Ejemplos en Geometría Diferencial

Examen General Enero 2024

Ejemplo ①: ($\sqrt{\ }$ matricial)

Sea $\phi: M_n(\mathbb{R}) \longrightarrow M_n(\mathbb{R})$
$\quad A \longmapsto A^2$

Sea $H, A \in M_n(\mathbb{R})$,

$\phi(A+H) = A^2 + AH + HA + \underbrace{H^2}_{\|H\|\epsilon(H)}$ con $\epsilon(H) = \frac{H^2}{\|H\|} \xrightarrow[\|H\|\to 0]{} 0$

$\Rightarrow d\phi_A(H) = AH + HA$

$d\phi_I(H) = 2H$ es un isomorfismo.

Por TIL, existen $\mathcal{U}, \mathcal{V}$ vecindades de I en $M_n(\mathbb{R})$ tq

$\phi_{|\mathcal{U}} \longrightarrow \mathcal{V}$ es un C^1 difeomorfismo

Sea $\psi_{|\mathcal{V}} = \phi^{-1}_{|\mathcal{U}}$.

Definimos $\sqrt{A} = \psi_{|\mathcal{V}}(A)$, y se tiene que

$(\sqrt{A})^2 = \phi_{|\mathcal{U}}(\psi_{\mathcal{V}}(A)) = A \quad \forall A \in \mathcal{U}$.

Ejemplo 2: (Las coordenadas polares definen un C^1-difeo).

Sea $f: (0,+\infty) \times (-\pi,\pi) \longrightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{(x,y) \mid x \leq 0\}$.
$\quad (r,\theta) \longrightarrow (r\cos\theta, r\operatorname{sen}\theta)$

$$df_{(r,\theta)}(h,k) = h\begin{pmatrix}\cos\theta \\ \operatorname{sen}\theta\end{pmatrix} + kr\begin{pmatrix}-\operatorname{sen}\theta \\ \cos\theta\end{pmatrix}$$

$$\operatorname{Jac} f(r,\theta) = \det\begin{pmatrix}\cos\theta & -r\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & r\cos\theta\end{pmatrix} = r \neq 0$$

$\therefore df_{(r,\theta)}$ es un isomorfismo.

Como f es biyectiva C^1, el teorema de inversión global asegura que f es un C^1 difeo.

Ejemplo ③ (Aplicación de TFI para estabilidad de raiz de un polinomio).

Sea $p(x) = x^3 + a_0 x^2 + b_0 x + c_0$ y x_0 raiz simple de p, es decir $p(x_0) = 0$ $p'(x_0) \neq 0$.

Sea $\varphi(a,b,c,x) = x^3 + ax^2 + bx + c$

$$\varphi(a_0, b_0, c_0, x_0) = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\varphi(a_0, b_0, c_0, x_0) = p'(x_0) \neq 0$$

$\Rightarrow$ existe una vecindad $\mathcal{U}$ de (a_0, b_0, c_0) y $f : \mathcal{U} \to \mathbb{R}$

$$\varphi(a,b,c,x) = 0 \iff f(a,b,c) = x$$

Es decir x es raiz de $p(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ sii

$x = f(a,b,c)$.

Por lo tanto para cualesquiera (a,b,c) cerca de (a_0, b_0, c_0)

$p(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ tiene una única raiz cercana a x_0

que depende diferenciablemente de los parametros a, b, c.

Ejemplo 4 (La diferencial del determinante)

$$\det : M_n(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$M \longmapsto \det M$$

$$M = (M_1, \dots, M_n) \qquad \text{con} \quad M_k \in M_{n\times 1}.$$

$$\det(M+H) = \det(M_1+H_1, \dots, M_n+H_n)$$
$$= \sum_{\alpha \in 2^k} f_\alpha(H)$$
$$= \det(M_1, \dots, M_n)$$
$$+ \det(M_1+H_1, M_2, \dots, M_n) + \det(M_1, M_2+H_2, \dots, M_n)$$
$$+ \dots + \det(M_1, \dots, M_n+H_n)$$
$$+ \sum_{\substack{\alpha \in 2^k \\ |\alpha| \geq 2}} f_\alpha(H) \quad , f_\alpha(H) = \det(M_1 + \alpha(1)H_1, \dots, M_n + \alpha(n)H_n)$$

