MECÁNICA ANALÍTICA

Tarea 2 Semestre 2025-1 Prof. Renato Calleja

Ejercicio 1. Sea $U : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función de clase C^2. Sean $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$. Suponga que $U(b) = E$ y que $U(x) < E$ para $x \in (a, b)$. Suponga además que $U'(b) = 0$ y $U''(b) < 0$. Demuestre que existe $0 < \delta < b - a$ tal que

$$\int_{b-\delta}^{b} \frac{dw}{\sqrt{2(E - U(w))}} = \infty.$$

Ejercicio 2. Diseñar con detalle el diagrama de fases de los siguientes sistemas conservativos con un grado de libertad

$$\dot{x} = y,$$
$$\dot{y} = -U'(x)$$

donde el potencial $U(x)$ está dado por :

(1) $U(x) = x^3$,

(2) $U(x) = (x^2 - 1)^2$,

(3) $U(x) = \frac{x}{x^2+1}$.

Ejercicio 3. Considere las ecuaciones de movimiento del péndulo

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y, \\ \dot{y} &= -\frac{g}{\ell} \sin x, \end{aligned} \tag{1}$$

A cada pareja de ángulo inicial y velocidad inicial $(x(0), y(0)) = (x_0, y_0)$ corresponde un movimiento específico del péndulo. Existen órbitas que en el plano xy se ven como curvas no acotadas. Estas corresponden a un movimiento del péndulo que no es oscilatorio y que da vueltas en un sentido indefinidamente. Otro tipo de órbitas aparecen como curvas cerradas en el plano xy y corresponde a un movimiento periódico del péndulo, que cambia de sentido en cada periodo. Existe un tercer tipo de órbitas que corresponde a la frontera de los dos anteriores movimientos y que en el plano xy es el conjunto de nivel

$$\Lambda = \left\{ E(x, y) = E(\pi, 0) = \omega^2 \right\},$$

donde $\omega = \sqrt{g/\ell}$. Este conjunto de nivel es llamado la *separatriz*.

(a) Demostrar que la separatriz puede ser descrita como

$$\Lambda = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : y^2 = 4\omega^2 \cos^2(x/2) \right\}.$$

(b) Sea $(x_0, y_0) \in \Lambda$ con $y_0 > 0$ y $-\pi < x_0 < \pi$. Sea $(x(t), y(t)) = \Phi^t(x_0, y_0)$ donde Φ es el flujo del sistema de ecuaciones (1). Demostrar que $x(t)$ satisface la ecuación

$$\dot{x} = 2\omega \cos\left(\frac{x}{2}\right).$$

Encontrar $\Phi^t(x_0, y_0)$.

Ayuda : La identidad trigonométrica

$$\frac{1 + \tan(\frac{\alpha}{2})}{1 - \tan(\frac{\alpha}{2})} = \frac{1 + \sin\alpha}{\cos\alpha},$$

puede ser de utlilidad.

(c) Demostrar explícitamente que si $(x_0, y_0) \in \Lambda$, $y_0 > 0$ y $-\pi < x_0 < \pi$ entonces $\Phi^t(x_0, y_0)$ está definido para todo $t \in \mathbb{R}$ y

$$\lim_{t\to\infty} \Phi^t(x_0, y_0) = (\pi, 0),$$
$$\lim_{t\to-\infty} \Phi^t(x_0, y_0) = (-\pi, 0).$$

(d) Calcular la pendiente de la separatriz en el punto $(\pi, 0)$. Interprete gráficamente el resultado en el diagrama de fases del sistema en el plano xy.

Ejercicio 4. Sea $U : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ el potencial asociado a un sistema conservativo con un grado de libertad. Suponga que $\xi \in \mathbb{R}$ es un mínimo estricto de U con $U''(\xi) > 0$. Encontrar el período de oscilaciones pequeñas en una vecindad de ξ. Es decir, calcular el límite

$$T_0 := \lim_{E\to E_0} T(E)$$

donde E es la energía del sistema y $E_0 := U(\xi)$.

