Algoritmos y Estructuras de Datos

Cursada 2021

Prof. Alejandra Schiavoni (ales@info.unlp.edu.ar)

Prof. Catalina Mostaccio (catty@lifia.info.unlp.edu.ar)

Prof. Laura Fava (lfava@info.unlp.edu.ar)

Prof. Pablo Iuliano (piuliano@info.unlp.edu.ar)

Agenda - Grafos

1. Ejemplos y terminología

2. Representaciones

3. Recorridos

Agenda - Grafos

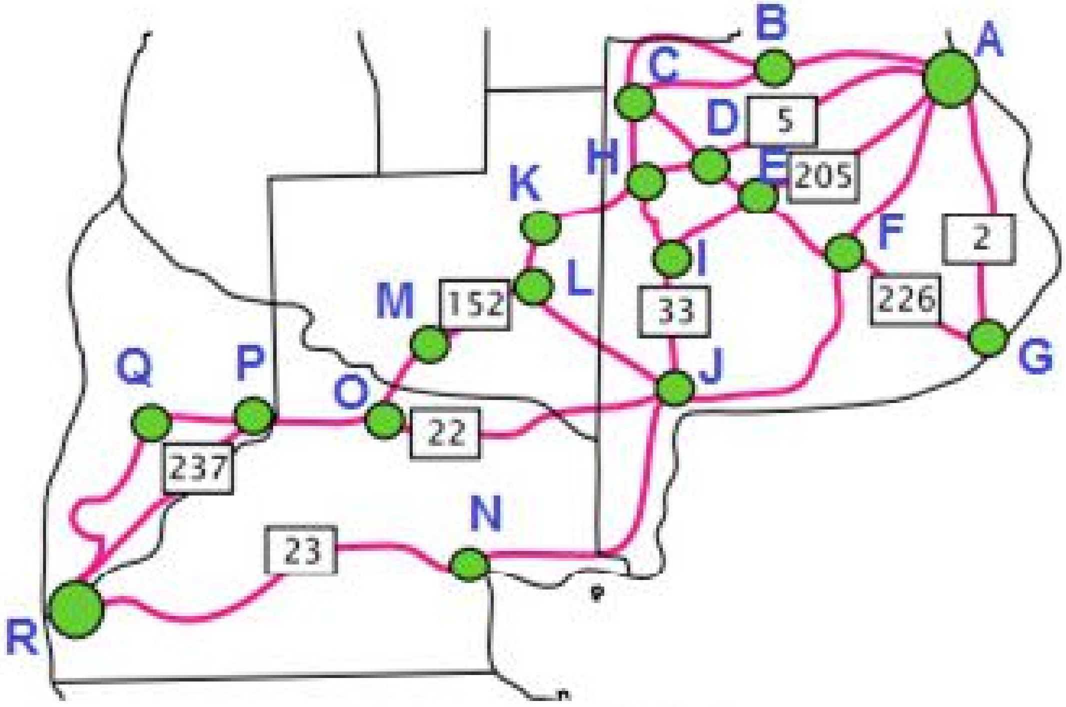
1. Ejemplos y terminología

2. Representaciones

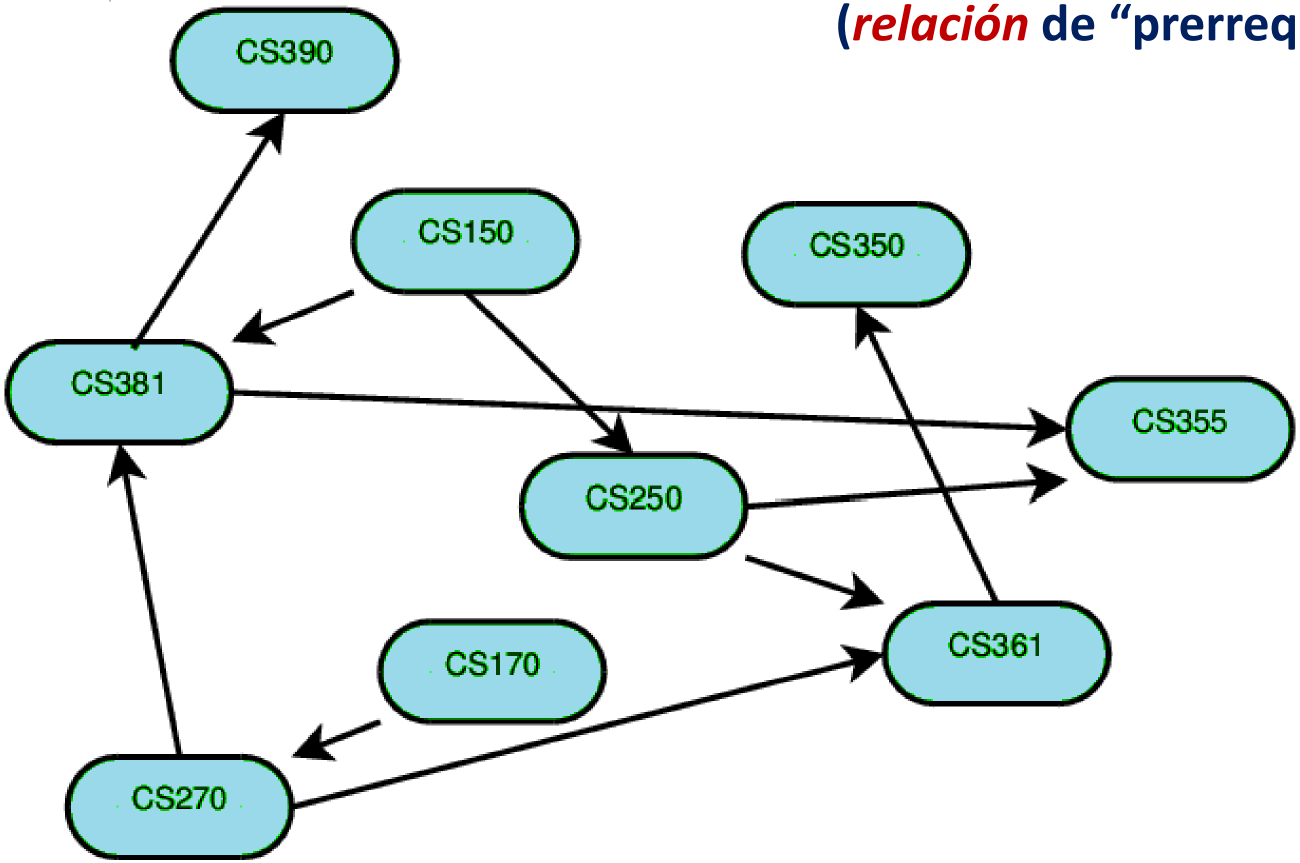
3. Recorridos

Ejemplo 1: Mapa de ciudades

