UNIVERSIDAD TECNOLÓGICA NACIONAL
Facultad Regional Rosario

Matemática Discreta – 1° año - ISI

RESOLUCIÓN Práctica obligatoria de CONJUNTOS

1) a. **V**, 2 es un elemento de la colección (está visible en el listado).
b. **F**, 3 no es un elemento de la colección
Análogamente: c. **F** d. **F** e. **V** f. **F**

2) $A = (-\infty, 5]$ (Representando en un intervalo se ve claramente las siguientes conclusiones: a. **V**, 3 es un número real y $3 \leq 5$
b. **F**, 6 es un número real, pero $6 > 5$
Análogamente: c. **F** d. **V** e. **V** f. **F**

3) a. **V**, 2 es un elemento del conjunto $\{2\}$, se ve claramente que está listado.
b. **V**, el conjunto $\{0\}$ es un elemento del conjunto $\{\{0\},\{1\}\}$
c. **F,** el elemento 0 no está listado en el conjunto $\{\{0\},\{1\}\}$ (se observa que no aparece en la lista separado por comas)
Análogamente: d) **F** e) **V** (observa la diferencia con inciso c)

4) a. $A = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$
b. $B = \{4, 8\}$
c. $C = \{\ \} = \emptyset$ (pues $x^2 = -1$ no tiene solución en el conjunto de los enteros)

5) a. $A = \{x/x \in \mathbb{Z}^+ \wedge x = 2n, n \in \mathbb{Z} \wedge 1 \leq n \leq 5\}$
b. $B = \{x/x \in \mathbb{Z}^+ \wedge x = n^3, n \in \mathbb{Z} \wedge 1 \leq n \leq 5\}$
c. $C = \{x/x \in \mathbb{Z} \wedge -2 \leq x \leq 2\}$
d. $D = \{x/x \text{ es un país limítrofe con Argentina}\}$
e. $E = \{x/x \text{ es una vocal del abecedario español}\}$ $E = \{x/$ $x \text{ es una vocal del abecedario español}\}$

<u>NOTA:</u> Se muestra una respuesta posible para cada ítem, cualquier respuesta equivalente es válida.

Recordar que siempre se debe definir el conjunto universal, en los casos de conjuntos numéricos lo aclaramos inicialmente al colocar x/x. En los casos d y e lo colocamos al final. Otras posibles formas de escribir los conjuntos anteriores por extensión son las siguientes:

a. $A = \{x/x \in \mathbb{Z}^+ \wedge x = 2n, n \in \mathbb{Z}^+ \wedge n \leq 5\}$
$A = \{x/x \in \mathbb{Z}^+ \wedge x = 2n, n \in \mathbb{Z}^+ \wedge x \leq 10\}$
$A = \{x\ /x \in \mathbb{Z}^+ \wedge x = 2n, n \in \mathbb{Z}^+ \wedge n < 6\}$

b. $B = \{x/x \in \mathbb{Z}^+ \wedge x = n^3, n \in \mathbb{Z}^+ \wedge n \leq 5\}$
B $= \left\{x/x \in \mathbb{Z}^+ \wedge \sqrt[3]{x} = n, n \in \mathbb{Z}^+ \wedge n \leq 5\right\}$

c. $C = \{x/x \in \mathbb{Z} \wedge |x| \leq 2\}$
d. $E = \{\ x\ /x\ es\ una\ vocal\ de\ la\ palabra\ murciélago\}$

6) Si se listan los elementos del conjunto C que están expresados por comprensión puede observarse que A = B = C

7) $U_1 = \{1, -1\}$, $U_2 = \{2, -2\}$, $U_0 = \{0\}$

8) $|X| = 4$ $|Y| = 3$ contando cada uno de los elementos, observa que el conjunto Y tiene como elementos conjuntos y son tres.

Expresando el conjunto Z por extensión vemos que $|Z| = 5$

9) a. **F**, {0} es un conjunto que tiene como elemento el número cero y ∅ es el conjunto vacío que no tiene elementos.

b. **F**, $\{2\}$ es un elemento del conjunto $\{1, \{2\}, \{3\}\}$ (no está incluido, está en el listado), lo correcto es $\{2\} \in \{1, \{2\}, \{3\}\}$

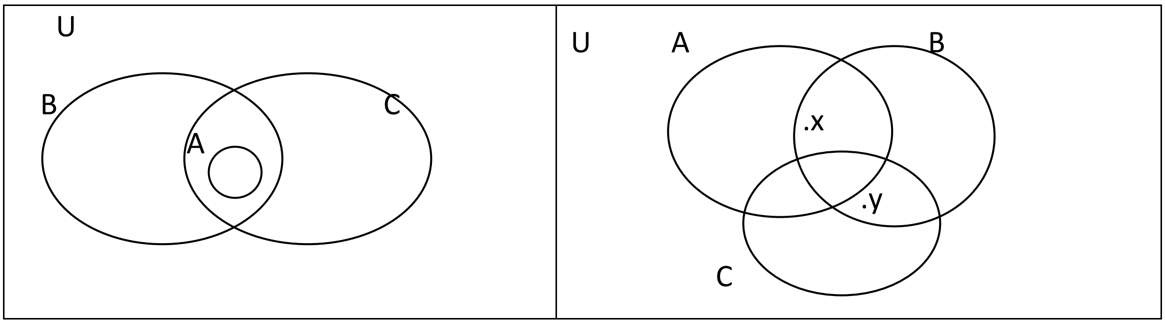
c. **V,** claramente se ve que el elemento 1 ∈ {1,2}, entonces el conjunto {1} está incluido pues todo elemento de él (que solo es el 1) es también elemento de {1,2} (repasar definición de inclusión)

Análogamente: d. **V** e. **V**

10) $T \subseteq S$, $T \nsubseteq P$, $T \subseteq G$ $P \subseteq S$, $P \nsubseteq T$, $P \subseteq G$ $G \subseteq S$, $G \nsubseteq T$, $G \nsubseteq P$ (o enunciados equivalentes como por ejemplo $S \supseteq T$ para el primer caso).