Ejercicio 5. Considere un sistema conservativo con un grado de libertad. Suponga que $S(E)$ es el área comprendida en el interior de una curva cerrada en el espacio de fases correspondiente al nivel de energía E. Mostrar que el período de oscilaciones en esta curva es igual a

$$T = \frac{dS}{dE}.$$

Ejercicio 6. Considere el problema de Kepler

$$m\ddot{\mathbf{q}} = \frac{-k\mathbf{q}}{|\mathbf{q}|^3},$$

donde k es una constante positiva.

Demostrar que si $\mathbf{q}(t)$ es solución entonces también lo es

$$\tilde{\mathbf{q}}(t) := \ell\mathbf{q}(\ell^{-3/2}t)$$

donde ℓ es una constante positiva arbitraria.

Ramón Poo Ramos

Entrega: Martes 10 de Septiembre de 2024

Tarea 2

Ejercicio 1: Sea $U : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ una función de clase C^2. Sean $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Suponga que $U(b) = E$, $U(x) < E$ $\forall x \in (a,b)$. Suponga además que $U'(b) = 0$ y $U''(b) < 0$. Demuestre que existe $0 < \delta < b-a$ tal que

$$\int_{b-\delta}^{b} \frac{1}{\sqrt{2(E - U(x))}} = \infty$$

dem: Como $U \in C^2(\mathbb{R})$,

$$U(x) = U(b) + U'(b)(x-b) + \frac{U''(b)}{2}(x-b)^2 + o\left((x-b)^2\right) \qquad \text{cuando } x \longrightarrow b.$$

Por lo tanto

$$\int_{b-\delta}^{b} \frac{1}{\sqrt{2(E-U(s))}}\, ds = \int_{b-\delta}^{b} \frac{ds}{\sqrt{2\left(-\cancel{U'(b)}(s-b) - U''(b)(s-b)^2 + o((s-b)^2)\right)}}$$

$$= \int_{b-\delta}^{b} \frac{ds}{\sqrt{-U''(b)(s-b)^2 + o((s-b)^2)}}$$

Como $-U''(b) > 0$, entonces para $\delta > 0$ suficientemente pequeña, tenemos que $-U''(b) - \frac{o((s-b)^2)}{(s-b)^2} > 0$ $\forall$ $s \in (b-\delta, b)$ y por lo tanto que

$$-U''(b)(s-b)^2 > o((s-b)^2) \qquad \forall s \in (b-\delta, b).$$

Entonces $-2U''(b)(s-b)^2 > -U''(b)(s-b)^2 + o((s-b)^2) > 0$ y

$$\int_{b-\delta}^{b} \frac{ds}{\sqrt{-U''(b)(s-b)^2 + o((s-b)^2)}} \geq \int_{b-\delta}^{b} \frac{1}{\sqrt{-2U''(b)(s-b)^2}}\, ds$$

$$= \frac{1}{\sqrt{-2U''(b)}} \int_{b-\delta}^{b} \frac{1}{b-s}\, ds = \infty.$$

Ejercicio 2. Diseñar con detalle el diagrama fase de los siguientes sistemas conservativos con un grado de libertad

$$\dot{x} = y,$$
$$\dot{y} = -U'(x)$$

donde $U(x)$ está dado por

(1) $U(x) = x^3$
(2) $U(x) = (x^2-1)^2$
(3) $U(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$

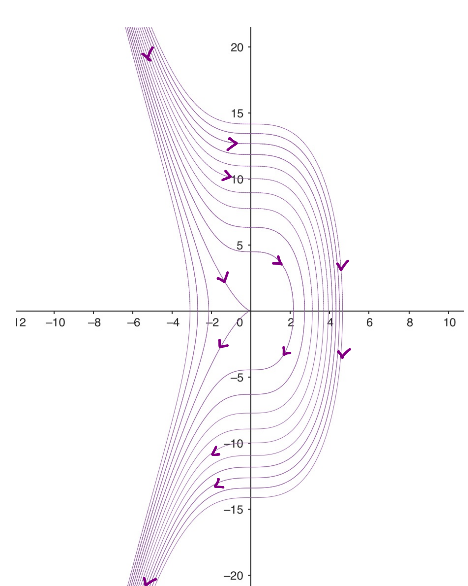
respuesta:

La energía del sistema está dada por

$$E = \frac{1}{2}y^2 + U(x).$$

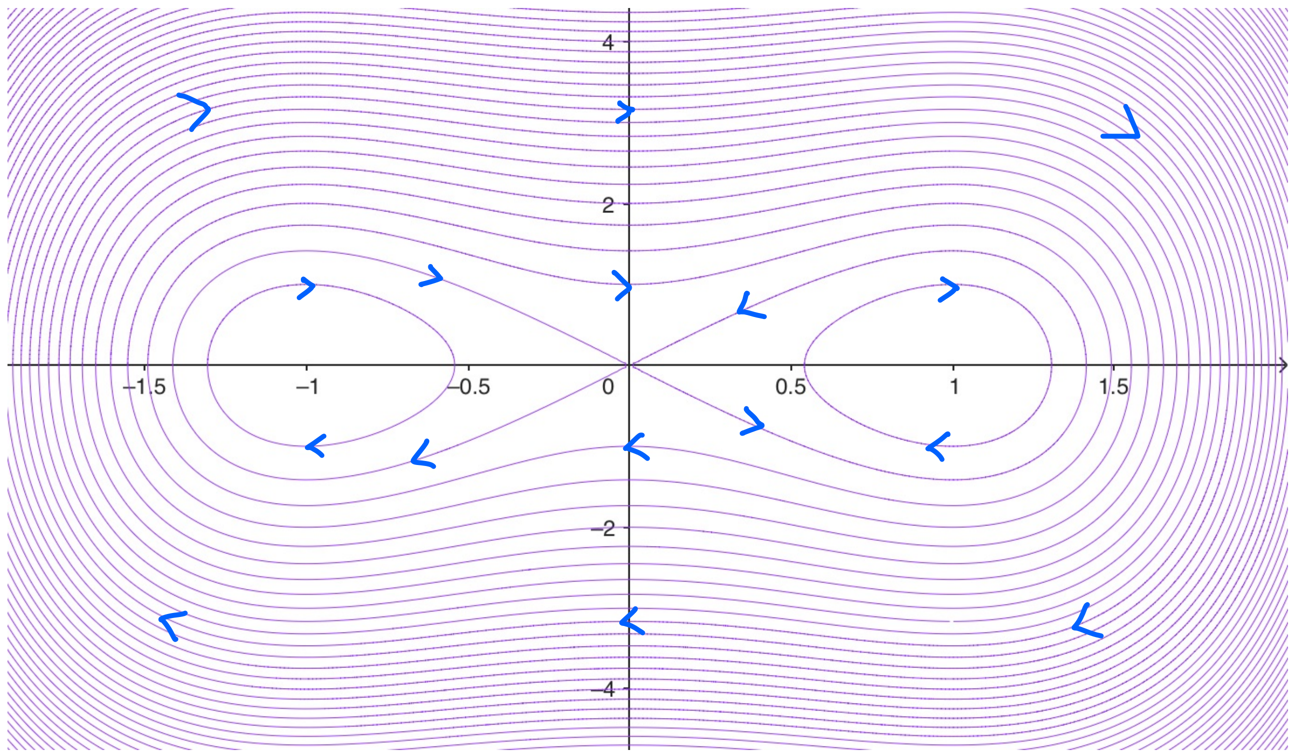
(1) $E = \frac{1}{2}y^2 + x^3 \Rightarrow y = \pm\sqrt{2(E-x^3)}$ si $E - x^3 > 0$

Graficando a y en función de x para distintos valores de E obtenemos la forma de las trayectorias del sistema.



