**MECÁNICA ANALÍTICA**

**Tarea 5** Semestre 2025-1 Prof. Renato Calleja

**Ejercicio 1.** Demostrar que los momentos principales de inercia $I_1$, $I_2$, $I_3$ de cualquier cuerpo satisfacen las desigualdades del triángulo

$$I_1 \leq I_2 + I_3, \qquad I_2 \leq I_3 + I_1, \qquad I_3 \leq I_1 + I_2,$$

y que la igualdad se da si y solo si el cuerpo es plano.

**Ejercicio 2.** Encontrar los momentos principales de inercia (respecto del centro de masa) para los siguientes cuerpos homogéneos :

(a) Un cilindro circular de radio $R$ y altura $h$.

(b) Un cono circular de altura $h$ y base circular de radio $R$.

(c) Un elipsoide triaxial con semi-ejes $a$, $b$, $c$.

**Ejercicio 3.** Considerar las ecuaciones de Euler para un cuerpo rígido

$$\dot{M}_1 = a_1 M_2 M_3, \qquad \dot{M}_2 = a_2 M_1 M_3, \qquad \dot{M}_3 = a_3 M_1 M_2,$$

donde

$$a_1 = \frac{I_2 - I_3}{I_2 I_3}, \qquad a_2 = \frac{I_3 - I_1}{I_1 I_3}, \qquad a_3 = \frac{I_1 - I_2}{I_1 I_2},$$

bajo el supuesto de que $I_1 > I_2 > I_3$.

Durante todo el ejercicio suponga que las condiciones iniciales son tales que la energía

$$E = \frac{1}{2}\left(\frac{M_1^2}{I_1} + \frac{M_2^2}{I_2} + \frac{M_3^2}{I_3}\right)$$

es igual a $\frac{||\mathbf{M}||^2}{2I_2}$.

(i) Demostrar que las trayectorias $(M_1(t), M_2(t), M_3(t))$ del sistema están contenidas en dos círculos máximos de la esfera de momento angular $||\mathbf{M}||$ constante que pasan por el eje $M_2$ y están contenidos en los planos

$$M_3 = \pm M_1 \sqrt{\frac{a_3}{a_1}}.$$

(ii) Obtenga expresiones explícitas para $M_1(t), M_2(t), M_3(t)$ suponiendo que $M_2(0) = 0$.

**Ejercicio 4.** Sean $L$ y $B$ matrices $n \times n$ dependientes del tiempo y tales que

$$\dot{L} = BL - LB = [B, L].$$

Las matrices $L$ y $B$ forman un *par de Lax*. Seguir los siguientes pasos para demostrar que los valores propios de $L(t)$ son constantes de movimiento.

(a) Demostrar que cualquier solución invertible $U(t)$ de la ecuación

$$\frac{dU}{dt} = BU$$

satisface

$$\frac{d}{dt}(U^{-1} L U) = 0.$$

(b) Utilizar la solución particular que tiene condición inicial $U(0) = Id$ para demostrar que $L(t)$ es conjugado a $L(0)$.

(c) Concluir que las funciones

$$F_k = Tr(L^k)$$

son constantes de movimiento.

Dado que los valores propios de $L$ son constantes de movimiento, la evolución de la ecuación $\dot{L} = [B, L]$ a veces se llama una *deformación iso-espectral*.

**Ejercicio 5.**

(a) Demostrar que las ecuaciones de Euler del cuerpo rígido se pueden escribir en forma de par de Lax donde

$$L = \begin{pmatrix} 0 & -M_3 & M_2 \\ M_3 & 0 & -M_1 \\ -M_2 & M_1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & \Omega_3 & -\Omega_2 \\ -\Omega_3 & 0 & \Omega_1 \\ \Omega_2 & -\Omega_1 & 0 \end{pmatrix},$$

y donde

$$M_1 = I_1\Omega_1, \qquad M_2 = I_2\Omega_2, \qquad M_3 = I_3\Omega_3,$$

con $I_1, I_2, I_3$ los momentos principales de inercia del cuerpo.

(b) Demostrar que a partir de los valores propios de $L$ únicamente se puede recuperar la integral de momento angular

$$M_1^2 + M_2^2 + M_3^2$$

pero que no es posible obtener la integral de energía.

(c) Encontrar una matriz diagonal $J$ tal que las relaciones

$$M_1 = I_1\Omega_1, \qquad M_2 = I_2\Omega_2, \qquad M_3 = I_3\Omega_3,$$

se pueden expresar como $L = -JB - BJ$.

(d) Demostrar que para cualquier valor del parámetro $\lambda \in \mathbb{R}$ las ecuaciones de Euler para un cuerpo rígido son equivalentes al *par de Lax con parámetro* descubierto por Manakov (1976) :

$$\frac{d}{dt}(L + \lambda J^2) = [B - \lambda J, L + \lambda J^2].$$

(e) Argumentar que las funciones

$$F_k = Tr((L + \lambda J^2)^k)$$

son constantes de movimiento. Más aún, son polinomios en $\lambda$ cuyos coeficientes también son constantes de movimiento.

Verificar que el coeficiente constante de $F_2$ es igual a

$$-2(M_1^2 + M_2^2 + M_3^2)$$

y que el coeficiente de $\lambda$ de $F_3$ es igual a

$$-\frac{3}{2}\left(I_1^2 + I_2^2 + I_3^2\right)(M_1^2 + M_2^2 + M_3^2) + 3I_1I_2I_3\left(\frac{M_1^2}{I_1} + \frac{M_2^2}{I_2} + \frac{M_3^2}{I_3}\right)$$

Es decir, a partir del par de Lax con parámetro de Manakov es posible obtener las integrales de momento y de energía.