Ciudades **conectadas por** *Rutas*

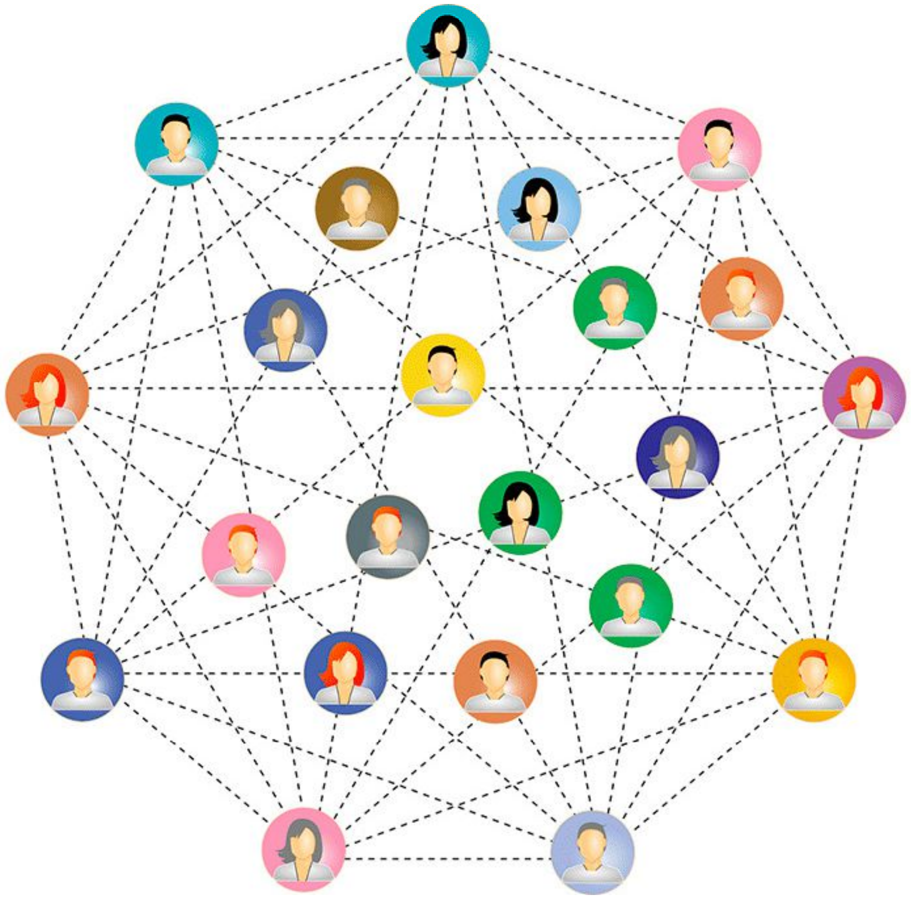


Ejemplo 2: Prerrequisitos de un curso



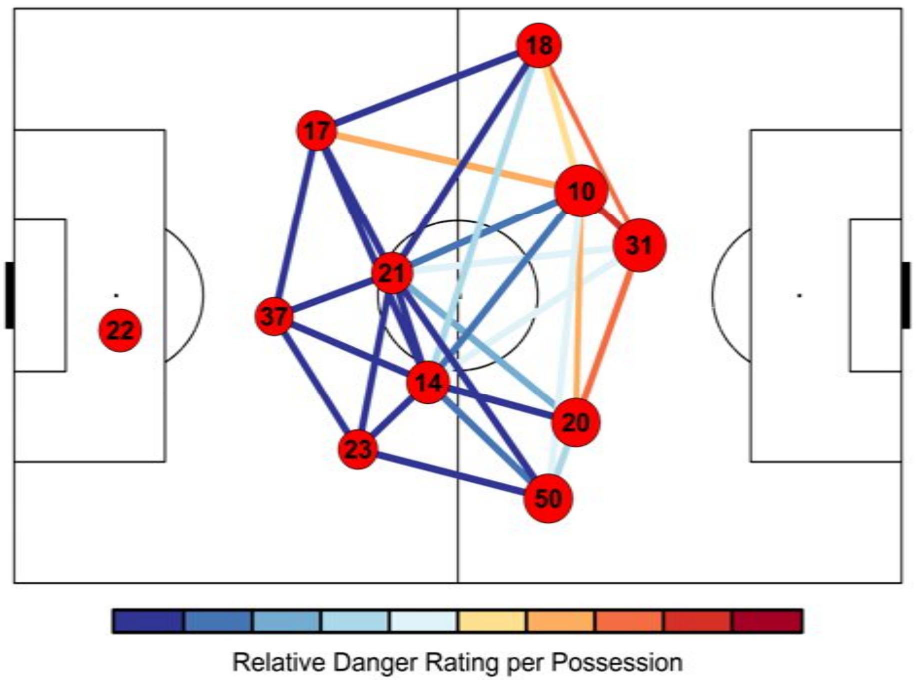
Cursos conectados por sus correlativas (*relación* de "prerrequisito")

Ejemplo 3: Redes sociales



Personas conectadas en una red social

Ejemplo 4: Red de pases de un partido de fútbol



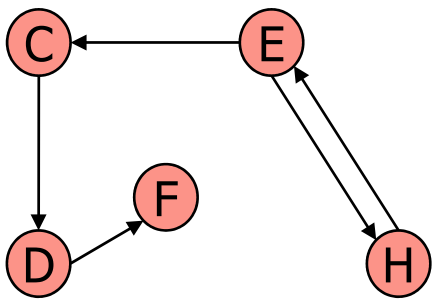
Red de pases para el Barcelona y el AC Milan de un partido de Liga de Campeones.
Las flechas más oscuras y gruesas indican más pases entre cada jugador.

