Maestría 2024-1

Geometría Diferencial

Serie de ejercicios 1. Cálculo diferencial.

Ejercicio 1. *Identidad de Euler.* Sea $f : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ una función diferenciable en todo punto, y sea k una constante real. Mostrar que f es *positivamente homogénea de grado* k (i.e. $f(tx) = t^k f(x)$ para todo $t > 0$ y todo $x \in \mathbb{R}^n$, $x \neq 0$) si y sólo si f satisface la identidad de Euler

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) = kf(x)$$

para todo $x \in \mathbb{R}^n$. *Indicación:* derivar con respecto a t la función $t^{-k} f(tx)$.

Ejercicio 2. Sea $\langle .,. \rangle$ el producto escalar canónico sobre $\mathbb{R}^n$, y $\|.\|$ la norma euclidiana asociada. Sea $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$, una aplicación lineal tal que

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^n, \qquad \langle u(x), y \rangle = \langle x, u(y) \rangle.$$

1- Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \langle x, u(x) \rangle$. Mostrar que f es diferenciable sobre $\mathbb{R}^n$ y calcular df_{x_0} para todo $x_0 \in \mathbb{R}^n$.
2- Sea $g : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ definida por

$$g(x) = \frac{f(x)}{\|x\|^2}.$$

Mostrar que g es diferenciable sobre $\mathbb{R}^n$ y calcular dg_{x_0} para toda $x_0 \in \mathbb{R}^n$.
3- Sea $a \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Mostrar que $dg_a = 0$ si y sólo si a es un vector propio de u.

Ejercicio 3. Sea

$$\begin{array}{rcl} \Phi : M_n(\mathbb{R}) & \to & \mathbb{R} \\ A & \mapsto & \det A. \end{array}$$

Mostrar que Φ es de clase C^1 y determinar $d\Phi$.

Ejercicio 4. Sea $k \in \mathbb{R}$. Determinar las funciones $f \in C^1((0, +\infty) \times \mathbb{R})$ tales que, para todo $(x, y) \in (0, +\infty) \times \mathbb{R}$,

$$x \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) - y \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = kf(x, y).$$

Ejercicio 5. Sean las funciones

$$\begin{array}{rrcl} f : & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^3 \\ & (x, y) & \mapsto & f(x, y) = (e^{x-y}, x^2 + y^2, xy), \end{array}$$

$$\begin{array}{rrcl} g : & \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^2 \\ & (u, v, w) & \mapsto & g(u, v, w) := (u^2 + v^2 + w^2, uvw). \end{array}$$

Mostrar que $g \circ f$ es un difeomorfismo local en $(1, 1)$.

Ejercicio 6. Sea Ω un abierto acotado de $\mathbb{R}^3$, y sea $f : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}^3$ una función continua e inyectiva. Supongamos que f es de clase C^1 sobre Ω y que para todo $x \in \Omega$, df_x es inyectiva. Probar que

$$f(\mathrm{Fr}(\Omega)) = \mathrm{Fr}(f(\Omega)).$$

Recordemos que si $D \subset \mathbb{R}^3$, su frontera $\mathrm{Fr}(D)$ está definida por $\mathrm{Fr}(D) = \overline{D} \setminus \overset{\circ}{D}$.

Ejercicio 7. Sea $(E, \|.\|)$ un espacio vectorial normado de dimensión finita, y $\mathcal{L}(E)$ el espacio de los endomorfismos de E. Denotemos por $I_E : x \mapsto x$ la aplicación identidad de E.
Sea $\Theta : \mathcal{L}(E) \to \mathcal{L}(E)$, $u \mapsto \Theta(u) := u \circ u$.
1- Mostrar que Θ es de clase C^1 sobre $\mathcal{L}(E)$.
2- Calcular $d\Theta_u$ para todo $u \in \mathcal{L}(E)$.
3- Mostrar que existe $\varepsilon > 0$ tal que, para todo $v \in \mathcal{L}(E)$ satisfaciendo $\|v - I_E\| < \varepsilon$, la ecuación $u \circ u = v$ tiene una solución en $\mathcal{L}(E)$.
4- Supongamos $E = \mathbb{R}^2$. Consideremos los elementos u y h de $\mathcal{L}(E)$ cuyas matrices en la base canónica de $\mathbb{R}^2$ son, respectivamente,

$$U := \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad H := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Calcular $d\Theta_u(h)$. Deducir que no existe ninguna función diferenciable Ψ definida sobre una vecindad $\mathcal{W}$ de I_E a una vecindad de u en $\mathcal{L}(E)$ tal que $\Psi(I_E) = u$ y $\Psi(w) \circ \Psi(w) = w$ para todo $w \in \mathcal{W}$.

Ejercicio 8. Sea $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la función definida por $F(x, y) = e^{x-y} - 1 - x - y$.
1- Mostrar que la ecuación $F(x, y) = 0$ define implicitamente una función $y = \varphi(x)$ de clase C^∞ en una vecindad de $x = 0$ tal que $\varphi(0) = 0$.
2- Calcular $\varphi'(0)$ y $\varphi''(0)$.

Ejercicio 9. Mostrar que la relación $\sin(y) + xy^4 + x^2 = 0$ define una función $y = \varphi(x)$ de clase C^∞ en una vecindad de $x = 0$ tal que $\varphi(0) = 0$. Escribir el desarrollo de φ al orden 4 en 0.

Ejercicio 10. Sea $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ una función de clase C^1 que satisface

$$f(0,0) = 0, \qquad \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) \neq -1 \quad y \quad \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) \neq 0.$$

Mostrar que la relación $f(f(x, y), y) = 0$ define implicitamente y en función de x.

Ejercicio 11. Consideremos $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ una función de clase C^1 tal que existe $k > 0$ que satisface

$$|f(x) - f(y)| \geq k|x - y|$$

para todo $x, y \in \mathbb{R}^n$. Vamos a mostrar que f es un difeomorfismo de clase C^1 de $\mathbb{R}^n$ sobre si mismo.

1. Probar que f es inyectiva y que $f(\mathbb{R}^n)$ es cerrado sobre $\mathbb{R}^n$.
2. Probar que df_x es invertible para toda toda $x \in \mathbb{R}^n$.
3. Deducir que $f(\mathbb{R}^n)$ es un conjunto abierto y cerrado de $\mathbb{R}^n$ (concluir).

Ejercicio 1: Sea $f: \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}$ diferenciable y $\kappa \in \mathbb{R}$.

$$\frac{d}{dt}\, t^{-\kappa} f(tx) = -\kappa\, t^{-(\kappa+1)} f(tx) + t^{-\kappa}\left(\sum_{j=1}^{n} x_j \frac{\partial f}{\partial x_j}(tx)\right) \qquad (1)$$

Si f es positivamente homogenea de constante κ entonces

$$\frac{d}{dt}\, t^{-\kappa} f(tx) = \frac{d}{dt} f(x) = 0$$

Remplazando en (1) $\qquad f(xt) = t^{\kappa} f(x)$

$$-\frac{\kappa}{t} f(x) + t^{-\kappa}\left(\sum_{j=1}^{n} x_j \frac{\partial f}{\partial x_j}(tx)\right) = 0.$$

Evaluando en $t = 1$ obtenemos la identidad de Euler:

$$\kappa f(x) = \sum_{j=1}^{n} x_j \frac{\partial f}{\partial x_j}(x).$$

Reciprocamente supongamos que f satisface la identidad de Euler. Entonces:

$$t\kappa f(x) = \sum_{j=1}^{n} t x_j \frac{\partial f}{\partial x_j}(xt), \quad \text{remplazando en } (1)$$

$$\frac{d}{dt}\, t^{-\kappa} f(tx) = 0.$$

Entonces $t \longmapsto t^{-\kappa} f(tx)$ es constante, entonces

$$f(x) = t^{-\kappa} f(tx) \qquad \forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\},\ \forall t > 0.$$

Ejercicio 2:

Sea $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ tq

$$\langle x, u(y) \rangle = \langle u(x), y \rangle \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n.$$

Sea $f: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$
$\quad x \longmapsto \langle x, u(x) \rangle$

1) Sean $x, h \in \mathbb{R}^n$, $h \neq 0$

$$\begin{aligned} f(x+h) &= \langle x+h, u(x+h) \rangle \\ &= \langle x, u(x) \rangle + \langle x, u(h) \rangle + \langle h, u(x) \rangle + \langle h, u(h) \rangle \\ &= f(x) + 2\langle x, u(h) \rangle + f(h) \\ &= f(x) + 2\langle x, u(h) \rangle + |h|\, \varepsilon(h), \end{aligned}$$

donde $\varepsilon(h) = \dfrac{f(h)}{|h|}$. Como $|\varepsilon(h)| = \dfrac{\langle h, u(h) \rangle}{|h|}$

$$\leq |u(h)| \xrightarrow[h \to 0]{} 0,$$

entonces $df_x(h) = 2\langle x, u(h) \rangle$

2) Sea $g: \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}$
$\quad x \longmapsto \dfrac{f(x)}{\|x\|^2}.$

g es diferenciable pues es el producto de funciones diferenciables.

$$dg_x(h) = \frac{df_x(h)}{\|x\|^2} - \frac{f(x)}{\|x\|^4}\, 2\langle x, h \rangle$$

$$= \frac{df_x(h)}{\|x\|^2} - \frac{4f(x)}{\|x\|^4}\langle x,h\rangle$$

$$= \frac{2}{\|x\|^2}\left(\langle x,u(h)\rangle - \frac{\langle x,u(x)\rangle\langle x,h\rangle}{\|x\|^2}\right)$$

3. Sea $a \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$

$$dg_a = 0 \iff \underbrace{\langle a,u(h)\rangle - \frac{\langle a,u(a)\rangle\langle a,h\rangle}{\|a\|^2} = 0 \ \forall h}_{1}$$

$$\iff \|a\|^2\langle u(a),h\rangle = \langle u(a),a\rangle\langle a,h\rangle$$

Si a es vector propio de u

$$\langle u(a),a\rangle\langle a,h\rangle = \lambda\|a\|^2\langle a,h\rangle \quad \text{pa } \lambda\in\mathbb{R}$$

$$= \|a\|^2\langle u(a),h\rangle \quad \forall h \in \mathbb{R}^n$$

Si 1 entonces

$$\left\langle u(a) - \frac{\langle a,u(a)\rangle}{\|a\|^2}a, h\right\rangle = 0 \quad \forall h\in\mathbb{R}^n$$

$$\Rightarrow u(a) = \lambda a \quad \text{con} \quad \lambda = \frac{\langle a,u(a)\rangle}{\|a\|^2}$$

Ejercicio 3:

Sea $f := \det : M_n(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$

Sean $M, H \in M_n(\mathbb{R})$

$$f(M+H) = f(m_1+h_1, \dots, m_n+h_n)$$

$$= f(m_1, m_2+h_2, \dots, m_n+h_n) + f(h_1, m_2+h_2, \dots, m_n+h_n)$$

$$= f(m_1, m_2, m_3+h_3, \dots, m_n+h_n) + f(m_1, h_2, m_3+h_3, \dots, m_n+h_n) + f(h_1, m_2, m_3+h_3, \dots, m_n+h_n) + f(h_1, h_2, m_3+h_3, \dots, m_n+h_n)$$

$$= \sum_{x_i = h_i, m_i} f(x_1, \dots, x_n)$$

$$= f(M) + \sum_{i=1}^{n} f(m_1, \dots, m_{i-1}, h_i, m_{i+1}, \dots, m_n) + \sum_{\substack{x_i = h_i, m_i \\ |x_i = h_i| \geq 2}} f(x_1, \dots, x_n)$$

Sea $\varepsilon(h) = \frac{1}{\|h\|} \sum_{\substack{x_i = h_i, m_i \\ |x_i = h_i| \geq 2}} f(x_1, \dots, x_n)$

$\|h\| \geq \sqrt{|h_i|^2 + |h_j|^2}$

Es facil ver que $\varepsilon(h) \to 0$ pues

Si pensamos a $f(x_1,\dots,x_n)$ donde por lo menos dos $x_i = h_i$
como un polinomio en las componentes de los h_i, entonces
$F(x_1,\dots,x_n)$ es un polinomio de grado 2, como
$\|h\| \longrightarrow 0$ como un polinomio de grado 1
ent

$$\frac{1}{\|h\|} \sum_{\substack{x_i = h_i, m_i \\ |x_i = h_i| \geq 2}} f(x_1,\dots,x_n) \longrightarrow 0$$

$$\therefore \; d\det_M(H) = \sum_{i=1}^{n} f(m_1,\dots,m_{i-1}, h_i, m_{i+1},\dots,m_n)$$

Otra forma:

Observemos que det es C^∞ pues es polinomial.
Sea A invertible, entonces:

$$Df_A(H) = \lim_{t\to 0} \frac{\det(A+tH)-\det(A)}{h}$$

$$\det(A+tH) = \det\left(A(I+tA^{-1}H)\right)$$
$$= \det(A)\det(I+tA^{-1}H)$$

Sean $\lambda_1,\dots,\lambda_n \in \mathbb{C}$ los valores propios de $A^{-1}H$,
entonces $1+t\lambda_i$ son los valores propios de $I+tA^{-1}H$
Entonces

$$\det(I+tA^{-1}H) = \prod_{i=1}^{n}(1+t\lambda_i)$$
$$= 1 + t\sum_{i=1}^{n}\lambda_i + O(t^2)$$

$$\therefore \det(A+tH) = \det(A) + t\det A \operatorname{tr}(A^{-1}H) + O(t^2)$$

pero $\det A \operatorname{tr}(A^{-1}H) = \operatorname{tr}({}^t\mathrm{comat}A\, H)$

$\therefore$ f es diferenciable sobre las matrices invertibles y

$$df_A(H) = tr\left({}^t\text{comat}A\ H\right).$$

Sea $A \in M_n(\mathbb{R})$ entonces existe A_n invertible tq $A_n \longrightarrow A$. Sabemos que que df es continua entonces

$$df_{A_n} \longrightarrow df_A$$

$$\therefore\quad d\det_A(H) = tr\left({}^t\text{comat}A\ H\right)\ \forall A \in M_n(\mathbb{R})$$

Ejercicio 4: Sea $f \in C^1((0,+\infty)\times\mathbb{R})$ y $\kappa \in \mathbb{R}$ tq

$$x \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) - y \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \kappa f(x,y) \quad \forall x,y \in (0,\infty)\times\mathbb{R}$$

Definimos $F(r,\theta) = f(r\cos\theta, r\operatorname{sen}\theta)$ $r>0$, $\theta \in \left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$

$$\frac{\partial F}{\partial \theta}(r,\theta) = -r\operatorname{sen}\theta \frac{\partial f}{\partial x} + r\cos\theta \frac{\partial f}{\partial y}$$

$$= -\kappa F(r,\theta)$$

$$\Longrightarrow F(r,\theta) = c(r)\, e^{-\kappa\theta}$$

Como $F(r,\theta)$ es C^1 $c(r)$ es C^1.

Esto expresado en las variables x,y:

$$f(x,y) = c\left(\sqrt{x^2+y^2}\right) e^{-\kappa \arctan\left(\frac{x}{y}\right)} \quad \forall x,y \in (0,\infty)\times\mathbb{R}.$$

Ahora sea $c \in C^1$ de $\mathbb{R}$, y definimos

$$f(x,y) = c\left(\sqrt{x^2+y^2}\right) e^{-\kappa \arctan\left(\frac{x}{y}\right)}$$

verifica que $x\frac{\partial f}{\partial y} - y\frac{\partial f}{\partial x} = 0$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = e^{-\kappa \arctan\left(\frac{x}{y}\right)} \frac{\kappa}{2\sqrt{x^2+y^2}} 2x\, c'\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)$$

$$+ c\left(\sqrt{x^2+y^2}\right) e^{-\kappa \arctan\left(\frac{x}{y}\right)} \frac{-\kappa}{1+\left(\frac{x}{y}\right)^2} \cdot \frac{1}{y}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = e^{-\kappa \arctan\left(\frac{x}{y}\right)} \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} c'\left(\sqrt{x^2+y^2}\right) + c\left(\sqrt{x^2+y^2}\right) e^{-\kappa \arctan\left(\frac{x}{y}\right)} \frac{\kappa \frac{x}{y^2}}{1+\left(\frac{x}{y}\right)^2}$$

Ejercicio 5 : Sean

$$f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$
$$(x,y) \longmapsto (\underset{1}{e^{x-y}}, \underset{2}{x^2+y^2}, \underset{1}{xy})$$

$$g: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$
$$(u,v,w) \longmapsto (u^2+v^2+w^2, uvw)$$

$$d(g \circ f)_{(x,y)} = dg_{f(x,y)} \circ df_{(x,y)}$$
$$= \begin{pmatrix} 2u & 2v & 2w \\ vw & uw & uv \end{pmatrix}_{f(x,y)} \begin{pmatrix} e^{x-y} & -e^{x-y} \\ 2x & 2y \\ y & x \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow d(g\circ f)_{(1,1)} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 12 & 8 \\ 6 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\det d(g\circ f)_{(1,1)} = 4 \det \begin{pmatrix} 6 & 4 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= -24$$

$\therefore$ $d(g\circ f)_{(1,1)}$ es un isomorfismo.

Por el teorema de inversión local $g\circ f$ es un difeo local en $(1,1)$

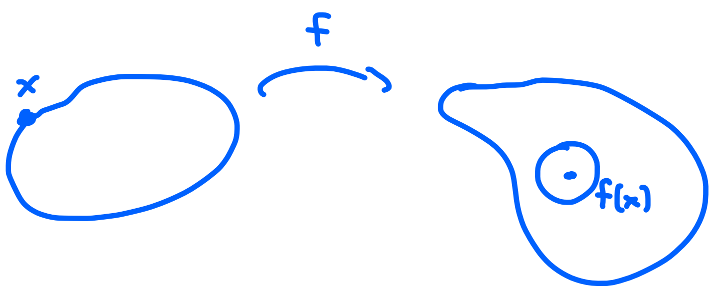
Ejercicio 6: Sea $f : \overline{\Omega} \subseteq \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ continua y Ω un abierto. Supongamos que f es C^1 en Ω y que df_x es inyectiva $\forall x \in \Omega$.

