

1. Mecánica Newtoniana

1.1 Sistemas potenciales (generalidades).

Consideremos el sistema newtoniano

$$(1) \quad \ddot{x}_m = F(x), \quad \text{donde} \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad F: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad m = \begin{pmatrix} m_1 \\ \vdots \\ m_n \end{pmatrix}^t$$

Nota: $x_m = \begin{pmatrix} m_1 x_1 \\ m_2 x_2 \\ \vdots \\ m_n x_n \end{pmatrix}$

Teorema 1: Si F es un campo potencial, es decir $F(x) = -\nabla \phi(x)$, para alguna función escalar $\phi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, entonces la energía del sistema se conserva, es decir

$$E := \frac{1}{2} \langle \dot{x}_m, \dot{x} \rangle + \phi(x) \quad \text{es constante.} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \underline{\text{dem:}} \quad \frac{d}{dt} E &= \frac{1}{2} \langle \ddot{x}_m, \dot{x} \rangle + \frac{1}{2} \langle \dot{x}_m, \ddot{x} \rangle + \langle \nabla \phi(x), \dot{x} \rangle \\ &= \langle F(x), \dot{x} \rangle - \langle F(x), \dot{x} \rangle = 0. \end{aligned}$$



Consideremos el caso particular de una partícula sometida a un potencial central.

$$m\ddot{x} = F(x) = x f(|x|) \quad (3)$$

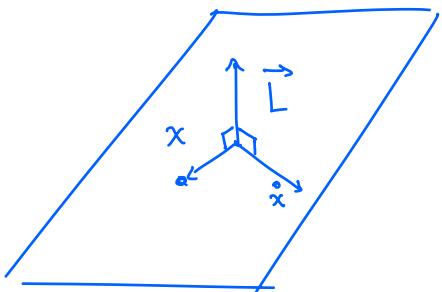
Teorema 2: El momento angular de x en (3) se conserva, es decir

$$L = x \times m\dot{x} \quad \text{es constante.} \quad (4)$$

$$\begin{aligned} \underline{\text{dem}} \quad \frac{d}{dt} L &= \dot{x} \times m\dot{x} + x \times m\ddot{x} \\ &= x \times x f(x) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Observación: Si una fuerza está dada por un potencial escalar ϕ que solo depende del radio, es decir $\phi(x) = \phi(|x|)$, entonces $F(x) = -\nabla\phi(x) = -\frac{x}{|x|}\phi'(|x|)$ es una fuerza central.

Observación. La conservación de momento angular \vec{L} permite decir que el movimiento ocurre en un plano (pues el plano normal) generado por $\vec{L} = \vec{x} \times m\vec{\dot{x}}$ contiene x y a \dot{x} . (en \mathbb{R}^3)



$$x = r \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \\ 0 \end{pmatrix} = r e_r$$

$$\dot{x} = \dot{r} \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \\ 0 \end{pmatrix} + r \dot{\theta} \begin{pmatrix} -\sin \theta \\ \cos \theta \\ 0 \end{pmatrix} = \dot{r} e_r + r \dot{\theta} e_\theta$$

Usando esta observación, expresando el movimiento en coordenadas polares y usando la expresión $\vec{L} = \vec{x} \times m\vec{\dot{x}} = r^2 \dot{\theta} e_r \times e_\theta$, obtenemos que

$$L = r^2 \dot{\theta} \quad \text{es constante.}$$

(5) (fórmula para el momento angular de un movimiento plano en coordenadas polares).

Lo cual reduce el sistema a

$$m \ddot{r} = -V'(r) + \frac{L^2}{r^3}$$

(6) (Esta es precisamente la reducción del problema de Kepler a un problema de un grado de libertad.)

Analicemos el caso de N -partículas, $\{x_1, \dots, x_N\} \in \mathbb{R}^n$.

Si no suponemos nada adicional, esto se resume a una partícula en $\mathbb{R}^{n \times N}$.

Supongamos que la interacción entre partículas es binaria, como es el caso en la interacción gravitatoria o en la interacción de cargas eléctricas.

En este caso

$$m_i \ddot{x}_i = \sum_{j=1}^n F_{ij}(x_i, x_j)$$

Podemos aplicar una fuerza externa a la partícula x_i :

$$+ \underbrace{F_i(x)}_{}$$

donde f_{ij} representa la fuerza que ejerce la partícula j sobre la partícula i .

