Задача 1

Последовательность $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ определена рекурсивно.

$$a_0 = 1, a_{n+1} = \frac{a_n}{1 + na_n}.$$

Найдите формулу общего члена последовательности.

Решение

Введем обозначение $b_n = \frac{1}{a_n}$ Тогда $b_{n+1} = \frac{1 + na_n}{a_n} = b_n + n.$

Кроме того, $b_0 = \frac{1}{a_0} = 1$. Получаем, что

$$b_n = b_0 + 1 + 2 + \ldots + n - 1 = 1 + \frac{n(n-1)}{2} = \frac{n(n-1)+2}{2}.$$

Отсюда получаем $a_n = \frac{2}{n(n-1)+2}$.

Задача 2

Даём множество $A = \{1,2,...,n\}$. Среди всех его подмножеств равновероятно выбираем k его подмножеств $A_1,\ldots,A_k$. Найдите вероятность того, что
$A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_k = \varnothing$.

Решение

Рассмотрим элемент $i \in A$. Очевидно, подмножеств в A, содержащих i и не содержащих i, равное количество. Таким образом вероятность того, что i лежит в A_j равна 1/2. Эти вероятности независимы для разных j. Получаем, что вероятность того, что i содержится в $A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_k$ равна $1/2^k$. Соответственно, вероятность того, что i не содержится в $A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_k$, равна $1 — 1/2^k$. Эти вероятности независимы в разных i.

Получается, что вероятность того, что ни один из номеров i не попал в $A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_k$ равна $(1 — 1/2^k)^n$.

Задача 3

Дан массив длины n из нулей и единиц. Найдите в нём подмассив макисмальной длины, в котором количество единиц равно количеству нулей. Ограничения: O(n) по времени и O(n) по дополнительной памяти.

Решение

Обозначим исходный массив через a[·]. Заведём еще четыре массива длины n: b[·], c[·], d[·] и e[·]. Пройдём по возрастанию индексов и заполним массив b[·] по правилу: $b[0] = 2 \cdot a[0] — 1$, $b[i] = b[i — 1] + 2a[i] — 1$ при $i > 0$. Иными словами, если в массиве a[·] заменить нули на -1, то в массиве b[·] будут стоять суммы от $a[0]$ до $a[i]$. Заполним массивы c[·] и d[·] минус единицами. Далее идём по возрастанию номеров по массиву b[·]. Если $b[i] = k$, то $d[k] = i$, если при этом выполнено $c[k] = -1$, то присваиваем $c[k] = i$.

Далее, когда мы прошли по всему массиву b[·], заполним массив e[·] по правилу $e[i] = d[i] — c[i]$. Заметим, что если в массиве a[·] есть подмассив от $a[m]$ до $a[l]$, в котором равное количество единиц и нулей, то $b[m] = b[l] = k$. И тогда $c[k]$ — это минимальный номер i такой, что $b[i] = k$, а $d[k]$ — максимальный. Соответственно, $e[k]$ — максимальное расстояние между m и l, где $b[m] = b[l] = k$. Найдём максимум массива e[·]. (Очевидно, это можно сделать за O(n) операций.) пусть он равен $e[j]$. Тогда искомы подмассив — это подмассив от $a[c[j]]$ до $a[d[j]]$

Задача 4

Пусть
$$I_m = \int_0^{2\pi} \cos(x)\cos(2x)\ldots\cos(mx)\mathrm{d}x.$$

Для каких $m \in [0, 10]$ $I_m \neq 0$?

Решение

Многократно воспользуемся формулой:

$$\cos(lx)\cos(nx) = \frac{1}{2}(\cos((l+n)x) + \cos((l-n)x)).$$

С помощью этой формулы получим:

$$\cos(x)\cos(2x)\ldots\cos(mx) = \frac{1}{2}(\cos(x)+\cos(3x))\cos(3x)\cos(4x)\ldots\cos(mx) =$$
$$= \frac{1}{2}((\cos(x)\cos(3x)+\cos(3x)\cos(3x))\cos(4x)\ldots\cos(mx)) =$$
$$\frac{1}{4}((\cos(2x)+\cos(4x)+\cos(0)+\cos(6x))\cos(4x)\ldots\cos(mx)) = \ldots =$$
$$= \frac{1}{2^{m-1}}(\cos(\alpha_1 x)+\ldots+\cos(\alpha_{2^m} x)),$$