11) Se muestra una respuesta posible para cada ítem:

Inciso a. Inciso b.



Otra opción posible del inciso a) es que el conjunto A ocupe toda la intersección entre B y C

12) a. **F**, $j \in B$ pero $j \notin A$

b. **V**, se verifican simultáneamente que ($d \in C$ y $d \in A$) , ($g \in C$ y $g \in A$)

c. **V** , por propiedad $A \subseteq A, \forall A$

13) a. **F**, $4 \in R$ pero $4 \notin T$

b. y c. **V**, todo número entero que es divisible por 6 es también divisible por 2 y por 3

14) a. **V** b. **V** c. **F**

15) a. **V**, pues $A \cap B = \emptyset$
b. **F**, pues $A \cap B = B$ pues $A = \mathbb{Z}^+$ y $B \subseteq A$
c. **V**, pues $A \cap B = \emptyset$ pues $A = \{2\}$ y $B = \{4\}$

16) Se muestra sólo la veracidad o falsedad en cada caso, deben complementarse las respuestas con las justificaciones correspondientes.
a. **V** b. **V** c. **V** d. **V** e. **F** f. **V** g. **F** h. **V** i. **F** j. **F** k. **F** l. **V**
m. **F** n. **V** o. **V** p. **F** q. **F**

17) a. **F,** Ejemplo A = {1,2,3} B = {3,4} C = {4} en este caso $A \cup B = \{1,2,3,4\}$ y $A \cup C = \{1,2,3,4\}$, pero claramente se observa que B ≠ C
b. **F**, Ejemplo A = {1,2,3} B = {3,4} C = {3,8} en este caso $A \cap B = \{3\}$ y $A \cap C = \{3\}$ pero claramente se puede observar que B ≠ C

18)

$A \cup B = \{1,2,4,5,6,8,9\}$	$C \cap B = \{2,4\}$	$\bar{A} = \{3,5,7,9\}$	$(B \cup C) \cap A = \{1,2,4\}$
$A \cup C = \{1,2,3,4,6,8\}$	$C \cap D = \emptyset$	$A \oplus B = \{1,5,6,8,9\}$	$(B \cup A) \cap D = \{8\}$
$A \cup D = \{1,2,4,6,7,8\}$	$A - B = \{1,6,8\}$	$C \oplus D = C \cup D$	$\overline{(A \cup B)} = \{3,7\}$
$C \cup B = \{1,2,3,4,5.9\}$	$B - A = \{5,9\}$	$C \oplus B = \{1,3,5,9\}$	$\overline{(A \cap B)} = \{1,3,5,6,7,8,9\}$
$A \cap C = \{1,2,4\}$	$C - D = C$	$(A \cup B) \cup C = \{1,2,3,4,5,6,8\}$	$(B \cup C) \cup D = U - \{6\}$
$A \cap D = \{8\}$	$\bar{C} = \{5,6,7,8,9\}$	$(A \cap B) \cap C = \{2,4\}$	$(B \cap C) \cap D = \emptyset$

19) a. $\bar{A} = \mathbb{R} - \{-1,1\}$
b. $\bar{B} = \mathbb{R} - \{-1,4\}$
c. $\overline{(A \cup B)} = \mathbb{R} - \{-1,1,4\}$
d. $\overline{(A \cap B)} = \mathbb{R} - \{-1\}$

¿Se podría expresar de otra forma?

Claramente por extensión no, pues el conjunto universal es el de los números reales.

Podemos escribirlos como unión de intervalos (que son conjuntos también) ejemplo a:

$$(-\infty, -1) \cup (-1,1) \cup (1, +\infty)$$

Pero nosotros trabajaremos en esta materia con la simbología indicada inicialmente.

20)
a. **Si A = B ⇒ $\bar{\mathbf{A}} = \bar{\mathbf{B}}$**
✓ Se probará primero que $\bar{A} \subseteq \bar{B}$:

$$\text{Sea} \quad x \in \bar{A} \underset{\text{def. de complemento}}{\Rightarrow} x \notin A \underset{\text{pues A = B}}{\Rightarrow} x \notin B \Rightarrow x \in \bar{B} \quad \textit{luego} \quad \bar{A} \subseteq \bar{B} \qquad (1)$$

✓ Ahora que $\bar{B} \subseteq \bar{A}$:

Sea $x \in \bar{B} \Rightarrow x \notin B \Rightarrow x \notin A \Rightarrow x \in \bar{A}$ *luego* $\bar{B} \subseteq \bar{A}$ (2)

def. de complemento pues A = B

De lo probado en (1) y en (2), resulta $\bar{\mathbf{A}} = \bar{\mathbf{B}}$

b. Si $\mathbf{A} \subseteq \mathbf{B} \Rightarrow \bar{\mathbf{B}} \subseteq \bar{\mathbf{A}}$ (Es un caso particular del ejercicio anterior)

Sea $x \in \bar{B} \Rightarrow x \notin B \Rightarrow x \notin A \Rightarrow x \in \bar{A}$ *luego* $\bar{B} \subseteq \bar{A}$

def. de complemento pues $A \subseteq B$

c. $A \subseteq B \Leftrightarrow \mathbf{A} \cup \mathbf{B} = \mathbf{B}$

✓ Se probara que si $\underline{A \subseteq B \Rightarrow A \cup B = B}$, es decir hay que probar una igualdad entre conjuntos, partiendo como dato (hipótesis) la inclusión de A en B.

