TEXTO BASE

CÁLCULO

Cláudio Dallanese
Luciane Martinelli

imes USCS
UNIVERSIDADE MUNICIPAL DE SÃO CAETANO DO SUL
USCS VIRTUAL

EQUIPE TÉCNICA EDITORIAL

Gestão da EAD: Prof. Dr. Elias Estevão Goulart

Professor conteudista: Cláudio Dallanese e Luciane Martinelli

Revisão: Karen Francis Pellomo Ringis

Projeto gráfico e capa: Renata Kuba, Luana Santos do Nascimento, Juliana Pereira Alves e Wallace Campos de Siqueira

Diagramação: Juliana Pereira Alves

DÚVIDAS? FALE CONOSCO!

✉ eadsuporte@uscs.edu.br
☎ (11) 4239-3351
ead.uscs.edu.br

UNIVERSIDADE MUNICIPAL DE SÃO CAETANO DO SUL

Portal: virtual.uscs.edu.br
Tel.: (11) 4239-3200

Av. Goiás, 3400 – São Caetano do Sul – SP – CEP: 09550-051

Rua Santo Antônio, 50 – São Caetano do Sul – SP – CEP: 09521-160

USCS VIRTUAL

CÁLCULO

Cláudio Dallanese
Luciane Martinelli

USCS VIRTUAL

LIMITES E DERIVADAS

NOÇÃO INTUITIVA

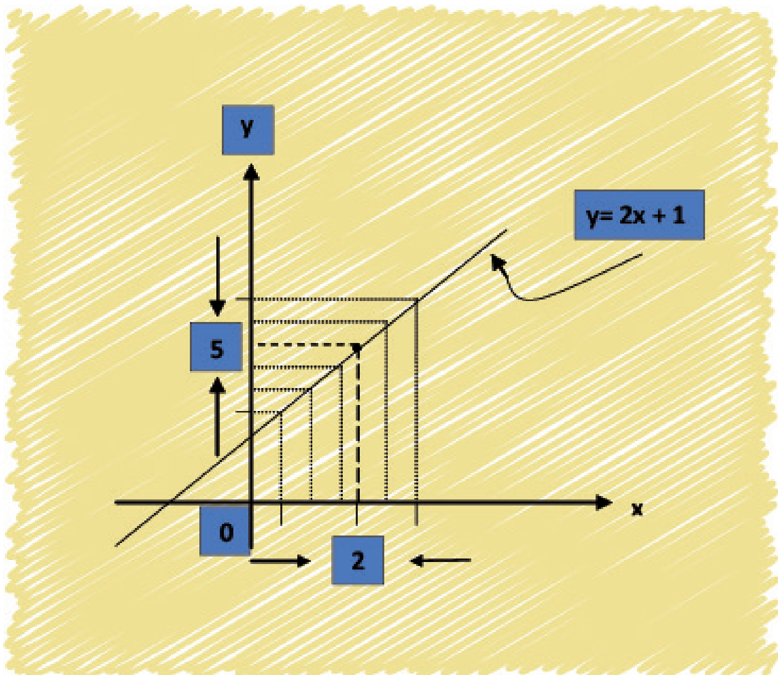
O nosso objetivo é desenvolver uma linguagem que nos permita descrever o comportamento dos valores de uma função nas proximidades de um ponto.

Seja a função **f(x) = 2x – 1**, vamos dar valores para **x** que se aproximem de **3**, pela **direita (valores maiores que 3)** e pela sua **esquerda (valores menores que 3)**, e calcular **y**.

PELA DIREITA	
x	y = 2x – 1
3,50	6,00
3,30	5,60
3,10	5,20
3,05	5,10
3,02	5,04
3,01	5,02

PELA ESQUERDA	
x	**y = 2x – 1**
2,50	4,00
2,70	4,40
2,90	4,80
2,95	4,90
2,98	4,96
2,99	4,98

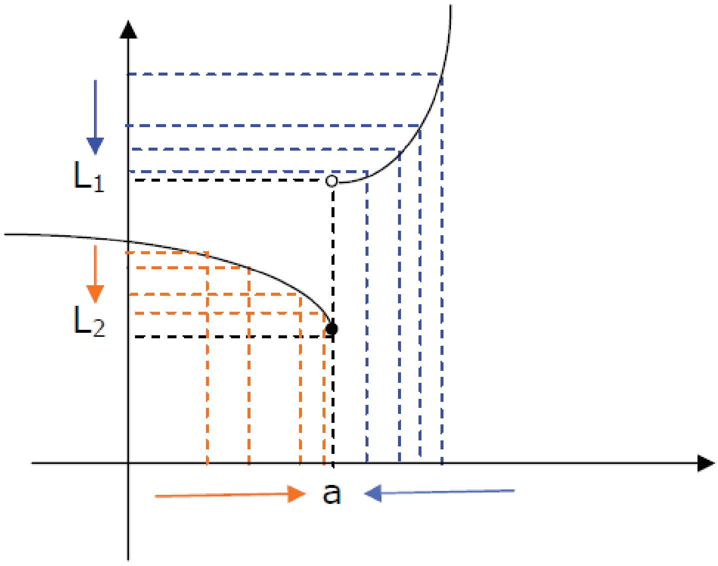
Graficamente, temos:



À medida que **x** se aproxima de **3, f(x) ou y** se aproxima de **5**, ou seja, quando **x tende a 3 (x → 3), y tende a 5 (y → 5),** então, temos a notação:

$$\lim_{x \to 3}(2x - 1) = 5$$

Dada a função y = f(x), conforme ilustrado no gráfico abaixo, e seja "*a*" a abscissa do ponto. Verifique o que acontece quando o valor de x se aproxima de *a*.



Quando **x** se aproxima de **a** pela direita (representamos por: $x \to a^+$) verificamos que a função se aproxima do valor L_1. Então podemos dizer que:

$\lim_{x \to a^+} f(x) = L_1$, L_1 é o limite lateral direito da função no ponto de abcissa x = a.

Quando **x** se aproxima de **a** pela esquerda (representamos por: $x \to a^-$) verificamos que a função se aproxima do valor L_2. Então podemos dizer que:

$\lim_{x \to a^-} f(x) = L_2$, L_2 é o limite lateral esquerdo da função no ponto de abcissa x = a.

Observamos no gráfico, que quando "x" assume valores que se aproximam de "*a*" pela direita (x > a), os correspondentes valores da função se aproximam do valor "L_1". Para descrever esse comportamento dizemos que o limite lateral direito da função no ponto de abscissa "*a*" é "L_1".

Analogamente, quando “x” assume valores que se aproximam de “*a*” pela esquerda (x < a), os correspondentes valores da função se aproximam do valor “L_2” e este é chamado de limite lateral esquerdo da função no ponto de abscissa “*a*”.

Exemplos:

Calcular os limites laterais da função $y = \begin{cases} 2x + 1, \text{se } x \geq 1 \\ -x^2, \text{se } x < 1 \end{cases}$, no ponto de abscissa x = 1.

$\lim_{x \to 1+} f(x) = \lim_{x \to 1+} (2x + 1) = 2(1) + 1 = 2 + 1 = 3$

3 é o limite lateral direito da função no ponto de abscissa x = 1

$\lim_{x \to 1-} f(x) = \lim_{x \to 1-} (-x^2) = -(1)^2 = -1$

–1 é o limite lateral esquerdo da função no ponto de abscissa x = 1

Exercício:

Calcular os limites laterais da função $y = \begin{cases} x^2, \text{ se } x \geq 2 \\ 5 - 2x, \text{ se } x < 2 \end{cases}$ no ponto de abscissa x = 2.

$\lim_{x \to 2+} f(x) = \lim_{x \to 2+} x^2 = (2)^2 = 4$

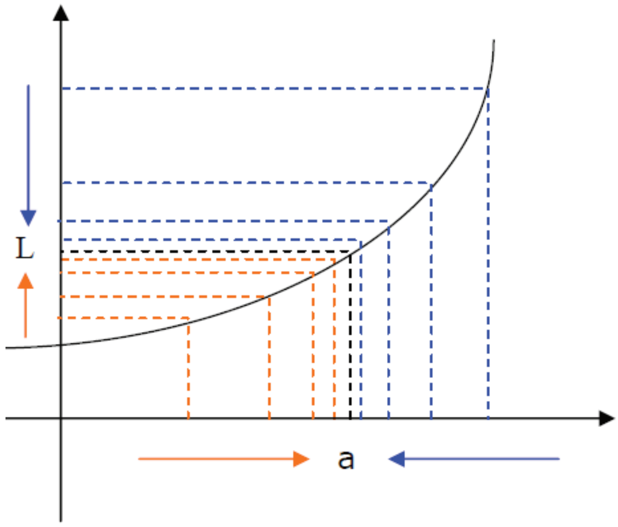
4 é o limite lateral direito da função no ponto de abscissa x = 2

$\lim_{x \to 2-} f(x) = \lim_{x \to 2-} (5 - 2x) = 5 - 2.2 = 1$

1 é o limite lateral esquerdo da função no ponto de abscissa x = 2

FUNÇÃO CONTÍNUA

Vejamos agora a função y = f(x), conforme ilustrado no gráfico abaixo, e seja "*a*" a abscissa do ponto.