где $a_i = 1 \pm 2 \pm 3 \ldots \pm m \in Z$. Несложно убедиться, что чётности всех чисел a_i будут одинаковы. Более того, в случаях $m = 4k$ и $m = 4k + 3$ все a_i чётны. Если $a_i \neq 0$, то

$$\int_0^{2\pi} \cos(\alpha_i)x\mathrm{d}x = 0.$$

Значит, при $m = 4k + 1$ и $m = 4k + 2$, $I_m = 0$. Если же $m = 4k$ или $4k + 3$, то среди a_i обязательно есть ноль, так как между числами $1, 2, \ldots, m$ можно так расствить знаки «+» и «—», чтобы получился ноль. Действительно,

$(1 - 2 - 3 + 4) + (5 - 6 - 7 + 8) + \ldots + ((4k - 3) - (4k - 2) - (4k - 1) + 4k = 0,$
$(1 + 2 - 3) + (4 - 5 - 6 + 7) + \ldots + (4k - (4k + 1) - (4k + 2) + (4k + 3)) = 0.$

Таким образом, $m = 4k$ и $4k + 3$, $I_m = 0$. Ответ: при $m = 0,3,4,7,8.$

Задача 5

Дан неориентированный граф G без петель. Пронумеруем все его вершины. Матрица смежности графа G с конечным числом вершин n (пронумерованных числами от 1 до n) — это квадратная матрица A размера n, в которой значение элемента a_{ij} равно числу рёбер из i-ой вершины графа в j-ю вершину.

Докажите, что матрица A имеет отрицательное собственное значение.

<u>*Решение*</u>

Утверждение задачи не своcем верно. Если в графе нет рёбер, то матрица нулевая и все собственные значения равны нулю. Если же рёбра есть, то A —

симметрическая матрица с неотрицательными элементами и нулями на диагонали. Докажем, что у такой матрицы есть неотрицательное собственное значение.

Известный факт, что симметрическая матрица диагонализуема в вещественном базисе. (Все собственные значения вещественны.) Допустим, что все собственные значения А неотрицательны. Рассмотрим квадратичную форму q с матрицей А в базисе $\{e_1, \dots, e_n\}$. Тогда эта квадратичная форма неотрицательно определена, так как все собственные значения неотрицательны. То есть $\forall v\colon q(v) \geq 0.$ *С другой стороны, пусть $a_{ij} \neq 0$. Тогда*
$q(e_i - e_j) = a_{ii} - 2aij + a_{jj} = -2a_{ij} < 0$. Это противоречит неотрицательно определённости q. Значит исходное предположение неверно, и у А есть отрицательное собственное значение.

Задача 6

Рассмотрим бесконечный двумерный массив $\{a_{ij}\}_{i,j=1}^{\infty}$ *, состоящий из натуральных чисел, причём каждое число встречается ровно 8 раз. Докажите, что $\exists\,(m,n)\colon a_{mn} > mn$.*

<u>Решение</u>

Допустим, что $\forall (m,n)\colon a_{mn} \leq mn.$ *. Выберем некоторое $k \in N$ и рассмотрим кривую на плоскости $y = k/x$. Если $i,j \in N$ и точка (i,j) лежит под кривой $y=k/x$, то $a_{ij} \leq ij \leq i \cdot k/i = k$. Таким образом, количество целых точек под кривой $y = k/x$ должно быть не больше 8k. С другой стороны, количество целых точек под этой кривой не меньше, чем* $\int_2^k k/x \mathrm{d}x = k \ln x|_2^k = k(\ln k - \ln 2).$ *При достаточно большом k это число больше 8k. Таким образом, мы получаем противоречие. Следовательно, найдётся пара (m,n) такая, что : $a_{mn} > mn$.*

Задача 7

Дана матрица из нулей и единиц, причём для каждой строки матрицы верно следующее: если в строке есть единицы, то они все идут подряд (неразрывной группой из единиц). Докажите, что определитель такой матрицы может быть равен ±1 или 0.

