Sahraoui Yousra , Spécialité :EDP

Solution devoir Méthode d'analyse fonctionnelle.

Exo-1 : Etablire les inégalités de H'older et Minkowski pour les suites.

Solution :

i/Inégalité de H'older : soit x_k et $y_k \in \mathbb{C}^n$, pour toute p,q$\in \mathbb{R}_+^*$tq : $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$

Alors :$\sum_{k=1}^n |x_k y_k| \leq (\sum_{k=1}^n |x_k|^p)^{\frac{1}{p}} (\sum_{k=1}^n |y_k|^q)^{\frac{1}{q}}$.

ii/Inégalité de Minkowski : soit x_k et $y_k \in \ell^p$,pour $p \geq 1$

Alors : $(\sum_{k=1}^n |x_k+y_k|^p)^{\frac{1}{p}} \leq (\sum_{k=1}^n |x_k|^p)^{\frac{1}{p}} + (\sum_{k=1}^n |y_k|^p)^{\frac{1}{p}}$.

Démonstration :

(i) :On a $\frac{1}{p}x^p + \frac{1}{q}y^q \geq xy$pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}_+$, pour tout $(p,q) \in \mathbb{R}^*$

Alors : $xy \leq \frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q}$ on sait que ln est une fonction concave

Donc : $\ln\left(\frac{1}{P}x + \frac{1}{q}y\right) \geq \frac{1}{P}\ln(x) + \frac{1}{q}\ln(y) \Rightarrow \ln\left(\frac{1}{P}x^p + \frac{1}{q}y^q\right) \geq \frac{1}{p}\ln(x^p) + \frac{1}{q}\ln(y^q) = \ln(x) + \ln(y) = \ln(xy)$

$\Rightarrow \ln\left(\frac{1}{P}x + \frac{1}{q}y\right) \geq \ln(xy) \Rightarrow \frac{1}{P}x + \frac{1}{q}y \geq xy \cdots (1)$

On suppose que : $\sum_{k=1}^n |x_k|^p = 1$et $\sum_{k=1}^n |y_k|^q$=1$\cdots (*)$

$(1) \Leftrightarrow |x_k y_k| \leq \left|\frac{1}{p}x^p + \frac{1}{q}y^q\right| \leq \frac{|x|^p}{p} + \frac{|y|^q}{q} \Rightarrow \sum_{k=1}^n |x_k y_k| \leq \sum_{k=1}^n \frac{|x|^p}{p} + \sum_{k=1}^n \frac{|y|^q}{q} \Rightarrow \frac{1}{p}\sum_{k=1}^n |x|^p + \frac{1}{q}\sum_{k=1}^n |y|^q$

D'aprés $(*)$ on a : $\sum_{k=1}^n |x_k y_k| \leq \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$(par hypothése)

comme $\sum_{k=1}^n |x_k|^p = 1$et $\sum_{k=1}^n |y_k|^q$=1 $\Rightarrow$$(\sum_{k=1}^n |x_k|^p)^{\frac{1}{p}} = 1$et $(\sum_{k=1}^n |y|^q)^{\frac{1}{q}}$=1

Donc :$(\sum_{k=1}^n |x_k|^p)^{\frac{1}{p}} (\sum_{k=1}^n |y|^q)^{\frac{1}{q}} = 1$

Finalement :$\sum_{k=1}^n |x_k y_k| \leq (\sum_{k=1}^n |x_k|^p)^{\frac{1}{p}} (\sum_{k=1}^n |y_k|^q)^{\frac{1}{q}}$.

