5* Conditions aux limites de Neumann. (Exercice 2.6)

Soit $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ ouvert bornée à frontière Lipschitzienne. On s'intéresse au problème aux conditions aux limites de Neumann suivant :

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(A\nabla u) = -\operatorname{div} F & \text{dans } \Omega \\ A\nabla u \cdot n = F \cdot n & \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \qquad (5.a)$$

où n est le vecteur normal à $\partial\Omega$ extérieur à Ω.

1. Donnons une formulation faible de ce problème. Soit $H = \{u \in H^1(\Omega) \mid \int_\Omega u = 0\}$. et $T \in (H^1(\Omega))'$. On cherche $u \in H$ tel que

$$\int_\Omega A\nabla u \cdot \nabla v = \langle T, v\rangle_{H^1(\Omega)', H^1(\Omega)} \qquad \forall v \in H^1(\Omega). \qquad (5.b)$$

<u>Remarque</u>: Les conditions aux limites de Neumann sont prisens en compte dans l'espace H sur le quel on cherche les solutions.

2. Non existance pour tout $T \in H^1(\Omega)'$.

$H^1(\Omega)'$ peut être caractérisé de la façon suivante. $\forall T \in H^1(\Omega)$, $\exists a \in \mathbb{R}$ et $F \in L^2(\Omega)^N$ tel que

$$\langle T, u\rangle_{H^1(\Omega)', H^1(\Omega)} = a\int_\Omega u + \int_\Omega F \cdot \nabla u \qquad \forall u \in H^1(\Omega).$$

La preuve de cette caractérisation se base sur le théorème de représentation de Riesz (1*) et l'inégalitée de Pointcarée qui affirme l'éxistance de $C_\Omega > 0$ tel que

$$\|u\|_{L^2(\Omega)} \leqslant C_\Omega \|\,|\nabla u|\,\|_{L^2(\Omega)} \qquad \forall u \in H \qquad \text{(voir la preuve par l'absurde exercice 2.6).}$$

On montre facilement que pour tout $T \in H^1(\Omega)'$ tel que $a \neq 0$ le problème (5.b) n'a pas de solution. En effet, comme $\mathbb{1}_\Omega \in H^1(\Omega)$, si l'on prend $v = \mathbb{1}_\Omega$ dans (5.b) on arrive au fait que $a = 0$.

3. Existance et unicité à une constante près. Il s'agit de constater que, lorsque $a=0$

$$\int_\Omega A\nabla u\cdot\nabla v = \int_\Omega F\cdot\nabla v \quad \forall v\in H^1(\Omega) \quad \text{est équivalent à} \quad \int_\Omega A\nabla u\cdot\nabla v = \int_\Omega F\cdot\nabla v \quad \forall v\in H \quad (5.c)$$

Or (5.c) a une unique solution (on suppose ici qu'il existe $\alpha>0$ tel que $\forall x\in\Omega$ $A(x)\xi\cdot\xi \geq \alpha|\xi|^2$ $\forall\xi\in\mathbb{R}^N$) unique grace au Théorème de Lax-Milgram 1

Remarque : Si u est une solution de (5.b) alors u est unique a une constante près.

4. Solution Classique. Si les coefficients de A, $a_{ij}\in C^\infty(\bar\Omega,\mathbb{R})$, $F\in C^\infty(\bar\Omega,\mathbb{R}^N)$ et Ω est C^∞ et la solution faible u de (5.b) est C^∞, alors.

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(A\nabla u) = -\operatorname{div} F & \text{dans } \Omega \\ A\nabla u\cdot n = F\cdot n & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

En effet supposons que

$$\int_\Omega A\nabla u\cdot\nabla v = \int_\Omega F\cdot\nabla v \qquad \forall v\in H.$$

En prenant $v\in C^\infty(\Omega)\cap H$ et en intégrant par partier le côté gauche, on obtient

$$\int_\Omega A\nabla u\cdot\nabla v = \int_\Omega -(\Delta u)v + \int_{\partial\Omega} A\frac{\partial u}{\partial\vec n}\cdot v.$$

Intégration par parties :
$$\int_\Omega v\,\partial_i u = -\int_\Omega u(\partial_i v) + \int_{\partial\Omega} uv\,\nu_i$$

Comme $F\in C^\infty$, on a aussi que

$$\int_\Omega F\cdot\nabla v = -\int_\Omega \operatorname{div} F\, v + \int_{\partial\Omega}(F\cdot\vec n)v$$

Un argument type lemme fondamental du calcul des variations permet d'affirmer que

$$-\Delta u = -\operatorname{div} F \quad \text{et} \quad \frac{\partial u}{\partial\vec n} = F\cdot\vec n \quad \text{p.p.t et donc en tout point.}$$