Решение

Переставляя строки, мы можем добиться того, чтобы позиции первых (слева) единиц не убывали сверху вниз. При этом определитель либо не изменится, либо поменяет знак. Если у двух строк позиции первых единиц совпадают, то вычтем ту, в которой меньше единиц из той, в которой больше. Определитель при этом не меняется. Такими операциями мы можем добиться того, что позиции первых единиц строго возрастают сверху вниз. При этом либо матрица окажется вырожденной, либо верхнетреугольной с единицами на диагонали. То есть, определитель станет либо 0, либо 1. Так как определитель при наших операциях либо не менялся, либо поменял знак, изначальный определитель был ±1 или 0.

1. Определим последовательность x_n начальным условием $x_1=a$, $x_2=b$ и рекуррентной формулой $x_{n+1}={}_{12}(x_n+x_{n-1})$. Найдите $\lim_{n\to\infty} x_n$.
2. Рассмотрим функцию $\varphi(x) =\sum_{k=1\infty 122[\log 2k]} x_k$, где квадратные скобки означают целую часть числа. Найдите \int\limits_0^1 \varphi(x)\varphi^'(x)dx.
3. Рассмотрим всевозможные непустые множества $1,\dots,n$. В каждом подмножестве перемножим числа, обратные его элементам. Потом сложим полученное 2_n-1 число. Найдите полученную сумму.
4. Улоф Пальме и Рави Шанкар подбрасывают правильную монетку (вероятность выпадения орла 0.5). Улоф подбрасывает её n раз, а Рави — n+1. Найдите вероятность того, что у Рави орлов выпало больше, чем у Улофа.
5. Дано некоторое множество положительных чисел мощности континуум. Докажите, что из него можно выбрать счётное подмножество с бесконечной суммой.
6. Дан массив из n чисел. Предложите алгоритм, позволяющий за O(n) операций определить, является ли этот массив перестановкой чисел от 1 до n. Дополнительной памяти не более O(1).
7. Пусть $A_1,A_2,\dots,A_n$ — конечные множества и $a_{ij}=|A_i\cap A_j|$. Докажите, что матрица $(a_{ij})_{j=1,2..n i=1,2..n}$ неотрицательно определена.

Итак, **задача №1**. Как легко заметить, если бы не $\frac{1}{2}$, то это была бы формула чисел Фибоначчи. Вообще же задано **линейное рекуррентное отношение с постоянными коэффициентами.** Найдём его производящую функцию, то есть формулу общего члена. Для этого составим характеристический многочлен (прямо как по ссылке в википедии). Он будет таким: $p(t) = t^2 - \frac{1}{2}t - \frac{1}{2}$. Найдём его корни:

$$t^2 - \frac{1}{2}t - \frac{1}{2} = 0$$

$$2t^2 - t - 1 = 0$$

$$D = 1 - 4 \cdot 2 \cdot (-1) = 9$$

$$\sqrt{D} = 3$$

$$t_1 = \frac{1+3}{4} = 1, t_2 = \frac{1-3}{4} = -\frac{1}{2}.$$

Корни действительны и различны, и формула общего члена выглядит так:
$x_n = k_1 r_1^n + k_2 r_2^n$, где r_i – i-тый корень уравнения. Зная начальные условия, мы можем найти k_1 и k_2. Для этого подставим в формулу общего члена найденные корни, а n зададим равным 1 и 2. Итак,

$$x_1 = k_1 \cdot 1^1 + k_2 \cdot (-\frac{1}{2})^1 = k_1 - \frac{1}{2}k_2 = a,$$

$$x_2 = k_1 \cdot 1^2 + k_2 \cdot (-\frac{1}{2})^2 = k_1 - \frac{1}{4}k_2 = b.$$

Решая эту систему уравнений, получим, что $k_2 = \frac{4}{3}(b-a)$, $k_1 = a + \frac{1}{2}k_2 = \frac{1}{3}(a+2b)$.
Итак, итоговая формула общего члена последовательности равна:
$x_n = \frac{1}{3}(a+2b) + \frac{4}{3}(b-a)(-\frac{1}{2})^n$. Очевидно, что при $n \to \infty$ второе слагаемое стремится к нулю. Значит, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \frac{1}{3}(a+2b)$.