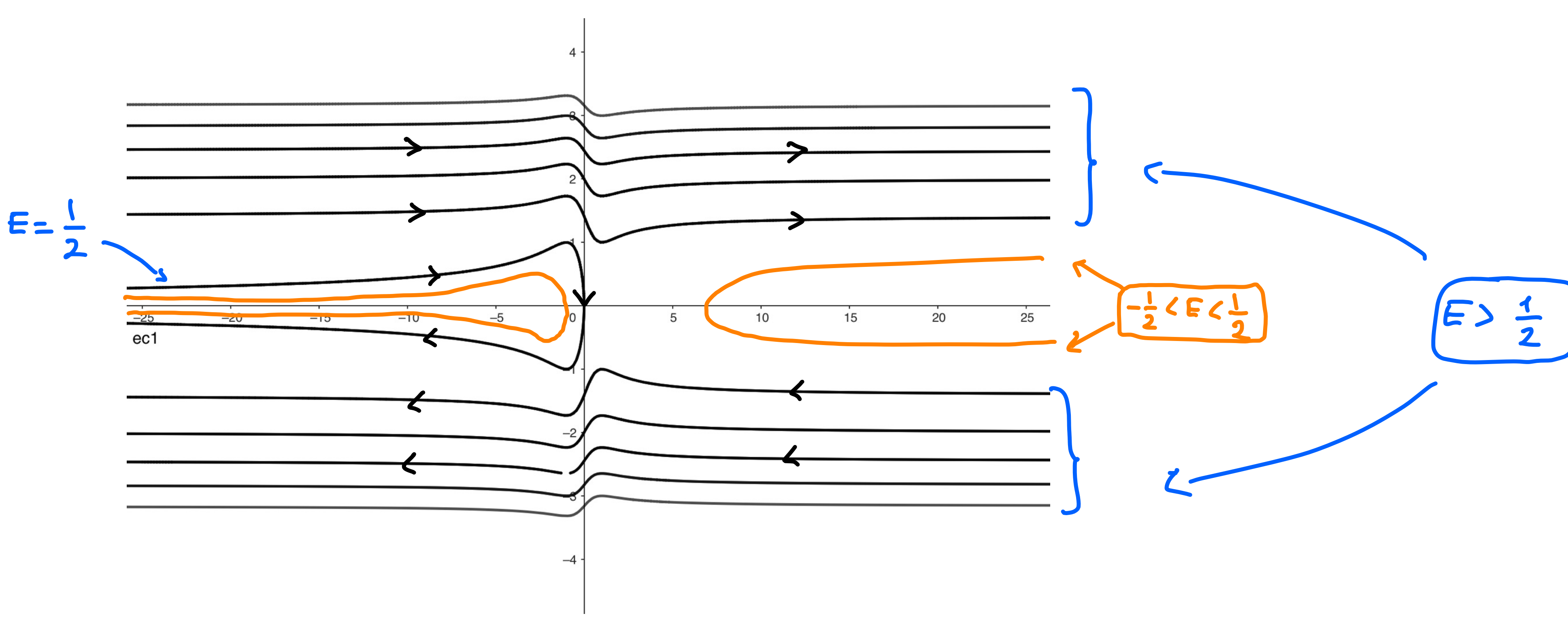
2) $E = \frac{1}{2}y^2 + (x^2-1)^2$, cuyas curvas de nivel lucen como sigue

$$y = \pm\sqrt{2\left(E-(x^2-1)^2\right)} \qquad x \in \left(-\sqrt{\sqrt{E}+1}\,,\, +\sqrt{\sqrt{E}+1}\right)$$



3) $E = \frac{1}{2}y^2 + \frac{x}{x^2+1}$,

- Si $E \geq \max_{x\in\mathbb{R}} \frac{x}{x^2+1} = \frac{1}{2}$, tenemos que $y = \pm\sqrt{E - \frac{x}{x^2+1}}$



- Si $E < -\frac{1}{2}$ entonces $E - \frac{x}{x^2+1} < 0$

  pues $\frac{x}{x^2+1} > -\frac{1}{2}$ $\forall x \in \mathbb{R}$.

  Por lo que no pueden haber trayectorias de energía $< \frac{1}{2}$.

- Veamos que ocurre si $E \in \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

  En este caso, para que exista una expresión de y en función de x, requerimos que

  $$E - \frac{x}{x^2+1} > 0 \qquad \text{pues} \qquad E = \frac{1}{2}y^2 + \frac{x}{x^2+1}.$$

  Esto es posible si y solo si

  $$Ex^2 - x + E > 0.$$

Como $E \in \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ el discriminante $1-4E^2$ es >0.