(ii)soit x_k et $y_k \in \ell^p$

pour $p=1$: $\sum_{k=1}^n |x_k+y_k| \leq \sum_{k=1}^n |x_k| + \sum_{k=1}^n |y_k|$vérifiée

puisque $|x_k+y_k| \leq |x_k|+|y_k|$pour tout $k$de $\mathbb{N} \Rightarrow \sum_{k=1}^n |x_k+y_k| \leq \sum_{k=1}^n |x_k| + \sum_{k=1}^n |y_k|$.

pour $p>1$: $\sum_{k=1}^n |x_k+y_k|^p = \sum_{k=1}^n |x_k+y_k|^{p-1}|x_k+y_k| \leq \sum_{k=1}^n |x_k+y_k|^{p-1}(|x_k|+|y_k|)$

$$\leq \sum_{k=1}^n |x_k||x_k+y_k|^{p-1} + \sum_{k=1}^n |y_k||x_k+y_k|^{p-1}$$

$$\leq (\sum_{k=1}^n |x_k|^p)^{\frac{1}{p}} \left[\sum_{k=1}^n (|x_k+y_k|^{p-1})^q\right]^{\frac{1}{q}} + (\sum_{k=1}^n |y_k|^p)^{\frac{1}{p}} \left[\sum_{k=1}^n (|x_k+y_k|^{p-1})^q\right]^{\frac{1}{q}}$$

$(p-1)q = p$,puisque :$\left[\frac{1}{p}+\frac{1}{q} = 1 \Rightarrow \frac{p+q}{pq} = 1 \Rightarrow p = pq - q \Rightarrow p = q(p-1)\right]$

$\Rightarrow \sum |x_k+y_k|^p \leq (\sum |x_k+y_k|^p)^{\frac{1}{q}} \left[\sum (|x_k|^p)^{\frac{1}{p}} + \sum (|x_k|^p)^{\frac{1}{p}}\right]$

$\Rightarrow [\sum |x_k+y_k|^p]^{1-\frac{1}{q}} \leq \sum (|x_k|^p)^{\frac{1}{p}} + \sum (|x_k|^p)^{\frac{1}{p}}$ $\quad ,1-\frac{1}{q} = \frac{1}{p}$

$\Rightarrow [\sum |x_k+y_k|^p]^{\frac{1}{p}} \leq \sum (|x_k|^p)^{\frac{1}{p}} + \sum (|x_k|^p)^{\frac{1}{p}}$.

Exo-2 : énoncer et montrer le théorème de Baire.

Solution :

Soit Xun espace métrique complet

Soit $(x_n)_{n\geq 1}$ une suite des fermés de X, Si $\mathrm{Int}(\cup_{n=1}^{\infty} x_n) \neq \phi$Alors, il existe au moins un fermé $n_0, \mathrm{Int}(x_{n_0} \neq \phi)$.

Démonstration :

On pose : $O_n = x_n^c$ telle que O_n est un ouvert dense.Il s'agit de montrer que $G = \bigcap_{n=1}^{\infty} O_n$ est dense dans X.

Soit W un ouvert non vide de X ; on va prouver que $W \bigcap G \neq \phi$.

On note $B(x,r) = \{y \in X; d(y,x) < r\}$ on choisit $x_0 \in W$ et $r_0 > 0$ arbitraires tel que $\bar{B}(x_0, r_0) \subset W$.

On choisit ensuite $x_1 \in B(x_0, r_0) \cap O_1$ et $r_1 > 0$ tel que $\bar{B}(x_1, r_1) \subset B(x_0, r_0) \cap O_1$ et $0 < r_1 < \frac{r_0}{2}$

cice est possible puisque O_1 est ouvert et dense .Ainsi de suite,on construit par récurrence deux suites (x_n) et (r_n) tel que $\bar{B}(x_{n+1}, r_{n+1}) \subset B(x_n, r_n) \cap O_{n+1} \forall n \geq 0$ et $0 < r_{n+1} < \frac{r_n}{2}$

En résulte que la suite (x_n) est de cauchy; soit $x_n \to l$ comme $x_{n+p} \in B(x_n, r_n)$ pour tout $n \geqslant 0$ et tout $p \geq 0$, on obtient à la limite (quand $p \to \infty$) : $l \in \bar{B}(x_n, r_n) \forall n \geq 0$

En particulier $l \in W \cap G$.