Задача №2.

В принципе, довольно просто заметить, что интеграл $\int \varphi(x)\varphi'(x)dx$ равен $\frac{\varphi(x)^2}{2} + C$. Можно или вспомнить формулу дифференцирования сложной функции $(\varphi(x)^2)' = 2\varphi(x)\varphi(x)'$, или попробовать проинтегрировать по частям: $\int udv = uv - \int vdu$, полагая $u = v = \varphi(x)$, получаем $\int \varphi(x)\varphi'(x)dx = \int \varphi d\varphi = \varphi\varphi-\int \varphi d\varphi$. Обозначим интеграл за Φ. Получим $\Phi = \varphi^2 - \Phi$. Отсюда $\Phi = \frac{\varphi(x)^2}{2}$. Итак, $\int\limits_0^1 \varphi(x)\varphi'(x)dx = \frac{\varphi(x)^2}{2}|_0^1 = \frac{\varphi(1)^2}{2}$, так как $\varphi(0)$ очевидно равно 0. Осталось найти $\varphi(1) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^{2[log_2 k]}}$. Здесь нужно задуматься о том, чему равно $[log_2 k]$. Это ни что иное, как количество значащих разрядов в двоичной записи числа k. Если выписывать натуральные числа по порядку, то $[log_2 k]$ будет иметь вид ряда $0, 1, 1, 2, 2, 2, 2, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, \ldots$. Ряд состоит из натуральных чисел, каждое (обозначим его за n) из которых повторяется 2^n раз. Так что $\varphi(1) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^{2[log_2 k]}} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{2^{2 \cdot n}} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 2$, так как получили сумму геометрической прогрессии. Итак, ответ равен $\frac{\varphi(1)^2}{2} = \frac{4}{2} = 2$.

Задача №3.

Не знаю, как до этого можно догадаться, но искомое число равно $(1 + \frac{1}{1})(1 + \frac{1}{2}) \cdot \ldots \cdot (1 + \frac{1}{n}) - 1$. Достаточно мысленно представить, как мы раскрываем скобки. На каждой итерации раскрытия скобок мы получаем сумму результата предудущей итерации плюс сумму дробей с очередным числом, участвующим в знаменателях. Однако число $(1 + \frac{1}{1})(1 + \frac{1}{2}) \cdot \ldots \cdot (1 + \frac{1}{n}) - 1 = \frac{2}{1}\,\frac{3}{2}\,\frac{4}{3} \cdot \ldots \cdot \frac{n+1}{n} - 1 = n + 1 - 1 = n$. Итак, ответ n.

Задача №4.

Будем рассуждать следующим образом. Допустим, Улаф и Рави бросили монету по n раз каждый. Существует три случая:

1. У Улафа больше орлов
2. У Рави больше орлов
3. Они выбросили одинаковое количество орлов

Очевидно, что эти случаи покрывают все возможности, поэтому сумма их вероятностей равна единице. Кроме того, ясно, что вероятности случаев 1 и 2 равны. Обозначим эту вероятность за p. Тогда вероятность случая 3 равна $1-2p$. Теперь рассмотрим событие из условия задачи. Очевидно, что после $n+1$-го броска стать больше орлов у Рави может в двух несовместимых случаях:

1. После n-ного броска у Рави уже было больше орлов, и бросок не повлиял на соотношение количества орлов
2. После n-ного броска у Рави было столько же орлов, сколько у Улафа, а в $n+1$-ом броске выпал орёл.

Вероятность первого случая равна p. Вероятность второго случая равна половине вероятности случая 3, то есть $\frac{1}{2}\cdot(1-2p)$. Поскольку события 1 и 2 несовместимы, искомая вероятность равна сумме вероятностей случаев 1 и 2, то есть $p+\frac{1-2p}{2} = \frac{1}{2}$.

Итак, ответ: $\frac{1}{2}$.

Задача №7 вызвала сложности у большинства экзаменующихся. Тут нужно осознать следующее.