**Ejercicio 6.** (Bono) La posición y velocidad de un cuerpo rígido están determinadas por puntos en la variedad 6 dimensional, $T\,SO(3)$. Las primeras integrales $m_1$, $m_2$, $m_3$ y $E$, son cuatro funciones en $T\,SO(3)$ independientes. De esta manera, las cuatro funciones,

$$m_1 = C_1, \quad m_2 = C_2, \quad m_3 = C_3, \quad E = C_4 > 0,$$

definen una subvariedad 2 dimensional, $V_c$, en la variedad 6 dimensional, $T\,SO(3)$.

Demuestra que las componentes conexas de $V_c$ son toros y que se pueden escoger coordenadas $\varphi_1$, $\varphi_2$ mod $2\pi$ en $V_c$ tales que

$$\dot{\varphi}_1 = \omega_1(c), \quad \dot{\varphi}_2 = \omega_2(c)$$

Sugerencia : Tomar la fase de la variación periódica de $\mathbf{M}$ como $\varphi_1$.

# Tarea 5

**Ejercicio 1:** Demostrar que los momentos principales de inercia $I_1, I_2, I_3$ de cualquier cuerpo rígido satisfacen las desigualdades triangulares

$$I_1 \leq I_2 + I_3 \quad , \quad I_2 \leq I_1 + I_3 \quad , \quad I_3 \leq I_1 + I_2$$

y que la igualdad se da si y solo si el cuerpo es plano.

**Dem:** Consideremos un cuerpo rígido formado por las partículas $\{q_1, \dots, q_n\} \subseteq \mathbb{R}^3$.
Sabemos del curso, (ver por ejemplo Arnold. Corolario pagina 139) que en la base $\beta$ formada por los ejes principales de inercia, los momentos de inercia, están dados por

$$I_1 = \sum_{i=1}^{n} (y_i^2 + z_i^2) m_i \quad , \quad I_2 = \sum_{i=1}^{n} (x_i^2 + z_i^2) m_i \quad , \quad I_3 = \sum_{i=1}^{n} (x_i^2 + y_i^2) m_i$$

donde $q_i = \begin{pmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{pmatrix}$ son las coordenadas de $q_i$ en la base $\beta$.

Con estas expresiones, es claro que se cumplen las desigualdades del triángulo mensionadas.
Supongamos ahora que se da alguna de las igualdades, por ejemplo

$$I_1 = I_2 + I_3 \quad , \text{ es decir}$$

$$\sum_{i=1}^{n} (y_i^2 + z_i^2) m_i = \sum_{i=1}^{n} (2x_i^2 + y_i^2 + z_i^2) m_i \quad , \text{ así}$$

$\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = 0$ y por lo tanto el cuerpo está contenido en el plano $x = 0$.

**Observación:** En el caso de cuerpos continuos la prueba es análoga remplazando las sumas por integrales y las masas por la función de densidad de masa.

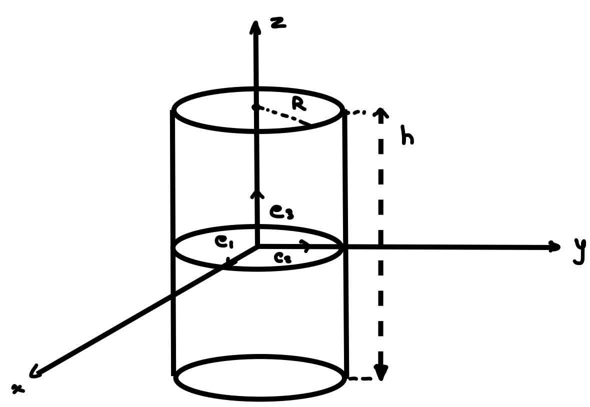
Ejercicio 2 : Encontrar los momentos principales de inercia de los siguientes cuerpos homogéneos.

a) Un cilindro de radio $R$ y altura $h$.

b) Un cono circular de altura $h$ y con base de radio $R$.

c) Un elipsoide triaxial con semiejes $a, b, c$.

a) Consideremos el referencial ortonormal $\{O, e_1, e_2, e_3\}$ ubicado en el centro de masa del cilindro, tal que $e_3$ genera al eje vertical del cilindro y el plano span$\{e_2, e_3\}$ generado por $e_2$ y $e_3$ corta el cilindro ortogonalmente.




Escribamos al tensor de inercia en esta base. Sean $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = x e_1 + y e_2 + z e_3$ las coordenadas en esta base.

Notemos que el cilindro es simétrico con respecto a los planos $xy$, $xz$, $yz$, por lo tanto

$$I_{xy} = I_{yx} = -\int_C \rho\, xy \, dx dy dz = 0$$

$$I_{yz} = I_{zy} = -\int_C \rho\, zy \, dx dy dz = 0$$

$$I_{zx} = I_{xz} = -\int_C \rho\, xz \, dx dy dz = 0,$$

donde $C$ denota el volumen ocupado por el cilindro.