Teorema 3: Si asumimos la segunda ley de Newton, es decir que $F_{ij} = -F_{ji}$ tenemos que

$$m \ddot{x}_{cm} = \sum_{i=1}^n F_i(x),$$

$$\text{donde } x_{cm} = \frac{\sum_{i=1}^n m_i x_i}{m}, \quad y \quad m = \sum_{i=1}^n m_i$$

En particular el centro de masa de un sistema de N partículas se mueve de forma inercial en ausencia de fuerzas externas.

$$\begin{aligned} \text{dem: } m \ddot{x}_{cm} &= \sum_{i=1}^n m_i \ddot{x}_i \\ &= \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n F_{ij}(x_i, x_j) \right) + F_i(x) \\ &= \sum_{i=1}^n F_i(x), \quad \text{pues } F_{ii} = 0 \quad \forall i. \end{aligned}$$



1.2 Visualización gráfica de planos fase utilizando la energía

Consideremos un sistema Newtoniano potencial conservativo, es decir

$$m \ddot{x} = F(x) = -\nabla U(x).$$

Por el teorema 1. Sabemos que la energía se conserva. Es decir

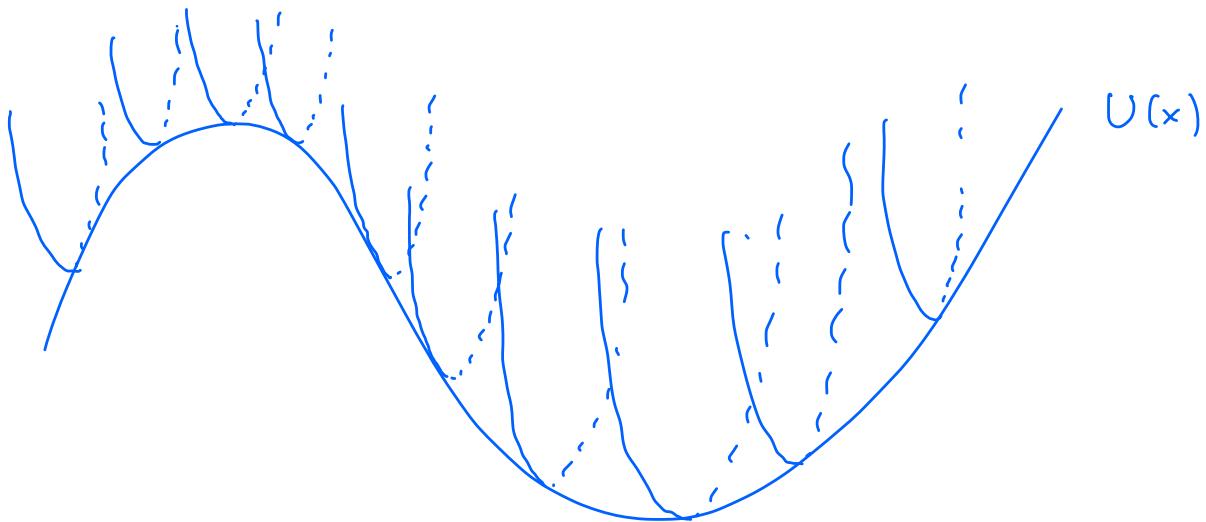
$$\begin{aligned} E &= T(\dot{x}) + U(x) \\ &= \frac{1}{2} m |\dot{x}|^2 + U(x) \quad \text{es constante.} \end{aligned}$$

Podemos graficar \dot{x} en función de x como:

$$\dot{x} = \pm \sqrt{\frac{2}{m} (E + U(x))}$$

(8)

Otra forma de dárnos una idea de la forma del retrato fase es ver a $E(x,y)$ como función de dos variables. Para x constante $E(y)$ es una parábola. Así podemos imaginar a la gráfica de E como unión de parabolas.



Esta visualización nos permite intuir el siguiente

Teorema 4: Un equilibrio x_0 del sistema potencial $m\ddot{x} = -\nabla U(x)$ con $U \in C^2(\mathbb{R}^n)$ es

- a) Estable si x_0 es un mínimo del potencial $U(x)$.
- b) Inestable si x_0 es un máximo del potencial $U(x)$.

dem: Es consecuencia de que la matriz del sistema linealizado es la matriz Hessiana de U .



1.3 Estimaciones del tiempo en sistemas conservativos

Supongamos que la energía de un sistema se conserva.

$$E = \frac{1}{2} |\dot{x}|^2 + U(x) \quad \text{entonces}$$

$$\frac{dx}{dt} = \pm \sqrt{2(E - U(x))}, \quad \text{entonces}$$

$$\frac{dt}{dx} = \pm \frac{1}{\sqrt{2(E - U(x))}}.$$

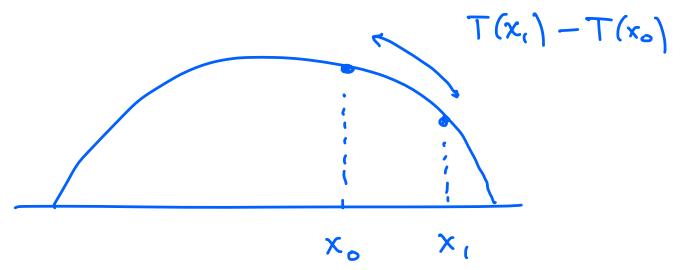
Integrando de x_0 a x_1 :

$$\int_{x_0}^{x_1} \frac{dt}{dx} dx = \pm \int_{x_0}^{x_1} \frac{dx}{\sqrt{2(E-U(x))}}$$

$$\int_{T(x_0)}^{T(x_1)} dt = \pm \int_{x_0}^{x_1} \frac{dx}{\sqrt{2(E-U(x))}}$$

$$T(x_1) - T(x_0) = \pm \int_{x_0}^{x_1} \frac{dx}{\sqrt{2(E-U(x))}}$$

(9)



