

El mesón J/Ψ

Ramón Orlando Ruiz Olais*

Facultad de Ciencias Físico-Matemáticas, Universidad Autónoma de Sinaloa,
Avenida de las Américas y Boulevard Universitarios, Ciudad Universitaria, C.P. 80000,
Culiacán, Sinaloa, México.

Estudiar el espectro de masa de la partícula J/Ψ , y realizar un análisis estadístico de la información obtenida, utilizando MINUIT, para describir apropiadamente los eventos cerca del pico y separar estos datos del background.

1 Introducción

El J/Ψ [1] es un mesón de sabor neutro que consta de un quark charm y un quark anti-charm, esta partícula tiene una masa de 3096.9 MeV/c² y un tiempo de vida media de 7.2×10^{-21} segundos.

El descubrimiento de esta partícula en 1974 fue un suceso especial pues, la confirmación de su existencia revolucionó la física de partículas; [6] con una vida media muy peculiar pues para ser corta, parecía ser muy larga en comparación a lo que se esperaba, se hicieron suposiciones de que la partícula podría ser un mesón, después de todo hacía años que los físicos buscaban probar la existencia del quark charm, esto después de la propuesta de que los quarks debían existir a pares al igual que los leptones, idea que se dió en 1970. Así 4 años después se confirmaría la existencia del quark charm encontrando la partícula J/Ψ que estaría conformada por un quark charm y un anti-charm, posteriormente se logró determinar que la inusual vida media de esta partícula se debía a la libertad asintótica, propiedad de algunas partículas de tener interacciones que se debilitan progresivamente a distancias menores; esto se combina con el hecho de que la distancia a la que vi-

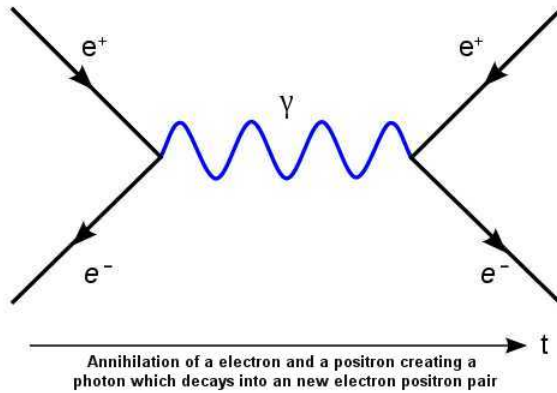
bra un objeto que interacciona fuertemente con otro es inversamente proporcional a su masa, de modo que los quarks charm y anti-charm resultaban estar más cerca que otros quarks en otras partículas, resultando en una fuerza más débil. Así Burton Richter y Samuel Ting, liderando experimentos independientes, anunciaron el mismo día su descubrimiento de la misma nueva partícula. Ting y sus colaboradores en Brookhaven llamaron a esta partícula la partícula "J", mientras que Richter y sus colaboradores en SLAC llamaron a esta partícula la partícula "psi". Siendo los dos descubrimientos de igual importancia le llamamos ahora la partícula J/Ψ . [1]

2 Espectro de masa de la partícula J/Ψ

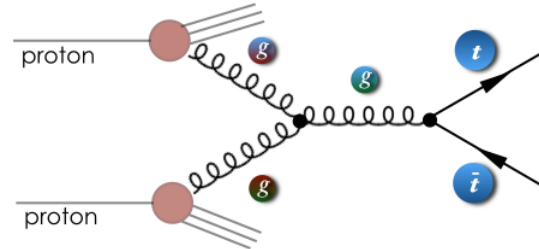
La electrodinámica cuántica es una teoría que ha sido verificada con gran precisión y nos permite predecir los ritmos de creación de partículas en las aniquilaciones electrón-positrón siempre que las partículas tengan una distribución puntual de carga eléctrica. La aniquilación electrón-positrón es producida mediante la fuerza electromagnética, esto inmediatamente produce un cuanto de energía electromagnética (un fotón), este procede a desintegrarse

*zr.ruiz23@gmail.com

tan rápidamente que es prácticamente imposible de detectar, a esto le llamamos partícula virtual.