Por lo tanto, podemos expresar a y en función de x, siempre que

$$x \in (-\infty, x_1) \cup (x_2, +\infty)$$

Con $x_2 = \dfrac{1+\sqrt{1-4E^2}}{2E}$ y $x_1 = \dfrac{1-\sqrt{1-4E^2}}{2E}$

y en ese caso

$$y = \pm\sqrt{2\left(E - \frac{x}{x^2+1}\right)}$$

Ejercicio 3. Considere el modelo del péndulo

$$\dot{x} = y \qquad (1)$$
$$\dot{y} = -\frac{g}{\ell}\operatorname{sen} x .$$

El conjunto

$$\Lambda = \{ (x,y) \mid E(x,y) = E(\pi,0) = \omega^2 \}$$

donde $\omega = \sqrt{\frac{g}{\ell}}$ es llamado la separatriz.

a) Demuestra que

$$\Lambda = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y^2 = 4\omega^2 \cos^2\left(\tfrac{x}{2}\right) \}$$

b) Sea $(x_0,y_0) \in \Lambda$ con $y_0 > 0$ y $-\pi < x_0\ \pi$. Sea $(x(t), y(t)) = \phi^t(x_0,y_0)$, donde ϕ es el flujo del sistema de ecuaciones (1). Demostrar que $x(t)$ satisface la ecuación

$$\dot{x} = 2\omega \cos\left(\tfrac{x}{2}\right).$$

Encontrar $\phi^t(x_0,y_0)$. Ayuda: $\dfrac{1+\tan\left(\frac{x}{2}\right)}{1-\tan\left(\frac{x}{2}\right)} = \dfrac{1+\sin\alpha}{\cos\alpha}$

c) Demostrar explícitamente que si $(x_0,y_0) \in \Lambda$, $y_0 > 0$ y $-\pi < x_0 < \pi$, entonces $\phi^t(x_0,y_0)$ está definido $\forall t \in \mathbb{R}$ y

$$\lim_{t\to\infty} \phi^t(x_0,y_0) = (\pi,0)$$

$$\lim_{t\to -\infty} \phi^t(x_0,y_0) = (-\pi,0).$$

d) Calcular la pendiente de la separatriz en el punto $(\pi,0)$. Interprete gráficamente el resultado en el diagrama fase del sistema en el plano x,y.

Solución:

a) La energía del sistema es por definición

$$E(x,y) = \frac{1}{2}y^2 + U(x) \quad , \text{ donde } \quad U(x) = -\frac{g}{\ell}\cos x$$

Entonces $\quad E(x,y) = \omega^2$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{1}{2}y^2 - \frac{g}{\ell}\cos x = \frac{g}{\ell}$$

$$\Leftrightarrow \quad y^2 = \frac{2g}{\ell}\left(1 + \cos x\right)$$

$$\Leftrightarrow \quad y^2 = 4\omega^2\cos^2\left(\frac{x}{2}\right) \qquad \left(\text{pues: } \cos\left(\frac{x}{2}\right)^2 = \frac{1+\cos x}{2}\right)$$

Así

$$\Lambda = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; y^2 = 4\omega^2\cos^2\left(\frac{x}{2}\right) \right\}$$

b) Dado que $(x_0,y_0) \in \Lambda$, entonces $\phi^t(x_0,y_0) \in \Lambda \;\; \forall t>0$ donde $\phi^t(x_0,y_0)$ esté definido. Entonces

$$\dot{x}^2 = 4\omega^2\cos^2\left(\frac{x}{2}\right) \quad , \text{ entonces } \quad \dot{x} = \pm\, 2\omega\cos\left(\frac{x}{2}\right).$$

