



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MEXICO
PROGRAMA DE MAESTRÍA Y DOCTORADO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS Y
DE LA ESPECIALIZACIÓN EN ESTADÍSTICA APLICADA

Método de elementos finitos para el laplaciano logarítmico

TESINA
QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:
MAESTRO EN CIENCIAS

PRESENTA:
Ramón Poo Ramos

Alberto Saldaña
Instituto de matemáticas de la UNAM

CDMX, 27 de Junio de 2025

Agradecimientos

Agradezco a mis padres y a todos mi seres queridos que siempre han estado a mi lado durante este proceso. También agradezco especialmente a mi tutor Alberto Saldaña, quien ha sido una gran fuente de inspiración en mi carrera.

Resumen

El objetivo de este trabajo es mostrar cómo se aplica el método de elementos finitos en la resolución de un problema de Dirichlet homogéneo asociado a un operador no local conocido como *laplaciano logarítmico*. Este último está íntimamente relacionado con el *laplaciano fraccionario*, pues es el término de primer orden en su expansión de Taylor cuando el exponente $s \rightarrow 0^+$. El análisis numérico de este método se basa en resultados recientes de regularidad para el Laplaciano logarítmico y la convergencia del método se plantea en espacios de funciones *log-Hölder continuas* adecuados. Se calcula explícitamente la matriz de rigidez del problema discretizado como la derivada evaluada en $s = 0$ de la matriz de rigidez del laplaciano fraccionario. Se hace una breve discusión sobre la optimalidad del tipo de convergencia encontrado para este problema con evidencia numérica. En particular, se conjetura que la convergencia del método no puede ser una potencia del parámetro de refinamiento h , sino más bien una relación logarítmica con este último. Por último, se discute cómo usar el MEF para aproximar los valores propios del Laplaciano logarítmico usando los valores propios del problema discreto para aproximar los valores propios del problema continuo.

Índice

1. Introducción	4
2. Origen y propiedades del operador laplaciano logarítmico	4
2.1. Las primeras derivadas de orden no entero	4
2.1.1. Integrales de Riemann Liouville	4
2.2. El laplaciano fraccionario	5
2.2.1. Procesos de Lévy	5
2.2.2. Definición formal del laplaciano fraccionario	6
2.3. El laplaciano logarítmico	7
3. El Método de Elementos Finitos (MEF)	8
3.1. Breve historia del MEF	8
3.2. Ejemplo básico del MEF: El problema de Poisson	8
4. MEF aplicado al laplaciano logarítmico	10
4.1. Formulación variacional del problema de Dirichlet	10
4.2. El problema discretizado	11
5. Teoremas básicos para la aplicación del MEF	13
5.1. Teorema de existencia y estabilidad tipo alternativa de Fredholm	14
5.2. Teorema de convergencia	14
5.3. La matriz de rigidez	15
5.3.1. La matriz de rigidez del laplaciano fraccionario	16
5.3.2. La matriz de rigidez del laplaciano logarítmico	17
6. Pruebas de los resultados principales	18
6.1. Localización de la norma	18
6.2. Un argumento de densidad	19
6.3. Estimaciones de cuasi-interpolación	22
6.4. Resultado principal de estabilidad	22
7. Discusión y análisis numérico sobre la optimalidad de la convergencia	24
8. Aproximación de los eigenvalores del laplaciano logarítmico	25

1. Introducción

El objetivo de este trabajo es exponer el MEF para aproximar numéricamente soluciones al siguiente problema no local de Dirichlet

$$L_{\Delta}u = f \quad \text{en } \Omega, \quad u = 0 \quad \text{sobre } \mathbb{R} \setminus \Omega, \quad (1)$$

donde L_{Δ} denota al *laplaciano logarítmico* dado por

$$L_{\Delta}u(x) = \int_{x-1}^{x+1} \frac{u(x) - u(y)}{|x - y|} dy - \int_{\mathbb{R} \setminus (x-1, x+1)} \frac{u(y)}{|x - y|} dy + \rho_1 u(x), \quad (2)$$

con $\rho_1 := 2 \ln(2) + \psi(\frac{1}{2}) - \gamma$, $\psi = \frac{\Gamma'}{\Gamma}$ la función digamma y $\gamma = -\Gamma'(1)$.

Más adelante describiremos a detalle quién es exactamente el operador no local L_{Δ} . Para esto, comenzaremos por discutir el concepto de *derivadas fraccionarias* y el *laplaciano fraccionario*.

2. Origen y propiedades del operador laplaciano logarítmico

2.1. Las primeras derivadas de orden no entero

¿Cómo surge la idea de derivadas de orden no entero? Según el artículo [15], en 1695, l'Hôpital envió una carta a Leibniz. Le intrigaba la cuestión de darle algún sentido al exponente $\frac{1}{2}$ para el orden de una derivada. Así las primeras reflexiones sobre el cálculo fraccionario son tan antiguas como el cálculo tradicional mismo.

2.1.1. Integrales de Riemann Liouville

La primera definición formal de derivada fraccionaria proviene de la integral de Riemann Liouville [23]. Esta se define como

$$I_a^{\alpha} f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x f(t) (x - t)^{\alpha-1} dt, \quad \forall x > a.$$

donde f es una función continua en $[a, x]$, $\Gamma(\cdot)$ es la función gamma, $a \in \mathbb{R}$, es un punto base arbitrario, y $\alpha > 0$. Obsérvese que esta definición hace sentido para cualquier función real localmente integrable. Esta integral cumple la propiedad fundamental

$$I_a^{\alpha} I_a^{\beta} f(x) = I_a^{\alpha+\beta} f(x).$$

Esto nos permite extender la definición de derivada a cualquier potencia real como sigue

$${}_a D_x^\alpha f(x) := \begin{cases} I_a^{-\alpha} f(x) & \text{si } \alpha < 0, \\ f(x) & \text{si } \alpha = 0, \\ \frac{d^{\lceil \alpha \rceil}}{dx^{\lceil \alpha \rceil}} I_a^{\lceil \alpha \rceil - \alpha} f(x) & \text{si } \alpha > 0. \end{cases}$$

Una definición alternativa de la derivada fraccionaria que resultó de mucha relevancia es la derivada de Caputo, que aparece por primera vez en 1967 en [8], viene dada por

$${}^C D^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(n - \alpha)} \int_0^t \frac{f^{(n)}(\tau)}{(t - \tau)^{\alpha - n + 1}} d\tau$$

donde n es el entero tal que $n - 1 < \alpha < n$, y $f^{(n)}(\tau)$ es la derivada ordinaria de orden n de la función $f(t)$. Una ventaja de esta derivada es que es nula para funciones constantes, lo cual no es el caso para la derivada de Riemann-Liouville.

Existen muchos otros conceptos de derivada fraccionaria, como la derivada de Grünwald-Letnikov, la derivada de Riesz, la derivada de Weyl, la derivada de Chen, la derivada de Marchaud y más. El lector interesado puede consultar todas estas definiciones en [15].

2.2. El laplaciano fraccionario

2.2.1. Procesos de Lévy

Veamos una forma de interpretar el operador laplaciano fraccionario con la ayuda de los procesos de Lévy con saltos. Una exposición más detallada de este tema se puede consultar en [25].

Recordemos que una forma de interpretar el operador laplaciano es verlo como el operador infinitesimal del movimiento browniano. En efecto, consideremos el incremento infinitesimal de una función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, de un movimiento browniano $\{X_t \mid t \geq 0\}$, que está dado por

$$Af(x) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{(T_t f)(x) - f(x)}{t},$$

donde, T_t es el operador de transición del proceso, es decir, $(T_t f)(x) := \mathbb{E}(f(X_t) \mid X_0 = x)$. El operador A es llamado operador infinitesimal del movimiento browniano. Es sencillo probar (consúltense [14]) que el operador tiene la siguiente forma diferencial

$$Af(x) = \frac{1}{2} \Delta f(x).$$

El operador laplaciano fraccionario es también el operador infinitesimal de un proceso estocástico, salvo que esta vez se trata de un proceso de Lévy con saltos. A continuación daremos una breve explicación de esto. Para una descripción sencilla y detallada de esto se puede consultar [25].

Consideremos una partícula que, cada cierto tiempo $\tau > 0$, salta de un punto en $h\mathbb{Z}^n$ a otro, donde $h > 0$, representa la separación entre dos puntos consecutivos de $h\mathbb{Z}^n$. A diferencia de una caminata aleatoria, aquí estamos permitiendo que la partícula dé saltos "largos". Si pensamos en el proceso límite cuando $h, \tau \rightarrow 0$ obtenemos un proceso de Lévy con saltos. Así, como en el caso del movimiento browniano, se puede definir el operador infinitesimal de un proceso de Lévy. En este caso está dado por

$$Af(x) = -(-\Delta)^{\frac{\alpha}{2}} f(x),$$

donde $\alpha \in (0, 2)$ es el parámetro que describe la relación entre el tiempo y el espacio $\tau = h^\alpha$, cuando hacemos tender el proceso discreto al proceso continuo. En este caso, la ecuación análoga a la ecuación del calor, pero esta vez usando un Laplaciano fraccionario

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = -(-\Delta)^{\frac{\alpha}{2}} u(x, t),$$

describe la densidad de probabilidad $u(x, t)$ del proceso.

