(1) Problème de Poisson aux conditions de Dirichlet au bord

Soit $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ un ouvert. Et $f \in L^2(\Omega)$.

Considerons le problème de Poisson : $\begin{cases} -\Delta u = f & \text{sur } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}$ (1.a)

On dit que $u \in H_0^1(\Omega)$ est une solution faible du problème (1.a) si

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v = \int_\Omega f v, \qquad \forall v \in H_0^1(\Omega). \qquad (1.b)$$

Ce problème peut être écrit comme

$$\langle u, v\rangle_{H_0^1(\Omega)} = T_f v \quad \forall \in H_0^1(\Omega), \quad \text{avec } \langle u,v\rangle_{H_0^1(\Omega)} = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \quad \text{et} \quad T_f v = \int_\Omega f v.$$

Grace aux inégalités de Cauchy Swartz (1**) et de Pointcarée (1) on montre que $T_f \in \mathcal{L}(H_0^1(\Omega))$ et que $\langle \cdot,\cdot\rangle_{H_0^1(\Omega)}$ est un produit scalaire.

Le théorème de représentation de Riesz (1*) donne l'éxistance et unicité de la solution a (1.b).

L'inégalité de Pointcarée dans (1.b) avec $v = u$ donne

$$C^2 \|u\|^2_{L^2(\Omega)} \leqslant \|u\|^2_{H_0^1(\Omega)} = \int_\Omega f u \leqslant \int_\Omega |f u| \leqslant \|f\|_{L^2} \|u\|_{L^2}.$$

Et donc nous avons l'estimation.

$$\|u\|_{L^2} \leqslant \frac{1}{C} \|f\|_{L^2}$$

C'est à dire que que u dépend continuement des donnés f.

Régularité :

i) Si Ω est de classe C^2 et $f \in L^2(\Omega)$ alors $u \in H^2(\Omega)$.

ii) Si Ω est de classe C^∞ et $f \in H^m(\Omega)$ alors $u \in H^{m+2}(\Omega)$.

iii) Si Ω est C^∞, $f \in H^m(\Omega)$ et $m > \frac{N}{2}$ alors $u \in C^2(\bar{\Omega})$ et donc u est une solution classique.

Remarques :

- Les preuves de ses résultats de régularité sont techniques et se basent sur le lemme de Nirenberg Castor p.69. Celui ci a pour essence l'aproximation des dérivés faibles de u, $D_1 u$, $D_2 u$ par des taux d'accroissement $\psi_h(x_1, x_2) = \frac{u(x_1, x_2+h) - u(x_1, x_2)}{h}$ pour lesquelles on peut appliquer une formule d'intégration par parties.

- Les inégalités de Sobolev générales (10) permetent de récuperer de la diferentiabilitée classique a partir de la diferentiabilitée faible. En effet $W^{k,p}(\Omega) \hookrightarrow C^{k-[\frac{N}{p}]-1,\gamma}(\Omega)$ si $k > \frac{N}{p}$, avec $1 > \gamma > 0$ donnée par le théorème 2.35 AFAEDPs Alberto Saldaña. En particulier si Ω est C^∞ et $f \in C^\infty(\bar{\Omega})$ alors $u \in C^\infty(\bar{\Omega})$.

Positivité de la solution faible.