



# ***MATEMÁTICA COMPUTACIONAL LÓGICA MATEMÁTICA (I)***

**Reginaldo Moraes de Macedo, M.Sc., D.Sc.**

- Bacharel em Administração e Matemática.
- Doutor em Administração.
- Mestre em Desenvolvimento Social.
- Especialista em Ciência de Dados; Sistema Financeiro e Mercado de Capitais; Saúde Pública; Educação a Distância; Engenharia de Produção; e Administração de Sistemas de Informação.  
MBA em Gestão de Projetos e Gestão Pública.

# LÓGICA: CONCEITOS E VERTENTES

## (BARBOSA, 2017)

- É a manifestação do pensamento.
- **Lógica Clássica:** não-contradição; terceiro excluído; identidade.
  - Lógica Formal
    - Lógica de Programação
    - Lógica Matemática/Simbólica
    - Lógica Proposicional/dos Argumentos
  - Lógica Material
    - Lógica Modal (possibilidades)
    - Lógica Epistêmica (conhecimento)
    - Lógica Deontica (Moral e Ética)
- **Lógica Anticlássica** (Moderna): não considera um ou mais dentre os princípios que sustentam a Lógica Clássica
  - Lógica Paraconsistente
  - Lógica Paracompleta
  - Lógica Fuzzy

# LÓGICA CLÁSSICA

- Também conhecida como Lógica Aristotélica ou Lógica Proposicional.
- É um sistema de raciocínio que estabelece regras para a validação de um determinado conjunto de argumentos (conjunto de proposições e que tem a função de demonstrar a relação lógica entre estas).

# LÓGICA CLÁSSICA – PRINCÍPIOS

(BARBOSA, 2017; BISPO ET AL., 2018)

- **Identidade:** toda proposição é idêntica a si mesma, ou seja, se a proposição verdadeira, então ela é verdadeira;
- **Não-contradição:** uma proposição não pode ser verdadeira e falsa ao mesmo tempo;
- **Terceiro Excluído:** uma proposição é verdadeira ou falsa exclusivamente, não havendo outra alternativa;

# LÓGICA FORMAL

- Estudo das formas válidas de argumentos.
- Envolve a análise de estruturas lógicas e a aplicação de regras de inferência para determinar a validade de argumentos.
- É fundamental na Matemática para provar teoremas e na Computação para verificar a correção de algoritmos.

# LÓGICA FORMAL - TIPOS

- **Lógica de Programação:** utiliza princípios de lógica formal para desenvolver e verificar programas de computador.
- **Lógica Matemática/Simbólica:** é o estudo de sistemas formais e símbolos que representam proposições e seus relacionamentos.
- **Lógica Proposicional/dos Argumentos:** estuda proposições que podem ser verdadeiras ou falsas e suas combinações através de operadores lógicos.

# LÓGICA MATERIAL

- Preocupa-se com o conteúdo dos argumentos. Tipos:
  - **Modal:** considera as possibilidades e necessidades, sendo útil na verificação de sistemas de computação e na modelagem de estados de sistemas.
  - **Epistêmica:** lida com conhecimento e crenças, aplicável em inteligência artificial e segurança da informação.
  - **Deontica:** trata de obrigações e permissões, relevante para sistemas normativos e legais.

# LÓGICA ANTICLÁSSICA OU MODERNA

- Desafia as premissas da lógica clássica. Tipos:
  - **Paraconsistente:** permite a existência de contradições sem que todo o sistema lógico colapse, sendo utilizada em inteligência artificial para gerenciar informações conflitantes.
  - **Paracompleta:** rejeita a lei do terceiro excluído, essencial na matemática construtivista e na análise de algoritmos onde provas construtivas são necessárias.
  - **Fuzzy:** permite graus intermediários de verdade, aplicando-se em sistemas de controle e modelagem de incertezas, como controle de temperatura e tomada de decisões sob incerteza.