Рассмотрим все элементы всех множеств, то есть $x \in A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n$. Для каждого из элементов можно построить матрицу B_x, где

$$(B_x)_{ij} = \{ 1 \quad \text{если } x \in A_i \cap A_j, 0 \quad \text{иначе}\, .$$

Матрица A будет являться суммой всех матриц B_x. В свою очередь каждая из матриц B_x после перестановки строк и столбцов имеет вид

$1 \quad 1 \quad \ldots \quad \ldots \quad 0\, 1 \quad 1 \quad 0 \quad \ldots \quad 0 \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots\ 0 \quad 0 \quad \ldots \quad 0 \quad 0$, то есть все единицы “сгружаются” в левом верхнем углу в виде квадрата.

Отсюда неким неведомым мне способом следует, что матрица A неотрицательно определена.

Вычислить интеграл

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^{2014} x}{\sin^{2014} x + \cos^{2014} x}\, dx.$$

11

As

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(a+b-x)dx,$$

If

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^n x}{\sin^n x + \cos^n x}\, dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^n \left(\frac{\pi}{2} - x\right)}{\sin^n \left(\frac{\pi}{2} - x\right) + \cos^n \left(\frac{\pi}{2} - x\right)}\, dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^n x}{\cos^n x + \sin^n x}\, dx \end{aligned}$$

$$\implies I + I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx$$

assuming $\sin^n x + \cos^n x \neq 0$ which is true as $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$

Generalization :

$$\text{If } J = \int_a^b \frac{g(x)}{g(x) + g(a+b-x)}\, dx, J = \int_a^b \frac{g(a+b-x)}{g(x) + g(a+b-x)}\, dx$$

$$\implies J + J = \int_a^b dx$$

provided $g(x) + g(a+b-x) \neq 0$

If $a = 0, b = \frac{\pi}{2}$ and $g(x) = h(\sin x)$,

$g(\frac{\pi}{2} + 0 - x) = h(\sin(\frac{\pi}{2} + 0 - x)) = h(\cos x)$

So, J becomes

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{h(\sin x)}{h(\sin x) + h(\cos x)}\, dx$$

Какую наибольшую дисперсию может иметь случайная величина, принимающая значения в отрезке от 0 до 1?

It is true. A simple reason is that

$$\mathrm{var}(X) = E(X^2) - m^2$$

where $m = E(X)$ and that, if X is almost surely in $[0, 1]$, then $X^2 \leqslant X$ almost surely hence $E(X^2) \leqslant E(X) = m$, thus

$$\mathrm{var}(X) \leqslant m - m^2 = m(1 - m).$$

More generally, if $0 \leqslant X \leqslant x$ almost surely then $\mathrm{var}(X) \leqslant xm - m^2$.

Рассмотрим случайную перестановку на n элементах. Докажите, что данные k элементов окажутся в одном цикле с вероятностью 1/k.

Решение. Давайте просто посчитаем количество перестановок, в которых есть цикл, содержащий данные k элементов.
Общее количество перестановок мы знаем, это n!

Вопрос 1. Сколько существует циклов длины m на множестве из m элементов? Очевидно, (m-1)! Действительно, цикл -- это расстановка m элементов по кругу. Т.е. грубо говоря, любая расстановка этих чисел. Т.е. m! А теперь мы вспоминаем, что нам неважно, с какого элемента начинать. Поэтому надо разделить на m. (Варианты, полученные друг из друга поворотом круга считаются одинаковыми циклами, а поворотов как раз m штук).

Посчитаем, сколько перестановок есть, где данные k элементов входят в цикл длины k+t. Очевидно, если t элементов уже выбраны, то составить цикл из k+t элементов есть (k+t-1)! способов. Оставшиеся (n-k-t) элементов могут образовать любую перестановку (т.е. (n-k-t)! вариантов). Ну, и выбрать t элементов из оставшихся (n-k) можно C^t_{n-k} ***способами. Итого,*** $C^t_{n-k}(k+t-1)!(n-k-t)!$ ***перестановок, содержащих цикл длины k+t, включающий данные k элементов.***

