



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

Análisis espectral de procesos de colas con múltiples servidores

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

Matemático

PRESENTA:

Ramón Poo Ramos

TUTOR

Manuel Domínguez de la Iglesia

Ciudad Universitaria, CD.MX.

2022



Esta tesis está dedicada a:

Mis padres y mi hermana que con su amor incondicional me han dado la confianza para ser quien soy y a Roxana quien siempre estuvo ahí durante este proceso.

Agradecimientos

En primer lugar quiero agradecer a mi asesor Manuel Domínguez de la Iglesia por ser increíblemente formal y comprometido y también por introducirme a los temas de procesos estocásticos y de polinomios ortogonales. Agradezco a mis padres por creer en mi y siempre hacerme sentir valioso. Agradezco a mi hermana por su amor incondicional y su manera de ver el mundo que sin duda ha transformado la mía. También agradezco a Roxana por escucharme y ayudarme a resolver todo tipo de aventuras matemáticas en las que me involucré durante este trabajo.

Este trabajo fue apoyado por el Programa PAPIIT de la UNAM mediante el proyecto de referencia IN104219 y al proyecto de Ciencia Básica CONACYT de referencia A1-S-16202F. Agradezco a la DGAPA-UNAM y al CONACYT por las becas recibidas.

Índice general

| | |
|--|-----------|
| Introducción | 3 |
| 1. Preliminares | 7 |
| 1.1. La transformada de Stieltjes | 7 |
| 1.2. Familias de polinomios ortogonales en general | 9 |
| 1.3. Teorema espectral | 13 |
| 1.4. Algunas familias de polinomios ortogonales | 17 |
| 1.4.1. Polinomios de Chevychev | 19 |
| 1.4.2. Polinomios de Charlier | 20 |
| 2. Representación espectral de cadenas de nacimiento y muerte | 23 |
| 2.1. Cadenas de nacimiento y muerte a tiempo discreto | 23 |
| 2.1.1. Fórmula de representación de Karlin-McGregor | 26 |
| 2.1.2. Polinomios k -asociados | 30 |
| 2.2. Procesos de nacimiento y muerte a tiempo continuo | 35 |
| 2.2.1. Fórmula de representación de Karlin McGregor | 41 |
| 2.2.2. Polinomios k -asociados | 44 |
| 2.2.3. Aspectos probabilísticos de los procesos de nacimiento y muerte | 49 |
| 3. Familias de polinomios ortogonales y procesos de colas | 51 |
| 3.1. El proceso de colas $M/M/\infty$ | 51 |
| 3.2. El proceso de colas $M/M/k$ | 53 |
| 3.2.1. Caso particular 1 servidor | 62 |
| 3.2.2. Caso particular 2 servidores | 64 |
| 3.2.3. Ejemplos con 3 servidores | 66 |
| 4. Cálculo de varias cantidades de interés probabilístico | 73 |
| 4.1. Caso particular 1 servidor | 73 |
| 4.1.1. Distribución del tiempo de espera de un cliente que llega al tiempo t | 73 |

| | | |
|---------------------|---|-----------|
| 4.1.2. | Comportamiento asintótico del proceso | 76 |
| 4.1.3. | Distribución de la longitud del periodo de servicio | 76 |
| 4.1.4. | Distribución del número de clientes durante un periodo de servicio | 78 |
| 4.2. | Caso particular 2 servidores | 81 |
| 4.2.1. | Distribución del tiempo de espera de un cliente que llega al tiempo t | 82 |
| 4.2.2. | Comportamiento asintótico del proceso | 83 |
| 4.2.3. | Distribución de la longitud de los periodos de servicio, con uno o dos servidores ocupados | 83 |
| 4.2.4. | Distribución del número de clientes durante un periodo de servicio | 85 |
| 4.3. | Cantidades probabilísticas en el caso de 3 o más servidores | 88 |
| 4.3.1. | Distribución del tiempo de espera de un cliente que llega al tiempo t | 91 |
| 4.3.2. | Distribución de la longitud del periodo de servicio general de k -servidores | 92 |
| 4.3.3. | Distribución del número de clientes durante un periodo de servicio general de k -servidores | 93 |
| Bibliografía | | 98 |

Introducción

La teoría de colas es el estudio del comportamiento de un conjunto de individuos que llega a un conjunto de servidores para ser atendidos. El primer artículo sobre teoría de colas se le atribuye al matemático danés Agner K. Erlang y fue publicado en 1909 [6]. El enfoque de este primer artículo fue el dimensionamiento de líneas y centrales de comunicación telefónicas. Hoy en día la teoría de colas es ampliamente utilizada en diversos sectores como la industria, el comercio, la logística, comunicaciones e informática. Por ejemplo, cuando una información es solicitada a través de internet a un servidor web se crea una cola para atender las solicitudes. Aunque la teoría de colas en esencia es una rama de las matemáticas que podríamos inscribir en la investigación de operaciones, la realidad es que la mayoría de problemas relacionados con la teoría de colas son un gran reto para ser analizados analíticamente. Una solución alternativa es estudiar los procesos de colas a partir de simulaciones computacionales. Sin embargo, esto no nos exenta de un estudio analítico para comprender el trasfondo de la teoría.

Hay tres elementos principales que determinan el comportamiento de una cola: la distribución del tiempo de llegada de los individuos, la distribución de los tiempos de servicio y el número de servidores atendiendo. Para abreviar esta información se utiliza la conocida como notación de Kendall, introducida por David G. Kendall en 1953 [11]. Esta consiste en utilizar una letra para describir la distribución del tiempo de llegada, otra letra para la distribución de los tiempos de servicio y otra letra para el número de servidores. Por ejemplo $G/G/k$ se utiliza para hablar de un proceso de colas con tiempos de llegada y de servicio con distribución general y k servidores. Las otras letras que se suelen utilizar son la M (de Markov) para hablar de distribuciones exponenciales y D para hablar de distribuciones degeneradas (tiempos de llegada fijos). La razón por la cual se utiliza la letra M para hablar de distribuciones exponenciales es que, cuando los tiempos de llegada y de atención son exponenciales, el modelo de cola resulta ser un proceso de Markov a tiempo continuo. La notación de Kendall se puede extender a una notación del tipo $A/S/c/K/N/Q$, donde las letras K , N y Q indican la capacidad máxima del sistema, el tamaño de la población de origen y el orden de prioridad en la que los trabajos en la cola son servidos, respectivamente. Algunos trabajos importantes sobre teoría de colas en sus inicios, aparte del artículo seminal de Kendall [11], donde prueba la existencia de una distribución de equilibrio para el caso $G/M/k$, son los artículos [16, 17]. En [17] J. Wolfowitz y J. Kiefer dan un método no constructivo para probar la existencia de una distribución estacionaria para el caso $G/G/k$, mientras que en [16] L. Takács obtiene elegantes resultados para el caso de un servidor. Para un par de referencias más actuales, véase [15, 18].

El objetivo de esta tesis es estudiar espectralmente los procesos de colas $M/M/k$ con $k \geq 1$ (incluido el caso de infinitos servidores), que resultan ser cadenas de Markov a tiempo continuo o más específicamente procesos de nacimiento y muerte. La fuente principal de este trabajo es el artículo de S. Karlin y J. McGregor [9], que a su vez está basado en sus trabajos seminales [7, 8, 10], donde analizan espectralmente por primera vez cualquier cadena de nacimiento y muerte a tiempo continuo [7, 8] y a tiempo discreto [10]. Las herramientas principales que se usan en [7, 8, 9] son el teorema espectral aplicado al operador infinitesimal de un proceso de nacimiento y muerte, que es una matriz tridiagonal semi-infinita (o matriz de Jacobi), y que está muy relacionada con la teoría de polinomios ortogonales. Por ello dedicaremos el Capítulo 1 al desarrollo de estas herramientas. Primero presentaremos la transformada de Stieltjes de una medida de Borel positiva así como la conocida fórmula de inversión de Perron-Stieltjes. A continuación estudiaremos aspectos generales sobre las familias de polinomios ortogonales y posteriormente el Teorema espectral para operadores autoadjuntos en espacios de Hilbert junto con una versión particular llamada Teorema de Favard o Teorema espectral para polinomios ortogonales. Este último teorema será esencial para relacionar los procesos de nacimiento y muerte con las familias de polinomios ortogonales ya que las matrices de Jacobi son equivalentes a la existencia de la medida espectral asociada a estos procesos. Por último presentaremos a las familias clásicas de polinomios ortogonales que surgirán más adelante en el estudio de los procesos de colas que se estudian en esta tesis.

El Capítulo 2 comienza con la teoría general de cadenas de Markov (a tiempo continuo y discreto) para irse especializando en cadenas de nacimiento y muerte. En este capítulo se obtiene la conocida fórmula de representación espectral de Karlin-McGregor, que es una fórmula que proporciona las probabilidades de transición del proceso de nacimiento y muerte en términos de la medida espectral y sus correspondientes polinomios ortogonales. En el caso de una cadena de nacimiento y muerte a tiempo discreto el análisis espectral se realiza sobre la matriz de transición P , mientras que en el caso de un proceso de nacimiento y muerte el análisis se hace sobre el operador infinitesimal asociado \mathcal{A} . En el caso de tiempo discreto las medidas espectrales son únicas por lo cual la fórmula de Karlin-McGregor describe con éxito a estas cadenas. En el caso de tiempo continuo se deben cumplir ciertas condiciones que estudiaremos con detalle para tener unicidad de la medida espectral y que la fórmula de Karlin-McGregor describa con éxito el proceso. Para los casos particulares de los procesos $M/M/k$ con $k \geq 1$ (incluido el caso de infinitos servidores), mostraremos que las medidas espectrales son únicas.

En el Capítulo 3 calcularemos de la forma más explícita posible la medida espectral asociada a varios procesos de colas. Para calcularlas notaremos que el operador infinitesimal \mathcal{A} de los procesos de colas define mediante una relación de recurrencia a tres términos una familia de polinomios ortogonales. En el caso $k = \infty$, identificaremos estos polinomios con la familia clásica de polinomios de variable discreta conocida como polinomios de Charlier, para los cuales la medida espectral es la distribución de Poisson. Cuando k es finito calcularemos la transformada de Stieltjes de la medida espectral y mediante la fórmula de inversión de Perron-Stieltjes recuperaremos la medida. En este caso podremos escribir los correspondientes polinomios en términos de la familia clásica de polinomios de Chebyshev. La medida espectral va a consistir en una parte absolutamente continua (que podremos calcular explícitamente para cualquier $k \geq 1$) y una parte discreta compuesta por un número finito de masas discretas (que

puede oscilar de 0 a k masas) que va a depender fuertemente de los parámetros asociados a las distribuciones de tiempos de llegada y servicio. Se logran obtener fórmulas explícitas para el caso de 1 y 2 servidores. Sin embargo, en el artículo [9], no se analiza el caso de 3 servidores, pues conforme el número de servidores aumenta, la parte discreta de la medida espectral se vuelve más complicada de calcular. Por esta razón, para 3 servidores, hacemos los cálculos con parámetros dados y estimaciones numéricas que confirman e ilustran la teoría general desarrollada para k servidores.

Por último, en el Capítulo 4, se usan las fórmulas de representación espectral obtenidas en los capítulos anteriores para estudiar varios aspectos probabilísticos relevantes en la teoría de colas. Para los casos de 1 y 2 servidores se calculan la distribución de probabilidad del tiempo de espera de un cliente que llega a una cola al tiempo t , la distribución de probabilidad de la longitud de los periodos de servicio (periodos con cajas ocupadas) y la distribución de probabilidad del número de clientes que llegan durante un periodo de servicio, de forma explícita. Los mismos resultados se dan de forma numérica para 3 servidores, los cuales no fueron considerados en el artículo [9]. También se obtienen algunas fórmulas sobre el comportamiento asintótico del proceso. Por último se da la distribución de probabilidad de la longitud de los periodos de servicio (periodos con cajas ocupadas) y la distribución de probabilidad del número de clientes que llegan durante un periodo de servicio para k servidores.

Capítulo 1

Preliminares

Dedicaremos esta sección al desarrollo de las herramientas que nos permitirán hacer el análisis espectral de los procesos de colas que nos proponemos estudiar. Nos basaremos principalmente en [5, Capítulo 1] .

1.1. La transformada de Stieltjes

En esta sección introduciremos el concepto de transformada de Stieltjes que jugará un papel fundamental a la hora de obtener explícitamente la medida asociada a los diversos procesos de colas que nos proponemos estudiar.

Dada una medida de Borel ψ en \mathbb{R} , se define su *transformada de Stieltjes* como la función compleja:

$$B(z, \psi) = \int_{\mathbb{R}} \frac{d\psi(x)}{x-z} \quad z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}. \quad (1.1)$$

Si $\text{supp}(\psi) \subseteq [-A, A]$ y $|z| > A$, la serie en la fórmula siguiente converge y podemos hacer el intercambio de serie con integral para obtener que la transformada de Stieltjes se relaciona con los momentos de la medida ψ de la siguiente manera

$$B(z, \psi) = \int_{\mathbb{R}} \frac{d\psi(x)}{x-z} = -\frac{1}{z} \int_{\mathbb{R}} \frac{d\psi(x)}{1-\frac{x}{z}} = -\frac{1}{z} \int_{\mathbb{R}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{z^n} d\psi(x) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu_n}{z^{n+1}},$$

donde $\mu_n = \int_{\mathbb{R}} x^n d\psi(x)$.

A continuación presentaremos una fórmula muy útil conocida como *fórmula de inversión de Perron-Stieltjes* que nos permitirá obtener la medida ψ en función de su transformada de Stieltjes.

Proposición 1.1.1. *Dada una medida de probabilidad ψ con momentos finitos y $B(z, \psi)$ su transformada de Stieltjes se tiene que*

$$\int_a^b d\psi(x) + \frac{1}{2}\psi(\{a\}) + \frac{1}{2}\psi(\{b\}) = \frac{1}{\pi} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_a^b \text{Im} B(x+i\varepsilon, \psi) dx. \quad (1.2)$$

donde $\psi(\{a\}) \geq 0$ es la magnitud o tamaño de la masa en un punto aislado a .