# PROPOSIÇÕES

## (BARBOSA, 2017)

- Na Filosofia, o juízo é um ato mental e a proposição é a representação da expressão deste ato (p. 24).
- *São frases declarativas que têm um valor lógico.* (p. 28)
- **Simples:** apenas uma sentença ou enunciado:  $2 + 2 = 4$  (representadas por letras minúsculas: p, q, r, s...).
- **Compostas:** mais de uma sentença ou enunciado: Aristóteles é homem e grego (representadas por letras maiúsculas: P, Q, R, S...)

# PROPOSIÇÕES: EXEMPLOS

(BISPO; CASTANHEIRA; SOUZA FILHO, 2018)

- Sentenças declarativas
  - A Lua está a aprox. 384.000 km da Terra (V)
  - 111 na base 2 é igual a 6 na base 10 (F)
  - $\sin(90^\circ) = 1$  (V)
  - Os suíços fabricam os melhores relógios e os franceses, o melhor vinho (V, dependendo do período de tempo)
- Sentenças Não Declarativas
  - Venha aqui! (imperativa)
  - Não corra tão rápido (imperativa)
  - Quantas vezes terei de repetir isso? (interrogativa)

# CONECTIVOS PROPOSICIONAIS E OPERAÇÕES (BISPO ET AL., 2018)

- **e ( $\wedge$ )**
- Maria foi ao cinema e Marta ao teatro
  - C=Maria foi ao cinema
  - T=Marta foi ao teatro
  - $C \wedge T$
- André foi ao baile, mas Maria ficou em casa
  - B=André foi ao baile
  - C=Maria ficou em casa
  - $B \wedge C$

# CONECTIVOS PROPOSICIONAIS E OPERAÇÕES (BISPO ET AL., 2018)

- **ou ( $\vee$ )**
- Maria foi ao cinema ou ao teatro
  - $C$ =Maria foi ao cinema
  - $T$ =Maria foi ao teatro
  - $C \vee T$
- José será jogador de futebol ou seguirá carreira na Medicina
  - $F$ =José será jogador de futebol
  - $M$ =José seguirá carreira na Medicina
  - $B \vee C$

# CONECTIVOS PROPOSICIONAIS E OPERAÇÕES (BISPO ET AL., 2018)

- **condicional ( $\rightarrow$ ): se(proposição 1) [antecedente], então (proposição 2) [consequente]**
- Se Alberto é poliglota, então fala várias línguas.
  - $P$ =Alberto é poliglota;  $L$ =(Alberto) fala várias línguas
  - $P \rightarrow L$
- Se todos os homens são mortais e Sócrates é homem, então Sócrates é mortal.
  - $H$ =Todos os homens são mortais;  $S$ =Sócrates é um homem.  
 $M$ =Sócrates é mortal
  - $(H \wedge S) \rightarrow M$ .

# CONECTIVOS PROPOSICIONAIS E OPERAÇÕES (BISPO ET AL., 2018)

- **bicondicional ( $\leftrightarrow$ ): (proposição 1) se, e somente se, (proposição 2), sendo que  $p \leftrightarrow q$ , equivale a  $p \rightarrow q$  e  $q \rightarrow p$ .**
- Só ganharás o dinheiro se, e somente se, completares o trabalho.
  - D=ganharás o dinheiro.
  - T=completares o trabalho.
  - **$D \leftrightarrow T$**

# CONECTIVOS PROPOSICIONAIS E OPERAÇÕES (BISPO ET AL., 2018)

- **negação ( $\neg \sim$ ): é um conectivo unário, invertendo o valor lógico analítico da proposição.**
- Luís não recebeu o seu pagamento na data prevista.
  - $P$ =Luís recebeu seu pagamento na data prevista
  - $\neg P$
- Alfredo gosta de trabalhar
  - $T$ =Alfredo não gosta de trabalhar
  - $\neg T$

# PRIORIDADES

(BISPO ET AL., 2018)

- $()$ ;  $(\neg)$ ;  $(\wedge)$  e  $(\vee)$ ;  $(\rightarrow)$  e  $(\leftrightarrow)$ .
- Ex: Se tomarmos café ou comermos algo, chegaremos atrasados à conferência, mas se isso for um problema, é melhor despedirmos-nos agora.

T=Tomarmos café.

C=Comermos algo.

A=chegaremos atrasados à conferência.

P=isso é um problema.

