

Письменный экзамен в Школу анализа данных.

1. Рассмотрим функцию $\varphi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^{2^{\lfloor \log_2 k \rfloor}}} x^k$. Найдите $\int_0^1 \varphi(x) \varphi'(x) dx$.
2. Улоф Пальме и Рави Шанкар подбрасывают правильную монетку (вероятность выпадения орла 0.5). Улоф подбрасывает её n раз, а Рави — $n + 1$. Найдите вероятность того, что у Рави будет больше орлов, чем у Улофа.
3. Определим последовательность $\{x_n\}$ начальным условием $x_1 = a$, $x_2 = b$ и рекуррентной формулой $x_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n + x_{n-1})$. Найдите $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$.
4. Найдите математическое ожидание числа неподвижных точек для случайной перестановки на n элементах.
5. Верно ли, что $\text{rank} AB = \text{rank} BA$ для любых квадратных матриц A и B ?
6. Есть круговая трасса, на которой в некоторых местах стоят бензоколонки. Расстояния между ними и количество бензина на каждой бензоколонке известны. Имеется также машина с постоянным и известным расходом топлива. Предложите алгоритм, работающий за $O(n)$ по времени, который позволяет найти ту бензоколонку, начиная с которой можно проехать всю трассу, или сказать, что такой нет. n — число бензоколонок.