Demostración. Obsérvese que

$$\begin{aligned} 2i\operatorname{Im}B(z, \psi) &= B(z, \psi) - \overline{B(\bar{z}, \psi)} = B(z, \psi) - B(\bar{z}, \psi) = \int_{\mathbb{R}} \left[\frac{1}{x-z} - \frac{1}{x-\bar{z}} \right] d\psi(x) \\ &= \int_{\mathbb{R}} \frac{z - \bar{z}}{|x-z|^2} d\psi(x) = 2i \int_{\mathbb{R}} \frac{\operatorname{Im}z}{|x-z|^2} d\psi(x). \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\operatorname{Im}B(x + i\varepsilon, \psi) = \int_{\mathbb{R}} \frac{\varepsilon}{|s - (x + i\varepsilon)|^2} d\psi(s) = \int_{\mathbb{R}} \frac{\varepsilon}{(s-x)^2 + \varepsilon^2} d\psi(s).$$

Integrando e intercambiando las integrales (lo cual es válido pues el integrando es positivo) tenemos que

$$\int_a^b \operatorname{Im}B(x + i\varepsilon, \psi) dx = \int_{\mathbb{R}} \left[\int_a^b \frac{\varepsilon}{(s-x)^2 + \varepsilon^2} dx \right] d\psi(s).$$

La integral interna puede ser calculada explícitamente con el cambio de variable $y = (x-s)/\varepsilon$:

$$\chi_\varepsilon(s) = \int_a^b \frac{\varepsilon}{(s-x)^2 + \varepsilon^2} dx = \int_{(a-s)/\varepsilon}^{(b-s)/\varepsilon} \frac{1}{1+y^2} dy = \arctan y \Big|_{y=(a-s)/\varepsilon}^{y=(b-s)/\varepsilon}.$$

Tenemos que $0 \leq \chi_\varepsilon(s) \leq \pi$. Tomando límite con ε positivo, lo cual está permitido gracias al teorema de convergencia dominada de Lebesgue ya que ψ es una medida de probabilidad y $\chi_\varepsilon(s)$ es positiva y acotada, obtenemos

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \chi_\varepsilon(s) = \begin{cases} \pi, & \text{si } a < s < b, \\ \frac{\pi}{2}, & \text{si } s = a \text{ o } s = b. \end{cases}$$

□

Una consecuencia de esto es que cuando se trata de una medida absolutamente continua, esta viene dada por

$$\psi(x) = \frac{1}{\pi} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \operatorname{Im}B(x + i\varepsilon, \psi). \quad (1.3)$$

Supongamos que tenemos una medida ψ con una parte discreta y una parte absolutamente continua de la forma $\psi = \hat{\psi} + \delta_a$, donde δ_a es la distribución delta de Dirac en a . En este caso la transformada de Stieltjes viene dada por

$$B(z, \psi) = B(z, \hat{\psi}) + \frac{\psi(\{a\})}{a-z}.$$

Evaluando esta expresión en $z = a + i\varepsilon$ y tomando la parte imaginaria obtenemos

$$\operatorname{Im}B(a + i\varepsilon, \psi) = \operatorname{Im}B(a + i\varepsilon, \hat{\psi}) + \frac{\psi(\{a\})}{\varepsilon}.$$

Por lo tanto

$$\psi(\{a\}) = \varepsilon \operatorname{Im} B(a + i\varepsilon, \psi) - \varepsilon \operatorname{Im} B(a + i\varepsilon, \hat{\psi}).$$

Como $\hat{\psi}$ es absolutamente continua, $B(a + i\varepsilon, \hat{\psi})$ está acotada, y por lo tanto la única manera de que $\psi(\{a\})$ sea no nulo es que

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \operatorname{Im} B(a + i\varepsilon, \psi) = \infty.$$

Una manera de calcular el tamaño del salto, que usaremos en múltiples ocasiones, es mediante la fórmula

$$\psi(\{a\}) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon \operatorname{Im} B(a + i\varepsilon, \psi). \quad (1.4)$$

1.2. Familias de polinomios ortogonales en general

Consideremos una medida de Borel ψ en \mathbb{R} con momentos finitos, es decir

$$\mu_n = \int_{\mathbb{R}} x^n d\psi(x) < \infty, \quad n \geq 0.$$

El *teorema de descomposición de Lebesgue* permite descomponer cualquier medida en tres componentes de la siguiente forma

$$\psi = \psi_c + \psi_d + \psi_{sc},$$

donde ψ_c representa la parte absolutamente continua de la medida, ψ_d representa la parte discreta y ψ_{sc} es la parte singular. La parte absolutamente continua de una medida queda caracterizada por el teorema de Radon-Nikodym y puede ser escrita abusando de la notación como $d\psi_c(x) = \psi_c(x)dx$, con respecto a la medida de Lebesgue. La parte discreta puede escribirse como suma (finita o infinita) de deltas de Dirac multiplicadas por una masa como sigue

$$d\psi_d(x) = \sum_k \psi(\{x_k\}) \delta(x - x_k) dx.$$

En esta tesis nos limitaremos a considerar medidas sin parte singular. Consideremos ahora el espacio de Hilbert L^2_ψ de funciones medibles de \mathbb{R} en \mathbb{R} y el producto punto dado por

$$(f, g)_\psi = \int_{\mathbb{R}} f(x)g(x) d\psi(x),$$

tales que $\|f\|_\psi := (f, f)_\psi < \infty$.

Diremos que $(p_n(x))_n$ es una *sucesión de polinomios* si cada elemento $p_n(x)$ es un polinomio de grado n en la variable real x . Si el coeficiente principal de cada uno de los polinomios es 1 diremos que los polinomios de la sucesión son *mónicos*, y denotaremos a la sucesión por $(\hat{P}_n(x))_n$. Utilizaremos la notación $(P_n(x))_n$ para denotar a una familia de polinomios ortonormales (ortogonales y de norma 1).

Hay varias maneras de construir sucesiones de polinomios ortogonales. Por ejemplo utilizando el proceso de ortogonalización de *Gram-Schmidt* aplicado al conjunto $\{1, x, x^2, \dots\}$. Otra forma es a través de los conocidos como los *determinantes de Hankel*, ver Sección 1.2 de [5] para más detalles de estas construcciones.

Es interesante ver que, independientemente del modo en que fue construida una sucesión de polinomios ortogonales, $p_n(x)$ esta cumple una relación de recurrencia a tres términos. Consideremos una sucesión $(p_n(x))_n$ de polinomios ortogonales respecto a una medida ψ . Dado que $x p_n(x)$ es un polinomio de grado $n+1$ este puede ser expresado como combinación lineal de los $n+1$ primeros polinomios, es decir

$$x p_n(x) = \sum_{j=0}^{n+1} d_{n,j} p_j(x). \quad (1.5)$$

Pensemos a $p_n(x)$ fijo y veamos que sucede con la expresión $x p_n(x) p_k(x)$ dependiendo del valor de k . Observemos primero que, gracias a la ecuación anterior, la podemos expresar de dos maneras distintas

$$x p_n(x) p_k(x) = p_n(x) \sum_{j=0}^{k+1} d_{k,j} p_j(x) = p_k(x) \sum_{j=0}^{n+1} d_{n,j} p_j(x).$$

Integrando de ambos lados con respecto a ψ obtenemos

$$(x p_n, p_k) = \int_{\mathbb{R}} p_n(x) \sum_{j=0}^{k+1} d_{k,j} p_j(x) d\psi(x) = \int_{\mathbb{R}} p_k(x) \sum_{j=0}^{n+1} d_{n,j} p_j(x) d\psi(x). \quad (1.6)$$

Cuando $k < n-1$ o $k > n+1$, esta expresión (gracias a la ortogonalidad) muestra que

$$d_{n,k} (p_k, p_k)_{\psi} = 0$$

y por lo tanto $d_{n,k} = 0$, para $k = 0, 1, \dots, n-2$, pues los únicos valores de k para los cuales $d_{k,n}$ no se anula son $\{n-1, n, n+1\}$. Para estos valores de k la expresión (1.6) nos da que

$$d_{n,n-1} = \frac{(x p_n, p_{n-1})_{\psi}}{(p_{n-1}, p_{n-1})_{\psi}} \quad d_{n,n} = \frac{(x p_n, p_n)_{\psi}}{(p_n, p_n)_{\psi}} \quad d_{n,n+1} = \frac{(x p_n, p_{n+1})_{\psi}}{(p_{n+1}, p_{n+1})_{\psi}}.$$

Si llamamos $a_n = d_{n,n+1}$, $b_n = d_{n,n}$, $c_n = d_{n,n-1}$, por la fórmula (1.5) tenemos que la sucesión $p_n(x)$ satisface la relación de recurrencia a tres términos

$$x p_n(x) = a_n p_{n+1}(x) + b_n p_n(x) + c_n p_{n-1}(x).$$

A partir de $(p_n(x))_n$ podemos definir una sucesión $(P_n(x))_n$ de polinomios ortonormales como

$$P_n(x) = \frac{1}{\|p_n(x)\|_{\psi}} p_n(x).$$

Para estos polinomios la relación de recurrencia se puede escribir como

$$x P_n(x) = a_n P_{n+1}(x) + b_n P_n(x) + a_{n-1} P_{n-1}(x), \quad (1.7)$$

pues $c_n = (xP_n, P_{n-1})_\psi = a_{n-1}$.

También podemos definir una familia de polinomios mónicos a partir de $(p_n(x))_n$ mediante la siguiente relación de recurrencia

$$x\hat{P}_n(x) = \hat{P}_{n+1}(x) + \alpha_n \hat{P}_n(x) + \beta_n \hat{P}_{n-1}(x), \quad (1.8)$$

donde $\alpha_n = b_n$ y $\beta_n = \frac{\zeta_n}{\zeta_{n-1}}$, donde $\zeta_n = \|\hat{P}_n(x)\|_\psi^2$.

La relación (1.7) se puede escribir de forma matricial como $xP(x) = JP(x)$ donde $P(x) = (P_0(x), P_1(x), \dots)^T$, y J es la matriz tridiagonal

$$J = \begin{pmatrix} b_0 & a_0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ a_0 & b_1 & a_1 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & a_1 & b_2 & a_2 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & a_2 & b_3 & a_3 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix}, \quad (1.9)$$

conocida como *matriz de Jacobi*. Este tipo de matrices serán sumamente importantes para nosotros pues de este tipo son las matrices de transición de probabilidad de una cadena de nacimiento y muerte a tiempo discreto y los operadores infinitesimales de un proceso de nacimiento y muerte a tiempo continuo. En el resto del texto se dará por hecho que las entradas de las matrices que no estén en la tridiagonal principal son todas 0. Hemos visto que cualquier sucesión de polinomios ortonormales satisface la relación de recurrencia a tres términos (1.7). En la siguiente sección estableceremos el resultado recíproco de que si una sucesión de polinomios está definida mediante (1.7) entonces existe una medida con respecto a la cual estos son ortogonales. Antes de pasar a este resultado probaremos dos fórmulas que serán necesarias para demostrar un teorema importante que habla de los ceros de los polinomios ortogonales.

Si multiplicamos la ecuación (1.7) por $P_n(y)$, (1.7)(con $x = y$) por $P_n(x)$ y restamos ambas expresiones obtenemos la relación telescópica

$$(x - y)P_n(x)P_n(y) = a_n [P_{n+1}(x)P_n(y) - P_n(x)P_{n+1}(y)] - a_{n-1} [P_n(x)P_{n-1}(y) - P_{n-1}(x)P_n(y)].$$

Sumando y dividiendo entre $x - y$ obtenemos la *fórmula de Christoffel-Darboux*

$$K_n(x, y) := \sum_{j=0}^n P_j(x)P_j(y) = a_n \left[\frac{P_{n+1}(x)P_n(y) - P_n(x)P_{n+1}(y)}{x - y} \right].$$

Tomando el límite cuando $y \rightarrow x$ obtenemos la conocida como *fórmula confluyente de Christoffel-Darboux*

$$\sum_{j=0}^n P_j^2(x) = a_n [P'_{n+1}(x)P_n(x) - P_{n+1}(x)P'_n(x)].$$

En términos de la familia de polinomios mónicos, la fórmula de Christoffel-Darboux se puede escribir como

$$\sum_{j=0}^n \frac{\hat{P}_j(x)\hat{P}_j(y)}{\zeta_j} = \frac{\hat{P}_{n+1}(x)\hat{P}_n(y) - \hat{P}_n(x)\hat{P}_{n+1}(y)}{\zeta_n(x-y)}, \quad (1.10)$$

y la fórmula confluyente de Christoffel-Darboux como

$$\sum_{j=0}^n \frac{\hat{P}_j^2(x)}{\zeta_j} = \frac{\hat{P}'_{n+1}(x)\hat{P}_n(x) - \hat{P}_{n+1}(x)\hat{P}'_n(x)}{\zeta_n}. \quad (1.11)$$

Con esto establecido, podemos probar el siguiente

Teorema 1.2.1. *Los ceros o raíces de los polinomios mónicos \hat{P}_n generados por la relación de recurrencia (1.8) son todos reales y simples. Además los ceros de $\hat{P}_{n+1}(x)$ y de $\hat{P}_n(x)$ se entrelazan. Si además estos polinomios son ortogonales con respecto a alguna medida ψ , entonces sus ceros se encuentran en el menor intervalo que contiene a $\text{supp}(\psi)$, para toda $n \geq 1$.*

Demostración. Supongamos que \hat{P}_n tiene un cero complejo u . Como los coeficientes de \hat{P}_n son reales, entonces \bar{u} también es un cero de \hat{P}_n . Si tomamos $x = u$ e $y = \bar{u}$ en (1.10), obtenemos que el lado derecho de la ecuación es cero, mientras que el lado izquierdo es > 0 pues si nos fijamos en los términos de la suma, todos ellos son números positivos multiplicados por la norma de un número complejo, lo cual es una contradicción. Por lo tanto todos los ceros de \hat{P} tienen que ser reales. Por otro lado, si estos ceros no fuesen simples, la fórmula confluyente de Christoffel-Darboux (1.11) nos daría la misma contradicción. Si $\hat{P}_{n+1}(x)$ y $\hat{P}_n(x)$ tuvieran un cero en común, entonces por la relación de recurrencia (1.8) también sería un cero de $\hat{P}_{n-1}(x)$. Continuando de esta manera, llegaríamos a que $\hat{P}_0 = 1$ tiene un cero, lo cual es imposible. La propiedad de entrelazamiento de los ceros es clara para $n < 2$. Para $n \geq 2$, la fórmula confluyente de Christoffel-Darboux (1.11) junto con el hecho de que los polinomios \hat{P}_n no se anulan simultáneamente permite probar que $\hat{P}'_{n+1}(x)\hat{P}_n(x) - \hat{P}_{n+1}(x)\hat{P}'_n(x) > 0$. Supongamos que $y_1 < y_2$ son dos ceros consecutivos de $\hat{P}_{n+1}(x)$, la desigualdad anterior implica que $\hat{P}'_{n+1}(y_j)\hat{P}_n(y_j) > 0$, para $j = 1, 2$. Dado que $\hat{P}'_{n+1}(y_1)$ y $\hat{P}'_{n+1}(y_2)$ tienen que tener signos opuestos, pues son simples, se sigue de la desigualdad anterior que $\hat{P}_n(y_1)$ y $\hat{P}_n(y_2)$ tienen signos opuestos. Por el teorema del valor intermedio, $\hat{P}_n(x)$ tiene que tener un cero en (y_1, y_2) . Finalmente sea $[a, b]$ el menor intervalo que contiene a $\text{supp}(\psi)$ y sean c_1, \dots, c_j los ceros de \hat{P}_n contenidos en $[a, b]$. Si $j < n$ la ortogonalidad respecto a ψ implica que $\int_{\mathbb{R}} \hat{P}_n(x) \Pi_{k=1}^j (x - c_k) d\psi(x) = 0$. Sin embargo esto es imposible pues el integrando no cambia de signo en $[a, b]$, por lo tanto $j = n$. □

Obsérvese que la ecuación (1.7) es una ecuación en diferencias de segundo orden lo cual indica que tendrá dos soluciones linealmente independientes. Una de ellas son los polinomios $P_n(x)$. La otra puede ser generada mediante las condiciones iniciales

$$P_0^{(0)} = 0, \quad P_1^{(0)}(x) = \frac{1}{a_0},$$

las cuales hacen a $P_n^{(0)}(x)$ polinomios de grado $n - 1$. Llamaremos a estos polinomios, polinomios 0-asociados. Otra manera de ver a los polinomios 0-asociados es como los polinomios generados por la matriz de Jacobi $J^{(0)}$

que se obtiene al eliminar la primera columna y el primer renglón de la matriz J en (1.9). Más adelante daremos más detalles de estos polinomios y los generalizaremos. Un interesante resultado asintótico que relaciona la transformada de Stieltjes de la medida ψ y las familias $P_n(x)$ y $P_n^{(0)}(x)$ es el siguiente:

Teorema 1.2.2. *Sea ψ una medida positiva definida en un intervalo acotado $[a, b]$ y sean $P_n(x)$ los correspondientes polinomios ortonormales y $P_n^{(0)}(x)$ los polinomios 0-asociados, entonces*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{P_n^{(0)}(z)}{P_n(z)} = \int_a^b \frac{d\psi(x)}{z - x}, \quad z \in \mathbb{C} \setminus [a, b]. \quad (1.12)$$

Además la convergencia es uniforme sobre compactos.