A veces estos integrales pueden ser calculadas gracias a los **integrales elípticas**

$$K(x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\sqrt{1-x^2 \sin^2 \theta}} = \frac{\pi}{2} \left[1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 x^2 + \left(\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\right)^2 x^4 + \left(\frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}\right)^2 x^6 + \dots \right] \quad (10)$$

2. Mecánica Lagrangiana

2.1 Las ecuaciones de Euler-Lagrange

Sea $\mathcal{L} \in C^1(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$ y $\mathcal{G}: \mathcal{T} = \{q: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}^n\} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$G(q) := \int_0^1 \mathcal{L}(q(t), \dot{q}(t), t) dt$$

Definición: $q \in \mathcal{T}$ es un punto estacionario de \mathcal{G} si

$\Psi_{\tilde{q}}'(0) = 0 \quad \forall \tilde{q} \in \mathcal{T} \text{ tal que } \tilde{q}(0) = \tilde{q}(1) = 0,$ donde

$$\Psi_{\tilde{q}}(h) = G(q + h\tilde{q}).$$

Teorema 5: q es un punto estacionario de \mathcal{G} si q satisface las Ecuaciones de Euler-Lagrange

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} = 0 \quad i = 1, \dots, n. \quad (11)$$

dem: Supongamos que q es un punto estacionario de $\mathcal{G}.$

$$\begin{aligned}
 \Psi_{\tilde{q}}'(h) &= \frac{d}{dh} \int_0^1 \mathcal{L}(q + h\tilde{q}, \dot{q} + h\dot{\tilde{q}}, t) dt \\
 &= \int_0^1 \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} \tilde{q}_i + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \dot{\tilde{q}}_i \right) dt \\
 &= \int_0^1 \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} \tilde{q}_i + \cancel{\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \dot{\tilde{q}}_i} \Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \tilde{q}_i dt \right) \\
 &= \int_0^1 \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \right) \tilde{q}_i dt \quad (13)
 \end{aligned}$$

$$\therefore \int_0^1 \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \right) \tilde{q}_i dt \quad \forall i = 1, \dots, n. \quad \forall \tilde{q}_i \in C_c^\infty([0,1]).$$

$$\therefore \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} = 0 \quad \forall i=1,\dots,n .$$

De la ecuación (13) es inmediato que si se cumplen las ecuaciones de Euler-Lagrange, entonces $\mathcal{G}'(0) = 0$, y por lo tanto \dot{q} es un punto estacionario de \mathcal{G} . \Rightarrow

Observación: Si aplicamos este principio variacional al Lagrangiano mecánico $L = \frac{1}{2}m|\dot{x}|^2 - V(x,t)$ obtendremos la equivalencia entre las ecuaciones de Newton y el principio de mínima acción

$$m\ddot{x} = -\nabla_x V(x,t) \iff x \text{ es punto estacionario de } \int_0^t \frac{1}{2}\dot{x}^2 - V(x,t) dt \quad (14)$$

2.2 Cambios de coordenadas y las ecuaciones de Euler-Lagrange.

Consideremos el cambio de coordenadas $q \mapsto f(q,t) =: s$ que puede ser dependiente del tiempo. Supongamos que este cambio es un C^1 difeomorfismo en la variable espacial, es decir que existe $g \in C^1$ tal que $s \mapsto g(s,t) = q$.

Notemos que esta transformación de coordenadas induce una transformación tangente de la siguiente forma

$$\dot{q} \mapsto D_q f(q,t) \dot{q} =: \dot{s} \quad (\text{que depende de } t).$$

Esta a su vez induce una transformación en el Lagrangiano como sigue

$$\tilde{\mathcal{L}}(s, \dot{s}, t) := \mathcal{L}(g(s,t), D_s g(s,t) \dot{s}, t)$$

De esta manera

$$\tilde{\mathcal{L}}(s, \dot{s}, t) = \mathcal{L}(q, \dot{q}, t) \quad \text{y por lo tanto } q \text{ es un punto estacionario de } \mathcal{G}$$

Si s es un punto estacionario de $\tilde{\mathcal{G}}$, estableciendo la covarianza de las ecuaciones de Euler-Lagrange por cambios de coordenadas, es decir

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} = 0 \iff \frac{d}{ds} \frac{\partial \tilde{\mathcal{L}}}{\partial \dot{s}_i} - \frac{\partial \tilde{\mathcal{L}}}{\partial s_i} = 0 \quad (15)$$

2.3 Simetrías y leyes de conservación

Sea $\{Q_\epsilon | \epsilon \in \mathbb{R}\}$ una familia uniparamétrica de Difeomorfismos.