Sea $x \in A \cup B \Rightarrow x \in A \; o \; x \in B \Rightarrow x \in B \; o \; x \in B \Rightarrow x \in B$ es decir $AUB \subseteq B$ (1)

def. de unión $A \subseteq B$

Sea $x \in B \Rightarrow x \in A \cup B$ (2)

De lo probado en (1) y en (2), resulta $\mathbf{A} \cup \mathbf{B} = \mathbf{B}$

✓ Se probará que si $\underline{A \cup B = B \Rightarrow A \subseteq B}$, es decir hay que probar una inclusión entre conjuntos, teniendo como dato (hipótesis) la igualdad de los conjuntos $A \cup B = B$

Sea $x \in A \Rightarrow x \in A \cup B \Rightarrow x \in B$ Es decir $A \subseteq B$

Def. de Unión $A \cup B = B$

d. $A \subseteq B \Leftrightarrow \mathbf{A} \cap \mathbf{B} = \mathbf{A}$

✓ Se probara que si $\underline{A \subseteq B \Rightarrow A \cap B = A}$, es decir hay que probar una igualdad entre conjuntos, teniendo como dato la inclusión de A en B

Sea $x \in A \cap B \Rightarrow x \in A \; y \; x \in B \Rightarrow x \in A$ es decir $A \cap B \subseteq A$ (1)

def. de intersección en particular

Sea $x \in A \Rightarrow x \in A \ y \ x \in B \Rightarrow x \in A \cap B$ (2)

A ⊆ B Def. de intersección

De lo probado en (1) y en (2), resulta $\mathbf{A \cap B = A}$

- ✓ Ahora se prueba que si $\underline{A \cap B = A \Rightarrow A \subseteq B}$, es decir se prueba la inclusión teniendo como dato la igualdad $A \cap B = A$

Sea $x \in A \Rightarrow x \in A \cap B \Rightarrow x \in A \ y \ x \in B \Rightarrow x \in B$ es decir $A \subseteq B$

Pues $A \cap B = A$ def. de intersección en particular

e. $(\mathbf{A \cap B}) \cup (\mathbf{A \cap \overline{B}}) = \mathbf{A}$

- ✓ Se plantea probar $(\mathbf{A \cap B}) \cup (\mathbf{A \cap \overline{B}}) \subseteq \mathbf{A}$

Sea $x \in (\mathbf{A \cap B}) \cup (\mathbf{A \cap \overline{B}}) \Rightarrow x \in (A \cap B) \ o \ x \in (A \cap \overline{B})$ def de unión

Tenemos dos casos:

i. $x \in (A \cap B) \Rightarrow x \in A \ y \ x \in B \Rightarrow x \in A$

def. de intersección en particular

ii. $x \in (A \cap \overline{B}) \Rightarrow x \in A \ y \ x \in \overline{B} \Rightarrow x \in A$

Por lo tanto en ambos casos queda demostrado que $(\mathbf{A \cap B}) \cup (\mathbf{A \cap \overline{B}}) \subseteq \mathbf{A}$

- ✓ Se plantea probar $A \subseteq (\mathbf{A \cap B}) \cup (\mathbf{A \cap \overline{B}})$

Si $x \in A$ como dato, tenemos dos casos:

i. $x \in B \Rightarrow x \in A \ y \ x \in B \Rightarrow x \in A \cap B$ (1)

Por hipotesis def de inters

ii. $x \notin B \Rightarrow x \in A \ y \ x \in \overline{B} \Rightarrow x \in A \cap \overline{B}$ (2)

De lo probado en (1) y en (2), resulta $A \subseteq (\mathbf{A \cap B}) \cup (\mathbf{A \cap \overline{B}})$

Este ejercicio se puede demostrar en menos pasos utilizando identidades entre conjuntos (pág 21 del apunte), como se pide realizar en el ejercicio 21:

$(A \cap B) \cup (A \cap \overline{B}) = A \cap (B \cup \overline{B}) = A \cap \mathcal{U} = A$

prop distributiva prop del complemento prop. conj universal

f. $\mathbf{A} \cup (\mathbf{A} \cap \mathbf{B}) = \mathbf{A}$ ley de absorción

Siguiendo los planteos anteriores tenemos que probar doble igualdad conjuntista:

✓ $\underline{\mathrm{A} \cup (\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) \subseteq \mathrm{A}}$

Sea $x \in A \cup (A \cap B) \underset{\text{def de unión}}{\Rightarrow} x \in A \; o \; x \in A \cap B \underset{\text{en particular}}{\Rightarrow} x \in A$ *por lo tanto* $A \cup (A \cap B) \subseteq A$ (1)

✓ $\underline{\mathrm{A} \subseteq \mathrm{A} \cup (\mathrm{A} \cap \mathrm{B})}$