2.2.2. Definición formal del laplaciano fraccionario

Hoy en día existen varias definiciones equivalentes para el laplaciano fraccionario. Por ejemplo, en el artículo de Kwaśnicki [21] el lector puede encontrar diez definiciones distintas del laplaciano fraccionario, como las definiciones: de Fourier, distribucional, integral de Bochner, integral singular, generador infinitesimal y más. A continuación enunciaremos algunas de las definiciones del laplaciano fraccionario con un fin ilustrativo sin ser demasiado detallados en los espacios funcionales donde estas definiciones tienen sentido. Sea $\alpha \in (0, 2)$, tenemos las siguientes definiciones del laplaciano fraccionario.

1. Definición de Fourier: Esta definición se basa en definir el laplaciano fraccionario con base a lo que su transformada de Fourier debería de dar, (en analogía con la transformada de Fourier del laplaciano) es decir.

$$\mathcal{F}(-(-\Delta)^{\alpha/2} f)(\xi) = -|\xi|^\alpha \mathcal{F}f(\xi).$$

2. Definición de Bochner: Esta definición involucra la integral de Bochner que es en general una integral de funciones valuadas en un espacio de Banach.

$$-(-\Delta)^{\alpha/2} f = \frac{1}{|\Gamma(-\frac{\alpha}{2})|} \int_0^\infty (e^{t\Delta} f - f) t^{-1-\alpha/2} dt.$$

3. Definición de semigrupo:

$$-(-\Delta)^{\alpha/2} f = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{P_t f - f}{t},$$

con $P_t f = f * p_t$ y $\mathcal{F}p_t(\xi) = e^{-t|\xi|^\alpha}$;

Esperemos que con estas ideas en mente, la idea de llamar *operador no local* al laplaciano fraccionario, tenga sentido. En efecto, por un lado la interpretación probabilística muestra que el fenómeno detrás del laplaciano fraccionario es de naturaleza no local en el sentido de que representa un fenómeno de difusión con saltos, es decir, que el comportamiento de la solución en un lugar del espacio puede tener un efecto sobre un lugar del espacio totalmente apartado de este. Por otro lado, las definiciones integrales del operador dejan ver que se trata de un operador no local, pues para definir estas integrales no basta conocer el comportamiento local de la función en cuestión, sino todos sus valores en una región. A continuación veremos un nuevo operador no local íntimamente relacionado con el laplaciano fraccionario que será el centro de interés de este trabajo a partir de este momento. Otras definiciones involucrando extensiones armónicas pueden encontrarse en [7].

2.3. El laplaciano logarítmico

El operador no local que nos proponemos estudiar es el *laplaciano logarítmico*, L_Δ , que se definió por primera vez en el artículo [10]. Este se puede definir como el término de orden uno en la expansión de Taylor de $(-\Delta)^s u(x)$, cuando $s \rightarrow 0^+$,

$$(-\Delta)^s u(x) = u(x) + sL_\Delta u(x) + o(s), \quad s \rightarrow 0^+. \quad (3)$$

Es decir que $L_\Delta := \frac{d}{ds}|_{s=0} (-\Delta)^s$. Otra definición que se obtiene al aplicar la transformada de Fourier a (3) y recordar la definición de tipo Fourier del laplaciano fraccionario es

$$\mathcal{F}(L_\Delta u)(\xi) = 2 \log(|\xi|) \widehat{u}(\xi). \quad (4)$$

En el mismo artículo se desarrolla la teoría básica del operador L_Δ . Se presenta una representación integral del operador, que utilizaremos más adelante, junto con una caracterización de sus valores propios y la positividad de la primera eigenfunción. También se establecen resultados de existencia y unicidad débil para el Problema de Poisson y principios del máximo bajo condiciones adecuadas sobre el dominio.

A partir de este trabajo se ha desarrollado más teoría alrededor del laplaciano logarítmico, por ejemplo, en [22] podemos encontrar más información sobre la teoría espectral del laplaciano logarítmico, en [20] se ha hecho uso del laplaciano logarítmico para abordar desde otra perspectiva el problema de Poisson fraccionario y en [18] se han obtenido resultados asintóticos para este último cuando $s \rightarrow 0^+$.

Aunque la teoría se está desarrollando con rapidez, aún hay problemas sin resolver, por ejemplo, no se conoce una solución explícita para el problema

$$L_\Delta \tau = 1, \text{ en } (-L, L), \quad \tau = 0 \text{ en } \mathbb{R} \setminus (-L, L),$$

llamada *función de torsión*. Se puede probar, gracias a los principios del máximo descritos por [10], que para valores pequeños de L la solución es positiva, pero para valores de L mayores hay soluciones que cambian de signo, lo cual no se ha probado, sino que se ha constatado numéricamente. Es precisamente esta una de las utilidades del MEF que nos proponemos estudiar a continuación.

3. El Método de Elementos Finitos (MEF)

3.1. Breve historia del MEF

El método de elementos finitos se atribuye a Richard Courant, quien hizo uso de una primera versión primitiva del MEF en un problema de vibraciones [13]. Fue algunos años más tarde, a partir de 1950, cuando más ingenieros comenzaron a usar el método para resolver problemas de mecánica estructural, y este ganó popularidad. Algunos ejemplos son el ingeniero griego John H. Argyris y el ingeniero estadounidense R. W. Clough en sus trabajos [2], [11].

El MEF es fácilmente aplicable a problemas elípticos lineales, como el problema de Poisson. En este caso, el teorema de Lax-Milgram garantiza la existencia y unicidad de las soluciones del problema en su forma variacional, la cual se transforma fácilmente en un problema discreto (reducción del problema a un sistema lineal en dimensión finita). Otro punto teórico importante a mencionar es que, en los años 1970, la teoría desarrollada por el matemático checo-americano Ivo Babuška, que se puede consultar en el libro [3], permite considerar problemas lineales más generales que los cubiertos por el teorema de Lax-Milgram, pues en lugar de plantearlos en espacios de Hilbert, los extiende a espacios de Banach utilizando una condición de inf-sup que reemplaza la condición de coercividad en el teorema de Lax-Milgram.

Aunque es más fácil utilizar el MEF cuando se resuelve un problema lineal, también se puede usar este método para resolver problemas no lineales. En este caso, el sistema de ecuaciones algebraicas resultantes de la discretización del problema será no lineal, y se podrán usar métodos iterativos para encontrar una solución aproximada. Este tipo de métodos se pueden apreciar claramente en el trabajo de los matemáticos franceses Jacques-Louis Lions y Haim Brésis [6]. También se han utilizado MEF para resolución de EDPs hiperbólicas como la ecuación de onda o las ecuaciones de Navier-Stokes, ver por ejemplo el trabajo de Jean-Luc Guermond [16].

3.2. Ejemplo básico del MEF: El problema de Poisson

Describiremos en esta sección, usando como ejemplo, el problema de Poisson, los principios básicos de los *métodos de los elementos finitos*, que llamaremos MEF, basándonos principalmente en [1] y [4]. Consideremos el problema elíptico con condiciones de Dirichlet homogéneas siguiente

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{en } \Omega, \\ u = 0 & \text{en } \partial\Omega. \end{cases} \quad (5)$$

El problema clásico consiste en encontrar una solución $u \in C^2(\overline{\Omega})$ a la ecuación diferencial que valga 0 en la frontera de Ω . Para la aplicación del método de elementos finitos nos basaremos en la formulación débil o formulación variacional del problema. Se dice que $u \in H_0^1(\Omega)$ es una solución débil del problema (5) si

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla \phi = \int_{\Omega} f \phi, \quad \forall \phi \in H_0^1(\Omega). \quad (6)$$

La idea es transformar el problema anterior en un problema discreto equivalente mediante el uso de subespacios de dimensión finita de $H_0^1(\Omega)$ que aproximen bien a $H_0^1(\Omega)$. Veamos cómo se aplica esta idea. Sea V_h un subespacio de dimensión finita de $H_0^1(\Omega)$ cuya base es $(\phi_i)_{i=1, \dots, n_h}$. El problema (6) en este subespacio se formula como

$$\int_{\Omega} \nabla u_h \cdot \nabla v_h = \int_{\Omega} f v_h, \quad \forall v_h \in V_h. \quad (7)$$

Cualquier función $u_h \in V_h$ se escribe como $u_h(x) = \sum_{j=1}^{n_h} u_j^h \phi_j(x)$, para coeficientes $u_j^h \in \mathbb{R}$, $j = 1, \dots, n_h$. Tomando $v_h = \phi_i$, (7) implica que

$$\sum_{j=1}^{n_h} u_j^h \int_{\Omega} \nabla \phi_j \cdot \nabla \phi_i = \int_{\Omega} f v_i \quad \forall i = 1, \dots, n_h. \quad (8)$$

Escribiendo $U_h = (u_i^h)_{i=1, \dots, n_h}$, $K_h = (a_{i,j})_{i,j=1, \dots, n_h}$ y $b_h = (b_i)_{i=1, \dots, n_h}$, donde $a_{i,j} = \int_{\Omega} \nabla \phi_j \cdot \nabla \phi_i$ y $b_i = \int_{\Omega} \phi_i f$, tenemos que (8) es equivalente a

$$K_h U_h = b_h. \quad (9)$$

Encontrar los coeficientes de U_h es ahora un problema de álgebra lineal.