Como df_x es inyectiva entre espacios de la misma dimensión df_x es un isomorfismo. Estamos en condiciones de aplicar el teorema de inversión global que afirma que $f : \Omega \longrightarrow f(\Omega)$ es un C^1-difeomorfismo.

Probemos que $f(Fr(\Omega)) \subseteq Fr(f(\Omega))$.

Supongamos que existe $y \in f(Fr(\Omega)) \setminus Fr(f(\Omega))$

Entonces existe $x \in Fr(\Omega)$ y $B_r(y) \subseteq f(\Omega)$ tq $f(x) = y$.



Como $f : \Omega \longrightarrow f(\Omega)$ es un difeo,

$$f^{-1}_{|\Omega}(B_r(y)) \subseteq \Omega \quad , \text{ sea } x_1 = f^{-1}_{|\Omega}(y)$$

Como $f : \overline{\Omega} \longrightarrow \mathbb{R}^3$ es inyectiva y

$$f(x_1) = f(x) = y \quad \text{entonces} \quad x = x_1 .$$

$\Longrightarrow x \in \Omega$! pues $x \in Fr(\Omega)$

$\therefore f(Fr(\Omega)) \subseteq Fr(f(\Omega))$.

Probemos ahora que $f(Fr(\Omega)) \supseteq Fr(f(\Omega))$.

Supongamos que $y \in Fr(f(\Omega))$

Observemos primero que como $y \in Fr(f(\Omega))$ entonces $y \in f(\overline{\Omega})$.

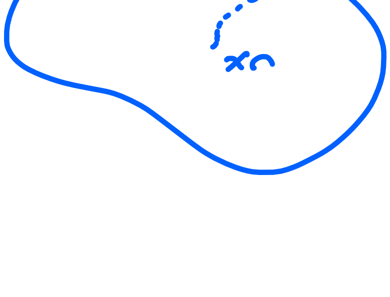
En efecto, como $y \in Fr(f(\Omega))$, existe $x_n \in \Omega$ tq $f(x_n) \longrightarrow y$, por la compacidad de $\overline{\Omega}$, podemos suponer que $x_n \longrightarrow x \in \overline{\Omega}$. Por la continuidad de f en $\overline{\Omega}$

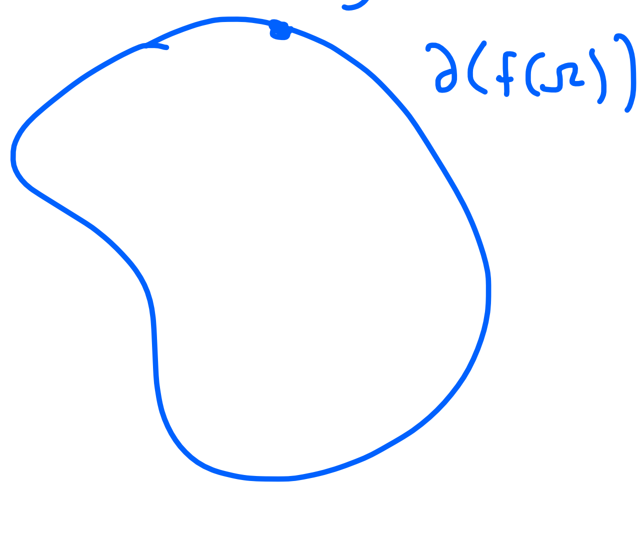
$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f(x_n) = y.$$

Así $y \in f(\overline{\Omega}) = f(Fr(\Omega)) \dot{\cup} f(\Omega)$ (f inyectiva)

$y \notin f(\Omega)$ (pues $y \in Fr(f(\Omega))$) entonces

$y \in f(Fr(\Omega))$.





$\Theta : B_\delta(I_E) \longrightarrow B_\varepsilon(I_E)$ es un difeo.

$\Rightarrow \forall\, v \in \mathcal{L}(E)$ tq $\|v - I_E\| < \varepsilon$, existe $u \in B_\delta(I_E)$ tq $u \circ u = v$.

4. Supongamos que $E = \mathbb{R}^2$. Sean

$$U = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad H = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Entonces

$$\begin{aligned} d\Theta_U(H) &= UH + HU \\ &= 0 \end{aligned}$$

Supongamos que existe $\psi : \mathcal{U}_{I_E} \longrightarrow \mathcal{L}(E)$ diferenciable tal que:

$$\psi(I_E) = U \quad \text{y} \quad \psi(w) \circ \psi(w) = w \quad \forall\, w \in \mathcal{U}_{I_E}.$$

ie: $\quad \Theta \circ \psi = I_{\mathcal{L}(E)}$

$$\Rightarrow \quad d\Theta_{\psi(I_E)} \circ d\psi_{I_E} = I_{\mathcal{L}(E)}$$

$\Rightarrow$ $d\Theta_{\psi(I_E)}$ es sobreyectiva, pero como $\dim E < \infty$ entonces es un isomorfismo, pero $H \neq 0$ y $d\Theta_U(H) = 0$ ⁈ . $\therefore$ no existe tal ψ.

Ejercicio 8: Sea $F(x,y) = e^{x-y} - 1 - x - y$.

$$\frac{\partial F}{\partial y}(x,y) = -e^{x-y} - 1 ,$$

Como $F(0,0) = 0$ y $\frac{\partial F}{\partial y}(0,0) = -2 \neq 0$

El teorema de la función implícita garantiza que existe φ en una vecindad de 0, digamos $(-\alpha,\alpha)$ en una vecindad de 0 digamos $(-\beta,\beta)$ tal que

$$F(x,y) = 0 \text{ en } (-\alpha,\alpha) \times (-\beta,\beta)$$

sii $\varphi(x) = y$.

En ese caso como $F(x,\varphi(x)) = 0$

$$\frac{\partial}{\partial x} F(x,\varphi(x)) = \frac{\partial F}{\partial x} + \varphi' \frac{\partial F}{\partial y} = 0$$

$$\Rightarrow \varphi'(x) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}}$$

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x,y) = e^{x-y} - 1$$

$$\Rightarrow \varphi'(0) = 0$$

Maestría 2024-1

Geometría Diferencial

Serie adicional de ejercicios 1. Cálculo diferencial.

(Fuente: F. Rouvière, "Petit guide de calcul différentiel".)

Ejercicio 1. *Reducción de las formas cuadráticas, versión diferenciable.* Sea E el espacio de las matrices reales $n \times n$ y S el subespacio de las matrices simétricas. Fijemos una matriz $A_0 \in S$, invertible. Sea φ la aplicación de E a S definida por

$$\varphi(M) = M^t A_0 M.$$

1. Mostrar que $d\varphi_I$ es sobreyectiva y precisar su núcleo.

2. Mostrar que existe una vecindad V de A_0 en S y una aplicación $A \mapsto M$ de V en el conjunto de las matrices invertibles, de clase C^1, tal que

$$A = M^t A_0 M$$

para toda matriz A en V. *Indicación:* considerar el conjunto F de las matrices $M \in E$ tales que $A_0 M \in S$, y aplicar el teorema de inversión local a $\varphi : F \to S$.

Comentario: el ejercicio muestra que toda forma cuadrática suficientemente cercana a una forma cuadrática no degenerada q_0 es equivalente a q_0, es decir se obtiene de q_0 por cambio de base; en particular tiene la misma signatura: las matrices simétricas de signatura (p, q) con $p + q = n$ forman un abierto de S. Además se puede pasar de A a A_0 por una matriz de cambio de base M que es una función de clase C^1 de A.

Ejercicio 2. Sea $f : (x, \lambda) \mapsto f(x, \lambda)$ una aplicación de clase C^1 de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p$ a $\mathbb{R}^n$. Supongamos que existe k tal que, para todos x, λ

$$\|d_x f_{(x,\lambda)}\| \leq k < 1$$

(norma de una aplicación lineal asociada con una norma sobre $\mathbb{R}^n$). Mostrar que la ecuación $f(x, \lambda) = x$ admite, para cada λ, una única solución $x = x(\lambda)$, y que la aplicación $\lambda \mapsto x(\lambda)$ es de clase C^1 sobre $\mathbb{R}^p$. Calcular dx_λ. *Indicación:* aplicar el teorema del punto fijo de Banach y el teorema de las funciones implícitas.

Ejercicio 3. *Teorema del rango constante.* Sea U un abierto de $\mathbb{R}^n$ y $f : U \to \mathbb{R}^p$ una aplicación de clase C^1. Supongamos que el rango de la matriz jacobiana $jac(f, x)$ es constante sobre U, igual a r. Queremos mostrar que existe un cambio de coordenadas $x \to X$ en la vecindad de un punto a de U (a la izquierda) y un cambio de coordenadas $y \mapsto Y$ en una vecindad de $f(a)$ (a la derecha), que transforman f en la aplicación lineal A (de rango r)

$$A : \ X = (X_1, \dots, X_r, X_{r+1}, \dots, X_n) \mapsto Y = (X_1, \dots, X_r, 0, \dots, 0).$$

1. Simplificar las notaciones: mostrar, aplicando traslaciones y cambio de coordenadas lineales en $\mathbb{R}^n$ y $\mathbb{R}^p$, que podemos suponer $a = 0$, $f(a) = 0$ y $df_a = A$.

Con estas condiciones, vamos a ver que se puede resolver el problema usando cambios de coordenadas de la forma

$$\begin{cases} X_1 = f_1(x_1, \ldots, x_n) \\ \vdots \\ X_r = f_r(x_1, \ldots, x_n) \\ X_{r+1} = x_{r+1} \\ \vdots \\ X_n = x_n \end{cases} \qquad\qquad \begin{cases} y_1 = Y_1 \\ \vdots \\ y_r = Y_r \\ y_{r+1} = \varphi_{r+1}(Y_1, \ldots, Y_r) + Y_{r+1} \\ \vdots \\ y_p = \varphi_p(Y_1, \ldots, Y_r) + Y_p \end{cases}$$

para funciones φ_i convenientes.

2. Verificar que las relaciones $x \mapsto X$ definidas arriba forman un cambio de coordenadas locales sobre $\mathbb{R}^n$ en una vecindad de 0.

3. En las coordenadas X (a la izquierda) y y (a la derecha), la aplicación $x \mapsto y = f(x)$ se transforma en $X \mapsto y = \varphi(X)$. Explicitar φ, y mostrar que solamente $X_1, \ldots, X_r$ aparecen en las expresiones obtenidas.

4. Mostrar que las relaciones $Y \mapsto y$ definidas arriba forman un cambio de coordenadas locales sobre $\mathbb{R}^p$ en una vecindad de 0, que contesta la pregunta inicial.

Comentario: el teorema del rango constante generaliza las formas normales de las sumersiones (si $r = p$) y de las inmersiones (si $r = n$). Se obtiene combinando las demostraciones de estos dos resultados, introduciendo cambios de coordenadas locales a la izquierda y a la derecha.

Ejercicio 4. *Funciones implícitas y Cauchy-Lipschitz.* Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de clase C^2, y (a, b) un punto tal que $f(a, b) = 0$ y $f'_y(a, b) \neq 0$. Explicar la relación entre la búsqueda de una función implícita $y = \varphi(x)$ tal que $f(x, y) = 0$ y la resolución de la ecuación diferencial

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{f'_x(x, y)}{f'_y(x, y)}, \qquad y(a) = b.$$

Comentario 1: este razonamiento se debe a Cauchy, y ha sido la primera prueba del teorema de las funciones implícitas (1839), basada en el teorema de Cauchy-Lipschitz (obtenido por Cauchy hacia 1820 en el caso C^1).

Comentario 2: el caso particular $f(x, y) = x - g(y)$ llevaría a una demostración del teorema de inversión local (de g) resolviendo la ecuación

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{g'(y)},$$

obteniendo la existencia de la solución $y = g^{-1}(x)$.

Maestría 2024-1

Geometría Diferencial.

Serie de ejercicios 2. Subvariedades de $\mathbb{R}^n$.

Ejercicio 1. Sea Σ la superficie parametrizada por $\psi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $(u, v) \mapsto (u, v, u^2 - v^2)$. Determinar una ecuación del plano tangente a Σ en el punto de parámetro $(1, 1)$.

Ejercicio 2. Sean a, b, c no todos ≤ 0. Mostrar que los conjuntos

$$\Sigma_1 := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \; ax^2 + by^2 + cz^2 = 1\} \quad \text{y} \quad \Sigma_2 := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \; xyz = 1\}$$

son superficies de $\mathbb{R}^3$. Para cada superficie, y en cada punto, determinar el plano tangente.

Ejercicio 3. Probar que la gráfica de la función $x \mapsto |x|$ no es una subvariedad de $\mathbb{R}^2$.

Ejercicio 4. Mostrar que si $p(x) = p(x_1, \ldots, x_n)$ es un polinomio homogéneo tal que

$$p(tx_1, \ldots, tx_n) = t^m p(x_1, \ldots, x_n)$$

para algún $m \in \mathbb{N}$, entonces, si $c \neq 0$, $p^{-1}(c)$ es una subvariedad de dimensión $n - 1$ de $\mathbb{R}^n$ (si el conjunto no es vacío).

Ejercicio 5. Sea Γ la intersección en $\mathbb{R}^3$ de las superficies

$$S_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \; x^2 + y^2 - z^2 + xy = 1\}$$

$$S_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \; x^2 + y^2 = 1\}.$$

¿Cuales son los puntos de Γ donde la tangente tiene la dirección de los ejes de coordenadas?

Ejercicio 6. Dos superficies S_1 y S_2 se intersectan *transversalmente* si en todo $p \in S_1 \cap S_2$ tenemos $T_pS_1 \neq T_pS_2$. Pruebe que si S_1 y S_2 se intersectan transversalmente entonces $S_1 \cap S_2$ es una curva regular.

Ejercicio 7. Sea el subconjunto de $\mathbb{R}^4$ definido por

$$P = \{(x, y, z, t) | \; x^2 + y^2 + z^2 - t = 3, \; (x - 1)^2 + y^2 + z^2 - t^2 = 0\}.$$

1- Mostrar que P es una subvariedad suave de $\mathbb{R}^4$. ¿Cuál es su dimensión?
2- Mostrar que P es compacta.
3- Mostrar que P no es conexa (observar que $(2, 0, 0, 1)$ y $(-1, 0, 0, -2)$ son elementos de P).
4- Determinar el subespacio vectorial tangente a P en $(2, 0, 0, 1)$.

Ejercicio 8. Mostrar que el conjunto $V_{n,p}(\mathbb{R})$ formado de las familias ortonormales $(v_1, \ldots, v_p)$ de p vectores de $\mathbb{R}^n$ es una subvariedad de $(\mathbb{R}^n)^p$. Determinar su dimensión.

Ejercicio 9. Probar que si X es una subvariedad de $\mathbb{R}^n$, el conjunto de las parejas $(x, v) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ tales que $x \in X$ y $v \in T_xX$ es una subvariedad de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$.

Ejercicio 10. Construir un encaje de $\mathbb{R} \times S^n$ en $\mathbb{R}^{n+1}$.

Ejercicio 1:

Sea Σ dada por $\sigma : (u,v) \longmapsto (u, v, u^2 - v^2)$.

Calculemos la ecuación del plano tangente a Σ en $(1,1)$

$$\partial \sigma_u (u,v)\Big|_{(1,1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2u \end{pmatrix}\Bigg|_{(1,1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\partial \sigma_v (u,v)\Big|_{(1,1)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2v \end{pmatrix}\Bigg|_{(1,1)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Entonces la ecuación del plano tangente a Σ en $(1,1)$ es

$$\det \begin{pmatrix} X & 1 & 0 \\ Y & 0 & 1 \\ Z & 2 & -2 \end{pmatrix} = 0 \iff -2X + 2Y + Z = 0$$

Ejercicio 2 :

Sean a, b, c no todos ≤ 0. Sean

$\Sigma_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid ax^2 + by^2 + cz^2 = 1\}$ y

$\Sigma_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid xyz = 1\}$.

Sea $f_1 : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$

$(x,y,z) \longmapsto ax^2 + by^2 + cz^2 - 1$, y

$f_2 : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$

$(x,y,z) \longmapsto xyz - 1$.

Sea $(x,y,z) \in \Sigma_1 = f^{-1}(\{0\})$

$$\nabla f_1(x,y,z) = 2\begin{pmatrix} ax \\ by \\ cz \end{pmatrix}$$

$$\nabla f_1(x,y,z) \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 2(ax^2 + by^2 + cy^2) = 2 \neq 0$$

$\therefore$ f es una submersión C^∞, entonces es una ecuación local de Σ_1.

Entonces $T_{(x_0,y_0,z_0)}\Sigma_1 = \ker df_{1\,(x_0,y_0,z_0)}$

$$= \operatorname{vect}^{\perp}\left\{\begin{pmatrix} ax_0 \\ by_0 \\ cz_0 \end{pmatrix}\right\}$$

$$= \{(x,y,z) \mid ax_0x + by_0y + cz_0c = 0\}$$

Sea ahora $x \in \Sigma_2 = f_2^{-1}(\{0\})$

$$\nabla f_2(x,y,z) = \begin{pmatrix} yz \\ xz \\ xy \end{pmatrix}, \text{ entonces}$$

$$\nabla f_2(x,y,z) \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = xyz \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$\therefore$ f_2 es una ecuación local de Σ_2, por lo cual,

$$T_{(x_0,y_0,z_0)} \Sigma_2 = \ker df_{2\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}}$$

$$= \operatorname{vect}^{\perp} \left\{ \begin{pmatrix} y_0 z_0 \\ x_0 z_0 \\ x_0 y_0 \end{pmatrix} \right\}$$

Cuya ecuación cartesiana es:

$$x\alpha + y\beta + z\gamma = 0 \quad \text{con } \alpha = y_0 z_0, \ \beta = x_0 z_0, \ \gamma = x_0 y_0$$

Ejercicio 3:

Probemos que la gráfica de $x \longmapsto |x|$ no es una subvariedad de $\mathbb{R}^2$.