Por otro lado

$$I_{xx} = \int_C (y^2 + z^2)\, dx dy dz$$

$$= \rho \int_{-R}^{R} \int_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} y^2 + z^2 \, dz\, dy\, dx$$

$$= \rho \int_{-R}^{R} \int_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} \left[ z y^2 + \frac{1}{3} z^3 \right]_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} dy\, dx$$

$$= \rho \int_{-R}^{R} \int_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} h y^2 + \frac{h^3}{12}\, dy\, dx$$

$$= \rho \int_{-R}^{R} \left[ \frac{h}{3}y^3 + y\frac{h^3}{12} \right]_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} dx$$

$$= \rho \int_{-R}^{R} \frac{2}{3}h\sqrt{R^2-x^2}\,(R^2-x^2) + 2\sqrt{R^2-x^2}\,\frac{h^3}{12}\, dx \,,$$

$$= \rho \int_{0}^{\pi} \frac{2}{3}h\, R^4 \operatorname{sen}^4\theta \, d\theta + \rho\frac{h^3}{6}\int_0^{\pi} R^2 \operatorname{sen}^2\theta \, d\theta$$

$$= \rho \frac{2}{3}hR^4 \frac{3\pi}{8} + \rho\frac{h^3}{6}R^2\frac{\pi}{2}$$

Recordemos que $\rho = \frac{m}{V}$ donde $m$ es la masa total del cilindro y $V = \pi R^2 h$ es su volumen

Así

$$I_{xx} = \frac{m}{\cancel{\pi R^2 h}}\frac{2}{\cancel{3}}\cancel{h}R^{\cancel{4}\,2}\frac{\cancel{3\pi}}{8} + \frac{m}{\cancel{\pi R^2 h}}\frac{h^{\cancel{3}\,2}}{6}\cancel{R^2}\frac{\cancel{\pi}}{2}$$

$$= \frac{1}{4}mR^2 + \frac{1}{12}mh^2$$

$$\boxed{I_{xx} = \frac{1}{4}mR^2 + \frac{1}{12}mh^2} \qquad (1)$$

Notemos que por la simetría vertical del cilindro $I_{xx} = I_{yy}$, es decir

$$\boxed{I_{yy} = \frac{1}{4}mR^2 + \frac{1}{12}mh^2} \qquad (2)$$

Ahora consideremos la componente $I_{zz}$ del tensor de inercia.

$$I_{zz} = \int_C \rho(x^2+y^2)\, dx\,dy\,dz$$

$$= \rho\int_{-h/2}^{h/2}\int_{D(0,R)} x^2+y^2 \; dx\,dy\,dz$$

$$= \rho\int_{-h/2}^{h/2}\int_0^{2\pi}\int_0^R r^2\, r\; dr\,d\theta\,dz$$

<u>Cuentos auxiliares</u>

$x = R\cos\theta \qquad dx = -R\operatorname{sen}\theta\, d\theta$

$R^2 - x^2 = R^2\operatorname{sen}^2\theta$

$$\int_0^{\pi}\operatorname{sen}^4(\theta)\,d\theta =$$

$\cos(x+y) = \cos(x)\cos(y) - \operatorname{sen}(x)\operatorname{sen}(y)$

$\operatorname{sen}(x+y) = \cos(x)\operatorname{sen}(x) + \operatorname{sen}(x)\cos(y)$

$$\cos(2x) = \cos^2(x) - \operatorname{sen}^2(x) = 1 - \operatorname{sen}^2 - \operatorname{sen}^2 = 1 - 2\operatorname{sen}^2(x) \qquad = 2\cos^2(x) - 1$$

$$\operatorname{sen}^2(x) = \frac{1-\cos(2x)}{2} \qquad \cos^2(x) = \frac{1+\cos(2x)}{2}$$

$$\operatorname{sen}^4(x) = \left(\frac{1-\cos(2x)}{2}\right)^2 = \frac{1-2\cos(2x)+\cos^2(2x)}{4}$$

$$= \frac{1}{4} - \cos(2x) + \frac{1}{8}(1+\cos(2x))$$

$$= \frac{3}{8} - \frac{3}{8}\cos(2x) = \frac{3}{8}(1-\cos(2x))$$

$$\int_0^{\pi}\operatorname{sen}^2(\theta)\,d\theta = \frac{1}{2}\int_0^{\pi} 1-\cos(2\theta)\, d\theta$$

$$= \frac{\pi}{2} - \frac{1}{4}\left[\operatorname{sen}(2\theta)\right]_0^{\pi}$$

$$= \frac{\pi}{2}$$

$$\int_0^{\pi}\operatorname{sen}^4(\theta)\,d\theta = \frac{3}{8}\int_0^{\pi} 1-\cos(2\theta)\, d\theta$$

$$= \frac{3\pi}{8}$$

$$= \rho \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \int_0^{2\pi} \frac{1}{4} R^4 \, dr\, d\theta\, dz$$

$$= \rho \frac{h 2\pi R^4}{4}$$

$$= \frac{m}{\cancel{h} \cancel{R^2} \cancel{\pi}} \frac{\cancel{h} 2 \cancel{\pi} R^{\cancel{4}\, 2}}{4}$$

$$\therefore \quad \boxed{I_{zz} = \frac{1}{2} m R^2}$$

Así el tensor de inercia en esta base es

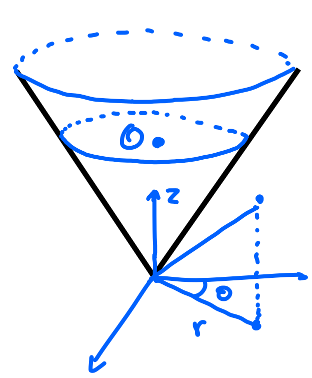
$$I = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} m R^2 + \frac{1}{12} m h^2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} m R^2 + \frac{1}{12} m h^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} m R^2 \end{pmatrix}.$$