Demostración. Detalles de la prueba pueden consultarse en de [2, Sección 5.5] o bien en [4, Capítulo 3]. □

1.3. Teorema espectral

Nuestro objetivo en esta sección es enunciar un teorema que nos permita demostrar la existencia y unicidad de una medida que haga ortogonales a los polinomios generados por un operador de Jacobi acotado. Este resultado es conocido como *teorema de Favard* o *teorema espectral para polinomios ortogonales*. Se trata de una consecuencia del teorema espectral para operadores autoadjuntos en espacios de Hilbert. Para poder enunciar este último teorema, necesitamos definir algunos conceptos relacionados con esta teoría. Algunos resultados de esta sección serán enunciados de la forma más resumida posible, y en algunos casos sin prueba. Para un estudio más profundo sobre teoría espectral consultar ([13]).

Sea \mathcal{H} un espacio de Hilbert con producto interno denotado por (\cdot, \cdot) . Denotaremos como $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ al espacio de los operadores lineales y acotados en \mathcal{H} . Dado un operador $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ puede resultar que $R(z) = (T - z)^{-1} \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, en este caso diremos que $R(z)$ es el operador resolvente de T . Al conjunto de valores $z \in \mathbb{C}$ para los cuales el operador resolvente $R(z)$ está bien definido se le llama conjunto resolvente y se denota por $\rho(T)$. El espectro de T se define como $\sigma(T) = \mathbb{C} \setminus \rho(T)$. Cuando el operador T es autoadjunto, es decir $(Tu, v) = (u, Tv)$ para cualesquiera $u, v \in \mathcal{H}$, entonces el espectro de T está contenido en los reales, más aún $\sigma(T) \subseteq [-\|T\|, \|T\|]$.

Para formular la versión que nos será útil del Teorema espectral, tenemos que definir lo que es una *resolución de la identidad*. Si denotamos por \mathfrak{B} a los conjuntos de Borel en \mathbb{R} , una resolución de la identidad es una función $E : \mathfrak{B} \rightarrow \mathcal{B}(\mathcal{H})$ tal que:

- $E(A)$ es una proyección, es decir $E(A)^2 = E(A)$.
- $E(\emptyset) = 0$, $E(\mathbb{C}) = \mathbf{1}_{\mathcal{H}}$.
- Para cualesquiera A_1, A_2, \dots conjuntos de Borel disjuntos

$$E(A_1 \cup A_2 \cup \dots) = \sum_{n=0}^{\infty} E(A_n),$$

con la serie interpretada como el límite de la sucesión de sumas parciales $E(A_1) + E(A_2) + \cdots + E(A_n)$ en la norma de operador.

Para una resolución de la identidad E y dos elementos $u, v \in \mathcal{H}$, $E_{u,v}(A) := (E(A)u, v)$ define una medida de Borel. Podemos enunciar ahora el

Teorema 1.3.1. (*Teorema espectral*) Sea $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ un operador lineal autoadjunto. Entonces existe una única resolución de la identidad E tal que

$$(Tu, v) = \int_{\mathbb{R}} t dE_{u,v}(t). \quad (1.13)$$

Además E tiene soporte en $\sigma(T)$, es decir $E(\rho(T)) = 0$ y $E(A)$ conmuta con T para cualquier $A \subseteq \mathbb{R}$ conjunto de Borel.

Demostración. ([13], Sección 12.22). □

Un operador T en un espacio de Hilbert queda totalmente caracterizado por los valores (Tu, v) (Teorema de Riesz). Por lo tanto las integrales $\int_{\mathbb{R}} f(t) dE(t)$ donde f es una función continua de \mathbb{R} en \mathbb{C} , pueden ser definidas como el único operador en \mathcal{H} tal que $(\int_{\mathbb{R}} f(t) dE(t))u, v = \int_{\mathbb{R}} f(t) dE_{u,v}(t)$, para cualesquiera $u, v \in \mathcal{H}$. Denotaremos a este operador como $f(T)$. Cuando T es acotado, resulta que $f(T)$ también es acotado y $\|f(T)\| = \sup_{x \in \sigma(T)} |f(x)|$.

Aplicaremos este resultado en el contexto de operadores de Jacobi acotados. Supongamos que los coeficientes de la matriz de Jacobi J descrita en (1.9) están acotados por $M > 0$. Entonces J define un operador acotado en el espacio de Hilbert

$$l^2(\mathbb{N}_0) = \left\{ (a_n)_{n \in \mathbb{N}_0} : \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 < \infty \right\},$$

mediante

$$Je_n = \begin{cases} a_n e_{n+1} + b_n e_n + a_{n-1} e_{n-1}, & \text{si } n \geq 1, \\ a_0 e_1 + b_0 e_0, & \text{si } n = 0, \end{cases}$$

donde $(e_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ es la base canónica de $l^2(\mathbb{N}_0)$. En efecto, como $(e_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ es denso en $l^2(\mathbb{N}_0)$, cualquier $x \in l^2(\mathbb{N}_0)$ se escribe como $\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n e_n$, entonces

$$\begin{aligned}
\|Jx\|_2^2 &= \left\| J \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n e_n \right\|_2^2 \\
&= \left\| \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n (a_{n-1} e_{n-1} + b_n e_n + a_n e_{n+1}) \right\|_2^2 \\
&= \left\| (\alpha_1 a_0 + \alpha_0 b_0) e_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (\alpha_{n+1} a_n + \alpha_n b_n + \alpha_{n-1} a_{n-1}) e_n \right\|_2^2 \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} (\alpha_{n+1} a_n + \alpha_n b_n + \alpha_{n-1} a_{n-1})^2 \\
&\leq \sum_{n=0}^{\infty} (\alpha_{n+1}^2 + \alpha_n^2 + \alpha_{n-1}^2) (a_n^2 + b_n^2 + a_{n-1}^2) \leq 9M^2 \left(\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n^2 \right) = 9M^2 \|x\|_2^2,
\end{aligned}$$

donde $a_{-1} = \alpha_{-1} = 0$. Por lo tanto J es acotado. Además $(Ju, v) = (u, Jv)$, para cualesquiera $u, v \in l^2(\mathbb{N}_0)$.

Lema 1.3.2. *Existe una sucesión de polinomios $(P_n(x))_{n \in \mathbb{N}_0}$ tal que $e_n = P_n(J)e_0$. En particular tenemos que $\{J^n e_0 : n \in \mathbb{N}_0\}$ es denso en $l^2(\mathbb{N}_0)$.*

Demostración. Los polinomios generados por la relación de recurrencia (1.7) son los que satisfacen este lema. Lo probaremos por inducción sobre n . Consideremos a la familia de polinomios generados por la relación de recurrencia

$$P_{n+1}(x) = \frac{1}{a_n} ((x - b_n) P_n - a_{n-1} P_{n-1}), \quad P_0(x) = 1, \quad P_{-1}(x) = 0.$$

Cuando $n = 0$ el resultado es trivial. Cuando $n = 1$ tenemos que

$$P_1(J)e_0 = \frac{1}{a_0} (Je_0 - e_0 b_0) = e_1.$$

Si suponemos el resultado cierto para $n - 1$ y n entonces

$$P_{n+1}(J)e_0 = \frac{1}{a_n} [(J - b_n) P_n(J)e_0 - a_{n-1} P_{n-1}(J)e_0] = \frac{1}{a_n} [(J - b_n) e_n - a_{n-1} e_{n-1}] = e_{n+1}.$$

□

Estamos en condiciones de aplicar el Teorema espectral al operador acotado y autoadjunto J . Este resultado nos garantiza que existe una única resolución de la identidad E tal que

$$(Ju, v) = \int_{\mathbb{R}} t dE_{u,v}(t).$$

Podemos entonces definir una medida de Borel ψ tal que $\psi(A) = E_{e_0, e_0}(A) = (E(A)e_0, e_0)$ para todo A conjunto de Borel de \mathbb{R} . Como $E(A)$ es una proyección tenemos que $\psi(A) = (E(A)^2 e_0, e_0) = (E(A)e_0, E(A)e_0) \geq 0$. Además, el Teorema espectral garantiza que $\text{supp } \psi \subseteq [-\|J\|, \|J\|] \subseteq \mathbb{R}$ y por lo tanto ψ es una medida de probabilidad

pues $\psi(\mathbb{R}) = (E(\mathbb{R})e_0, e_0) = (E(\mathbb{C})e_0, e_0) = (e_0, e_0) = 1$. Observemos que E queda totalmente determinada por la medida ψ ya que por el lema anterior

$$(E(A)e_j, e_k) = (E(A)P_j(J)e_0, P_k(J)e_0) = (P_j(J)P_k(J)E(A)e_0, e_0) = \int_A P_j(x)P_k(x)d\psi(x). \quad (1.14)$$

Podemos definir entonces el espacio $L^2_\psi(\mathbb{R})$ como

$$L^2_\psi(\mathbb{R}) = \left\{ f \text{ medibles tales que } \int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2 d\psi(x) < \infty \right\}.$$

Estamos listos para probar el Teorema espectral para polinomios ortogonales también conocido como Teorema de Favard.

Teorema 1.3.3. *Sea J un operador de Jacobi acotado. Entonces existe una única medida de probabilidad ψ con soporte en el intervalo $[-\|J\|, \|J\|]$ tal que U dado por $U : P(J)e_0 \mapsto P$ con P cualquier polinomio, se extiende a un operador unitario $l^2(\mathbb{N}_0) \rightarrow L^2_\psi(\mathbb{R})$ de tal forma que $UJ = MU$, donde M es el operador multiplicación en $L^2_\psi(\mathbb{R})$ dado por $Mf(x) = xf(x)$. Además $(P_n(x))_{n \in \mathbb{N}_0}$ es una sucesión de polinomios ortogonales con respecto a ψ . Por lo tanto el operador J puede ser diagonalizado como*

$$(UJU^{-1}f)(x) = (Mf)(x) = xf(x).$$

En otras palabras, el diagrama siguiente conmuta.

$$\begin{array}{ccc} l^2(\mathbb{N}_0) & \xrightarrow{U} & L^2_\psi(\mathbb{R}) \\ \downarrow J & & \downarrow M \\ l^2(\mathbb{N}_0) & \xrightarrow{U} & L^2_\psi(\mathbb{R}) \end{array}$$

Demostración. Por el Lema 1.3.2, tenemos que U manda un conjunto denso (la base canónica) de $l^2(\mathbb{N}_0)$ en un conjunto denso (los polinomios) de $L^2_\psi(\mathbb{R})$. Los polinomios son densos en L^2_ψ pues ψ tiene soporte compacto. Por la fórmula (1.14)

$$(P(J)e_0, Q(J)e_0) = (P(J)Q(J)e_0, e_0) = \int_{\mathbb{R}} P(x)Q(x)d\psi(x) = (P, Q)_\psi = (UP(J)e_0, UQ(J)e_0)_\psi.$$

Por lo tanto U preserva el producto interior sobre conjuntos densos en ambos espacios y por lo tanto se extiende a un operador unitario. Para ver que $UJ = MU$ basta notar que esto se verifica para la base canónica, es decir $UJe_n = MUe_n$ para cualquier $n \in \mathbb{N}$. Por último, los polinomios $P_n = Ue_n$ de grado n son ortogonales con respecto a ψ pues

$$(P_n, Q_k)_\psi = (Ue_n, Ue_k)_\psi = (e_n, e_k) = \delta_{nk}.$$

□

En ([12]) se puede encontrar que para el caso de operadores autoadjuntos no acotados existe una versión del Teorema espectral. Gracias a esto se puede demostrar que la unicidad de una medida que haga ortogonales a los polinomios generados por un operador de Jacobi no acotado es equivalente a que el operador sea *esencialmente autoadjunto*. También se han encontrado varias condiciones que garantizan que el operador de Jacobi sea esencialmente autoadjunto. Es decir que bajo ciertas condiciones, aunque J no sea acotado, resultados análogos a los que estamos trabajando seguirán siendo válidos.

1.4. Algunas familias de polinomios ortogonales

En esta sección resumiremos las propiedades principales de algunas familias de polinomios ortogonales que nos será útiles para estudiar los procesos de colas (para información más detallada sobre estas familias de polinomios consultar las Secciones 1.4 y 1.5 de [5]). Las familias que estudiaremos son parte de las conocidas como *familias clásicas de polinomios ortogonales*. Estas se dividen en dos, las *familias clásicas de polinomios ortogonales de variable continua* y las *familias clásicas de polinomios ortogonales de variable discreta*.

Las familias de polinomios ortogonales de variable continua son sucesiones de polinomios ortogonales con respecto a una medida ψ absolutamente continua. Abusando de la notación se escribe $d\psi(x) = \psi(x)dx$. Las familias clásicas de variable continua se caracterizan por ser las únicas familias de polinomios ortogonales que son valores propios del operador diferencial autoadjunto de segundo orden definido en $L^2_\psi(a, b)$ por

$$\mathcal{D} = p(x) \frac{d^2}{dx^2} + q(x) \frac{d}{dx},$$

donde $q\psi = (p\psi)'$ (condición necesaria y suficiente para que \mathcal{D} sea autoadjunto). Se puede probar (Teorema 1.21 de [5]) que las únicas familias clásicas de polinomios ortogonales de variable continua son las familias de Hermite, Laguerre y Jacobi. Estas familias se denotan usualmente como $(H_n(x))_{n \in \mathbb{N}_0}$, $(L_n^{(\alpha)}(x))_{n \in \mathbb{N}_0}$, $\alpha > -1$ y $(P_n^{(\alpha, \beta)}(x))_{n \in \mathbb{N}_0}$, $\alpha, \beta > -1$, respectivamente.

Los polinomios de Hermite son ortogonales con respecto a la medida $\psi(x) = e^{-x^2}$ y satisfacen la ecuación diferencial de segundo orden

$$H_n''(x) - 2xH_n'(x) + 2nH_n(x) = 0, \quad n \geq 0.$$

Para los polinomios de Laguerre la medida con respecto a la cual son ortogonales es $\psi(x) = x^\alpha e^{-x}$, $\alpha > -1$ y satisfacen la ecuación diferencial de segundo orden

$$x \left[L_n^{(\alpha)}(x) \right]'' + (\alpha + 1 - x) \left[L_n^{(\alpha)}(x) \right]' + n L_n^{(\alpha)}(x) = 0, \quad n \geq 0.$$

Los polinomios de Jacobi son ortogonales con respecto a la medida $\psi(x) = (1-x)^\alpha (1+x)^\beta$, $\alpha, \beta > -1$ y satisfacen la ecuación diferencial

$$(1-x^2) \left[P_n^{(\alpha, \beta)}(x) \right]'' + (\beta - \alpha - (\alpha + \beta + 2)x) \left[P_n^{(\alpha, \beta)}(x) \right]' + n(n + \alpha + \beta + 1) P_n^{(\alpha, \beta)}(x) = 0, \quad n \geq 0.$$

En la siguiente sección estudiaremos un tipo especial de polinomios de Jacobi, los denominados polinomios de Chebychev.