Supongamos que $\Sigma := G_{|x|}$ si es una subvariedad de $\mathbb{R}^2$.
Sea f una ecuación local de Σ alrededor del $(0,0)$, esto es:

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \quad \text{tq} \quad f(0,0) = 0 \,, \; f^{-1}(\{0\}) = \Sigma \cap \overset{B}{\overset{\shortparallel}{B_r(0,0)}}$$

y $df_{(x,y)}$ es sobreyectiva $\forall (x,y) \in f^{-1}(\{0\})$.

Tenemos que $\forall (x,y) \in B \; \big(f(x,y) = 0 \iff y = |x| \big)$.
Entonces si $(x,x) \in B$ tenemos que

$$0 = \frac{d}{dx} f(x,x) = \frac{\partial f}{\partial x}(x,x) + \frac{\partial f}{\partial y}(x,x) \quad \forall\, x \geq 0 \text{ y}$$

$$0 = \frac{d}{dx} f(x,-x) = \frac{\partial f}{\partial x}(x,x) - \frac{\partial f}{\partial y}(x,x) \quad \forall\, x \leq 0 \,.$$

En particular

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) + \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) - \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) \,.$$

Entonces: $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$ $\not\exists$! pues $df_{(0,0)}$ es sobre.

Ejercicio 4:

Sea $p(x) := p(x_1, \dots, x_n)$ un polinomio homogeneo tal que $p(tx_1, \dots, tx_n) = t^m p(x_1, \dots, x_n)$. Sea $c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

Mostremos que $p^{-1}(c)$ es una subvariedad de dim $n-1$.

Sea $x := (x_1, \dots, x_n) \in p^{-1}(c)$.

$$\frac{d}{dt} p(tx_1, \dots, tx_n) = m t^{m-1} p(x_1, \dots, x_n)$$

$$\parallel$$

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial p}{\partial x_i}(tx_1, \dots, tx_n) \cdot x_i \, .$$

Evaluando en $t = 1$,

$$\nabla p(x) \cdot x = m p(x) = mc \neq 0 \text{ si } m > 0 \, .$$

Entonces dp_x es sobreyectiva y por lo tanto $p^{-1}(c)$ es una subvariedad.

$\dashv$

Ejercicio 5:

Sean $\Sigma_1 = \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2-z^2+xy = 1 \}$

$\Sigma_2 = \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2 = 1 \}$

Sean $f(x,y,z) = x^2+y^2-z^2+xy-1$

$g(x,y,z) = x^2+y^2-1$

$\boxed{xy=1}$

$df_{(x,y,z)} = (2x+y, 2y+x, -2z)$

$dg_{(x,y,z)} = (2x, 2y, 0)$

$-z^2+\frac{1}{2} = 0$

Sea $V = \begin{pmatrix} 2x+y \\ 2y+x \\ -2z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix}$

$z^2 = \frac{1}{2}$

$= \begin{pmatrix} 2yz \\ -2xz \\ y^2-x^2 \end{pmatrix}$

$z = \pm\sqrt{\frac{1}{2}}$

Es un vector tangente a $\Sigma_1 \cap \Sigma_2$ pues $\in \nabla f_1^{\perp} \cap \nabla f_2^{\perp}$.

V se anula en una de sus componentes si

a) $x^2 = y^2$, en Σ esto sucede en puntos de la forma

$\left(\pm\frac{1}{\sqrt{2}}, \pm\frac{1}{\sqrt{2}}, \pm\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ (8 puntos del espacio)

b) $2yz = 0$, si $z=0 \Longrightarrow xy = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{y}$

si $y = 0$ $x = \pm 1$ $\quad y \neq 0$

$y^2 + \frac{1}{y^2} = 1$

$y^4+1 = y^2$

Observación: $T_x \Sigma_1 \cap \Sigma_2 = T_x \Sigma_1 \cap T_x \Sigma_2$

Ejercicio 6:

Supongamos que Σ_1 y Σ_2 son dos superficies transversales.

Sea $p \in \Sigma_1 \cap \Sigma_2$ y sean f_1 y f_2 ecuaciones locales de Σ_1 y Σ_2 alrededor de p.

Obs: En general no es cierto que si $T = P + L : V \to W$, $\operatorname{im} T = \operatorname{im} P + \operatorname{im} W$, si lo es si $\ker P + \ker W$

Sea $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$

$x \longrightarrow (f_1(x), f_2(x))$

Entonces $x \in (\Sigma_1 \cap \Sigma_2) \cap B$ con $B \subseteq \operatorname{dom} f_1 \cap f_2$ si y solo si $x \in f^{-1}(0,0)$.

$P(w) + L(z)$

$P(w+z) + L(z+w) = T(z+w)$

$$df_x = \pi_1 \circ df_{1x} + \pi_2 \, df_{2x}$$

donde π_i proyección de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}^2$ en la coord i.

Como $T_x \Sigma_1 \neq T_x \Sigma_2$ existen vectores $v_1 \in T_x \Sigma_1 \setminus T_x \Sigma_2$ y $v_2 \in T_x \Sigma_2 \setminus T_x \Sigma_1$

Sea $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Entonces si $\alpha = \dfrac{x}{df_2 V_2}$ y $\beta = \dfrac{y}{df_{1x} V_1}$

$$df_x(\alpha v_1 + \beta v_2) = \alpha \, \pi_2 \circ df_{2x} V_2 + \beta \pi_1 \circ df_{1x} V_1$$

$$= (x,y)$$

$\therefore$ f es una ecuación local $\therefore$ $\Sigma_1 \cap \Sigma_2$ es una subvariedad de dim 1 en $\mathbb{R}^3$, ie: una curva regular.

Ejercicio 7

Sea P el subconjunto de $\mathbb{R}^4$ dado por

$$P = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid \underbrace{x^2+y^2+z^2-t = 3}_{①},\ \underbrace{(x-1)^2+y^2+z^2-t^2=0}_{②}\}$$

1) Mostremos que P es una subvariedad de $\mathbb{R}^4$.

$(3+t) - 2x + 1 - t^2 = 0$

Sea $f: \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^2$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} x^2+y^2+z^2-t-3 \\ (x-1)^2+y^2+z^2-t^2 \end{pmatrix},$$

es C^∞ pues es polinómica.

$$\operatorname{jac} f_{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} 2x & 2y & 2z & -1 \\ 2(x-1) & 2y & 2z & -2t \end{pmatrix}$$

Sea $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in P$. Probemos que las filas de $\operatorname{jac} f_{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}}$ son independientes. Supongamos que existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tq

$$\begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ 2z \\ -1 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 2(x-1) \\ 2y \\ 2z \\ -2t \end{pmatrix},$$ entonces $-1 = -2\lambda t$,

por lo cual $\lambda \neq 0$ y $\lambda = \frac{1}{2t}$

Como $\begin{cases} 2y = 2\lambda y \\ 2z = 2\lambda z \end{cases}$, entonces $y = z = 0$.

Como $2x = 2\lambda(x-1)$ entonces $2x = \frac{x-1}{t} \Rightarrow 4x^2 = \frac{(x-1)^2}{t^2}$

② Se escribe como $(x-1)^2 - t^2 = 0 \Rightarrow \frac{(x-1)^2}{t^2} - 1 = 0$

$\Rightarrow 4x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x = \pm \frac{1}{2}$

Si $x = \pm\frac{1}{2}$, de ① tenemos que $x^2 - t = 3$

$$t = x^2 - 3$$
$$= \frac{1}{4} - 3 = \frac{-11}{4}$$

Si $x = \frac{1}{2}$ en ② $(x-1)^2 - t^2 = 0$

$$\frac{1}{4} - t^2 = 0$$

$$\Rightarrow t = \pm \frac{1}{2} \text{ !}$$

Si $x = -\frac{1}{2}$ en ② $(x-1)^2 - t^2$

$$\left(-\frac{3}{4}\right)^2 - t^2 = 0$$

$$t^2 = \frac{9}{16}$$

$$t = \pm \frac{3}{4} \text{ !}$$

$\therefore$ Las filas de $\operatorname{jac} f \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$ son Li.

Así f es una ecuación local de P y por lo tanto P es una subvariedad de $\mathbb{R}^4$ de dimensión $4-2=2$.

2) P es compacta. P es cerrada por ser $f^{-1}(\{0\})$ y f continua.
Para todo $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4$ con $x \geqslant 0$

$(x-1)^2 + y^2 + z^2 \leq x^2 + y^2 + z^2 + 1$, si además $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in P$
entonces $(x-1) + y^2 + z^2 = t^2$ y $x^2 + y^4 + z^2 + 1 = t + 4$
por lo que $t^2 \leq t + 4$.
Esto implica que t es acotado y como $x^2 + y^2 + z^2 - t = 3$
entonces $x^2 + y^2 + z^2$ es acotada y por lo tanto $\|(x,y,z,t)\|$ es acotado en P.

Así P es compacta.

3. P no es conexa.

Supongamos que existe una trayectoria γ entre los puntos $(2,0,0,1)$ y $(-1,0,0,-2)$ que son elementos de P.

$$\gamma(s) = (x(s), y(s), z(s), t(s)) = (x, y, z, t)$$
$$\gamma(0) = (2,0,0,1)$$
$$\gamma(1) = (-1,0,0,-2)$$

Entonces por la continuidad de γ tiene que haber un punto $s \in (0,1)$ tal que

$\gamma(s) = (0,0,0,t(s)) \in P$. Entonces

$$-\gamma^{1}(s) = 3 \quad \text{y} \quad \gamma(s)^2 = 1 \quad !$$

$\therefore$ P no es conexa.

4. Dado que f es una ecuación local de P en todo punto de P tenemos que

$$T_{\begin{pmatrix}2\\0\\0\\1\end{pmatrix}}P = \ker df_{\begin{pmatrix}2\\0\\0\\1\end{pmatrix}} = \ker\begin{pmatrix}4 & 0 & 0 & -1\\ 2 & 0 & 0 & -2\end{pmatrix}$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix}x\\y\\z\\t\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \;\middle|\; \begin{pmatrix}4 & 0 & 0 & -1\\ 2 & 0 & 0 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\\t\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} \right\}$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix}x\\y\\z\\t\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \;\middle|\; x = t = 0 \right\} \leftarrow \text{dim } 2$$

Corrección ejercicio 7

Calcular ker df

Utilizar que: $\varphi_1 \dots, \varphi_p$ formas lineales indep sobre $\mathbb{R}^n$
$\dim \bigcap \ker \varphi_i = n-p$

<u>Dem</u>: $\varphi(\varphi_1 \dots, \varphi_p)$
$\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p$ sobreyectiva

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2-t = 3 \\ (x-1)^2+y^2+z^2-t^2 = 0 \end{cases}$$

$t \geq -3$

$$-2x+1+(t-t^2) = -3$$

$$x = \frac{+3+t-t^2}{2}$$

$$x^2-2x+1+y^2+z^2 = t^2$$

$t \longrightarrow \infty$

$x \leq 0$

Ejercicio 8: Sea $V_{n,p}(\mathbb{R}) = \{(v_1, \dots, v_p) \in (\mathbb{R}^n)^p \mid v_i \cdot v_j = \delta_{ij}\}$

Sea $f: (\mathbb{R}^n)^p \longrightarrow S_{n\times n}(\mathbb{R})$

$$M_{n\times p}(\mathbb{R}) \ni M \longmapsto MM^T - \mathbb{1}_{n\times n} \quad (M \in M_{n\times p}(\mathbb{R}),\ M^T \in M_{p\times n}(\mathbb{R}))$$

Así $$f(M)_{ij} = \sum_{k=1}^{p} M_{ik} M^T_{kj}$$
$$= \sum_{k=1}^{p} M_{ik} M_{jk} = v_i \cdot v_j \quad \text{para } M = (v_1 \dots, v_p)$$

Por lo tanto $V_{n,p}(\mathbb{R}) = f^{-1}(0)$

$$f(M+H) = (M+H)(M+H)^T$$
$$= (M+H)(M^T+H^T)$$
$$= MM^T + MH^T + HM^T + HH^T$$

$$\therefore\ df_M(H) = MH^T + HM^T$$

Sea $M \in V_{n,p}(\mathbb{R})$ y $S \in S_{n\times n}(\mathbb{R})$

Definimos $H = \left(M^{-1}\frac{S}{2}\right)^T$, entonces

$$df_M(H) = MH^T + HM^T$$
$$= M\left(M^{-1}\frac{S}{2}\right) + \frac{S^T}{2}(M^{-1})^T M^T$$
$$= \frac{S}{2} + \frac{S}{2}(MM^{-1})^T = S$$

Ejercicio 9

Sea X una subvariedad de $\mathbb{R}^n$. Mostremos que

$$TX := \{ (x,v) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \mid x \in X,\ v \in T_x X \}$$

es una subvariedad.

Metodo 1 (Con ecuación local)

Sea $a \in X$ y $f: \mathcal{U}_x \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^k$ una ecuación local de X en a.

Afirmamos que
$$\begin{aligned} \psi: \mathcal{U}_x \times \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^k \\ (x, v) &\longmapsto (f(x), df_x(v)) \end{aligned}$$
es una ecuación local de TX en $(a,0)$.

Observemos primero que $\psi^{-1}(0,0) = (\mathcal{U}_x \cap X, T_x X)$

Probemos que $d_{(a,0)}\psi$ es sobreyectiva.

Sonsideremos primero

$$\begin{aligned} F: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R}^k \\ (x, v) &\longmapsto df_x(v) \end{aligned}$$

$$F(x,v) = \sum_{i=1}^{n} v_i \frac{\partial F}{\partial x_i}(x)$$

$$\frac{\partial F}{\partial x_j}(x,v) = \sum_{i=1}^{n} v_i \frac{\partial^2 F}{\partial x_j \partial x_i}(x) \qquad \frac{\partial F}{\partial v_i}(x,v) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial x_i}(x)$$

$$\therefore \quad dF_{(x,v)}(h,k) = \sum_{j=1}^{n} h_j \sum_{i=1}^{n} v_i \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \cdot x_i}(x)$$

$$+ \sum_{j=1}^{n} k_j \frac{\partial f}{\partial x_j}(x)$$

$$= d^2 f_x(h,v) + df_x(k)$$

Observemos que $\quad d f_x(v)$

$$d\psi_{(x,v)}(h,k) = \left(df_x(h),\, dF_{(x,v)}(h,k)\right)$$

$$= \left(df_x(h),\, d^2 f_x(h,v) + df_x(k)\right)$$

Sean $(l,m) \in \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^k$ entonces, como f es sobreyectiva (por ser ecuación local), existe $h_0 \in \mathbb{R}^n$ tq

$df_x(h_0) = l$, por la misma razón podemos

tomar $K_0 \in \mathbb{R}^n$ tq $df_x(K_0) = m - d^2 f_x(h_0,v)$

Así $d\psi_{(x,v)}(h_0,K_0) = \left(df_x(h_0),\, d^2 f_x(h_0,v) + m - d^2 f_x(h_0,v)\right)$

$$= (l,m)$$

$\therefore$ ψ es ecuación local. de TX en $(0,v)$ (para cualquier $v \in T_aX$.)

Ejercicio 10: Dar un encaje de $S^n \times \mathbb{R}$ en $\mathbb{R}^{n+1}$.

Sea
$$f: S^n \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$$
$$(v,t) \longmapsto ve^t$$

$$df_{(v,t)}: T_v S^n \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$$
$$(h,k) \longmapsto he^t + kve^t$$

Sea $(h,k) \in T_v S^n \times \mathbb{R}$ entonces $h \cdot v = 0$.

Si $df_{(v,t)}(h,k) = 0$ entonces

$he^t = -kve^t$ y por lo tanto

$h = -kv$, entonces

$$h \cdot h = h \cdot (-kv) = -k(h \cdot v) = 0$$

Entonces $\underline{h = 0}$, por lo tanto $-kve^t = 0$
Como $v \in S^n$, $v \neq 0$ y por lo tanto
$\underline{k = 0}$.

Así $\ker d_{(v,t)} f = 0$, así f es inmersión.

Para ver que f es inyectiva, supongamos que
$v_1 e^{t_1} = v_2 e^{t_2} \implies v_1 = e^{t_2 - t_1} v_2$
Como $v_1, v_2 \in S^n$ y $e^{t_2 - t_1} > 0$
$|v_1| = e^{t_2 - t_1} |v_2| \implies e^{t_2 - t_1} = 1$ entonces $t_2 = t_1$ y
$v_1 = v_2$. $\therefore f$ es inmersión inyectiva y por lo tanto un encaje.

Maestría 2024-1

Geometría Diferencial.

Serie de ejercicios 3. Subvariedades 2.

Ejercicio 1. Mostrar que la aplicación

$$\begin{array}{rcl} f: S^2 & \to & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \mapsto & (x,y,z-2z^3) \end{array}$$

es una inmersión. Dibujar la imagen de f.

Ejercicio 2. Mostrar que si M es compacta y N es conexa, una submersión $f: M \to N$ es suprayectiva.

Ejercicio 3. Sea $M(m,n;k)$ el conjunto de las matrices en $M(m,n)$ con rango k. Demuestre que $M(m,n;k)$ es una subvariedad de $M(m,n)$ de dimensión $k(n+m-k)$.
Sugerencia: Dado $X_0 \in M(m,n;k)$, existen matrices $P \in M(m)$, $Q \in M(n)$ tales que

$$PX_0Q = \begin{pmatrix} A_0 & B_0 \\ C_0 & D_0 \end{pmatrix}$$

con $A_0 \in M(k)$ no singular. Si X es cercana a X_0, entonces

$$PXQ = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$$

con $A \in M(k)$ no singular y $X \in M(m,n;k)$ si y sólo si ocurre que $D = CA^{-1}B$.