Exo-3 : Soient X un Y deux espaces vectoriels normés et $T \in \mathcal{L}(X,Y)$. Montrer que

$$||T|| = \sup_{x \neq 0} \frac{||Tx||}{||x||} = \sup_{||x|| \leqslant 1, x \neq 0} ||Tx|| = \sup_{||x||=1} ||Tx||.$$

Solution :

Soit X, Y 2.e.v.n et $T \in (X,Y)$

On prende : $X = (E_1, ||.||_1)$ et $Y = (E_2, ||.||_2)$

Soit $T : E_1 \to E_2$, $T \in \mathcal{L}(X,Y)$

Alors : $||T|| = \sup_{||x||_1 < 1} ||T(x)||_2 = \sup_{||x||_1 \leqslant 1} ||T(x)||_2 = \sup_{||x||_1 = 1} ||T(x)||_2 = \sup_{x \neq 0} \frac{||T(x)||_2}{||x||_1}$

Démonstration : 1.Puisque T est continute, alors l'ensemble

$$B = \{C > 0; ||T(x)||_2 \leq C ||x||_1 \text{ pour } x \in E_1\}$$

est non vide, donc $||T|| = \inf\{\mathcal{C}; \mathcal{C} \in B\}$ existe dans R_+ . Soit $\mathcal{C} \in B$, Alors pour tout $x \in E_1$,

on a $||T(x)||_2 \leq \mathcal{C} ||x||_1$, donc $\sup ||T(x)||_2 \leq \mathcal{C}$.

Par conséquent, on a $\sup ||T(x)||_2 \leq \inf\{\mathcal{C}; \mathcal{C} \in B\} = ||T||$. Pour tout $x \neq 0$, on a

$\frac{||T(x)||_2}{||x||_1} \leq \sup_{x \neq 0} \frac{||T(x)||_2}{||x||_1}$,donc pour tout $x \in E_1$, on a $||T(x)||_2 \leq \left(\sup_{x \neq 0} \frac{||T(x)||_2}{||x||_1}\right) ||x||_1$,

d'ou $||T|| \leq \sup_{x \neq 0} \frac{||T(x)||_2}{||x||_1}$. Soit $x \in E_1$ tel que $x \neq 0$, alors on a :

$\frac{||T(x)||_2}{||x||_1} = || \frac{1}{||x||_1} T(x) ||_2 = ||T\left(\frac{x}{||x||_1}\right)||_2 \leq \sup_{||x||_1 = 1} ||T(x)||_2 \leq \sup_{||x||_1 \leqslant 1} ||T(x)||_2 \leq ||T||$.

Donc on a $\sup_{x \neq 0} \frac{||T(x)||_2}{||x||_1} \leq \sup_{||x||_1 = 1} ||T(x)||_2 \leq \sup_{||x||_1 \leqslant 1} ||T(x)||_2 \leq ||T||$. Par conséquent,

on a $||T|| = \sup_{||x||_1 \leqslant 1} ||T||_2 = \sup_{||x||_1 \leqslant 1} ||T||_2 = \sup_{||x||_1 = 1} \frac{||T(x)||_2}{||x||_1}$.

On a $\sup_{||x||_1 < 1} ||T||_2 \leq \sup_{||x||_1 \leqslant 1} ||T||_2 = ||T||$.

Il reste à montrer l'inégalité invers. Soit $x \in E$ tel que $||x||_1 \leq 1$, alors pour tout $n \geq 1$ on a

$|| \left(1 - \frac{1}{n}\right) x ||_1 = \left(1 - \frac{1}{n}\right) ||x||_1 < 1$, d'ou $\left(1 - \frac{1}{n}\right) ||T(x)||_2 = ||T\left(\left(1 - \frac{1}{n}\right) x\right)||_2 \leq \sup_{||x||_1 < 1} ||T(x)||_2$.

quand n tendre vers $+\infty$, on obtient $\|T\|_2 \leq \sup_{\|x\|_1<1} \|T\|_2$.