Quando **x** se aproxima de **a** pela direita (representamos por: $x \to a^+$) verificamos que a função se aproxima do valor L_1. Então podemos dizer que:

$\lim_{x \to a^+} f(x) = L_1$, L_1 é o limite lateral direito da função no ponto de abcissa x = a.

Quando **x** se aproxima de **a** pela esquerda (representamos por: $x \to a^-$) verificamos que a função se aproxima do valor L_2. Então podemos dizer que:

$\lim_{x \to a^-} f(x) = L_2$, L_2 é o limite lateral esquerdo da função no ponto de abcissa x = a.

Como neste caso os limites laterais, à direita e à esquerda, convergiam para o mesmo resultado L, podemos então dizer que o limite da função quando **x** se aproxima de **a**, existe, é único, e igual a L (Teorema da unicidade do Limite).

$$\text{Se } \lim_{x \to a^+} f(x) = \lim_{x \to a^-} f(x) \Leftrightarrow \exists \lim_{x \to a} f(x) = L$$

Se **a** pertencer ao domínio desta função, então podemos afirmar que a função é contínua neste ponto, então:

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a) = L$$

Dizemos que f(x) é contínua em um ponto com x = ***a*** do seu domínio se:

- $\exists f(a)$
- $\exists \lim_{x \to a} f(x)$
- $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$

Para determinar o valor do limite de uma função num dado ponto, basta substituir o valor de x da função pelo número ao qual se tende. Se o resultado dessa operação for um número determinado e finito, então a função é contínua neste ponto e o valor obtido será o valor limite da função.

Exemplos:

Verificar, usando limites, se a função é contínua no ponto em cada caso:

a) $f(x) = x^2 + 1$ e o ponto de abscissa x = 2

$$\lim_{x \to 2^+} f(x) = \lim_{x \to 2^+} (x^2 + 1) = (2)^2 + 1 = 4 + 1 = 5,$$

$$\lim_{x \to 2^-} f(x) = \lim_{x \to 2^-} (x^2 + 1) = (2)^2 + 1 = 4 + 1 = 5$$

e $f(2) = (2)^2 + 1 = 5$

Logo a função é contínua em **x = 2**.

b) $f(x) = x^2$ e o ponto de abscissa x = 2

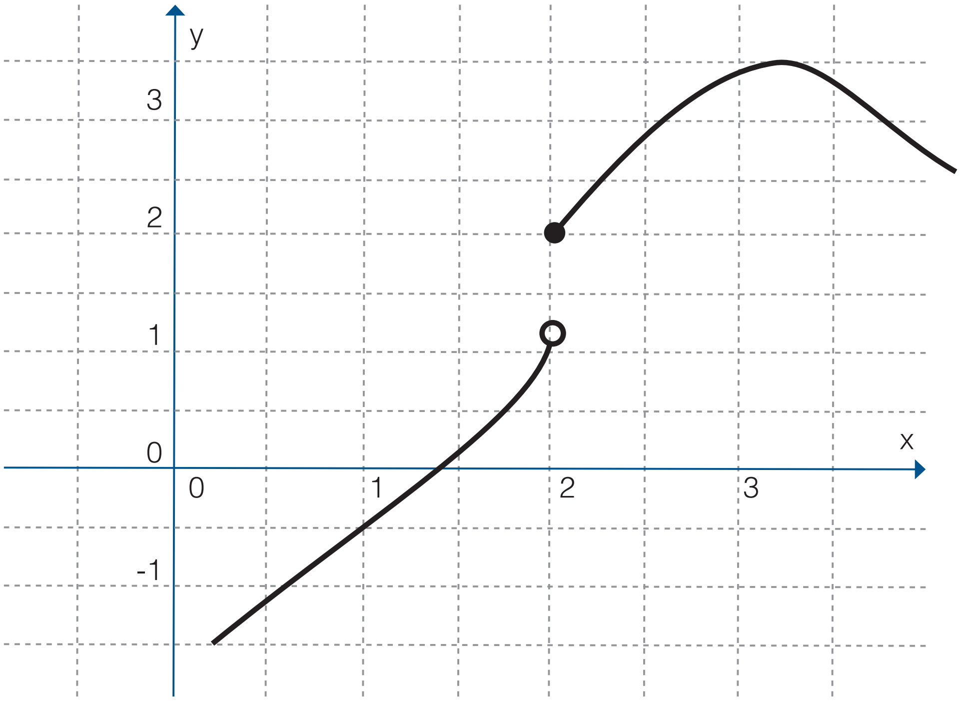
$$\lim_{x \to 2^+} f(x) = \lim_{x \to 2^+} (x^2) = (2)^2 = 4,$$

$$\lim_{x \to 2^-} f(x) = \lim_{x \to 2^-} (x^2) = (2)^2 = 4$$

E $f(2) = (2)^2 = 4$

Logo a função é contínua em **x = 2**.

Exemplo de uma função não contínua



f(a) = 2

$\lim_{x\to 2^-} f(x) = 1$ e $\lim_{x\to 2^+} f(x) = 2$

Existe f(a), existe $\lim_{x\to a^-} f(x)$ e $\lim_{x\to a^+} f(x)$, mas $\lim_{x\to a^-} f(x) \neq f(a)$, portanto a função não é contínua.

c) $f(x) = \dfrac{x^2-4}{x-2}$ e o ponto de abscissa x = 2

Atenção: O denominador da função não pode ser zero, então D = R – {2}

$$\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^+} \frac{x^2-4}{x-2} = \frac{(2)^2-4}{(2)-2} = \frac{0}{0}(F.I.)$$

$$\lim_{x\to 2^+} \frac{x^2-4}{x-2} = \lim_{x\to 2^+} \frac{\cancel{(x-2)}(x+2)}{\cancel{x-2}} = \lim_{x\to 2^+}(x+2) = (2)+2 = 4$$

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-} \frac{x^2-4}{x-2} = \frac{(2)^2-4}{(2)-2} = \frac{0}{0}(F.I.)$$

$$\lim_{x\to 2^-} \frac{x^2-4}{x-2} = \lim_{x\to 2^-} \frac{\cancel{(x-2)}(x+2)}{\cancel{x-2}} = \lim_{x\to 2^-}(x+2) = (2)+2 = 4$$

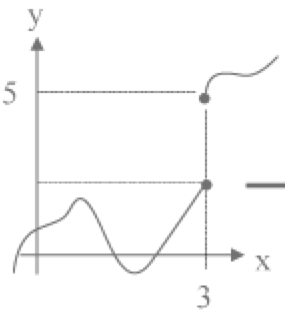
Neste caso embora os limites laterais sejam iguais a quatro, a função não está definida para x = 2, logo ela não é contínua no ponto.

IMPORTANTE:

É importante lembrar que no cálculo do $\lim_{x \to a} f(x)$, o que interessa é o comportamento da função f(x) quando **x** se aproxima de **a** e não o que acontece com a função em x = a.

Exercício:

Observando os gráficos, determinar se existe o $\lim_{x \to a} f(x)$



$$\longrightarrow \begin{cases} \bullet \lim\limits_{x \to 3^+} f(x) = 5 \\ \bullet \lim\limits_{x \to 3^-} f(x) = 2 \\ \therefore \text{ NÃO EXISTE } \lim\limits_{x \to 3} f(x) = 5 \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 + 3x;\ x \geq 2 \ \rightarrow (\text{Dir.}) \\ -2x + 6;\ x < 2 \ \rightarrow (\text{Esq.}) \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} \bullet \lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = -(2)^2 + 3(2) = -4 + 6 = 2 \\ \bullet \lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = -2(2) + 6 = -4 + 6 = 2 \\ \therefore \ EXISTE \ \lim\limits_{x \to 2} f(x) \end{cases}$$

PROPRIEDADE DOS LIMITES

Sejam os limites, $\lim\limits_{x \to a} f(x) = A$ e $\lim\limits_{x \to a} g(x) = B$, então:

1ª) Limite de uma constante: $\lim\limits_{x \to a} k = k$

Exemplo:

$\lim\limits_{x \to 3} 5 = 5$

2ª) Limite da soma ou da diferença:

$$\lim_{x\to a}[f(x) \pm g(x)] = \lim_{x\to a} f(x) \pm \lim_{x\to a} g(x) = A \pm B$$

Exemplo:

$$\lim_{x\to -1}(x^2 + 2x - 3) = \lim_{x\to -1}(x^2) + \lim_{x\to -1}(2x) - \lim_{x\to -1} 3 = (-1)^2 + 2(-1) - 3 = 1 - 2 - 3 = -4$$

3ª) Limite de uma constante multiplicada por uma função:

Exemplo:

$$\lim_{x\to 1} 5.x^2 = 5\lim_{x\to 1} x^2 = 5.(1)^2 = 5.1 = 5$$

4ª) Limite de um produto:

$$\lim_{x\to a}[f(x).g(x)] = \lim_{x\to a} f(x).\lim_{x\to a} g(x) = A.B$$

Exemplo:

$$\lim_{x\to 2}(x+1)(x^2-1) = \lim_{x\to 2}(x+1).\lim_{x\to 2}(x^2-1) = [(2)+1].[(2)^2-1] = 3.3 = 9$$

5ª) Limite do quociente:

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)} = \frac{A}{B}\text{, sendo } B \neq 0$$

Exemplo:

$$\lim_{x\to 2}\frac{x+1}{x^2-1} = \frac{\lim_{x\to 2}(x+1)}{\lim_{x\to 2}(x^2-1)} = \frac{(2)+1}{(2)^2-1} = \frac{3}{3} = 1$$

6ª) Limite de potência: $\lim_{x\to a} f^n(x) = \left(\lim_{x\to a} f(x)\right)^n = A^n$

Exemplo:

$$\lim_{x\to 1}(2x^2 - x + 1)^3 = \left(\lim_{x\to 1}(2x^2 - x + 1)\right)^3 = [2(1)^2 \cancel{-(1)} \cancel{+1}]^3 = [2(1)]^3 = [2]^3 = 8$$

7ª) Limite de raiz n-ézima : $\lim_{x\to a}\sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x\to a} f(x)} = \sqrt[n]{A}$ com **A** ≥ 0 e **n** inteiro não negativo ou **A** < 0 e **n** ímpar.