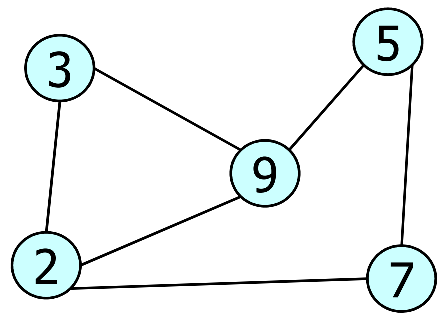
Terminología

- *Grafo→ modelo para representar relaciones entre elementos de un conjunto.*
- ***Grafo**: (V,E), V es un conjunto de vértices o nodos, con una relación entre ellos; E es un conjunto de pares (u,v), u,v Є V , llamados aristas o arcos.*
- ***Grafo dirigido**: la relación sobre V no es simétrica. Arista ≡ par ordenado (u,v). (Ejemplo 3)*
- ***Grafo no dirigido**: la relación sobre V es simétrica. Arista ≡ par no ordenado {u,v}, u,v Є V y u ≠ v. (Ejemplos 1 y 2)*

Terminología (cont. 1)

Ejemplos





Grafo dirigido G(V,E).

$V = \{C,D,E,F,H\}$

$E=\{(C,D),(D,F),(E,C),(E,H),(H,E)\}$

Grafo no dirigido G(V,E).

$V = \{2,3,5,7,9\}$

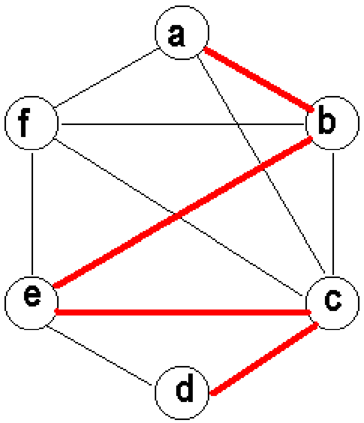
$E= \{\{2,3\},\{2,7\},\{2,9\},\{3,9\},\{5,7\},\{5,9\}\}$

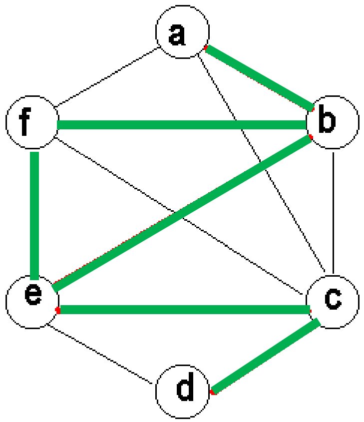
Terminología (cont. 2)

- *v es **adyacente** a u si existe una arista (u,v) Є E.*
  - *en un grafo no dirigido, (u,v) Є E **incide** en los nodos u, v.*
  - *en un grafo dirigido, (u,v) Є E **incide** en v, y **parte** de u.*
- *En grafos no dirigidos:*
  - *El **grado** de un nodo: número de arcos que inciden en él.*
- *En grafos dirigidos:*
  - *existen el grado de salida (**grado_out**) y el grado de entrada (**grado_in**).*
    - *el **grado_out** es el número de arcos que parten de él y*
    - *el **grado_in** es el número de arcos que inciden en él.*
  - *El **grado** del vértice será la suma de los grados de entrada y de salida.*
- ***Grado de un grafo**: máximo grado de sus vértices.*

Terminología (cont. 3)

- ***Camino*** *desde u Є V a v Є V : secuencia* $v_1, v_2, \ldots, v_k$ *tal que* $u=v_1$, $v=v_k$, *y* (v_{i-1},v_i) *Є E, para* $i = 2, \ldots, k$.
  Ej: camino desde ***a*** *a* ***d*** *→ <a,b,e,c, d>.*

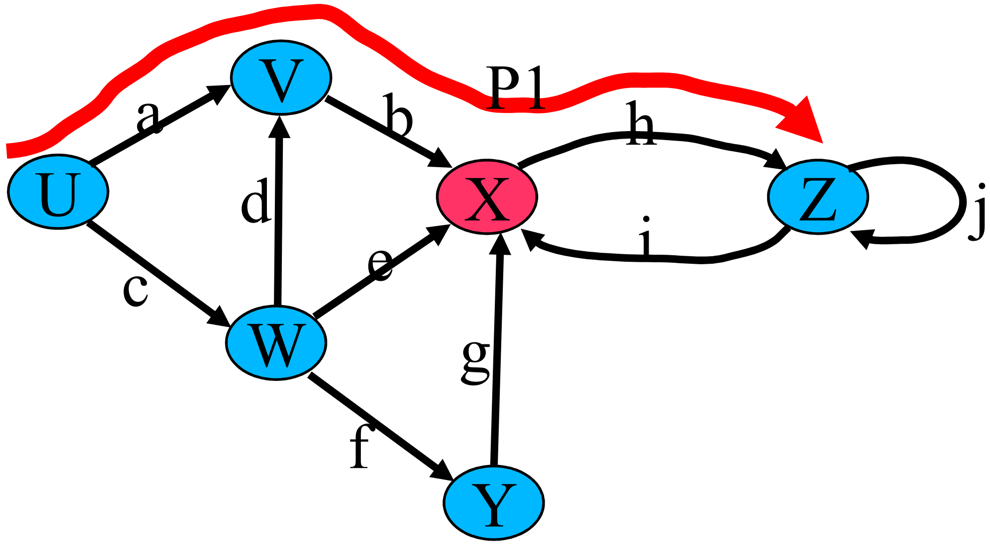




- ***Longitud de un camino****: número de arcos del camino.*
  Ejs: long. del camino desde ***a*** *a* ***d*** *→ <a,b,e,c,d> es 4. (a)*
  long. del camino desde ***a*** *a* ***d*** *→ <a,b,e,f,b,e,c,d> es 7. (b)*

Terminología (cont. 4)

➢ ***Camino simple***: *camino en el que todos sus vértices, excepto, tal vez, el primero y el último, son distintos. P1 es un camino simple desde U a Z.*

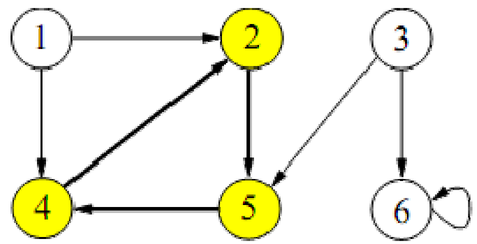


Ejemplos anteriores: (a) es camino simple , (b) no lo es.