Teorema 6 (de Noether) Supongamos que el Lagrangiano \mathcal{L} es invariante por la acción de Q_ϵ , es decir

$$\mathcal{L}(q, \dot{q}, t) = \mathcal{L}(Q_\epsilon(q), D_q Q_\epsilon(q)\dot{q}, t) \quad \forall \epsilon > 0, \quad (16)$$

entonces $J = \sum_{i=1}^n \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \frac{\partial Q_\epsilon^i}{\partial \epsilon}(q)$ es una cantidad conservada. (17)

$$\begin{aligned} \text{dem: } 0 &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \epsilon} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} \frac{\partial Q_\epsilon^i}{\partial \epsilon} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \frac{\partial}{\partial \epsilon} \sum_{i=1}^n \frac{\partial Q_\epsilon^i}{\partial q_j} \dot{q}_j \\ &= \sum_{i=1}^n \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \frac{\partial Q_\epsilon^i}{\partial \epsilon} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \frac{\partial}{\partial \epsilon} \sum_{j=1}^n \frac{\partial Q_\epsilon^i}{\partial q_j} \dot{q}_j \quad (\text{Ecuaciones de Euler-Lagrange}) \\ &= \sum_{i=1}^n \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \frac{\partial Q_\epsilon^i}{\partial \epsilon} \right) \\ &= \frac{d}{dt} J(q, \dot{q}) \end{aligned}$$



Definición: Una variable que no aparece explícitamente en el Lagrangiano es llamada una variable cíclica.

Corolario: Si la variable q_{i_0} es cíclica entonces $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_{i_0}}$ es una cantidad conservada. (18)

dem: Sea $Q_\epsilon(q) = (q_1, \dots, q_{i_0} + \epsilon, \dots, q_n)$. Claramente \mathcal{L} es invariante por Q_ϵ y por el teorema de Noether

$$J(q, \dot{q}) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \frac{\partial Q_\epsilon^i}{\partial \epsilon} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_{i_0}} \text{ es constante.}$$



2.4 Teoría de Contornos

Sea un sistema Lagrangiano, con lagrangiano \mathcal{L} . Supongamos que queremos estudiar el movimiento restringido por funciones $f_1, \dots, f_m : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, es decir buscamos que $q(t) \in \bigcap_{i=1}^n f_i^{-1}(\{0\}) \quad \forall t$. Podemos seguir dos métodos

Método 1, si $\bigcap_{i=1}^n f_i^{-1}(\{0\}) = M$ es una subvariedad de \mathbb{R}^n , de dimensión $n-m$, entonces podemos expresar a los puntos $q \in \mathbb{R}^n \cap M$ en coordenadas $r \in \mathbb{R}^{n-m}$ de M y expresar el Lagrangiano en estas coordenadas. El problema es ahora un problema Lagrangiano $n-m$ dimensional.

Método 2, Cuando se trata de un Lagrangiano mecánico $\mathcal{L} = T - U$, podemos modificar el Lagrangiano añadiendo fuerzas de restricción de la siguiente manera

$$\tilde{\mathcal{L}} = \mathcal{L} + \sum_{i=1}^m \lambda_i f_i. \quad (19)$$

Para que las soluciones de $\tilde{\mathcal{L}}$ respeten las restricciones es necesario que

$$F - \sum_{i=1}^m \lambda_i \nabla f_i \quad \text{sea tangente a la restricción}, \quad \text{donde } F = -\nabla U \text{ es la fuerza en } \mathcal{L}.$$

En particular se tiene que cumplir que

$$\langle F - \sum_{i=1}^m \lambda_i \nabla f_i, \nabla f_j \rangle = 0 \quad \forall j = 1, \dots, m$$

$$\Leftrightarrow \langle F, \nabla f_j \rangle = \sum_{i=1}^m \lambda_i \langle \nabla f_i, \nabla f_j \rangle \quad \forall j = 1, \dots, m \quad (20)$$

Que es un sistema lineal de m ecuaciones y m incógnitas el cual siempre tiene solución única siempre que los ∇f_i sean linealmente independientes.



3. Mecánica del cuerpo rígido.

3.1 Fuerzas ficticias: de coriolis y de inercia

Sea \vec{x} una partícula regida por las ecuaciones de movimiento

$$\ddot{\vec{x}} = \vec{F}(\dot{x}, x, t) \quad \text{en un sistema de referencia (inercial), } (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3).$$

Consideremos $\{B(t)\}_{t \geq 0}$ una familia C^∞ de movimientos rígidos, i.e.: $B(t) \in \mathbb{R}^3 \times SO(3) \quad \forall t \geq 0$.

Sea $x(t) = B(t)y$. Escribiremos simplemente $x = By$

Cuales son las ecuaciones de movimiento de \vec{y} ?

$$\dot{x} = \dot{B}y + B\dot{y}$$

$$\ddot{x} = \ddot{B}y + 2\dot{B}\dot{y} + B\ddot{y}$$

$$\Rightarrow \ddot{y} = B^{-1} \underbrace{F(\dot{B}y + B\dot{y}, By, t)}_{(Fuerza de inercia)} - \underbrace{B^{-1}\ddot{B}y}_{(Fuerza de coriolis)} - 2B'\dot{B}\dot{y}$$

(21)

(Fuerza de inercia) (Fuerza de coriolis)

Caso particular 1: $B(t) = B$ (constante)

$$\ddot{y} = B^{-1} F(B\dot{y}, By, t)$$

Caso particular 2:

Caso particular importante, supongamos que $B(t)$ es una rotación con velocidad angular constante ω . Entonces $B(t) = AC(t)A^T$ con $C(t) = \begin{pmatrix} \cos \omega t & -\sin \omega t & 0 \\ \sin \omega t & \cos \omega t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $A \in SO(3)$ no dependiente de t .