Ejercicio 4. Sobre la superficie cuspidal, también conocida como paraguas de Whitney, S, dada por $x^2 - y^2z = 0$ en $\mathbb{R}^3$.
a- Describa la parte lisa de S y calcule su codimensión. Mostrar que en una vecindad de un punto de la forma (0,0,z), donde $z > 0$, existe un difeomorfismo que transforma S en dos planos, digamos como

$$(t-s)(t+s) = 0$$

en $\mathbb{R}^3 = \{(t,s,w)\}$.
b- ¿En que puntos la función $(u,v) \to (uv, v, u^2)$ es una inmersión de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^3$?
¿En que puntos define cartas diferenciables para el paraguas de Whitney?

Ejercicio 5. Sean $X \subset Y \subset \mathbb{R}^n$ subvariedades. Supongamos $dim\ X = dim\ Y$.
Probar que X es un abierto de Y.

Ejercicio 6. Sea d un entero positivo. La variedad de Brieskorn V_d^{2n-1} es el conjunto de los puntos $(z_1, z_2, \ldots, z_n) \in \mathbb{C}^{n+1}$ tales que

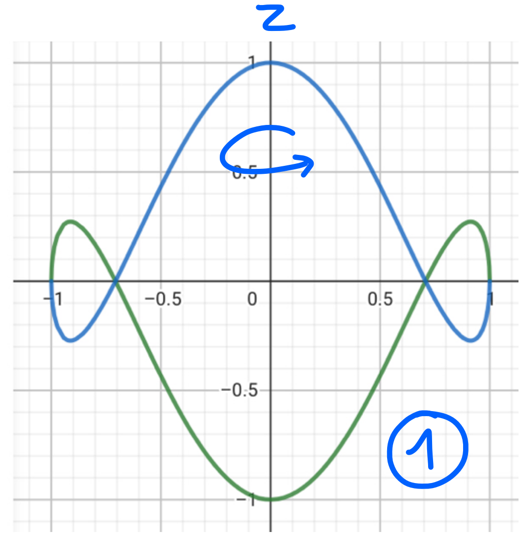
$$z_0^d + z_1^2 + \cdots + z_n^2 = 0 \quad \text{y} \quad z_0\overline{z_0} + \cdots + z_n\overline{z_n} = 1.$$

Mostrar V_d^{2n-1} que es una subvariedad de $\mathbb{C}^{n+1} \equiv \mathbb{R}^{2n+2}$ de clase C^∞ y de dimensión $2n-1$.

Ejercicio 1:

Sea $f: S^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$

$(x,y,z) \longrightarrow (x, y, z - 2z^3)$.



Veamos que f es una inmersión.

$$df_{(x,y,z)} : T_{(x,y,z)} S^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

$$df_{(x,y,z)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1-6z^2 \end{pmatrix}$$

Sea $(a,b,c) \in T_{(x,y,z)} S^2$ tq $df_{(x,y,z)}(a,b,c) = 0$

$$\begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \\ c(1-6z^2) = 0 \end{cases}$$

Como $(a,b,c) \in T_{(x,y,z)} S^2$

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0$$

$\Rightarrow c = 0$

$\Rightarrow cz = 0$

Así $\ker df_{(x,y,z)} = \{0\}$

Como (x,y,z) fue arbitrario f es una inmersión.

Para $(x,y,z) \in S^2$ tenemos que $z = \pm\sqrt{1-r^2}$ con $r = \sqrt{x^2+y^2}$ si $z = \sqrt{1-r^2}$, $(x,y,z-2z^3) = (x,y,\sqrt{1-r^2}(2r^2-1))$

si $z = -\sqrt{1-r^2}$, $(x,y,z-2z^3) = (x,y,-\sqrt{1-r^2}(2r^2-1))$

Wich looks like 1.

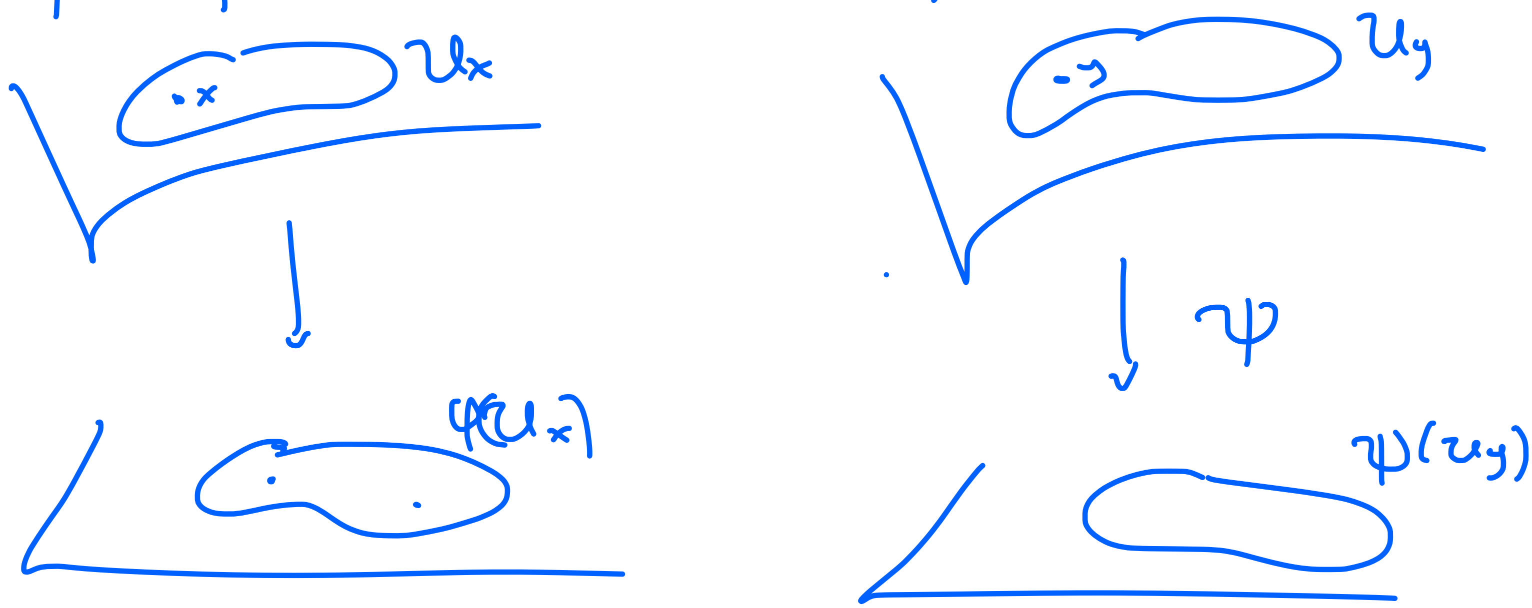
Ejercicio 2: (Hoja 3)

Sea $f: M \longrightarrow N$ una submersión y supongamos M compacta y N conexa. Veamos que f es soprayectiva.

Sea $y \in f(M)$, es decir que existe $x \in M$ tq $f(x) = y$. Como f es una submersión existen cortas

$\varphi: \mathcal{U}_x \longrightarrow \varphi(\mathcal{U}_x) \subseteq \mathbb{R}^m$, $\psi: \mathcal{U}_y \longrightarrow \psi(\mathcal{U}_y) \subseteq \mathbb{R}^n$

$\psi \circ f \circ \varphi^{-1}(x_1, \ldots, x_m) = (x_1, \ldots, x_n) \quad n \leq m$



Afirmamos que $\mathcal{U}_y \subseteq f(M)$.

Sea $z \in \mathcal{U}_y$, como ψ es un difeo existe $\omega \in \psi(\mathcal{U}_y)$ tq $\psi(z) = \omega$.

Como $\psi \circ f \circ \varphi$ es supragectiva, existe $s \in \varphi(\mathcal{U}_g)$ tq $\psi \circ f \circ \varphi(s) = \omega$, así $f \circ \varphi(s) = \psi^{-1}(\omega) = z \quad \therefore z \in f(M)$.

Esto prueba que $f(M)$ es abierto. Como M es compacta $f(M)$ es cerrado. Como N es conexo, $f(M) = N$.

Ejercicio 3: (Hojo 3)

Sea $M(n,m,k)$ el conjunto de matrices de $M(n,m)$ de rango k. Mostremos que $M(n,m,k)$ es una subvariedad de $M(n,m)$.

Sea $X_0 \in M(n,m,k)$. Como $\operatorname{rang}(X) = k$, existen $P \in M(n)$, $Q \in M(m)$ tq

$$PX_0Q = \begin{array}{c} k\{ \\ n-k\{ \end{array} \overbrace{\begin{pmatrix} A_0 & B_0 \\ C_0 & D_0 \end{pmatrix}}^{\;k \qquad m-k} \quad \text{con } A_0 \in GL(k)$$

Sea $L: M(n,m) \longrightarrow M(n,m)$

$\qquad X \longmapsto PX_0Q$.

L es un isomorfismo pues P y Q son invertibles.

Apliquemos operaciones elementales por bloques a la matriz $\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} A^{-1} & 0 \\ 0 & \mathbb{1}_{n-k} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbb{1}_{kk} & A^{-1}B \\ C & D \end{pmatrix}$$

Ejercicio 5

Sean $X \subseteq Y \subseteq \mathbb{R}^N$ subvoriedades con $\dim X = \dim Y$

Probemos que X es abierto en Y.

Sea $x_0 \in X$. Y consideremos $\iota : X \longrightarrow Y$ la inclusión.

$d\iota_{x_0} : T_{x_0}X \longrightarrow T_{x_0}Y$ es un isomorfismo pues

$$\iota = id|_X \quad , \text{entonces } d\iota_{x_0} = d\,id_{x_0}\Big|_{T_{x_0}X} = id_{T_{x_0}X}$$

y como $T_{x_0}X \subseteq T_{x_0}Y$ y $\dim T_{x_0}X = \dim T_{x_0}Y$ ent

$$T_{x_0}X = T_{x_0}Y .$$

Por el teorema de inversión local para variedades existen $\mathcal{U}$ y $\mathcal{V}$ vecindades de x_0 en X y Y respectivamente tq

$$\iota : \mathcal{U} \longrightarrow \mathcal{V} \quad \text{es un difeomorfismo.}$$

Como ι es la inclusión $\mathcal{U} = \mathcal{V}$ y por lo tanto

$\mathcal{V}$ es una vecindad abierta de x_0 en Y que está contenida en X $\therefore$ X es abierto en Y .

Ejercicio 6 (Hoja 3)

Sea $d \in \mathbb{N}^*$. Se define la variedad de Breiskorn V_d^{2n-1} como los $(z_0, z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^{n+1}$ tq

$$z_0^d + z_1^2 + \dots + z_n^2 = 0 \quad \text{y} \quad z_0\bar{z}_0 + \dots + z_n\bar{z}_n = 1.$$

(2)

Sea $\varphi : \mathbb{C}^{n+1} \longrightarrow \mathbb{C} \times \mathbb{R}$

$$(z_0, \dots, z_n) \longrightarrow (z_0^d + z_1^2 + \dots + z_n^2,\ z_0\bar{z}_0 + \dots + z_n\bar{z}_n - 1)$$

Tenemos entonces que $V_d^{2n-1} = \varphi^{-1}(0,0)$.

Veamos que φ es una submersión.

Sea $z = (z_0, \dots, z_n) \in V_d^{2n-1}$ y $h = (h_0, \dots, h_n) \in \mathbb{C}^{n+1}$

$$d\varphi_{(z_0,\dots,z_n)}(h_0, \dots, h_n) = \big(d z_0^{d-1} h_0 + 2z_1h_1 + \dots + 2z_nh_n,$$

$$h_0\bar{z}_0 + z_0\bar{h}_0 + \dots + h_n\bar{z}_n + z\bar{h}_n\big).$$

$$d\varphi_{(z_0,\dots,z_n)}\left(\frac{z_0}{d}, \frac{z_1}{2}, \dots, \frac{z_n}{2}\right) = \Big(0, \underbrace{\frac{2|z_0|^2}{d} + |z_1|^2 + \dots + |z_n|^2}_{\neq 0 \text{ pues si no no se cumple (2)}}\Big)$$

Como $(z_0, \dots, z_n) \neq 0$

Algún $z_i \neq 0$ entonces

$$d\varphi_{(z_0,\dots,z_n)}(0,\dots,0,\overline{z_i},0,\dots,0) = \left(\begin{cases} dz_0^d & \text{si } i=0 \\ 2z_i^2 & \text{si } 1\leq i\leq n \end{cases}, |z_i|^2 \right)$$

$$= (a,b) \quad \text{con } a\neq 0 \text{ y } b\in\mathbb{R}$$

Es decir que para todo $r\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$ existe h_1 tq

$d\varphi_z(h_1) = (0,r)$ y para todo $z\in\mathbb{C}$ existe

$h_2\in\mathbb{C}$ tq

$d\varphi_z(h_2) = (z,\tilde{r})$ pa $\tilde{r}\in\mathbb{R}$ y $z\neq 0$

Entonces dado $(w,t)\in\mathbb{C}\times\mathbb{R}$ tomemos

$$d\varphi_z\left(\left(\frac{t}{r}-\frac{w}{2r}\tilde{r}\right)h_1+\frac{w}{2}h_2\right)$$

$$\left(\frac{t}{r}-\frac{w\tilde{r}}{2r}\right)\varphi_z(h_1) + \frac{w}{2}d\varphi_z(h_2)$$

$$= \left(0,\ t-\frac{w\tilde{r}}{2}\right) + \left(\frac{wz}{2},\frac{w\tilde{r}}{2}\right)$$

$$= (w,t).$$

Así φ es una ecuación local alrededor de z de V_d^{2n-1} que es por lo tanto una variedad de dim $2n+2-3 = 2n-1$.

Maestría 2024-1

Geometría Diferencial.

Serie de ejercicios 4. Variedades diferenciales.

Ejercicio 1. Mostrar que el atlas $(\mathbb{R}, \sqrt[3]{t})$ define sobre $\mathbb{R}$ una estructura de variedad difeomorfa a la estructura canónica dada por $(\mathbb{R}, t)$, pero distinta.

Ejercicio 2. Mostrar que la proyección canónica $p : S^n \to \mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ que a un vector unitario asocia la recta vectorial que genera es una aplicación C^∞, y un difeomorfismo local.

Ejercicio 3. Sea $v : I \to \mathbb{R}^{n+1}\backslash\{0\}$, C^∞, y $p : \mathbb{R}^{n+1}\backslash\{0\} \to \mathbb{P}^n\mathbb{R}$ la proyección canónica. Mostrar que $p \circ v$ es una inmersión en t ssi $v(t)$ y $v'(t)$ son linealmente independientes.

Ejercicio 4. Sea M una variedad diferenciable y $f : M \to N$ un homeomorfismo. Demuestre que N tiene una única estructura diferenciable tal que f es un difeomorfismo.

Ejercicio 5. Sea M una variedad compacta de dimensión n. Demuestre que no existe una inmersión de M al espacio euclidiano de dimensión n.

Ejercicio 6. Mostrar los difeomorfismos $\mathbb{P}^1\mathbb{R} \simeq S^1$, $\mathbb{P}^1\mathbb{C} \simeq S^2$.

Ejercicio 7. Sea $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ definida por $F(x,y,z) = (x^2 - y^2, xy, xz, yz)$. Sea $S^2 \subset \mathbb{R}^3$ la esfera, y $\varphi = F_{|S^2}$. Mostrar que :
a- $\tilde{\varphi} : \mathbb{P}^2\mathbb{R} \to \mathbb{R}^4$, $[p] \mapsto \varphi(p)$ está bien definida.
b- $\tilde{\varphi}$ es una inmersión.
c- $\tilde{\varphi}$ es inyectiva.
Concluir que $\tilde{\varphi}$ es un encaje.

Ejercicio 8. Demuestre que si M y N son variedades y $M \times N$ es orientable, entonces cada una de ellas es orientable.

Ejercicio 9. Mostrar que el haz tangente de una variedad es orientable.

Ejercicio 10. Sean M_1 y M_2 variedades, y sea $\varphi : M_1 \to M_2$ un difeomorfismo local. Muestre que si M_2 es orientable entonces M_1 es orientable.

Ejercicio 11. Denotamos por $\mathbb{S}^2$ a la esfera unitaria en $\mathbb{R}^3$ y por $\mathbb{P}^2$ al cociente de $\mathbb{S}^2$ con la relación antipodal, sea f la aplicación

$$f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3 \quad (x,y,z) \longmapsto (2xz, 2yz, 1 - 2z^2).$$

1. Muestre que la aplicación f se restringe a una aplicación de clase C^∞ g de $\mathbb{S}^2$ en $\mathbb{S}^2$. Muestre que g es suprayectiva.
2. Cuáles son los puntos y valores críticos de g?
3. Recuerde que la proyección canónica $\pi : \mathbb{S}^2 \longrightarrow \mathbb{P}^2$ es un difeomorfismo local. Muestre que existe una única aplicación $h : \mathbb{P}^2 \longrightarrow \mathbb{S}^2$ de clase C^∞ tal que $g = h \circ \pi$.
4. Muestre que h es suprayectiva. Dé sus valores y puntos críticos

Ejercicio 12 : $M^n \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ subvariedad es orientable sii M admite un campo normal unitario (definido sobre todo M).

Ejercicio 1: Mostremos que $\mathbb{R}$, con la estructura diferenciable dada por $\sqrt[3]{x}$ es distinta pero difeomorfa a la usual.

Como $\sqrt[3]{\cdot} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ es un homeo, $(\mathbb{R}, \sqrt[3]{\ })$ define un atlas con una sola carta.

Tomemos $\mathbb{1}_{\mathbb{R}}$ la carta usual de $\mathbb{R}$ con la estructura usual.
Entonces $\sqrt[3]{\ } \circ \mathbb{1}_{\mathbb{R}}^{-1} = \sqrt[3]{\ }$ no es un difeomorfismo pues no es diferenciable en 0, entonces $(\mathbb{R}, \sqrt[3]{\ }) \neq (\mathbb{R}, \mathbb{1}_{\mathbb{R}})$.