Terminología (cont. 5)

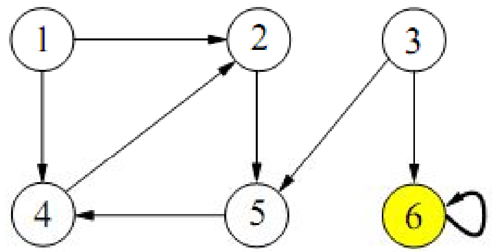
- ***Ciclo***: *camino desde* $v_1, v_2, \ldots, v_k$ *tal que* $v_1 = v_k$

  Ej: <2,5,4,2> es un ciclo de longitud 3.

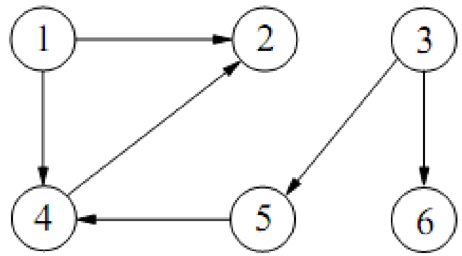


  El ciclo es simple si el camino es simple.

- ***Bucle***: *ciclo de longitud 1.*

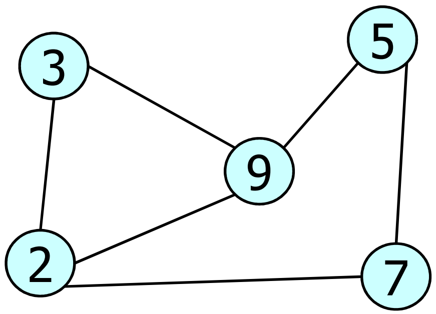


- ***Grafo acíclico***: *grafo sin ciclos.*

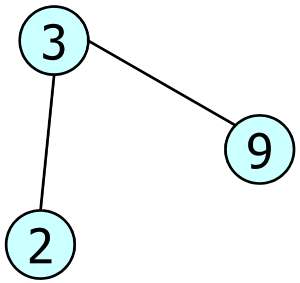


Terminología (cont. 6)

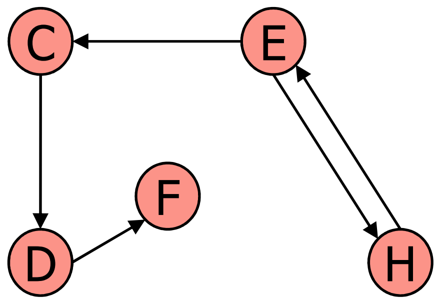
- *Dado un grafo $G=(V, E)$, se dice que $G'=(V', E')$ es un* ***subgrafo*** *de G, si $V' \subseteq V$ y $E' \subseteq E$.*



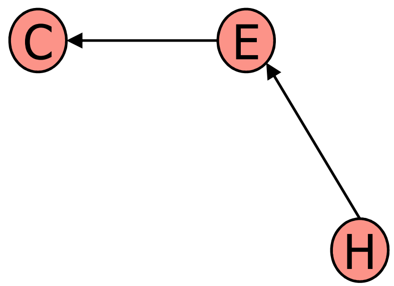
G = (V, E)



G´ = (V´, E´)



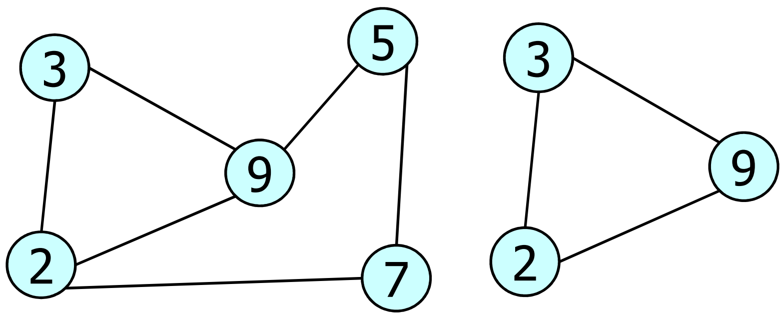
G = (V, E)



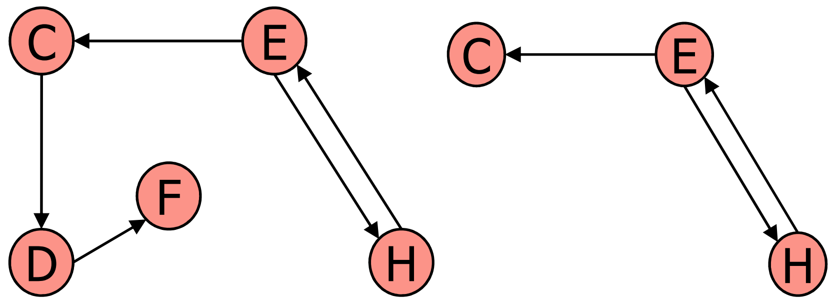
G´ = (V´, E´)

Terminología (cont. 7)

➢ *Un **subgrafo inducido** por $V' \subseteq V$: $G' = (V',E')$ tal que $E' = \{(u,v) \in E \mid u,v \in V'\}$.*



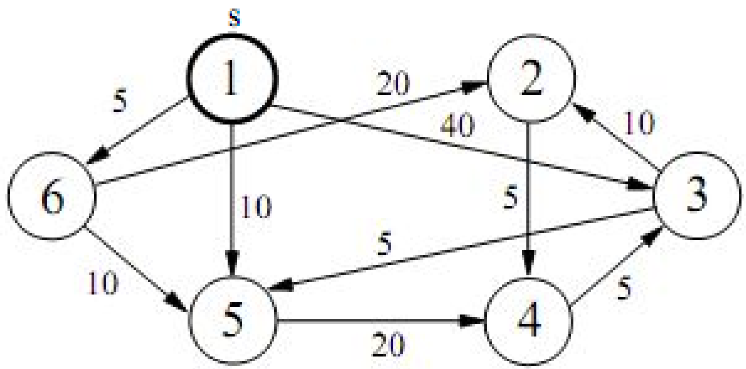
G = (V, E) **G′ = (V′, E′)**



G = (V, E) **G′ = (V′, E′)**

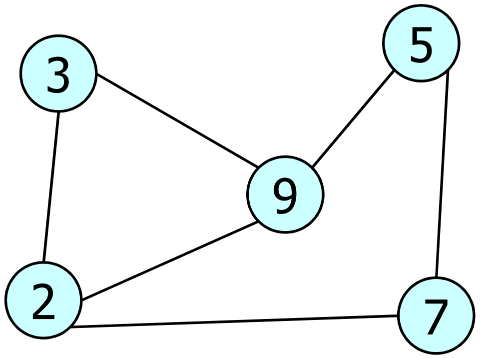
Terminología (cont. 8)