El dibujo anterior es un diagrama de Feynman que nos ofrece una percepción visual del proceso descrito [3]. Este fotón determina las propiedades de todos los siguientes estados del sistema, si fuese posible detectar y sumar todos los números cuánticos de los estados subsiguientes obtendríamos los números cuánticos del fotón [7]. La partícula J/ψ se puede crear a partir de estos procesos, pues sus números cuánticos son precisamente los del fotón, cabe aclarar que la partícula puede ser de hecho producida a través de distintos tipos de colisión, no solo la electrón-positrón [7]. En una colisión protón-protón la producción de partículas es un proceso un poco más complejo de explicar, debido al hecho de que los protones no son partículas fundamentales, estos están compuestos por quarks, entonces al "colisionar" (intearctuar es un concepto más apropiado) lo que ocurre es que interaccionan los gluones que unen a los quarks en el protón, el resultado de la interacción depende de la energía previa a esta, de este modo es posible obtener una partícula J/ψ .



En el diagrama de Feynman anterior se puede apreciar la interacción entre dos protones [4], el resultado en el diagrama son dos quarks top, sin embargo como se mencionó anteriormente, este resultado depende de la energía de la interacción, aún así nos sirve como medio ilustrativo.

2.1 Minuit

[5] Minuit es una herramienta que se utiliza para encontrar el valor mínimo de una función multi-variable y analizar la forma de la función alrededor del mínimo, su principal aplicación está prevista para el análisis estadístico, calcular los valores de parámetros y las incertidumbres que mejor se ajustan, incluyendo las correlaciones entre los parámetros. Es apropiado para manejar problemas complicados incluyendo a los que podrían requerir orientación para encontrar la solución correcta. Para utilizar MINUIT el programa principal debe iniciar la clase `minuit` y proporcionar la función núcleo `fcn`, se deben definir los parámetros y posteriormente enviar los correspondientes comandos a `minuit` que llamará a la función `fcn` para obtener los valores solicitados. Entonces, si estudiamos un tipo de partícula cuya única propiedad observable es la masa, hay varios problemas típicos que tenemos que resolver antes de informar la medición obtenida. El detector de partículas posee una resolución finita, además es natural que las mediciones se vean entorpecidas por algo de física aleatoria o el propio error del detector con una tasa desconocida, todo esto en conjunto generará eventos falsos de fondo que se mezclarán con la señal buscada. Afortunadamente, podemos repetir el experimento tantas veces como sea necesario con el propósito de realizar un análisis estadístico de la información obtenida, es

aquí donde utilizamos MINUIT, resumimos los datos obtenidos en histogramas y ajustamos modelos para describir apropiadamente los eventos cerca del pico y separar estos datos del background.

2.2 Selección y ajuste de datos

El análisis de datos realizado está basado en una muestra tomada en 2010 en una colisión protón-protón con un centro de masa de energía de 7TeV. El ajuste utilizado para los datos mencionados es una distribución de probabilidad Gaussiana.

$$P(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2} \frac{(x - \mu)^2}{\sigma^2}\right] \quad (1)$$

dónde:

$$\mu = 3.09, \sigma = 0.04 \quad (2)$$

El proceso de detección de partículas es comúnmente modelado con procesos de Poisson, por suerte, para efectos prácticos la distribución de Poisson se aproxima a la de Gauss conforme μ crece [2].