Pueden ocurrir dos cosas: que $x \in A \; o \; que \; x \in A \; y \; x \in B$

i. Si $x \in A \Rightarrow x \in A \cup (\,cualquier\ conjunto) \underset{\text{En particular}}{\Rightarrow} x \in A \cup (A \cap B)$ luego $\mathrm{A} \subseteq \mathrm{A} \cup (\mathrm{A} \cap \mathrm{B})$

ii. Si $x \in B \underset{\text{Por hipotesis}}{\Rightarrow} x \in A \; y \; x \in B \underset{\text{def. de intersección}}{\Rightarrow} x \in A \cap B \Rightarrow x \in A \; o \; x \in A \cap B \underset{\text{def de unión}}{\Rightarrow} x \in A \cup (A \cap B)$ luego $\mathrm{A} \subseteq \mathrm{A} \cup (\mathrm{A} \cap \mathrm{B})$

g. **Si** $\mathbf{A} \subseteq \mathbf{B} \Rightarrow \mathbf{A} \cap \mathbf{C} \subseteq \mathbf{B} \cap \mathbf{C}$

Sea $x \in A \cap C \underset{\text{def de intersección}}{\Rightarrow} x \in A \; y \; x \in B \underset{\mathrm{A} \subseteq \mathrm{B}}{\Rightarrow} x \in B \; y \; x \in C \underset{\text{def de intersección}}{\Rightarrow} x \in B \cap C$

h. **Si** $\mathbf{A} \subseteq \mathbf{B}$ **y** $\mathbf{A} \subseteq \mathbf{C} \Rightarrow \mathbf{A} \cap \mathbf{B} \subseteq \mathbf{C}$

Sea $x \in A \cap B \underset{\text{def de intersección}}{\Rightarrow} x \in A \; y \; x \in B \underset{\mathrm{A} \subseteq \mathrm{B}}{\Rightarrow} x \in A \; y \; x \in A \Rightarrow x \in A \underset{\mathrm{A} \subseteq \mathrm{C}}{\Rightarrow} x \in C$

i. $(\mathbf{A} \cap \mathbf{B}) \cap (\mathbf{A} \cap \overline{\mathbf{B}}) = \emptyset$

Demostramos este ejercicio por contradicción o absurdo, suponemos que existe un elemento x en la intersección (veremos que esto no es posible)

Sea $x \in (\mathbf{A} \cap \mathbf{B}) \cap (\mathbf{A} \cap \overline{\mathbf{B}}) \Rightarrow x \in (A \cap B) \; y \; x \in (A \cap \overline{B})$ def de intersección

$x \in (A \cap B) \Rightarrow (x \in A \; y \; x \in B)$ en particular $x \in B$ (1)

$x \in (A \cap \overline{B)} \Rightarrow (x \in A \; y \; x \notin B)$ en particular $x \notin B$ (2)

De (1) y en (2), resulta una contradicción pues un elemento no puede pertenecer y no pertenecer a un mismo conjunto. Esto se llega de suponer que existe en la intersección elementos en común. Por lo tanto $(\mathbf{A} \cap \mathbf{B}) \cap (\mathbf{A} \cap \overline{\mathbf{B}}) = \emptyset$

Este ejercicio también se puede demostrar de otra forma utilizando identidades entre conjuntos (pág 21 del apunte), como se pide realizar en el ejercicio 21:

$$(A \cap B) \cap (A \cap \bar{B}) = A \cap (B \cap A) \cap \bar{B} = A \cap (A \cap B) \cap \bar{B} = (A \cap A) \cap (B \cap \bar{B}) = A \cap \emptyset = \emptyset$$

Prop. Asociativa Prop Conmutativa Prop. Asociativa Prop. Complemento Prop. Conj. Vacío

j. **Si** $\mathbf{A} \subseteq \mathbf{B} \Rightarrow \mathbf{A} \cap \overline{\mathbf{B}} = \emptyset$ (método del absurdo o contradicción)

Supongamos que existe un elemento x tal que $x \in A \cap \overline{B}$, se tratará de probar que esto es imposible.

$$Sea\; x \in A \cap \bar{B} \Rightarrow x \in A \;\; y \; x \in \bar{B} \Rightarrow x \in A \; y \; x \notin B \Rightarrow x \in B \; y \; x \notin B \quad \boldsymbol{Absurdo}!$$

def de intersección def de complemento $A \subseteq B$

Luego no puede haber ningún elemento en $A \cap \overline{B}$, es decir $\mathbf{A} \cap \overline{\mathbf{B}} = \emptyset$

k. $\mathbf{A} - \mathbf{B} = \mathbf{A} \cap \overline{\mathbf{B}}$

En este caso utilizamos un solo paso para resolver la igualdad entre conjuntos pues usamos la simbología del "si y solo si" en vez de la de implicación. Si bien esto simplifica la demostración no siempre puede ser utilizada (se recomienda observar si realmente es posible el planteo haciendo el análisis de la implicación hacia la derecha y hacia la izquierda).

$$Sea\; x \in A - B \Leftrightarrow x \in A \; y \; x \notin B \Leftrightarrow x \in A \; y \; x \in \bar{B} \Leftrightarrow x \in A \cap \bar{B}$$

def de diferencia def de complemento def de intersección

21)

a) $(A - B) \cap (B - A) = (A \cap \bar{B}) \cap (B \cap \bar{A})$ (característica de diferencia)