➢ *Un grafo* ***ponderado, pesado o con costos****: cada arco o arista tiene asociado un valor o etiqueta.* *(Ejemplos 2 y 4)*

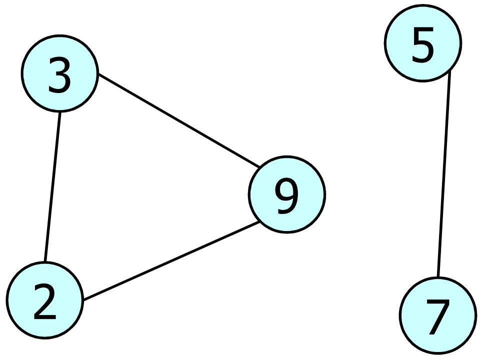


Conectividad en grafos no dirigidos

- *Un grafo no dirigido es* ***conexo*** *si hay un camino entre cada par de vértices.*



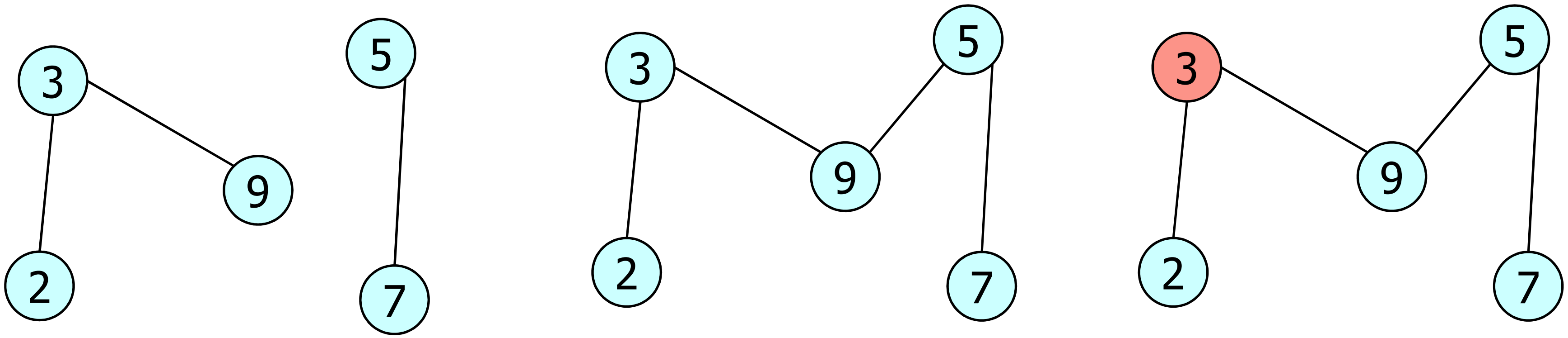
Conexo



No Conexo

Conectividad: bosque y árbol

- *Un* ***bosque*** *es un grafo sin ciclos.*
- *Un* ***árbol libre*** *es un bosque conexo.*
- *Un* ***árbol*** *es un árbol libre en el que un nodo se ha designado como raíz.*



Bosque **Árbol libre** **Árbol**

Propiedades

- *Sea G un grafo no dirigido con **n** vértices y **m** arcos, entonces*

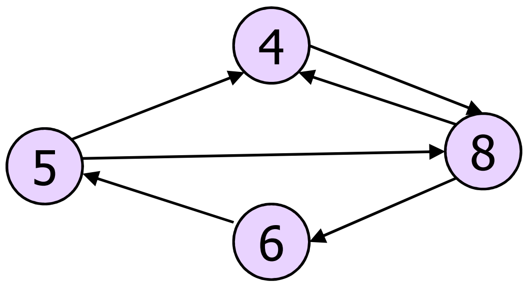
$$\sum_{v \in G} deg(v) = 2*m$$

- ✓ *Siempre:* $m \leq (n*(n-1))/2$

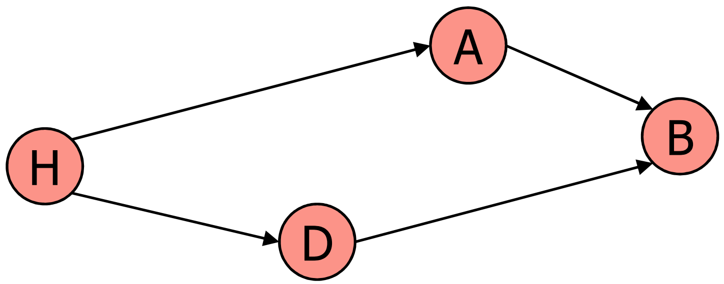
- ✓ *Si G conexo:* $m \geq n-1$
- ✓ *Si G árbol:* $m = n-1$
- ✓ *Si G bosque:* $m \leq n-1$

Conectividad en grafos dirigidos

- *v es **alcanzable desde** u, si existe un camino de u a v.*
- *Un grafo dirigido se denomina **fuertemente conexo** si existe un camino desde cualquier vértice a cualquier otro vértice*



Fuertemente Conexo



No Fuertemente Conexo
Débilmente Conexo

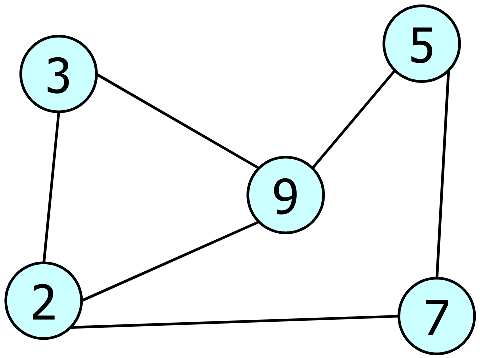
- *Si un grafo dirigido no es fuertemente conexo, pero el grafo subyacente (sin sentido en los arcos) es conexo, el grafo es **débilmente conexo**.*

