$7Q$ a) $p_{n+1} \leq (p_0 . p_1 ... p_n) + 1$

Como provado na Questão 2A da Lista 06, temos que o menor fator primo q de $p_1 ... p_n + 1$ é maior que p_n. Logo, podemos concluir que $p_{n+1} \leq q$.

Entretanto, q é fator de $(p_0 , p_1 ... p_n) + 1$, logo $q \leq (p_0 , p_1 ... p_n) + 1$. Logo, combinando as duas desigualdades, obtemos $p_{n+1} \leq (p_0 . p_1 ... p_n) + 1$

b) Com $p_1 = 2$, temos que:

$$p_1 \leq 2^{2^1} = 4$$

Partindo da suposição que $p_n \leq 2^{2^n}$ sempre que $n \leq (k-1)$, vou tentar mostrar que $p_k \leq 2^{2^k}$. Como já foi mostrado na letra A, temos que $p_k \leq (p_0 . p_1 ... p_n) + 1$.

Logo, usando a hipotese de indução, temos que:

$$p_k \leq (p_0 . p_1 ... p_n) + 1 \leq 2^{2^1} . 2^{2^2} ... 2^{2^{k-1}} + 1$$

$$p_k \leq (p_0 , p_1 ... p_n) + 1 \leq 2^{2 + 2^2 + ... 2^{k-1}} + 1$$

$$p_k \leq (p_0 . p_1 ... p_n) + 1 \leq 2^{2 + 2^k} + 1$$

$$p_k \leq (p_0 . p_1 ... p_n) + 1 \leq 2^{2^{k+1}}$$

Logo, a afirmação está provada