# ШАД. Экзамен.

1. Последовательность $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ определена рекурсивно

$$a_0 = 1, \qquad a_{n+1} = \frac{a_n}{1 + na_n}.$$

   Найдите формулу общего члена последовательности.

2. Дано множество $A = \{1, 2, \ldots, n\}$. Среди всех его подмножеств равновероятно выбирается $k$ его подмножеств.

   Найдите вероятность того, что $A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n = \varnothing$.

3. Дан массив длины $n$ из нулей и единиц. Найдите в нем подмассив максимальной длины, в котором количество единиц равно количеству нулей. Ограничения: $O(n)$ по времени, $O(n)$ по дополнительной памяти.

4. Пусть $I_m = \int\limits_0^{2\pi} \cos(x)\,\cos(2x)\ldots\cos(mx)\,dx$. Для каких $m \in [1, 10]$ $I_m \neq 0$ ?

5. Дан неориентированный граф $G$ без петель. Пронумеруем все его вершины. Матрица смежности графа $G$ с конечным числом вершин $n$ (пронумерованных числами от 1 до $n$) — это квадратная матрица $A$ размера $n$, в которой значение элемента $a_{ij}$ равно числу рёбер из $i$-й вершины графа в $j$-ю вершину. Докажите, что матрица $A$ имеет отрицательное союственное значение.

6. Рассмотрим бесконечный двумерный массив $\{a_{ij}\}_{i,j=1}^{\infty}$, состоящий из натуральных чисел, причем каждое число встречается в массиве ровно 8 раз. Докажите, что $\exists (m, n) : a_{mn} > mn$.

7. Дана матрица из нулей и единиц, причем для каждой строки матрицы верно следующее: если в строке есть единицы, то они все идут подряд (неразрывной группой из единиц). Докажите, что определитель такой матрицы может быть равен только $\pm 1$ или 0.