Alexey Boriskin's weblog

Lazy dog was evaluated by being jumped over by quick brown fox

JUN
8

Задачи в ШАД и их решения

Итак, неделю назад я пытался поступить в школу анализа данных Яндекса, и у меня ничего не вышло. Это был второй этап отбора из трёх. В первом предлагалось решить представленные на сайте задачи и отправить анкету, с чем я в общем справился. Второй этап — письменный экзамен в Москве, третий - собеседование среди показавших хорошие результаты на экзамене. Экзамен проходил в здании МФТИ в Климентовском переулке. Всего было где-то около сотни экзаменующихся, так что, с учётом того, что экзамен проходил в три дня (три воскресенья подряд), всего решило попробовать поступить где-то около трёхсот человек. Экзамен состоял из семи задач, вот таких:

1. Определим последовательность x_n начальным условием $x_1 = a, x_2 = b$ и рекуррентной формулой $x_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n + x_{n-1})$. Найдите $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$.
2. Рассмотрим функцию $\phi(x) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^{2[log_2 k]}} x^k$, где квадратные скобки означают целую

часть числа. Найдите $\int_0 \phi(x)\phi'(x)dx$.
3. Рассмотрим всевозможные непустые множества $1, \dots, n$. В каждом подмножестве перемножим числа, обратные его элементам. Потом сложим полученное $2^n - 1$ число. Найдите полученную сумму.
4. Улоф Пальме и Рави Шанкар подбрасывают правильную монетку (вероятность выпадения орла 0.5). Улоф подбрасывает её n раз, а Рави — $n + 1$. Найдите вероятность того, что у Рави орлов выпало больше, чем у Улофа.
5. Дано некоторое множество положительных чисел мощности континуум. Докажите, что из него можно выбрать счётное подмножество с бесконечной суммой.
6. Дан массив из n чисел. Предложите алгоритм, позволяющий за $O(n)$ операций определить, является ли этот массив перестановкой чисел от 1 до n. Дополнительной памяти не более $O(1)$.
7. Пусть $A_1, A_2, \dots, A_n$ — конечные множества и $a_{ij} = |A_i \cap A_j|$. Докажите, что матрица $(a_{ij})_{i=1,2..n}^{j=1,2..n}$ неотрицательно определена.

Не решил я правильно, к сожалению, ни одной задачи. Однако для интересующихся (и себе на память) выкладываю их решения).

Итак, **задача №1**. Как легко заметить, если бы не $\frac{1}{2}$, то это была бы формула чисел Фибоначчи. Вообще же задано **линейное рекуррентное отношение с постоянными коэффициентами.** Найдём его производящую функцию, то есть формулу общего члена.

Для этого составим характеристический многочлен (прямо как по ссылке в википедии). Он будет таким: $p(t) = t^2 - \frac{1}{2}t - \frac{1}{2}$. Найдём его корни:

$$t^2 - \frac{1}{2}t - \frac{1}{2} = 0$$

$$2t^2 - t - 1 = 0$$

$$D = 1 - 4 \cdot 2 \cdot (-1) = 9$$

$$\sqrt{D} = 3$$

$$t_1 = \frac{1+3}{4} = 1, t_2 = \frac{1-3}{4} = -\frac{1}{2}.$$

Корни действительны и различны, и формула общего члена выглядит так: $x_n = k_1 r_1^n + k_2 r_2^n$, где r_i – i-тый корень уравнения. Зная начальные условия, мы можем найти k_1 и k_2. Для этого подставим в формулу общего члена найденные корни, а n зададим равным 1 и 2. Итак,

$$x_1 = k_1 \cdot 1^1 + k_2 \cdot (-\frac{1}{2})^1 = k_1 - \frac{1}{2}k_2 = a,$$

$$x_2 = k_1 \cdot 1^2 + k_2 \cdot (-\frac{1}{2})^2 = k_1 - \frac{1}{4}k_2 = b.$$

Решая эту систему уравнений, получим, что $k_2 = \frac{4}{3}(b-a), k_1 = a + \frac{1}{2}k_2 = \frac{1}{3}(a+2b)$. Итак, итоговая формула общего члена последовательности равна: $x_n = \frac{1}{3}(a+2b) + \frac{4}{3}(b-a)(-\frac{1}{2})^n$. Очевидно, что при $n \to \infty$ второе слагаемое стремится к нулю. Значит, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \frac{1}{3}(a+2b)$.

Задача №2.