А всего перестановок, включающие данные k элементов получается

$$\sum_{t=0}^{n-k} C_{n-k}^{t}(k+t-1)!(n-k-t)! =$$

$$= \sum_{t=0}^{n-k} \frac{(n-k)!(k+t-1)!}{t!} = (n-k)!(k-1)! \sum_{t=0}^{n-k} \frac{(k+t-1)!}{t!(k-1)!} =$$

$$= (n-k)!(k-1)! \sum_{t=0}^{n-k} C_{k+t-1}^{t}$$

Отдельно докажем такую формулу:

$$\sum_{t=0}^{m} C_{s+t}^{t} = C_{s+m+1}^{m}$$

Ее будем доказывать из соотношения $C_n^k+C_n^{k+1}=C_{n+1}^{k+1}$***, которое можно доказать непосредственно.***

В сумме заменим C_s^0 ***на*** C_{s+1}^0 ***(они оба равны 1). Теперь первые 2 слагаемых сворачиваются*** $C_{s+1}^0+C_{s+1}^1=C_{s+2}^1$***. Прибавляем третье слагаемое, опять сворачивается и т.д. В итоге получим то, что надо.***

Поэтому и получается, что общее количество перестановок, содержахих цикл, включающий данные k элементов равно
$(n-k)!(k-1)!C_{(k-1)+(n-k)+1}^{n-k}$.
Остальное элементарно упрощаем. И искомое количество подстановок равно n!/k.

Есть круговая трасса, на которой в некоторых местах стоят бензоколонки. Расстояния между ними и количество бензина на каждой бензоколонке известны.
Имеется также машина с постоянным и известным расходом топлива.
Предложите алгоритм, работающий за O(n) по времени, который позволяет найти ту, бензоколонку,

начиная с которой можно проехать всю трассу, или сказать, что такой нет.

Решение.

Пусть V_i и l_i --- количество бензина i-й бензоколонке и расстояние от i-й до i+1-й бензоколонки
α --- рассход на ед. длины.
Можно считать, что машина двигается против часовой стрелки.

Алгоритм.\\
1) Вычислим $\delta_i = V_i - \alpha l_i$ --- остаток бензина в баке машины после проезда от i-й до i+1-й бензоколонки.
Если все $\delta_i < 0 - -- =""\ br ="">$ 2)Выбираемтакойномерi, что\delta_i \geqslant. Начинаемсуммировать$S_k = \delta_i + \delta_{i+1} + \cdots + \delta_{i+k}$покаS_k\geqslant0. Еслидошлик n-1, то$i - - -$ искомаябензоколонка.S_{k^*}\geqslant0, aS_{k^*+1}<0 br="" i-1="" nbsp="">
3)Если

$$S_{k+1} = \delta_{i-1} + \delta_i + \delta_{i+1} + \cdots + \delta_{i+k^*}.$$

Таким образом за n шагов (или меньше) мы либо получим номер i^*, либо переберём все бензоколонки и прийдём к выводу, что искомой бензоколонки нет.

Данный алгоритм совершает не более $2 \cdot (2n + 1 + 2n)$ шагов (учитывая арифметические операции и сравнения).

Определим последовательность $\{x_n\}$ начальными условиями $x_1 = a$, $x_2 = b$ и рекуррентной формулой $x_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n + x_{n-1})$.
Найдите $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

Это задача №3, ШАД-2013, Новосибирск.

Решение.

Можно считать, что $a > b$.
Имеем x_{n+1} --- среднее арифметическое чисел x_n и x_{n-1},
и заначит, x_{n+1} находится в середине оттрезка $[x_{n-1}, x_n]$.
Так, например x_3 --- середина отрезка $[a, b]$,

$$x_3 = b - \frac{b-a}{2}.$$

А x_4 --- середина $[x_3, x_2]$,

$$x_4 = x_3 + \frac{b-a}{4} = b - \frac{b-a}{2} + \frac{b-a}{4}.$$

И так далее

$$x_n = b - (b-a) \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{8} - \cdots + \frac{(-1)^n}{2^{n-2}}\right).$$

Сумма в скобках это частичная сумма геометрической пргрессии со знаменателем $-\frac{1}{2}$.
При $n \to \infty$ эта сумма сходится к $\frac{\frac{1}{2}}{1+\frac{1}{2}}$.
Таким образом,

$$\lim_{b\to\infty} x_n = b - (b-a) \cdot \left(\frac{\frac{1}{2}}{1+\frac{1}{2}}\right) = \frac{3b+a}{3}.$$

Покажите, что многочлен с действительными коэффициентами, принимающий на действительной оси только положительные значения, может быть представлен в виде суммы квадратов многочленов с действительными коэффициентами.