$= A \cap (\bar{B} \cap B) \cap \bar{A}$ (ley asociativa)

$= A \cap \emptyset \cap \bar{A}$ (ley complemento)

$= (A \cap \bar{A}) \cap \emptyset$ (leyes conmutativa y asociativa)

$= \emptyset \cap \emptyset$ (ley complemento)

$= \emptyset$ (ley idempotencia)

b) $(A - C) \cap (B - C) \cap (A - B) = (A \cap \bar{C}) \cap (B \cap \bar{C}) \cap (A \cap \bar{B})$ (caract. de diferencia)

$= A \cap B \cap (\bar{C} \cap \bar{C}) \cap A \cap \bar{B}$ (leyes conmut y asoc)

$= A \cap B \cap \bar{C} \cap A \cap \bar{B}$ (ley idempotencia)

$= A \cap \overline{(B \cap B)} \cap \bar{C} \cap A$ (leyes conmut y asoc)

$= A \cap \emptyset \cap \bar{C} \cap A$ (ley complemento)

$= (A \cap A) \cap \emptyset \cap \bar{C}$ (leyes conmut y asoc)

$= A \cap \emptyset \cap \bar{C}$ (ley idempotencia)

$= (A \cap \overline{C)} \cap \emptyset$ (leyes conmut y asoc)

$= \emptyset$ (ley de acotación)

c) $(A \cup B) - C = (A \cup B) \cap \bar{C}$ (característica de diferencia)

$= \bar{C} \cap (A \cup B)$ (ley conmutativa)

$= (\bar{C} \cap A) \cup (\bar{C} \cap B)$ (ley distributiva)

$= (A \cap \bar{C}) \cup (B \cap \bar{C})$ (ley conmutativa)

$= (A - C) \cup (B - C)$ (característica de diferencia)

d) $A - (A \cap B) = A \cap (\overline{A \cap B})$ (característica de diferencia)

$= A \cap (\bar{A} \cup \overline{B)}$ (ley de De Morgan)

$= (A \cap \bar{A}) \cup (A \cap \bar{B})$ (ley distributiva)

$= \emptyset \cup (A \cap \bar{B})$ (ley complemento)

$= (A \cap \bar{B})$ (ley de identidad)

$= A - B$ (característica de diferencia)

e) $(\overline{A \cap B}) \cap A = (\bar{A} \cup \overline{B)} \cap A$ (ley de De Morgan)

$= (\bar{A} \cap A) \cup (\bar{B} \cap A)$ (ley distributiva)

$= \emptyset \cup (\bar{B} \cap A)$ (ley complemento)

$= (\bar{B} \cap A)$ (ley de identidad)

$= A \cap \bar{B}$ (ley conmutativa)

$= A - B$ (característica de diferencia)

22) $\mathcal{U}$: cantidad de encuestados $\longrightarrow |\mathcal{U}| = 100$

M: Mendoza $\longrightarrow |M| = 40$

B: Bariloche $\longrightarrow |B| = 25$

Mendoza y Bariloche $\longrightarrow |M \cap B| = 13$

a. $|M \cup B| = |M| + |B| - |M \cap B| = 40 + 25 - 13 = 52$

$$|\mathcal{U}| - |M \cup B| = 100 - 52 = 48$$

✓ 48 personas no realizan excursión

b. $|M \cup B| - |M \cap B| = 52 - 13 = 39$

✓ 39 personas van a realizar solo una excursión

c. $|M| - |M \cap B| = 40 - 13 = 27$

✓ 27 personas viajarán solo a Mendoza

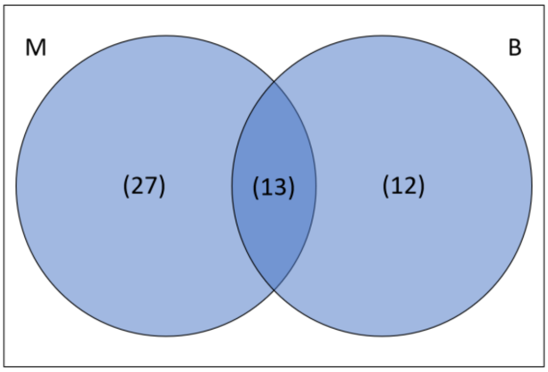
d. $|M \cup B| = 52$

✓ 52 personas van por lo menos[1] a una excursión

Si hacemos una representación de esta situación por medio de diagramas de Venn, y colocamos dentro de cada una de las regiones que quedan identificadas la cantidad de elementos (los escribimos entre paréntesis, para diferenciar que no se trata de un elemento); lo primero que debemos escribir es la cantidad de elementos que se encuentra en la intersección y luego restar ese número al cardinal de

[1] Decir por lo menos, significa hablar de uno o más de uno. En el caso de este problema hace referencia a haber realizado una excursión o dos, es decir el cardinal de la unión de ambos conjuntos.

cada uno de los conjuntos (para colocarlos en las regiones restantes). Identifica bien cuántas regiones se determinan cuando tenemos esta situación. Queda entonces lo siguiente:



23) $\mathcal{U}$: alumnos que rindieron examen de Matemática, Física e Inglés ⟶ $|\mathcal{U}|$ = 70

M: rindieron bien Matemática ⟶ $|M| = 50$

I: rindieron bien Inglés ⟶ $|I|$ =30

F: rindieron bien Física ⟶ $|F| = 35$

$|M \cap I \cap F|$ = 20

$|M \cap F| = 10 + 20$ = 30 es decir los que sólo rindieron Matemática y Física, más los que rindieron las 3 materias