Par conséquent, on a $\|T\| \leq \sup_{\|x\|_1<1} \|T\|_2$.

Exo-4 :Montrer que les opérateurs linéaires bornés coincident avec les opérateurs linéaires continus.

Solution : soit $(E_1, \|\|_1), (E_2, \|\|_2)$ 2espaces normés et $T : E_1 \to E_2$une application linéaire

(i)T bornée $\Rightarrow T$continue

démo :soit T bornée i.e : il existe une constante M>0telle que pour tout $x \in E_1$, on ait $\|T(x)\|_2 \leq M$.

soit $x \in E_1$, avec $x \neq 0$, $\mathbf{f}$ on pose : $\eta = \| \frac{\eta x}{\|x\|_1} \|_1$

d'ou : $\|T\left(\frac{\eta x}{\|x\|_1}\right)\|_2 = \|\frac{\eta}{\|x\|_1}T(x)\|_2 = \frac{\eta}{\|x\|_1}\|T(x)\|_2$, d'ou :$\|T(x)\|_2 \leq \frac{\varepsilon}{\eta}\|x\|_1$. il suffit maintenant de prendre $M = \frac{\varepsilon}{\eta} \Leftrightarrow \|T(x)\|_2 \leq M\|x\|_1$qui est vérifiée que T continue$\cdots(1)$

(ii)Tcontinue$\Rightarrow$T bornée

démo :soit T est continue i.e :il existe une constante $M > 0$telle que pour tout $x \in E_1$,on ait

$\|T(x)\|_2 \leq M\|x\|_1$, si on pose $\|x\|_1 = 1 \Rightarrow \|T(x)\|_2 \leq M$ce qui donne T est borné.

Exo-5 :Soient X un espace vectoriel normé et M un sous-espace de X.On définit sur Xla relation binaire

$$x\mathcal{R}y \text{ si seulement si } x - y \in M.$$

Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalance. On note X/Ml'ensemble des classes d'équivalence pour la relation précédente. En notant la classe de $x$par $[x]$.Vérifier que pour les opérations

$$[x] + [y] = [x + y] \text{ et } \alpha[x] = [\alpha x].$$

L'espace X/M est une espace vectoriel. Si Mest fermé, montrer que $\|[x]\| = \inf \|y\|$est une norme sur X/M.

Montrer que si M est fermé dans un espace de Banach X,alors X/M est un espace de Banach.

Soit $T \in \mathcal{L}(X,Y)$et M un sous-espace fermé de $\ker(T)$.On définit $\hat{T} : X/M \to Y$par $\hat{T}([x]) = Tx$,montrer alors que $\hat{T}$ est un opérateur linéaire borné.

Supposons que X, Y, et Z sont des espaces de Banach, U$\in \mathcal{L}(X,Y)$ est surjectif et $l \in \mathcal{L}(X,Y)$. Si $\ker(U) \subset \ker(l)$,montrer qu'il existe un opérateur $T \in \mathcal{L}(Y,Z)$ tel que $l = TU$.(Théoréme de Sard).

Solution :

-montrons que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence

d'ou :$\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence :

$\mathcal{R}$est dit relation d'équivalence si elle est reflexive, symétrique et transitive .

i-$\forall x \in M, x\mathcal{R}x \Leftrightarrow x - x = 0 \in M$ alors : $\mathcal{R}$ reflexive.

ii-$\forall x, y \in M, x\mathcal{R}y \Leftrightarrow x-y \in M \Rightarrow -(y-x) \in M \Rightarrow y\mathcal{R}x$ alors :$\mathcal{R}$symétrique.

iii-$\forall x, y, z \in M, \{x\mathcal{R}y \Leftrightarrow x - y \in M \cdots(1) \text{ et } y\mathcal{R}z \Leftrightarrow y - z \in M \cdots(2)\}$

$\Rightarrow (1) + (2) : x - y + y - z = x - z \in M \Rightarrow x\mathcal{R}z.$ alors :$\mathcal{R}$ transitive.