Por otro lado tenemos a las familias de polinomios ortogonales de variable discreta. Aunque estos polinomios están definidos en un dominio continuo, a lo que nos referimos con que sean de variable discreta es que estos son ortogonales con respecto a una medida ψ con soporte discreto (finito o infinito). Al igual que en el caso continuo estos polinomios serán valores propios de un operador, pero esta vez definido en el espacio de Hilbert

$$l_{\psi}^2(\mathbb{Z}) = \left\{ (f(n))_{n \in \mathbb{N}_0} \mid \sum_{n \in \mathbb{Z}} f(n)^2 \psi(n) < \infty \right\}.$$

En este caso, las familias clásicas de polinomios de variable discreta se caracterizan por ser las únicas familias de polinomios ortogonales con respecto a una medida discreta que son funciones propias de un operador en diferencias de segundo orden

$$\mathcal{D} = p_1 \mathfrak{S}_1 + p_0 \mathfrak{S}_0 + p_{-1} \mathfrak{S}_{-1},$$

donde \mathfrak{S}_m son los operadores conocidos como operadores de desplazamiento (shift) definidos por $\mathfrak{S}_m f(x) = f(x+m)$. La condición necesaria y suficiente para que \mathcal{D} sea autodjunto es $\mathfrak{S}_{-1}(p_1 \psi) = p_{-1} \psi$. Se puede probar [5, Teorema 1.24]) que las únicas familias clásicas de polinomios ortogonales de variable discreta son las familias de Charlier, Meixner, Krawtchouk y Hahn.

Los polinomios de Meixner se denotan por $M_n(x; b, c)$ con $b > 0$, $0 < c < 1$. La medida con respecto a la cual son ortogonales es $\psi(x) = \sum_{x=0}^{\infty} \frac{(1-c)^b (b)_x}{x!} c^x \delta_x(x)$, donde $(b)_x = b(b+1)(b+2) \cdots (b+x-1)$ si $x \neq 0$ y 1 si $x = 0$. Además satisfacen la ecuación en diferencias

$$c(x+b)M_n(x+1; b, c) - (x+c(x+b))M_n(x; b, c) + xM_n(x-1; b, c) = n(c-1)M_n(x; b, c), \quad n \geq 0.$$

Los polinomios de Krawtchouk se denotan por $K_n(x; p, N)$ con $0 < p < 1$, $N \in \mathbb{N}_0$. Son ortogonales con respecto a la medida $\psi(x) = \sum_{x=0}^N \binom{N}{x} p^x q^{N-x} \delta_x(x)$ cuyo soporte es $\{0, 1, \dots, N\}$ y donde $p+q=1$, con $q > 0$. Estos satisfacen la ecuación en diferencias

$$p(N-x)K_n(x+1; p, N) - (p(N-x) + xq)K_n(x; p, N) + xqK_n(x-1; p, N) = -nK_n(x; p, N), \quad n \geq 0.$$

Los polinomios de Hahn se denotan como $Q_n(x; \alpha, \beta, N)$ con $\alpha, \beta > -1$ o $\alpha, \beta < -N$ y $N \in \mathbb{N}_0$. Son ortogonales con respecto a la medida $\psi(x) = \sum_{x=0}^N \binom{\alpha+x}{x} \binom{\beta+N-x}{N-x} \delta_x(x)$ cuyo soporte es $\{0, 1, \dots, N\}$. La ecuación en diferencias que satisfacen es

$$\begin{aligned}
B(x)Q_n(x+1; \alpha, \beta, N) - [B(x) + D(x)]Q_n(x; \alpha, \beta, N) + D(x)Q_n(x-1; \alpha, \beta, N) \\
= -n(n + \alpha + \beta + 1)Q_n(x; \alpha, \beta, N), \quad n \geq 0,
\end{aligned}$$

donde

$$B(x) = (N-1)(1 + \alpha + x), \quad y \quad D(x) = x(\beta + N + 1 - x). \quad (1.15)$$

No hemos mencionado los polinomios de Charlier pues los estudiaremos con un poco más de detalle más adelante.

1.4.1. Polinomios de Chevychev

Como ejemplo de familia clásica de polinomios de variable continua tenemos los polinomios de Chevychev que son un caso particular de los polinomios de Jacobi (ver [5] Sección 1.4.3). Se suelen distinguir dos familias de polinomios de Chevychev, los de primera especie denotados por $T_n(x)$ y los de segunda especie denotados por $U_n(x)$.

Los *polinomios de Chevychev de primera especie* están dados por la relación de recurrencia

$$T_0(x) = 1, \quad T_1(x) = x, \quad 2xT_n(x) = T_{n+1}(x) + T_{n-1}(x), \quad n \geq 1,$$

y son ortogonales con respecto a la medida $\psi(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$. La matriz de Jacobi asociada es entonces

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & & \\ & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix}.$$

Satisfacen la ecuación diferencial

$$(1-x^2)T_n''(x) - xT_n'(x) + n^2T_n(x) = 0, \quad n \geq 0.$$

Estos polinomios se pueden definir de manera trigonométrica, siendo estos los únicos polinomios que satisfacen que

$$T_n(\cos(\theta)) = \cos(n\theta), \quad n \geq 0, \quad x = \cos(\theta) \in [-1, 1]. \quad (1.16)$$

Obsérvese que esto da una expresión explícita para las raíces de $T_n(x)$

$$x_{n,k} = \cos\left(\frac{(2k-1)\pi}{2n}\right), \quad k = 0, \dots, n.$$

Los *polinomios de Chevychev de segunda especie* están dados por la relación de recurrencia

$$U_0(x) = 1, \quad U_1(x) = 2x, \quad xU_n(x) = U_{n+1}(x) + U_{n-1}(x), \quad (1.17)$$

y son ortogonales con respecto a la medida $\psi(x) = \sqrt{1-x^2}$. La matriz de Jacobi asociada es

$$J = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & & & \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & & \\ & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix}.$$

Satisfacen la ecuación diferencial

$$(1-x^2)U_n''(x) - 3xU_n'(x) + n(n+2)U_n(x) = 0, \quad n \geq 0.$$

Los polinomios de Chevychev de segundo tipo también pueden ser expresados trigonométricamente como

$$U_n(\cos(\theta)) = \frac{\sin((n+1)\theta)}{\sin(\theta)}, \quad n \geq 0, \quad x = \cos(\theta) \in [-1, 1]. \quad (1.18)$$

Por lo tanto sus raíces están dadas de forma explícita por

$$x_{n,k} = \cos\left(\frac{k\pi}{n+1}\right), \quad k = 1, \dots, n.$$

Los polinomios de Chevychev de primer y segundo tipo satisfacen las relaciones

$$T_{n+1}(x) = xT_n(x) - (1-x^2)U_{n-1}(x), \quad U_n(x) = xU_{n-1}(x) + T_n(x).$$

Están también conectados por la fórmula

$$T_n(x) = \frac{1}{2}(U_n(x) - U_{n-2}(x)). \quad (1.19)$$

1.4.2. Polinomios de Charlier

Como ejemplo de familia clásica de polinomios de variable discreta, tenemos a los polinomios de Charlier. Para cada $a > 0$, hay una familia de polinomios de Charlier $C_n(x, a)$ definidos mediante la relación de recurrencia

$$\begin{aligned} C_{-1}(x, a) &= 0, \quad C_0(x, a) = 1, \\ -xC_n(x, a) &= aC_{n+1}(x, a) - (n+1)C_n(x, a) + nC_{n-1}(x, a), \quad n \geq 0. \end{aligned} \quad (1.20)$$

La matriz de Jacobi asociada a estos polinomios es entonces

$$J = \begin{pmatrix} -a & a & & & \\ 1 & -a-1 & a & & \\ & 2 & -a-2 & a & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix},$$

el cual resulta ser el operador infinitesimal de un proceso de colas con infinitos servidores como veremos más adelante.

Se define la función generadora de los polinomios de Charlier como

$$G(x, t; a) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{C_n(x, a)}{n!} t^n = e^t \left(1 - \frac{t}{a}\right)^x. \quad (1.21)$$

Los polinomios de Charlier son solución de la ecuación en diferencias de segundo orden siguiente

$$aC_n(x+1, a) - (x+a)C_n(x, a) + xC_n(x-1, a) = -nC_n(x, a), \quad n \geq 0. \quad (1.22)$$

Los polinomios de Charlier respetan la siguiente relación de dualidad

$$C_n(x, a) = C_x(n, a), \quad x, n \in \mathbb{N}_0. \quad (1.23)$$

Esto hace que la ecuación en diferencias sea equivalente a la ecuación de recurrencia que define a estos polinomios.

Capítulo 2

Representación espectral de cadenas de nacimiento y muerte

2.1. Cadenas de nacimiento y muerte a tiempo discreto

Para poder estudiar ciertos aspectos probabilísticos de los procesos de colas tales como el *número de clientes durante un periodo de servicio*, que explicaremos con detalle más adelante, o el número de clientes que llegan durante uno de estos periodos, será conveniente tener a la mano una fórmula de representación para las probabilidades de transición de una cadena de nacimiento y muerte a tiempo discreto. Serán esta fórmula y unas cuantas herramientas útiles para calcularla explícitamente lo que desarrollaremos en esta sección.

Sea $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, un espacio de probabilidad y $\{X_n \mid n = 0, 1, \dots\}$ una cadena de Markov con espacio de estados $\mathcal{S} = \mathbb{N}_0$. Recordemos la propiedad (de Markov) que posee cualquier cadena de Markov.

Para todo $n \geq 0$ y cualesquiera estados $\{i_0, i_1, \dots, i_{n-1}, i, j\} \subseteq \mathcal{S}$ se cumple que:

$$\mathbb{P}(X_{n+1} = j \mid X_0 = i_0, X_1 = i_1, \dots, X_n = i) = \mathbb{P}(X_{n+1} = j \mid X_n = i) = P_{i,j}^{n,n+1}. \quad (2.1)$$

En nuestro caso supondremos también que la cadena es *homogénea*, es decir que $P_{i,j}^{n,n+1}$ no depende de n , así que escribiremos $P_{i,j}^{n,n+1} = P_{i,j}$. En otras palabras, la probabilidad de que la cadena estando en el estado i al instante n , se encuentre en el estado j al instante $n+1$ no depende del instante sino únicamente de los estados i y j . Estas probabilidades son llamadas *probabilidades de transición en un paso*. Es muy útil representar estas probabilidades en la siguiente matriz

$$P = \begin{pmatrix} P_{0,0} & P_{0,1} & P_{0,2} & \cdots \\ P_{1,0} & P_{1,1} & P_{1,2} & \cdots \\ P_{2,0} & P_{2,1} & P_{2,2} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}.$$

Supondremos que $P_{i,j} \geq 0$, y $\sum_{j \in \mathcal{S}} P_{ij} = 1$ para toda i en \mathcal{S} salvo quizá para alguna i^* , para la cual $\sum_{j \in \mathcal{S}} P_{i^*j} < 1$. Esto se puede interpretar como la presencia de un estado absorbente i^* . Para hacer esto más claro, observemos que permitir que $\sum_{j \in \mathcal{S}} P_{i^*j} < 1$, significa permitir que con probabilidad positiva la cadena al instante siguiente de haber estado en el estado i^* ya no se encuentre en ninguno de los estados de \mathcal{S} . Es decir la cadena se sale del espacio de estados, o bien podemos imaginar que la cadena se absorbe en un nuevo estado que denotaremos -1 .

Es interesante y útil notar que si denotamos como $P_{i,j}^{(n)}$ a la probabilidad de ir de i a j en n pasos, esto es

$$P_{i,j}^{(n)} := \mathbb{P}(X_n = j \mid X_0 = i), \quad (2.2)$$

resulta que $P_{i,j}^{(n)}$ es la (i, j) -ésima entrada de la matriz P^n . La prueba de este hecho por inducción es sencilla y se basa en la siguiente relación conocida como ecuación de Chapman-Kolmogorov

$$P_{i,j}^{(n)} = \sum_{k \in \mathcal{S}} P_{ik}^{(r)} P_{kj}^{(n-r)}, \quad n \geq r \geq 0, \quad (2.3)$$

cuya demostración a su vez es sencilla y se basa en la propiedad de Markov.

A un vector de la forma $\pi = (\pi_i)_{i \in \mathcal{S}}$, tal que

$$\pi_i \geq 0 \quad \text{y} \quad \pi P = \pi, \quad (2.4)$$

se le llama vector invariante para P . En el caso de que sea posible normalizar este vector de tal forma que $\sum_{i \in \mathcal{S}} \pi_i = 1$ (esto es posible si la serie $\sum_{i \in \mathcal{S}} \pi_i$ converge), se le llamará distribución invariante o distribución estacionaria al vector normalizado.

Un caso especial de cadena de Markov son las *cadena de nacimiento y muerte*. La particularidad de estas cadenas es que de un estado cualquiera, digamos i , solo es posible ir al estado anterior $i - 1$, ir al estado siguiente $i + 1$, o permanecer en el estado i . En otras palabras

$$P_{ij} = \begin{cases} p_i, & \text{si } j = i + 1, \\ r_i, & \text{si } j = i, \\ q_i, & \text{si } j = i - 1. \end{cases}$$

Esta fórmula incluye el caso en donde $i = 0$, lo cual indica que con probabilidad q_0 la cadena pasa del estado 0 al estado -1 . Para cada $n \in \mathbb{N}$ se cumple que $q_i + r_i + p_i = 1$, en particular la probabilidad de absorción es $q_0 = 1 - r_0 - p_0$.

La matriz de transición de esta cadena es la matriz tridiagonal semi-infinita

$$P = \begin{pmatrix} r_0 & p_0 & & & \\ q_1 & r_1 & p_1 & & \\ & q_2 & r_2 & p_2 & \\ & & q_3 & r_3 & p_3 \\ & & & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix}, \quad (2.5)$$

es una matriz de Jacobi (1.9) como la estudiada en el capítulo anterior. Para las cadenas de nacimiento y muerte se suelen definir los *coeficientes potenciales* como

$$\pi_0 = 1, \quad \pi_n = \frac{p_0 p_1 \cdots p_{n-1}}{q_1 q_2 \cdots q_n}, \quad n \geq 1. \quad (2.6)$$

Estos coeficientes constituyen las entradas de un vector invariante $(\pi_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ de P , que resulta ser una distribución invariante cuando $\sum_{n \in \mathbb{N}_0} \pi_n < \infty$.