$$\varepsilon(H) = \frac{1}{\|H\|} \sum_{\substack{\alpha \in 2^k \\ |\alpha| \geq 2}} f_\alpha(H)$$

$$2^k = \{ F : \{1, \dots, k\} \longrightarrow \{0,1\} \}$$

$$|\alpha| = \# \{ i \mid \alpha(i) \neq 0 \}$$

$$\|H\| = \left(\sum \|H_i\|^2\right)^{1/2} \geq \left(\|H_i\|^2 + \|H_j\|^2\right)^{1/2}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\|H\|} \leq \frac{1}{(\|H_i\|^2 + \|H_j\|^2)^{1/2}}$$

$$(a-b)^2 \geq 0$$
$$a^2+b^2 \geq 2ab \geq ab$$
$$|ab| \leq a^2+b^2$$
$$\Rightarrow \frac{|a||b|}{\sqrt{a^2+b^2}} \leq \frac{a^2+b^2}{\sqrt{a^2+b^2}} = \sqrt{a^2+b^2}$$

$$|\varepsilon(H)| \leq \frac{\|H_i\| \|H_j\|}{\|H\|} \sum_{\beta \in 2^k} |f_\beta(H)|$$

$$\longrightarrow 0, \quad \|H\| \to 0.$$

$$\therefore \ d\det_A(H) = \det(M_1+H_1, \dots, M_n) + \dots + \det(M_1, \dots, M_n + H_n).$$

Como $d\det_A(A) = \sum_{i=1}^{n} \det A$

$= n \neq 0$

Ent $d\det_A$ es supra y por lo tanto

$SL_n(\mathbb{R}) = \{M \in M_n(\mathbb{R}) \mid \det M = 1\}$

es una subvariedad de dimension n^2-1, es decir una hipersuperficie.

Ejemplo 5 (La subvariedad $O_n(\mathbb{R})$)

$$O_n(\mathbb{R}) = \{A \in M_n(\mathbb{R}) \mid A^tA = \mathbb{1}_n\}$$

Sea
$$\begin{aligned} f : M_n(\mathbb{R}) &\longrightarrow S_n(\mathbb{R}) \\ A &\longmapsto A^tA - \mathbb{1}_n \end{aligned}$$

$$f(A+H) = (A+H)^t(A+H) - \mathbb{1}_n$$

$$= (AA^t - \mathbb{1}_n) + A^tH + H^tA + H^tH$$

$$\therefore\ df_A(H) = \underbrace{A^tH + H^tA}_{\in S_n(\mathbb{R}) = \{\text{matrices simétricas}\}}$$

Sea $S \in S_n(\mathbb{R})$, sea $H = \frac{1}{2}AS$

$$df_A(H) = A^t\left(\frac{1}{2}AS\right) + \frac{1}{2}(AS)^tA$$

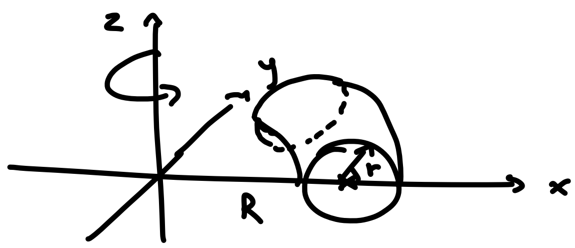
$$= \frac{1}{2}S + \frac{1}{2}S^t = S$$

$\therefore\ df_A$ es suprayectiva, así

$O_n(\mathbb{R})$ es una subvariedad de $M_n(\mathbb{R})$ de dimensión

$$n^2 - \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$$

Ejemplo ⑥: (El 2-toro en $\mathbb{R}^3$)



$$\begin{cases} x = R + r\cos t \\ y = 0 \\ z = r\,\mathrm{sen}\,t \end{cases}$$

$$\psi(t,\theta) = \mathrm{Rot}_\theta \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos\theta & -\mathrm{sen}\,\theta & 0 \\ \mathrm{sen}\,\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos\theta\,(R + r\cos t) \\ \mathrm{sen}\,\theta\,(R + r\cos t) \\ r\,\mathrm{sen}\,t \end{pmatrix}$$