Hemos encontrado $I_1$, $I_2$, e $I_3$ y hemos dado una base formada por los ejes de inercia principales del cilindro.

b) Consideremos $\mathbb{R}^3$ con las coordenadas cilíndricas $\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r \operatorname{sen}\theta \\ z = z \end{cases}$

En estas coordenadas, un cono con base circular de radio $R$ y altura $h$ se puede escribir como

$$\mathcal{C} = \left\{ (r,\theta,z) \mid r = \frac{R}{h} z \, , \, \theta \in [0,2\pi) \, , \, z \in [0,h] \right\}$$




En estas coordenadas

$$\int_{cono} f(x,y,z) \, dx\,dy\,dz$$

$$= \int_0^h \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{R}{h}z} f(r\cos\theta, r\operatorname{sen}\theta, z)\, r \, dr\, d\theta\, dz$$

Calculemos las coordenadas del centro de masa $O = (O_x, O_y, O_z)$ del cono $\mathcal{C}$.

Claramente $O_x = O_y = 0$

$$O_z = \frac{\int_{cono} \rho z \, dx\,dy\,dz}{\int_{cono} \rho \, dx\,dy\,dz} = \frac{\int_0^h \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{R}{h}z} z\, r\, dr\, d\theta\, dz}{R^2 \, \pi h / 3}$$

$$\int_0^h\int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{R}{h}z} z\,r\,dr\,d\theta\,dz = \int_0^h z\int_0^{2\pi}\frac{1}{2}\left(\frac{R}{h}z\right)^2 d\theta\,dz$$

$$= \pi\,\frac{R^2}{h^2}\int_0^h z^3\,dz$$

$$= \pi\,\frac{R^2}{h^2}\,\frac{1}{4}h^4$$

$$= \frac{\pi R^2 h^2}{4}$$

Asi $\quad O_z = \dfrac{\pi R^2 h^2}{4}\;\dfrac{3}{R^2\pi h} = \dfrac{3}{4}h$

Calculemos los momentos de inercia respecto de la base $(O, e_1, e_2, e_3)$

$$I_{zz} = \int_{cono} \rho\; x^2+y^2\;dx\,dy\,dz$$

$$= \rho\int_0^h\int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{R}{h}z} r^3\,dr\,d\theta\,dz$$

$$= \frac{\rho}{4}\int_0^h\int_0^{2\pi}\left[r^4\right]_0^{\frac{R}{h}z} d\theta\,dz$$

$$= \rho\frac{\pi}{2}\int_0^h\left(\frac{R}{h}\right)^4 z^4\,dz$$

$$= \rho\frac{\pi}{2}\frac{R^4}{h^4}\left[\frac{1}{5}z^5\right]_0^h$$

$$= \rho\frac{\pi}{10}R^4 h = \frac{3m}{\cancel{\pi} R^2\cancel{h}}\;\frac{\cancel{\pi}}{10}R^4\cancel{h} = \frac{3}{10}mR^2$$

Para calcular $I_{xx} = I_{yy}$ basta calcular $I$ con respecto al eje $x$ pues por el teorema de Steiner

$$I = I_{xx} + m\left(\frac{3}{4}h\right)^2$$

$$I = \int_{cono}\rho\,(y^2+z^2)\,dx\,dy\,dz$$

$$= \int_0^h \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{R}{h}z} \rho \left( \operatorname{sen}^2\theta + z^2 \right) r \, dr\, d\theta\, dz$$

$$= \rho \int_0^h \int_0^{2\pi} \left[ \frac{1}{2} \left( \operatorname{sen}^2\theta + z^2 \right) r^2 \right]_0^{\frac{R}{h}z} d\theta\, dz$$

$$= \frac{\rho}{2} \int_0^h \int_0^{2\pi} \left( \operatorname{sen}^2\theta + z^2 \right) \left( \frac{R^2}{h^2} \right) z^2 \, d\theta\, dz$$

$$= \frac{\rho}{2} \frac{R^2}{h^2} \int_0^h z^2 \left( \int_0^{2\pi} \operatorname{sen}^2\theta \, d\theta + \int_0^{2\pi} z^2 \, d\theta \right) dz$$

$$= \frac{\rho}{2} \frac{R^2}{h^2} \int_0^h \pi z^2 + 2\pi z^4 \, dz$$

$$= \frac{\rho}{2} \frac{R^2}{h^2} \left[ \frac{\pi}{3} h^3 + \frac{2\pi}{5} h^5 \right]$$

$$= \frac{3m}{\pi R^2 h} \frac{R^2}{h^2} \left[ \frac{\pi}{3} h^3 + \frac{2\pi}{5} h^5 \right]$$

$$= m + \frac{6}{5} m h^2$$

$$\therefore I_{xx} = m + \frac{6}{5} m h^2 - m \left( \frac{3}{4} h \right)^2$$

$$= m + \frac{51}{80} m h^2$$

c) Para calcular el tensor de inercia del elipsoide utilicemos el cambio de coordenadas :

$$\begin{cases} x = a r \operatorname{sen}\theta \cos\varphi \\ y = b r \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\varphi \\ z = c r \cos\theta \end{cases}$$

$$I_{zz} = \int_{\text{elipsoide}} \rho \left( x^2 + y^2 \right) dx\,dy\,dz$$

$$= \rho \int_0^1 \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} r^2 \operatorname{sen}^2\theta \left( a^2 \cos^2\varphi + b^2 \operatorname{sen}^2\varphi \right) abc \; r^2 \operatorname{sen}\theta \; d\varphi\, d\theta\, dr$$