Componentes conexas

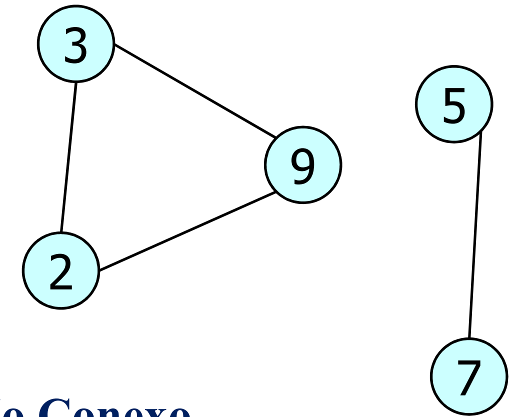
En un grafo no dirigido, una ***componente conexa es un*** *subgrafo conexo tal que no existe otra componente conexa que lo contenga.*

Es un ***subgrafo conexo maximal****.*

Un grafo no dirigido es ***no conexo*** *si está formado por varias componentes conexas.*



Conexo



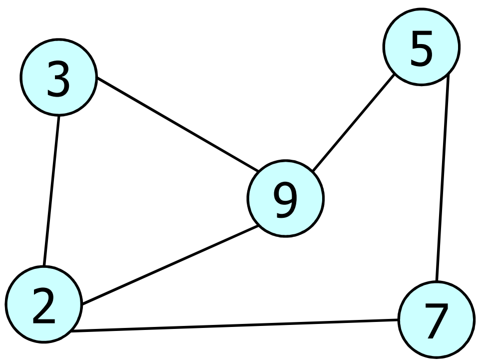
No Conexo

Componentes conexas

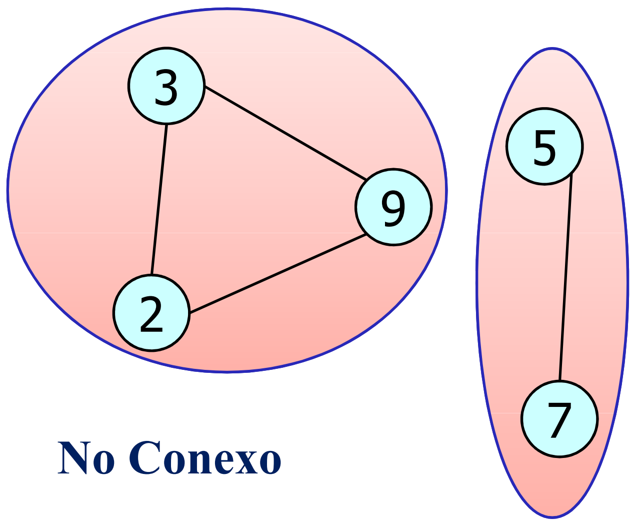
*En un grafo no dirigido, una **componente conexa es un** subgrafo conexo tal que no existe otra componente conexa que lo contenga.*

*Es un **subgrafo conexo maximal**.*

*Un grafo no dirigido es **no conexo** si está formado por varias componentes conexas.*



Conexo



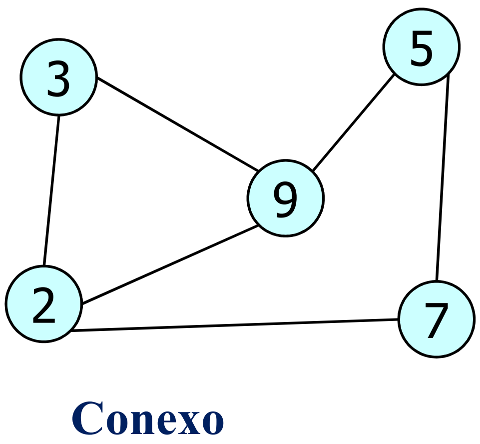
No Conexo

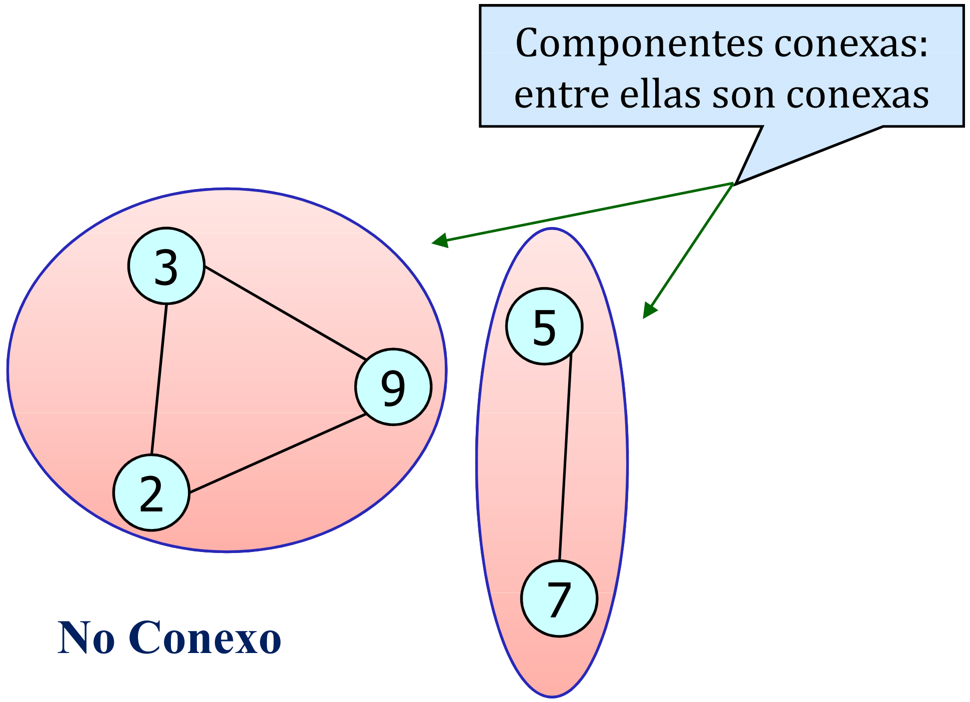
Componentes conexas

En un grafo no dirigido, una ***componente conexa es un*** *subgrafo conexo tal que no existe otra componente conexa que lo contenga.*