3 Métodos estadísticos

3.1 Mínimos cuadrados

El método de los mínimos cuadrados es una forma de ver la relación entre dos variables cualitativas; el resultado del algoritmo es un número que nos dirá que tanta diferencia existe entre los valores obtenidos y los valores esperados. [5] Entonces, para comenzar a construir esta relación, sean n variables independientes

$$x_1, x_2, \dots, x_n \quad (3)$$

Y por supuesto tendremos sus respectivos valores dependientes

$$y_1, y_2, \dots, y_n \quad (4)$$

Entonces, nosotros tenemos un valor esperado $E(x)$ para cada variable, el cuál se define como la suma de la probabilidad de cada suceso aleatorio multiplicado por el valor de dicho suceso, si buscamos el error asociado a nuestro ajuste tendremos que está dado por

$$e_1 = y_1 - E(x_1), \dots, e_n = y_n - E(x_n) \quad (5)$$

Procedemos entonces a definir S como la suma del cuadrado de los errores

$$S = \sum_{i=1}^n (E_k)^2 = \sum_{i=1}^n (y_i - E(x_i))^2 \quad (6)$$

Como paso final, dividiremos ambos lados de la ecuación entre la conocida (o asumida) varianza, de modo que estandariza nuestra varianza muestral a una escala común conocida como chi-cuadrado.

$$Q^2 = \frac{S}{\sigma^2} = \frac{\sum_{i=1}^n (y_i - E(x_i))^2}{\sigma^2} \quad (7)$$

Donde el valor mínimo de la expresión (5) es el resultado que estamos buscando con este método. Principalmente la sencillez y eficacia del método son los motivos por los que se ha escogido para este ajuste, sin embargo cabe mencionar que para aplicar este método numéricamente hay que generar siempre un histograma primero, y la precisión de nuestros ajustes se verá afectada por la cantidad de bins, si se utilizan demasiados el error para cada bin aumenta considerablemente, si se utilizan muy pocos perdemos resolución. También es poco apropiado utilizar este método si vamos a trabajar con cantidades muy pequeñas de datos (menores a 1000 por decir un número), entonces, como en nuestro caso trabajamos con más de 5000 eventos podemos utilizarlo sin problema.

3.2 Máxima verosimilitud

El método de máxima verosimilitud es utilizado para ajustar un modelo y estimar sus parámetros. Si tenemos un conjunto X de N eventos independientes, la función de distribución de probabilidad está dada por

$$P(x_1, x_2, \dots, x_n | \theta) = \prod_{i=1}^n f(X_i | \theta) \quad (8)$$

Si reemplazamos la variable X con los datos observados, entonces en lugar de tener una función de distribución de probabilidad obtenemos una función de verosimilitud L

$$L(\theta) = P(X | \theta)_{X^o} \quad (9)$$

Ahora en la mayoría de los casos es conveniente meter logaritmo a la función de verosimilitud: $L(\theta) \rightarrow \ln(L(\theta))$

Entonces obtenemos

$$\prod_{i=1}^n f(X_i|\theta) \rightarrow \sum_{i=1}^N \ln f(X_i|\theta) \quad (10)$$

Finalmente podemos obtener los mejores parámetros maximizando la función de verosimilitud con log, lo que implica resolver

$$\frac{\partial \sum_{i=1}^N \ln f(X_i, \theta)}{\partial \theta} = \frac{\partial \sum_{i=1}^N \ln f(X|\theta)}{\partial \theta} = 0 \quad (11)$$

Como dato útil, si la cantidad de datos observados N es también una variable aleatoria, la función de verosimilitud extendida se puede expresar de la siguiente forma (siendo p la mayoría de las veces una distribución de Poisson).

$$L(\theta) = p(N|\theta) \prod_{i=1}^n f(X_i|\theta) \quad (12)$$

El método de máxima verosimilitud tiene excelentes propiedades estadísticas, es consistente, eficiente y robusto. A pesar de esto, este método en ocasiones falla con muestras de datos demasiado limpias, entonces para nuestra situación, sería apropiado encontrar una manera de arreglar este problema, por suerte, esto se puede hacer, extendamos las capacidades del método. [5]