Finalement, $\mathcal{R}$est une relation d'équivalence.

-montrons que l'espace X/M est une espace vectoriel :

Soit l'application $\pi : X \to X/M$, et soit $x_1, x_2, y_1, y_2 \in X$et $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que : $x_1 \mathcal{R} y_1$et $x_2 \mathcal{R} y_2$

Alors :$(x_1 + x_2) - (y_1 + y_2) = (x_1 - y_1) + (x_2 - y_2) \in X$, et $\lambda x_1 - \lambda y_1 = \lambda(x_1 - y_1) \in X$.

Autrement dit, si $\pi(x_1) = \pi(y_1)$ et $\pi(x_2) = \pi(y_2)$, alors on a $\pi(x_1 + x_2) = \pi(y_1 + y_2)$et $\pi(\lambda x_1) = \pi(\lambda y_1)$

Donc, par conséquent l'espace X/M est une espace vectoriel

-montrons que $\|[x]\| = \inf_{y\in[x]} \|y\|$est une norme sur X/M

i-$\|[x]\| = 0 \Rightarrow \inf_{y\in[x]} \|y\| = 0 \Rightarrow \|y\| = 0 \Rightarrow y = 0$.

ii-$\|\alpha[x]\| = \|[\alpha x]\| = \inf_{y\in[x]} \|\alpha y\| = \inf_{y\in[x]} (|\alpha| \|y\|) = |\alpha| \inf_{y\in[x]} \|y\| = |\alpha| \|[x]\|$.

iii-soit $y_1 \in [x_1], y_2 \in [x_2]$

$\|[x_1 + x_2]\| = \inf \|y_1 + y_2\| \leq \inf (\|y_1\| + \|y_2\|) \leq \inf_{y_1\in[x_1]} \|y_1\| + \inf_{y_2\in[x_2]} \|y_2\| = \|[x_1]\| + \|[x_2]\|$.

Finalement :$\|[x]\| = \inf_{y\in[x]} \|y\|$est une norme sur X/M.

-Montrer que si M est fermé dans un espace de Banach X,alors X/M est un espace de Banach.

puisque M est un fermé dans Xqui est un espace de Banach,Alors Mest de Banach

Soit $(z_n)_{n\geq 0}$ une suite de cauchy dans X/M, Alors : il existe une sous-suite $(z_{Q(n)})_{n\geq 0}$ de $(z_n)_{n\geq 0}$ telle que pour tout $n \geq 0$, on ait $\|z_{Q(n+1)} - z_{Q(n)}\|' < 2^{-n}$.

De plus, la suite $(z_n)_{n\geq 0}$ est convergente si est seulement si la sous-suite $(z_{Q(n)})_{n\geq 0}$ est covergente. On montre facilement par récurrence qu'il existe une suite $(x_n)_{n\geq 0}$ dans X telle que, por tout $n \geq 0$ on ait $\pi(x_n) = z_{Q(n)}$et $\|x_{n+1} - x_n\| < 2^{-n}$.

Alors : la suite $(x_n)_{n\geq 0}$ est de cauchy dans X.donc, elle converge vers $\pi(x)$.

Par conséquent, la suite $(z_n)_{n\geq 0}$ coverge vers $\pi(x)$ donc : X/M est de Banach.

Soit $T \in \mathcal{L}(X, Y)$et M un sous-espace fermé de $\ker(T)$.On définit $\hat{T} : X/M \to Y$par $\hat{T}([x]) = Tx$,montrer alors que $\hat{T}$ est un opérateur linéaire borné.

soit $[x], [y] \in X/M$: $\quad \hat{T}([x + y]) = T(x + y) = Tx + Ty = \hat{T}([x]) + \hat{T}([y])$

soit $[x] \in X/M$ et $\alpha \in \mathbb{K}$,$\hat{T}([\alpha x]) = T(\alpha x) = \alpha T(x)$=$\alpha\hat{T}([x])$,Alors : $\hat{T}$ est linéaire .