Пусть $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ данный многочлен.

Многочлен с указанными свойствами может быть иметь только чётную степень. Иначе при достаточно больших абсолютных значениях x он будет принимать значения разных знаков (в зависимости от знака $a_n x^n$), что противоречит условиям. Также, $a_n > 0$ и $a_0 > 0$. Поэтому можно считать, что многочлен имеет вид

$$P(x) = x^{2k} + a_{2k-1}x^{2k-1} + \cdots + a_1 x + a_0.$$

Напомним, что по условию $P(x) > 0$, что означает отсутствие вещественных корней. Следовательно все корни комплексные. Поскольку коэффициенты многочлена действительные, то все комплексные корни представляют совой пары сопряженных чисел: $\{x_1, \bar{x}_1, \ldots x_k, \bar{x}_k\}$. Тогда многочлен можно записать в виде

$$P(x) = (x - x_1) \cdot (x - \bar{x}_1) \cdot \cdots \cdot (x - x_k) \cdot (x - \bar{x}_k).$$

Для произвольной пары имеем:

$$(x - x_i) \cdot (x - \bar{x}_i) = x^2 - (x_i + \bar{x}_i)x + x_i \cdot \bar{x}_i = x^2 - \mathrm{Re}(x_i)x + |x_i|^2.$$

Действительная часть $\mathrm{Re}(x_i)$ и квадрат модуля $|x_i|^2$ комплексного числа являются действительными числами. Другими словами, мы можем записать $(x - x_i) \cdot (x - \bar{x}_i) = x^2 + b_i x + c_i$, где $b_i, c_i \in \mathbb{R}$. В свою очеред многочлен принимает вид

$$P(x) = (x^2 + b_1 x + c_1) \cdot \cdots \cdot (x^2 + b_k x + c_k).$$

Отсутствие вещественных корней влечёт неравенство $b_i^2 - 4c_i < 0$ (иначе квадратное уравнение $x^2 + b_i x + c_i$ имело бы действительные корни). Выделим полный квадрат в каждом из квадратичных множителей: $x^2 + b_i x + c_i = (x + \frac{b_i}{2})^2 + c_i - \frac{b_i^2}{2^2}$. Обозначим $q_i = c_i - \frac{b_i^2}{2^2}$. Тогда

$$P(x) = ((x + b_1/2)^2 + q_1) \cdot \cdots \cdot ((x + b_k/2)^2 + q_k).$$

Отметим, что $q_i > 0$, в частности мы можем писать $q_i = (\sqrt(q_i))^2$. Теперь раскроем скобки в предыдущем представлении многочлена:

$$\begin{aligned} P(x) = (x + b_1/2)^2 \cdot (x + b_2/2)^2 \cdots (x + b_k/2)^2 \\ +q_1 \cdot (x + b_2/2)^2 \cdots (x + b_k/2)^2 + q_1 \cdot q_2 \cdots q_k \\ = \left[(x + b_1/2) \cdot (x + b_2/2) \cdots (x + b_k/2)\right]^2 \\ +[\sqrt{q_1} \cdot (x + b_2/2) \cdots (x + b_k/2)]^2 + [\sqrt{q_1} \cdot \sqrt{q_2} \cdots \sqrt{q_k}]^2. \end{aligned}$$

Другими словами

$$P(x) = Q_1^2 + Q_2^2 + \cdots + Q_{2^k}^2,$$

где $Q_1 = (x + b_1/2) \cdot (x + b_2/2) \cdots (x + b_k/2)$, $Q_2 = \sqrt{q_1} \cdot (x + b_2/2) \cdots (x + b_k/2), \ldots,$ $Q_{2^k} = \sqrt{q_1} \cdot \sqrt{q_2} \cdots \sqrt{q_k}$ -- многочлены с действительными коэффициентами.
Таким образом мы доказали что любой многочлен принимающий только положительные значения на вещественной прямой может быть представлен в виде суммы квадратов многочленов с действительными коэффициентами.

Choose n points randomly from a circle, how to calculate the probability that all the points are in one semicircle? Any hint is appreciated.