$|M \cap I| = 8 + 20$ = 28 es decir los que sólo rindieron Matemática e Inglés, más los que rindieron las 3 materias

$|I \cap F|$ = 1 + 20 = 21 es decir los que sólo rindieron Inglés y Física, más los que rindieron las 3 materias

a. $|M \cap F| + |M \cap I| + |I \cap F| - |M \cap I \cap F| - |M \cap I \cap F| - |M \cap I \cap F| + |M \cap I \cap F|$ = 30 + 28 + 21 – 20 – 20 – 20 + 20 = 39

✓ Promovieron 39 alumnos, es decir los que rindieron bien sólo 2 o 3 materias

b. $|M| - |M \cap I| - |M \cap F| + |M \cap I \cap F|$ = 50 – 30 – 28 + 20 = 12, es decir 12 alumnos rindieron bien solamente Matemática.

$|I| - |I \cap M| - |I \cap F| + |M \cap I \cap F|$ = 30 – 28 – 21 + 20 = 1, es decir 1 alumno rindió bien solamente Inglés.

$|F| - |F \cap M| - |F \cap I| + |M \cap I \cap F|$ = 35 – 30 – 21 + 20 = 4, es decir 4 alumnos rindieron bien solamente Física.

Luego 12 + 1 + 4 = 17 rindieron bien solamente una materia.

✓ No se promovieron por adeudar sólo 2 materias 17 alumnos

c. $|\mathcal{U}| - |M \cup I \cup F| =$

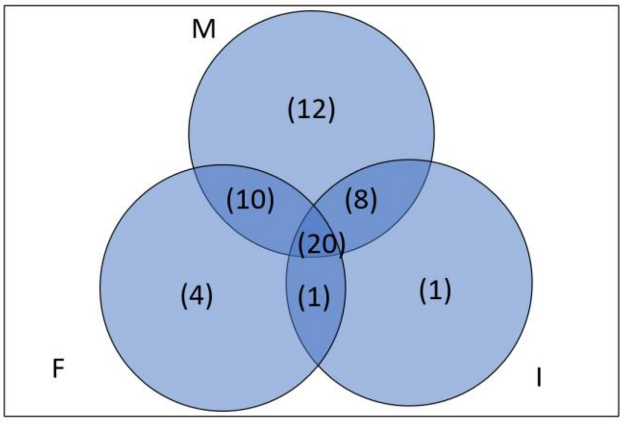
$|\mathcal{U}| - (|M| + |I| + |F| - |M \cap I| - |M \cap F| - |I \cap F| + |M \cap I \cap F|\,) =$

70 – (50 + 30 + 35 – 28 – 30 – 21 + 20) = 70 – 56 = 14

56 alumnos rindieron al menos bien 1 materia (es decir rindieron bien una, dos o tres bien)

✓ 14 alumnos rindieron mal las 3 materias

La representación en diagramas de Venn es la siguiente (en este caso se debe comenzar por la intersección de los tres, luego con la intersección de los dos – tenga en cuenta que en este ejercicio ya da como dato el número restante, y finalmente complete la región exclusiva del conjunto – donde están los elementos que sólo le corresponden a él). Identifica claramente cuántas son las regiones que se determinan al trabajar con la intersección de tres conjuntos



24) $\mathcal{U}$: asociados a un banco $\longrightarrow$ $|\mathcal{U}|$ = 500

A: Agricultores $\longrightarrow$ $|A| = 240$

G: Ganaderos $\longrightarrow$ $|G| = 300$

Av: Avicultores$\longrightarrow$ $|Av| = 190$

$|A \cap G| = 100;\ |A \cap Av| = 80;\ |G \cap Av| = 150;\ |A \cap G \cap Av| = 50$

a. $|A \cup G \cup Av| = |A| + |G| + |Av| - |A \cup G| - |A \cup Av| - |G \cup Av| + |A \cap G \cap Av|$
= 240 + 300 + 190 – 100 - 80 – 150 + 50 = 450

$|\mathcal{U}| - |A \cup G \cup Av|$ = 500- 450 = 50

✓ 50 asociados no desarrollan ninguna de las actividades

b. $|A| - |A \cap G| - |A \cap Av| + |A \cap G \cap Av|$ = 240 -100 - 80 + 50= 110, es decir 110 asociados son solo Agricultores.

$|G| - |G \cap A| - |G \cap Av| + |A \cap G \cap Av|$ = 300 - 100 – 150 + 50 = 100, es decir 100 asociados son solo Ganaderos.

$|Av| = |Av \cap A| - |Av \cap G| + |A \cap G \cap Av|$ = 190 - 80 - 150 + 50 = 10, es decir 10 asociados son solo Avicultores.

110 + 100 + 10 = 220

✓ 220 asociados tienen una única actividad

c. <u>3 actividades</u>

$|A \cap G \cap Av|$ = 50

<u>2 actividades</u>

$|A \cap G| - |A \cap G \cap Av|$ = 100 – 50 = 50 (solo Agricultores y Ganaderos)

$|A \cap Av| - |A \cap G \cap Av|$ = 80 – 50 = 30 (solo Agricultores y Avicultores)

$|G \cap Av| - |A \cap G \cap Av|$ = 150 – 50 = 100 (solo Ganaderos y Avicultores)

50 + 50 + 30 + 100 = 230

✓ 230 asociados tienen al menos 2 actividades

d. $|G| - |G \cap A| - |G \cap Av| + |A \cap G \cap Av|$ = 300 - 100 – 150 + 50 = 100,

✓ 100 asociados son solo Ganaderos

e. $|Av| = |Av \cap A| - |Av \cap G| + |A \cap G \cap Av|$ = 190 - 80 - 150 + 50 = 10,

✓ 10 asociados son solo Avicultores.