Para garantizar que la solución u_h es una buena aproximación a la solución u del problema original (6), se debe hacer un análisis numérico de la convergencia de u_h a u en $H_0^1(\Omega)$. No haremos aquí este análisis, pero recordaremos los puntos clave que nos van a permitir hacer tal análisis.

- Hay que elegir un buen espacio de dimensión finita V_h . Esto se hará mediante una discretización adecuada del dominio Ω . En general, se eligen espacios de polinomios por pedazos. Un ejemplo de esto son los conocidos como *Elementos finitos de Lagrange*. Para que V_h sea una buena aproximación de $H_0^1(\Omega)$, se tiene que cumplir la *condición de aproximación interna* siguiente

$$\lim_{h \rightarrow 0} \inf_{v_h \in V_h} \|u - u_h\| = 0.$$

- El teorema de Lax-Millgram permite probar la estabilidad de este método.
- El lemma de Cea es clave en la prueba de la convergencia del método.

Cabe mencionar que un análisis prácticamente idéntico permite aplicar el MEF a operadores elípticos más generales utilizando las mismas herramientas, ver por ejemplo [4]. La formulación variacional de los problemas elípticos es lo que nos permite poner en marcha el MEF. A continuación veremos que para el laplaciano logarítmico que introdujimos anteriormente se tiene justamente una formulación variacional que nos permitirá aplicar el método.

4. MEF aplicado al laplaciano logarítmico

4.1. Formulación variacional del problema de Dirichlet

Introduzcamos las siguientes notaciones basadas en [17] y siguiendo las ideas establecidas en [10]. Sea $L > 0$,

$$\Omega := (0, L), \quad B_1(\Omega) := (-1, L + 1).$$

Consideremos el espacio de Hilbert

$$\mathbb{H}(\Omega) := \{u \in L^2(\Omega) : \|u\|_{\mathbb{H}(\Omega)} < \infty \text{ y } u = 0 \text{ en } \mathbb{R} \setminus \Omega\},$$

donde $\|u\|_{\mathbb{H}(\Omega)}^2 := \mathcal{E}(u, u)$ y $\mathcal{E}(\cdot, \cdot)$ es un producto escalar en $\mathbb{H}(\Omega)$ dado por

$$\mathcal{E}(u, v) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} \int_{B_1(x)} \frac{(u(x) - u(y))(v(x) - v(y))}{|x - y|} dy dx,$$

para $u, v \in \mathbb{H}(\Omega)$.

Se sabe que la inclusión

$$\mathbb{H}(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega) \quad \text{es compacta,}$$

véase [12, Theorem 2.1].

Con esta notación establecida podemos enunciar la formulación variacional del problema en cuestión.

Definición 4.1. Sea $f \in L^2(\Omega)$. Se dice que $u \in \mathbb{H}(\Omega)$ es una solución variacional del problema de Dirichlet (1), si

$$\mathcal{E}_L(u, v) = \int_{\Omega} f(x)v(x) \quad \forall v \in \mathbb{H}(\Omega), \tag{10}$$

donde,

$$\mathcal{E}_L(u, v) = \mathcal{E}(u, v) + B(u, v),$$

y B es la forma bilineal dada por

$$B(u, v) = - \int \int_{\substack{x, y \in \mathbb{R} \\ |x-y| \geq 1}} \frac{u(x)v(y)}{|x-y|} dx dy + \rho_1 \int_{\mathbb{R}} uv dx.$$

con, ρ_1 está dada como en (2). El siguiente resultado justifica el nombre de formulación débil del problema.

Proposición 4.1. *Toda solución clásica de (1) es una solución débil, es decir que si*

$$L_{\Delta} u(x) = \int_{x-1}^{x+1} \frac{u(x) - u(y)}{|x-y|} dy - \int_{\mathbb{R} \setminus (x-1, x+1)} \frac{u(y)}{|x-y|} dy + \rho_1 u(x) = f(x) \quad \text{para toda } x \in \Omega,$$

entonces

$$\mathcal{E}_L(u, v) = \int_{\Omega} f(x)v(x) \quad \forall v \in \mathbb{H}(\Omega). \quad (11)$$

Demostración. Sea $u \in \mathbb{H}(\Omega)$ una solución clásica de (1). Multiplicando ambos lados de la expresión (11) por una función $v \in \mathbb{H}(\Omega)$ e integrando sobre \mathbb{R} tenemos que

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}} \int_{x-1}^{x+1} \frac{u(x) - u(y)}{|x-y|} v(x) dy dx - \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R} \setminus (x-1, x+1)} \frac{u(y)v(x)}{|x-y|} dy dx + \rho_1 \int_{\mathbb{R}} u(x)v(x) dx \\ &= \int_{\mathbb{R}} f(x)v(x) dx. \end{aligned}$$

Reconocemos en los dos últimos sumandos del lado izquierdo la expresión de $B(u, v)$. Utilizando la simetría del dominio de integración escribimos el primer sumando del lado izquierdo como

$$\int_{\mathbb{R}} \int_{x-1}^{x+1} \frac{u(x) - u(y)}{|x-y|} v(x) dy dx = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} \int_{x-1}^{x+1} \frac{(u(x) - u(y))(v(x) - v(y))}{|x-y|} dy dx,$$

que corresponde al término $\mathcal{E}(u, v)$ en la formulación débil. \square

Ahora que tenemos una formulación variacional del problema, podemos hacer una formulación discreta del problema, este será el propósito de la siguiente sección.

4.2. El problema discretizado

Tal y como lo hemos hecho en el caso del laplaciano, para obtener una aproximación u_h por elementos finitos de u , queremos encontrar u_h en el espacio de dimensión finita V_h y resolver

el problema variacional discreto

$$\mathcal{E}_L(u_h, v) = \int_{\Omega} f v \quad \text{para toda } v \in V_h. \quad (12)$$

Para esto se considera una base $(\varphi_i)_{i=1}^{N+1}$ del espacio discretizado V_h . La aproximación por elementos finitos provienen entonces de resolver el problema algebraico

$$\mathcal{A}_h^L \alpha = F, \quad (13)$$

donde

$$A_h^L = (\mathcal{E}_L(\varphi_i, \varphi_j))_{i,j=0}^N, \quad (14)$$

es la *matriz de rigidez* y $F = (f_i)_{i=1}^{N+1}$ con $f_i = \int_{\Omega} f \varphi_i$. Encontrando el vector $\alpha = (\alpha_i)_{i=1}^{N+1}$, la aproximación al problema se obtiene como

$$u_h(x) = \sum_{i=0}^{N+1} \alpha_i \varphi_i(x). \quad (15)$$

Nuestro siguiente objetivo, es construir el espacio V_h y la base $(\varphi_i)_{i=1}^{N+1}$.

Sea $N \in \mathbb{N}$, $h := \frac{L}{N+1}$, $x_i = ih$, y

$$\Omega_i = (x_i, x_{i+1}) = (ih, (i+1)h), \quad \text{para } i \in \llbracket 0, N \rrbracket,$$

donde $\llbracket a, b \rrbracket := [a, b] \cap \mathbb{N}$. Consideremos el espacio discreto

$$V_h = \left\{ c \in C^0(\mathbb{R}) \mid v = 0 \text{ sobre } \mathbb{R} \setminus \Omega, v|_{\Omega_i} \in \mathcal{P}_1, i \in \llbracket 0, N \rrbracket \right\},$$

donde \mathcal{P}_1 es el espacio de polinomios de grado menor o igual a uno.