Es un ***subgrafo conexo maximal****.*

Un grafo no dirigido es ***no conexo*** *si está formado por varias componentes conexas.*

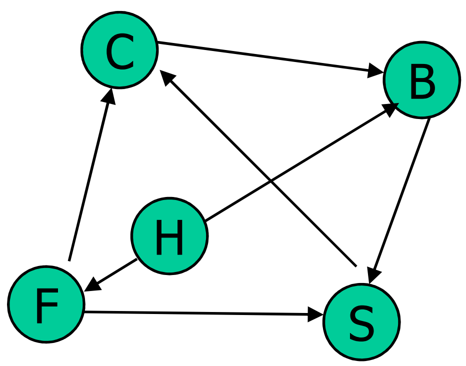




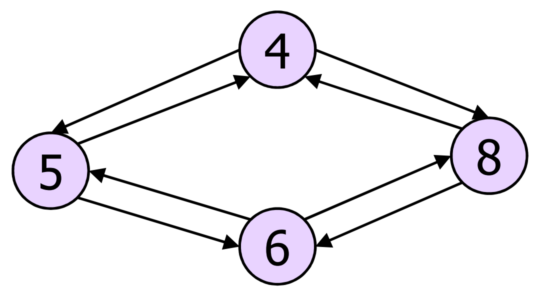
Componentes fuertemente conexas

*En un grafo dirigido, una **componente fuertemente conexa**, es el máximo subgrafo fuertemente conexo.*

*Un grafo dirigido es **no fuertemente conexo** si está formado por varias componentes fuertemente conexas.*



No Fuertemente Conexo

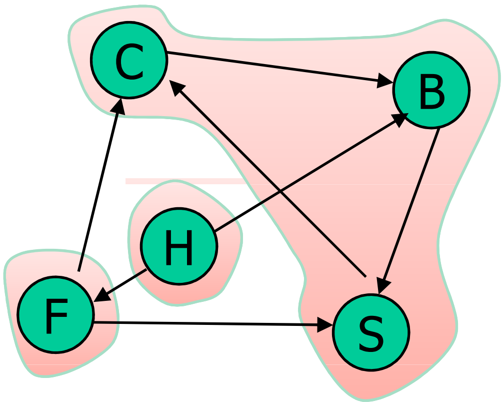


Fuertemente Conexo

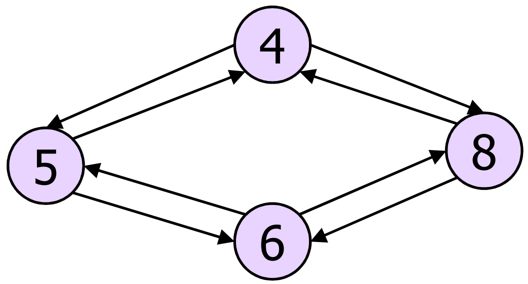
Componentes fuertemente conexas

*En un grafo dirigido, una **componente fuertemente conexa**, es el máximo subgrafo fuertemente conexo.*

*Un grafo dirigido es **no fuertemente conexo** si está formado por varias componentes fuertemente conexas.*



No Fuertemente Conexo

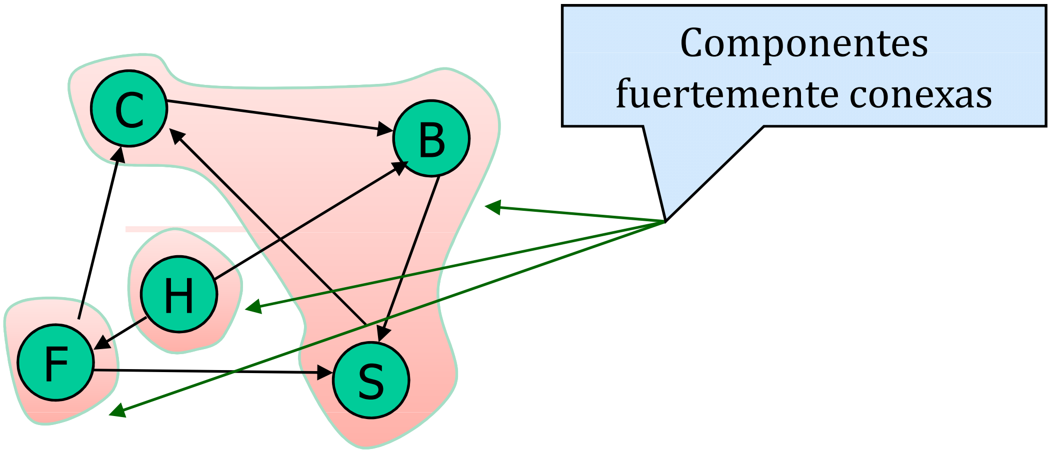


Fuertemente Conexo

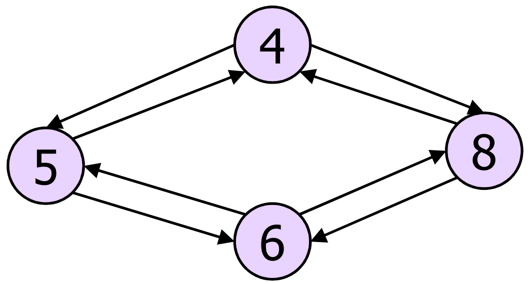
Componentes fuertemente conexas

*En un grafo dirigido, una **componente fuertemente conexa**, es el máximo subgrafo fuertemente conexo.*

*Un grafo dirigido es **no fuertemente conexo** si está formado por varias componentes fuertemente conexas.*



No Fuertemente Conexo



Fuertemente Conexo

Agenda - Grafos

1. Ejemplos y terminología

2. Representaciones

3. Recorridos

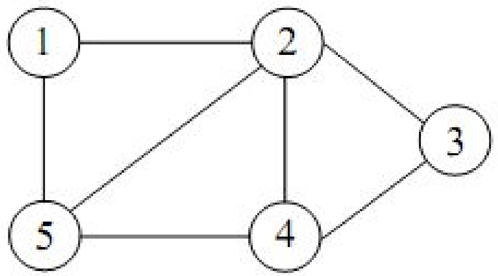
Agenda - Grafos

- Representaciones
  - Matriz de Adyacencias
  - Lista de Adyacencias

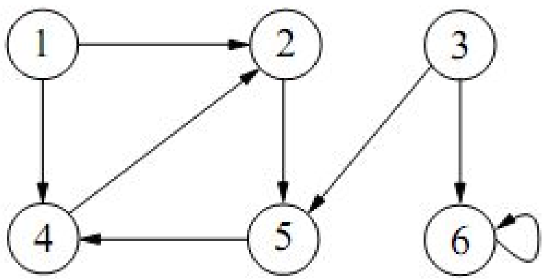
Representaciones: Matriz de Adyacencias

- $G = (V, E)$: *matriz A de dimensión* $|V| \times |V|$.
- *Valor* a_{ij} *de la matriz:*

