DEPARTAMENTO DE COMPUTACION
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales - UBA

Introducción a la Investigación Operativa y Optimización

Primer cuatrimestre 2025

TP3 - PNL
El problema de Fermat-Weber y el algoritmo de Weiszfeld

Funciones convexas

Definición: $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es una función **convexa** si para todo $x, y \in \mathbb{R}^n$ y todo $\lambda \in [0, 1]$, se cumple:

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y)$$

Funciones convexas

Definición: $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es una función **convexa** si para todo $x, y \in \mathbb{R}^n$ y todo $\lambda \in [0, 1]$, se cumple:

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y)$$

- Esta propiedad garantiza que el segmento de recta entre dos puntos del gráfico de f está por encima del gráfico.
- Si la desigualdad es estricta para $x \neq y$ y $\lambda \in (0, 1)$, entonces f es **estrictamente convexa**.

Subdiferenciabilidad

Definición: Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una función convexa. Se dice que f es *subdiferenciable* en un punto $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ si existe un vector $g \in \mathbb{R}^n$ tal que:

$$f(x) \geq f(\bar{x}) + g^\top (x - \bar{x}), \quad \text{para todo } x \in \mathbb{R}^n.$$

Subdiferenciabilidad

Definición: Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una función convexa. Se dice que f es *subdiferenciable* en un punto $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ si existe un vector $g \in \mathbb{R}^n$ tal que:

$$f(x) \geq f(\bar{x}) + g^\top (x - \bar{x}), \quad \text{para todo } x \in \mathbb{R}^n.$$

- A cualquier vector g que cumple esta desigualdad se lo llama *subgradiente* de f en $\bar{x}$, y el conjunto de todos los subgradientes de f en $\bar{x}$ se denota por $\partial f(\bar{x})$, llamado *subdiferencial* de f en $\bar{x}$.

Funciones convexas

Subdiferenciabilidad

Definición: Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una función convexa. Se dice que f es *subdiferenciable* en un punto $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ si existe un vector $g \in \mathbb{R}^n$ tal que:

$$f(x) \geq f(\bar{x}) + g^\top (x - \bar{x}), \quad \text{para todo } x \in \mathbb{R}^n.$$

- A cualquier vector g que cumple esta desigualdad se lo llama *subgradiente* de f en $\bar{x}$, y el conjunto de todos los subgradientes de f en $\bar{x}$ se denota por $\partial f(\bar{x})$, llamado *subdiferencial* de f en $\bar{x}$.
- Si f es diferenciable en $\bar{x}$, entonces $\partial f(\bar{x}) = \{\nabla f(\bar{x})\}$.

Funciones convexas

Teorema: Sea $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ una función convexa.

- Si x^* es un mínimo local de f, entonces x^* es un mínimo global de f.

- Si además x^* es un mínimo local estrico o f es convexa estricta, entonces x^* es el único mínimo global de f.

Funciones convexas

Teorema: Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una función convexa.

- Si x^* es un mínimo local de f, entonces x^* es un mínimo global de f.
- Si además x^* es un mínimo local estrico o f es convexa estricta, entonces x^* es el único mínimo global de f.

Teorema: Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una función convexa.

$$x^* \in \mathbb{R}^n \text{ es un mínimo global de } f \iff 0 \in \partial f(x^*).$$

Problema de Fermat-Weber

Formulación

Dado un conjunto de puntos $P = \{p_1, \ldots, p_m\} \subset \mathbb{R}^n$ y pesos $w_1, \ldots, w_m > 0$, encontrar:

$$x^* = \arg\min_{x \in \mathbb{R}^n} W(x) = \sum_{i=1}^{m} w_i \|x - p_i\|$$

Problema de Fermat-Weber

Propiedades de W

- W es convexa.
- Si los puntos de P no están alineados, W es estrictamente convexa.
- Si $x \neq p_i \forall i = 1, \ldots, m$:

$$\nabla W(x) = \sum_{i=1}^{m} w_i \frac{x - p_i}{\|x - p_i\|}$$

- Si $x = p_j$ para $j \in \{1, \ldots, m\}$, W no es diferenciable en x, pero es subdiferenciable, $\nabla_j \in \partial W(p_j)$:

$$\nabla_j = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{n} w_i \frac{p_j - p_i}{\|p_j - p_i\|} - w_j v$$

para todo $v \in \mathbb{R}^n$ tal que $\|v\| \leq 1$.

Problema de Fermat-Weber

Teorema

Si los puntos $p_1, \ldots, p_m \in \mathbb{R}^n$ no son colineales y los pesos $w_i > 0$:

1. El problema

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} W(x) = \sum_{i=1}^{m} w_i \|x - p_i\|$$

   tiene una única solución óptima x^*.