Las φ_i para $i \in \llbracket 0, N \rrbracket$ se definen como sigue

$$\varphi_i(x) = \begin{cases} \frac{x-x_{i-1}}{h} & \text{si } x \in [x_{i-1}, x_i], \\ \frac{x_{i+1}-x}{h} & \text{si } x \in [x_i, x_{i+1}], \\ 0 & \text{en otro caso .} \end{cases} \quad (16)$$

Para $i = 1, 2$ definimos

$$\varphi_0(x) = \begin{cases} \frac{x_1-x}{h} & \text{si } x \in [x_0, x_1], \\ 0 & \text{en otro caso .} \end{cases}$$

y

$$\varphi_{N+1}(x) = \begin{cases} \frac{x-x_N}{h} & \text{si } x \in [x_N, x_{N+1}], \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

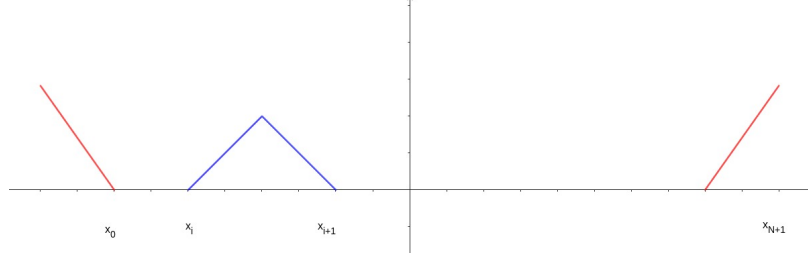


Figura 1: Grafica de las funciones base $(\varphi_i)_{i=1}^{N+1}$

Hasta aquí, hemos establecido un sistema discreto cuya solución debería aproximar la solución del problema original. El objetivo ahora es determinar con precisión en qué sentido estamos aproximando a la solución original y cuáles son las hipótesis para que la solución construida sea una buena aproximación. En la siguiente sección comenzaremos con algunos resultados básicos para tratar estas cuestiones.

5. Teoremas básicos para la aplicación del MEF

Para hablar de convergencia y estabilidad del método en cuestión es conveniente introducir el cuadro funcional adecuado. Para esto definimos $\ell : (0, \infty) \rightarrow (0, 1]$, llamada *módulo de continuidad*, dado por

$$\ell(p) = |\ln(\min(\rho_0, p))|^{-1}, \quad \rho_0 = 0.1. \quad (17)$$

Dada $\alpha \in (0, 1)$, definimos

$$\begin{aligned} \mathcal{X}(\Omega) &= \left\{ u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \mid \|u\|_{\mathcal{X}(\Omega)} < \infty \text{ y } u = 0 \text{ en } \mathbb{R} \setminus \Omega \right\}, \\ \mathcal{Y}(\Omega) &= \left\{ f : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \mid \|f\|_{\mathcal{Y}(\Omega)} < \infty \right\}, \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned} \|u\|_{\mathcal{X}(\Omega)} &:= \sup_{\substack{x, y \in \mathbb{R} \\ x \neq y}} \frac{|u(x) - u(y)|}{\ell^\alpha(|x - y|)} + \sup_{\substack{x, y \in \Omega \\ x \neq y}} \ell^{1+\alpha}(d(x, y)) \frac{|f(x) - f(y)|}{\ell(|x - y|)}, \\ \|f\|_{\mathcal{Y}(\Omega)} &:= \|f\|_{L^\infty(\Omega)} + \sup_{\substack{x, y \in \Omega \\ x \neq y}} \ell^2(d(x, y)) \frac{|f(x) - f(y)|}{\ell^{\alpha+1}(|x - y|)}, \\ d(x) &:= \text{dist}(x, \partial\Omega), \quad d(x, y) := \min(d(x), d(y)). \end{aligned} \quad (18)$$

5.1. Teorema de existencia y estabilidad tipo alternativa de Fredholm

Con estos espacios definidos, el siguiente teorema de tipo alternativa de Fredholm nos permitirá caracterizar la existencia y regularidad de las soluciones clásicas de (1), así como la estabilidad del problema.

Teorema 5.1 (Teorema 1.1 en [9]). *Existe $\alpha = \alpha(\Omega) \in (0, 1)$ tal que una y solo una de las siguientes alternativas ocurre:*

- *Para cada $f \in \mathcal{Y}(\Omega)$ existe una única solución clásica $u \in \mathcal{X}(\Omega)$ de*

$$L_{\Delta}u = f \text{ en } \Omega, \quad u = 0 \text{ en } \mathbb{R} \setminus \Omega.$$

Además

$$\|u\|_{\mathcal{X}(\Omega)} \leq C \|f\|_{\mathcal{Y}(\Omega)}, \quad (19)$$

para alguna $C > 0$ dependiente de Ω .

- *Existe una solución no trivial $u \in \mathcal{X}(\Omega)$ de $L_{\Delta}u = 0$.*

Notemos que en el caso de la primera alternativa, este resultado caracteriza la estabilidad del problema, pues si tuviéramos una condición inicial $f_1 \in \mathcal{Y}(\Omega)$ y una condición inicial perturbada, $f_2 := f_1 + f_{\text{error}} \in \mathcal{Y}(\Omega)$, con $f_{\text{error}} \in \mathcal{Y}(\Omega)$, una perturbación, cuyas soluciones correspondientes son u_1 y $u_2 := u_1 + u_{\text{error}}$, entonces

$$\|u_{\text{error}}\|_{\mathcal{X}(\Omega)} \leq C \|f_{\text{error}}\|_{\mathcal{Y}(\Omega)}. \quad (20)$$

Así, si la perturbación de la condición inicial es pequeña, en principio (si C no es muy grande), la perturbación en la solución será pequeña. A continuación, enunciaremos el resultado principal sobre la convergencia del MEF.

5.2. Teorema de convergencia

El teorema principal de este estudio es el siguiente.

Teorema 5.2. *Sea $L > 0, \Omega := (0, L)$, y supongamos que se tiene la primera alternativa del Teorema 5.1. Sea $u \in \mathcal{X}(\Omega)$ la única solución débil de (1) y sea $u_h \in V_h$ la aproximación dada por (15). Entonces existen $h_0 > 0$, $C > 0$ y $\alpha \in (0, 1)$ tales que*

$$\|u - u_h\|_{\mathbb{H}(\Omega)} \leq C \ell^{\alpha}(h) \|f\|_{\mathcal{Y}(\Omega)} \quad \text{para toda } h \in (0, h_0), \quad (21)$$

donde ℓ es el módulo de continuidad dado en (17).

Este resultado expresa que la convergencia del MEF en el espacio $\mathbb{H}(\Omega)$. Esto muestra que, en principio, el MEF debe funcionar para aproximar una solución del problema (1). Teniendo

este resultado, lo único que hace falta para poner en marcha el MEF es tener una manera de calcular la matriz de rigidez \mathcal{A}_L^h . Esto es precisamente lo que haremos en la siguiente sección.

5.3. La matriz de rigidez

Para obtener la matriz de rigidez del laplaciano logarítmico, vamos a aprovechar la forma explícita calculada en [5] de la matriz de rigidez del problema de Poisson fraccionario. El siguiente resultado prueba que la matriz de rigidez de nuestro problema se obtiene al derivar y evaluar en 0 la matriz correspondiente al problema fraccionario correspondiente.

Proposición 5.1. *Las entradas $b_{i,j} = \mathcal{E}_L(\varphi_i, \varphi_j)$ de la matriz de rigidez A_h^L del laplaciano logarítmico están dadas en terminos de las entradas $b_{i,j}^s = \mathcal{A}_h^s$ de la matriz del problema fraccionario correspondiente como sigue*

$$b_{i,j} = \partial_s b_{i,j}^s |_{s=0} .$$

Demostración. Puede consultarse en [17]Lemma 5.1. □

A continuación presentaremos los resultados obtenidos en [5] y [17] del cálculo explícito de los coeficientes.

$$a_{i,j} := \frac{2}{c_{1,s}} \mathcal{E}_s(\varphi_i, \varphi_j), \quad \text{para } i, j = 1, \dots, N+1,$$

donde $c_{1,s} = 4^s \pi^{-\frac{1}{2}} s(1-s) \frac{\Gamma(\frac{1}{2}+s)}{\Gamma(2-s)} = \frac{\sin(\pi s) \Gamma(2s+1)}{\pi}$. Estos cálculos ya estaban hechos en [5] para los coeficientes con índices $i, j \neq 0, N+1$, en [17] se calculan los coeficientes restantes, correspondientes a las funciones base φ_0, φ_{N+1} discontinuas en los extremos que se requieren para este método.

5.3.1. La matriz de rigidez del laplaciano fraccionario

Teniendo en mente la simetría de los coeficientes basta con obtener los coeficientes siguientes.