Por otro lado $x^3 : (\mathbb{R}, \mathbb{1}_{\mathbb{R}}) \longrightarrow (\mathbb{R}, \sqrt[3]{\cdot})$ es un difeomorfismo pues es biyectiva y en cartas:

$\sqrt[3]{\ } \circ x^3 \circ \mathbb{1}_{\mathbb{R}}^{-1} = \mathbb{1}_{\mathbb{R}}$ muestra que x^3 es C^∞.
$\mathbb{1}_{\mathbb{R}} \circ \sqrt[3]{\ } \circ x^3 = \mathbb{1}_{\mathbb{R}}$ muestra que $\sqrt[3]{\ }$ es C^∞.

$$\therefore \quad (\mathbb{R}, \mathbb{1}_{\mathbb{R}}) \overset{\text{difeo}}{\cong} (\mathbb{R}, \sqrt[3]{\ }) .$$

Ejercicio 2: Veamos que $p: S^n \longrightarrow \mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ es un difeomorfismo local.

Consideremos la inclusión $i: S^n \longrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ y

y la proyección $\pi: \mathbb{R}^{n+1} \longrightarrow \mathbb{P}^n(\mathbb{R})$

Sea $x \in \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$, entonces $x_i \neq 0$ pa $1 \leq i \leq n+1$.

Sea φ_i la carta canónica de $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ en $\mathbb{R}^n$.

$$\begin{array}{ccc} \pi: \mathbb{R}^{n+1} & \longrightarrow & \mathbb{P}^n(\mathbb{R}) \\ & & \Big\downarrow \varphi_i \\ & & \mathbb{R}^n \end{array}$$

$$\varphi_i \circ \pi(x_1, \dots, x_{n+1}) = \left(\frac{x_1}{x_i}, \dots, 1, \dots \frac{x_{n+1}}{x_i}\right)$$

$$d_{(x_1,\dots,x_{n+1})} \varphi_i \circ \pi (h_1, \dots, h_{n+1}) = \left(\frac{h_1}{x_i} - \frac{h_i x_1}{x_i^2}, \dots, 0, \dots, \frac{h_{n+1}}{x_i} - \frac{h_i x_{n+1}}{x_i^2}\right)$$

Como $p = \pi \circ i$,

$$d_{(x_1,\dots,x_{n+1})} p = d_{(x_1,\dots,x_{n+1})} \pi \circ d_{(x_1,\dots,x_{n+1})} i$$

Sea $(h_1, \dots, h_{n+1}) \in \ker d_{(x_1,\dots,x_n)} p \subseteq T_{(x_1,\dots,x_{n+1})} S^1$

$$\frac{h_j}{x_i} = \frac{h_i x_j}{x_i^2} \Longrightarrow h_j = \frac{h_i}{x_i} x_j \quad \forall j = 1, \dots, n$$

$\therefore h = \lambda x$ pero $\langle h, \lambda x \rangle = 0 = \lambda^2 \therefore h = 0$

$\therefore \ker d_x p = 0 \quad \therefore p: T_x S \longrightarrow T_{\pi(x)} \mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ es inyectiva y por dimensiones es un isomorfismo.

Observación (importante para ejercicio 3.)

$\ker dp_x \subseteq \mathbb{R}x$ de hecho $\ker dp_x = \mathbb{R}x$

Ejercicio 3: Sea $v: I \longrightarrow \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$, C^∞ $p: \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ la proyección canónica. Mostremos que $p \circ v$ es una inmersión sii $v'(t)$ y $v(t)$ son l.i.

$$d(p \circ v)_t = (p \circ v)'(t)$$

$$= dp_{v(t)}(v'(t))$$

Obs: $\gamma: I \to M$ es inmersión sii $\gamma'(t) \in T_{\gamma(t)}M$ es $\neq 0$.
$\gamma'(t) = d\gamma_t(1)$ y

$p \circ v$ es una inmersión sii $dp_{v(t)}(v'(t)) \neq 0$
Como $\ker p_{v(t)} = \mathbb{R}\, v(t)$
$dp_{v(t)}(v'(t)) \neq 0$ sii $v'(t)$ y $v(t)$ son l.i.

$\therefore$ $p \circ v$ es inmersión sii $v'(t)$ y $v(t)$ son l.i.

Ejercicio 4: Sea M una variedad diferenciable y $f: M \longrightarrow N$ un homeomorfismo probemos que existe una única estructura diferenciable tq f es un difeo.

Sea $(\mathcal{U}_i, \varphi_i)_{i\in I}$ un atlas maximal de M.

Ent $(f(\mathcal{U}_i), \varphi_i \circ f^{-1})_{i\in I}$ define un atlas diferenciable sobre N pues

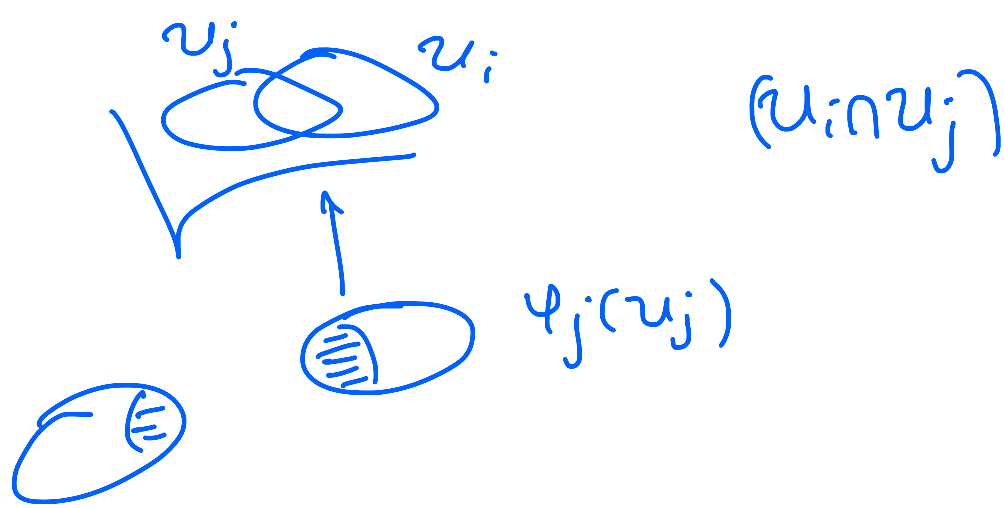
i) $\bigcup_{i\in I} f(\mathcal{U}_i) = f\left(\bigcup_{i\in I} \mathcal{U}_i\right) = f(M) = N$

ii) Sean $i, j \in I$ tq $f(\mathcal{U}_i) \cap f(\mathcal{U}_j) \neq 0$ ent $\mathcal{U}_i \cap \mathcal{U}_j \neq \emptyset$ y $\varphi_i \circ \varphi_j^{-1} : \varphi_j(\mathcal{U}_i \cap \mathcal{U}_j) \longrightarrow \varphi_i(\mathcal{U}_i \cap \mathcal{U}_j)$ es difeo.

$(\varphi_i \circ f^{-1}) \circ (\varphi_j \circ f^{-1})^{-1} = \varphi_i \circ \varphi_j^{-1}$ es difeo.

Así $(f(\mathcal{U}_i), \varphi_i \circ f^{-1})_{i\in I}$ es una estructura dif en N.

Sea



Ejercicio 5: Sea $f: M \longrightarrow \mathbb{R}^n$, C^∞ con M compacta.

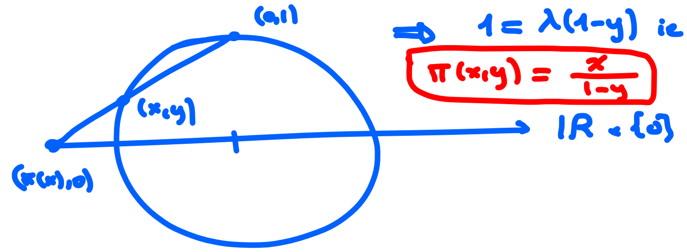
Supongamos que f es una inmersión.
$df_m : T_m M \longrightarrow \mathbb{R}^n$ es inyectiva, entonces es un isomorfismo.
Por el TIL f es un difeo local.
Por lo tanto $f(M)$ es abierto, pero como M es compacto
$f(M)$ es cerrado. Entonces $f(M) = \mathbb{R}^n$ pues $\mathbb{R}^n$ conexo.
$\therefore$ $\mathbb{R}^n$ es compacto !

Ejercicio 6 :

$$(\pi(x,y), -1) = \lambda(x, y-1)$$

$$\Rightarrow \; 1 = \lambda(1-y) \text{ ie } \lambda = \frac{1}{1-y}$$

$$\boxed{\pi(x,y) = \frac{x}{1-y}}$$

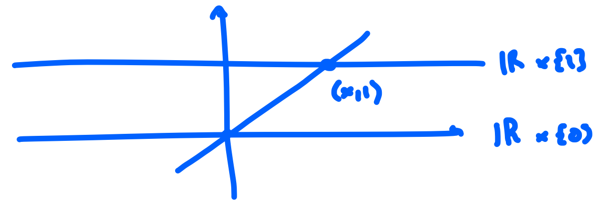


$$S^1 \simeq \mathbb{P}^1(\mathbb{R})$$

Sea $\pi: S^1 \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$

$$(x,y) \longmapsto \frac{x}{1-y} \quad \text{si } (x,y) \neq (0,1)$$

$$(0,1) \longmapsto \infty$$



$$j : \mathbb{R} \cup \{\infty\} \longrightarrow \mathbb{P}^1(\mathbb{R})$$

$$x \longmapsto [(x,1)] .$$

$$\infty \longmapsto [(1,0)] .$$

Sea $f: S^2 \longrightarrow \mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ definida como

$f = j \circ \pi$ entonces

$$f(x,y) = j(\pi(x,y))$$

$$= \begin{cases} j\left(\frac{x}{1-y}\right) = \left[\left(\frac{x}{1-y}, 1\right)\right] & \text{si } (x,y) \neq (0,1) \\ j(\infty) = [(1,0)] & \text{si } (x,y) = (0,1) \end{cases}$$

Observemos que f es diferenciable en $S^1 \setminus \{(0,1)\}$ pues

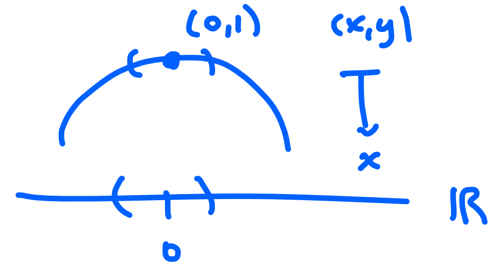
$$h: \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,1)\} \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

$$(x,y) \longmapsto \left(\frac{x}{1-y}, 1\right) \quad \text{es diferenciable.}$$

Entonces $h_{|S^1}$ es dif y al pasar al cociente sigue siendo diferenciable.

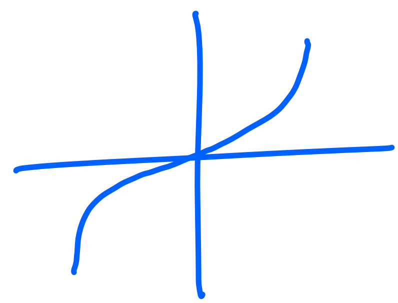
Para verificar que $j\circ\pi$ es diferenciable en $(0,1)$, compongamos con la carta

$$\varphi : U = \{[(x,y)] \mid x \neq 0\} \subseteq \mathbb{P}^1(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$[(x,y)] \longmapsto \frac{y}{x}$$



y con la carta $\psi : S^2 \cap \mathbb{R}^2_+ \longrightarrow \mathbb{R}$
$$(x,y) \longmapsto x$$

$$\begin{aligned}
\varphi\circ f\circ \psi^{-1}(x,y) &= \varphi\left(f(x,\sqrt{1-x^2})\right) \\
&= \varphi\left(\left[\frac{x}{1-\sqrt{1-x^2}}, 1\right]\right) \\
&= \frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x}
\end{aligned}$$



para ver que es diferenciable en una vecindad de 0 basta ver que

$$\begin{aligned}
\left(\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x}\right)' &= \frac{-\frac{1}{2\sqrt{1-x^2}}(-2x)x - (1-\sqrt{1-x^2})}{x^2} \\
&= \frac{\frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} + \sqrt{1-x^2} - 1}{x^2} \\
&= \frac{\frac{x^2 + (1-x^2) - \sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^2}}}{x^2} \\
&= \frac{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - 1}{x^2} \xrightarrow{x\to 0} \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

Ejercicio 7: Sea $F: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^4$

$$(x,y,z) \longmapsto (x^2-y^2, xy, xz, yz)$$

$$\varphi = F|_{S^2}.$$

$$\tilde{\varphi}: \mathbb{P}^2(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}^4, \quad \tilde{\varphi}([p]) = \varphi(p)$$

a) Veamos que $\tilde{\varphi}$ está bien def.

Sean $[p] = [q]$, si $p, q \in S^2$ entonces

$p = \pm q$, en tal caso

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi}([p]) = \varphi(p) &= (p_1^2 - p_2^2, p_1p_2, p_1p_3, p_2p_3) \\ &= (q_1^2 - q_2^2, q_1q_2, q_1q_3, q_2q_3) \\ &= \varphi(q) \\ &= \tilde{\varphi}([q]). \end{aligned}$$

b) Veamos que $\varphi: S^2 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ es una inmersión ya que en ese caso, como π es dife local $\tilde{\varphi}$ será inmersión.

$$\begin{tikzcd} S^2 \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\pi"'] & \mathbb{R}^4 \\ \mathbb{P}^2\mathbb{R} \arrow[ur, "\tilde{\varphi}"'] & \end{tikzcd}$$

mostrar que φ es inmersión.

F es inmersión

$$(x^2-y^2, xy, xz, yz)$$

$$dF_{(x,y,z)} = \begin{pmatrix} 2x & -2y & 0 \\ y & x & 0 \\ z & 0 & x \\ 0 & z & y \end{pmatrix}$$

$$dF_{(x,y,z)} \begin{pmatrix} h \\ k \\ l \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2xh - 2yk \\ yh - xk \\ zh + xl \\ zk + yl \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$dF_{(x,y,z)} = \begin{pmatrix} 2x & -2y & 0 \\ y & x & 0 \\ z & 0 & x \\ 0 & z & y \end{pmatrix}$$

$$dF_{(x,y,z)} \begin{pmatrix} h \\ k \\ l \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2xh - 2yk \\ yh - xk \\ zh + xl \\ zk + yl \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} (1 \\ (2 \\ (3 \\ (4 \end{matrix}$$

$$xh + yk + zl = 0 \qquad (5$$

$$2xh + 2yk + 2zl = 0$$

$$4xh + 2zl = 0 \qquad 2(5) + 1$$

$$2xh + zl = 0$$

$$xh + zl = -xh$$

$$yk - xh = 0$$

$$(2x + y + z)h + (-2y - x)k + (x+y)l = 0$$

Ejercicio 8: Probemos que si $M \times N$ es orientable entonces M y N son orientables.

Lema: M es orientable si y solo si
Para toda curva cerrada $\gamma : [0,1] \longrightarrow M$ $(\gamma(0) = \gamma(1))$
Si $[B_{\gamma(t)}]$ es una orientacion continua
(ie $B_{\gamma(t)} = \left(\frac{\partial}{\partial x_i}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}\right)$ con $\frac{\partial}{\partial x_i} = d\varphi^{-1}_{\varphi(\gamma(t))} e_i$

φ carta alrededor de $\gamma(t)$).
Entonces $[B_0] = [B_1]$

$\Longrightarrow$ Ver notas

$\Longleftarrow$ Supongamos M arcoconexa.

Sea $x_0 \in M$ y $\varphi : \mathcal{U}_{x_0} \longrightarrow \mathbb{R}^m$ carta alrededor de x_0.

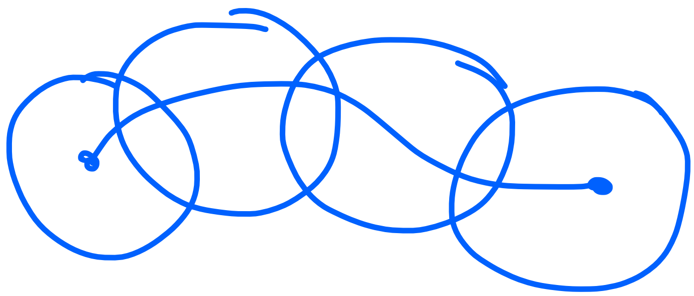
Definimos la orientacion en $\mathcal{U}_{x_0}$ como

$$[B_x] = \left[\frac{\partial}{\partial x_1}(x), \dots, \frac{\partial}{\partial x_m}(x)\right] \text{ donde } \frac{\partial}{\partial x_i}(x) = d\varphi^{-1}_{\varphi(x)} e_i$$

Sea $y \in M$ y $\gamma : [0,1] \longrightarrow M$ tq $\gamma(0) = x$
$\gamma(1) = y$.

Para cada $t \in [0,1]$ existe $\mathcal{U}_t$ dominio de una carta alrededor φ^t alrededor de $\gamma(t)$.

La imagen $\mathcal{C}$ de γ es un compacto y $\{\mathcal{U}_t\}_{t\in[0,1]}$ una cubierta abierta de $\mathcal{C}$. Entonces existe $\{\mathcal{U}_{t_0},\dots,\mathcal{U}_{t_n}\}$ Subcubierta finita de $\mathcal{C}$.