В принципе, довольно просто заметить, что интеграл $\int \varphi(x)\varphi'(x)dx$ равен $\frac{\varphi(x)^2}{2} + C$. Можно или вспомнить формулу дифференцирования сложной функции $(\varphi(x)^2)' = 2\varphi(x)\varphi(x)'$, или попробовать проинтегрировать по частям: $\int udv = uv - \int vdu$, полагая $u = v = \varphi(x)$, получаем $\int \varphi(x)\varphi'(x)dx = \int \varphi d\varphi = \varphi\varphi - \int \varphi d\varphi$. Обозначим интеграл за Φ. Получим $\Phi = \varphi^2 - \Phi$. Отсюда $\Phi = \frac{\varphi(x)^2}{2}$. Итак, $\int\limits_0^1 \varphi(x)\varphi'(x)dx = \frac{\varphi(x)^2}{2}|_0^1 = \frac{\varphi(1)^2}{2}$, так как $\varphi(0)$ очевидно равно 0. Осталось найти $\varphi(1) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^{2[log_2 k]}}$. Здесь нужно задуматься о том, чему равно $[log_2 k]$. Это не что иное, как количество значащих разрядов в двоичной записи числа k. Если выписывать натуральные числа по порядку, то $[log_2 k]$ будет иметь вид ряда $0, 1, 1, 2, 2, 2, 2, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, \ldots$. Ряд состоит из натуральных чисел, каждое (обозначим его за n) из которых повторяется 2^n раз. Так что $\varphi(1) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^{2[log_2 k]}} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{2^{2 \cdot n}} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 2$, так как получили сумму геометрической прогрессии. Итак, ответ равен $\frac{\varphi(1)^2}{2} = \frac{4}{2} = 2$.

Задача №3.

Не знаю, как до этого можно догадаться, но искомое число равно $(1+\frac{1}{1})(1+\frac{1}{2}) \cdot \ldots \cdot (1+\frac{1}{n}) - 1$. Достаточно мысленно представить, как мы раскрываем скобки. На каждой итерации раскрытия скобок мы получаем сумму результата предудущей итерации плюс сумму дробей с очередным числом, участвующим в знаменателях. Однако число $(1+\frac{1}{1})(1+\frac{1}{2})\cdot\ldots\cdot(1+\frac{1}{n})-1=\frac{2}{1}\frac{3}{2}\frac{4}{3}\cdot\ldots\cdot\frac{n+1}{n}-1=n+1-1=n.$ Итак, ответ n.

Задача №4.

Будем рассуждать следующим образом. Допустим, Улаф и Рави бросили монету по n раз каждый. Существует три случая:

1. У Улафа больше орлов
2. У Рави больше орлов
3. Они выбросили одинаковое количество орлов

Очевидно, что эти случаи покрывают все возможности, поэтому сумма их вероятностей равна единице. Кроме того, ясно, что вероятности случаев 1 и 2 равны. Обозначим эту вероятность за p. Тогда вероятность случая 3 равна $1-2p$. Теперь рассмотрим событие из условия задачи. Очевидно, что после $n+1$-го броска стать больше орлов у Рави может в двух несовместимых случаях:

1. После n-ного броска у Рави уже было больше орлов, и бросок не повлиял на соотношение количества орлов
2. После n-ного броска у Рави было столько же орлов, сколько у Улафа, а в $n+1$-ом броске выпал орёл.

Вероятность первого случая равна p. Вероятность второго случая равна половине вероятности случая 3, то есть $\frac{1}{2}\cdot(1-2p)$. Поскольку события 1 и 2 несовместимы, искомая вероятность равна сумме вероятностей случаев 1 и 2, то есть $p+\frac{1-2p}{2}=\frac{1}{2}$.

Итак, ответ: $\frac{1}{2}$.

К сожалению, решение **задачи №5** я недопонял. Начало было таким: для решения нам достаточно найти такое число ϵ и такую последовательность, что начиная с некоторого n $x_n\geq\epsilon$. А дальше в моих записях идёт такая формула: $A=\bigcup_{n=1}^{\infty}\underbrace{(A\cap[\frac{1}{n};\infty))}_{\text{счётно}}$.

Задача №6.

В общем-то идея состоит в том, чтобы рассматривать очередное число как индекс массива, а сам массив как подстановку. Единственная сложность в том, что надо отслеживать циклы. Для этого будем менять знак у элементов массива на минус. (Делаем это в массиве, а не в дополнительной памяти, так как дополнительная память ограничена $O(1)$, а никаких условий сохранения массива в целости и сохранности в условии не стоит.)