25) $\mathcal{U}$: Socios de un club

T: socios que juegan al Tenis $\longrightarrow |T| = 300$

B: socios que juegan al Básquet $\longrightarrow |B| = 230$

N: socios que hacen Natación $\longrightarrow |N| = 290$

$|T \cap B| = 120, \ |T \cap N| = 90, |B \cap N| = 70, |T \cap B \cap N| = 50, |\mathcal{U}| - |T \cup B \cup N| = 30$

<u>Solamente un deporte</u>

$|T| - |T \cap N| - |T \cap B| + |T \cap B \cap N|$ = 300 – 120 – 90 + 50 = 140;

140 socios practican solo Tenis.

$|B| - |B \cap T| - |B \cap N| + |T \cap B \cap N|$ = 230 – 120 – 70 + 50 = 90;

90 socios practican solo Básquet.

$|N| - |N \cap T| - |N \cap B| + |T \cap B \cap N|$ = 290 – 90 – 70 + 50 = 180,

180 socios practican solo natación.

140 + 90 + 180 = 410

✓ 410 socios practican un solo deporte.

Un par de deportes

$|T \cap B| - |T \cap B \cap N| = 120 - 50 = 70$; 70 socios practican solo Tenis y Básquet.

$|T \cap N| - |T \cap B \cap N| = 90 - 50 = 40$; 40 socios practican solo Tenis y Natación.

$|B \cap N| - |T \cap B \cap N| = 70 - 50 = 20$; 20 socios practican solo Básquet y Natación.

70 + 40 + 20 = 130

✓ 130 socios practican dos deportes.

Total de socios

- Practican algún deporte:

$$|T \cup B \cup N| = |T| + |B| + |N| - |T \cap B| - |T \cap N| - |B \cap N| + |T \cap B \cap N|$$

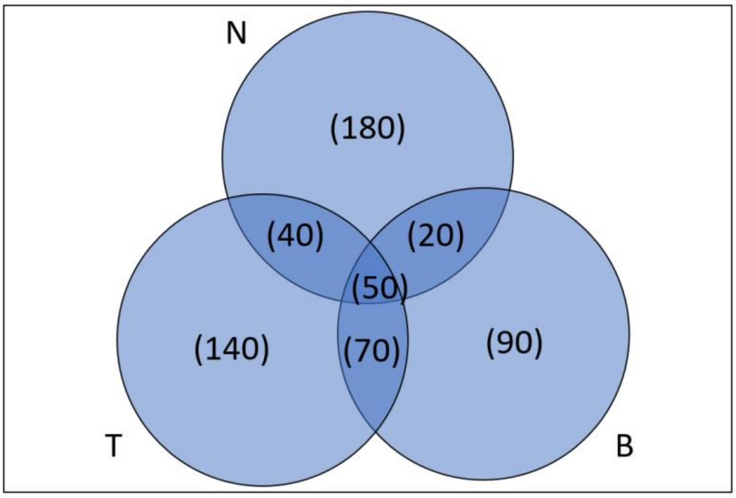
= 300 + 230 + 290 – 120 - 90 – 70 + 50 = 590

- No practican ningún deporte: 30 socios (dato del problema)

$|\mathcal{U}|$ = 560 + 30 = 620

✓ 620 es el total de socios

La representación en diagramas de Venn



26) Datos

$|\mathcal{U}| = 21$

B: bombones $\longrightarrow$ $|sólo\ B| = 4$ -- región ① rayas amarilla verticales en diagrama de Venn

C: caramelos $\longrightarrow$ $|sólo\ C| = 5$ -- región ② rayas azules oblicuas en diagrama de Venn

P: pastillas $\longrightarrow$ $|sólo\ P| = 1$ -- región ③ rayas rojas horizontales en diagrama de Venn

$|C \cap B \cap P| = 0$

$|P \cap C| = 2$

$|P|$ = 6

Calculo:

Como $|C \cap B \cap P| = 0$ se deduce que

$|sólo\ (P \cap B)| = |P \cap B|$

$|sólo\ (P \cap C)| = |P \cap C|$

$|sólo\ (B \cap C)| = |B \cap C|$

- ✓ Solo comen bombones y pastillas (no caramelos)

$|P| - |P \cap B| - |P \cap C| + |B \cap C \cap P| = 1$

$6 - |P \cap B| - 2 + 0 = 1 \implies |P \cap B| = 6 - 2 - 1 = 3$

✓ 3 comen solo bombones y pastillas

- ✓ Solo comen bombones y caramelos (no pastillas)

$|\mathcal{U}|$ - $|P \cup B \cup C| = 0$ (pues ningún niño se queda sin comer)

$|\mathcal{U}| - (|P| + |B| + |C| - |P \cap B| - |P \cap C| - |B \cap C| + |P \cap B \cap C|) = 0$

21 - 6 - $|B| - |C|$ + 3 + 2 + $|B \cap C|$ – 0 = 0

20 - $|B| - |C|$ + $|B \cap C|$ = 0 (*)