Para $i, j \in \llbracket 1, N \rrbracket$ y $|i - j| \geq 2$,

$$a_{i,j} = -h^{1-2s} \frac{4(k+1)^{3-2s} + 4(k-1)^{3-2s} - 6k^{3-2s} - (k+2)^{3-2s} - (k-2)^{3-2s}}{2s(1-2s)(1-s)(3-2s)}.$$

Para $i \in \llbracket 1, N-1 \rrbracket$,

$$a_{i,i+1} = h^{1-2s} \frac{3^{3-2s} - 2^{5-2s} + 7}{2s(1-2s)(1-s)(3-2s)}$$

y, para $i \in \llbracket 1, N \rrbracket$,

$$a_{i,i} = h^{1-2s} \frac{2^{3-2s} - 4}{s(1-2s)(1-s)(3-2s)}.$$

Los coeficientes faltantes son

$$\begin{aligned} a_{0,0} &= \frac{4h^{1-2s}}{s(3-2s)(1-2s)}, \\ a_{0,1} &= \frac{(2^{2-2s} - 2)h^{1-2s}}{(3-2s)(1-s)s\sqrt{2}}, \\ a_{0,j} &= -\frac{h^{1-2s}\gamma_j^s}{\sqrt{2}(1-2s)(1-s)s(3-2s)}, \quad \text{para } j \in \llbracket 2, N \rrbracket, \\ a_{0,N+1} &= -\frac{h^{1-2s}\zeta_N^s}{s(1-s)(1-2s)(3-2s)}, \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned} \gamma_j^s &= -3j^{3-2s} + 2(3-2s)j^{2-2s} + (2s-3)(j-1)^{2-2s} + 3(j-1)^{3-2s} \\ &\quad - (j-2)^{3-2s} + (j+1)^{3-2s} + (2s-3)(j+1)^{2-2s}, \end{aligned} \tag{22}$$

y

$$\begin{aligned} \zeta_N^s &:= (N-1)^{-2s} N^{-2s} (N+1)^{-2s} [(N+1)^{2s} (2N^2(N-1)^{2s}(N+2s-3) - (N-1)^3 N^{2s}) \\ &\quad - (N+1)(N-1)^{2s} N^{2s} (N^2 + 4N(s-1) + 4s^2 - 6s + 1)]. \end{aligned} \tag{23}$$

Podemos resumir esto de la siguiente manera

$$a_{i,j} = \frac{h^{1-2s}}{2s(1-2s)(1-s)(3-2s)} \begin{cases} 8(1-s) & i=0, j=0, \\ \sqrt{2}(2^{2-2s}-2)(1-2s) & i=0, j=1, \\ -\sqrt{2}\gamma_j^s & i=0, j \in \llbracket 2, N \rrbracket, \\ -2\zeta_N^s & i=0, j=N+1, \\ -\xi_k^s & i, j \in \llbracket 1, N \rrbracket \text{ con } k \geq 2, \\ 3^{3-2s} - 2^{5-2s} + 7 & i \in \llbracket 1, N-1 \rrbracket, j=i+1, \\ 4^{2-2s} - 8 & \text{if } i \in \llbracket 1, N \rrbracket, j=i, \end{cases}$$

con γ_j^s dado por (22), ζ_N^s dado por (23) y $k := j - i$ y $\xi_k^s := 4(k+1)^{3-2s} + 4(k-1)^{3-2s} - 6k^{3-2s} - (k+2)^{3-2s} - (k-2)^{3-2s}$. Los cálculos detallados de estos coeficientes se encuentran en ([5]) y ([17]). A continuación derivaremos esta expresión para obtener la matriz de rigidez del laplaciano logarítmico.

5.3.2. La matriz de rigidez del laplaciano logarítmico

Por la Proposición 5.1, $b_{i,j} = \partial_s b_{i,j}^s|_{s=0}$. Entonces,

$$b_{i,j} = h \begin{cases} -\frac{2\gamma}{3} + \frac{16}{9} - \frac{4}{3} \log(h) + \frac{4}{3} \log(2) + \frac{2}{3} \psi\left(\frac{1}{2}\right), & i=0, j=0, \\ -\frac{\gamma}{3\sqrt{2}} + \frac{5}{9\sqrt{2}} - \frac{\sqrt{2}}{3} \log(h) - \frac{\sqrt{2}}{3} \log(2) + \frac{1}{3\sqrt{2}} \psi\left(\frac{1}{2}\right), & i=0, j=1, \\ -\frac{\sqrt{2}}{3}, & i=0, j=2, \\ l_k, & i=0, j \in \llbracket 3, N \rrbracket, \\ m_k, & i=0, j=N+1, \\ -\frac{p_k}{3}, & i, j \in \llbracket 1, N \rrbracket \text{ y } j-i=2, \\ \frac{q_k}{6}, & i, j \in \llbracket 1, N \rrbracket \text{ y } j-i>2, \\ -\frac{\gamma}{6} + \frac{11}{18} - \frac{\log(h)}{3} + \frac{64 \log(2) - 54 \log(3)}{12} + \frac{\log(2)}{3} + \frac{1}{6} \psi\left(\frac{1}{2}\right), & i \in \llbracket 1, N-1 \rrbracket, j=i+1, \\ -\frac{2}{9} (6 \log(h) + 3\gamma - 11 + \log(64) - 3\psi\left(\frac{1}{2}\right)), & i \in \llbracket 1, N \rrbracket, j=i, \end{cases} \quad (24)$$

$$l_k := \frac{1}{3\sqrt{2}}[-3j^3 \log(j) + 6j^2 \log(j) + (j-2)^3(-\log(j-2)) \\ + 3(j-1)^2(j-2) \log(j-1) + (j+1)^2(j-2) \log(j+1) - 2],$$

$$m_k := \frac{1}{3}[2(N-3)N^2 \log(N) - N - (N-1)^3 \log(N-1) \\ - (N+1)((N-4)N+1) \log(N+1) - 3],$$

$$p_k := -24 \log(3) - 12 \log(4) - 16 \log(9) + 27 \log(16) + \log(144),$$

$$q_k := -(-2+k)^3 \log(-2+k) + 4(-1+k)^3 \log(-1+k) \\ - 6k^3 \log(k) + 4(1+k)^3 \log(1+k) - (2+k)^3 \log(2+k),$$

con $\psi := \frac{\Gamma'}{\Gamma}$ la función digamma y $\gamma = -\psi(1)$.

Con esto establecido, es posible aplicar el MEF en pocas líneas de código. A continuación, enunciaremos y daremos las pruebas de los resultados principales.

6. Pruebas de los resultados principales

6.1. Localización de la norma

Recordemos que $\Omega = (0, L)$, $h := \frac{L}{N+1}$ y $\bar{\Omega} = \overline{\cup_{i \in \llbracket 0, N \rrbracket} \Omega_i}$. Notemos que la norma en \mathbb{H} tiene un rango de interacción finito, en el sentido de que

$$\|u\|_{\mathbb{H}(\Omega)}^2 = \int_{B_1(\Omega)} \int_{B_1(x)} \frac{|u(x) - u(y)|^2}{|x - y|} dx dy,$$

ya que si $\text{dist}(x, \Omega) > 1$ y $|x - y| < 1$, entonces $x, y \notin \Omega$ y $u(x) = u(y) = 0$. Notemos que la norma en \mathbb{H} no es aditiva respecto a dominios disjuntos. Por esta razón, para *localizar* la norma (lo cual sería trivial si fuera una norma aditiva respecto a dominios disjuntos), procederemos como sigue, basándonos en ([24]). Sean

$$S_0 := (0, 2h), \quad S_{N+1} := S_N := (L - 2h, L), \quad S_i = ((i-1)h, (i+2)h), \quad (25)$$

para $i \in \llbracket 1, N-1 \rrbracket$. También definimos por conveniencia

$$S_i = \emptyset \quad \text{si } i \neq \llbracket 0, N+1 \rrbracket.$$

Otra forma de decirlo es que S_i es la unión de Ω_i y sus conjuntos adyacentes, es decir

$$S_i = \bigcup_{\substack{j \in \llbracket 0, N \rrbracket, \\ \Omega_j \cap \Omega_i \neq \emptyset}} \Omega_j.$$

Lema 6.1. *Sea $L > 0$, $N \in \mathbb{N}$ fija, y suficientemente grande para que $h \in (0, \frac{1}{2})$. Entonces existe $C > 0$ dependiente unicamente de L tal que*

$$\begin{aligned} \|u\|_{\mathbb{H}(\Omega)} \leq & \sum_{i \in \llbracket 0, N \rrbracket} \int_{\Omega_i} \int_{S_i} \frac{|u(x) - u(y)|^2}{|x - y|} dx dy + \\ & C \ell^{-1}(h) \sum_{i \in \llbracket 0, N \rrbracket} \int_{\Omega_i} |u(x)|^2 x + C \sum_{i \in \llbracket 0, N \rrbracket} |u(x)|^2 \ell^{-1}(d(x)) dx, \end{aligned}$$

para toda $u \in \mathbb{H}(\Omega)$, donde ℓ es el módulo de continuidad dado por (17).

Demostración. Consultar ([17] Lemma 3.1). □

Ahora que tenemos la norma de $\mathbb{H}(\Omega)$ localizada, estamos listos para probar en la siguiente sección que V_h es una buena aproximación del espacio $\mathbb{H}(\Omega)$ si h es suficientemente pequeño.

6.2. Un argumento de densidad

Definimos el *cuasi-interpolador*, $I_h : L_2(\Omega) \rightarrow \mathcal{V}_h$ como

$$I_h(v)(x) = \sum_{i \in \llbracket 0, N+1 \rrbracket} a_i \varphi_i(x),$$

donde,

$$a_k = \int_{\Omega} v(x) \varphi_k(x) dx. \tag{26}$$

Un hecho importante de este quasi-interpolador es que

$$I_h 1 = 1 \text{ en } \Omega.$$

Es decir que el quasi-interpolador de una constante es ella misma. Esto es posible gracias a que la base $\{\varphi_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ tiene dos elementos discontinuos φ_0 y φ_{N+1} en los extremos del intervalo $\Omega = (0, L)$.