Podemos suponer que

$$\mathcal{U}_{t_i}\cap\mathcal{U}_{t_j}=\emptyset \quad \forall\, i,j \text{ tq } j\neq i+1 \text{ salvo } \mathcal{U}_{t_0}\cap\mathcal{U}_{t_n}\neq\emptyset$$

De esta form podemos asegurar que

$$\text{Jac } \varphi_2\circ\varphi_1^{-1} > 0 \quad \text{de no ser el caso}$$

tomamos $\tilde{\varphi}_2(x)=(-\varphi_1(x),\varphi_2(x),\varphi_3(x),\dots,\varphi_{n}(x))$

Siguiendo de esta forma podemos suponer que $\text{Jac } \varphi_{i+1}\circ\varphi_i > 0$ y por lo tanto

$\forall\, 0\leq i\leq n$. Para $\varphi_n\circ\varphi_1^{-1}$ utilizamos la hipótesis

Por hipótesis $[B_0]=[B_1]$.

Repitiendo este proceso con cada $y\in M$ obtenemos una orientación para M.

Ahora, supongamos que $M \times N$ es orientable.

Sea $\gamma : [0,1] \longrightarrow$

Maestría 2024-1

Geometría Diferencial

Serie de ejercicios 5.

Ejercicio 1. Mostrar que la fórmula

$$X(x_1, y_1, \ldots, , x_n, y_n) = (-y_1, x_1, \ldots, -y_n, x_n).$$

define un campo vectorial sobre la esfera unitaria S^{2n-1} de $\mathbb{R}^{2n}$. Verificar que no se anula.

Ejercicio 2. Encontrar la imagen
1- de X, campo de vectores de $\mathbb{R}^n$, por la traslación $x \mapsto x + v$
2- de X, campo de vectores de $\mathbb{R}^n$, por la homotecia $x \mapsto \lambda x$ (λ real distinto de 0)
3- de $\frac{d}{dx}$ (campo de vectores sobre $\mathbb{R}$) por $x \mapsto e^x$.

Ejercicio 3. Probar la identidad de Jacobi

$$[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0$$

donde X, Y, Z son campos sobre una variedad M, de dos maneras:
1- tomando coordenadas locales;
2- derivando la identidad

$$[\varphi_{t*}X, \varphi_{t*}Y] = \varphi_{t*}[X, Y]$$

donde φ_t es el flujo de Z.

Ejercicio 4. Sea X un campo de vectores sobre M. Supongamos que para todo campo de vectores Y tenemos $[X, Y] = 0$. Mostrar que $X = 0$.

Ejercicio 5. Sean X y Y dos campos de vectores sobre M tangentes a la subvariedad $N \subset M$ (i.e., para todo $x \in N$, $X(x)$ y $Y(x)$ pertenecen a $T_xN \subset T_xM$). Mostrar que $[X, Y]$ es tambien tangente a N.

Ejercicio 6. Sea $\alpha \in \Lambda^2(\mathbb{R}^{2n*})$ definida por :

$$\alpha = dx_1 \wedge dx_2 + \ldots + dx_{2n-1} \wedge dx_{2n}.$$

Calcular $\alpha \wedge \ldots \wedge \alpha$ (n veces) (empezar con $n = 2$).

Ejercicio 7. Calcular las diferenciales exteriores de las formas diferenciales siguientes :
a- $\omega = 2xydx + x^2dy$;
b- $\omega = xdy \wedge dz + ydz \wedge dx + zdx \wedge dy$.
c- $\omega = 2zxdy \wedge dz + 2yzdz \wedge dx - (x^2 - y^2)dx \wedge dy$.

Ejercicio 8. Sea $U = (\mathbb{R}^{+*})^3$, y

$$\omega(x, y, z) = \frac{(z + y)dx + (z - x)dy - (x + y)dz}{(y + z)^2}.$$

Probar que ω es exacta y encontrar todas las funciones f sobre U tales que $\omega = df$.

Ejercicio 9. Sea ω la 2-forma sobre $\mathbb{R}^3$ definida por :

$$\omega(x, y, z) = x dy \wedge dz + y dz \wedge dx + z dx \wedge dy.$$

Sea $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1$, la ecuación de la esfera S^2.
a- Probar que :

$$\omega \wedge df = 2(x^2 + y^2 + z^2) dx \wedge dy \wedge dz.$$

b- Deducir de a- que la integral de ω sobre S^2 es igual al area de la esfera.
c- Calcular esta area considerando la parametrización de la esfera

$$\varphi(s, t) = (\sin(s)\cos(t), \sin(s)\sin(t), \cos(s)),$$

y calculando la integral de $\varphi^*\omega$ sobre el rectángulo $0 \leq s \leq \pi$, $0 \leq t \leq 2\pi$.

Ejercicios personales :

1) Explicar dualidad $\left(\frac{\partial}{\partial x_1}(\psi(x)), \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}(\psi(x))\right)$

Con $\psi : \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathcal{U} \subseteq M$ una param local. $\left(dx_1\,_{\psi(x)}, \dots, dx_n\,_{\psi(x)}\right)$

2) Dar una base explícita de $A_k(T_{\psi(x)}M, \mathbb{R})$

Ejercicio 1 Hoja 5

Definimos $X(x_1, y_1, \dots, x_n, y_n) = (-y_1, x_1, \dots, -y_n, x_n)$

Sobre $S^{2n-1} \subseteq \mathbb{R}^{2n}$.

La función $\phi: \mathbb{R}^{2n} \longrightarrow \mathbb{R}^{2n}$

$$(x_1, y_1, \dots, x_n, y_n) \longmapsto (-y_1, x_1, \dots, -y_n, x_n)$$

es suave.

Por lo tanto $X = \phi|_{S^{2n-1}}$ es suave.

Además $X(x) \in T_x S^{2n-1}$ pues $X(x) \cdot x = 0$.

Así $X : S^{2n-1} \longrightarrow T_x S^{2n-1}$ es un campo vectorial.

Claramente no se anula.

Ejercicio 2

Calcula la imagen de

1. Un campo vectorial X en $\mathbb{R}^N$ por la traslación $x \longmapsto v+x$

$$\phi_* X(x) = d\phi_{\phi^{-1}(x)} \circ X(\phi^{-1}(x))$$

$$= X(x-v)$$

2. Un campo vectorial X en $\mathbb{R}^n$ por $\phi(x) = \lambda x \quad \lambda \neq 0$

$$\phi_* X(x) = d\phi_{\phi^{-1}(x)} \circ X(\phi^{-1}(x))$$

$$= \lambda X\left(\frac{x}{\lambda}\right)$$

3. de $\frac{d}{dx}$ campo de vectores sobre $\mathbb{R}$ por $x \longrightarrow e^x$. $\quad \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^+$

$$\phi_* X(x) = d\phi_{\phi^{-1}(x)} \circ X(\phi^{-1}(x)) \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}^+$$

$$= d\phi_{\log(x)} X(\log(x))$$

$$= e^{\log(x)} \underbrace{X(\log(x))}$$

Campo constante $\frac{d}{dx}$

$$= x$$

Ejercicio 3   2)

3. 2) Derivando la identidad

$$\varphi_{*t}[X,Y] = [\varphi_{t*}X, \varphi_{t*}Y]$$

Por un lado $\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \varphi_{t*}[X,Y] = -[Z,[X,Y]]$

Por otro lado $\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} [\varphi_{t*}X, \varphi_{t*}Y]$

$$= \left[\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \varphi_{t*}X, Y\right] + \left[X, \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \varphi_{t*}Y\right]$$

$$= -[[Z,X],Y] - [X,[Z,Y]]$$

$$= [Z,[X,Y]] + [Y,[Z,X]] + [[Z,Y],X]$$

$$= [X,[Y,Z]] + [Y,[Z,X]] + [Z,[X,Y]]$$

Ejercicio 4: Sea X un campo de vectores sobre M tq $[X,Y]=0$ $\forall\, Y \in \Gamma(TM)$.

Dem 1: (Coordenadas locales)

$$X = \sum_{i=1}^{n} X_i \frac{\partial}{\partial x_i} \qquad Y = \sum_{j=1}^{n} Y_j \frac{\partial}{\partial x_j}$$

Sabemos que $[X,Y]^i = \sum_{j=1}^{n} X^j \frac{\partial Y^i}{\partial x_j} - Y^j \frac{\partial X^i}{\partial x_j}$

Consideremos $Y = \frac{\partial}{\partial x_k}$

$$[X,Y]^i = -\frac{\partial X^i}{\partial x_k} = 0 \qquad \forall i,k = 1,\dots,n$$

$\Rightarrow$ X is constant.

$$\therefore [X,Y]^i = \sum_{j=1}^{n} X^j \frac{\partial Y^i}{\partial x_j}$$

Tomando ahora el campo $Y = x_k \frac{\partial}{\partial x_k}$

entonces $\frac{\partial Y^i}{\partial x_k} = \delta_{ik}$

$$[X,Y]^k = \sum_{j=1}^{n} X^j \frac{\partial Y^k}{\partial Y_j} = X^k = 0$$

Así $X = 0$.

Ejercicio 5

Sean X, Y campos sobre M tangentes a una subvariedad $N \subset M$. Mostremos que $[X, Y]$ es tangente a N.

$$[X,Y] = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0}$$

Ejercicio 6: Sea $\alpha \in \Lambda^2(\mathbb{R}^{2n+})$ dada por

$$\alpha = dx_1 \wedge dx_2 + \cdots + dx_{2n-1} \wedge dx_{2n}$$

Entonces

$$\underbrace{\alpha \wedge \alpha \wedge \alpha \wedge \cdots \wedge \alpha}_{n\text{-veces}} = n!\; dx_1 \wedge dx_2 \wedge \cdots \wedge dx_{2n}$$

Ejercicio 7: Cálculo de diferenciales exteriores

a) $\alpha = 2xy\, dx + x^2 dy$

$d\alpha = (2y\, dx + 2x dy) \wedge dx + 2x\, dx \wedge dy$

$= 2x\, dy \wedge dx + 2x\, dx \wedge dy = 0$

b) $\beta = x dy \wedge dz + y\, dz \wedge dx + z\, dx \wedge dy$

$d\beta = dx \wedge dy \wedge dz + dy \wedge dz \wedge dx + dz \wedge dx \wedge dy$
$= 3\, dx \wedge dy \wedge dz$

c) $\omega = 2zx\, dy \wedge dz + 2yz\, dz \wedge dx + (x^2 - y^2)\, dx \wedge dy$

$d\omega = 2z - 2z + 0\, dx \wedge dy \wedge dz$
$= 0$

Ejercicio 9: Sea ω la 2-forma sobre $\mathbb{R}^3$ dada por

$$\omega(x,y,z) = x\, dy\wedge dz + y\, dz\wedge dx + z\, dx\wedge dy$$

Sea $f(x,y,z) = x^2+y^2+z^2-1$ la ecuación de la esfera S^2

a) $$\omega\wedge df = \omega\wedge\left(2x\,dx + 2y\,dy + 2z\,dz\right)$$

$$= 2\left(x^2+y^2+z^2\right) dx\wedge dy\wedge dz$$

b)

$$d(\omega\wedge f) = d\omega\wedge f + \omega\wedge dF$$

$$\int_{B_1(0)} d(\omega\wedge f) = \int_{S^2} \omega\wedge f = 0$$

$$\int_{B_1(0)} d\omega\wedge f + \int_{B_1(0)} \omega\wedge df = 0$$

Maestría 2024-1

Geometría Diferencial

Serie de ejercicios 6.

Ejercicio 1. Sea $\mathbb{S}^2$ la esfera unitaria en $\mathbb{R}^3$. En $\mathbb{S}^2$ podemos definir dos cartas por proyección estereográfica desde el polo norte $N = (0,0,1)$ y desde el polo sur $S = (0,0,-1)$. Esto define dos sistemas de coordenadas, (x_N, y_N) en $U = \mathbb{S}^2 \setminus N$ y (x_S, y_S) en $V = \mathbb{S}^2 \setminus S$. Recordamos que la fórmula de cambio de coordenadas es

$$(x_S, y_S) = \frac{(x_N, y_N)}{r_N}$$

con $r_N = x_N^2 + y_N^2$.
a. Escribir dx_S, dy_S y $dx_S \wedge dy_S$ en términos de dx_N, dy_N y $dx_N \wedge dy_N$.
b. Verificar que la 2-forma diferencial ω definida en U y V por las fórmulas

$$\omega|_U = \frac{-4}{(1+r_N)^2} dx_N \wedge dy_N, \qquad \omega|_V = \frac{4}{(1+r_S)^2} dx_S \wedge dy_S,$$

respectivamente, está bien definida en la esfera.
c. Sean (x, y, z) el sistema de coordenadas canónico en $\mathbb{R}^3$ y el campo vectorial $X = x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y} + z\frac{\partial}{\partial z}$ Demostrar que X, $\Omega = dx \wedge dy \wedge dz$ y $\beta = \iota_X \Omega$ son invariantes bajo rotaciones (cuyo eje sea una recta que pasa por el origen) (recordemos que, por definición, para todo $p \in \mathbb{R}^3$, y $u, v \in T_p\mathbb{R}^3 \simeq \mathbb{R}^3$,

$$\iota_X \Omega_p(u, v) := \Omega_p(X(p), u, v)).$$

Verificar que β es una forma de volumen en $\mathbb{S}^2$.

Ejercicio 2. Demostrar que si α es una $(n-1)$-forma con soporte compacto en $\mathbb{R}^n$ entonces α satisface $\int_{\mathbb{R}^n} d\alpha = 0$.

Ejercicio 3. Denotemos por (x, y) las coordenadas sobre $\mathbb{R}^2$. Sea $p : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2 = \mathbb{T}^2$ la proyección. Muestre que existe una única 2-forma ω sobre $\mathbb{T}^2$ tal que

$$p^*\omega = dx \wedge dy.$$

¿Es esta forma cerrada? ¿Es esta forma exacta?

Ejercicio 4. Sea M una variedad compacta, orientable, sin frontera, y sea ω una forma diferencial de grado $n-1$ sobre M. Mostrar que existe $p \in M$ tal que $d\omega_p = 0$.

Ejercicio 5. Sea α una forma de grado 1 sobre la esfera S^2. Supongamos que:

$$\forall \varphi \in \ SO(3), \qquad \varphi^*\alpha = \alpha.$$

Probar que $\alpha = 0$.

Ejercicio 1. Sea S^2 la esfera en $\mathbb{R}^3$ y $(x_N, y_N), (x_S, y_S)$ los sistemas de coordenadas asociados a las proyecciones estereográficas desde el polo norte y polo sur de la esfera.

Recordemos que $\quad (x_S, y_S) = \dfrac{(x_N, y_N)}{r_N}$, $\; r_N = x_N^2 + y_N^2$

a) $$dx_S = d\,\frac{x_N}{x_N^2+y_N^2} \qquad\qquad dy_S = \frac{r_N - 2y_N^2}{r_N^2}\, dy_N$$

$$= \frac{r_N - 2x_N^2}{r_N^2}\, dx_N + \frac{2y_N x_N}{r_N^2}\, dy_N$$

$$= \frac{y_N^2 - x_N^2}{r_N^2}\, dx_N + \frac{2y_N x_N}{r_N^2}\, dy_N$$

$$dy_S = d\,\frac{y_N}{x_N^2+y_N^2}$$

$$= \frac{2x_N y_N}{r_N^2}\, dx_N + \frac{r_n - 2y_N^2}{r_N^2}\, dy_N$$

$$= \frac{2x_N y_N}{r_N^2}\, dx_N + \frac{x_N^2 - y_N^2}{r_N^2}\, dy_N$$

$$\therefore\; dx_S \wedge dy_S = \left[-\frac{(x_N^2 - y_N^2)^2}{r_N^4} - \frac{4x_N^2 y_N^2}{r_N^4}\right] dx_N \wedge dy_N$$

$$= -\frac{(x_N^2 + x_N^2)^2}{r_N^4} = -\frac{1}{r_N^2}\, dx_N \wedge dy_N$$

b) $$\omega|_U = \frac{-4}{(1+r_N)^2}\, dx_N \wedge dy_N$$

$$\omega|_V = \frac{4}{(1+r_S)^2}\, dx_S \wedge dy_S$$

$$\omega|_{U\cap V} = -\frac{4}{(1+r_S)^2} \cdot \frac{1}{r_N^2}\, dx_N \wedge dy_N$$

$$= -\frac{4}{\left(1+\frac{1}{r_N}\right)^2} \quad \frac{1}{r_N^2}\, dx_N \wedge dy_N$$

$$= \frac{-4\,\cancel{r_n^2}}{(1+r_n)^2} \cdot \frac{1}{\cancel{r_N^2}}\, dx_N \wedge dy_N$$

$$= \frac{-4}{(1+r_n)^2}\, dx_N \wedge dy_N$$

c) Sean $X = x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y} + z\frac{\partial}{\partial z}$ campo en $\mathbb{R}^3$

$\Omega = dx \wedge dy \wedge dz$ 3-forma en $\mathbb{R}^3$ y

$\iota_X\Omega$ definida por $\iota_X\Omega_p(u,v) = \Omega_p(X(p),u,v)$
con $p \in \mathbb{R}^3$ y $u,v \in T_p\mathbb{R}^3 \sim \mathbb{R}^3$.

Sea $F \in SO(3)$. Sea $p \in \mathbb{R}^3$, $F(p) \in \mathbb{R}^3$, sea $u \in T_{F(p)}\mathbb{R}^3$

$$F_*X(p) = dF_p\left(X(F^{-1}(p))\right)$$
$$= (F \circ X \circ F^{-1})(p)$$
$$= F\left(F_1^{-1}(p)\frac{\partial}{\partial x} + F_2^{-1}(p)\frac{\partial}{\partial y} + F_3^{-1}(p)\frac{\partial}{\partial z}\right)$$

$$= p_1\frac{\partial}{\partial x} + p_2\frac{\partial}{\partial y} + p_3\frac{\partial}{\partial z} = X(p)$$

Probemos ahora que $\Omega = dx \wedge dy \wedge dz$ es invariante por rotaciones.

Sea $p \in \mathbb{R}^3$ y $u, v, w \in$

$$F^*\Omega_p(u,v,w) = \Omega_{F(p)}(dF_p(u), dF_p(v), dF_p(w))$$

$$= \Omega_{F(p)}(F(u), F(v), F(w))$$

$$= \det(Fu, Fv, Fw) = \det(u, v, w)$$

$$= \Omega_p(u,v,w).$$

$\therefore$ Ω es invariante por rotaciones.