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } (i,j) \in E \\ 0 & \text{en cualquier otro caso} \end{cases}$$



	1	2	3	4	5
1	0	1	0	0	1
2	1	0	1	1	1
3	0	1	0	1	0
4	0	1	1	0	1
5	1	1	0	1	0



	1	2	3	4	5	6
1	0	1	0	1	0	0
2	0	0	0	0	1	0
3	0	0	0	0	1	1
4	0	1	0	0	0	0
5	0	0	0	1	0	0
6	0	0	0	0	0	1

Representaciones: Matriz de Adyacencias

- *Costo espacial:* $O\ (|V|^2)$

- *Representación es útil para grafos con número de vértices pequeño, o grafos densos* $(|E| \approx |V| \times |V|)$

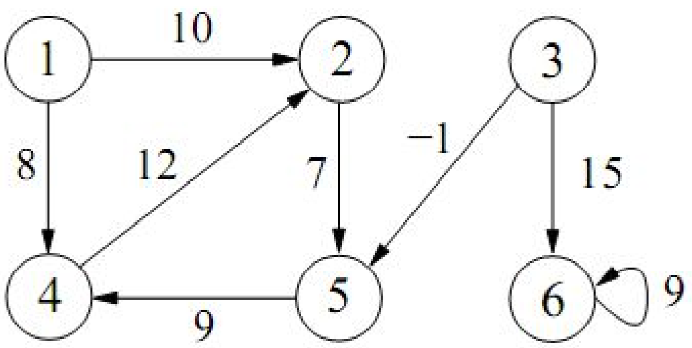
- *Comprobar si una arista (u,v) pertenece a E* $\rightarrow$ *consultar posición A(u,v)*

  - *Costo de tiempo* $T(|V|,|E|) = O(1)$

Representaciones: Matriz de Adyacencias

- *Representación aplicada a Grafos pesados*
- *El peso de (i,j) se almacena en A (i, j)*

$$a_{ij} = \begin{cases} w(i,j) & \text{si } (i,j) \in E \\ 0 \ o \ \infty & \text{en cualquier otro caso} \end{cases}$$

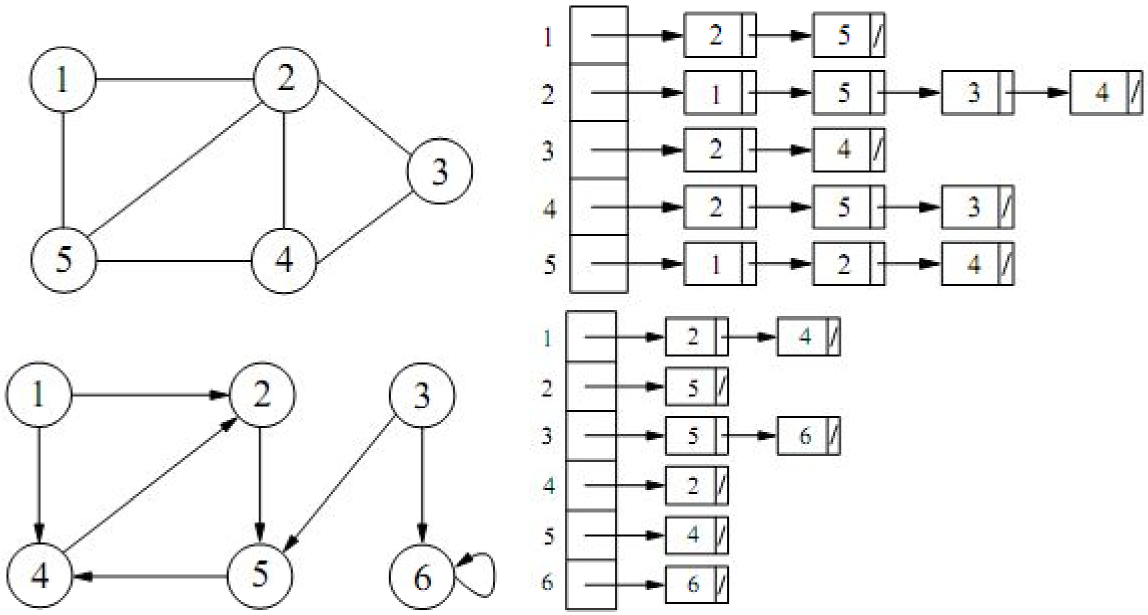


	1	2	3	4	5	6
1	0	10	0	8	0	0
2	0	0	0	0	7	0
3	0	0	0	0	−1	15
4	0	12	0	0	0	0
5	0	0	0	9	0	0
6	0	0	0	0	0	9

Representaciones: Lista de Adyacencias

- *G =(V ,E): vector de tamaño |V|.*
- *Posición **i** → puntero a una lista enlazada de elementos (lista de adyacencia).*

  *Los elementos de la lista son los vértices adyacentes a **i***



Representaciones: Lista de Adyacencias

- *Si G es dirigido, la suma de las longitudes de las listas de adyacencia será* $|E|$.

- *Si G es no dirigido, la suma de las longitudes de las listas de adyacencia será* $2|E|$.

- *Costo espacial, sea dirigido o no:* $O\ (|V|+|E|)$.

- *Representación apropiada para grafos con* $|E|$ *menor que* $|V|^2$.

- ***Desventaja**: si se quiere comprobar si una arista (u,v) pertenece a E* $\Rightarrow$ *buscar **v** en la lista de adyacencia de u.*

    - *Costo temporal* $T\ (|V|,|E|)$ *será* O *(Grado G)* $\subseteq O\ (|V|)$.

Representaciones: Lista de Adyacencias

- *Representación aplicada a Grafos pesados*
- *El **peso de (u,v)** se almacena en el nodo de **v** de la lista de adyacencia de **u**.*