Es posible controlar la magnitud de los coeficientes a_k de una función $v \in \mathbb{H}(\Omega)$ en términos de su norma en L^2 . Si v es esencialmente acotada, obtenemos una mejor cota. Más precisamente, tenemos el siguiente resultado.

Lema 6.2. Sea $v \in \mathbb{H}(\Omega)$ y a_k definida como en (26). Entonces existe $C > 0$ independiente de h tal que

$$|a_k| \leq Ch^{-\frac{1}{2}} |v|_{L^2(S_k)} \quad \text{para toda } k \in \llbracket 0, N+1 \rrbracket, \quad (27)$$

donde las S_k son los conjuntos dados por (25). Si además $v \in L^\infty(\Omega)$ entonces

$$|a_k| \leq |v|_{L^\infty(\Omega)} \quad \text{para toda } k \in \llbracket 0, N+1 \rrbracket. \quad (28)$$

Demostración. Consultar [17] Lemma 3.2. \square

Otro lema que necesitaremos es el siguiente.

Lema 6.3. Sea $U \subseteq \mathbb{R}$ un intervalo abierto y acotado. Para toda $v \in C^\infty(U)$ escribimos $\bar{v} := \frac{1}{|U|} \int_U v$. Entonces,

$$|v - \bar{v}|_{L^2(U)}^2 \leq |v'|_{L^\infty(U)}^2 |U|^3. \quad (29)$$

Demostración. Consultar [17] Lemma 3.3. \square

El cuasi-interpolador I_h es continuo como función de L^∞ en L^∞ .

Lema 6.4. Sea $v \in L^\infty(\Omega)$. Entonces $|I_h v|_{L^\infty(\Omega)} \leq C |v|_{L^\infty(\Omega)}$, para alguna $C > 0$ uniforme con respecto a h .

Demostración. Consultar [17] Lemma 3.4 \square

El siguiente lema nos permite controlar la norma del cuasi-interpolador de $v \in \mathbb{H}$ en términos de los coeficientes a_k .

Lema 6.5. Sea $i \in \llbracket 0, N \rrbracket$, $v \in \mathbb{H}(\Omega)$, y a_k definidos como en (26). Entonces existe una constante independiente de h tal que

1. $\int_{\Omega_i} \int_{S_i} \frac{|I_h v(x) - I_h v(y)|^2}{|x-y|} dx dy \leq Ch \sum_{k \in I_i} a_k^2,$
2. $|I_h v|_{L^2(\Omega_i)}^2 \leq Ch \sum_{k \in I'_i} a_k^2,$

donde

$$\begin{aligned} I_i &= \{j \in \llbracket 0, N+1 \rrbracket \mid \varphi_j(x) - \varphi_j(y) \neq 0 \text{ para } x \in \Omega_i \text{ y } S_i\}, \\ I'_i &= \{j \in \llbracket 0, N+1 \rrbracket \mid \varphi_j(x) \neq 0 \text{ para } x \in \Omega_i\}. \end{aligned}$$

Demostración. Consultar [17] Lemma 3.5. \square

El siguiente lema ayuda a controlar la distancia entre el cuasi-interpolador y la función que se desea aproximar en $\mathbb{H}(\Omega)$.

Lema 6.6. Sea $i \in \llbracket 0, N \rrbracket$ y $v \in C_c^\infty(\Omega)$. Hay una constante $C > 0$ independiente de h tal que

$$\int_{\Omega_i} \int_{S_i} \frac{|(v - I_h v)(x) - (v - I_h v)(y)|^2}{|x - y|} dx dy \leq C |v'|_\infty^2 h^3. \quad (30)$$

Demostración. Consultar [17] Lemma 3.6. \square

Proposición 6.1. Para cualquier $\alpha > 0$, existe h_0 que depende únicamente de α tal que para cualquier $h < h_0$ y cualquier $v \in C_c^\infty(\Omega)$ tenemos que

$$\|v - I_h v\|_{\mathbb{H}(\Omega)} \leq C(|v|_\infty, |v'|_\infty, L) l^\alpha(h), \quad (31)$$

donde $C(|v|_\infty, |v'|_\infty, L)$ es una constante dependiente de $|v|_\infty, |v'|_\infty$ y L .

Demostración. Ver [17] Proposición 3.8. \square

Estamos en condiciones para probar el teorema principal de esta sección.

Teorema 6.1. Para cualquier $v \in \mathbb{H}(\Omega)$, existe $v_h \in V_h$ tal que $\|v - v_h\|_{\mathbb{H}(\Omega)} \rightarrow 0$ cuando $h \rightarrow 0$.

Demostración. De la definición de $\mathbb{H}(\Omega)$, es claro que las funciones Lipschitz-continuas sobre Ω y que valen 0 sobre $\mathbb{R} \setminus \Omega$, pertenecen a $\mathbb{H}(\Omega)$. Por lo tanto, V_h es un subespacio de $\mathbb{H}(\Omega)$. Podemos notar que V_h es cerrado por ser de dimensión finita.

Por el teorema de la proyección en espacios de Hilbert, para cada $v \in \mathbb{H}(\Omega)$, existe un único elemento $v_h \in V_h$, tal que

$$\|v - v_h\|_{\mathbb{H}(\Omega)} = \inf_{w \in V_h} \|v - w\|_{\mathbb{H}(\Omega)}. \quad (32)$$

De hecho, $v_h = \Pi_h v$, donde Π_h es la proyección ortogonal de $\mathbb{H}(\Omega)$ sobre V_h . Se sabe que la norma del operador $\|\Pi_h\|_* := \left\{ \|\Pi_h v\|_{\mathbb{H}(\Omega)} \mid v \in \mathbb{H}(\Omega) \text{ tal que } \|v\|_{\mathbb{H}(\Omega)} \leq 1 \right\}$.

Sea $\epsilon > 0$ y recordemos que $C_c^\infty(\Omega)$ es denso en $\mathbb{H}(\Omega)$. Así, para cada $v \in \mathbb{H}(\Omega)$ existe $w \in C_c^\infty(\Omega)$ tal que

$$\|v - w\|_{\mathbb{H}(\Omega)} < \frac{\epsilon}{3}.$$

Por la desigualdad del triángulo

$$\begin{aligned} \|v - v_h\|_{\mathbb{H}(\Omega)} &\leq \|v - w\|_{\mathbb{H}(\Omega)} + \|w - \Pi_h w\|_{\mathbb{H}(\Omega)} + \|\Pi_h w - \Pi_h v\|_{\mathbb{H}(\Omega)} \\ &\leq \frac{2\epsilon}{3} + \|w - I_h w\|_{\mathbb{H}(\Omega)} \leq \frac{2\epsilon}{3} + C(|w|_\infty, |w'|_\infty, L) \ell^\alpha(h). \end{aligned} \quad (33)$$

Hemos usado que $\|\Pi_h\|_* = 1$, (32) y la Proposición 6.1. Finalmente, tomando h suficientemente pequeña de tal forma que $C(|w|_\infty, |w'|_\infty, L) \ell^\alpha(h) < \frac{\epsilon}{3}$, obtenemos el resultado. \square

6.3. Estimaciones de cuasi-interpolación

En esta sección utilizaremos el espacio de funciones siguiente. Sea $\beta > 0$,

$$\mathbb{H}^\beta(\Omega, \ell) := \left\{ u \in L^2(\Omega) \left| \begin{aligned} &\int_{\Omega} \int_{\Omega} \frac{|u(x) - u(y)|^2}{|x - y| \ell(|x - y|)^\beta} dx dy < \infty, \\ &\int_{\Omega} |u(x)|^2 \ell^{-\beta}(d(x)) dx < \infty \end{aligned} \right. \right\}.$$

donde ℓ y d están dados por (17) y por (18).

Lema 6.7. *Sea $\alpha > 0$, $U \subseteq \mathbb{R}$ un intervalo acotado, $v \in \mathbb{H}^\alpha(U; \ell)$, y $\bar{v} = \frac{1}{|U|} \int_U v dx$, entonces,*

$$|v - \bar{v}|_{L^2(U)}^2 \leq \ell^\alpha(|U|) \int_U \int_U \frac{|v(x) - v(y)|^2}{|x - y| \ell^\alpha(|x - y|)} dx dy.$$

Demostración. Consultar [17, Lemma 3.11]. □

Lema 6.8. *Sea $\alpha > 0$, $i \in \llbracket 0, N \rrbracket$, $v \in H^\alpha(\Omega; \ell)$. Entonces, se cumple que*

$$\int_{\Omega_i} \int_{S_i} \frac{|(v - I_h v)(x) - (v - I_h v)(y)|^2}{|x - y|} dy dx \leq C \ell^\alpha(h) \int_{T_i} \int_{T_i} \frac{|v(x) - v(y)|^2}{|x - y| \ell^\alpha(|x - y|)} dy dx, \quad (34)$$

$$|v - I_h v|_{L^2(\Omega_i)}^2 \leq C \ell^\alpha(h) \int_{T_i} \int_{T_i} \frac{|v(x) - v(y)|^2}{|x - y| \ell^\alpha(|x - y|)} dy dx, \quad (35)$$

donde $T_i := S_{i-1} \cup S_{i+1}$ y S_i está definido como en (25).

