Lineare Algebra

Freitag, 5. April 2019 12:23

Eigenwertproblem:

Definition: $\boxed{\vec{A} \cdot \vec{x} = \lambda \vec{x}}$

$\vec{A}$: quadratische Matrix

$\vec{x}$: Eigenvektor $(\vec{x} \neq \vec{0})$

λ: Eigenvalue

Beispiel:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}}_{\vec{A}} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\vec{x}} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix} = \underbrace{3}_{\lambda} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\vec{x}}$$

Was folgt daraus:

$$\Leftrightarrow \vec{A}\vec{x} - \lambda \underbrace{\vec{x}}_{\vec{E}x} = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow \vec{x}(\vec{A} - \lambda\vec{E}) = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow \vec{x} = \underbrace{(\vec{A} - \lambda\vec{E})^{-1}}_{\text{falls invertierbar,}} \cdot \vec{0} = \vec{0}$$

falls invertierbar,
- dann ist $\vec{x}$ kein EV (da $\vec{x} \neq 0$ sein muss).
- λ kein EW

$\Rightarrow$ λ ist EW wenn $(\vec{A} - \lambda\vec{E})$ nicht invertierbar:

$$\Rightarrow \boxed{\det(\vec{A} - \lambda\vec{E}) = 0} \quad !$$

$\hookrightarrow$ Polynom n-ten Grades,
EW sind Nullstellen dieses Polynoms

Beispiel:

$$\vec{A} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$$

Was sind die EW von $\vec{A}$?

$$\boxed{\det(\vec{A} - \lambda \vec{E})} = \det\left(\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}\right)$$

$$= \det \begin{pmatrix} 1-\lambda_1 & 1 \\ 1 & 4-\lambda_2 \end{pmatrix}$$

$$= \lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{array}{l} \lambda_1 = 2 \\ \lambda_2 = 3 \end{array}}$$

EV zu $\lambda_1 = 2$

$$(\vec{A} - \lambda_1 \vec{E}) \cdot \vec{x}$$

$$\left(\begin{pmatrix} 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \end{pmatrix}\right) \cdot \vec{}$$

EV zu $\lambda_2 = 3$

$$\boxed{EV = \alpha \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}}$$

$$= \left(\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \right) \cdot \vec{x}$$

$$= \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \vec{0}$$

$$\Rightarrow \quad -1x_1 - 2x_2 = 0$$

$$-1x_1 + 2x_2 = 0$$

$$\Rightarrow \quad x_1 = -2 \qquad x_2 = 1$$

$$\Rightarrow \boxed{EV = \underbrace{\alpha}_{\text{vielfaches}} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}}$$

Eine Transformation (scaling, ...) ändert nie die Richtung des EV.