$$\partial_t\psi = \begin{pmatrix} -r\cos\theta\,\mathrm{sen}\,t \\ -r\,\mathrm{sen}\,\theta\,\mathrm{sen}\,t \\ r\cos t \end{pmatrix}, \quad \partial_\theta\psi = \begin{pmatrix} -\mathrm{sen}\,\theta\,(R + r\cos t) \\ \cos\theta\,(R + r\cos t) \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in T_{(t,\theta)}\Sigma \iff \det\begin{pmatrix} x & \partial_t\psi & \partial_\theta\psi \\ y & & \\ z & & \end{pmatrix} = 0$$

$$\iff \det\begin{pmatrix} x & \cos\theta\,\mathrm{sen}\,t & -\mathrm{sen}\,\theta \\ y & \mathrm{sen}\,\theta\,\mathrm{sen}\,t & \cos\theta \\ z & -\cos t & 0 \end{pmatrix} = 0$$

$$\iff x\cos\theta\cos t + y\,\mathrm{sen}\,\theta\cos t + z\,\mathrm{sen}\,t = 0$$

es la ecuación del plano tangente al toro.

Ejemplo ⑥: (El espacio tangente a $O_n(\mathbb{R})$ en I es

Recordemos que $O_n(\mathbb{R}) = f^{-1}(\{0\})$ con
$$f : M_n(\mathbb{R}) \longrightarrow S_n(\mathbb{R}), \quad A \longmapsto A^tA - \mathbb{1}_{n\times n}$$

y $df_A(H) = A^tH + H^tA$

$$T_I O_n(\mathbb{R}) = \mathrm{Ker}\, df_I = \{M \in M_n(\mathbb{R}) \mid M + M^t = 0\} = \{\text{matrices antisimétricas}\}$$

Ejemplo 7:

$$SL_n(\mathbb{R}) = \det^{-1}(\{1\})$$

$$\Rightarrow T_I SL_n(\mathbb{R}) = \ker d\det_{\mathbb{1}}$$

pero $d\det_{\mathbb{1}}(H) = tr\left(com(\mathbb{1})^t H\right)$,

$$= tr(H)$$

$$\Rightarrow T_I SL_n(\mathbb{R}) = \{ M \in M_n(\mathbb{R}) \mid tr(M) = 0 \}$$

Así, el espacio tangente a $SL_n(\mathbb{R})$ en I es un hyperplano.

Ejemplo 1^* (Isomorfismo de haces vectoriales).

Mostremos que $TS^1 \simeq S^1 \times \mathbb{R}$

$$TS^1 = \{ \operatorname{span}\{(-\operatorname{sen}\theta, \cos\theta)\} \mid \theta \in [0, 2\pi] \}$$

Definimos
$$L_\theta : \operatorname{span}\{(-\operatorname{sen}\theta, \cos\theta)\} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$t(-\operatorname{sen}\theta, \cos\theta) \longmapsto t$$

L_θ es un isomorfismo pues $(-\operatorname{sen}\theta, \cos\theta) \neq (0,0)$ $\forall\theta$.

Además $\operatorname{mat}[L_\theta] = 1$

Así L_θ varía de forma suave

$\therefore$ $TS^1 \simeq S^1 \times \mathbb{R}$.

Ejemplo 2* (La derivada de la proyección).

Sea $\pi: M \times N \longrightarrow M$
$(x,y) \longmapsto x$.

Sean $(x,y) \in M$ y $[\gamma] \in T_{(x,y)} M \times N$.

$$\gamma(t) = (\underbrace{\gamma_1(t)}_{\in M}, \underbrace{\gamma_2(t)}_{\in N})$$

$$d\pi_{(x,y)}([\gamma]) = [\pi \circ \gamma] = [\gamma_1]$$ pues

$$(\pi \circ \gamma)(t) = \gamma_1(t)$$

$$\therefore \quad d\pi_{(x,y)}([\gamma]) = [\gamma_1]$$