В принципе, проще всего продемонстрировать алгоритм программой на питоне:

```
# -*- coding:utf-8 -*-
```

```
def is_permutation(array):
    loop_index = index = n = 0
    while (n < len(array)):
        try:
            curr_el = array[loop_index]
        except IndexError:
            return False
        if curr_el > 0:
            array[loop_index] = -curr_el
            n += 1
            loop_index = curr_el-1
        else:
            index += 1
            if index == n == len(array):
                return True
            try:
                if array[index] > 0:
                    loop_index = index
            except IndexError:
                return False
    return n == len(array)

def test(array, expected):
    print 'PASSED' if is_permutation(array) == expected else 'ERROR'

if __name__ == '__main__':
    test([1, 3, 2], True)
    test([4, 5], False)
    test([1, 2, 4, 3], True)
    test([1, 2, 0, 3], False)
    test([3, 1, 2, 4], True)
```

Задача №7 вызвала сложности у большинства экзаменующихся. Тут нужно осознать следующее.

Рассмотрим все элементы всех множеств, то есть $x \in A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n$. Для каждого из элементов можно построить матрицу B_x, где

$$(B_x)_{ij} = \left\{ 1 \quad \text{если } x \in A_i \cap A_j, 0 \quad \text{иначе} \right. .$$

Матрица A будет являться суммой всех матриц B_x. В свою очередь каждая из матриц B_x после перестановки строк и столбцов имеет вид

$1 \quad 1 \quad \ldots \quad \ldots \quad 0\; 1 \quad 1 \quad 0 \quad \ldots \quad 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 0 \quad 0 \quad \ldots \quad 0 \quad 0$, то есть все единицы “сгружаются” в левом верхнем углу в виде квадрата.

Отсюда неким неведомым мне способом следует, что матрица A неотрицательно определена.

Если кто-то из читателей поможет мне окончательно понять решение задач 5 и 7, я буду ему весьма благодарен -)

Posted at 6:17 PM 4 notes 5 Comments Permalink ∞

Tagged: ШАД Яндекс

Comments Community Login

Recommend Sort by Best

Join the discussion…

ololosha · 2 years ago

Привет! Спасибо большое за задачки!

По номеру 6 уточню, что Ваш код не решает, например, случая [1,1], который не является перестановкой. На мой взгляд, тут ксорить надо как-то так:

```
def is_permut3(array):
n = 0
xor_arr = 0
xor_n = 0
while (n < len(array)):
xor_arr = xor_arr ^ array[n]
n += 1
xor_n = xor_n ^ n
return n == len(array) and xor_arr == xor_n
```

Надеюсь пригодится :)

Reply · Share ›

Антон Филиппов · 3 years ago

По-поводу задачи 7: к написанному нужно лишь добавить следующее соображение. Что означает, что матрица A неотриц. определена? То, что число eT*A*e, где e - произвольный вектор-столбец, неотрицательно. Как замечено ранее, данное произведение разлагается на след. сумму: eT*Bi*e. Прелесть матрицы Bi в том, что если элемент bij=1, то bii=1, bjj=1 и bji=1. А это означает, что eT*Bi*e - полный квадрат.

Reply · Share ›

Scretch · 3 years ago

Еще могу предложить свое решение пятой (получил за него "+"):

Во-первых заметим, что если у нас есть отрезок [a,b] и

Во-первых заметим, что если у нас есть отрезок [a,b] с бесконечным числом членов множества, где a>0, то можно просто брать числа из этого отрезка (все они больше a) и получить бесконечную сумму. Если такого отрезка нет, значит наше множество (как последовательность) "стремится" к нулю, то есть континуум элементов множества в любой окрестности нуля. Но в таком случае его можно сделать счетным, "отсекая" куски вида [2^n; 2^(n+1)], в каждом из которых будет конечное число элементов множества. Любой элемент исходного множества, как несложно убедиться, будет содержаться в одном из таких отрезков, то есть будет учтен. Противоречие, значит вышеописанный отрезок существует, сумма бесконечна. В принципе формула, написанная тобой, верна и является ключевой в задаче, я лишь немного исказил ее, заменив 1/n на 1/2^n.

• Reply • Share ›

voidus Mod • 3 years ago

Спасибо, исправил

• Reply • Share ›

Scretch • 3 years ago

Во второй задаче sum from 0 to inf 2^n - это 2, а не 1. Исправьте плиз.

• Reply • Share ›

Subscribe

Add Disqus to your site

Privacy

mathkonspekt likes this
phd-uk likes this
geaden likes this
grammr likes this
voidus posted this

Tumblr powered **Bill Israel** designed **RSS** syndicated