Podemos resolver esta EDO mediante separación de variables

$$\frac{\dot{x}}{\cos\left(\frac{x}{2}\right)} = 2\omega$$

$$\int_0^t \frac{\dot{x}}{\cos\left(\frac{x}{2}\right)}\,dt = 2t\omega$$

$$\int_{x_0}^{x(t)} \frac{1}{\cos\left(\frac{x}{2}\right)}\,dx = 2t\omega$$

$$\cancel{2}\int_{x_0/2}^{x(t)/2} \frac{1}{\cos(s)}\,ds = \cancel{2}tw$$

Para encontrar una primitiva de $\dfrac{1}{\cos s}$ hacemos

$$\int \frac{1}{\cos s}\,ds = \int \frac{\cancel{1+u^2}}{1-u^2}\, 2\frac{1}{\cancel{(u^2+1)}}\,du = 2\int \frac{du}{1-u^2}$$

$$\boxed{\begin{aligned} u &= \tan\tfrac{s}{2} \\ du &= \tfrac{1}{2}\sec^2\left(\tfrac{s}{2}\right)ds \\ 2\left(\tfrac{1}{u^2+1}\right)du &= ds \end{aligned}}$$

$$= \int \frac{1}{1-u}\,du + \int \frac{1}{1+u}\,du$$

$$= -\ln(1-u) + \ln(1+u) + C$$

$$= \ln\left(\frac{1+u}{1-u}\right) + C$$

$$= \ln\left(\frac{1+\tan\left(\frac{s}{2}\right)}{1-\tan\left(\frac{s}{2}\right)}\right) + C$$

$$= \ln\left(\tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{s}{2}\right)\right) + C. \qquad \left(\text{usamos que } \tan(a+b) = \frac{\tan(a)+\tan(b)}{1-\tan(a)\tan(b)}\right)$$

Entonces

$$\int_{x_0/2}^{x(t)/2} \frac{1}{\cos(s)}\,ds = \ln\left(\frac{\tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x(t)}{4}\right)}{\tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x_0}{4}\right)}\right).$$

Así $\tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x(t)}{4}\right) = \tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x_0}{4}\right)e^{tw}$,

es decir $x(t) = 4\arctan\left(\tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x_0}{4}\right)e^{tw}\right) - \pi$.

Además $\quad y(t) = \dot{x}(t) = 4\dfrac{\tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x_0}{4}\right)\omega e^{t\omega}}{1+\tan^2\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x_0}{4}\right)e^{2t\omega}}.$

Por último notemos que

$$y(0) = 4\,\frac{\tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x_0}{4}\right)}{1+\tan^2\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x_0}{4}\right)}\,\omega \quad \text{, es decir}$$

$$\omega = \frac{y_0}{4}\,\frac{1+\tan^2\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x_0}{4}\right)}{\tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x_0}{4}\right)} \quad \text{, y por lo tanto, hemos obtenido}$$

el flujo

$$\phi^t(x_0, y_0) = (x(t), y(t)).$$

c) Para $-\pi < x_0 < \pi$ y $y_0 > 0$ tenemos que

$$-\frac{\pi}{4} < \frac{x_0}{4} < \frac{\pi}{4} \quad \text{y por lo tanto} \quad 0 < \frac{x_0}{4} + \frac{\pi}{4} < \frac{\pi}{2} \text{ y}$$

$$0 < \tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x_0}{4}\right)$$

Como $y_0 > 0$, se cumple que

$$\omega = \frac{y_0}{4}\,\frac{1+\tan^2\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x_0}{4}\right)}{\tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x_0}{4}\right)} > 0.$$

Utilizando la expresión explícita del flujo obtenida tenemos que

$$\lim_{t\to\infty} x(t) = \lim_{t\to\infty} 4\arctan\left(\tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x_0}{4}\right)e^{t\omega}\right) - \pi = \pi \quad \text{, y}$$

$$\lim_{t\to\infty} y(t) = \lim_{t\to\infty} 4\,\frac{\tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x_0}{4}\right)\omega e^{t\omega}}{1+\tan^2\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x_0}{4}\right)e^{2t\omega}}$$

$$= 4 \lim_{t\to\infty} \frac{\tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x_0}{4}\right)\omega}{e^{-t\omega}+\tan^2\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x_0}{4}\right)e^{t\omega}} = 0$$

Así $\lim_{t\to\infty} \phi^t(x_0,y_0) = (\pi,0)$.