Además:

$|B| = |sólo\ B| + |P \cap B| + |B \cap C| - |B \cap C \cap P|$ = 4 + 3 + $|B \cap C| - 0$ = 7 + $|B \cap C|$ (1)

$|C| = |sólo\ C| + |P \cap C| + |B \cap C| - |B \cap C \cap P|$ = 5 + 2 + $|B \cap C|$ –0 = 7 + $|B \cap C|$ (2)

Reemplazando en la ecuación (*) por los cardinales de B y C tenemos

20 – (7 + $|B \cap C|$) - (7 + $|B \cap C|$) + $|B \cap C|$ = 0

Despejamos $|B \cap C|$

20 – 7 – 7 - $|B \cap C|$ = 0 $\Rightarrow$ $|B \cap C|$ = 6

✓ 6 comen solo bombones y caramelos

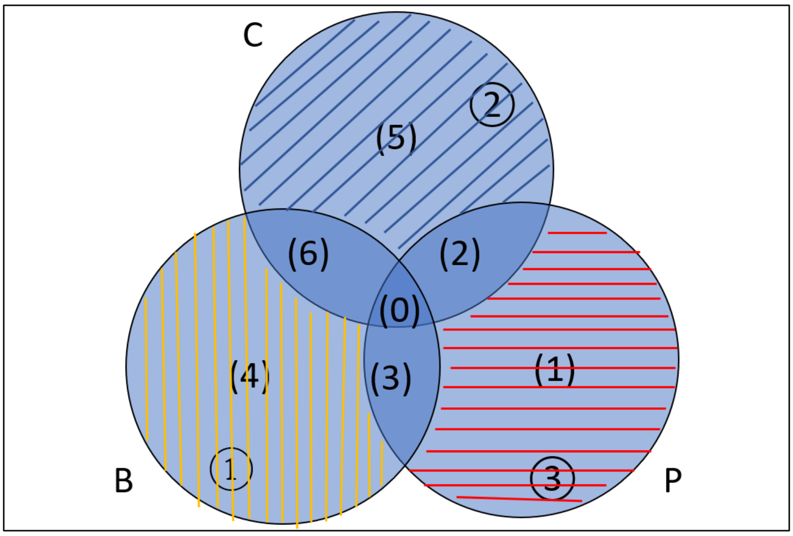
Considerando ahora lo planteado para el cardinal de B y C podemos reemplazar en (1) y (2):

$|B|$ = 7 + 6 = 13

$|C|$ = 7 + 6 = 13

✓ 13 comen bombones
✓ 13 comen caramelos

La representación en diagrama de Venn es la que se muestra a continuación. Observe que las regiones marcadas corresponden a sólo caramelos, sólo bombones y sólo pastillas.



27) Datos

T: reciben por Twiter $\longrightarrow$ $|sólo\ T| = 10$ -- región ① rayas rojas en el diagrama de Venn

C: reciben por correo $\longrightarrow$ $|sólo\ C| = 18$ -- región ② rayas azules en el diagrama de Venn

F: reciben por facebook $\longrightarrow$ $|\bar{F}| = 43$

$|\ sólo\ (T \cap F)| = 24$

$|\ sólo\ (C \cap F)| = 37$

$|\bar{T}| = 77$

a) $|T \cap C \cap F| = 0$ como todos los empleados contestaron la encuesta, y según los datos proporcionados por el problema, se desprende que ningún empleado utiliza los 3 medios.

b) $|sólo\ (C \cap T)| = |C \cap T| = |\bar{F}| - |sólo\ T|$ - $|sólo\ C|$ (pues $|T \cap C \cap F| = 0$)

$|sólo\ (C \cap T)|$ = 43 – 10 – 18 = 15

$|sólo\ (F \cap T)| = |F \cap T|$ = 24 (pues $|T \cap C \cap F| = 0$)

Por lo tanto se informan por Twiter

$|T| = |sólo\ T| + |C \cap T| + |F \cap T| + |B \cap C \cap P|$ = 10 + 15 + 24 = 49

✓ 49 se informan por Twiter

c) $|\bar{T}| = |sólo\ F|$ + $|sólo\ (C \cap F)| + |sólo\ C|$

$|sólo\ F|$ = 77 – 37 – 18 = 22

✓ 22 se informan sólo por Facebook

d) No se informan por correo

$|\bar{C}| = |sólo\ F| + |sólo\ T| + |sólo\ (F \cap T)|$ = 22 + 10 + 24 = 56

✓ 56 no se informan por Correo

e) Fueron encuestados

$|C \cup T \cup F| = |C| + |T| + |F| - |C \cap T| - |C \cap F| - |T \cap F| + |C \cap T \cap F|$

$|C \cup T \cup F| = |C| + 49 + |F| - 15 - 37 - 24 + 0$

Buscamos los datos que nos faltan $|C|\ y\ |F|$

$|C| = |sólo\ C| + |\ sólo\ (C \cap T)| + |\ sólo\ (F \cap C)| + |B \cap C \cap P|$ = 18 + 15 + 37 + 0 = 70

$|F| = |sólo\ F| + |sólo\ (C \cap F)| + |sólo\ (F \cap C)| + |B \cap C \cap P|$ = 22 + 24 + 37 + 0 = 83

$|C \cup T \cup F| = 70 + 49 + 83 - 15 - 37 - 24 + 0 = 126$

- ✓ 126 personas fueron encuestadas