Demostración. Consultar [17] Lemma 3.12. □

El propósito de estos dos lemas es probar lo siguiente.

Proposición 6.2. *Sea $\alpha > 0$ y $u \in \mathbb{H}^{1+\alpha}(\Omega, \ell)$, entonces*

$$\|u - I_h u\|_{\mathbb{H}(\Omega)}^2 \leq C \ell^\alpha(h) \|u\|_{\mathbb{H}^{1+\alpha}(\Omega, \ell)}. \quad (36)$$

Demostración. Consultar [17] Proposición 3.13. □

6.4. Resultado principal de estabilidad

Empecemos recordando la fomrulación variacional (10) del problema. Buscamos $u \in \mathbb{H}(\Omega)$ tal que

$$\mathcal{E}_L(u, v) = \int_{\Omega} f v \quad \text{para toda } v \in \mathbb{H}(\Omega), \quad (37)$$

y la formulación variacional del problema discretizado (12) que consiste en encontrar $u_h \in V_h$ tal que

$$\mathcal{E}_L(u_h, v) = \int_{\Omega} f v \quad \text{para toda } v \in V_h.$$

El hecho de que la forma bilineal \mathcal{E}_L no sea coercitiva no nos permite aplicar el lema de Cea directamente para afirmar que la aproximación por elementos finitos es, en cierto sentido, "la mejor aproximación posible". En su lugar, tenemos lo siguiente.

Lema 6.9. *Supongamos que existe $\alpha_0 > 0$ tal que,*

$$\sup_{v \in V_h} \frac{\mathcal{E}_L(u_h, v)}{\|v\|_{\mathbb{H}(\Omega)}} \geq \|u_h\|_{\mathbb{H}(\Omega)} \quad \text{para todo } u_h \in V_h, \quad (38)$$

entonces el problema discreto (12) admite una única solución $u_h \in V_h$, además esta solución satisface

$$\|u - u_h\|_{\mathbb{H}(\Omega)} \leq \left(1 + \frac{C}{\alpha_0}\right) \inf_{w \in V_h} \|u - w\|_{\mathbb{H}(\Omega)}, \quad (39)$$

donde $C > 0$ es uniforme con respecto de h y $u \in \mathbb{H}(\Omega)$ es una solución del problema variacional (37).

Demostración. Esta es una prueba clásica tipo lema de Cea, se puede consultar en [17, Lemma 4.1] □

A continuación veremos que las condiciones de este lema se satisfacen si nos encontramos en la primera alternativa del (Teorema 5.1).

Lema 6.10. *Supongamos que $L_{\Delta}u = 0$ en Ω con $u = 0$ en $\mathbb{R} \setminus \Omega$ solo tiene la solución trivial. Entonces para h suficientemente pequeña se satisfacen las condiciones del Lema 6.9, en el sentido de que existen $h_0 > 0$ y $\alpha_0 > 0$ tales que*

$$\sup_{v \in V_h} \frac{\mathcal{E}_L(u_h, v)}{\|v\|_{\mathbb{H}(\Omega)}} \geq \|u_h\|_{\mathbb{H}(\Omega)} \quad \text{para todo } u_h \in V_h, \text{ y } h \in (0, h_0), \quad (40)$$

con α_0 y h_0 independientes de h .

Por último, antes de probar el Teorema 5.2, necesitamos lo siguiente.

Proposición 6.3. *Assumamos que la alternativa 1 del Teorema 5.1 se satisface para alguna $\alpha \in (0, 1)$. Entonces $u \in \mathbb{H}^{1+\alpha}(\Omega, \ell)$. Además existe $C > 0$ solo dependiente de Ω de tal manera que*

$$\|u\|_{\mathbb{H}^{1+\alpha}(\Omega, \ell)} \leq C \|u\|_{\mathcal{X}^{\alpha}(\Omega)}. \quad (41)$$

Demostración. Consultar ([17, Proposition 4.3]). □

Estamos listos para demostrar el teorema principal de estabilidad.

Demostración del Teorema 5.2. Sea $\alpha \in (0, 1)$ dada como en el Teorema 5.1. Usando la desigualdad de interpolación (36) y la estimación tipo lema de Cea (39) obtenemos que

$$\|u - u_h\|_{\mathbb{H}(\Omega)} C \ell^\alpha \|u\|_{\mathbb{H}^{1+\alpha}(\Omega; \ell)}, \quad (42)$$

donde $C > 0$ es una constante uniforme respecto de h . Por la Proposición 6.3, y la estimación a priori (19), se sigue el resultado. \square

A continuación hablaremos sobre algunos experimentos numéricos que nos dan algunas sugerencias sobre la optimalidad de la tasa de convergencia del método en cuestión.

7. Discusión y análisis numérico sobre la optimalidad de la convergencia

Una estrategia común para observar el error de un (MEF) es utilizar la *función de torsión*, que es la solución al problema cuyo lado derecho es $f \equiv 1$. En muchos casos este problema tiene una solución explícita, lo cual permite comparar la solución aproximada con la solución explícita. Desafortunadamente en este caso, no se conoce una solución explícita para la función de torsión. En este caso, lo que hacemos es utilizar la función

$$v(x) = \frac{1}{\sqrt{-\ln\left(\frac{1-x^2}{2}\right)}} \mathcal{X}_\Omega(x),$$

para $\Omega = (-1, 1)$ y \mathcal{X}_Ω , la función característica de Ω . Esta función sirve para estudiar la optimalidad de la tasa de convergencia, pues tiene las siguientes características:

1. $L_\Delta u$ es uniformemente acotada en Ω . Sin embargo no hay una fórmula explícita para $L_\Delta u$.
2. u tiene la regularidad de frontera óptima para este problema de Dirichlet logarítmico (ver [19]), a saber, se comporta como $\ell^{\frac{1}{2}}(d(x))$.

Dado que $L_\Delta u$ no tiene una expresión explícita, no podemos comparar directamente la solución exacta u con u_h , pues u_h se calcula en términos del lado derecho f . Sin embargo, podemos aproximar u_h de forma numérica por v_h .

Para $N \in \mathbb{N}$, $h := \frac{1}{N+1}$ y sean $x_i = -1 + ih$ para $i \in \llbracket 0, N+1 \rrbracket$. Sea $f_i := h(L_\Delta u)(x_i)$, para $i \in \llbracket 0, N+1 \rrbracket$, $F := (f_i)$ y $\alpha := A_h^{-1}F$, donde A_h^{-1} es la matriz de rigidez del problema dada por (24). Nuestra solución aproximada es entonces

$$v_h(x) = \sum_{i=0}^{N+1} \alpha_i \varphi_i, \quad (43)$$

donde las (φ_i) están definidas como en (16). Nótese que las f_i son una aproximación numérica de $\int_{\Omega} L_{\Delta} u(x) \varphi_i(x) dx$. A continuación una tabla de los errores calculados para las distintas normas

$$a_h := \left(\int_{-1}^1 |u - v_h|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}},$$

$$b_h := \left(\int_{-1+h}^{1-h} |u - v_h|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}},$$

$$c_h := \sup_{(-1,1)} |u - v_h|.$$

Tabla 1: Resultados numéricos y pendientes para diferentes valores de N .

N	h	norma L^2 (a_h)	Pendiente	norma L^2_{loc} (b_h)	Pendiente	norma L^{∞} (c_h)	Pendiente
50	3.92 ₋₂	7.045 ₋₂	-	6.238 ₋₃	-	2.1528 ₋₁	-
100	1.98 ₋₂	4.674 ₋₂	6.01 ₋₁	2.830 ₋₃	1.16	2.0162 ₋₁	9.59 ₋₂
200	9.95 ₋₃	3.128 ₋₂	5.83 ₋₁	1.325 ₋₃	1.1	1.9064 ₋₁	8.13 ₋₂
400	4.99 ₋₃	2.106 ₋₂	5.73 ₋₁	6.637 ₋₄	1	1.8139 ₋₁	7.20 ₋₂
800	2.50 ₋₃	1.424 ₋₂	5.66 ₋₁	3.596 ₋₄	0.89	1.7338 ₋₁	6.53 ₋₂
1,600	1.25 ₋₃	9.658 ₋₃	5.60 ₋₁	2.114 ₋₄	0.77	1.6632 ₋₁	6.00 ₋₂
3,200	6.25 ₋₄	6.573 ₋₃	5.55 ₋₁	1.252 ₋₄	0.76	1.6007 ₋₁	5.53 ₋₂

Se puede apreciar que la relación entre el decrecimiento de h y el de los errores no es lineal, como lo sería en el caso de una tasa de convergencia del tipo h^p , tal y como sucede en el caso del laplaciano fraccionario (ver [5]). Esto sugiere que la convergencia óptima para el problema del laplaciano logarítmico no es una potencia de h . La conjetura es que la convergencia es más bien de tipo logarítmica.