Exemplo:

$$\lim_{x\to 2}\sqrt[3]{2x^2 + x - 2} = \sqrt[3]{\lim_{x\to 2}(2x^2 + x - 2)} = \sqrt[3]{2(2)^2 + (2) - 2} = \sqrt[3]{8} = 2$$

Exercício:

1. Calcule os seguintes limites:

a) $\lim_{x\to -1}(x^3 - 2x^2 - 4x + 3) = (-1)^3 - 2(-1)^2 - 4(-1) + 3 = -1 - 2 + 4 + 3 = 4$

b) $\lim_{x\to -1}\dfrac{3x^2 - 5x + 4}{2x + 1} = \dfrac{3(-1)^2 - 5(-1) + 4}{2(-1) + 1} = \dfrac{3 + 5 + 4}{-2 + 1} = -12$

c) $\lim_{x\to 4}\left(\dfrac{x^3 - 3x^2 - 2x - 5}{2x^2 - 9x + 2}\right)^2 = \left(\dfrac{4^3 - 3.4^2 - 2.4 - 5}{2.4^2 - 9.4 + 2}\right)^2 = \left(\dfrac{64 - 48 - 8 - 5}{32 - 36 + 2}\right)^2$
$= \left(\dfrac{3}{-2}\right)^2 = \dfrac{9}{4}$

d) $\lim_{x\to -1}\sqrt{\dfrac{2x^2 + 3x - 4}{5x - 4}} = \sqrt{\dfrac{2(-1)^2 + 3(-1) - 4}{5(-1) - 4}} = \sqrt{\dfrac{2 - 3 - 4}{-5 - 4}} = \sqrt{\dfrac{5}{9}} = \dfrac{\sqrt{5}}{3}$

e) $\lim_{x\to -2}\sqrt{\dfrac{3x^3 + 5x^2 - x + 2}{4x + 3}} = \sqrt{\dfrac{3(-2)^3 - 5(-2)^2 - (-2) + 2}{4(-2) + 3}} =$
$\sqrt{\dfrac{-24 - 20 + 2 + 2}{-8 + 3}} = 0$

f) $\lim_{x\to -2}\dfrac{\sqrt{2x^2 + 3x + 2}}{6 - 4x} = \dfrac{\sqrt{2(-2)^2 + 3(-2) + 2}}{6 - 4(-2)} = \dfrac{\sqrt{8 - 6 + 2}}{6 + 8} = \dfrac{\sqrt{4}}{14} =$
$\dfrac{2}{14} = \dfrac{1}{7}$

INDETERMINAÇÃO $\frac{0}{0}$

Exemplo 1:

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2 - 4}{x^2 - 2x} = \frac{(2)^2 - 4}{(2)^2 - 2(2)} = \frac{0}{0}\ \text{(F. I.)}$$

$\frac{0}{0}$ é uma indeterminação, como os polimônios $x^2 - 4$ e $x^2 - 2x$ anulam-se para $x = 2$, portanto pelo Teorema de D´Alembert, são divisíveis por $x - 2$, logo:

$$\frac{x^2 - 4}{x^2 - 2x} = \frac{(x - 2)(x + 2)}{x(x - 2)} = \frac{(x + 2)}{x}$$

Considerando que no cálculo do limite de uma função, quando **x** tende a **a**, interessa o comportamento da função quando **x** se aproxima de **a** e não o que ocorre com a função quando x = a, concluímos que:

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x^2-2x}=\lim_{x\to 2}\frac{(x+2)}{x}=2$$

Exercícios:

a) $lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x-1}=\frac{1^2-1}{1-1}=\frac{0}{0}\to \boldsymbol{lim_{x\to 1}\frac{(x+1)(x-1)}{(x-1)}=lim_{x\to 1}(x+1)=1+1=2}$

b) $\lim_{x\to -2}\frac{4-x^2}{x+2}=\frac{4-(-2)^2}{-2+2}=\frac{0}{0}\to \boldsymbol{lim_{x\to -2}\frac{(2+x)(2-x)}{(x+2)}=lim_{x\to -2}(2-x)=2-(-2)=4}$

c) $\lim_{x\to \frac{3}{2}}\frac{4x^2-9}{2x-3}=\frac{4\left(\frac{3}{2}\right)^2-9}{2\left(\frac{3}{2}\right)-9}=\frac{0}{0}\to \boldsymbol{lim_{x\to \frac{3}{2}}\frac{(2x+3)(2x-3)}{(2x-3)}=lim_{x\to \frac{3}{2}}(2x+3)=2.\frac{3}{2}+3=6}$

d) $\lim_{x\to 3}\frac{x^2-4x+3}{x^2-x-6}=\frac{3^2-4.3+3}{3^2-3-6}=\frac{0}{0}\to \boldsymbol{lim_{x\to 3}\frac{(x-3)(x-1)}{(x-3)(x+2)}=lim_{x\to 3}\frac{x-1}{x+2}=-\frac{2}{5}}$

e) $\lim_{x\to 1}\frac{x^3-1}{x^2-1}=\frac{1^3-1}{1^2-1}=\frac{0}{0}\to \boldsymbol{lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x^2+x+1)}{(x+1)(x-1)}=lim_{x\to 1}\frac{(x^2+x+1)}{(x+1)}=\frac{1^2+1+1}{1+1}=\frac{3}{2}}$

Exemplo 2:

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x}-1}{x-1}=\frac{0}{0}\quad \textit{(forma} \;\; i\,n\det er\min ada)$$

Multiplicando o numerador e o denominador da fração pelo "conjugado" do numerador, temos:

$$\frac{\sqrt{x}-1}{x-1}=\frac{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}{(x-1)(\sqrt{x}+1)}=\frac{(\sqrt{x})^2-(1)^2}{(x-1)(\sqrt{x}+1)}=\frac{x-1}{(x-1)(\sqrt{x}+1)}=\frac{1}{\sqrt{x}+1}$$

e então :

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x}-1}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{1}{\sqrt{x}+1}=\frac{1}{2}$$

Exercícios:

a) $\lim_{x\to 4}\frac{\sqrt{x}-2}{x-4} =$ $\frac{\sqrt{4}-2}{4-4} = \frac{0}{0} \to \lim_{x\to 4}\frac{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)}{(x-4)(\sqrt{x}+2)} = \lim_{x\to 4}\frac{(\sqrt{x})^2-2^2}{(x-4)(\sqrt{x}+2)} =$

$\lim_{x\to 4}\frac{x-4}{(x-4)(\sqrt{x}+2)} = \lim_{x\to 4}\frac{1}{\sqrt{x}+2} = \frac{1}{4}$

b) $\lim_{x\to 0}\frac{1-\sqrt{1-x}}{x} =$

$$\frac{1-\sqrt{1-0}}{0} = \frac{0}{0} \to \lim_{x\to 0}\frac{(1-\sqrt{1-x})(1+\sqrt{1-x})}{x(1+\sqrt{1-x})}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{(1)^2-(\sqrt{1-x})^2}{x(1+\sqrt{1-x})} = \lim_{x\to 0}\frac{x}{x(1+\sqrt{1-x})}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{1}{(1+\sqrt{1-x})} = \frac{1}{2}$$

c) $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x} =$

$$\frac{\sqrt{1}-\sqrt{1}}{0} = \frac{0}{0} \to \lim_{x\to 0}\frac{(\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x})(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})}{x(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{(\sqrt{1+x})^2-(\sqrt{1-x})^2}{x(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{2x}{x(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})} = \frac{2}{\sqrt{1}+\sqrt{1}} = 1$$

d) $\lim_{x\to 3}\frac{2-\sqrt{x+1}}{x^2-9} =$

$$\frac{2-\sqrt{3+1}}{3^2-9} = \frac{0}{0}$$

$$\to \lim_{x\to 3}\frac{(2-\sqrt{x+1})(2+\sqrt{x+1})}{(x+3)(x-3)(2+\sqrt{x+1})}$$