$$= \frac{3m}{4\pi abc} abc \int_0^1 r^4 \int_0^{\pi} \operatorname{sen}^3\theta \int_0^{2\pi} a^2 \cos^2\varphi + b^2 \operatorname{sen}^2\varphi \; d\varphi \; d\theta\, dr$$

$$= \frac{3m}{4\cancel{\pi}} \cancel{\pi} \int_0^1 r^4 \int_0^{\pi} \operatorname{sen}^3\theta \left( a^2 + b^2 \right) d\theta\, dr$$

$$= \frac{\cancel{3}m}{\cancel{4}} (a^2+b^2) \cancel{\frac{4}{3}} \int_0^1 r^4 \, dr$$

$$= \frac{m}{5} (a^2+b^2)$$

Así $\boxed{I_{zz} = \frac{m}{5} (a^2+b^2)}$

Análogamente obtenemos que

$\boxed{I_{xx} = \frac{m}{5} (c^2+b^2)}$ y $\boxed{I_{yy} = \frac{m}{5} (a^2+c^2)}$

Por otro lado $I_{xy} = I_{yz} = I_{xz} = 0$.

Así $$I = \frac{m}{5} \begin{pmatrix} c^2+b^2 & 0 & 0 \\ 0 & a^2+c^2 & 0 \\ 0 & 0 & a^2+b^2 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 3 : Considera las ecuaciones de Euler para un cuerpo rígido

$$\mathring{M}_1 = a_1 M_2 M_3 \qquad \mathring{M}_2 = a_2 M_1 M_3 \qquad \mathring{M}_3 = a_3 M_1 M_2$$

donde $a_1 = \dfrac{I_2 - I_3}{I_2 I_3}$ $\quad a_2 = \dfrac{I_3 - I_1}{I_1 I_3}$ $\quad a_3 = \dfrac{I_1 - I_2}{I_1 I_2}$

durante todo el ejercicio suponga que las condiciones iniciales son tales que la energía

$$E = \frac{1}{2}\left(\frac{M_1^2}{I_1} + \frac{M_2^2}{I_2} + \frac{M_3^2}{I_3}\right)$$ es constante igual a $\dfrac{\|M\|^2}{2 I_2}$.

i) Demostrar que las trayectorias $(M_1(t), M_2(t), M_3(t))$ del sistema están contenidos en dos círculos máximos de la esfera de momento angular $\|M\|$ constante que pasan por el eje $M_2$ y están contenidos en los planos

$$M_3 = \pm M_1 \sqrt{\frac{a_3}{a_1}}.$$

ii) Obten expresiones explicitas para $M_1(t), M_2(t), M_3(t)$ suponiendo que $M_2(0) = 0$.

respuesta : Sea $(M_1(t), M_2(t), M_3(t))$ una trayectoria del sistema.
La conservación de momento angular y de energía junto con la hipótesis de que $E = \dfrac{\|M\|^2}{2 I_2}$ implican que

$$\frac{1}{2}\left(\frac{M_1^2}{I_1} + \frac{M_2^2}{I_2} + \frac{M_3^2}{I_3}\right) = \frac{M_1^2 + M_2^2 + M_3^2}{2\, I_2},$$

$$\frac{M_1^2}{I_1} + \frac{M_3^2}{I_3} = \frac{M_1^2}{I_2} + \frac{M_3^2}{I_2},$$

$$M_1^2 \underbrace{\left(\frac{1}{I_1} - \frac{1}{I_2}\right)}_{a_3} + M_3^2 \underbrace{\left(\frac{1}{I_3} - \frac{1}{I_2}\right)}_{-a_1} = 0$$

$$M_3 = \pm M_1 \sqrt{\frac{a_3}{a_1}}$$

Es decir que las trayectorias se encuentran contenidas en la intersección del plano $M_3 = \pm\sqrt{\frac{a_3}{a_1}}$ y la esfera de radio $\|M\|$, esta intersección son precisamente círculos de radio máximo.

Ejercicio 4: Sean $L$ y $B$ matrices $n\times n$ dependientes del tiempo y tales que

$$\dot{L} = BL - LB = [B,L].$$

Las matrices $L$ y $B$ forman un *par de Lax*. Seguir los siguientes pasos para demostrar que los valores propios de $L(t)$ son constantes de movimiento.

a) Demostrar que cualquier solución invertible $U(t)$ de la ecuación

$$\frac{dU}{dt} = BU \quad , \quad \text{satisface}$$

$$\frac{d}{dt}(U^{-1}LU) = 0.$$

b) Utiliza la solución particular que tiene condicion inicial $U(0) = \mathbb{1}d$ para demostrar que $L(t)$ es conjugado a $L(0)$.

c) Concluir que las funciones $F_k = Tr(L^k)$ son constantes de movimiento.

respuesta:

a) Supongamos que $\frac{dU}{dt} = BU$, y denotemos por $\dot{U} = \frac{dU}{dt}$, tenemos que

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}(U^{-1}LU) &= (\dot{U^{-1}})LU + U^{-1}(\dot{LU}) \\ &= -U^{-1}\dot{U}U^{-1}LU + U^{-1}[\dot{L}U + L\dot{U}] \\ &= U^{-1}\left(-BUU^{-1}LU + BLU - LBU + LBU\right) \\ &= U^{-1}\left(-BLU + BLU - LBU + LBU\right) \\ &= 0.\end{aligned}$$

b) Sea $U(t)$ la solución de $\frac{dU}{dt} = BU$ tal que $U(0) = \mathbb{1}d$. Por el inciso a),

$$\frac{d}{dt}(U^{-1}LU) = 0 \quad , \text{ es decir}$$

$$U^{-1}(t)L(t)U(t) = U^{-1}(0)L(0)U(0) = L(0) \quad \forall t.$$

Así $L(0) = U^{-1}(t)L(t)U(t)$.