Antes de continuar, introduciremos algunas funciones que nos serán de utilidad. Dados $i, j \in \mathcal{S}$, se define la *función de probabilidad de primeros tiempos de llegada* como:

$$f_{ij}^{(n)} = \mathbb{P}(X_n = j, X_1 \neq j, X_2 \neq j, \dots, X_{n-1} \neq j \mid X_0 = i). \quad (2.7)$$

Otra manera equivalente para definir a $f_{ij}^{(n)}$ es hacer uso del tiempo de primera llegada, que es la variable aleatoria siguiente

$$T_j = \min \{n \geq 1 \mid X_n = j\}.$$

Entonces

$$f_{ij}^{(n)} = \mathbb{P}(T_j = n \mid X_0 = i).$$

Las funciones $P_{ij}^{(n)}$ y $f_{ij}^{(n)}$ están relacionadas mediante la fórmula

$$P_{ij}^{(n)} = \sum_{k=1}^n f_{ij}^{(k)} P_{jj}^{(n-k)}.$$

La definición de $f_{ij}^{(n)}$ tiene sentido también cuando la cadena tiene un estado absorbente -1 , accesible únicamente desde el estado 0, en este caso

$$f_{i,-1}^{(n)} = q_0 P_{i,0}^{(n-1)}. \quad (2.8)$$

Definamos ahora las funciones generadoras asociadas a $P_{ij}^{(n)}$ y $f_{ij}^{(n)}$

$$P_{ij}(s) = \sum_{n=1}^{\infty} P_{ij}^{(n)} s^n \quad \text{y} \quad F_{ij}(s) = \sum_{n=1}^{\infty} f_{ij}^{(n)} s^n \quad \text{con} \quad |s| < 1. \quad (2.9)$$

Estas funciones se relacionan mediante las siguientes fórmulas.

$$P_{ij}(s) = F_{ij}(s)P_{jj}(s) \quad \text{si} \quad i \neq j, \quad (2.10)$$

$$P_{ii}(s) = 1 + F_{ii}(s)P_{ii}(s). \quad (2.11)$$

Los coeficientes potenciales también tienen la propiedad de hacer a P reversible, esto es encontrar una matriz Π tal que $S = \Pi P \Pi^{-1}$ sea una matriz simétrica. En efecto, basta tomar $\Pi = \text{diag} \{ \sqrt{\pi_0}, \sqrt{\pi_1}, \dots \}$.

Esto es especialmente útil cuando se trata de obtener una representación espectral del proceso cuando el espacio de estados es finito. En efecto, dado que S es una matriz simétrica con coeficientes reales, la podemos diagonalizar como: $S = MDM^T$, donde D es una matriz diagonal con los valores propios de P en su diagonal y M es una matriz ortogonal. Por lo tanto $P = \Pi^{-1}MDM^T\Pi$, o más generalmente $P^n = \Pi^{-1}MD^nM^T\Pi$, lo cual entrada a entrada nos da

$$P_{ij}^{(n)} = \pi_j \sum_{k=0}^N \lambda_k^n \phi_i^{(k)} \phi_j^{(k)}, \quad (2.12)$$

donde $\phi_i^{(k)} = \frac{M_{ik}}{\sqrt{\pi_i}}$ satisfacen $\sum_{k=0}^N \phi_i^{(k)} \phi_j^{(k)} = \frac{\delta_{ij}}{\pi_i}$.

Esta fórmula de representación espectral puede extenderse para el caso en que el espacio de estados \mathcal{S} es infinito utilizando herramientas un poco más sofisticadas. Esto es precisamente lo que haremos en la siguiente sección.

2.1.1. Fórmula de representación de Karlin-McGregor

Esta fórmula integral fue encontrada por primera vez en [10] (inspirados en los trabajos de W.Feller y de H.P McKean). A partir de los coeficientes de la matriz de transición P definida en (2.5) definimos la siguiente sucesión de polinomios

$$\begin{aligned} Q_0(x) &= 1, \quad Q_{-1}(x) = 0, \\ xQ_0(x) &= p_0Q_1(x) + r_0Q_0(x), \\ xQ_n(x) &= p_nQ_{n+1}(x) + r_nQ_n(x) + q_nQ_{n-1}(x), \quad n \geq 1. \end{aligned} \quad (2.13)$$

Hagamos un pequeño paréntesis para el caso en el que $\mathcal{S} = \{0, 1, \dots, N\}$. En ese caso consideremos que la relación de recurrencia anterior, es válida para $n \leq N-1$. Así queda definido $Q(x) = (Q_0(x), Q_1(x), \dots, Q_N(x))^T$. Observemos que la relación $xQ(x) = PQ(x)$ es válida para cualquier x en sus primeras $N-1$ componentes. Sin

embargo, para que la última componente sea válida, es necesario que $xQ_N(x) = r_N Q_N(x) + q_N Q_{N-1}(x)$. En otras palabras, los ceros del polinomio $R_{N+1}(x) = xQ_N(x) - r_N Q_N(x) - q_N Q_{N-1}(x)$ (de grado $N+1$) son los valores propios de P . Encontrando las raíces del polinomio, y apoyándonos en lo que se dijo en la sección anterior, obtendríamos la representación espectral deseada.

Volvamos al caso en que $\mathcal{S} = \mathbb{N}_0$. Supongamos que existe una medida ψ con soporte en el intervalo $[-1, 1]$ (es consecuencia del teorema espectral o del teorema de Favard el cual utilizaremos con más cuidado un poco más adelante), tal que los polinomios generados por (2.13), son ortogonales con respecto a ψ . Al igual que para el caso finito, tomando $Q(x) = (Q_0(x), Q_1(x), \dots)^T$, la relación de recurrencia (2.13), se puede escribir en forma vectorial como $xQ(x) = PQ(x)$. Iterando esta fórmula, obtenemos que $x^n Q(x) = P^n Q(x)$.

Si ahora multiplicamos $x^n Q(x) = P^n Q(x)$, por $Q^T(x)$, del lado derecho, e integramos entrada a entrada, fijándonos en la entrada (i, j) de la ecuación matricial, obtenemos que

$$P_{ij}^n \int_{-1}^1 Q_j^2(x) d\psi(x) = \int_{-1}^1 x^n Q_i(x) Q_j(x) d\psi(x),$$

y por lo tanto

$$P_{ij}^n = \frac{\int_{-1}^1 x^n Q_i(x) Q_j(x) d\psi(x)}{\int_{-1}^1 Q_j(x)^2 d\psi(x)}. \quad (2.14)$$

Además el denominador de la fórmula anterior está dado por

$$\int_{-1}^1 Q_j^2(x) d\psi(x) = \frac{q_1 q_2 \cdots q_j}{p_0 p_1 \cdots p_{j-1}} = \frac{1}{\pi_j}. \quad (2.15)$$

En efecto, para probarlo hay que multiplicar (2.13) por Q_{j+1} , cuando $j \geq 1$ e integrar la igualdad. Dos de los tres sumandos de la derecha se cancelan por la propiedad de ortogonalidad de los polinomios, lo que nos da

$$\int_{-1}^1 x Q_j(x) Q_{j+1}(x) d\psi(x) = p_j \int_{-1}^1 Q_{j+1}^2(x) d\psi(x).$$

Utilizando de nuevo (2.13) de lado izquierdo para $j+1$ y la ortogonalidad de los polinomios obtenemos

$$q_{j+1} \int_{-1}^1 Q_j^2(x) d\psi(x) = p_j \int_{-1}^1 Q_{j+1}^2(x) d\psi(x),$$

lo cual prueba (2.15). Sustituyendo esto en (2.14), obtenemos

$$P_{ij}^n = \pi_j \int_{-1}^1 x^n Q_i(x) Q_j(x) d\psi(x),$$

conocida como *fórmula de representación de Karlin-McGregor*.

Procedamos ahora con una prueba más rigurosa. La clave para la prueba es considerar la representación espectral de P , visto como operador en el espacio de Hilbert $l_\pi^2(\mathbb{N}_0)$ de las sucesiones de números complejos $(f_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$, tales que:

$$\|f\|_\pi^2 = \sum_{n=0}^{\infty} |f_n|^2 \pi_n < \infty, \quad (2.16)$$

donde los π_n son los coeficientes potenciales definidos en (2.6).

Consideremos al operador en $l_\pi^2(\mathbb{N}_0)$, que actúa de la siguiente manera $f \mapsto Pf$, donde

$$(Pf)_n = p_n f_{n+1} + r_n f_n + q_n f_{n-1}.$$

Obsérvese que consideramos que $f_n = 0$ cuando $n \notin \mathbb{N}_0$.

Lema 2.1.1. *El operador $f \mapsto Pf$ define un operador lineal autoadjunto en el espacio de Hilbert $l_\pi^2(\mathbb{N}_0)$.*

Demostración. Sea $f \in l_\pi^2(\mathbb{N}_0)$, entonces

$$\|Pf\|_\pi^2 = \sum_{n=0}^{\infty} |p_n f_{n+1} + r_n f_n + q_n f_{n-1}|^2 \pi_n \leq \sum_{n=0}^{\infty} |f_{n+1}|^2 \pi_n + |f_n|^2 \pi_n + |f_{n-1}|^2 \pi_n < \infty.$$

Para probar la penúltima desigualdad podemos aplicar la desigualdad de Schwartz a los vectores (f_{n-1}, f_n, f_{n+1}) y (q_n, r_n, p_n) y recordar que P es una matriz estocástica. Esto prueba que el operador está bien definido.

El hecho de que el operador sea autoadjunto, viene de la ecuación de simetría $p_n \pi_n = q_{n+1} \pi_{n+1}$. En efecto, sean $f, g \in l_\pi^2(\mathbb{N}_0)$, entonces

$$\begin{aligned} (Pf, g)_\pi &= \sum_{n=0}^{\infty} (p_n f_{n+1} + r_n f_n + q_n f_{n-1}) g_n \pi_n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} q_{n+1} f_{n+1} \pi_{n+1} g_n + \sum_{n=0}^{\infty} r_n f_n \pi_n g_n + \sum_{n=0}^{\infty} p_{n-1} f_{n-1} \pi_{n-1} g_n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} q_n f_n \pi_n g_{n-1} + \sum_{n=0}^{\infty} r_n f_n \pi_n g_n + \sum_{n=0}^{\infty} p_n f_n \pi_n g_{n+1} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (q_n g_{n-1} + r_n g_n + p_n g_{n+1}) f_n \pi_n \\ &= (f, Pg)_\pi. \end{aligned}$$

Por último probemos que $\|P\|_\pi \leq 1$. El teorema de Perron-Frobenius (consultar [14] Capítulo 8) asegura que $\sigma(P) \subseteq [-1, 1]$. Como P es autodjunto podemos tomar una base $(v_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ ortonormal de eigenvectores de P , es decir $Pv_n = \lambda_n v_n$. Cualquier vector $v \in l_\pi^2(\mathbb{N}_0)$ se puede escribir como $v = \sum_{n \in \mathbb{N}_0} \alpha_n v_n$. Si $\|v\|_\pi = 1$ entonces $\sum_{n \in \mathbb{N}_0} |\alpha_n|^2 = 1$. Entonces

$$\|Pv\|_{\pi}^2 = \left\| \sum_{n \in \mathbb{N}_0} \alpha_n \lambda_n v_n \right\|_{\pi}^2 \leq \sum_{n \in \mathbb{N}_0} |\alpha_n \lambda_n|^2 \|v_n\|_{\pi}^2 \leq \sum_{n \in \mathbb{N}_0} |\alpha_n|^2 \|v_n\|_{\pi}^2 = \sum_{n \in \mathbb{N}_0} |\alpha_n|^2 = 1.$$

Y por lo tanto

$$\|P\|_{\pi} = \sup_{\|v\|_{\pi}=1} \|Pv\|_{\pi} \leq 1.$$

□

Así, la matriz P define un operador lineal acotado en $l_{\pi}^2(\mathbb{N}_0)$, el cual llamaremos de nuevo P abusando de la notación.

Definamos ahora la siguiente base de Hilbert de $l_{\pi}^2(\mathbb{N}_0)$: $e_j^{(n)} = \frac{\delta_{ij}}{\pi_i}$, o en forma vectorial:

$$e^{(i)} = \left(0, 0, \dots, 0, \frac{1}{\pi_i}, 0, \dots \right)^T. \quad (2.17)$$

Necesitamos ahora el siguiente

Lema 2.1.2. *La base de Hilbert de $l_{\pi}^2(\mathbb{N})$ dada por (2.17), puede expresarse en función de la familia de polinomios definidos por la relación de recurrencia (2.13) y del operador P de la siguiente manera*

$$Q_n(P)e^{(0)} = e^{(n)}. \quad (2.18)$$

Demostración. Utilizando de nuevo la relación de simetría $p_n \pi_n = q_{n+1} \pi_{n+1}$ tenemos que

$$\begin{aligned} Pe^{(n)} &= \frac{1}{\pi_n} p_{n-1} \pi_{n-1} e^{n-1} + \frac{1}{\pi_n} r_n \pi_n e^n + \frac{1}{\pi_n} q_{n+1} \pi_{n+1} e^{n+1} \\ &= q_n e^{n-1} + r_n e^n + p_n e^{n+1}. \end{aligned}$$

Procederemos con la prueba por inducción sobre n . Expresando a Q_{n+1} gracias a la fórmula (2.13), tenemos que

$$\begin{aligned} Q_{n+1}(P)e^{(0)} &= \frac{1}{p_n} ((P - r_0)Q_n(P)e^{(0)} - q_n Q_{n-1}(P)e^{(0)}) \\ &= \frac{1}{p_n} ((P - r_0)e^{(n)} - q_n e^{(n-1)}) \\ &= e^{(n+1)}. \end{aligned}$$

□

Observemos ahora que podemos expresar la entrada (i, j) de la matriz P en función de los vectores canónicos y del producto interior de $l_{\pi}^2(\mathbb{N})$, como

$$(P^{(n)}e^{(j)}, e^{(i)})_\pi = \frac{1}{\pi_j} P_{ij}^{(n)}.$$

Por lo tanto, utilizando que P es autoadjunto, tenemos que

$$\begin{aligned} P_{ij}^{(n)} &= \pi_j (P^{(n)}e^{(j)}, e^{(i)})_\pi \\ &= \pi_j (P^{(n)}Q_j(P)e^{(0)}, Q_i(P)e^{(0)})_\pi \\ &= \pi_j (P^{(n)}Q_i(P)Q_j(P)e^{(0)}, e^{(0)})_\pi. \end{aligned}$$

El Teorema espectral 1.3.3 garantiza que existe una medida de probabilidad con soporte en $[-1, 1]$ tal que para cualquier función acotada f en el intervalo $[-1, 1]$, se cumple que

$$\int_{-1}^1 f(x) d\psi(x) = (f(P)e^{(0)}, e^{(0)})_\pi.$$

Aplicando esto a nuestro caso particular, obtenemos que

$$P_{ij}^{(n)} = \pi_j \int_{-1}^1 x^n Q_i(x) Q_j(x) d\psi(x).$$

Dado que la medida ϕ tiene soporte compacto y es una medida de probabilidad, podemos concluir que tiene momentos finitos, por el Teorema 1.2 la medida ψ es única. Hemos probado el siguiente resultado.

Teorema 2.1.3. *Para una cadena de nacimiento y muerte $\{X_n, n = 0, 1, \dots\}$, su matriz de transición P dada por (2.5) y los polinomios generados por la relación (2.13), existe una única medida de probabilidad ψ tal que*

$$P_{ij}^{(n)} = \pi_j \int_{-1}^1 x^n Q_i(x) Q_j(x) d\psi(x). \quad (2.19)$$

A la medida ψ se le suele llamar *medida de nacimiento y muerte* y a los polinomios (ortogonales con respecto a ψ), se les llama *polinomios de nacimiento y muerte*.