Ahora

$$\lim_{t\to-\infty} x(t) = \lim_{t\to-\infty} 4\arctan\left(\tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x_0}{4}\right)e^{t\omega}\right) - \pi$$

$$= -\pi \quad , \quad y$$

$$\lim_{t\to\infty} y(t) = \lim_{t\to-\infty} 4 \frac{\tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x_0}{4}\right)\omega e^{t\omega}}{1+\tan^2\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x_0}{4}\right)e^{2t\omega}}$$

$$= 4 \lim_{t\to-\infty} \frac{\tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x_0}{4}\right)\omega}{e^{-t\omega}+\tan^2\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x_0}{4}\right)e^{t\omega}} = 0.$$

Así $\lim_{t\to-\infty} \phi^t(x_0,y_0) = (-\pi,0)$.

d) Consideremos la expresión implícita de la separatriz

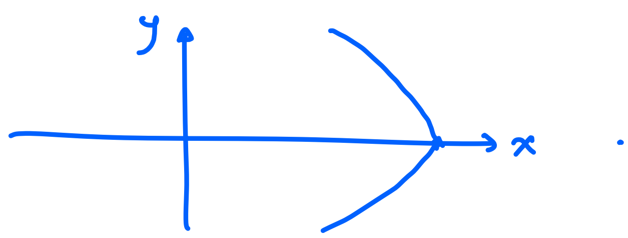
$$y^2 = 4\omega^2\cos^2\left(\frac{x}{2}\right).$$

Derivando implícitamente con respecto a y

$$\frac{dy}{dx} = \frac{4\cdot\omega^2\cos\left(\frac{x}{2}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right)}{2y} = \frac{\cancel{4}\omega^{\cancel{2}}\cancel{\cos}\left(\frac{x}{2}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right)}{\pm\cancel{4\omega}\cancel{\cos}\left(\frac{x}{2}\right)} = \pm\omega\operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right)$$

$$\lim_{x \to \pi} \frac{dy}{dx} = \pm \omega \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right) = \pm \frac{\sqrt{2}}{2} \omega \, .$$

Esto significa que en el punto $(\pi, 0)$ la separatriz no es suave como se representa a continuación



Ejercicio 4: Sea $U: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ el potencial asociado a un sistema conservativo con un grado de libertad. Suponga que $\xi \in \mathbb{R}$ es un mínimo estricto de U con $U''(\xi) > 0$. Encontrar el periodo de oscilaciones pequeños en una vecindad de ξ. Es decir, calcular

$$T_0 := \lim_{E \to E_0} T(E)$$

donde E es la energía del sistema y $E_0 := U(\xi)$.

prueba: Primero notemos que podemos suponer que $\xi = 0$ ya que x es solución de

$$\ddot{x} = -U'(x) \quad \text{si y solo si}$$

$$y := x - \xi \text{ es solución de } \quad \ddot{y} = -\tilde{U}'(y), \quad \text{donde } \tilde{U}(x) := U(x+\xi).$$

Por lo tanto, la ecuación que gobierna el sistema

$$\ddot{x} = -U'(x) \quad \text{se escribe como}$$

$$\ddot{x} = -\cancel{U'(\xi)} - U''(\xi)(x-\xi) + o((x-\xi))$$

$$\ddot{x} = -U''(0)x + o(x).$$

Para energías cercanas a E_0 x es cercano a $\xi = 0$, por lo tanto el término $o(x)$ es despreciable y podemos considerar que la ecuación linealizada alrededor del equilibrio 0,

$$\ddot{x} = -U''(x)x \quad , \text{ es una buena aproximación de la ecuación no lineal.}$$

Sabemos, en este caso que el periodo (del ocilador armónico) viene dado por

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{U''(0)}}, \text{ lo cual para energías pequeños debe coincidir con el periodo de nuestro sistema original.}$$