En la siguiente sección discutiremos cómo aproximar los valores propios de L_{Δ} con el MEF.

8. Aproximación de los eigenvalores del laplaciano logarítmico

Para aproximar los eigenvalores del laplaciano logarítmico, consideremos la alternativa ii) del Teorema 5.1, es decir, que 0 es un valor propio de L_{Δ} en Ω y, por lo tanto, que el problema $L_{\Delta} = 0$ tiene una solución no trivial $\phi \in \mathcal{X}^{\alpha}(\Omega)$. Si definimos $\phi_r = \left(\frac{\cdot}{r}\right)$, entonces $-2 \ln(r)$ es un valor propio de L_{Δ} en $r\Omega$. Esta observación nos lleva a la siguiente proposición que permite caracterizar los valores propios en un dominio $\Omega = (-L, L)$ para $L > 0$ arbitrario.

Proposición 8.1. *Para $L > 0$ los valores propios de L_{Δ} en $(-L, L)$ están dados por $\lambda_i = 2 \ln \left(\frac{L_i}{L} \right)$, $i \in \mathbb{N}$, donde cada $L_i > 0$ es tal que 0 es eigenvalor de L_{Δ} en $(-L_i, L_i)$.*

Demostración. Se basa principalmente en las propiedades de rescalamiento de L_Δ . (Consultar, [17] Proposition 7.1). \square

Esta proposición es de gran utilidad pues nos dice que para calcular los valores propios de L_Δ basta con encontrar los $L_i > 0$ para los cuales 0 es un valor propio de L_Δ en $(-L_i, L_i)$, los cuales son posibles de identificar y aproximar con el MEF.

Para esto se prueba que los valores propios de L_Δ pueden ser aproximados por los valores propios de la matriz de rigidez A_h^L del problema discreto.

Proposición 8.2. Sea $N \in \mathbb{N}$ y $h := \frac{L}{N+1}$. Entonces

$$\lambda_{k,h} = \inf_{\substack{M \subseteq V_h \\ \dim(M)=k}} \max_{\substack{u \in M \setminus \{0\} \\ \|u\|_{L^2(\Omega)}=1}} \mathcal{E}_L(u, u) \rightarrow \lambda_k \text{ cuando } h \rightarrow 0, \quad (44)$$

es decir el k -ésimo valor propio $\lambda_{k,h}$ de A_h^L converge al k -ésimo valor propio λ_k de L_Δ .

Denotando como

$$\text{cond}(A) := \frac{|\lambda_{\max}(A)|}{|\lambda_{\min}(A)|} \quad (45)$$

a la *condición numérica* de la matriz A , notamos que, al recorrer L de 0 a infinito, esta última explota a infinito para la matriz A_h^L siempre que 0 sea un valor propio de A_h^L . Así, para un $N \in \mathbb{N}$ fijo suficientemente grande, variando L , podemos aproximar las L_i para las cuales 0 es un valor propio del operador.

A continuación, una tabla del cálculo de los primeros 6 valores propios de L_Δ para distintos valores de N .

L	intervalo	$N = 2^4$	$N = 2^5$	$N = 2^6$	$N = 2^7$	$N = 2^8$	$N = 2^9$	$N = 2^{10}$
L_1	[0.6, 0.8]	0.7153	0.7119	0.7103	0.7095	0.7092	0.7090	0.7090
L_2	[2.3, 2.5]	2.3982	2.3906	2.3844	2.3811	2.3796	2.3790	2.3787
L_3	[3.8, 4.0]	3.9249	3.9279	3.9205	3.9153	3.9127	3.9115	3.9110
L_4	[5.4, 5.6]	5.5053	5.5272	5.5210	5.5141	5.5103	5.5085	5.5077
L_5	[7.0, 7.2]	7.0338	7.0772	7.0766	7.0690	7.0642	7.0619	7.0608
L_6	[8.5, 8.7]	8.6133	8.6573	8.6640	8.6563	8.6504	8.6474	8.6461

Tabla 2: Valores tabulados de L en diferentes intervalos y para valores de N .

Referencias

- [1] Grégoire Allaire and François Alouges. *Analyse variationnelle des équations aux dérivées partielles*. École Polytechnique de Paris, 2015. Polycopié du cours MAP 431, Available on his webpage.

- [2] John H Argyris, Sydney Kelsey, et al. *Energy theorems and structural analysis*, volume 60. Springer, 1960.
- [3] Ivo Babuška. The finite element method for elliptic equations with discontinuous coefficients. *Computing*, 5(3):207–213, 1970.
- [4] Ahmed Bendali. *Méthode des éléments finis*. INSA, Toulouse, Toulouse, 2013.
- [5] Umberto Biccari and Víctor Hernández-Santamaría. A finite element approximation of the one-dimensional fractional poisson equation with applications to numerical control. *arXiv preprint arXiv:1707.06769*, 2017.
- [6] H. Brézis and J.L. Lions. *Nonlinear Partial Differential Equations and Their Applications: Collège de France Seminar*. Number v. 1-11 in Nonlinear Partial Differential Equations and Their Applications: Collège de France Seminar. Pitman Advanced Pub. Program, 1981.
- [7] Luis Caffarelli and Luis Silvestre. An Extension Problem Related to the Fractional Laplacian. *Communications in Partial Differential Equations*, 32(8):1245–1260, August 2007.
- [8] Michele Caputo. Linear Models of Dissipation in Anelastic Solids. *Geophysical Journal International*, 13(5):529–544, 1967.
- [9] Héctor A. Chang-Lara and Alberto Saldaña. Classical solutions to integral equations with zero order kernels. *Mathematische Annalen*, 389:1463–1515, 2024.
- [10] Huyuan Chen and Tobias Weth. The Dirichlet problem for the logarithmic Laplacian. *Communications in Partial Differential Equations*, 44(11):1100–1139, 2019.
- [11] Ray William Clough. The Finite Element Method in Plane Stress Analysis. In *Proceedings of the 2nd ASCE Conference on Electronic Computation*, pages 345–378, 1960.
- [12] Ernesto Correa and Arturo de Pablo. Nonlocal operators of order near zero. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 461(1):837–867, 2018.
- [13] Richard Courant. 50 Year Classic Reprint: An Appreciation of R. Courant’s ‘Variational Methods for the Solution of Problems of Equilibrium and Vibrations,’ 1943. *Quarterly of Applied Mathematics*, 51(1):113–122, 1993.
- [14] Manuel Domínguez de la Iglesia. *Orthogonal Polynomials in the Spectral Analysis of Markov Processes: Birth-death Models and Diffusion*, volume 181. Cambridge University Press, 2021.

- [15] Edmundo Capelas de Oliveira and José António Tenreiro Machado. A Review of Definitions for Fractional Derivatives and Integral. *Mathematical Problems in Engineering*, 2014(1):238459, 2014.
- [16] Jean-Luc Guermond and Alexandre Ern. *Finite Elements II: Galerkin Approximation, Elliptic and Mixed PDEs*. Springer, 2021.
- [17] Víctor Hernández-Santamaría, Sven Jarohs, Alberto Saldaña, and Leonard Sinsch. FEM for 1d-problems involving the logarithmic Laplacian: error estimates and numerical implementation. *arXiv preprint arXiv:2311.13079*, 2023.
- [18] Víctor Hernández Santamaría and Alberto Saldaña. Small order asymptotics for non-linear fractional problems. *Calculus of Variations and Partial Differential Equations*, 61(3):92, 2022.
- [19] Víctor Hernández-Santamaría, Luis Fernando López Ríos, and Alberto Saldaña. Optimal boundary regularity and a Hopf-type lemma for Dirichlet problems involving the logarithmic Laplacian. *Discrete and Continuous Dynamical Systems*, 45(1):1–36, 2025.
- [20] Sven Jarohs, Alberto Saldaña, and Tobias Weth. A new look at the fractional Poisson problem via the logarithmic Laplacian. *Journal of Functional Analysis*, 279(11):108732, 2020.
- [21] Mateusz Kwaśnicki. Ten Equivalent Definitions of the Fractional Laplace Operator. *Fractional Calculus and Applied Analysis*, 20(1):7–51, February 2017.
- [22] Ari Laptev and Tobias Weth. Spectral properties of the logarithmic Laplacian. *Analysis and Mathematical Physics*, 11:1–24, 2021.
- [23] Joseph Liouville. Mémoire sur quelques questions de géométrie et de mécanique, et sur un nouveau genre de calcul pour résoudre ces questions. *Journal de l'École Polytechnique*, 13:1–69, 1832.
- [24] Juan Pablo Borthagaray Peradotto. *Laplaciano fraccionario: regularidad de soluciones y aproximaciones por elementos finitos*. Phd thesis, Universidad de Buenos Aires, Facultad de Ciencias Exactas y Naturales, 2017.
- [25] Enrico Valdinoci. From the long jump random walk to the fractional Laplacian. *Bollettino dell'Unione Matematica Italiana*, 2:5, 2009.