Veamos que $i_X\Omega$ es invariante por rotaciones.

$$F^* i_X\Omega_p(u,v) = i_X\Omega_{F(p)}(dF_p u, dF_p v)$$

$$= i_X\Omega_{F(p)}(Fu, Fv)$$

$$= \Omega_{F(p)}(X(F(p)), Fu, Fv)$$

$$= \Omega_{F(p)}(F(X(p)), Fu, Fv)$$

$$= \det(X(p), u, v)$$

$$= i_X\Omega_p(u,v)$$

Es forma de volumen en S^2 pues para todos u, v l.i.
$i_X\Omega_p(u,v) \neq 0$.

Ejercicio 2: Sea α una $(n-1)$-forma en $\mathbb{R}^n$ con soporte compacto.

Como α es una $(n-1)$ forma, tiene la forma

$$\alpha = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \; dx_1 \wedge \dots \wedge \widehat{dx_i} \wedge \dots \wedge dx_n$$

Observemos que $\operatorname{supp} \alpha = \bigcup \operatorname{supp} \alpha_i$

Entonces cada α_i tiene soporte compacto.

$$d\alpha = \left(\sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} \frac{\partial \alpha^i}{\partial x_i} \right) dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n$$

$$\int_{\mathbb{R}^n} d\alpha = \int_{\mathbb{R}^n} \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} \frac{\partial \alpha^i}{\partial x_i} \; dx_1 dx_2 \dots dx_n$$

$$= \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial \alpha^i}{\partial x_i} \; dx_1 \dots dx_n$$

$$= \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} \left[\lim_{a \to \infty} \alpha^i(x_1, \dots, a, \dots, x_n) - \lim_{a \to -\infty} \alpha^i(x_1, \dots, a, \dots, x_n) \right]$$

$$= 0$$

<u>Otra forma</u>: (Con teorema de Stokes)

Sea $r > 0$ tq $\operatorname{supp} \alpha \subseteq B_r(0)$ entonces $\operatorname{supp} d\alpha \subseteq B_r(0)$

$$\int_{\mathbb{R}^n} d\alpha = \int_{B_{r+1}(0)} d\alpha = \int_{\partial B_{r+1}(0)} \alpha = 0$$

Ejercicio 3: Sea $p : \mathbb{R}^2 \longrightarrow T^2 = \mathbb{R}^2 / \mathbb{Z}^2$

Unicidad: Sea ω una 2-forma definida en T^2 tal que
$p^*\omega = dx \wedge dy$

Sea $a \in \mathbb{R}^2$ y consideremos las cartas usuales

$\varphi_a : \mathcal{U}_a \longrightarrow V_a$ del toro $\mathcal{U}_a = \left(a - (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})\right] \times \left(a + (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})\right) / \sim$

$\varphi_a = p_{|\mathcal{U}_a}$. $\qquad V_a = \left(a - (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})\right) \times \left(a + (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})\right)$

Entonces $(\varphi_a^{-1})^* p^*\omega = (\varphi_a^{-1})^* dx \wedge dy$ campo sobre $T^2_{|V_a}$

$$(p_{|\mathcal{U}_a}^{-1})^* p^* \omega = (p_{|\mathcal{U}_a}^{-1})^* dx \wedge dy$$

$$(p \circ p_{|\mathcal{U}_a}^{-1})^* \omega = (p^{-1}_{|\mathcal{U}_a})^* dx \wedge dy$$

$$\omega_{|V_a} = (p^{-1}{}_{|V_a})^* dx \wedge dy \qquad (1)$$

Probemos que (1) define unívocamente a ω
es decir

$$(p^{-1}{}_{|V_a})^* dx \wedge dy = (p^{-1}{}_{|V_b})^* dx \wedge dy \quad \text{en } V_a \cap V_b$$

$$(p_{|V_b})^* (p^{-1}{}_{|V_a})^* dx \wedge dy = (p^{-1}_{|V_a} \circ p_{|V_b})^* dx \wedge dy$$

$$= T^* dx \wedge dy$$

con T una traslación por un vector de $\mathbb{Z}^2$.

Sea $x \in \mathcal{U}_a \cap \mathcal{U}_b$ y $u, v \in T_x \mathbb{R}^n$

$$(T^* \, dx \wedge dy)_x [u, v]$$

$$= dx \wedge dy \, [u, v] = \det(u, v)$$

Por lo tanto $\omega_{|V_a} := (p^{-1}_{|V_a})^* \, dx \wedge dy$ está bien definida

Además como $p^* \omega = p^*_{|V_a} (p^{-1}_{|V_a})^* \, dx \wedge dy$

$$= dx \wedge dy .$$

- Como ω es una forma de grado 2 en el toro de dimensión 2 entonces es cerrada.

- Supongamos que ω es exacta. Es decir que existe α 1-forma sobre T^2 tq $d\alpha = \omega$.

$$0 \underset{\text{Stokes}}{=} \int_{T^2} d\alpha = \int_{\mathcal{U}_a} d\alpha = \int_{V_a} p^* \, d\alpha = \int_{V_a} p^* \omega = \int_{V_a} dx dy > 0 \; !$$

Por lo tanto ω no es exacta.

Ejercicio 4:

Sea M variedad compacta orientable sin frontera de dimensión n.
Sea ω una $(n-1)$-forma.

Por contradicción supongamos que $d\omega$ es una forma de volumen.
Entonces

$$\int_M d\omega > 0$$, pero por el teorema de Stokes

$$\int_M d\omega = \int_{\partial M} \omega = 0 \quad !$$

Maestría 2024-1

Geometría Diferencial

Serie de ejercicios 7.

Ejercicio 1. Mostrar que la aplicación antipoda $A : S^n \to S^n$ dada por $A(p) = -p$ es una isometría de S^n. Deducir que existe una métrica sobre $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ tal que la proyección $\pi : S^n \to \mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ es una isometría local.

Ejercicio 2. Consideremos el plano hiperbólico

$$\mathbb{H}^2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ y > 0\}$$

con la métrica dada por

$$g_{11} = g_{22} = 1/y^2, \ g_{12} = 0.$$

a- Mostrar que los símbolos de Christoffel de la conexión de Levi-Civita son

$$\Gamma^1_{11} = \Gamma^2_{12} = \Gamma^1_{22} = 0, \ \Gamma^2_{11} = 1/y, \ \Gamma^1_{12} = \Gamma^2_{22} = -1/y.$$

b- Sea $v_0 = (0, 1)$, vector tangente a $\mathbb{R}^2_+$ en el punto $(0, 1)$, y sea $v(t)$ el transporte paralelo de v_0 a lo largo de la curva $x = t, \ y = 1$. Mostrar que $v(t) = (a(t), b(t))$ es solución del sistema

$$\begin{aligned} \frac{da}{dt} + \Gamma^1_{12} b &= 0 \\ \frac{db}{dt} + \Gamma^2_{11} a &= 0. \end{aligned}$$

Probar que $v(t)$ forma el ángulo t con el eje y (ángulo medido en la dirección de las manecillas del reloj).
Indicación: escribir $a(t) = \cos\theta(t), \ b(t) = \sin\theta(t)$, para obtener $\theta' = -1$.

Ejercicio 3. Consideremos el plano hiperbólico

$$\mathbb{H}^2 = \{z \in \mathbb{C} : \ \mathcal{I}m \ z > 0\},$$

con la métrica hiperbólica

$$g_z = \frac{dx^2 + dy^2}{(\mathcal{I}m \ z)^2}.$$

a- Usando el ejercicio 2 a-, escribir el sistema diferencial de las curvas geodésicas.

b- Mostrar que las curvas $c : t \mapsto (x_o, e^{at})$ son geodésicas.

c- Consideremos $f(z) = \dfrac{az + b}{cz + d}$, con $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ tales que $ad - bc = 1$. Mostrar que

$$\mathcal{I}m \ f(z) = \frac{\mathcal{I}m \ z}{|cz + d|^2}$$

y que f es una isometría de $\mathbb{H}^2$.

d- Mostrar que el grupo de isometrías

$$PSL_2(\mathbb{R}) = \{z \in \mathbb{H}^2 \ \mapsto \ \frac{az + b}{cz + d} \in \mathbb{H}^2, \ a, b, c, d \in \mathbb{R}, \ ad - bc = 1\}$$

actúa de manera transítiva sobre
i) $\mathbb{H}^2$ (*indicación:* $z \in \mathbb{H}^2$ dado, buscar $f \in PSL_2(\mathbb{R})$ tal que $f(i) = z$);
ii) el haz unitario de $\mathbb{H}^2$ (*indicación:* $v \in T_i\mathbb{H}^2$ unitario dado, mostrar que existe $f \in PSL_2(\mathbb{R})$ tal que $f(i) = i$ y $f'(i) = v$).

e- Usando la transitividad de la acción de las isometrías de $\mathbb{H}^2$ sobre el haz unitario, mostrar que las geodésicas de $\mathbb{H}^2$ son los círculos y las rectas normales al eje x.

Ejercicio 4. Sean X y Y dos campos vectoriales sobre una variedad Riemanniana M. Sea $p \in M$ y sea $\gamma : I \to M$ una curva integral integral de X pasando por p, i.e. tal que $\gamma(t_0) = p$ y $\gamma'(t) = X(\gamma(t))$. Probar que la conexión Riemanniana de M es

$$\nabla_X Y(p) = \frac{d}{dt}_{|t=t_0} P^{-1}_{\gamma,t_0,t}(Y(\gamma(t)))$$

donde $P_{\gamma,t_0,t} : T_{\gamma(t_0)}M \to T_{\gamma(t)}M$ es el transporte paralelo a lo largo de γ de t_0 a t.
Indicación: si $(e_1, \dots, e_n)$ es un marco ortonormal en p, considerar, para $i = 1, \dots, n$, $E_i(t)$ el campo paralelo a lo largo de γ de condición inicial e_i, y escribir $Y(t) = \sum_i Y_i(t)E_i(t)$.

Ejercicio 5. Sea M una variedad Riemanniana y sea p un punto de M. Sea $\gamma : I \to M$ una curva constante dada por $\gamma(t) = p$, $\forall t \in I$ y sea V un campo de vectores a lo largo de γ (i.e. V es una aplicación diferenciable de I a T_pM). Probar que $\frac{DV}{dt} = \frac{dV}{dt}$, i.e. que la derivada covariante coincide con la derivada usual de $V : I \to T_pM$.

Ejercicio 6. Sea f y g dos isometrías de una variedad Riemanniana conexa (M, g) tales que $\exists a \in M$ con $f(a) = g(a)$ y $df_a = dg_a$. Probar que $f = g$.
Aplicación: deducir del ejercicio 2 d- que $PSL_2(\mathbb{R})$ es el grupo de isometrías de $\mathbb{H}^2$.

Ejercicio 7. Sea M una variedad Riemanniana y sea R su tensor de curvatura. Sea $p \in M$. Mostrar que para todo $X, Y, Z, T \in T_pM$,

$$R(X,Y,Z,T) = -\frac{1}{6}\frac{\partial^2}{\partial s \partial t}_{|s=t=0} \left\{R(X+sZ, Y+tT, Y+tT, X+sZ) - R(X+sT, Y+tZ, Y+tZ, X+sT)\right\}.$$

Deducir que las curvaturas seccionales determinan el tensor de curvatura.

Ejercicio 1: Sea $A: S^n \longrightarrow S^n$ la aplicación antipodal. Ver que A es una isometría y deducir que existe una métrica en $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ tq $\pi: S^n \longrightarrow \mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ es una isometría local.

En general si (M,g) es una variedad Riemanniana y $\varphi: M \longrightarrow M$ una isometría entonces M/φ puede dotarse de una métrica Riemanniana $\tilde{g}$ tq $p: M \longrightarrow M/\varphi$ sea una isometría.

Sea $[x] \in M/\varphi$ entonces cualesquiera $\tilde{u}, \tilde{v} \in T_{[x]} M/\varphi$

Son de la forma $\tilde{u} = [u]$ $\tilde{v} = [v]$ con $[u]$ la clase de equivalencia en TM dada por $u \sim v$ sii $v = d\varphi_x u$ o $v = d\varphi^{-1}_x u$ pa $x \in [x]$.

Podemos entonces definir $\tilde{g}_{[x]}([u],[v]) = g_x(u,v)$

Donde $u, v \in T_x M$ son los representantes de $[u]$ y $[v]$ en $T_x M$. Si elegimos otro representante $y \in [x]$ entonces $y = \varphi(x)$ y

$$g_y(d\varphi_x(u), d\varphi_x(v)) = g_x(u,v) \quad \text{pues } \varphi \text{ es isometría.}$$

Así $\tilde{g}$ es una métrica Riemanniana sobre M/φ.
Además por construcción

$$\tilde{g}_{p(x)}(d_x p\, u, d_x p\, v)$$
$$= \tilde{g}_{[x]}([u],[v])$$
$$= g_x(u,v)$$

Ejercicio 2: Consideremos $\mathbb{H}^2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > 0\}$ con la métrica.

$\dfrac{dx^2 + dy^2}{y^2}$, es decir $g_{11} = g_{22} = \dfrac{1}{y^2}$ $\quad g_{12} = g_{21} = 0$

$$g = \begin{pmatrix} \frac{1}{y^2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{y^2} \end{pmatrix}, \quad g^{-1} = \begin{pmatrix} y^2 & 0 \\ 0 & y^2 \end{pmatrix}$$

a- Calculo de los simbolos de Christoffel.

Recordemos la formula de christoffel:

$$\Gamma^i_{jk} = \frac{1}{2}\sum_{\ell} g^{i\ell}\left[\partial_j g_{k\ell} + \partial_k g_{\ell j} - \partial_\ell g_{jk}\right]$$

$$\Gamma^1_{11} = \frac{1}{2} y^2 \left(\partial_x g_{11} + \partial_x g_{11} - \partial_x g_{11}\right) = 0$$

$$\Gamma^2_{11} = \frac{1}{2}\left(\cancel{g^{21}} + g^{22}\left(\cancel{\partial_x g_{12}} + \cancel{\partial_x g_{21}} - \partial_y g_{11}\right)\right)$$

$$= \frac{1}{2} y^2 \left(\frac{2}{y^3}\right) = \frac{1}{y}$$

$$\Gamma^1_{21} = \frac{1}{2}\left(g^{11}\left(\partial_y g_{11} + \cancel{\partial_x g_{12}} - \cancel{\partial_x g_{21}}\right) + \cancel{g^{12}}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(y^2\left(-\frac{2}{y^3}\right)\right)$$

$$= -\frac{1}{y}$$

$$\Gamma^2_{21} = \frac{1}{2}\left(\cancel{g^{21}} + g^{22}\left(\cancel{\partial_y g_{12}} + \partial_x g_{22} - \cancel{\partial_y g_{21}}\right)\right) = 0$$

$$\Gamma^1_{22} = 0 \qquad \Gamma^2_{22} = -\frac{1}{y}$$

b- Consideremos la curva $\gamma(t) = (t, 1)$. Un campo $v(t)$ paralelo a γ satisface que $\dot{\gamma}(t) = (1,0)$ $\quad v(t) = (a(t), b(t))$

$$\frac{D}{dt} v(t) = \frac{D}{dt}(a(t)e_1) + \frac{D}{dt}(b(t)e_2)$$

$$= \frac{da}{dt} e_1 + a(t) D_{\dot{\gamma}(t)} e_1$$

$$+ \frac{db}{dt} e_2 + b(t) D_{\dot{\gamma}(t)} e_2(\gamma(t))$$

$$= \frac{da}{dt} e_1 + a(t) D_{e_1} e_1 (\gamma(t))$$

$$+ \frac{db}{dt} e_1 + b(t) D_{e_1} e_2 (\gamma(t))$$

$$D_{e_1} e_1 = \Gamma_{11}^1 e_1 + \Gamma_{11}^2 e_2 = \frac{1}{y} e_2$$

$$D_{e_1} e_2 = \Gamma_{12}^1 e_1 + \Gamma_{12}^2 e_2 = -\frac{1}{y} e_1$$

$$= \frac{da}{dt} e_1 + a(t) e_2$$

$$+ \frac{db}{dt} e_2 - b(t) e_1$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} \frac{da}{dt} - b(t) = 0 \\ \frac{db}{dt} + a(t) = 0 \end{cases}$$

La solución a este sistema con condicion inicia $(a(0), b(0)) = (0,1)$ es $a(t) = \operatorname{sen}(t)$, $b(t) = \cos(t)$, vector que claramente forma un angulo t con el eje y.

Ejercicio 4:

Sea (M,g) variedad Riemanniana $X, Y \in \Gamma(TM)$, $\gamma: I \longrightarrow M$ curva integral de X tq $\gamma(t_0) = p \in M$.
$(\gamma'(t) = X(\gamma(t)) \ \forall t)$.

Probemos que

$$\nabla_X Y(p) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} P^{-1}_{\gamma, t_0, t}(Y(t))$$

donde $P_{\gamma, t_0, t} : T_{\gamma(0)}M \longrightarrow T_{\gamma(t)}M$ es el transporte a lo largo de gama del tiempo t_0 a t.

Sean $E_i(t) := P_{\gamma, t_0, t}(e_i)$, con $\{e_1, \dots, e_n\}$ base ortonormal de $T_{\gamma(0)}M$.
Como $P_{\gamma, t_0, t}$ es una isometría $\{E_i(t)\}$ forma una base ortonormal de $T_{\gamma(t)}M$.