$$= \lim_{x\to 3}\frac{2^2-(\sqrt{x+1})^2}{(x+3)(x-3)(2+\sqrt{x+1})}$$

$$= \lim_{x\to 3}\frac{3-x}{(x+3)(x-3)(2+\sqrt{x+1})}$$

$$= \lim_{x\to 3}\frac{-(x-3)}{(x+3)(x-3)(2+\sqrt{x+1})} = \lim_{x\to 3}\frac{-1}{(x+3)(2+\sqrt{x+1})}$$

$$= -\frac{1}{24}$$

LIMITES NO INFINITO E LIMITES INFINITOS

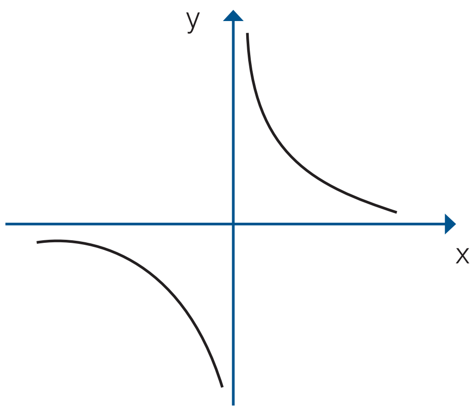
Limites dos tipos $\lim_{x\to +\infty} f(x)$ e $\lim_{x\to -\infty} f(x)$ são denominados **limites no infinito**. A notação simbólica $x\to +\infty$, que se lê: **x** tendendo a mais infinito, é usada para traduzir a ideia de que **x** vai se tornando cada vez maior e tão grande quanto se possa imaginar. Por outro lado, a notação $x\to -\infty$, que se lê: **x** tendendo a menos infinito significa que **x** vai se tornando cada vez menor que qualquer número negativo que se possa imaginar.

Por um **limite infinito**, entendemos um limite da forma $\lim_{x\to p} f(x) = +\infty$ (ou $-\infty$), onde $x\to p$, pode ser substituído por $x\to p_+$, $x\to p_-$, $x\to+\infty$, $x\to-\infty$. De forma intuitiva, a notação simbólica $\lim_{x\to p} f(x) = +\infty$ traduz a seguinte ideia: para **x** tendendo a **p**, o valor de f(x) vai se tornando cada vez maior e ultrapassando o valor de qualquer número positivo, por maior que seja tal número.

Exemplos:

Seja a função

$f(x) = \frac{1}{x'}$, com $x \neq 0$.



Observando o gráfico, temos:

- $\lim_{x\to +\infty} \frac{1}{x} = 0$, ou seja, à medida que "**x**" aumenta, "**y**" tende a zero e o **limite** é **zero**.
- $\lim_{x\to -\infty} \frac{1}{x} = 0$, ou seja, à medida que "x" diminui, "y" tende para zero e o limite é zero.
- $\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$, ou seja, à medida que "x" se aproxima de zero pela direita ($x\to0^+$), "y" tende para mais infinito (postitivo), que é o limite.

- $\lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$, ou seja, à medida que "x" se aproxima de zero pela esquerda ($x \to 0^-$), "y" tende para menos infinito (negativo), que é o limite.

Ou podemos calcular, com o auxílio de tabelas, conforme exemplos abaixo:

a) $\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x}$

x	10	100	1000	100.000	1.000.000	$x \to +\infty$
1/x	0,1	0,01	0,001	0,00001	0,000001	$1/x \to 0$

À medida que atribuímos valores maiores para x, o valor da fração $\frac{1}{x}$ vai se aproximando cada vez mais do zero. Ou seja, $\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0$.

a) $\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x}$

x	1	0,1=1/10	0,01=1/100	0,001=1/1000	0,000001=1/1.00.000	$x \to 0$
1/x	1	10	100	1000	1.000.000	$1/x \to +\infty$

À medida que atribuímos valores positivos, mais próximos ao zero para x, o valor da fração 1/x vai aumentando cada vez mais, se aproximando do infinito. Ou seja, $\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$.

Sabendo que $\lim_{x \to p} k.f(x) = k.\lim_{x \to p} f(x) = k.L$, temos:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{1000}{x^5} = 1000.\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x^5} = 1000.0 = 0$$

Assim, $\lim_{x \to +\infty} \frac{1000}{x^5} = 0$. Quando x vai se tornando cada vez maior, $1000/x^5$ vai ficando cada vez mais próximo de zero.

Logo, podemos concluir que: $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{k}{x^n} = 0$

Operando com o símbolo ∞.

(∞ = + ∞ e L é um número real)

1. **∞ + ∞ = ∞**
2. **- ∞ - ∞ = - ∞**
3. **Se L > 0, L . ∞ = ∞**
4. **Se L < 0, L . ∞ = - ∞**
5. **Se L > 0, L .(- ∞) =- ∞**
6. **Se L < 0, L . (- ∞) = ∞**
7. **L + ∞ = ∞**
8. **L - ∞ = - ∞**
9. **∞ . ∞ = ∞**
10. **(- ∞). (- ∞) = ∞**
11. **∞ . (- ∞) = - ∞**

Indeterminações:

∞ - ∞, 0. ∞, $\frac{\infty}{\infty}$

Calcule $\lim\limits_{x\to+\infty}(x^2 - 5x + 3)$.

$\lim\limits_{x\to+\infty}(x^2 - 5x + 3) = \infty - \infty + 3 = \infty - \infty$ (Forma Indeterminada)

$$\lim_{x\to+\infty}(x^2 - 5x + 3) = \lim_{x\to+\infty} x^2\left(\frac{x^2}{x^2} - \frac{5x}{x^2} + \frac{3}{x^2}\right) = \lim_{x\to+\infty} x^2\left(1 - \frac{5}{x} + \frac{3}{x^2}\right) =$$

$$\left[\lim_{x\to+\infty} x^2\right]\left[\lim_{x\to+\infty}\left(1 - \frac{5}{x} + \frac{3}{x^2}\right)\right] = \infty.[1 - 0 + 0] = \infty.1 = \infty$$

Calcule $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^3 + 3x - 4}{x^2 + 5}$.

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^3 + 3x - 4}{x^2 + 5} = \frac{\infty}{\infty} \text{ que é uma indeterminação}$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^3 + 3x - 4}{x^2 + 5} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^3\left(\frac{x^3}{x^3} + \frac{3x}{x^3} - \frac{4}{x^3}\right)}{x^2\left(\frac{x^2}{x^2} + \frac{5}{x^2}\right)} = \lim_{x\to+\infty} x.\frac{\left(1 + \frac{3}{x^2} - \frac{4}{x^3}\right)}{\left(1 + \frac{5}{x^2}\right)} = \left[\lim_{x\to+\infty} x\right]\left[\lim_{x\to+\infty} \frac{\left(1 + \frac{3}{x^2} - \frac{4}{x^3}\right)}{\left(1 + \frac{5}{x^2}\right)}\right] =$$

$$\infty.\frac{1 + 0 - 0}{1 + 0} = \infty.1 = \infty$$

Calcule $\lim_{x \to +\infty} \frac{2x+3}{x-1}$.

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{2x+3}{x-1} = \frac{\infty}{\infty}, \text{ que é uma indeterminação}$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{2x+3}{x-1} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x\left(\frac{2x}{x}+\frac{3}{x}\right)}{x\left(\frac{x}{x}-\frac{1}{x}\right)} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\left(2+\frac{3}{x}\right)}{\left(1-\frac{1}{x}\right)} = \frac{2+0}{1-0} = \frac{2}{1} = 2$$

Limite de uma função polinomial para x → ± ∞

- Seja a função polinomial, $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + .. + a_1 x + a_0$. Temos:

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(X) = \lim_{x \to \pm\infty} a_n x^n$$

- Analogamente, para $g(x) = b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + .. + b_1 x + b_0$, temos:

$$\lim_{x \to \pm\infty} g(X) = \lim_{x \to \pm\infty} b_n x^n$$

Então, podemos concluir que

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{a_n x^n}{b_n x^n}$$

Exemplos:

$$\lim_{x \to +\infty} (2x^2+x-45) = \lim_{x \to +\infty} 2x^2 = +\infty$$

$$\lim_{x \to -\infty} (6x^5+x^2-63x+2) = \lim_{x \to -\infty} 6x^5 = -\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{3x^5+x-}{x^3+x^2+4}\right) = \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{3x^5}{x^3}\right) = \lim_{x \to +\infty} 3x^2 = +\infty$$

Exercício:

Calcular os limites:

a) $\lim_{x\to -1}\left(\frac{x^3+3x^2+5x-4}{x^2-3x+1}\right) = \frac{(-1)^3+3.(-1)^2+5.(-1)-4}{(-1)^2-3(-1)+1} = \frac{-1+3-5-4}{1+3+4} = -\frac{7}{5}$

b) $\lim_{x\to -2}\left(\frac{8+x^3}{x^2-4}\right) =$

$\frac{8+(-2)^3}{(-2)^2-4} = \frac{0}{0} \to lim_{x\to -2}\frac{(2+x)(4-2x+x^2)}{(x+2)(x-2)} = lim_{x\to -2}\frac{4-2x+x^2}{x-2} =$