Problema de Fermat-Weber

Teorema

Si los puntos $p_1, \ldots, p_m \in \mathbb{R}^n$ no son colineales y los pesos $w_i > 0$:

1. El problema
$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} W(x) = \sum_{i=1}^{m} w_i \|x - p_i\|$$
tiene una única solución óptima x^*.
2. Si $x^* \notin P$, entonces
$$\nabla W(x^*) = \sum_{i=1}^{m} w_i \frac{x^* - p_i}{\|x^* - p_i\|} = 0.$$

Problema de Fermat-Weber

Teorema

Si los puntos $p_1, \ldots, p_m \in \mathbb{R}^n$ no son colineales y los pesos $w_i > 0$:

1. El problema
$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} W(x) = \sum_{i=1}^{m} w_i \|x - p_i\|$$
tiene una única solución óptima x^*.
2. Si $x^* \notin P$, entonces
$$\nabla W(x^*) = \sum_{i=1}^{m} w_i \frac{x^* - p_i}{\|x^* - p_i\|} = 0.$$
3. Si $x^* = p_j$ para algún $j \in \{1, \ldots, m\}$, entonces
$$\|R_j\| \leq w_j \qquad \text{donde} \qquad R_j = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{m} w_i \frac{p_j - p_i}{\|p_j - p_i\|}.$$

Problema de Fermat-Weber

Si $x \notin P$:

$$\nabla W(x) = 0$$

$$\Updownarrow$$

$$\sum_{i=1}^{n} w_i \frac{x - p_i}{\|x - p_i\|} = 0$$

$$\Updownarrow$$

$$x \sum_{i=1}^{n} \frac{w_i}{\|x - p_i\|} - \sum_{i=1}^{n} \frac{w_i p_i}{\|x - p_i\|} = 0$$

$$\Updownarrow$$

$$x = \frac{\sum_{i=1}^{n} \frac{w_i p_i}{\|x - p_i\|}}{\sum_{i=1}^{n} \frac{w_i}{\|x - p_i\|}}$$

Algoritmo de Weiszfeld (1937)

- Método iterativo.
- Busca un punto fijo de

$$T(x) = \frac{\sum_{i=1}^{n} \frac{w_i p_i}{\|x - p_i\|}}{\sum_{i=1}^{n} \frac{w_i}{\|x - p_i\|}}$$

- Iteración:

$$x^{(k+1)} = \frac{\displaystyle\sum_{i=1}^{m} \frac{w_i p_i}{\|x^{(k)} - p_i\|}}{\displaystyle\sum_{i=1}^{m} \frac{w_i}{\|x^{(k)} - p_i\|}}, \quad \text{si } x^{(k)} \notin P$$

- Converge al mínimo global si $x^{(k)} \notin P \ \forall k$.

Algoritmo de Weiszfeld - modificación 1

$$x^{(k+1)} = \tilde{T}(x^{(k)}) = \begin{cases} T(x^{(k)}) & \text{si } x^{(k)} \notin P \\ p_j & \text{si } x^{(k)} = p_j \ (1 \leq j \leq m) \\ & \qquad \text{y } \|R_j\| \leq w_j \\ S(p_j) & \text{si } x^k = p_j \ (1 \leq j \leq m) \\ & \qquad \text{y } \|R_j\| > w_j \end{cases}$$

con $W(S(p_j)) < W(p_j)$ para $1 \leq j \leq m$.

Monotonía del operador T

Lema

Sea $W(x) = \sum_{i=1}^{m} w_i \|x - p_i\|$ con $w_i > 0$, y

$$T(y) := \frac{\sum_{i=1}^{m} w_i \dfrac{p_i}{\|y - p_i\|}}{\sum_{i=1}^{m} w_i \dfrac{1}{\|y - p_i\|}}, \quad \text{para } y \in \mathbb{R}^n \setminus P.$$

Entonces:

$$W(T(y)) \leq W(y), \quad \text{con igualdad si y solo si } T(y) = y.$$

Algoritmo de Weiszfeld - modificación 2: Método SP (Starting Point)

- Es una estrategia que permite encontrar un buen punto inicial para el algoritmo de Weiszfeld.
- Se basa en verificar si alguno de los puntos dados es óptimo.
- Si no lo es, encuentra un punto x^0 tal que

$$W(x^0) < W(p_i) \ \forall i = 1, \ldots, m.$$

Algoritmo de Weiszfeld - modificación 2: Método SP

1. **Selección del mejor $p_j \in P$:**

$$j \in \arg\min \left\{ W(p_s) = \sum_{i=1}^{m} w_i \|p_s - p_i\| : 1 \leq s \leq m \right\}.$$

2. **Criterio de optimalidad.** Se define: Si se cumple que

$$\|R_j\| \leq w_j,$$

entonces p_j es óptimo y no es necesario aplicar el algoritmo de Weiszfeld.

3. **Actualización.** Si no se cumple la condición anterior, se retorna:

$$x^0 = S(p_j) \quad \text{con} \quad W(S(p_j)) < W(p_j)$$

para ser utilizado como punto inicial del algoritmo de Weiszfeld.

Algoritmo de Weiszfeld - Operador S

- Una forma de definir $S(p_j)$ es encontrar una dirección de descenso d_j de W en p_j y tomar un paso t_j en esa dirección.

$$S(p_j) = p_j + d_j t_j$$

- $$d_j = -\frac{R(p_j)}{\|R(p_j)\|}$$

- $$t_j = \frac{\|R(p_j)\| - w_j}{\sum_{i \neq j} \frac{w_i}{\|p_i - p_j\|}}$$