Notemos que por el caso particular 1 las ecuaciones de movimiento de \vec{y} dado por $x(t) = B(t)\vec{y}(t)$ son, salvo la transformación ortogonal A las mismas que las de \vec{y} dado por $x(t) = C(t)\vec{y}(t)$. Esto permite reducir el estudio al de rotaciones planas en el plano x,y .

Podemos suponer entonces que

$$B(t) = \begin{pmatrix} \cos \omega t & -\sin \omega t & 0 \\ \sin \omega t & \cos \omega t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} c(\omega t) & -s(\omega t) & 0 \\ s(\omega t) & c(\omega t) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c & -s & 0 \\ s & c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

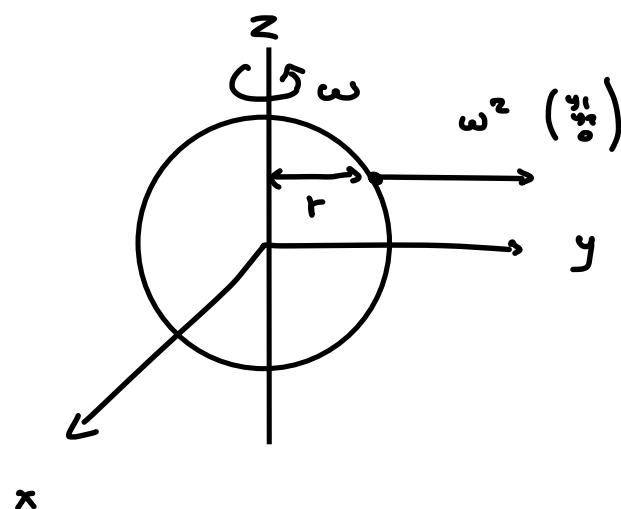
$$\ddot{B} = \omega \begin{pmatrix} -s & -c & 0 \\ c & -s & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \ddot{\ddot{B}} = \omega^2 \begin{pmatrix} -c & s & 0 \\ -s & -c & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = -\omega^2 B + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \omega^2 \end{pmatrix}$$

Por lo tanto, la fuerza de inercia se puede expresar como

$$-B^{-1}\ddot{B}y = \omega^2 B^{-1}By + B^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega^2 y_3 \end{pmatrix} = \omega^2 y - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega^2 y_3 \end{pmatrix} = \omega^2 \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\therefore -B^{-1}\ddot{B}y = \omega^2 \vec{r} = \omega^2 \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Es decir que la fuerza centrífuga se ejerce horizontal al plano x,y con magnitud $\omega^2 r$ donde $r = \sqrt{y_1^2 + y_2^2}$.



Analicemos ahora el término de fuerza de coriolis

Como $B^{-1}B = B^T B = 1$ entonces

$$\overset{\circ}{B^T} B + \overset{\circ}{B} B^T = 0, \text{ entonces}$$

$$B^T \overset{\circ}{B} = -\overset{\circ}{B^T} B = -(\overset{\circ}{B^T} B)^T, \text{ es decir}$$

$\overset{\circ}{B^T} B$ es antisimétrica.

La fuerza de coriolis es antisimétrica

Recordemos el siguiente

Teorema 7 Si $A = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{pmatrix}$ entonces

$$A\vec{y} = \vec{\omega} \times \vec{y} \quad \text{donde} \quad \vec{\omega} = \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{pmatrix}.$$

Por lo tanto la fuerza de coriolis se puede expresar como

$$-2B^{-1}\overset{\circ}{B}\dot{y} = -2\vec{\omega} \times \dot{y}$$

Teorema 8 Cuando $B(t)$ es una rotación constante con velocidad angular ω entonces, $\vec{\omega}$ dado como el único vector tal que $B^{-1}\overset{\circ}{B}y = \vec{\omega} \times y \quad \forall y \in \mathbb{R}^3$ tiene como dirección el eje de la rotación y $\|\vec{\omega}\| = \omega$.

dem: Basta probar el resultado para rotaciones sobre el eje z , pues si $B(t)$ es una rotación sobre algún otro eje arbitrario, entonces existe $A \in SO(3)$ tal que

$$C(t) := A^T B(t) A \text{ sea una rotación de velocidad } \vec{\omega}_c = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{pmatrix} \text{ a el eje } z,$$

y en este caso el vector $\vec{\omega}_c$ es $A\vec{\omega}$ pues

$$C^{-1} \dot{C} y = \vec{\omega}_c \times y$$

$$(A^T B A)^{-1} A^T \dot{B} A = \vec{\omega}_c \times y$$

$$A^T B \dot{B} A y = \vec{\omega}_c \times y$$

$$\dot{B} B^T A y = A \vec{\omega}_c \times A y$$

$\forall y \in \mathbb{R}^3$, entonces

$$B \ddot{B} y = A \vec{\omega}_c \times y \quad \forall y \in \mathbb{R}^3 \quad (A \text{ es invertible}).$$