2.1.2. Polinomios k -asociados

Consideremos una nueva cadena de Markov que se obtiene de la cadena de nacimiento y muerte original, eliminando los primeros $k+1$ estados. De forma más precisa definimos la cadena de Markov $\{X_n^{(k)}, n = 0, 1, \dots\}$ como la cadena cuya matriz de transición se obtiene de P eliminando los primeros $k+1$ renglones y $k+1$ columnas como se muestra a continuación

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} r_0 & p_0 & & & & \\ q_1 & r_1 & p_1 & & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & q_k & r_k & p_k & \\ \hline & & & q_{k+1} & r_{k+1} & p_{k+1} \\ & & & & q_{k+2} & r_{k+2} & p_{k+2} \\ & & & & & \ddots & \ddots & \ddots \end{array} \right].$$

Esta nueva cadena tiene un estado absorbente que se puede alcanzar solamente a partir del estado inicial con probabilidad q_{k+1} . Definimos ahora la sucesión de polinomios k -asociados $Q_n^{(k)}$ mediante la relación de recurrencia siguiente

$$xQ_n^{(k)}(x) = \delta_{nk} + q_n Q_{n-1}^{(k)}(x) + r_n Q_n^{(k)}(x) + p_n Q_{n+1}^{(k)}(x) \quad . \quad (2.20)$$

Definimos como 0 a todos los polinomios con índice menor a k , es decir

$$Q_n^{(k)}(x) = 0 \quad \forall \quad n \leq k.$$

Obsérvese que

$$Q_{k+1}^{(k)}(x) = -\frac{1}{p_k}.$$

Podemos relacionar a estos polinomios con los polinomios de nacimiento y muerte originales mediante la siguiente fórmula

$$Q_n^{(k)} = -\pi_k \int_{-1}^1 Q_k(y) \frac{Q_n(y) - Q_n(x)}{y-x} d\psi(y).$$

En efecto, cuando $n \leq k$ se tiene que $Q_n(y) - Q_n(x)$ es un polinomio de grado n en la variable y y una de sus raíces es x , por lo tanto $\frac{Q_n(y) - Q_n(x)}{y-x}$ es un polinomio de grado $n-1$. Utilizando que $Q_k(y)$ es ortogonal a cualquier polinomio de grado menor a k , obtenemos que $-\pi_k \int_{-1}^1 Q_k(y) \frac{Q_n(y) - Q_n(x)}{y-x} d\psi(y) = 0$.

Cuando $n > k$, podemos verificar que $-\pi_k \int_{-1}^1 Q_k(y) \frac{Q_n(y) - Q_n(x)}{y-x} d\psi(y)$ cumple la relación de recurrencia (2.20). En efecto, utilizando (2.13)

$$\begin{aligned} & p_n(-\pi_k) \int_{-1}^1 Q_k(y) \frac{Q_{n+1}(y) - Q_{n+1}(x)}{y-x} d\psi(y) + r_n(-\pi_k) \int_{-1}^1 Q_k(y) \frac{Q_n(y) - Q_n(x)}{y-x} d\psi(y) \\ & + q_n(-\pi_k) \int_{-1}^1 Q_k(y) \frac{Q_{n-1}(y) - Q_{n-1}(x)}{y-x} d\psi(y) = x(-\pi_k) \int_{-1}^1 Q_k(y) \frac{Q_n(y) - Q_n(x)}{y-x} d\psi(y). \end{aligned}$$

Otra manera de ver a los polinomios k -asociados es la siguiente

$$R_n(x) = -Q_{n+k+1}(x), \quad (2.21)$$

o de forma recurrente

$$\begin{aligned} R_0(x) &= \frac{1}{p_k}, \quad R_{-1}(x) = 0, \\ xR_n(x) &= p_{n+k+1}R_{n+1}(x) + r_{n+k+1}R_n(x) + q_{n+k+1}R_{n-1}(x), \quad n \geq 1. \end{aligned}$$

Esta forma de escribir a los polinomios permite verlos precisamente como los polinomios de nacimiento del proceso k -asociado mencionado al principio de esta sección, salvo por la constante multiplicativa $\frac{1}{p_k}$. Esto nos permite aplicar el Teorema 2.1.3, que afirma que existe una única medida de probabilidad asociada al proceso k -asociado $\{X_n^{(k)} n = 0, 1, \dots\}$ que denotaremos como $\psi^{(k)}$, respecto a la cual claramente los polinomios k -asociados son ortogonales.

Lo que haremos ahora es relacionar las medidas ψ y $\psi^{(0)}$ o mejor dicho sus transformadas de Stieltjes en el siguiente resultado.

Teorema 2.1.4. *Las medidas ψ y $\psi^{(0)}$ asociadas a la cadena de nacimiento y muerte original y la cadena 0-asociada respectivamente se relacionan mediante la siguiente fórmula*

$$\int_{-1}^1 \frac{d\psi(x)}{1-xs} = \frac{1}{1-r_0s - p_0q_1s^2 \int_{-1}^1 \frac{d\psi^{(0)}(x)}{1-xs}}. \quad (2.22)$$

Daremos una prueba probabilística de esta fórmula utilizando las funciones generadoras mencionadas al principio de este capítulo.

Demostración. Consideremos las funciones generadoras $P_{ij}(s)$ y $F_{ij}(s)$ definidas en (2.9) asociadas a las probabilidades de transición P_{ij} , y a la probabilidad de primer tiempo de llegada f_{ij} , respectivamente. Aplicando la fórmula de representación de Karlin-McGregor (2.19), tenemos que

$$P_{ij}(s) = \sum_{n=0}^{\infty} P_{ij}^{(n)} s^{(n)} = \pi_j \int_{-1}^1 \frac{Q_i(x) Q_j(x) d\psi(x)}{1-xs}, \quad (2.23)$$

gracias a que $|xs| < 1$, lo que nos permitió hacer el cambio de serie con integral. Por las fórmulas (2.10) y (2.11), tenemos que

$$F_{ii}(s) = 1 - \frac{1}{\pi_j \int_{-1}^1 \frac{Q_i^2(x) d\psi(x)}{1-xs}}, \quad F_{ij}(s) = \frac{\int_{-1}^1 \frac{Q_i(x) Q_j(x) d\psi(x)}{1-xs}}{\int_{-1}^1 \frac{Q_i^2(x) d\psi(x)}{1-xs}}. \quad (2.24)$$

Para una cadena con un estado absorbente, y probabilidad de absorción q_0 , utilizando (2.8), y la fórmula de representación de Karlin-McGregor, tenemos que

$$\begin{aligned}
F_{i,-1}(s) &= \sum_{n=1}^{\infty} f_{i,-1}^{(n)} s^n = \sum_{n=1}^{\infty} q_0 P_{i,0}^{(n)} s^n = \sum_{n=1}^{\infty} q_0 \int_{-1}^1 x^{n-1} Q_i(x) d\psi(x) s^n \\
&= sq_0 \int_{-1}^1 \sum_{n=1}^{\infty} (xs)^{n-1} Q_i(x) d\psi(x) = sq_0 \int_{-1}^1 \frac{Q_i(x) d\psi(x)}{1-xs}.
\end{aligned}$$

Aplicando esta última fórmula a la cadena 0-asociada cuyo estado absorbente es el 0 de la cadena original con probabilidad de absorción q_1 obtenemos

$$F_{10}(s) = sq_1 \int_{-1}^1 \frac{d\psi^{(0)}(x)}{1-xs}.$$

Usando de nuevo (2.10), la ecuación (2.24), y la definición $Q_1(x) = \frac{(x-r_0)}{p_0}$, tenemos que

$$\begin{aligned}
F_{10}(s) &= \frac{P_{10}}{P_{00}} = \frac{\int_{-1}^1 \frac{Q_1(x) d\psi(x)}{1-xs}}{\int_{-1}^1 \frac{d\psi(x)}{1-xs}} = \frac{1}{p_0} \left[\frac{\int_{-1}^1 \frac{x d\psi(x)}{1-xs}}{\int_{-1}^1 \frac{d\psi(x)}{1-xs}} - r_0 \right] \\
&= \frac{1}{p_0} \left[\frac{\frac{1}{s} \int_{-1}^1 \left[\frac{1}{1-xs} - 1 \right] d\psi(x)}{\int_{-1}^1 \frac{d\psi(x)}{1-xs}} - r_0 \right] = \frac{1}{p_0} \left[\frac{1}{s} \left(1 - \frac{1}{\frac{d\psi(x)}{1-xs}} \right) - r_0 \right],
\end{aligned}$$

y por lo tanto

$$sq_1 \int_{-1}^1 \frac{d\psi^{(0)}(x)}{1-xs} = \frac{1}{p_0} \left[\frac{1}{s} \left(1 - \frac{1}{\frac{d\psi(x)}{1-xs}} \right) - r_0 \right],$$

de lo cual se sigue el resultado. □

Si ahora hacemos el cambio de variable $z = \frac{1}{s}$, en la fórmula (2.22), tenemos

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^1 \frac{d\psi(x)}{1-x\frac{1}{z}} &= \frac{1}{1-r_0\frac{1}{z} - p_0q_1(\frac{1}{z})^2 \int_{-1}^1 \frac{d\psi^{(0)}}{1-x\frac{1}{z}}} \\
z \int_{-1}^1 \frac{d\psi(x)}{z-x} &= \frac{1}{1-r_0\frac{1}{z} - p_0q_1\frac{1}{z} \int_{-1}^1 \frac{d\psi^{(0)}}{z-x}} \\
\int_{-1}^1 \frac{d\psi(x)}{x-z} &= -\frac{1}{z-r_0 + p_0q_1 \int_{-1}^1 \frac{d\psi^{(0)}}{x-z}}.
\end{aligned}$$

En términos de la transformada de Stieltjes

$$B(z; \psi) = -\frac{1}{z - r_0 + p_0 q_1 B(z; \psi^{(0)})}. \quad (2.25)$$

Para cualquier índice $k \geq 0$ (tomando $\psi^{(-1)} = \psi$) podemos escribir esta fórmula como

$$B(z; \psi^{(k-1)}) = -\frac{1}{z - r_k + p_k q_{k+1} B(z; \psi^{(k)})} = -\frac{\frac{1}{p_k}}{\frac{z - r_k}{p_k} + q_{k+1} B(z; \psi^{(k)})}. \quad (2.26)$$

A partir de la fórmula (2.25), reemplazando $B(z; \psi^{(0)})$ por $\left(1 - r_1 - p_1 q_2 B(z; \psi^{(1)})\right)^{-1}$ y repitiendo este proceso iterativamente, podemos llegar a expresar a $B(z; \psi)$ en función de $B(z; \psi^{(k-1)})$ como

$$B(z; \psi) = \frac{\alpha_k B(z; \psi^{(k-1)}) + \beta_k}{\gamma_k B(z; \psi^{(k-1)}) + \delta_k} \quad k \geq 1, \quad (2.27)$$

donde $\alpha_k, \beta_k, \gamma_k, \delta_k$ son funciones de z no únicamente determinadas. Tratemos de escribir estos coeficientes en función de los polinomios de nacimiento y muerte y los polinomios k -asociados. Para $k = 0$ podemos tomar $\alpha_0 = \delta_0 = 1$ y $\beta_0 = \gamma_0 = 0$. Para $k = 1$ tomamos $\alpha_1 = 0, \beta_1 = \frac{-1}{p_0}, \gamma_1 = q_1, \delta_1 = \frac{z - r_0}{p_0}$. La fórmula (2.25) se escribe como

$$B(z; \psi) = -\frac{\frac{1}{p_0}}{\frac{(z - r_0)}{p_0} + q_1 B(z; \psi^{(0)})} = -\frac{Q_1^{(0)}(z)}{Q_1(z) + q_1 B(z; \psi^{(0)})}.$$

Para encontrar la relación de recurrencia que define a estos coeficientes sustituyamos la ecuación (2.26) en (2.27)

$$B(z; \psi) = \frac{\beta_k q_{k+1} B(z; \psi^{(k)}) + \frac{\beta_k(z - r_k) - \alpha_k}{p_k}}{\delta_k q_{k+1} B(z; \psi^{(k)}) + \frac{\delta_k(z - r_k) - \gamma_k}{p_k}} \quad \text{para } k \geq 1. \quad (2.28)$$

Comparando los coeficientes con los de la fórmula (2.27) evaluada en k , obtenemos que

$$\begin{aligned} \alpha_{k+1} &= \beta_k q_{k+1}, \\ \beta_{k+1} &= \frac{\beta_k(z - r_k) - \alpha_k}{p_k}, \\ \gamma_{k+1} &= \delta_k q_{k+1}, \\ \delta_{k+1} &= \frac{\delta_k(z - r_k) - \gamma_k}{p_k}. \end{aligned}$$

Por lo tanto el coeficiente β_k satisface la relación de recurrencia:

$$q_k \beta_{k-1} + r_k \beta_k + p_k \beta_{k+1} = z \beta_k, \quad \beta_0 = 0, \quad \beta_1 = \frac{1}{p_0},$$

cuya solución es la familia de polinomios 0-asociados $Q_k^{(0)}(z)$.

El coeficiente δ_k satisface

$$q_k \delta_{k-1} + r_k \delta_k + p_k \delta_{k+1} = z \delta_k, \quad \delta_0 = 1, \quad \delta_1 = \frac{z - r_0}{p_0},$$

cuya solución es la familia de polinomios $Q_k(z)$.

Por lo tanto $\alpha_k = q_k Q_{k-1}^{(0)}(z)$, $\beta_k = Q_k^{(0)}(z)$, $\gamma_k = q_k Q_{k-1}(z)$, $\delta_k = Q_k(z)$ y podemos escribir la formula (2.27) como

$$B(z; \psi) = \frac{q_k Q_{k-1}^{(0)}(z) B(z; \psi^{(k-1)}) + Q_k^{(0)}(z)}{q_k Q_{k-1}(z) B(z; \psi^{(k-1)}) + Q_k(z)}, \quad k \geq 1. \quad (2.29)$$

Podemos generalizar un poco esta fórmula si la aplicamos al proceso m -asociado y teniendo en cuenta que los polinomios asociados al proceso m -asociado son $Q_n^{(m)}(x)$, salvo por la constante multiplicativa $-\frac{1}{p_m}$.

$$B(z; \psi^{(m)}) = - \left(\frac{1}{p_m} \right) \frac{q_k Q_{k-1}^{(m+1)}(z) B(z; \psi^{(k-1)}) + Q_k^{(m+1)}(z)}{q_k Q_{k-1}^{(m)}(z) B(z; \psi^{(k-1)}) + Q_k^{(m)}(z)} \quad k > m+1 \geq 0. \quad (2.30)$$

2.2. Procesos de nacimiento y muerte a tiempo continuo

Al igual que en la sección anterior, comenzaremos dando algunas definiciones generales sobre cadenas de Markov, pero esta vez a tiempo continuo. Esta sección se basa principalmente en [5, Capítulo 3].

Sea $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, un espacio de probabilidad y $\{X_t \mid t \geq 0\}$ una cadena de Markov a tiempo continuo con espacio de estados $\mathcal{S} = \mathbb{N}_0$. En este caso la propiedad de Markov es la siguiente:

$$\mathbb{P}(X_{s+t} = j \mid X_s = i, X_\tau, 0 \leq \tau < s) = \mathbb{P}(X_{s+t} = j \mid X_s = i) = P_{ij}(s, s+t).$$

Asumiremos también que la cadena es homogénea, es decir que la probabilidad de ir del estado i al tiempo s al estado j al tiempo $s+t$ no depende de s , solo depende de t . Más precisamente $P_{ij}(s, s+t) = P_{ij}(0, t)$. Todas estas probabilidades de transición suelen escribirse en la llamada *matriz de transición de probabilidad*

$$P(t) = \begin{pmatrix} P_{0,0}(t) & P_{0,1}(t) & P_{0,2}(t) & \cdots \\ P_{1,0}(t) & P_{1,1}(t) & P_{1,2}(t) & \cdots \\ P_{2,0}(t) & P_{2,1}(t) & P_{2,2}(t) & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}.$$

Tenemos que las probabilidades de transición satisfacen las siguientes propiedades:

1. $P_{ij}(t) \geq 0$, para cualesquiera estados $i, j \in \mathcal{S}$.
2. $\sum_{j \in \mathcal{S}} P_{ij}(t) \leq 1$, para cualquier $i \in \mathcal{S}$ y $\forall t \geq 0$. Si $\sum_{j \in \mathcal{S}} P_{ij}(t) = 1 \quad \forall i \in \mathcal{S} \quad \forall t \geq 0$, entonces diremos que el proceso es *honesto*, y diremos que es *deshonesto* en caso contrario.