$\frac{4-2.(-2)+(-2)^2}{-2-2} = -3$

c) $\lim_{x\to 3}\left(\frac{x^2-6x+9}{\sqrt{x}+\sqrt{3}}\right) = \frac{3^2-6.3+9}{\sqrt{3}+\sqrt{3}} = \frac{0}{2\sqrt{3}} = 0$

d) $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2-3x+4x^2-5x^3}{x^2+5x+7}\right) = lim_{x\to\infty}\left(\frac{-5x^3}{x^2}\right) = lim_{x\to\infty}(-5x) = -\infty$

b) $\lim_{x\to -\infty}\left(\frac{x^4+x^2+4}{x^6-x^7+8x^8}\right) = lim_{x\to -\infty}\left(\frac{x^4}{8x^8}\right) = lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{8x^4}\right) = 0$

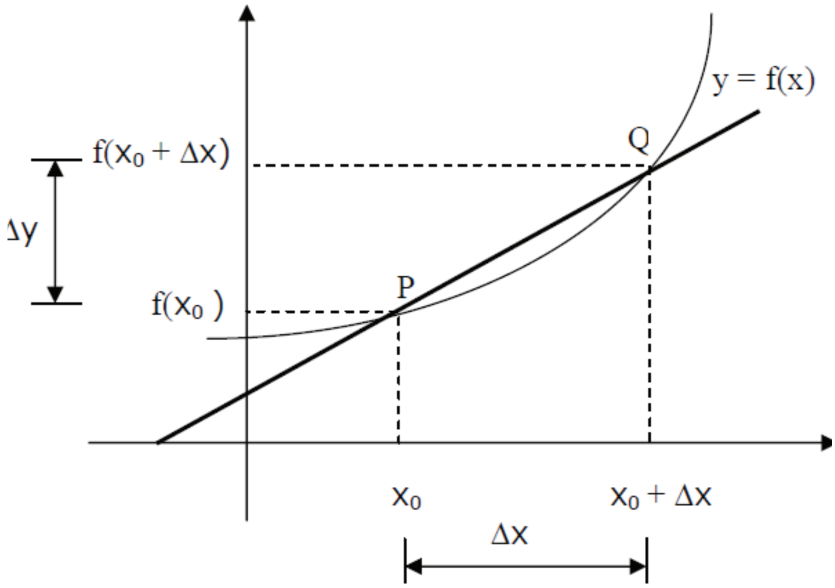
e) $\lim_{x\to -4^+}\left(\frac{5-x}{x+4}\right) = \frac{5-(-4)}{(-4+4)} = \frac{9}{0^+} = +\infty$

f) $\lim_{x\to -3^-}\left(\frac{2-x}{x^2-9}\right) = \frac{2-(-)3}{(-3)^2-9} = \frac{5}{0^+} = +\infty$

TAXA MÉDIA DE VARIAÇÃO – TMV

Seja a função y = f(x), conforme representada abaixo, e seja P um de seus pontos de abscissa x_0. Vamos atribuir um acréscimo qualquer ao valor x_0 (chamaremos esse acréscimo de Δx). A análise do gráfico nos mostra que consequentemente o valor da função passa do ponto de $f(x_0)$ para $f(x_0 + \Delta x)$.

Disso podemos concluir que um acréscimo, atribuído a x_0, provoca também uma variação no valor da função, variação esta que chamaremos de Δy.



Por definição chamaremos a taxa média de variação da função dada o quociente $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, quando a abscissa x passa do valor x_0 para o valor $x_0 + \Delta x$ e esta expressa a variação média sofrida pelos valores da função entre estes dois pontos, geometricamente é o coeficiente angular, ou declividade, da reta que passa pelos pontos P e Q.

$$\text{TMV} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

FUNÇÃO DERIVADA

Seja f uma função derivável no intervalo aberto I. Para cada x_0 pertencente a I existe e é único o limite:

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_o + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

Portanto, podemos definir uma função f' $I \to R$ que associa a cada $x \in I$ derivada de f no ponto x_0. Esta função é chamada **função derivada de f** ou , simplesmente, **derivada de f**.

Habitualmente, a derivada de f é representada por:

$$f'(x) \text{ ou } y' \text{ ou } \frac{dy}{dx}$$

A lei f'(x) pode ser determinada a partir da lei f(x), aplicando-se a derivada de uma função, num ponto genérico $x \in I$:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Exemplo:

Determine a função derivada de $f(x) = x^2 + x$.

Sabendo que $f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$

Onde:

$f(x+ \Delta x) = (x+ \Delta x)^2 + (x+ \Delta x) = x^2 + 2x\Delta x + \Delta^2 x + x+ \Delta x$
e
$f(x) = x^2 + x.$

sendo:

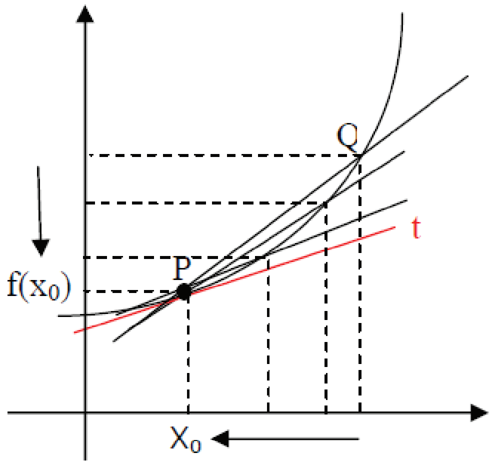
$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(\mathbf{x}^2 + \mathbf{2x}\Delta x + \Delta^2 x + x + \Delta x) - (x^2 + x)}{\Delta x} =$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\cancel{\mathbf{x}^2} + \mathbf{2x}\Delta x + \Delta^2 x + \cancel{x} + \Delta x - \cancel{x^2} - \cancel{x}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\mathbf{2x}\Delta x + \Delta^2 x + \Delta x}{\Delta x} =$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x(\mathbf{2x} + \Delta x + 1)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} (\mathbf{2x} + \Delta x + 1) = 2x + 1$$

INTERPRETAÇÃO GEOMÉTRICA DA FUNÇÃO DERIVADA

Geometricamente, a derivada da função no ponto de abscissa x_0 representa o coeficiente angular da reta t que tangencia a função no ponto P.



REGRAS DE DERIVAÇÃO

Tabela de Derivadas

$1.\ (c)' = 0$

$2.\ (cx)' = c$

$3.\ (x)' = 1$

$4.\ (x^n)' = nx^{n-1}$

$5.\ (cx^n)' = cnx^{n-1}$

$6.\ \left(\sqrt[n]{x}\right)' = \dfrac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}$

$7.\ \left(\sqrt[n]{x^m}\right)' = \dfrac{m}{n\sqrt[n]{x^{n-m}}}$

$8.\ \left(\dfrac{1}{x^n}\right)' = \dfrac{-n}{x^{n+1}}$

$9.\ (a^x)' = a^x \ln a$

$10.\ (e^x)' = e^x$

$11.\ (\log_b x)' = \dfrac{1}{x.\ln b}$

$12.\ (\ln x)' = \dfrac{1}{x}$

$13.\ (u^n)' = nu^{n-1}.u'$

$14.\ \left(\sqrt[n]{u^m}\right)' = \dfrac{m.u'}{n\sqrt[n]{u^{n-m}}}$

$15.\ \left(\dfrac{1}{u^n}\right)' = \dfrac{-n.u'}{u^{n+1}}$

$16.\ (a^u)' = u'.a^u.\ln a$

$17.\ (e^u)' = u'.e^u$

$18.\ (\log_b u)' = \dfrac{u'}{u.\ln b}$

$19.\ (\ln u)' = \dfrac{u'}{u}$

Exemplos:

Calcule a f'(x):

a) f(x) = 5 → f'(x) = 0

b) $f(x) = 5^x \rightarrow f'(x) = 5^x \ln 5$

c) $f(x) = \ln x \rightarrow f'(x) = 1/x$

d) $f(x) = x^3 \rightarrow f'(x) = 3x^2$

e) $f(x) = 5x^2 \rightarrow f'(x) = 10x$

f) $f(x) = 3x \rightarrow f'(x) = 3$

g) $f(x) = x \rightarrow f'(x) = 1$

h) $f(x) = \sqrt{x} \rightarrow f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

i) $f(x) = \frac{1}{x^3} \rightarrow f'(x) = -\frac{3}{x^4}$

j) $f(x) = \sqrt[4]{x^3} \rightarrow f'(x) = \frac{3}{4\sqrt[4]{x}}$

k) $f(x) = \log x \rightarrow f'(x) = \frac{1}{x \ln 10}$

l) $f(x) = e^x \rightarrow f'(x) = e^x$

m) $f(x) = \sqrt[3]{2} \rightarrow f'(x) = 0$

PROPRIEDADES OPERATÓRIAS

Sejam u = f(x) e v = g(x), duas funções deriváveis em I, então:

1. A derivada da soma é a soma das derivadas.

$$(u + v)' = u' + v'$$

Exemplos:

a) $f(x) = 5x^2 + 2x + 4 \rightarrow f'(x) = (5x^2)' + (2x)' + (4)' = 10x + 2$

b) $f(x) = 5 + \ln x \rightarrow f'(x) = (5)' + (\ln x)' = 1/x$

c) $f(x) = \sqrt[3]{x} - \frac{1}{x} \rightarrow f'(x) = \left(\sqrt[3]{x}\right)' - \left(\frac{1}{x}\right)' = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} + \frac{1}{x^2}$

2. Derivada do produto de duas funções é a derivada da primeira função vezes a segunda mais a primeira função vezes a derivada da segunda.

$$(u.v)' = u'.v + u.\ v'$$

Exemplos:

a) $f(x) = x\ .\ \ln x$

Sendo $u = x \rightarrow u' = 1$ e $v = \ln x \rightarrow v' = 1/x$

Então, $f'(x) = (x\ .\ \ln x)' = 1.\ \ln x + \cancel{x}\ .\ \frac{1}{\cancel{x}} = \ln x + 1$

b) $f(x) = x^3.e^x$

Sendo $u = x^3 \rightarrow u' = 3x^2$ e $v = e^x \rightarrow v' = e^x$

Então, $f'(x) = (x^3.e^x)' = 3x^2.\ e^x + x^3.e^x = x^2.\ e^x(3+x)$

3. Derivada de uma constante vezes uma função é a constante multiplicada pela derivada da função.

$$(c\ .\ v)' = c.\ v'$$

Exemplos:

a) $f(x) = 5x^2 \rightarrow f'(x) = 5.\ 2x = 10x$

b) $f(x) = 10\ln x \rightarrow f'(x) = 10.\ \frac{1}{x} = \frac{10}{x}$

c) $f(x) = 3e^x \rightarrow f'(x) = 3e^x$

d) $f(x) = 7.2^x \rightarrow f'(x) = 7.2^x \ln 2$

4. Derivada do quociente

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

Exemplos:

a) f(x) = $\frac{\ln x}{x}$

sendo u = lnx $\rightarrow$ u'= $\frac{1}{x}$ e v = x $\rightarrow$ v'= 1

então f'(x) = $\left(\frac{\ln x}{x}\right)' = \frac{\frac{1}{\cancel{x}}.\cancel{x} - \ln x.1}{x^2} = \frac{1-\ln x}{x^2}$

b) f(x) = $\frac{x}{e^x}$

sendo u = x $\rightarrow$ u'= 1 e v = e^x $\rightarrow$ v'= e^x

Então f'(x) = $\left(\frac{x}{e^x}\right)' = \frac{1.e^x - x.e^x}{\left(e^x\right)^2} = \frac{\cancel{e^x}(1-x)}{\left(e^x\right)^{\cancel{2}}} = \frac{1-x}{e^x}$

Regras de Derivação

$$R1.(u+v)' = u'+v'$$

$$R2.(u.v)' = u'.v + u.v'$$

$$R3.(c.v)' = c.v'$$

$$R4.\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'.v - u.v'}{v^2}$$

$$R5.\left(\frac{c}{v}\right)' = \frac{-c.v'}{v^2}$$

$$R6.\left(\frac{u}{c}\right)' = \frac{u'}{c}$$

Exercício:

1. Calcular a derivada das seguintes funções:

a) f(x) = $2x^5 - 3x^4 + 2x^3 - 3x^2 + 6x - 9$

f'(x) = $2.5x^{5-1} - 3.4x^{4-1} + 2.3x^{3-1} - 3.2x^{2-1} + 6x^{1-1} - 0$

f'(x) = $10x^4 - 12x^3 + 6x^2 - 6x + 6$

b) $f(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + \frac{x}{5} - \frac{1}{3}$

$$f'(x) = \frac{3.x^{3-1}}{3} - \frac{2x^{2-1}}{2} + \frac{1x^{1-1}}{5} - 0$$

$$f'(x) = x^2 - x + \frac{1}{5}$$

c) $y = \frac{100}{x^3} = 100x^{-3}$

$y' = 100.(-3)X^{-3-1}$

$y' = -300x^{-4}$

$$y' = -\frac{300}{x^4}$$

d) $y = \frac{\sqrt{3}}{2}e^x - \frac{lnx}{2}$

$$y' = \frac{\sqrt{3}}{2}e^x - \frac{1}{2}.\frac{1}{x}$$

$$y' = \frac{\sqrt{3}}{2}e^x - \frac{1}{2x}$$

e) $f(x) = 2\, lnx + 2^x + 1$

$$f'(x) = \frac{2}{x} + 2^x ln2$$

f) $f(x) = 5e^x - 4logx - 8$

$$f'(x) = 5e^x - \frac{4}{xln10}$$

g) $y = \sqrt[4]{x} - \frac{15}{x^3} = x^{\frac{1}{4}} - x^{-3}$

$$y' = \frac{1}{4}x^{\frac{1}{4}-1} - 5(-3)x^{-3-1}$$

$$y' = \frac{1}{4}x^{-\frac{3}{4}} + 15x^{-4}$$

$$y' = \frac{1}{4\sqrt[4]{x^3}} + \frac{15}{x^4}$$

h) $y = (x^2 - 3)e^x$

$u = x^2 - 3 \qquad v = e^x$

$u' = 2x \qquad v' = e^x$

$y' = u'.v + u.v'$

$y' = 2x.e^x + (x^2 - 3).e^x$

$y' = e^x(x^2 + 2x - 3)$

i) $f(x) = 4x.\,lnx$

$u = 4x \qquad v = lnx$

$u' = 4 \qquad v' = 1/x$

$y' = u'.v + u.v'$

$$y' = 4.\,lnx + 4x.\frac{1}{x}$$

$y' = 4lnx + 4$

j) $f(x) = 4x^3.\,lnx$

$u = 4x^3 \qquad v = lnx$

$u' = 12x^2 \qquad v' = 1/x$

$y' = u'.v + u.v'$

$$y' = 12x^2.\,lnx + 4x^3.\frac{1}{x}$$

$y' = 12x^2\,lnx + 4x^2$

k) $y = \frac{x}{x-1}$

$u = x \qquad v = x - 1$

$u' = 1 \qquad v' = 1$

$$y' = \frac{1.(x-1) - x.1}{(x-1)^2}$$

$$y' = \frac{x - 1 - x}{(x-1)^2}$$

$$y' = \frac{-1}{(x-1)^2}$$

j) $f(x) = 4x^3 . lnx$

$u = 4x^3$ $\quad$ $v = lnx$

$u' = 12x^2$ $\quad$ $v' = 1/x$

$y' = u'.v + u.v'$

$$y' = 12x^2 . lnx + 4x^3 . \frac{1}{x}$$

$y' = 12x^2\ lnx + 4x^2$

k) $y = \frac{x}{x-1}$

$u = x$ $\quad$ $v = x - 1$

$u' = 1$ $\quad$ $v' = 1$

$$y' = \frac{1.(x-1) - x.1}{(x-1)^2}$$

$$y' = \frac{x - 1 - x}{(x-1)^2}$$

$$y' = \frac{-1}{(x-1)^2}$$

2. Calcular as três primeiras derivadas das funções:

a) $y = 5x^3 – 4x^2 + 9x – 8$

$y' = 15x^2 – 8x + 9$

$y'' = 30x – 8$

$y''' = 30$

b) $y = lnx$

$y' = \frac{1}{x} = x^{-1}$

$y'' = – x^{-2} = – \frac{1}{x^2} = – x^{-2}$

$y''' = 2x^{-3} = \frac{2}{x^3}$

c) $y = e^{3x}$

$y' = 3e^{3x}$

$y'' = 9e^{3x}$

$y''' = 27\, e^{3x}$

APLICAÇÕES DE DERIVADA

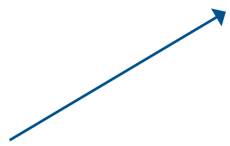
CRESCIMENTO E DECRESCIMENTO DE FUNÇÕES

Se , para todo $x \in]a,b[$, $f'(x) > 0$, então **f** é estritamente crescente (EC) em $]a,b[$.

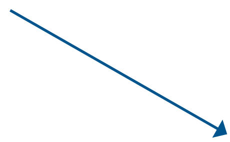
Se , para todo $x \in]a,b[$, $f'(x) < 0$, então **f** é estritamente decrescente (ED) em $]a,b[$.

Usamos a simbologia:

Função crescente



Função decrescente



1. Primeiro critério para localização de pontos de Máximo e Mínimo

1. Se

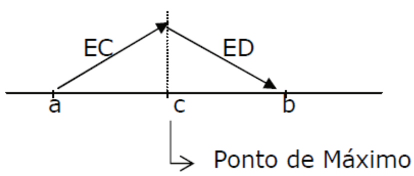
(a) $f'(x) > 0$, para todo $x \in]a,c[$

(b) $f'(x) < 0$, para todo $x \in]c,b[$

(c) f é continua em c,

Então em $x = c$ é Ponto de Máximo

O esquema abaixo ilustra a situação.