Claramente $A \vec{\omega}_c$ es el eje de rotación de $B(t)$ y

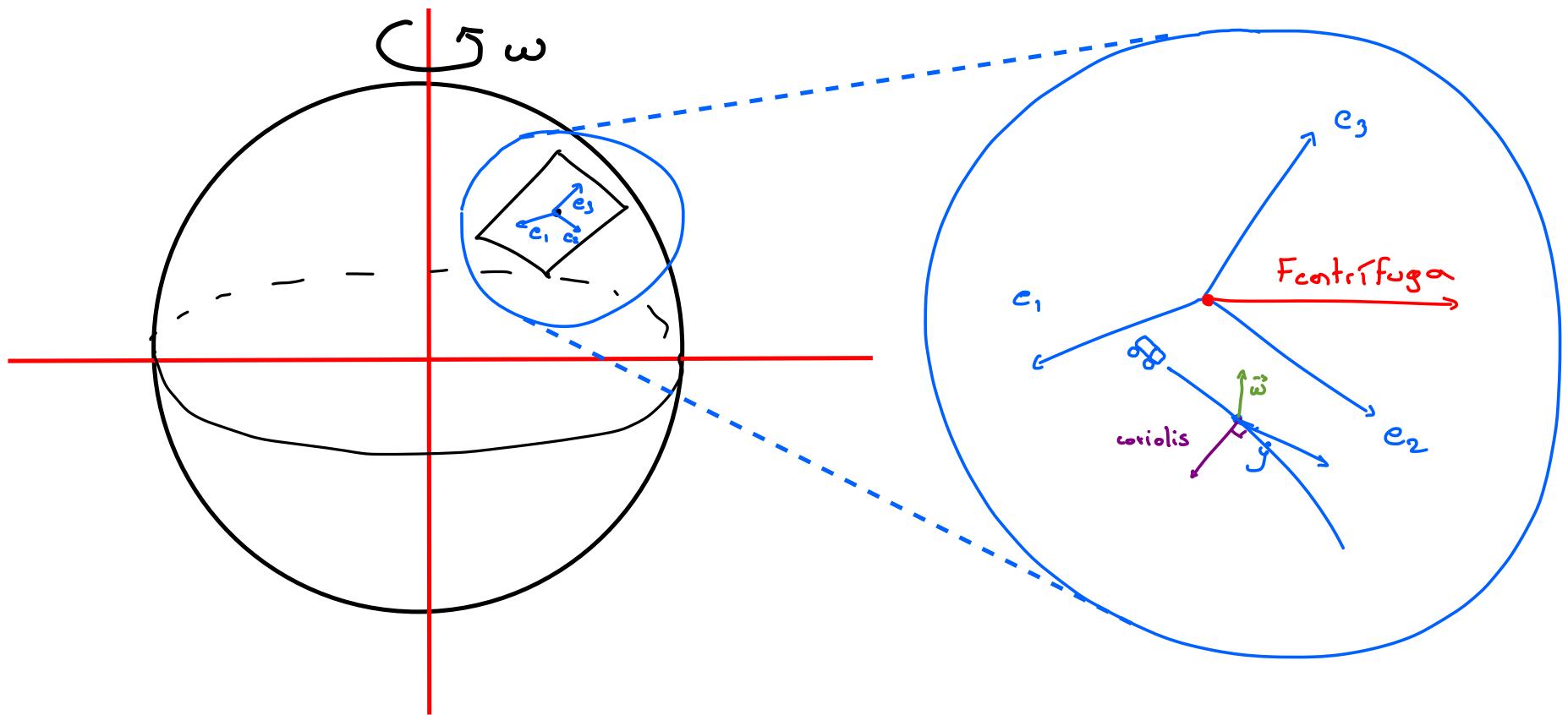
$$\|A \vec{\omega}_c\| = \|\vec{\omega}_c\| = \omega.$$

Para ver que el resultado se compleja para rotaciones en Z , podemos hacer el cálculo explícito:

$$\begin{aligned} B^{-1} \dot{B} &= \omega \begin{pmatrix} \cos(-\omega t) & -\sin(-\omega t) & 0 \\ \sin(-\omega t) & \cos(-\omega t) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\sin(\omega t) & -\cos(\omega t) & 0 \\ \cos(\omega t) & -\sin(\omega t) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \omega \begin{pmatrix} \cos(\omega t) & \sin(\omega t) & 0 \\ -\sin(\omega t) & \cos(\omega t) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\sin(\omega t) & -\cos(\omega t) & 0 \\ \cos(\omega t) & -\sin(\omega t) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \omega \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Así $B^{-1} \dot{B} y = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \times y$ y $\vec{\omega}_B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{pmatrix}$ el ω claramente

está en el eje de rotación y su norma $\|\vec{\omega}_B\| = \omega$ es la velocidad angular de rotación.