c) Sean $\lambda_i$, $i = 1, \dots, m$, los valores propios de $L$. Entonces

$$Tr\left(L^k\right) = Tr\left(U^{-1}(t)\, L^k(t)\, U(t)\right)$$

$$= Tr\left(\left[U^{-1}(t)\, L(t)\, U(t)\right]^k\right)$$

$$= Tr\left(L(0)^k\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{m} \lambda_i^k \qquad \text{son constantes}, \quad k = 1, 2, \dots$$

## Ejercicio 5

a) Demostrar que las ecuaciones de Euler de cuerpo rígido se pueden escribir en forma de par de Lax donde

$$L = \begin{pmatrix} 0 & -M_3 & M_2 \\ M_3 & 0 & -M_1 \\ -M_2 & M_1 & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad B = \begin{pmatrix} 0 & \Omega_3 & -\Omega_2 \\ -\Omega_3 & 0 & \Omega_1 \\ \Omega_2 & -\Omega_1 & 0 \end{pmatrix}$$

y donde $M_1 = I_1 \Omega_1$ , $M_2 = I_2 \Omega_2$ , $M_3 = I_3 \Omega_3$ , $I_1, I_2, I_3$ los momentos principales de inercia del cuerpo.

b) Demostrar que a partir de los valores propios de $L$ unicamente se puede recuperar la integral de momento angular $M_1^2 + M_2^2 + M_3^2$ pero que no es posible obtener la integral de energía.

c) Encontrar una matriz diagonal $J$ tal que las relaciones $M_1 = I_1 \Omega_1$, $M_2 = I_2 \Omega_2$ y $M_3 = I_3 \Omega_3$ se pueden expresar como $L = -JB - BJ$ .

d) Demostrar que para cualquier valor del parámetro $\lambda \in \mathbb{R}$ las ecuaciones de Euler para un cuerpo rígido son equivalentes al par de Lax con parametro (descubierto por Manakov en 1976):

$$\frac{d}{dt}\left(L + \lambda J^2\right) = \left[B - \lambda J , L + \lambda J^2\right]$$

e) Argumentar que las funciones

$$F_k = \mathrm{Tr}\left(\left(L + \lambda J^2\right)^k\right),$$

son constantes de movimiento. Mas aún son polinomios en $\lambda$ cuyos coeficientes también son constantes de movimiento. Verificar que el coeficiente de $F_2$ es igual a $-2\left(M_1^2 + M_2^2 + M_3^2\right)$ y que el coeficiente de $\lambda$ de $F_3$ es igual a

$$-\frac{3}{2}\left(I_1^2 + I_2^2 + I_3^2\right)\left(M_1^2 + M_2^2 + M_3^2\right) + 3 I_1 I_2 I_3 \left(\frac{M_1^2}{I_1} + \frac{M_2^2}{I_2} + \frac{M_3^2}{I_3}\right).$$

Es decir, a partir del par de Lax con parámetro de Manakov, es posible encontrar las integrales de momento y de energía.

a) $L = \begin{pmatrix} 0 & -M_3 & M_2 \\ M_3 & 0 & -M_1 \\ -M_2 & M_1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -I_3\Omega_3 & I_2\Omega_2 \\ I_3\Omega_3 & 0 & -I_1\Omega_1 \\ -I_2\Omega_2 & I_1\Omega_1 & 0 \end{pmatrix}$

$$[B, L] = BL - LB$$

$$BL = \begin{pmatrix} 0 & \Omega_3 & -\Omega_2 \\ -\Omega_3 & 0 & \Omega_1 \\ \Omega_2 & -\Omega_1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -M_3 & M_2 \\ M_3 & 0 & -M_1 \\ -M_2 & M_1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \Omega_3 M_3 + \Omega_2 M_2 & -\Omega_2 M_1 & -\Omega_3 M_1 \\ -\Omega_1 M_2 & \Omega_3 M_3 + \Omega_1 M_1 & -\Omega_3 M_2 \\ -\Omega_1 M_3 & -\Omega_2 M_3 & \Omega_2 M_2 + \Omega_1 M_1 \end{pmatrix}$$

$$LB = \begin{pmatrix} 0 & -M_3 & M_2 \\ M_3 & 0 & -M_1 \\ -M_2 & M_1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \Omega_3 & -\Omega_2 \\ -\Omega_3 & 0 & \Omega_1 \\ \Omega_2 & -\Omega_1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \Omega_3 M_3 + \Omega_2 M_2 & -\Omega_1 M_2 & -\Omega_1 M_3 \\ -\Omega_2 M_1 & \Omega_3 M_3 + \Omega_1 M_1 & -\Omega_2 M_3 \\ -\Omega_3 M_1 & -\Omega_3 M_2 & \Omega_2 M_2 + M_1 \Omega_1 \end{pmatrix}$$

$$BL - LB = \begin{pmatrix} 0 & \Omega_1 M_2 - \Omega_2 M_1 & \Omega_1 M_3 - \Omega_3 M_1 \\ \Omega_2 M_1 - \Omega_1 M_2 & 0 & \Omega_2 M_3 - \Omega_3 M_2 \\ \Omega_3 M_1 - \Omega_1 M_3 & \Omega_3 M_2 - \Omega_2 M_3 & 0 \end{pmatrix}$$

