

8Q → Fazendo por redução ao absurdo:

Supondo que \sqrt{N} é uma fração, temos que: $\sqrt{N} = \frac{a}{b}$

Além disso, podemos considerar que a fração está reduzida, ou seja, temos que $\text{mdc}(a, b) = 1$

Logo, podemos concluir que $N = \frac{a^2}{b^2}$ Então: $b^2 \cdot N = a^2$

Com isso em mente, temos que N divide a^2 .

Pela Propriedade fundamental dos primos: Seja N um número primo e a e b inteiros positivos. Se N divide o produto ab então N divide a ou N divide b .

Usando a propriedade citada, temos que ela implica que N divide a .

Logo, existe um inteiro c tal que $a = N \cdot c$.

Fazendo a substituição: $b^2 \cdot N = N^2 \cdot c^2$

Cancelando o N dos dois lados, temos que N divide b^2 .

Usando novamente a propriedade fundamental dos primos, temos que N divide b . Como temos que $\text{mdc}(a, b) = 1$, sabemos que isso é impossível.

Logo, chegamos ao Absurdo. Com isso, \sqrt{N} é irracional.