3. Para cualesquiera estados $i, j \in \mathcal{S}$, se cumple la conocida como *ecuación de Chapman-Kolmogorov*

$$P_{ij}(s+t) = \sum_{k \in \mathcal{S}} P_{ik}(s)P_{kj}(t). \quad (2.31)$$

Supondremos adicionalmente que las funciones de transición de probabilidad son siempre *estándar*, esto es

4. $\lim_{t \rightarrow 0} P_{ii}(t) = 1$ para cualquier estado $i \in \mathcal{S}$.

Con estos supuestos se tiene la siguiente proposición.

Proposición 2.2.1. *Si una función de transición cumple las propiedades (1-4) anteriores, entonces*

1. $-P'_{ii}(0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1 - P_{ii}(t)}{t} := q_i$ con q_i posiblemente infinito.
2. Cuando $q_i < \infty$, tenemos que $P'_{ij}(0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{P_{ij}(t)}{t} := q_{ij}$.

Demostración. La demostración se encuentra en [1, Proposición 1.2.2]. □

Se dice que un estado i es *estable*, si $q_i < \infty$, de lo contrario, se dice que i es *instantáneo*. En nuestro caso solo hablaremos de cadenas en donde todos los estados son estables. Con estos supuestos, se puede definir el *operador infinitesimal*, cuyas entradas son

$$a_{ij} = \begin{cases} q_{ij}, & i \neq j, \\ -q_i, & i = j. \end{cases}$$

Es decir:

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} -q_0 & q_{0,1} & q_{0,2} & \cdots \\ q_{1,0} & -q_1 & q_{1,2} & \cdots \\ q_{2,1} & q_{2,1} & -q_2 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} = P'(0). \quad (2.32)$$

Podemos observar que la Proposición 2.2.1 se traduce en que:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X_{t+h} = i \mid X_t = i) &= P_{ii}(h) = 1 - q_i h + o(h), \quad h \rightarrow 0^+ \\ \mathbb{P}(X_{t+h} = j \mid X_t = i) &= P_{ij}(h) = -q_{ij} h + o(h), \quad h \rightarrow 0^+, \end{aligned}$$

lo cual se suele utilizar como definición de cadena de Markov a tiempo continuo. En particular esta es la definición que se utiliza en nuestra referencia principal [9].

Es conveniente definir los *tiempos de espera*

$$H_i = \begin{cases} \inf\{t \geq 0 \mid X_t \neq i\}, & \text{si el conjunto es no vacío,} \\ +\infty, & \text{en otro caso,} \end{cases}$$

cuya distribución está dada por

$$\mathbb{P}(H_i > t \mid X_0 = i) = e^{-q_i t}. \quad (2.33)$$

Esto nos da un mejor entendimiento de la cadena, pues nos indica que empezaremos en un estado i , esperaremos un tiempo con distribución exponencial y en ese momento pasaremos a un estado j con probabilidad

$$\mathbb{P}(X_{H_i=j} \mid X_0 = i) = \frac{q_{ij}}{q_i}, \quad i \neq j.$$

Una cadena de Markov a tiempo continuo define naturalmente una cadena de Markov a tiempo discreto de la siguiente manera.

Definimos los tiempos de salto como

$$J_n = \begin{cases} 0, & \text{si } n = 0, \\ \inf\{t > J_{n-1} \mid X_t \neq X_{t-}\}, & \text{si } n \geq 1. \end{cases}$$

Entonces $X_n := X_{J_n}$ define una cadena de Markov a tiempo discreto con probabilidades de transición dadas por

$$P_{ij} = \begin{cases} \delta_{ij}, & \text{si } q_i = 0, \\ 0, & \text{si } q_i > 0, \quad i = j, \\ \frac{q_{ij}}{q_i}, & \text{si } q_i > 0, \quad i \neq j. \end{cases}$$

La interpretación anterior del proceso podría hacernos pensar que $J_\infty = \lim_{n \rightarrow \infty} J_n = \infty$. Sin embargo existen ejemplos en donde J_∞ toma valores finitos con probabilidad positiva. A J_∞ se le suele llamar *tiempo de primera explosión*. Si J_∞ es finito es porque en una cantidad finita de tiempo el proceso tuvo una infinidad de saltos. Esto resultaba imposible en el caso de cadenas de Markov a tiempo discreto. El siguiente resultado muestra en que casos esto puede suceder.

Proposición 2.2.2. Sean S_n una sucesión de variables aleatorias exponenciales de parámetros λ_n , $n \geq 1$. Sea $S = \sum_{n=1}^{\infty} S_n$. Entonces

$$\mathbb{P}(S = \infty) = 1 \text{ si y solo si } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n} = \infty.$$

Demostración. Ver [1, Lema 1.2.9] □

Esto nos permitirá determinar más adelante que los procesos de colas nunca tienen tiempos de explosión finitos.

A continuación presentaremos dos ecuaciones diferenciales fundamentales para estudiar los procesos de Markov a tiempo continuo.

Proposición 2.2.3. *Supongamos que la matriz \mathcal{A} , (2.32) es estable, es decir que los coeficientes q_i son finitos, entonces*

$$P'_{ij}(t) = \sum_{k \in \mathcal{S}} q_{ik} P_{kj}(t), \quad t \geq 0, \quad i, j \in \mathcal{S}. \quad (2.34)$$

Demostración. Ver [5, Proposición 3.3]. □

A esta ecuación se le conoce como *ecuación de retroceso de Kolmogorov* y su prueba se basa en la ecuación de Chapman-Kolmogorov (2.31). La segunda ecuación diferencial que tenemos que mencionar es la siguiente

$$P'_{ij}(t) = \sum_{k \in \mathcal{S}} P_{ik}(t) q_{kj}, \quad t \geq 0, \quad i, j \in \mathcal{S}, \quad (2.35)$$

conocida como *ecuación de evolución de Kolmogorov*. Es importante destacar que a diferencia de la ecuación (2.34), esta no siempre se satisface. Estas dos ecuaciones se pueden escribir de forma matricial como

$$P'(t) = \mathcal{A}P(t), \quad P'(t) = P(t)\mathcal{A}, \quad t \geq 0. \quad (2.36)$$

En la mayoría de situaciones nos encontramos con el operador infinitesimal \mathcal{A} y nos preguntamos si existen y son únicas las soluciones $f_{ij}(t)$ de las ecuaciones de Kolmogorov y si además estas representan una función de transición de probabilidad, es decir si cumplen las condiciones 1, 2 y 3 mencionadas en esta sección. Esto en general va depender de \mathcal{A} . Las ecuaciones de Kolmogorov pueden tener más de una solución si es que la tienen. Esto no sucedía en el caso discreto pues P determinaba de forma única el proceso para cualquier tiempo discreto n . A continuación enunciamos un teorema que garantiza la existencia de una solución a las ecuaciones de Kolmogorov siempre que \mathcal{A} sea estable. Hagamos primero la siguiente definición.

Definición 2.2.4. *Sea \mathcal{A} una matriz estable. Se dice que una función de transición $P_{ij}(t)$ es una \mathcal{A} -función si \mathcal{A} es el operador infinitesimal de $P(t)$, es decir $P'(0) = \mathcal{A}$.*

Teorema 2.2.5. *Supongamos que la matriz \mathcal{A} dada por (2.32) es estable, pero no necesariamente conservativa. Entonces existe una función de transición $f_{ij}(t)$ (posiblemente deshonesto) que satisface ambas ecuaciones de Kolmogorov que es minimal en el sentido que $f_{ij}(t) \leq P_{ij}(t)$ para todo $i, j \in \mathcal{S}$ y $t \geq 0$, siempre que $P_{ij}(t)$ sea solución (no forzosamente función de transición) de las ecuaciones de Kolmogorov. La función $f_{ij}(t)$ es también una \mathcal{A} -función minimal, en el sentido que $f_{ij}(t) \leq P_{ij}(t)$ para todo $i, j \in \mathcal{S}$ y $t \geq 0$, siempre que $P_{ij}(t)$ sea \mathcal{A} -función.*

Demostración. Ver [1, Teorema 2.2.2] □

Definamos ahora algunas cantidades probabilísticas básicas. Para ello definamos un concepto análogo al de funciones generadoras de probabilidad que utilizamos en el caso discreto (2.23).

Definición 2.2.6. *La transformada de Laplace de una función de transición $P_{ij}(t)$ se define como*

$$\hat{P}_{ij}(\lambda) = \int_0^\infty e^{-\lambda t} P_{ij}(t) dt, \quad \lambda > 0, \quad i, j \in \mathcal{S}.$$

Estas funciones también son conocidas como *funciones resolventes* y satisfacen las siguientes propiedades (ver [1, Sección 1.1.3] para más detalles).

1. $\hat{P}_{ij}(\lambda) \geq 0$ para todas $i, j \in \mathcal{S}$ y $\lambda > 0$.
2. $\lambda \sum_{j \in \mathcal{S}} \hat{P}_{ij}(\lambda) \leq 1$, para toda $i \in \mathcal{S}$ y $\lambda > 0$.
3. $\hat{P}_{ij}(\lambda) - \hat{P}_{ij}(\mu) + (\lambda - \mu) \sum_{k \in \mathcal{S}} \hat{P}_{ik}(\lambda) \hat{P}_{kj}(\mu) = 0$, para todas $i, j \in \mathcal{S}$ y $\lambda, \mu > 0$.
4. $\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \lambda \hat{P}_{ii}(\lambda) = 1$, para toda $i \in \mathcal{S}$ (entonces $\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \lambda \hat{P}_{ij}(\lambda) = \delta_{ij}$).

Como en el caso discreto (2.7) definiremos las funciones de probabilidad de primer tiempo de llegada como

$$\begin{aligned} F_{ij}(t) &= \mathbb{P}(X_\tau = j \text{ para alguna } \tau, 0 < \tau \leq t \mid X_0 = i), \\ F_{ii}(t) &= \mathbb{P}(X_{\tau_1} \neq i, X_{\tau_2} = i \text{ para algunas } \tau_1, \tau_2, 0 < \tau_1 < \tau_2 \leq t \mid X_0 = i). \end{aligned} \quad (2.37)$$

Aplicando (2.33), las cantidades $P_{ij}(t)$ y $F_{ij}(t)$ se relacionan mediante las fórmulas:

$$\begin{aligned} P_{ii}(t) &= e^{-q_i t} + \int_0^t P_{ii}(t-s) dF_{ii}(s), \\ P_{ij}(t) &= \int_0^t P_{jj}(t-s) dF_{ij}(s). \end{aligned} \quad (2.38)$$

Definimos también la transformada de Laplace de $F_{ij}(t)$ como

$$\hat{F}_{ij}(\lambda) = \int_0^\infty e^{-\lambda t} F_{ij}(t) dt.$$

De la relación entre $P_{ij}(t)$ y $F_{ij}(t)$ (2.38) podemos deducir la relación entre sus transformadas de Laplace

$$\begin{aligned} \hat{P}_{ii}(\lambda) &= \frac{1}{\lambda + q_i} + \hat{P}_{ii}(\lambda) \hat{F}_{ii}(\lambda), \\ \hat{P}_{ij}(\lambda) &= \hat{P}_{jj}(\lambda) \hat{F}_{ij}(\lambda), i \neq j. \end{aligned} \quad (2.39)$$

Definición 2.2.7. Con la notación anterior podemos definir los siguientes conceptos.

- Un estado $i \in \mathcal{S}$ es recurrente si $\int_0^\infty P_{ii}(t) dt = \infty$. En términos de $F_{ii}(t)$, esto significa que $\int_0^\infty F_{ii}(t) dt = 1$, o equivalentemente que $\lim_{\lambda \rightarrow 0^+} \hat{F}_{ii}(\lambda) = 1$.
- Un estado es transitorio si no es recurrente.
- Un estado recurrente es llamado positivo recurrente (o ergódico) si $\lim_{t \rightarrow \infty} P_{ii}(t) > 0$. En términos de $F_{ii}(t)$, se tiene que cumplir que $\int_0^\infty t F_{ii}(t) dt < \infty$ o equivalentemente que $-\lim_{\lambda \rightarrow 0^+} \frac{\partial}{\partial \lambda} \hat{F}_{ii}(\lambda) < \infty$.
- Un estado recurrente es llamado recurrente nulo si no es positivo recurrente.

A partir de ahora abandonaremos el caso general de cadenas de Markov a tiempo continuo, para centrarnos en el estudio particular de *procesos de nacimiento y muerte*. Estos son procesos de Markov a tiempo continuo cuya función de transición de probabilidad $P(t)$ satisface la siguiente descripción cuando $t \rightarrow 0^+$:

$$P_{ij}(t) = \begin{cases} \lambda_i t + o(t), & \text{si } j = i + 1, \\ \mu_i t + o(t), & \text{si } j = i - 1, \\ 1 - (\lambda_i + \mu_i)t + o(t), & \text{si } j = i, \end{cases}$$

en donde $\{(\lambda_n, \mu_n) \mid n \in \mathbb{N}\}$ son tales que $\lambda_n > 0$ para toda $n \in \mathbb{N}_0$, $\mu_0 \geq 0$, $\mu_n > 0$, para toda $n \geq 1$ y $o(t)/t \rightarrow 0^+$ cuando $t \rightarrow 0$. Esta sucesión de parejas se suele llamar *tasas de nacimiento y muerte*. Para este tipo de procesos el operador infinitesimal viene dado por:

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} -(\lambda_0 + \mu_0) & \lambda_0 & & & \\ \mu_1 & -(\lambda_1 + \mu_1) & \lambda_1 & & \\ & \mu_2 & -(\lambda_2 + \mu_2) & \lambda_2 & \\ & & \mu_3 & -(\lambda_3 + \mu_3) & \lambda_3 \\ & & & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix}. \quad (2.40)$$

Podemos definir ahora a los coeficientes potenciales como

$$\pi_0 = 1, \quad \pi_n = \frac{\lambda_0 \lambda_1 \cdots \lambda_{n-1}}{\mu_1 \mu_0 \cdots \mu_n}, \quad n \geq 1, \quad (2.41)$$

que satisfacen la ecuación de simetría

$$\pi_n \lambda_n = \pi_{n+1} \mu_{n+1}.$$

Utilizando (2.36), podemos ver que $\pi_i P_{ij}(t) = \pi_j P_{ji}(t)$. En este caso se dice que $P_{ij}(t)$ es *débilmente simétrica* o *reversible*. Si \mathcal{A} es conservativa, $\pi \mathcal{A} = 0$ y por lo tanto π es un vector invariante del proceso de nacimiento y muerte.