D=é melhor desperdirmos-nos agora

$((T \vee C) \rightarrow A) \wedge (P \rightarrow D)$



# WFF (WELL-FORMED FORMULA)

(BISPO ET AL., 2018)

- Fórmulas: conjunto de proposições conectadas (por conectivos lógicos), utilizando a linguagem simbólica (BARBOSA, 2017).
- Se a fórmula é aceitável (em relação às regras de formação) diz-se que é uma fórmula bem escrita (WFF).
- Regras de formação:
  - Uma letra proposicional isolada é uma WFF.
  - Se  $P$  é uma WFF, então  $\neg P$  também é.
  - Se  $P$  e  $Q$  são WFFs, então  $(P \wedge Q)$ ,  $(P \vee Q)$ ,  $(P \rightarrow Q)$  e  $(P \leftrightarrow Q)$  também são.

# VALOR-VERDADE

(BISPO ET AL., 2018, P. 17)

- Obtido de forma única a partir dos valores-verdade atribuídos às proposições simples que a compõe.
- Depende do contexto da proposição simples e do seu estudo semântico.

# VALOR-VERDADE: CRITÉRIOS

(BISPO ET AL., 2018, P. 17)

- **Conjunção:** só é verdadeiro se todas as proposições são verdadeiras.
- **Disjunção:** é verdadeiro se qualquer uma das proposições for verdadeira.
- **Condicional:** é falso, se e somente se, a antecedente for verdadeira, mas a consequente for falsa.
- **Bicondicional:** é verdadeiro, se e somente se, as duas proposições tiverem valores iguais.
- **Negação:** é verdadeiro se a proposição for falsa e vice-versa.

# TABELAS-VERDADE

(CARNIELLI; EPSTEIN, 2009; BISPO ET AL., 2018)

- Instrumento para auxiliar no processo de determinação do valor-verdade para uma proposição.

		Conjunção	Disjunção	Condicional	Bicondicional
p	q	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \rightarrow q$	$p \leftrightarrow q$
V	V	V	V	V	V
V	F	F	V	F	F
F	V	F	V	V	F
F	F	F	F	V	V

# CLASSIFICAÇÃO DAS PROPOSIÇÕES (BISPO ET AL., 2018)

- **Tautologia:** ocorre, se, e somente se, seu valor lógico é sempre verdade (V), independente do valor lógico das proposições simples que a compõe.
- **Contradição:** ocorre, se, e somente se, seu valor lógico é sempre falso (F), independente do valor lógico das proposições simples que a compõe.
- **Contingência:** ocorre quando o valor lógico pode ser verdadeiro (V) ou falso (F).

# EXEMPLOS (CONTINGÊNCIA)

- Os acadêmicos serão aprovados ( $p$ ), se e somente se, atingirem nota mínima de 70 pontos ( $q$ ) e 75% de frequência ( $r$ ). ( $p \leftrightarrow (q \wedge r)$ )

p	q	r	$q \wedge r$	$p \leftrightarrow q \wedge r$	Entendimento
V	V	V	V	V	(V) que aprovado: nota $\geq 70$ e freq. $\geq 75\%$
V	V	F	F	F	(F) que aprovado: nota $\geq 70$ e freq. $< 75\%$
V	F	V	F	F	(F) que aprovado: nota $< 70$ e freq. $\geq 75\%$
V	F	F	F	F	(F) que aprovado: nota $< 70$ e freq. $< 75\%$
F	V	V	V	F	(F) que reprovado: nota $\geq 70$ e freq. $\geq 75\%$
F	V	F	F	V	(V) que reprovado: nota $\geq 70$ e freq. $< 75\%$
F	F	V	F	V	(V) que reprovado: nota $< 70$ e freq. $\geq 75\%$
F	F	F	F	V	(V) que reprovado: nota $< 70$ e freq. $< 75\%$

# EXEMPLOS (CONTINGÊNCIA)

- Se hoje chover ( $p$ ) ou o carro **não** estiver funcionando adequadamente ( $q$ ), então **não** iremos ao parque ( $r$ ).  $(p \vee \neg q) \rightarrow \neg r$