3.2 El modelo de cuerpo rígido

Un primer modelo de cuerpo rígido consiste en $\{x_i(t), \dots, x_n(t)\} \subseteq \mathbb{R}^3$ partículas de masas $\{m_1, \dots, m_n\} \subseteq \mathbb{R}^+$, de tal forma que

$$|x_i - x_j| = r_{ij} \text{ es constante.}$$

El espacio de configuraciones está contenido en \mathbb{R}^{3n} , sin embargo las restricciones holonómicas anteriores pueden escribirse como

$$f_{ij}(x_1, \dots, x_n) = |x_i - x_j|^2 - r_{ij}^2 = 0 \quad \forall i, j = 1, \dots, n \quad i \neq j.$$

En total tenemos $\binom{n}{2}/2 = \frac{n(n+1)}{4}$ restricciones distintas.

Notemos también que

$$(\nabla f_{ij})_{3k+\ell} = 2[\delta_{ik}(x_i^\ell - x_j^\ell) - \delta_{jk}(x_i^\ell - x_j^\ell)] \quad k = 0, \dots, n \quad \ell = 1, 2, 3$$

$$\begin{aligned} \text{Así } \|\nabla f_{ij}\|^2 &= \sum_{\substack{k=1, \dots, n \\ \ell=1, 2, 3}} 4 [\delta_{ik}(x_i^\ell - x_j^\ell) - \delta_{jk}(x_i^\ell - x_j^\ell)]^2 \\ &= 4 \sum_{\substack{k=1, \dots, n \\ \ell=1, 2, 3}} \delta_{ik}(x_i^\ell - x_j^\ell)^2 + \delta_{jk}(x_i^\ell - x_j^\ell)^2 \\ &= 8 [(x_i^1 - x_j^1)^2 + (x_i^2 - x_j^2)^2 + (x_i^3 - x_j^3)^2] > 0, \end{aligned}$$

Es decir ∇f_{ij} es una submersión.

Problema pendiente: Determina suficientes restricciones f_{ij} de tal forma que recuperemos las restricciones iniciales pero tal que ∇f_{ij} sean linealmente independientes. Esto determinará la dimensión del espacio de configuraciones.

3.3 El momento angular de un cuerpo rígido

Sea $\{x_1, \dots, x_n\} \subseteq \mathbb{R}^3$ un cuerpo rígido con $\|x_i - x_j\| = r_{ij} \quad \forall t$.

Teorema 9: (Vector de velocidad angular).

$$\forall t, \exists! \omega(t) \text{ tal que } \dot{x}_i(t) = \bar{\omega}(t) \times x_i(t) \quad \forall i=1, \dots, n. \quad (22)$$

A este vector se le conoce como vector de velocidad angular.

demon:

Definición: El momento angular total de un cuerpo rígido se define como la suma de los momentos angulares de cada una de sus partículas, es decir

$$L = \sum_{i=1}^n L_i = \sum_{i=1}^n x_i \times p_i = \sum_{i=1}^n x_i \times m_i \dot{x}_i$$

Proposición: El momento angular se descompone como la suma del momento angular orbital del sistema y el momento angular de spin, como sigue

$$L = L_{orb} + L_{spin},$$

donde $L_{orb} = x_{cm}(t) \times m \dot{x}_{cm}(t)$ es el momento angular del centro de masa del sistema y

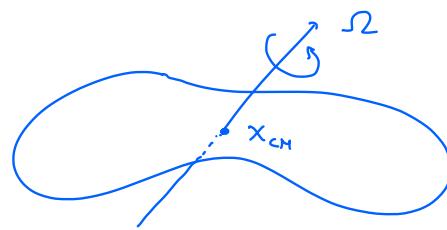
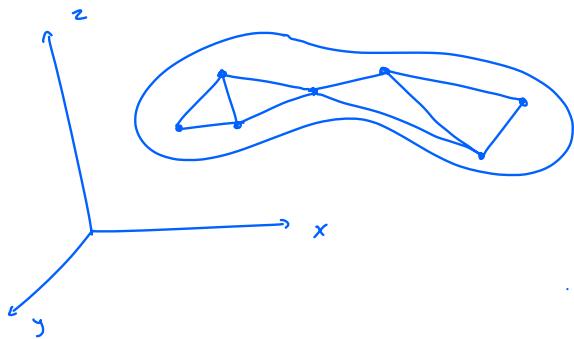
$$L_{spin} = \sum_{i=1}^n r_i \times m_i \dot{r}_i$$

donde $r_i = x_i - x_{cm}$. L_{spin} representa el momento angular del sistema alrededor de su centro de masa.

demon: pendiente

3.4 El tensor de inercia

Consideremos un cuerpo rígido formado por los partículas $\{x_1, \dots, x_n\} \subseteq \mathbb{R}^3$ de masas $\{m_1, \dots, m_n\}$



Sea x_{cm} el centro de masa del cuerpo. Supongamos que hacemos girar el cuerpo con respecto al eje generado por un vector $\Omega = \begin{pmatrix} \Omega_1 \\ \Omega_2 \\ \Omega_3 \end{pmatrix}$ a velocidad constante $\|\Omega\|$.