Alors : $\hat{T}$ est linéaire .

et comme $\|\hat{T}([x])\| = \|Tx\| \leq \mathcal{C}\|x\|$alors : $\|\hat{T}([x])\| \leq \mathcal{C}\|[x]\|$. Alors,$\hat{T}$ est bornée

D'ou :$\hat{T} \in \mathcal{L}(X, Y)$.

Exo-7 :soient X,Y deux espaces vectoriels normés.considérons l'opérateur $(A, \mathcal{D}_A)$ de X dans Y à domaine $\mathcal{D}_A$dense dans X.$(A^*, \mathcal{D}_{A^*})$étant le dual de $(A, \mathcal{D}_A)$. Montrer que $\mathcal{D}_{A^*} = Y'$si seulement si A est borné sur $\mathcal{D}_A$et que dans ce cas $A^* \in \mathcal{L}(Y', X')$ et $\|A\| = \|A^*\|$.

Solution :

$\Rightarrow$) soit $\mathcal{D}_{A^*} = Y'$ ceci revient : pour toute $f \in Y'$, $\langle Ax, f\rangle$définit une fonctionnelle bornée dans X'

autrement dit :$M = A\{\mathcal{D}_A \cup B\}$est faiblement bornée , Avec :M est l'image par A de l'union de $\mathcal{D}(A)$avex la Boule unité .

tel ensemble est donc borné, i.e. il existeune constante $\mathcal{C}$ telle que $\|Ax\| \leq \mathcal{C}$pour tout $X \in \mathcal{D}(A) \cup B$

Alors : Aest borné sur $\mathcal{D}(A) \cdots (1)$

$\Leftarrow$)soit A borné sur $\mathcal{D}(A)$Alors :$\langle Ax, f\rangle$est borné en $x \in \mathcal{D}(A)$ sur chaque ensemble borné et pour tout $f \in Y'$ D'ou : par conséquent $\mathcal{D}(A^*) = Y \cdots (2)$

D'aprés (1) et (2) : $\mathcal{D}_{A^*} = Y' \Leftrightarrow \mathcal{D}(A^*) = Y$

Comme A^*duale de $A \Rightarrow \langle Ax, f\rangle = \langle x, Af^*\rangle$Alors :

$|\langle x, A^* f\rangle| = |\langle Ax, f\rangle| \leqslant \|Ax\|\|f\| \leq \|A\|\|f\|\|x\|$ce qui entraine que :$\|A^* f\| \leq \|A\|\|f\|$

i.e. : $\|A^*\| \leq \|A\| \cdots (*)$

d'autre par on a : pour tout $\varepsilon > 0$,il existe $x_\varepsilon$tel que $\|x_\varepsilon\| = 1$et $\|\mathrm{Ax}_\varepsilon\| > \|A\| - \varepsilon$

par ailleurs, il existe $f_\varepsilon \in Y'$ tel que : $\|f_\varepsilon\| = 1$ et $\langle Ax_\varepsilon, f_\varepsilon\rangle = \|Ax_\varepsilon\|$

On a donc : $\|A^*\| \geq \|A^* f_\varepsilon\| \geq |\langle x_\varepsilon, A^* f_\varepsilon\rangle| = |\langle Ax_{_\varepsilon}, f_\varepsilon\rangle| = \|Ax_\varepsilon\| > \|A\| - \varepsilon$

$\|A^*\| > \|A\| - \varepsilon \Rightarrow \|A^*\| \geq \|A\| \cdots (**)$

D'aprés $(*)$et $(**)$donc : $\|A^*\| = \|A\|$.