2. Se

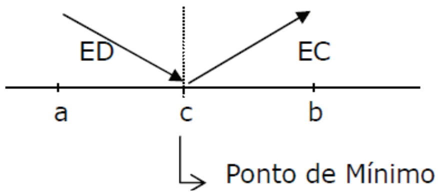
(a) f'(x) < 0, para todo x ∈]a,c[

(b) f'(x) > 0, para todo x ∈]c,b[

(c) f é continua em c,

Então em x = c é Ponto de Mínimo

O esquema abaixo ilustra a situação.



2. Segundo critério para localização de pontos de máximo e mínimo

1° Passo: f´(x) = 0 e determinar as raízes da equação, x_i.

2° Passo: Obter a f''(x)

3° Passo: Substituir ox_i, encontrado anteriormente, na segunda derivada da função. Se f''(x_i) > 0, significa que para o valor x_i temos ponto de mínimo, mas se f''(x_i) < 0 ,então que para o valor x_i temos ponto de máximo.

Exemplo:

Estudar o crescimento e decrescimento das função abaixo, apontando os possíveis pontos de máximo ou mínimo.

$$y = \frac{x^3}{3} - \frac{3}{2}x^2 - 4x + 10$$

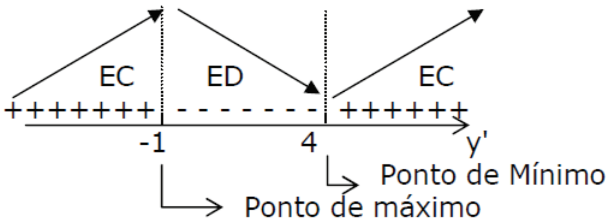
1° passo: Cálculo da derivada.

$y' = x^2 - 3x - 4$

2° passo: Estudo do sinal da primeira derivada.

$$y' = 0$$
$$x^2 - 3x - 4 = 0$$
$$\Delta = (-3)^2 - 4(1)(-4) = 9 + 16 = 25$$
$$x = \frac{-(-3) \pm \sqrt{25}}{2(1)} = \frac{3 \pm 5}{2};\ x_1 = \frac{3+5}{2} = \frac{8}{2} = 4 \text{ e } x_2 = \frac{3-5}{2} = \frac{-2}{2} = -1$$

3° passo: Conclusão:



$y'' = 2x - 3$

Para $x = -1$, temos $y'' = 2.(-1) - 3 = -5 < 0$ Máximo

Para $x = 4$, temos $y'' = 2.(4) - 3 = 5 > 0$ Mínimo

Resposta: f(x) é estritamente crescente (EC) para $x < -1$ ou $x > 4$, f(x) é estritamente decrescente (ED) para $-1 < x < 4$, em $x = -1$ é Ponto de Máximo e em $x = 4$ é Ponto de Mínimo.

Exercício:

Estudar o crescimento e decrescimento da função, $y = -x^2 + 4x$ apontando os possíveis pontos de máximo ou mínimo.

1° passo: Cálculo da derivada.

$y = -x^2 + 4x$

$y' = -2x + 4$

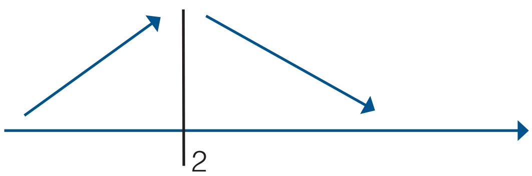
2° passo: Estudo do sinal da primeira derivada.

$y' = 0 \rightarrow -2x + 4 = 0$

$-2x = -4$

$x = 2$

3° passo: Conclusão:



$y'' = -2$

Para $x = 2$ temos $y'' = -2 < 0$ Máximo

Resposta: f(x) é estritamente crescente (EC) para $x < 2$, f(x) é estritamente decrescente (ED) para $x > 2$, em $x = 2$ é Ponto de Máximo.

CONCAVIDADE E PONTO DE INFLEXÃO

- Se , para todo $x \in]a,b[$, $f''(x) > 0$, então o gráfico de f tem concavidade voltada para cima (CVC) em $]a,b[$.
- Se , para todo $x \in]a,b[$, $f''(x) < 0$, então o gráfico de f tem concavidade voltada para baixo (CVB) em $]a,b[$.
- Se f tem concavidade de nomes distintos nos intervalos $]a,c[$ e $]c,b[$ e é contínua em c, dizemos que em $x = c$ é ponto de inflexão (PI).

Exemplo:

Estudar, no que se refere à concavidade e a pontos de inflexão, a seguinte função: $y = x^3 - 6x^2 + 4x - 10$.

1° passo: Calcular a segunda derivada da função

$y' = 3x^2 - 12x + 4$

$y'' = 6x - 12$

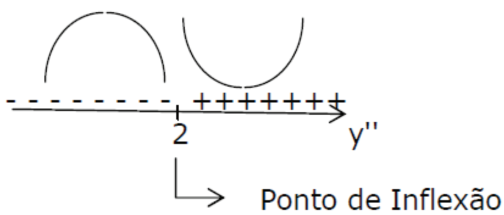
2° passo: Estudo do sinal da segunda derivada

$y'' = 0$

$6x - 12 = 0$

$x = 2$

3° passo: Conclusão



Resposta: A f(x) tem côncava voltada para baixo (CVB) para $x < 2$, f(x) tem côncava voltada para cima (CVC) para $x > 2$ e em $x = 2$ é ponto de inflexão.

Exercício:

1. Estudar, no que se refere à concavidade e a pontos de inflexão, as seguintes funções:

a) $y = 1 - x^2$

1° passo: Calcular a segunda derivada da função

$y' = -2x$

$y'' = -2$

2° passo: Estudo do sinal da segunda derivada

$y'' = 0 - 2 = 0$ (Falso)

Resposta: Não possui ponto de inflexão.

b) $y = \frac{x^3}{3} - \frac{5}{2}x^2 - 3x + 4$

1° passo: Calcular a segunda derivada da função

$y' = \frac{3x^2}{3} - \frac{5.2x}{2} - 3 = x^2 - 5x - 3$

$y'' = 2x - 5$

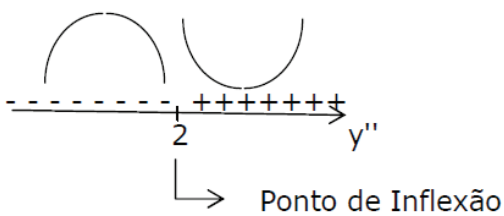
2° passo: Estudo do sinal da segunda derivada

$y'' = 0$

$2x - 5 = 0$

$x = \frac{5}{2}$

3° passo: Conclusão



Resposta: A f(x) tem côncava voltada para baixo (CVB) para x < 5/2 , f(x) tem côncava voltada para cima (CVC) para x > 5/2 e em x = 5/2 é ponto de inflexão.

EXERCÍCIOS DE APLICAÇÃO DE DERIVADAS: ANÁLISE MARGINAL

A Análise Marginal representa o valor estimado da função provocada por um aumento unitário em **x**.

Por exemplo, o Custo Marginal representa o acréscimo de custo total que ocorre quando se aumenta a quantidade de bens produzida em uma unidade (ou a redução de custo total após a redução em uma unidade na quantidade produzida).

Função marginal: $y' = f'(x)$

Matematicamente, a função de custo marginal é expressa como a **derivada** da função de **custo total**, sobre a **quantidade** total produzida.

Exemplo:

1. Suponha que o custo total de fabricação de x unidades de certo produto seja de $C(x) = 3x^2 + x + 500$.

a) Use a análise marginal para estimar o custo de fabricação da 41ª unidade;

b) b) Calcule a variação real de fabricação da 41ª unidade.

a. $C(x) = 3x^2 + x + 500$

$C'(x) = 6x + 1$

Para $x = 41$, temos $C'(41) = 6.41 + 1 = 247$

O custo de fabricação da 41a unidade será de **247 u.m**. (unidades monetárias).

b. $C(x) = 3x^2 + x + 500$

Para $x = 40$, temos $C(40) = 3.(40)^2 + 40 + 500 = 5340$

Para $x = 41$, temos $C(41) = 3.(41)^2 + 41 + 500 = 5584$

A variação real de fabricação da 41ª unidade = 5584 – 5340 = **244 u.m.**

Exercícios:

1. Numa certa fábrica, a produção diária de determinado produto é de $Q(x) = 600.\ x^{½}$ unidades, onde x representa o capital investido pela firma, medido em unidades de \$ 1.000,00. O capital atualmente investido é de \$ 900.000,00. Use a análise marginal para avaliar o efeito na produção diária do produto, ao se investir um capital adicional de \$ 1.000,00.

$$Q(x) = 600.x^{½}$$

$$Q(x) = 600.\frac{1}{2}x^{1 - ½} = 300x^{- ½} = \frac{300}{\sqrt{x}}$$

Para x = 901, temos $Q'(10000) = \dfrac{300}{\sqrt{901}} \cong 10$

O efeito na produção diária do produto ao se investir um capital adicional de \$ 1.000,00 será de **10.000 unidades**.