Calcularemos la energía cinética total del cuerpo rígido

$$\begin{aligned}
 T &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i |\dot{x}_i|^2 & x_i &= x_{cm} + r_i \quad \text{con } r_i = x_i - x_{cm} \\
 &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i |\dot{x}_{cm} + \Omega \times r_i|^2 & \dot{x}_i &= \dot{x}_{cm} + \dot{r}_i \\
 &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i |\dot{x}_{cm}|^2 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i |\Omega \times r_i|^2 + \sum_{i=1}^n \cancel{\langle \dot{x}_{cm}, \Omega \times r_i \rangle} & & \text{(teorema de velocidad angular)} \\
 &= \frac{1}{2} m |\dot{x}_{cm}|^2 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i |\Omega \times r_i|^2
 \end{aligned}$$

Se puede ver que $\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i |\Omega \times r_i|^2$ es una forma cuadrática en el vector Ω .

De hecho, está dada por

$$T = \Omega^\top \mathcal{I} \Omega, \quad \text{donde} \quad \mathcal{I} = \begin{pmatrix} \int_V \rho(y^2+z^2) dx dy dz & -\int_V \rho(xy) dx dy dz & -\int_V \rho(xz) dx dy dz \\ -\int_V \rho(yx) dx dy dz & \int_V \rho(x^2+z^2) dx dy dz & -\int_V \rho(yz) dx dy dz \\ -\int_V \rho(zx) dx dy dz & -\int_V \rho(zy) dx dy dz & \int_V (x^2+y^2) dx dy dz \end{pmatrix}$$

Resulta que

$$L = I\omega$$

Donde $L = \int_V r \times g(r) \dot{r} dV$

Ecaciones de Euler

$$I_1 \ddot{\omega}_1 + (I_3 - I_2) \omega_2 \omega_3 = M_1$$

$$I_2 \ddot{\omega}_2 + (I_1 - I_3) \omega_1 \omega_3 = M_2$$

$$I_3 \ddot{\omega}_3 + (I_2 - I_1) \omega_2 \omega_1 = M_3$$

4. Mecánica Hamiltoniana

4.1 Definición del Hamiltoniano y equivalencia

Sean $p_i = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}$ los momentos conjugados.

Supongamos que la relación que define los momentos conjugados como función de \dot{q} es invertible en el sentido en que existe $v_i(q, p, t) = \dot{q}_i \quad i=1, \dots, n$.

Se define entonces el Hamiltoniano

$$H(q, \dot{q}, t) = \sum_{i=1}^n \dot{q}_i p_i - \mathcal{L}(q, \dot{q}, t) \quad (26)$$

$$H(q, p, t) = \sum_{i=1}^n v_i(q, p, t) p_i - \mathcal{L}(q, v(q, p, t), t) \quad (27)$$

Teorema 10 El Hamiltoniano es una cantidad conservada si \mathcal{L} no depende explícitamente de t .

denn:

Teorema 11: Las ecuaciones de Euler-Lagrange son equivalentes a las ecuaciones de Hamilton

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} \quad , \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \quad (28)$$

denn:

4.2 Corchete de Poisson

Sean f, g funciones reales definidas en el espacio fase (p, q, t) . Se define el corchete de Poisson como

$$\{f, g\} := \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial g}{\partial q_i} - \frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial g}{\partial p_i}$$

Proposición: El corchete de Poisson puede escribirse mediante la matriz simplectica

$$J = \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{1}_{nn} \\ -\mathbb{1}_{nn} & 0 \end{pmatrix} \quad \text{como} \quad \{f, g\} = (\nabla_z f)^T J \nabla_z g$$

$$\begin{aligned} (\nabla_z f)^T J \nabla_z g &= \frac{\partial f}{\partial z_i} (J \nabla_z g)_i \\ &= \frac{\partial f}{\partial z_i} J_{ij} \frac{\partial g}{\partial z_j} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial g}{\partial q_i} - \frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial g}{\partial p_i} = \{f, g\} \quad \checkmark \end{aligned}$$

Proposición: El Corchete de Poisson satisface

$$\text{i) } \{f, g\} = -\{g, f\} \quad \text{ii) } \{\lambda f + g, h\} = \lambda \{f, h\} + \{g, h\} \quad \text{iii) } \{f, \{g, h\}\} + \{g, \{h, f\}\} + \{h, \{f, g\}\} = 0$$

Definición: A una función O del espacio fase en \mathbb{R} se le llama observable.

Proposición: La dinámica de cualquier observable está dada en términos del corchete de Poisson

por

$$\frac{dO}{dt} = \{H, O\} + \frac{\partial O}{\partial t}$$

$$\text{dem. } \frac{dO}{dt} = \frac{\partial O}{\partial p_i} \dot{p}_i + \frac{\partial O}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial O}{\partial t}$$

$$= -\frac{\partial O}{\partial p_i} \frac{\partial H}{\partial q_i} + \frac{\partial O}{\partial q_i} \frac{\partial H}{\partial p_i} + \frac{\partial O}{\partial t} \quad \checkmark$$

Observación: En particular $\frac{d\mathcal{H}}{dt} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t}$