Lista 08

2Q- a) $3^{2^{1024}}$ por 31 $\Rightarrow$ 28 mod(31)

Por Fermat, temos que $3^{30} \equiv 1 \pmod{31}$. Com isso em mente, é necessário calcular o resto de 2^{1024} por 30.

Podemos observar que $2^5 \equiv 32 \equiv 2 \pmod{30}$. Logo:

$$2^{10} \equiv (2^5)^2 \equiv 4 \pmod{30}$$

Continuando o raciocínio:

$$\begin{aligned}
2^{1024} &\equiv 2^{1020} . 2^4 \pmod{30} \\
&\equiv (2^{10})^{102} . 2^4 \pmod{30} \\
&\equiv (4)^{102} . 2^4 \pmod{30} \\
&\equiv (2)^{204} . 2^4 \pmod{30} \\
&\equiv (2^{10})^{20} . 2^8 \pmod{30} \\
&\equiv 2^{40} . 16 \pmod{30} \\
&\equiv (2^{10})^4 . 16 \pmod{30} \\
&\equiv (2^2)^4 . 16 \pmod{30} \\
&\equiv 2^{12} \pmod{30} \\
&\equiv 2^{10} . 2^2 \pmod{30} \\
&\equiv 2^4 \equiv 16 \pmod{30}
\end{aligned}$$

Com isso, temos que: $2^{1024} = 30 . n + 16$, para algum inteiro positivo n.

Concluindo: $3^{1024} \equiv 3^{30.n+16} \equiv (3^{30})^n . 3^{16} \pmod{31}$

Usando Fermat: $(3^{30})^n . 3^{16} \equiv 3^{16} \equiv 28 \pmod{31}$