Podemos escribir a $Y(t)$ como

$$\underset{\substack{\text{abuso} \\ Y(\gamma(t))}}{Y(t)} = \sum_{i=1} Y_i(\gamma(t)) E_i(t) \qquad \forall t \in I.$$

Entonces $$\frac{DY}{dt}(t) = \sum_{i=1} \dot{Y}_i(t) E_i(t) + \cancel{Y_i(t) \frac{DE_i}{dt}(t)}$$

0 pues E_i paralelo

Por otro lado

$$\frac{DY}{dt}(t) = \nabla_{\dot{\gamma}(t)} Y(\gamma(t)), \text{ evaluando en } t = t_0$$

$$\nabla_{\dot\gamma(t_0)} Y(\gamma(t_0)) = \nabla_x Y(p)$$

Calculemos

$$\frac{d}{dt}\Big|_{t=0} P^{-1}_{\gamma,t_0,t}\left(Y(\gamma(t))\right)$$

$$= \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \sum_{i=1} Y_i(\gamma(t)) \underbrace{P^{-1}_{\gamma,t_0,t}\left(E_i(t)\right)}_{e_i}$$

$$= \sum_{i=1} \dot Y_i(\gamma(0))\, e_i$$

$$\therefore \quad \nabla_x Y(p) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=t_0} P^{-1}_{\gamma,t_0,t}$$

Ejercicio 5: Sea (M, g) variedad Riemanniana $\gamma : I \to M$ $\gamma \equiv p \in M$

Probemos que $\frac{DV}{dt} = \frac{d}{dt} V$.

En otras palabras hay que probar que:

$\frac{d}{dt} : \mathcal{E}_\gamma \longrightarrow \mathcal{E}_\gamma$ es la derivada covariante a lo largo de γ.

i) Sea $f \in C^\infty(I)$ y $X \in \mathcal{E}_\gamma$

$$\frac{d}{dt}(f X(t)) = f'(t) X(t) + f(t) \dot{X}(t)$$
$$= f'(t) X(t) + f(t) \frac{d}{dt} X(t)$$

ii) Supongamos que $X \in \mathcal{E}_\gamma$ se extiende a $\tilde{X} \in \Gamma(TM)$

En particular $\tilde{X}(p) = X(\gamma(t))$ $\forall t$ entonces X es constante.

entonces $\frac{d}{dt} X(t) = 0$ por otro lado

$$D_{\dot{\gamma}(t)} \tilde{X}(t) = D_0 \tilde{X}(t) = 0$$

$$\therefore \quad \frac{d}{dt} X(t) = D_{\dot{\gamma}(t)} \tilde{X}(t) = 0$$

Otra forma: Sea $\varphi : \mathcal{U}_p \longrightarrow \Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ carta alrededor de p. Entonces si $\gamma(t) = (x_1, \dots, x_n)$ en esa carta

$$\frac{D}{dt} X(t) = \sum_i \Big(\dot{X}^i + \cancel{\sum_{j,k} \Gamma^i_{jk} \dot{x}_j X^k} \Big) \partial_{x_i}$$
$$= \sum_i \dot{X}^i \partial_{x_i} = \frac{d}{dt} X(t)$$

Ejercicio 6: Sean $f, h : M \longrightarrow M$ isometrías de la variedad Riemanniana (M, g) conexa tales que: $f(p) = g(p)$ y $df_p = dg_p$.

Sea $\mathcal{U} = \{ x \in M \mid f(x) = g(x) \text{ y } df_x = dg_x \}$

$\mathcal{U}$ es claramente cerrado. Veamos que es abierto.

Sea $x \in \mathcal{U}$, es decir $f(x) = g(x)$ y $df_x = dg_x$

Probemos primero que g y f coinciden en cualquier geodésica maximal que pasa por x.

Sea $\gamma : I \longrightarrow M$ geodésica maximal tq $\gamma(0) = x$

$$(f \circ \gamma)'(0) = df_{\underbrace{f(\gamma(0))}_{p}} \gamma'(0)$$

$$= dg_p \, \gamma'(0) = (g \circ \gamma)'(0)$$

Como f y g son isometrías

$f \circ \gamma$ y $g \circ \gamma$ son geodésicas maximales.

Entonces $f \circ \gamma(t) = g \circ \gamma(t) \quad \forall t \in I$.

Por otro lado consideremos el mapeo exponencial $\exp_m : \Omega \subseteq T_x M \longrightarrow \mathcal{U}_x$.

Sabemos que todo $y \in \mathcal{U}_x$ es $\gamma_v(1)$ con γ geo max ent $f(y) = g(y) \quad \forall y \in \mathcal{U}_x$.

$\therefore \mathcal{U}$ es abierto, cerrado $\neq \emptyset$ ent $\mathcal{U} = M$.

Ejercicio 7:

Maestría 2024-1

Geometría Diferencial

Serie de ejercicios 8.

Ejercicio 1. Muestre que todas las geodésicas del cilindro circular

$$f(u,v) = (\cos(u), \sin(u), v)$$

son líneas euclidianas, círculos o hélices.

Ejercicio 2. Muestre que el toro parametrizado por

$$F(u,v) = (\sin(u), \sin(v), \cos(v), \cos(u)) : \mathbb{R}^2 \to S^3 \subset \mathbb{R}^4,$$

con la métrica inducida por la 3-esfera S^3, posee curvatura Gaussiana cero.

Ejercicio 3. Consideremos el plano hiperbólico $\mathbb{H}^2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ y > 0\}$ con su métrica

$$g = \frac{dx^2 + dy^2}{y^2}.$$

a- Determine

$$\nabla_{\partial_x}\partial_x, \quad \nabla_{\partial_x}\partial_y \quad \text{y} \quad \nabla_{\partial_y}\partial_y$$

donde ∇ es la conexión de Levi-Civita de $\mathbb{H}^2$ (los símbolos de Christoffel se calcularon en el ejercicio 2. a-, de la serie de ejercicios 7).

b- Muestre que el plano hiperbólico tiene curvatura constante -1.

Ejercicio 4. Si M es una superficie Riemanniana, ¿cómo se obtiene geométricamente el transporte paralelo a lo largo de una geodésica de M?

Ejercicio 5. Considere dos meridianos C_1 y C_2 de una esfera, formando un ángulo φ en un punto p_1. Tome los transportes paralelos del vector tangente w_0 de C_1 a lo largo de C_1 y de C_2, a partir del punto p_1, hasta el punto p_2 donde los dos meridianos se encuentran de nuevo, respectivamente w_1 y w_2. Calcule el ángulo entre w_1 y w_2.

Ejercicio 6. Sea $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ una curva parametrizada por su longitud de arco s, cuya curvatura no se anula. Consideremos la parametrización

$$F(s,v) = \alpha(s) + v\ B(s)$$

donde $B(s)$ es el vector binormal de α en s ($B(s)$ es el último vector del marco de Frénêt de α en s).

1. Fijemos s_0 en I; muestre que para $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ pequeños,

$$S = F((s_0 - \varepsilon_1, s_0 + \varepsilon_1) \times (-\varepsilon_2, +\varepsilon_2))$$

es una superficie regular.

2. Muestre que $\alpha(s_0 - \varepsilon_1, s_0 + \varepsilon_1)$ es una geodésica de S.

Ejercicio 7. Sea M la superficie de revolución en $\mathbb{R}^3$ parametrizada por

$$F(r,\theta) = (r\cos\theta, r\sin\theta, r^2).$$

Sean ∂_r y ∂_θ los campos correspondientes a estas coordenadas. Usar la métrica riemanniana inducida en M por la métrica euclideana en $\mathbb{R}^3$.

a) Hallar $\langle \partial_\theta, \partial_\theta \rangle$, $\langle \partial_\theta, \partial_r \rangle$ y $\langle \partial_r, \partial_r \rangle$.

b) Mostrar que

$$\nabla_{\partial\theta}\partial_\theta = -\frac{r}{1+4r^2}\partial_r \qquad \text{y} \qquad \nabla_{\partial_\theta}\partial_r = \frac{1}{r}\partial_\theta.$$

c) Hallar ecuaciones diferenciales para el transporte paralelo de un vector a lo largo de una curva integral de ∂_θ (i.e. una curva $\theta \mapsto F(r,\theta)$).

Ejercicio 8. Sea $\alpha : (a,b) \to M,\ t \mapsto \alpha(t)$ una curva en una variedad riemanniana. Denotemos por D la conexión de Levi-Civita de M.

a) Si α tiene una reparametrización $\tilde{\alpha} : (\tilde{a}, \tilde{b}) \to M,\ s \mapsto \alpha(\varphi(s))$, ¿cómo se relacionan $\frac{D}{ds}\tilde{\alpha}'$ y $\frac{D}{dt}\alpha'$?

b) Mostrar que si para alguna función escalar diferenciable $\lambda : (a,b) \to \mathbb{R}$ se tiene $\frac{D}{dt}\alpha' = \lambda\alpha'$, entonces existe una reparametrización $\tilde{\alpha}$ de α que es una geodésica.

Ejercicio 9. Sean M_1 y M_2 dos variedades Riemannianas. La variedad Riemanniana producto es la variedad $M_1 \times M_2$ con la métrica $g_1 + g_2$. Mostrar que las geodésicas de $M_1 \times M_2$ son las curvas cuyas proyecciones sobre M_1 y M_2 son geodésicas.

Ejercicio 10. Sea (M,g) una variedad Riemanniana, y ∇ su conexión de Levi-Civita. El rotacional *rot* V de un campo $V \in \Gamma(TM)$ se define como

$$(rot\ V)(X,Y) = \langle \nabla_X V, Y \rangle - \langle \nabla_Y V, X \rangle,$$

donde $X, Y \in \Gamma(TM)$. Muestre que

1. *rot* V es un tensor;
2. si $f \in C^\infty(M)$, $rot(grad\ f) = 0$,
   donde, por definición, $grad\ f$ es el único campo sobre M tal que $df(X) = \langle grad\ f, X \rangle$ para todo campo $X \in \Gamma(TM)$;
3. en $\mathbb{R}^3$, $(rot\ V)(X,Y) = (X \times Y).(\nabla \times V)$.

Ejercicio 11. Sean M y $\overline{M}$ dos variedades Riemannianas, y sea $f : M \to \overline{M}$ un difeomorfismo. Supongamos que $\overline{M}$ es completa y que existe $c > 0$ tal que

$$\|v\| \geq c\|df_p(v)\|,\ \forall p \in M,\ \forall v \in T_pM.$$

Mostrar que M es completa.

Ejercicio 3:

$\Gamma^1_{11} = 0$	$\Gamma^1_{12} = -\frac{1}{y}$
$\Gamma^1_{21} = -\frac{1}{y}$	$\Gamma^1_{22} = 0$

$\Gamma^2_{11} = \frac{1}{y}$	$\Gamma^2_{12} = 0$
$\Gamma^2_{21} = 0$	$\Gamma^2_{22} = -\frac{1}{y}$

a)
$$\begin{aligned}\nabla_{\partial_x}\partial_x &= \sum_i \Gamma^i_{11}\frac{\partial}{\partial x_i}\\ &= \cancel{\Gamma^1_{11}\partial_x} + \Gamma^2_{11}\frac{\partial}{\partial y}\\ &= \frac{1}{y}\frac{\partial}{\partial y}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\nabla_{\partial_x}\partial_y &= \sum_i \Gamma^i_{12}\frac{\partial}{\partial x_i}\\ &= \Gamma^1_{12}\partial_x + \cancel{\Gamma^2_{12}\partial_y}\\ &= -\frac{1}{y}\partial_x\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\nabla_{\partial_y}\partial_y &= \sum_i \Gamma^i_{22}\partial_{x_i}\\ &= \cancel{\Gamma^1_{22}\partial_x} + \Gamma^2_{22}\partial_y\\ &= -\frac{1}{y}\partial_y\end{aligned}$$

$$Rm(\partial_x, \partial_y, \partial_y, \partial_x)$$

$$= \langle Rm(\partial_x, \partial_y)\partial_y, \partial_x\rangle \qquad (1)$$

$$\begin{aligned}Rm(\partial_x,\partial_y)\partial_y &= \nabla_{\partial_x}\nabla_{\partial_y}\partial_y - \nabla_{\partial_y}\nabla_{\partial_x}\partial_y\\ &= \nabla_{\partial_x}\left(-\frac{1}{y}\partial_y\right) - \nabla_{\partial_y}\left(-\frac{1}{y}\partial_x\right)\\ &= -\frac{1}{y}\nabla_{\partial_x}\partial_y - \frac{1}{y^2}\partial_x + \frac{1}{y}\nabla_{\partial_y}\partial_x\\ &= \frac{1}{y^2}\partial_x - \frac{1}{y^2}\partial_x - \frac{1}{y^2}\partial_x\\ &= -\frac{1}{y^2}\partial_x\end{aligned}$$

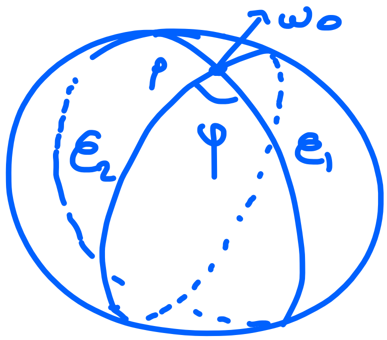
$$\langle R_m(\partial_x,\partial_y)\partial_y , \partial_x\rangle = \langle -\frac{1}{y^2}\partial_x , \partial_x \rangle$$

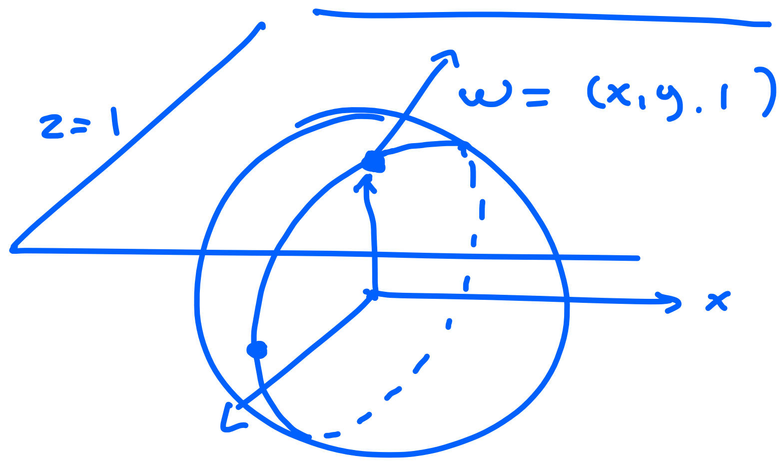
$$= -\frac{1}{y^4}$$

Por otro lado $\|\partial_x\|^2 = \|\partial_y\|^2 = \frac{1}{y^2}$ y $\langle \partial_x,\partial_y\rangle = 0$

$$\frac{R_m(\partial_x,\partial_y,\partial_y,\partial_x)}{\|\partial_x\|^2\|\partial_y\|^2 - \langle\partial_x,\partial_y\rangle^2} = -1$$

Ejercicio 5 :





(0,

Ejercicio 10 (Lista 8)

$$\mathrm{rot}(V)(X,Y) = \langle \nabla_X V, Y\rangle - \langle \nabla_Y V, X\rangle$$

1. Sea $f \in C^\infty(M)$

$$\mathrm{rot}(V)(fX,Y) = \langle \nabla_{fX} V, Y\rangle - \langle \nabla_Y V, fX\rangle$$

$$= f \ \mathrm{ror}(V)(X,Y)$$

$$\mathrm{rot}(V)(X,fY) = \langle \nabla_X V, fY\rangle - \langle \nabla_{fY} V, X\rangle$$

$$= f \ \mathrm{rot}(V)(X,Y).$$

$\therefore$ rot V es un $(0,2)$ tensor

2. $$\mathrm{rot}(\mathrm{grad} f)(X,Y) = \langle \nabla_X \mathrm{grad} f, Y\rangle - \langle \nabla_Y \mathrm{grad} f, X\rangle$$

La compatibilidad de ∇ con la métrica da que

$$X \cdot \langle \mathrm{grad} f, Y\rangle = \langle \nabla_X \mathrm{grad} f, Y\rangle + \langle \mathrm{grad} f, \nabla_X Y\rangle$$

$$Y \cdot \langle X, \mathrm{grad} f\rangle = \langle \nabla_Y X, \mathrm{grad} f\rangle + \langle X, \nabla_Y \mathrm{grad} f\rangle$$

Restando las dos ecuaciones, aplicando la definición de grad$f$ la notación $\cdot$ y que $\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X,Y]$ (conexión sin torsión)

$$d(df(Y))(X) \cancel{- d(df(X))}(Y) \qquad \text{(definicion de } [X,Y] \text{ como derivación)}$$

$$= \cancel{df([X,Y])} + \langle \nabla_X \mathrm{grad} f, Y\rangle - \langle X, \nabla_Y \mathrm{grad} f\rangle$$

$$\Rightarrow \mathrm{rot}(\mathrm{grad} f)(X,Y) = 0$$

3. En $\mathbb{R}^3$ $(\text{rot}\, V)(X,Y) = (X \times Y)\cdot(\nabla \times V)$

$$\text{rot}\, V(X,Y) = (\nabla_X V, Y) - (\nabla_Y V, X)$$

$$= (dV(X), Y) - (dV(Y), X)$$

$$= \left(\sum_k X_k \frac{\partial V}{\partial x_k}, Y\right) - \left(\sum_k Y_k \frac{\partial V}{\partial x_k}, X\right)$$

$$= \sum_{k,j} \left(X_k \frac{\partial V_j}{\partial x_k} Y_j - Y_k \frac{\partial V_j}{\partial x_k} X_j\right) \quad (\text{valido en } \mathbb{R}^n)$$

$$X \times Y = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ Y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_2 Y_3 - X_3 Y_2 \\ X_3 Y_1 - X_1 Y_3 \\ X_1 Y_3 - X_3 Y_1 \end{pmatrix}$$

$$\nabla \times V = \begin{pmatrix} \partial_x \\ \partial_y \\ \partial_z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial_y V_3 - \partial_z V_2 \\ \partial_z V_1 - \partial_x V_3 \\ \partial_x V_2 - \partial_y V_1 \end{pmatrix}$$

$$\therefore (X \times Y)\cdot(\nabla \times V) = \sum_{j,k=1}^{3} (X_k Y_j - Y_k X_j)\, \partial_k V_j$$