ce que nous avons supposé précédemment. 4

6. Travail d'imagination :



Ici nous avons mis 10 fois plus de proies initialement que de prédateurs ce qui a eu pour effets que les prédateurs ont plus se reproduire de manière à surpasser le nombre de proies pour finalement suivre le même schéma que dans les cas précédent pour disparaître et réapparaître au même moment que les proies.



En aillant multiplié le taux de reproduction des proies par 3, contre ce que nous pouvions prédire, ce sont les prédateurs qui sont plus nombreux, cela peut s'expliquer par le fait que plus il y a de proies de disponible, plus les prédateurs peuvent se nourrir et ainsi agrandir leur espèce.