Las ecuaciones de Euler son equivalentes a

$$\boxed{\dot{L} = BL - LB}$$

b) Calculemos el polinomio característico de $L$

$$p(\lambda) = \det \left( L - \lambda \mathbb{1} \right)$$

$$= \det \begin{pmatrix} -\lambda & -M_3 & M_2 \\ M_3 & -\lambda & -M_1 \\ -M_2 & M_1 & -\lambda \end{pmatrix}$$

$$= -\lambda \begin{vmatrix} -\lambda & -M_1 \\ M_1 & -\lambda \end{vmatrix} - M_3 \begin{vmatrix} -M_3 & M_2 \\ M_1 & -\lambda \end{vmatrix} - M_2 \begin{vmatrix} -M_3 & M_2 \\ -\lambda & -M_1 \end{vmatrix}$$

$$= -\lambda \left( \lambda^2 + M_1^2 \right) - M_3 \left( \lambda M_3 - M_1 M_2 \right) - M_2 \left( M_1 M_3 + \lambda M_2 \right)$$

$$= -\lambda^3 - \lambda M_1^2 - \lambda M_3^2 + \cancel{M_1 M_2 M_3} - \cancel{M_1 M_2 M_3} - \lambda M_2^2$$

$$= \lambda\left(-\lambda^2 - M_1^2 - M_3^2 - M_2^2\right)$$

Así $\boxed{\|M\|^2 = -\lambda^2}$

c) Supongamos que $J$ está dada por $(J)_{ij} = J_i \delta_{ij}$ $i,j = 1,\dots,3$.

$$JB = \begin{pmatrix} 0 & J_1\Omega_3 & -J_1\Omega_2 \\ -J_2\Omega_3 & 0 & -J_2\Omega_1 \\ J_3\Omega_2 & -J_3\Omega_1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$JB + BJ = \begin{pmatrix} 0 & (J_1+J_2)\Omega_3 & -(J_1+J_3)\Omega_2 \\ -(J_1+J_2)\Omega_3 & 0 & (J_2+J_3)\Omega_1 \\ (J_1+J_3)\Omega_2 & -(J_2+J_3)\Omega_1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$BJ = \begin{pmatrix} 0 & J_2\Omega_3 & -J_3\Omega_2 \\ -J_1\Omega_3 & 0 & J_3\Omega_1 \\ J_1\Omega_2 & -J_2\Omega_1 & 0 \end{pmatrix}$$

Buscamos $J_i$, $i = 1,2,3$ que satisfagan

$$L = \begin{pmatrix} 0 & -M_3 & M_2 \\ M_3 & 0 & -M_1 \\ -M_2 & M_1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -(J_1+J_2)\Omega_3 & (J_1+J_3)\Omega_2 \\ (J_1+J_2)\Omega_3 & 0 & -(J_2+J_3)\Omega_1 \\ -(J_1+J_3)\Omega_2 & (J_2+J_3)\Omega_1 & 0 \end{pmatrix} = -JB - BJ,$$

es decir $J_1 + J_2 = I_3$, $I_1 + J_3 = I_2$, $J_2 + J_3 = I_1$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} J_1 \\ J_2 \\ J_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{pmatrix}, \quad \text{invirtiendo el sistema,} \quad \begin{pmatrix} J_1 \\ J_2 \\ J_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{pmatrix},$$

Es decir $\begin{pmatrix} J_1 \\ J_2 \\ J_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} I_2 + I_3 - I_1 \\ I_1 + I_3 - I_2 \\ I_2 + I_1 - I_3 \end{pmatrix}$, satisface $L = -BJ - JB$.

d) Por un lado, tenemos que $\frac{d}{dt}\left(L + \lambda J^2\right) = \dot{L}$.

Por otro lado

$$\left[B - \lambda J, L + \lambda J^2\right] = [B, L] + \lambda\left[B, J^2\right] - \lambda[J, L] - \lambda^2 \cancel{\left[J, J^2\right]}$$

$$= [B, L] + \lambda\left[BJ^2 - J^2 B - JL + LJ\right]$$

$$= [B,L] + \lambda\left[ BJ^2 - J^2B - J(-BJ - JB) + (-BJ-JB)J \right]$$

$$= [B,L] + \lambda\left[ \cancel{BJ^2} - \cancel{J^2B} + \cancel{JBJ} + \cancel{J^2B} - \cancel{BJ^2} - \cancel{JBJ} \right]$$

$$= [B,L]$$

Así $\frac{d}{dt}\left(L + \lambda J^2\right) = \left[B - \lambda J \,,\, L + \lambda J^2\right]$ si y solo si

$$\dot{L} = [B, L].$$

Este último par de Lax, es, por el ejercicio 4) equivalente a las ecuaciones de Euler.

e) Sea $L_\lambda := L + \lambda^2 J$, y $B_\lambda := B - \lambda J$.
Por el inciso anterior, las ecuaciones de movimiento se pueden expresar como el par de Lax

$$\dot{L}_\lambda = [B_\lambda, L_\lambda].$$

El ejercicio 4), permite afirmar que

$F_K := T_r\left(L_\lambda^K\right) = T_r\left[\left(L + \lambda J^2\right)^K\right]$ es una constante de movimiento.

Claramente $F_K := F_K(\lambda)$ es un polinomio de grado a lo mas $3K$ en la variable $\lambda$.