$p$	$q$	$r$	$\neg q$	$(p \vee \neg q)$	$\neg r$	$(p \vee \neg q) \rightarrow \neg r$
V	V	V	F	V	F	F
V	V	F	F	V	V	V
V	F	V	V	V	F	F
V	F	F	V	V	V	V
F	V	V	F	F	F	V
F	V	F	F	F	V	V
F	F	V	V	V	F	F
F	F	F	V	V	V	V

# EXEMPLOS (TAUTOLOGIA)

- Dados  $p$ ,  $q$  e  $r$  que sejam proposições quaisquer, construa a tabela-verdade para  $((p \rightarrow q) \rightarrow (p \wedge r \rightarrow q))$

$p$	$q$	$r$	$p \rightarrow q$	$p \wedge r$	$p \wedge r \rightarrow q$	$(p \rightarrow q) \rightarrow (p \wedge r \rightarrow q)$
V	V	V	V	V	V	V
V	V	F	V	F	V	V
V	F	V	F	V	F	V
V	F	F	F	F	V	V
F	V	V	V	F	V	V
F	V	F	V	F	V	V
F	F	V	V	F	V	V
F	F	F	V	F	V	V



# EXEMPLOS (CONTINGÊNCIA)

## (BISPO ET AL., 2018)

- Dados  $p$ ,  $q$  e  $r$  que sejam proposições quaisquer, construa a tabela-verdade para  $(p \rightarrow p \vee q) \wedge (r \leftrightarrow q)$

$p$	$q$	$r$	$p \vee q$	$p \rightarrow p \vee q$	$r \leftrightarrow q$	$(p \rightarrow p \vee q) \wedge (r \leftrightarrow q)$
V	V	V	V	V	V	V
V	V	F	V	V	F	F
V	F	V	V	V	F	F
V	F	F	V	V	V	V
F	V	V	V	V	V	V
F	V	F	V	V	F	F
F	F	V	F	V	F	F
F	F	F	F	V	V	V

# EXEMPLOS (CONTRADIÇÃO)

- Dados  $p$ ,  $q$  e  $r$  que sejam proposições quaisquer, construa a tabela-verdade para  $((p \wedge \neg q) \wedge (\neg p \wedge q)) \wedge r$

$p$	$\neg p$	$q$	$\neg q$	$r$	$p \wedge \neg q$	$\neg p \wedge q$	$(p \wedge \neg q) \wedge (\neg p \wedge q)$	$((p \wedge \neg q) \wedge (\neg p \wedge q)) \wedge r$
V	F	V	F	V	F	F	F	F
V	F	V	F	F	F	F	F	F
V	F	F	V	V	V	F	F	F
V	F	F	V	F	V	F	F	F
F	V	V	F	V	F	V	F	F
F	V	V	F	F	F	V	F	F
F	V	F	V	V	F	F	F	F
F	V	F	V	F	F	F	F	F

# TAUTOLOGIAS

## (BISPO ET AL., 2018)

- São situações em que todos os valores lógicos são verdadeiros.
- Uma proposição tautológica é entendida como atômica em termos de seus resultados, uma vez que independente das proposições simples, o resultado final é sempre verdadeiro.
- São especialmente importantes para a análise da validade dos argumentos, a partir da aplicação das propriedades e regras de inferências.
- As principais operações realizadas no contexto das tautologias são a implicação e a equivalência.

# CLASSIFICAÇÃO DAS PROPOSIÇÕES

(BISPO ET AL., 2018)

- **Implicação:** define-se como uma proposição composta  $P$  que implica em outra proposição,  $Q$ , se ambas forem verdadeiras.  $P(p, q, r...) \Rightarrow Q(p, q, r...)$
- Ex:  $p \rightarrow q \Rightarrow p \wedge q$