2. Se c(x) é o custo total de x pesos para papéis e:

$C(x) = 200 + \dfrac{50}{x} + \dfrac{x^2}{5}$.

a) custo marginal de fabricação do 11° peso;

b) custo real de fabricação do 11° peso.

a. $c(x) = 200 + \dfrac{50}{x} + \dfrac{x^2}{5}$

$$c(x) = 200 + 50x^{-1} + \frac{x^2}{5}$$

$$c(x) = -50x^{-2} + \frac{2x}{5} = -\frac{50}{x^2} + \frac{2x}{5}$$

Para x = 11, temos $c(11) = -\dfrac{50}{11^2} + \dfrac{2.11}{5} = 3,99$

O custo marginal do 11º peso será de **3,99 u.m**.

b. $c(x) = 200 + \frac{50}{x} + \frac{x^2}{5}$

Para x = 10, temos $c(10) = 200 + \frac{50}{10} + \frac{10^2}{5} = 225$

Para x = 11, temos $c(11) = 200 + \frac{50}{11} + \frac{11^2}{5} = 228{,}75$

O custo real do 11º peso é de 228,75 – 225 = **3,75 u.m**.

3. O ganho mensal proveniente da fabricação de determinado produto é de $R(x) = 240x + 0{,}05x^2$ reais, onde x representa o número de unidades produzidas no mês. Atualmente, o fabricante produz 80 unidades por mês e pretende elevar este número, aumentando de uma unidade a produção mensal.

a) Use a análise marginal do ganho adicional produzido pela produção e venda da 81ª unidade;

b) Use a função ganho para calcular o ganho adicional real decorrente da fabricação e venda da 81ª unidade.

a. $R(x) = 240x + 0{,}05x^2$

$R'(x) = 240 + 0{,}10x$

Para x = 81, temos $R'(81) = 240 + 0{,}10.81 = 248{,}10$

O custo marginal da 81o unidade será de **248,10 u.m.**

b. $R(x) = 240x + 0{,}05x^2$

Para x = 80, temos $R(80) = 240.80 + 0{,}05.80^2 = 19520$

Para x = 81, temos $R(81) = 240.81 + 0{,}05.81^2 = 19678{,}50$

O ganho adicional real decorrente da fabricação e venda da 81ª unidade será de 19678,50 -19520 = **158,20 u.m.**

4. A produção diária de uma fábrica é de $Q(x) = 960x^{1/3}$ unidades, onde x representa o tamanho da força de trabalho medido em operários-hora. Atualmente, emprega 512 operários-hora por dia. Use a análise marginal para avaliar o efeito que um operário-hora adicional acarreta na produção.

$Q(x) = 960x^{1/3}$

$Q'(x) = 960.\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}} = \frac{320}{\sqrt[3]{513^2}} \cong 5$

Um operário-hora acarreta na produção aproximadamente **5 unidades**.

5. Calcula-se que a produção semanal de certa fábrica seja $Q(x) = -x^3 + 60x^2 + 1200x$, onde x representa o número de operários da fábrica. Atualmente, há 30 operários trabalhando. Usando o cálculo, avalie a variação que ocorrerá na produção semanal da fábrica caso se acrescente um operário à força de trabalho existente.

$Q(x) = -x^3 + 60x^2 + 1200x$

$Q'(x) = -3x^2 + 120x + 1200$

Para x = 31, temos $Q'(31) = -3.31^2 + 120.31 + 1200 = 2037$

Caso se acrescente um operário à força de trabalho existente, ocorrerá uma variação de **2037 unidades**.

EXERCÍCIOS DE APLICAÇÃO DE PONTOS DE MÁXIMO E/OU MÍNIMO

1. O lucro obtido por um fabricante com a venda de determinado produto é dado pela função $L(p) = 400(15 - p)(p - 2)$, onde p é o preço de venda de cada unidade. Calcule o preço ótimo de venda.

$L(p) = 400(15 - p)(p - 2)$

$L(p) = 400(-p^2 + 17p - 30)$

O preço ótimo de venda ocorre no ponto máximo da função, ou seja, $L'(p) = 0$.

$L'(p) = 400(-2p + 17)$

$L'(p) = 0 \quad 400(-2p + 17) = 0$

$-2p = -17$

$p = 8{,}50$

O preço ótimo de venda é de **8,50 u.m.**

2. Há algumas semanas o Departamento de Estradas vem registrando a velocidade do trânsito em certa saída de uma autoestrada. Os dados indicam que, em um dia normal, entre 13h e 18h, a velocidade do trânsito é de, aproximadamente, $V(t) = t^3 - 10{,}5t^2 + 30t + 20$ km/h, onde t representa o número de horas transcorridas após o meio-dia.

a) a que horas (entre 13h e 18h) o trânsito flui mais rapidamente?

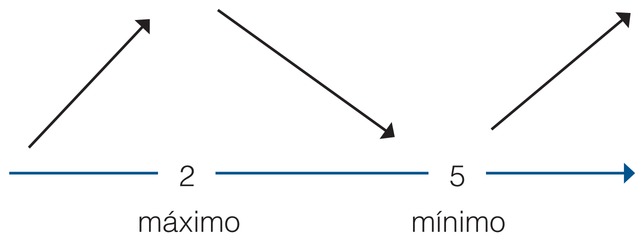
b) mais vagarosamente?

$$\mathbf{V(t) = t^3 - 10{,}5t^2 + 30t + 20}$$

O trânsito flui mais rapidamente no ponto máximo da função, ou seja, $V'(t) = 0$.

$V'(t) = 3t^2 - 21t + 30$

$V'(t) = 0 \rightarrow 3t^2 - 21t + 30 = 0 \begin{cases} t' = 2\text{, ou seja, 14 horas} \\ t'' = 5\text{, ou seja, 17 horas} \end{cases}$



$V'(t) = 3t^2 - 21t + 30$

$V''(t) = 6t - 21$

Para $t = 2$, temos $V''(t) = 6.2 - 21 = -9 < 0$: Máximo.

Para $t = 5$, temos $V''(t) = 6.5 - 21 = 9 > 0$: Mínimo.

a. O trânsito flui mais rapidamente às **14 horas**.

b. O trânsito flui mais vagarosamente às **17 horas**.

3. Certa associação nacional de consumidores foi fundada em 1980. Suponhamos que, x anos depois, o número de membros desta associação seja dado por $f(x) = 100(2x^3 - 45x^2 + 264x)$.

a) Em que ano (entre 1980 e 1994) a associação teve mais membros?

b) Quantos eram eles?

c) Em que ano (entre 1980 e 1994) a associação teve menos membros?

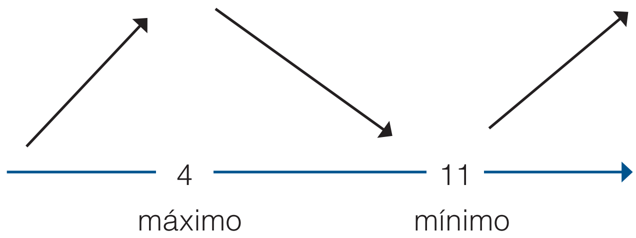
d) Quantos eram eles?

$f(x) = 100(2x^3 - 45x^2 + 264x)$

A associação teve mais membros no ponto máximo da função, ou seja, $f'(x) = 0$.

$f'(x) = 100(6x^2 - 90x + 264)$

$f'(x) = 0 \rightarrow 6x^2 - 90x + 264 = 0 \begin{cases} x' = 4, \text{ ou seja, } 1984 \\ x'' = 11, \text{ ou seja, } 1991 \end{cases}$



$f'(x) = 100(6x^2 - 90x + 264)$

$f''(x) = 100(12x - 90)$

Para $x = 4$, temos $f''(x) = 100(12.4 - 90) = -4200 < 0$: Máximo.

Para $x = 11$, temos $f''(x) = 100(12.11 - 90) = 4200 > 0$: Mínimo.

a. O ano em que teve maior número de sócios foi **1984**.

b. Para $x = 4$, temos em $f(x) = 100(2x^3 - 45x^2 + 264x)$

$f(4) = 100(2.4^3 - 45.4^2 + 264.4) = 46400$

O maior número de sócios foi **46400**.

c. Ano em que teve menos número de sócios foi **1991**.

d. Para $x = 11$, temos em $f(x) = 100(2x^3 - 45x^2 + 264x)$

$f(4) = 100(2.11^3 - 45.11^2 + 264.11) = 12100$

O menor número de sócios foi **12100**.

4. Calcula-se que o custo de construção de um edifício de n andares seja de $C(n) = 2n^2 + 500n + 600$ milhões de dólares. Quantos andares deverão ter o edifício para minimizar o custo médio por andar? (Lembre-se que a resposta tem que ser um número inteiro)

Lembrando que Custo Médio = $\frac{C(n)}{n}$, temos CM(n) = 2n + 500 + $\frac{600}{n}$. Para determinar o número de andares para que o custo seja mínimo, vamos procurar o ponto mínimo da função: CM'(n) = 0

$$CM(n) = 2n + 500 + 600\, n^{-1}$$

$$CM'(n) = 2 - 600n^{-2} \rightarrow 2 - \frac{600}{n^2} = 0$$

$$\frac{600}{n^2} = 2$$

$$2n^2 = 600$$

$$n \cong 17$$

O edifício deverá ter **17 andares** para que o custo médio por andar seja mínimo.