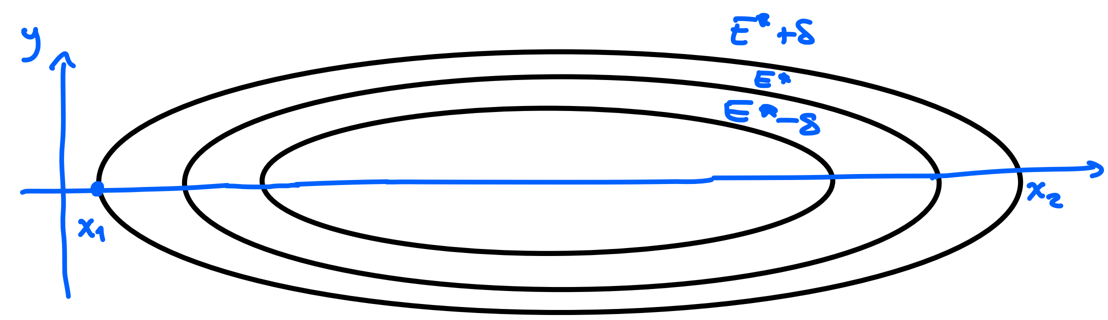
Ejercicio 5 Considere un sistema conservativo con un grado de libertad. Suponga que $S(E)$ es el area comprendida en el interior de una curva cerrada en el espacio fase correspondiente al nivel de energía E. Mostrar que el periodo de oscilaciones en esta curva es igual a

$$T = \frac{dS}{dE}.$$

prueba: Sea E^* un nivel de energía, tal que en una vecindad $(E^*-\delta, E^*+\delta)$ se tiene que toda curva dada por

$$\frac{1}{2}y^2 + U(x) = E, \quad \text{con } E \in (E^*-\delta, E^*+\delta) \text{ y } U \text{ el potencial del}$$

sistema conservativo, sea cerrada.



Consideremos dos puntos fijos x_1 y x_2 tales que

$$U(x_1) = U(x_2) = E^* + \delta \quad \text{y}$$

$$E^* - U(x) > 0 \quad \forall\, x \in (x_1, x_2).$$

Entonces el area de cualquier curva de energía E está dada por

$$A(E) = \int_{x_1}^{x_2} \int_{-\sqrt{2(E-U(x))}}^{\sqrt{2(E-U(x))}} \mathbb{1}_{\{E-U(x)>0\}}(x)\, dy\, dx$$

donde $\mathbb{1}_{\{E-U(x)\}}$ es 1 si $E-U(x)>0$ y 0 en otro caso.

$$A(E) = 2\int_{x_1}^{x_2} \sqrt{2(E-U(x))}\, \mathbb{1}_{\{E-U(x)\}}(x)\, dx$$

Entonces

$$\frac{dA(E)}{dE} = 2 \int_{x_1}^{x_2} \frac{\mathbb{1}_{\{E-U(x)\}}(x)}{\sqrt{2(E-U(x))}}\, dx$$

En particular

$$\frac{dA}{dE}(E^*) = 2 \int_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{\sqrt{2(E^*-U(x))}} = T,$$

donde T es el periodo de ocilación de la curva de energía E^*.

Ejercicio 6 Considere el problema de Kepler

$$m\ddot{q} = -\frac{kq}{|q|^3}, \text{ donde } k \text{ es una constante positiva.}$$

Demostrar que si $q(t)$ es solución entonces también lo es $\tilde{q}(t) = \ell q(\ell^{-3/2} t)$, donde ℓ es una constante positiva arbitraria.

prueba. Sea $q(t)$ solución del problema de Kepler.

$$\begin{aligned}
m\frac{d^2}{dt^2}\tilde{q}(t) &= \ell^{-2} m\ddot{q}\left(\ell^{-3/2} t\right) \\
&= -\ell^{-2}\frac{k\, q(\ell^{-3/2} t)}{|q(\ell^{-3/2} t)|^3} \\
&= -\frac{k\,\ell\, q(\ell^{-3/2} t)}{\ell^3 |q(\ell^{-3/2} t)|^3} \\
&= -\frac{k\,\tilde{q}(\ell^{-3/2} t)}{|\tilde{q}(\ell^{-3/2} t)|^3}
\end{aligned}$$

$\therefore$ $\tilde{q}(t)$ también es solución. $\dashv$