Calculemos

$$L + \lambda J^2 = \begin{pmatrix} \lambda J_1^2 & -M_3 & M_2 \\ M_3 & \lambda J_2^2 & -M_1 \\ -M_2 & M_1 & \lambda J_3^2 \end{pmatrix}$$

$$(L + \lambda J^2)^2 = L^2 + \lambda\left(LJ^2 + J^2L\right) + \lambda^2 J^4$$

$$(L + \lambda J^2)^3 = L^3 + \lambda\left(L^2J^2 + LJ^2L\right) + \lambda^2 LJ^4$$
$$+ \lambda J^2L^2 + \lambda^2\left(J^2LJ^2 + J^4L\right) + \lambda^3 J^6$$

$$= L^3 + \lambda\left(L^2J^2 + LJ^2L + J^2L^2\right) + \lambda^2\left(LJ^4 + J^2LJ^2 + J^4L\right) + \lambda^3 J^6$$

$$L^2 = \begin{pmatrix} -M_3^2 - M_2^2 & M_1 M_2 & M_1 M_3 \\ M_1 M_2 & -M_3^2 - M_1^2 & M_2 M_3 \\ M_1 M_3 & M_2 M_3 & -M_2^2 - M_1^2 \end{pmatrix}$$

Es decir que $Tr(L^2) = -2(M_1^2 + M_2^2 + M_3^2)$ es el coeficiente constante de $F_2(\lambda)$.

$$L^2 J^2 = \begin{pmatrix} -M_3^2 - M_2^2 & M_1 M_2 & M_1 M_3 \\ M_1 M_2 & -M_3^2 - M_1^2 & M_2 M_3 \\ M_1 M_3 & M_2 M_3 & -M_2^2 - M_1^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} J_1^2 & 0 & 0 \\ 0 & J_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & J_3^2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -J_1^2(M_2^2 + M_3^2) & J_2^2 M_1 M_2 & J_3^2 M_1 M_3 \\ J_1^2 M_1 M_2 & -J_2^2(M_1^2 + M_3^2) & J_3^2 M_2 M_3 \\ J_1^2 M_1 M_3 & J_2^2 M_2 M_3 & -J_3^2(M_1^2 + M_2^2) \end{pmatrix}$$

$$L J^2 L = L \begin{pmatrix} 0 & -J_1^2 M_3 & J_1^2 M_2 \\ J_2^2 M_3 & 0 & -J_2^2 M_1 \\ -J_3^2 M_2 & J_3^2 M_1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & -M_3 & M_2 \\ M_3 & 0 & -M_1 \\ -M_2 & M_1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -J_1^2 M_3 & J_1^2 M_2 \\ J_2^2 M_3 & 0 & -J_2^2 M_1 \\ -J_3^2 M_2 & J_3^2 M_1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -J_2^2 M_3^2 - J_3^2 M_2^2 & J_3^2 M_1 M_2 & J_2^2 M_1 M_3 \\ J_3^2 M_1 M_2 & -J_1^2 M_3^2 - J_3^2 M_1^2 & J_1^2 M_2 M_3 \\ J_2^2 M_1 M_3 & J_1^2 M_2 M_3 & -J_1^2 M_2 - J_2^2 M_1 \end{pmatrix}$$

$$J^2 L^2 = \begin{pmatrix} -J_1^2(M_3^2 + M_2^2) & J_1^2 M_1 M_2 & J_1^2 M_1 M_3 \\ J_2^2 M_1 M_2 & -J_2^2(M_3^2 + M_1^2) & J_2^2 M_2 M_3 \\ J_3^2 M_1 M_3 & J_3^2 M_2 M_3 & -J_3^2(M_2^2 + M_1^2) \end{pmatrix}$$

$$(I_2 + I_3 - I_1)^2$$
$$= (I_2 + I_3)^2 - 2(I_2 + I_3)I_1 + I_1^2$$
$$= I_1^2 + I_2^2 + I_3^2 + 2\cancel{I_2 I_3} - 2\cancel{I_2} I_1 - 2 I_3 I_1$$

$$(I_1 + I_2 - I_3)^2$$
$$= I_1^2 + I_2^2 + I_3^2 + 2\cancel{I_1} I_2 - 2 I_1 I_3 - 2\cancel{I_2} I_3$$

Sumando las diagonales de estos tres operadores

$$-3\left[(J_1^2 + J_3^2) M_2 + (J_2^2 + J_1^2) M_3 + (J_2^2 + J_3^2) M_1\right]$$

$$= -\frac{3}{4}\Big[(I_2 + I_3 - I_1)^2 M_2 + (I_1 + I_2 - I_3)^2 M_2$$
$$+ (I_1 + I_3 - I_2)^2 M_3 + (I_1 + I_3 - I_1)^2 M_3$$
$$+ (I_1 + I_3 - I_2)^2 M_1 + (I_1 + I_2 - I_3)^2 M_1\Big]$$

$$= -\frac{3}{4}\Big[\, 2\left(I_1^2+I_2^2+I_3^2\right)M_2 - 4 I_1 I_3 M_2$$
$$+ 2\left(I_1^2+I_2^2+I_3^2\right)M_3 - 4 I_1 I_2 M_3$$
$$+ 2\left(I_1^2+I_2^2+I_3^2\right)M_1 - 4 I_2 I_3 M_1 \Big] = -\frac{3}{2}\left(I_1^2+I_2^2+I_3^2\right)\left(M_1+M_2+M_3\right) + 3 I_1 I_2 I_3\left(\frac{M_1}{I_1}+\frac{M_2}{I_2}+\frac{M_3}{I_3}\right)$$

Así, a partir del par de Lax con parametros de Manakov se pudieron encontrar los integrales de momentos y energía.