$p$	$q$	$p \rightarrow q$	$p \wedge q$
V	V	V	V
V	F	F	F
F	V	V	F
F	F	V	F

# REGRAS DE INFERÊNCIA/IMPLICAÇÕES (BARBOSA, 2017)

Identificação	Forma
<b><i>Modus Ponens (MP)</i></b>	$p \wedge (p \rightarrow q) \Rightarrow q$
<b><i>Modus Tollens (MT)</i></b>	$\neg q \wedge (p \rightarrow q) \Rightarrow \neg p$
<b>Silogismo Hipotético (SH)</b>	$(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r) \Rightarrow (p \rightarrow r)$
<b>Silogismo Disjuntivo (SD)</b>	$(p \vee q) \wedge \neg p \Rightarrow q$
<b>Simplificação (S)</b>	$p \wedge q \Rightarrow p$
<b>Adição (AD)</b>	$p \Rightarrow p \vee q$
<b>Eliminação (EL)</b>	$(p \rightarrow (q \vee r)) \wedge \neg q \Rightarrow (p \rightarrow r)$
<b>Prova por casos (CS)</b>	$(p \rightarrow r) \wedge (q \rightarrow r) \Rightarrow (p \vee q) \rightarrow r$

# CLASSIFICAÇÃO DAS PROPOSIÇÕES

(BISPO ET AL., 2018)

- **Equivalência:** ocorre quando duas proposições distintas apresentam o mesmo valor lógico.
- Ex:  $(r \rightarrow s) \Leftrightarrow (\neg s \rightarrow \neg r)$

r	s	$r \rightarrow s$		r	s	$\neg r$	$\neg s$	$\neg s \rightarrow \neg r$
V	V	V		V	V	F	F	V
V	F	F		V	F	F	V	F
F	V	V		F	V	V	F	V
F	F	V		F	F	V	V	V

# RELAÇÕES DE EQUIVALÊNCIA

(BARBOSA, 2017; BISPO ET AL., 2018)

Identificação	Forma 1	Forma 2
<b>Comutativa</b>	$p \wedge q \Leftrightarrow q \wedge p$	$p \vee q \Leftrightarrow q \vee p$
<b>Associativa</b>	$(p \wedge q) \wedge r \Leftrightarrow p \wedge (q \wedge r)$	$(p \vee q) \vee r \Leftrightarrow (p \vee q) \vee r$
<b>Idempotente</b>	$(p \wedge p) \Leftrightarrow p$	$p \vee p \Leftrightarrow p$
<b>Propriedades de V</b>	$(p \wedge V) \Leftrightarrow p$	$p \vee V \Leftrightarrow V$
<b>Propriedades de F</b>	$(p \wedge F) \Leftrightarrow F$	$p \vee F \Leftrightarrow p$
<b>Absorção</b>	$(p \wedge (p \vee r)) \Leftrightarrow p$	$p \vee (p \wedge r) \Leftrightarrow p$
<b>Distributivas</b>	$p \wedge (q \vee r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$	$p \vee (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee r)$
<b>Distributivas</b>	$p \rightarrow (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \rightarrow q) \wedge (p \rightarrow r)$	$p \rightarrow (q \vee r) \Leftrightarrow (p \rightarrow q) \vee (p \rightarrow r)$

# RELAÇÕES DE EQUIVALÊNCIA

(BARBOSA, 2017; BISPO ET AL., 2018)

Identificação	Forma 1	Forma 2
<b>Leis de Morgan</b>	$\neg(p \wedge q) \Leftrightarrow \neg p \vee \neg q$	$\neg(p \vee q) \Leftrightarrow \neg p \wedge \neg q$
<b>Def. Implicação</b>	$p \rightarrow q \Leftrightarrow \neg p \vee q$	$p \rightarrow q \Leftrightarrow \neg(p \wedge \neg q)$
<b>Def. Bicondicional</b>	$p \leftrightarrow q \Leftrightarrow (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$	$p \leftrightarrow q \Leftrightarrow (\neg p \vee q) \wedge (\neg q \vee p)$
<b>Negação</b>	$\neg(\neg p) \Leftrightarrow p$	
<b>Contraposição</b>	$p \rightarrow q \Leftrightarrow \neg q \rightarrow \neg p$	
<b>Exportação (<math>\Rightarrow</math>)</b>	Importação ( $\Leftarrow$ )	$(p \wedge q) \rightarrow r \Leftrightarrow p \rightarrow (q \rightarrow r)$
<b>Troca de Premissas</b>	$p \rightarrow (q \rightarrow r) \Leftrightarrow q \rightarrow (p \rightarrow r)$	