3.3 Máxima verosimilitud extendida

Para los casos donde tenemos una muestra de datos más limpia es necesario hacer una modificación al método de máxima verosimilitud Modificamos la función de verosimilitud para cada evento como:

$$L_i = n_s * P_s(x_i; \mu, \sigma) + n_b * P_b(X_i; c1) \quad (13)$$

Y la solución se obtendrá al maximizar:

$$L = \frac{\exp[-(n_s + n_b)]}{N!} \prod_i L_i \quad (14)$$

donde:

$$P_s(P_b) \quad (15)$$

Es la función de densidad de probabilidad (background)

$$n_s(n_b) \quad (16)$$

Son los antecedentes

$$\mu, \sigma, c1 \quad (17)$$

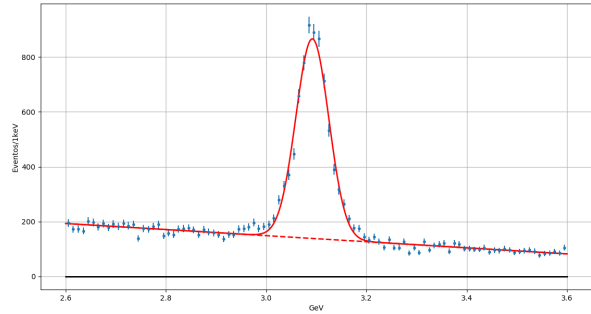
Son los parámetros a resolver por el estimador También podemos minimizar la función

$$f = -2\ln(L) = 2(n_s + n_b) - 2 \sum_i \log(L_i) \quad (18)$$

4 Resultados

En concreto tenemos 2 sets de datos "dimuon.npy" y "cleandata.npy", siendo el anterior mencionado una muestra más "limpia".

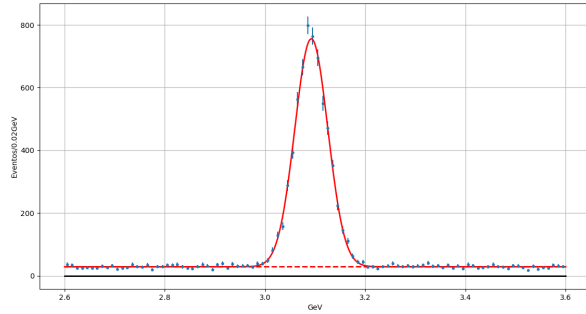
4.1 Mínimos cuadrados



Name	Value	Hesse Err	Minos Err-	Minos Err+
norm	0.598E4	0.010E4	-0.010E4	0.010E4
mean	3.092	0.001	-0.001	0.001
sigma	0.328E-1	0.006E-1	-0.006E-1	0.006E-1
c0	193.1	2.7	-2.7	2.7
c1	-111	4	-4	4

Con este método ajustamos nuestro primer set de datos y logramos obtener un "pico" en $3.09 \pm 0.6 \text{ GeV}$

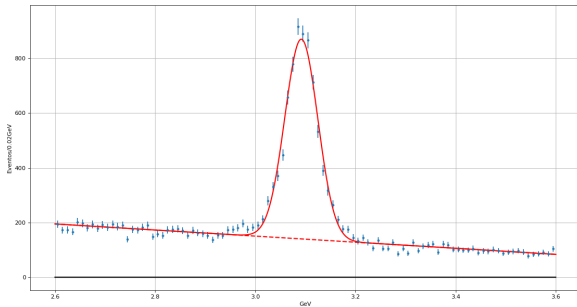
con 5984 ± 96 datos observados, podemos considerar que los resultados se ven bastante apropiados. En la tabla anterior tenemos los datos precisos entre ellos el error para cada valor calculado, esto nos permitirá comparar la precisión de los métodos (tomando en cuenta la calidad de los datos), ahora veamos como se ve el ajuste con el mismo método para los datos "limpios".



