Análisis Funcional Aplicado a EDPs (2024-1)

Google Classroom: kmk6w62
Telegram: `https://t.me/+bOM71NAzRMI2MDQx`

Profesor: Dr. Alberto Saldaña
Correo: alberto.saldana@im.unam.mx
Telegram: AlbertoSaldana

Tarea 1

Instrucciones: Resuelve los siguientes ejercicios justificando cuidadosamente tu respuesta. Sube tus respuestas escritas en LaTeX usando la plataforma de Google Classroom a más tardar el **lunes 21 de agosto**.

Ejercicios:

1. (2 puntos) Sea E un espacio normado. Demuestra la Proposición 1.6(c): La suma en E y la multiplicación por un escalar son aplicaciones continuas.

   Consideremos las aplicaciones: $+ : E \times E \to E$, $(x, y) \mapsto x + y$ y $\cdot : \mathbb{R} \times E \to E$, $(\lambda, x) \mapsto \lambda x$. Para la continuidad de la primera tenemos que:

   $$\|x + y\|_E \leq \|x\|_E + \|y\|_E =: \|(x, y)\|_{E\times E}\,.$$

   Como "+" es lineal, la ecuación anterior preuba que "+" es 1-Lipschitz continua. Para la continuidad de "$\cdot$", sea $\lambda \in \mathbb{R}$ fija. Entonces $\cdot_\lambda : E \to E$, $x \mapsto \lambda x$, es lienal y como

   $$\|\lambda x\|_E = |\lambda|\,\|x\|_E\,,$$

   "$\cdot_\lambda$" es Lipschitz continua. Análogamente para $x \in E$ fija, $\cdot_x : \mathbb{R} \to E$, $\lambda \mapsto \lambda x$, es lienal y por la ecuación anterior "$\cdot_x$" es Lipschitz continua. Así "$\cdot$" es continua con respecto a sus dos variables y por lo tanto es continua.

2. Sea E un espacio vectorial con producto escalar $(\cdot, \cdot)$.

   (a) (2 Puntos) Supongamos que $(x_n) \subseteq E$ y $x \in E$. Probemos que

   $$(x, x_n) \to (x, x) \text{ y } \|x_n\| \to \|x\|$$

   implica que $x_n \to x$.

   Por la definición de la norma en un espacio con producto escalar y las propiedades básicas de este se tiene que

   $$\|x - x_n\|^2 = (x, x) - 2(x, x_n) + (x_n, x_n) \to 0,$$

   es decir $x_n \to x$.

(b) (2 Puntos) Supongamos que $(x_n), (y_n) \subseteq B_1$ y $(x_n, y_n) \to 1$. Probemos que $\|x_n - y_n\| \to 0$.

$$\|x_n - y_n\|^2 = (x_n, x_n) - 2(x_n, y_n) + (y_n, y_n) = 2 - 2(x_n, y_n) \to 0.$$

3. Sea $\Omega := (-1, 1)$.

(a) (2 puntos) Sea $u(x) := |x|$. Demostremos que u es diferenciable débilmente sobre Ω.

Definimos $v(x) = -\mathbb{1}_{(-1,0)}(x) + \mathbb{1}_{(0,1)}(x)$, donde $\mathbb{1}_A$ es la indicadora de $A \subseteq \Omega$. Sea $\phi \in C_c^\infty(\Omega)$. Integrando por partes y notando que $\phi(-1) = \phi(1)$, se tiene que

$$\begin{aligned}
&\int_{-1}^{1} v(x)dx = -\int_{-1}^{0} \phi(x)dx + \int_{0}^{1} \phi(x)dx \\
&= -\left([x\phi(x)]_{-1}^{0} - \int_{-1}^{0} x\phi'(x)dx \right) + \left([x\phi(x)]_{0}^{1} - \int_{0}^{1} x\phi'(x)dx \right) \\
&= -\left(-\int_{-1}^{0} x\phi'(x)dx + \int_{0}^{1} x\phi'(x)dx \right) \\
&= -\int_{-1}^{1} |x|\, \phi'(x)dx.
\end{aligned}$$

Así v cumple la definición de derivada debil y por unicidad se tiene que u es debilmente diferenciable y $v = u'$.

(b) (2 puntos) Sea $u \colon \Omega \to \mathbb{R}$ definido por

$$u(x) := \begin{cases} 1, & x > 0, \\ -1, & x < 0. \end{cases}$$

Demostremos que u no es es diferenciable débilmente en Ω.

Supongamos que u es debilmente diferenciable en Ω y que $v = u'$. Entonces se tendría que

$$\int_{-1}^{1} u(x)\phi'(x)dx = \int_{-1}^{1} v(x)\phi(x)dx, \;\; \forall \phi \in C_0^\infty(\Omega).$$

Pero

$$\int_{-1}^{1} u(x)\phi'(x)dx = -\int_{-1}^{0} \phi'(x)dx + \int_{0}^{1} \phi'(x)dx = -[\phi]_{-1}^{0} + [\phi]_{0}^{1} = 2\phi(0).$$

Es decir que

$$\phi(0) = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} v(x)\phi(x)dx, \ \ \forall \phi \in C_c^\infty(\Omega). \tag{1}$$

Veamos que esto es imposible. Notemos que $u_{|(-1,0)}$ es debilmente diferenciable pues es diferenciable en el sentido clásico. Admás su derivada está dada por $u' \equiv 0$ en $(-1, 0)$. Lo mismo sucede con $u_{|(0,1)}$. Si u fuese debilmente diferenciable, por unicidad de la derivada debil se tendria que $u' \equiv 0$ en Ω. Sea $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$, tal que $\phi(0) \neq 0$. Entonces por (1)

$$\phi(0) = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} u'(x)\phi(x)dx = 0,$$

lo cual es una contradición. Por lo tanto u no es debilmente diferenciable.

Si tienes cualquier duda sobre la tarea, no dudes en escribirla en el **chat de Telegram**.