> ***A variation on @joriki's answer (and edited with help from @joriki):***
> ***Suppose that point i has angle 0 (angle is arbitrary in this problem) -- essentially this is the event that point i is the "first" or "leading" point in the semicircle. Then we want the event that all of the points are in the same semicircle -- i.e., that the remaining points end up all in the upper halfplane.***
> ***That's a coin-flip for each remaining point, so you end up with $1/2^{n-1}$.***
> ***There's n points, and the event that any point i is the "leading" point is disjoint from the event that any other point j is, so the final probability is $n/2^{n-1}$ (i.e. we can just add them up).***
> ***A sanity check for this answer is to notice that if you have either one or two points, then the probability must be 1, which is true in both cases.***

First notice that:

$$I = \int_0^1 \frac{x^b - x^a}{\ln x}\, dx = \int_0^1 \Big[\int_a^b x^y dy\Big] dx$$

The function $f(x, y) = x^y$ is continous in the set $[0, 1] \times [a, b]$, therefore:

$$I = \int_0^1 \Big[\int_a^b x^y dy\Big] dx = \int_a^b \Big[\int_0^1 x^y dx\Big] dy = \int_a^b \frac{1}{y+1}\, dy = \ln\left(\frac{b+1}{a+1}\right)$$

Task is to describe all non-singular 3×3 matrices A for which holds: all elements of A and A^{-1} is non-negative.

Hints:

- ***The inner product of two non-zero vectors from $\mathbb{R}^3$ with non-negative entries is always non-negative. Furthermore it is =0 only if the two vectors have no common non-zero components.***

- ***If a row (resp. a column) of A has a non-zero component in position i, i=1,2 or 3, then prove that at most one column (resp. a row) of A^{-1} can have a non-zero component in position i.***

Caveat: It is not necessary that row number i has its (only) non-zero entry on column i.

We are given square matrix A. Also, we know that sum along any column of A equals m. Task is to prove, that m is an eigenvalue of A.

$$A^t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{k=1}^{n} a_{k1} \\ \sum_{k=1}^{n} a_{k2} \\ \vdots \\ \sum_{k=1}^{n} a_{kn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m \\ m \\ \vdots \\ m \end{pmatrix}$$

An alternative hint: Every column sum of A−mI is 0, so every linear combination of columns of A−mI still has the sum of all its entries 0. Hence A−mI does not have full column rank.

Let A={1,…,256}. Find subset $A' \subset A$ with maximal elements s. t. there are no pairs x=2y.

Divide the numbers into groups as follows. The first group contains 1,2,4,8,…,256. The next group contains the numbers 3,6,12,24,48,96,192. The third consists of 5,10,20,40,80,160. And so on.
The first group has an odd number of numbers, that is 9. The maximum number of these we can take is 5, starting at 1. The second group has 7 numbers, of which we can take a maximum of 4, starting at 1. We can grab 3 from the third group, starting at either 5 or 10. Let us choose to start at 5.
The computation is not too bad, and it is clear that it will yield a set of maximal size. But note the following: the procedure described above, if in the even case we start with the "base number" of the group, produces exactly what your suggestion produces. So your much easier way of counting does give us the maximum value of the size.

Remark: Note that your method does not pick out all collections of maximum size, since in the groups $\{2^k(2b+1)\}$ that have an even number of elements, we have two choices of biggest subcollection. But it does identify the size of the largest possible collections.

Let $x = \sqrt{\arcsin t}$, then

$$\int_{\sqrt{\frac{\pi}{6}}}^{\sqrt{\frac{\pi}{3}}} \sin(x^2)\,dx = \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} t\,d\sqrt{\arcsin t} = t\sqrt{\arcsin t}\,\Big|_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} - \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \sqrt{\arcsin t}\,dt.$$

Let $a_1,\ldots,a_n$ --- sequence and $k\neq 0$. Define matrix M in following way: $m_{ij}=a_ia_j$ if $i\neq j$, and $m_{ii}=a_i^2+k$. Find detM.

Hint: $M=aa^T+kI$. To find det(M), you may determine M's eigenvalues, or apply the matrix determinant formula for rank-1 update to a matrix.