Name	Value	Hesse Err	Minos Err-	Minos Err+
norm	0.599E4	0.008E4	-0.008E4	0.008E4
mean	3.092	0.000	-0.000	0.000
sigma	0.329E-1	0.004E-1	-0.004E-1	0.004E-1
c0	29.0	1.1	-1.1	1.1
c1	0.16	1.85	-1.85	1.84

De nuevo obtenemos un resultado apropiado y naturalmente para la muestra limpia de datos tenemos un ajuste visual más agradable, pues el background se muestra casi constante, y los errores para los valores de la tabla se han visto disminuidos. Es importante recordar que la eficacia de este método aumenta conforme agregamos "bins" al cálculo numérico, entonces esperamos mejores resultados de los siguientes dos métodos.

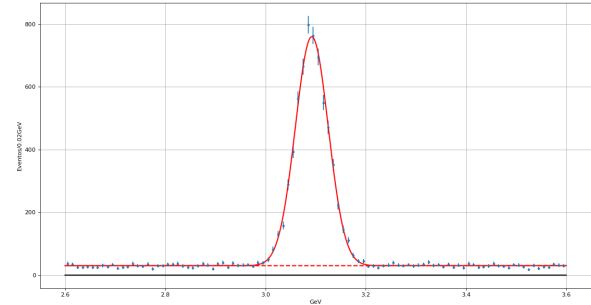
4.2 Máxima verosimilitud



Name	Value	Hesse Err	Minos Err-	Minos Err+
norm	0.602E4	0.009E4	-0.009E4	0.009E4
mean	3.092	0.001	-0.001	0.001
sigma	0.329E-1	0.006E-1	-0.006E-1	0.006E-1
c1	-2.299E-1	0.023E-1	-0.023E-1	0.024E-1

Los resultados son los esperados, de nuevo tenemos el pico en $3.09 \pm 0.6 \text{ GeV}$, la principal diferencia entre este método y el de mínimos cuadrados es que el error para c1 se redujo significativamente, fuera de eso vemos que ambos métodos ofrecieron de hecho resultados bastante precisos, ahora, como ya se mencionó anteriormente sería inapropiado hacer el ajuste para los datos limpios utilizando este método, entonces nos pasamos directamente a su versión extendida y analizamos los resultados.

4.3 Maxima verosimilitud extendida



Name	Value	Hesse Err	Minos Err-	Minos Err+
ns	0.600E4	0.008E4	-0.008E4	0.008E4
nb	3000	70	-60	60
mean	3.092	0.000	-0.000	0.000
sigma	0.328E-1	0.004E-1	-0.004E-1	0.004E-1
c1	0.007	0.068	-0.056	0.084

Esta último ajuste parece ser de hecho el mejor, lo que no es sorprendente si consideramos que se realizó con el método más preciso y se utilizó una muestra de datos bastante limpia.

5 Conclusiones

Los resultados obtenidos prueban que se logró el objetivo inicial de obtener la masa de la partícula J/Ψ con un margen de error bastante admisible.

References

- [1] Aubert, J.; et al. (1974). "Experimental Observation of a Heavy Particle J". *Physical Review Letters*. 33 (23): 1404–1406.
- [2] Kyle Cramer "Practical Statistics for Particle Physics" New York University
- [3] Bill Gabella "Particle Physics also High-Energy Physics also (maybe) the Theory of Fundamental Particles" QuarkNet 2018
- [4] <http://www.thomasgmccarthy.com/an-introduction-to-collider-physics-iii>
- [5] Kai Feng Chen "Introduction to Numerical Analysis" Lecture 3-6 2020 National Taiwan University
- [6] <https://www.nobelprize.org/prizes/physics/1976/press-release>
- [7] Pedro Pascual. "Partículas elementales. Quarks, leptones y unificación de fuerzas". Editorial "Libros de investigación y ciencia" Pag. 145.