La cadena discreta asociada a este proceso de nacimiento y muerte, está dada por la matriz de transición:

$$P = \begin{pmatrix} 0 & \frac{\lambda_0}{(\lambda_0 + \mu_0)} & & & \\ \frac{\mu_1}{(\lambda_1 + \mu_1)} & 0 & \frac{\lambda_1}{(\lambda_1 + \mu_1)} & & \\ & \frac{\mu_2}{(\lambda_2 + \mu_2)} & 0 & \frac{\lambda_2}{(\lambda_2 + \mu_2)} & \\ & & \frac{\mu_3}{(\lambda_3 + \mu_3)} & 0 & \frac{\lambda_3}{(\lambda_3 + \mu_3)} \\ & & & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix}. \quad (2.42)$$

Utilizando la notación para cadenas discretas descrita en la sección anterior, tenemos que

$$p_n = \frac{\lambda_n}{(\lambda_n + \mu_n)}, \quad r_n = 0, \quad q_n = \frac{\mu_n}{(\lambda_n + \mu_n)}.$$

Por lo tanto los coeficientes potenciales, quedan dados por:

$$\pi_0^P = 1, \quad \pi_n^P = \pi_n \frac{\lambda_0 + \mu_0}{\lambda_n + \mu_n}.$$

Para el caso de cadenas de nacimiento y muerte podemos encontrar un resultado más preciso sobre las condiciones que tiene que cumplir la matriz \mathcal{A} para que la solución $f_{ij}(t)$ de las ecuaciones de Kolmogorov mencionada en el (2.2.5) sea única. Para enunciar este resultado, definamos

$$A = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n \pi_n}, \quad B = \sum_{n=0}^{\infty} \pi_n, \quad C = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n \pi_n} \sum_{m=0}^n \pi_m, \quad D = \sum_{n=1}^{\infty} \pi_n \sum_{m=0}^{n-1} \frac{1}{\lambda_m \pi_m}. \quad (2.43)$$

Observemos que A puede escribirse como $A = \sum_{n=1}^{\infty} (\mu_n \pi_n)^{-1}$, mientras que $C = \sum_{m=0}^{\infty} \pi_m \sum_{n=m}^{\infty} (\lambda_n \pi_n)^{-1}$ y $D = \sum_{m=0}^{\infty} (\lambda_m \pi_m)^{-1} \sum_{n=m+1}^{\infty} \pi_n$. Por lo tanto tenemos que $C + D = AB$. Entonces

- $C < \infty \Rightarrow A < \infty$ o equivalentemente $A = \infty \Rightarrow C = \infty$.
- $D < \infty \Rightarrow B < \infty$ o equivalentemente $B = \infty \Rightarrow D = \infty$.

Con la notación anterior tenemos la siguiente proposición.

Proposición 2.2.8. *Sea \mathcal{A} definida por (2.40), con $\lambda_n > 0$, para toda $n \geq 1$. Entonces la \mathcal{A} -función que es solución de las ecuaciones de Kolmogorov mencionada en el teorema (2.2.5) es única si y solo si $C = \infty$, con C dado por (2.43).*

Demostración. Se puede consultar en [1, Teorema 3.3.2]. □

2.2.1. Fórmula de representación de Karlin McGregor

Las fórmulas de representación integral que se presentan en esta sección fueron dadas por primera vez en [7] y [8].

Comencemos definiendo la familia $Q_n(x)$ de polinomios, a partir del operador infinitesimal \mathcal{A} de una cadena de nacimiento y muerte dado por (2.40), mediante la siguiente relación de recurrencia:

$$\begin{aligned} Q_{-1}(x) &= 0, \quad Q_0 = 1, \\ -xQ_0(x) &= \lambda_0 Q_1(x) - (\lambda_0 + \mu_0)Q_0(x), \\ -xQ_n(x) &= \lambda_n Q_{n+1}(x) - (\lambda_n + \mu_n)Q_n(x) + \mu_n Q_{n-1}(x), \end{aligned} \quad (2.44)$$

o en su forma vectorial $-xQ(x) = AQ(x)$ con $Q(x) = (Q_0(x), Q_1(x), \dots)^T$. Consideremos la siguiente función vectorial

$$f(x, t) = P(t)Q(x). \quad (2.45)$$

Utilizando la ecuación de evolución (2.36), tenemos que $f(x, t)$ satisface la ecuación diferencial

$$\frac{\partial f(x, t)}{\partial t} = P'(t)Q(x) = P(t)AQ(x) = -x f(x, t) \quad f(x, 0) = Q(x),$$

y por lo tanto

$$f(x, t) = e^{-xt} Q(x). \quad (2.46)$$

Igualando las ecuaciones (2.45) y (2.46), componente a componente tenemos que

$$\sum_{j=0}^{\infty} P_{ij}(t) Q_j(x) = e^{-xt} Q_i(x).$$

Supongamos que existe al menos una medida de probabilidad ψ con soporte en $[0, \infty)$, con respecto a la cual los polinomios $Q_n(x)$ son ortogonales. Si tomamos la expresión anterior, la multiplicamos por $Q(x)^T$ e integramos entrada a entrada, utilizando la ortogonalidad podemos ver que:

$$P_{ij}(t) \int_0^{\infty} Q_j^2(x) d\psi(x) = \int_0^{\infty} e^{-xt} Q_i(x) Q_j(x) d\psi(x).$$

Se puede probar de forma análoga al caso discreto que:

$$\pi_j = \left(\int_0^{\infty} Q_j^2(x) d\psi(x) \right)^{-1}.$$

Así obtenemos la siguiente fórmula

$$P_{ij}(t) = \pi_j \int_0^{\infty} e^{-xt} Q_i(x) Q_j(x) d\psi(x), \quad (2.47)$$

conocida como *fórmula integral de representación de Karlin-McGregor*. Obsérvese que esta demostración tiene dos puntos delicados. El primero es la suposición de la existencia de una medida ψ con soporte en $[0, \infty)$ con respecto a la cual los polinomios $Q_n(x)$ sean ortogonales. El segundo punto delicado es que aunque tal ψ exista, no podemos estar seguros de que esta sea única. Al problema de existencia de una tal ψ se le conoce como *Problema de momentos de Stieltjes*. Cuando la solución del problema de momentos de Stieltjes es única se dice que el problema de momentos es *determinado*.

El primer punto delicado se resuelve en el siguiente teorema.

Teorema 2.2.9. *Sea \mathcal{A} la matriz infinitesimal asociada a un proceso de nacimiento y muerte y $P_{ij}(t)$ una \mathcal{A} -función débilmente simétrica que sea solución de las ecuaciones de Kolmogorov. Entonces existe una medida de probabilidad ψ con soporte en el intervalo $[0, \infty)$ tal que*

$$P_{ij}(t) = \pi_j \int_0^{\infty} e^{-xt} Q_i(x) Q_j(x) d\psi(x), \quad i, j \in \mathbb{N}_0, \quad t \geq 0.$$

Demostración. La demostración de este teorema se puede encontrar en [5, Teorema 3.9], y se basa fuertemente en el teorema anterior [5, Teorema 3.8] el cual a su vez se basa en una técnica de representación espectral finita para la matriz truncada \mathcal{A}_N que se obtiene al quedarse con las primeras $N + 1$ columnas y renglones de \mathcal{A} y una técnica de pasaje al límite. \square

Obsérvese que este resultado implica que los polinomios $Q_n(x)$ son ortogonales con respecto a ψ (basta evaluar la fórmula en $t = 0$). Otra consecuencia de esta representación integral es que cuando $t \rightarrow \infty$ la integral tiende a 0 salvo quizás en el 0 donde ψ puede tener una masa discreta, lo cual va a depender de si el proceso es o no positivo-recurrente. Para calcularla hay que utilizar el hecho de que π es un vector invariante y por lo tanto $\pi_j = \sum_{i=0}^{\infty} \pi_i P_{ij}(t)$ junto con la formula de representación integral (2.47) con $i = j$, la cual nos da que

$$1 = \sum_{i=0}^{\infty} \pi_i \int_0^{\infty} e^{-xt} Q_i^2(x) d\psi(x) \rightarrow \sum_{i=0}^{\infty} \pi_i Q_i^2(0) \psi(\{0\}), \quad \text{cuando } t \rightarrow \infty.$$

Así obtenemos una expresión para el salto en 0

$$\psi(\{0\}) = \frac{1}{\sum_{i=0}^{\infty} \pi_i Q_i^2(0)}. \quad (2.48)$$

Otra expresión interesante que podemos obtener de la representación integral (2.47) es

$$\lim_{t \rightarrow \infty} P_{ij}(t) = \psi(\{0\}) Q_i(0) Q_j(0). \quad (2.49)$$

Para el segundo punto delicado contamos con el siguiente resultado.

Teorema 2.2.10. Sean $\{(\lambda_n, \mu_n) \mid n \in \mathbb{N}_0\}$ un conjunto de tasas de nacimiento y muerte y π_n sus coeficientes potenciales definidos como en (2.41). Entonces

1. Si $\mu_0 = 0$, la solución del problema de momentos de Stieltjes es única si y solo si

$$A + B = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{\lambda_n \pi_n} + \pi_n \right) = \infty.$$

2. Si $\mu_0 > 0$, la solución del problema de momentos de Stieltjes es única si y solo si

$$\sum_{n=0}^{\infty} \pi_n Q_n^2(0) = \sum_{n=0}^{\infty} \pi_n \left(1 + \mu_0 \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{\lambda_k \pi_k} \right)^2 = \infty.$$

Demostración. Consultar [5, Teorema 3.26]. \square

2.2.2. Polinomios k -asociados

De forma similar a lo que se hizo en el caso discreto, podemos pensar en el proceso k -asociado $\{X_t^{(k)} \mid t \geq 0\}$, cuya matriz infinitesimal se obtiene de la matriz \mathcal{A} asociada al proceso original removiendo las primeras $k+1$ filas y columnas, es decir

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} -(\lambda_0 + \mu_0) & \lambda_0 & & & & & & \\ -\mu_1 & -(\lambda_1 + \mu_1) & \lambda_1 & & & & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & & & \\ & & & \mu_k & -(\lambda_k + \mu_k) & & & \\ \hline & & & & \mu_{k+1} & & & \\ & & & & & -(\lambda_{k+1} + \mu_{k+1}) & \lambda_{k+1} & \\ & & & & & \mu_{k+2} & -(\lambda_{k+2} + \mu_{k+2}) & \lambda_{k+2} \\ & & & & & & \ddots & \ddots & \ddots \end{array} \right].$$

Definamos ahora los polinomios k -asociados mediante la siguiente relación de recurrencia

$$-xQ_n^{(k)} = \delta_{n,k} + \lambda_n Q_{n+1}^{(k)} - (\lambda_n + \mu_n) Q_n^{(k)} + \mu_n Q_{n-1}^{(k)}, \quad (2.50)$$

de tal forma que los primeros polinomios $Q_n^{(k)} = 0$ para $0 \leq n \leq k$. En particular

$$Q_{k+1}^{(k)} = -\frac{1}{\lambda_k}.$$

Los polinomios 0-asociados junto con los polinomios originales cumplen la siguiente identidad

$$\lambda_{n-1} \pi_{n-1} \left[Q_n(x) Q_{n-1}^{(0)}(x) - Q_n^{(0)}(x) Q_{n-1}(x) \right] = 1. \quad (2.51)$$

Hagamos la prueba por inducción. Para $n = 1$, dado que $Q_0^{(0)}(x) = 0$, $Q_1^{(0)}(x) = -1/\lambda_0$ y $Q_0(x) = 1$,

$$\lambda_0 \pi_0 \left[Q_1(x) Q_0^{(0)}(x) - Q_1^{(0)}(x) Q_0(x) \right] = 1.$$

Si suponemos que (2.51) es válida para n , utilizando las expresiones recursivas (2.44) y (2.50) de $Q_{n+1}(x)$ y de $Q_{n+1}^{(0)}(x)$ obtenemos que

$$\lambda_n \pi_n \left[Q_{n+1}(x) Q_n^{(0)}(x) - Q_{n+1}^{(0)}(x) Q_n(x) \right] = \pi_n \mu_n \left[Q_{n-1}^{(0)}(x) Q_n(x) - Q_{n-1}(x) Q_n^{(0)}(x) \right] = 1,$$

lo cual concluye la inducción. Los polinomios k -asociados son generados por la misma relación de recurrencia que los polinomios asociados al proceso original y por lo tanto podemos encontrar una medida de probabilidad $\psi^{(k)}$, que haga ortogonales a los polinomios k -asociados.

Veamos ahora como se relacionan las transformadas de Stieltjes de las medidas ψ y $\psi^{(k)}$. Para esto utilizaremos las transformadas de Laplace $\hat{P}_{ij}(\lambda)$ y $\hat{F}_{ij}(\lambda)$ de $P_{ij}(t)$ y de $F_{ij}(t)$ respectivamente. Tratemos de expresarlas en función de los polinomios $Q_n(x)$. Las fórmulas (2.39) en este caso se escriben como

$$\begin{aligned}\hat{P}_{ii}(\lambda) &= \frac{1}{\lambda + \lambda_i + \mu_i} + \hat{P}_{ii}(\lambda)\hat{F}_{ii}(\lambda), \\ \hat{P}_{ij}(\lambda) &= \hat{P}_{jj}(\lambda)\hat{F}_{ij}(\lambda), \quad i \neq j.\end{aligned}\tag{2.52}$$

Utilizando la formula de representación de Karlin-McGregor (2.47), tenemos que

$$\begin{aligned}\hat{P}_{ij}(\lambda) &= \int_0^\infty e^{-\lambda t} P_{ij}(t) dt = \int_0^\infty e^{-\lambda t} \left(\pi_j \int_0^\infty e^{-xt} Q_i(x) Q_j(x) d\psi(x) \right) dt \\ &= \pi_j \int_0^\infty \left(\int_0^\infty e^{-(\lambda+x)t} dt \right) Q_i(x) Q_j(x) d\psi(x) = \pi_j \int_0^\infty \frac{Q_i(x) Q_j(x)}{\lambda + x} d\psi(x), \quad \lambda > 0.\end{aligned}$$

De (2.52) obtenemos que

$$\hat{F}_{ii}(\lambda) = 1 - \frac{1}{(\lambda + \lambda_i + \mu_i) \pi_i \int_0^\infty \frac{Q_i^2(x)}{\lambda + x} d\psi(x)}, \quad \hat{F}_{ij}(\lambda) = \frac{\int_0^\infty \frac{Q_i(x) Q_j(x)}{\lambda + x} d\psi(x)}{\int_0^\infty \frac{Q_j^2(x)}{\lambda + x} d\psi(x)}, \quad i \neq j.\tag{2.53}$$

Las siguientes dos fórmulas también nos serán útiles más adelante y son consecuencia de la fórmula de representación de Karlin-McGregor

$$F_{i,-1}(t) = \mu_0 \int_0^t P_{i,0}(s) ds = \mu_0 \int_0^\infty \frac{1 - e^{-xt}}{x} Q_i(x) d\psi(x),\tag{2.54}$$

y

$$F_{1,0}(t) = \mu_1 \int_0^t P_{00}^{(0)}(s) ds = \mu_1 \int_0^\infty \frac{1 - e^{-xt}}{x} d\psi^{(0)}(x),\tag{2.55}$$

donde $P_{ij}^{(0)}(t) = P_{ij}^{(0)}(t, \psi^{(0)})$ es la función de transición asociada al proceso 0-asociado $\{X_t^{(0)}, t \geq 0\}$. La transformada de Laplace de la expresión anteriores es

$$\begin{aligned}\hat{F}_{10}(\lambda) &= \mu_1 \int_0^\infty e^{-\lambda t} \left(\int_0^\infty \frac{1 - e^{-xt}}{x} d\psi^{(0)}(x) \right) dt \\ &= \mu_1 \int_0^\infty \frac{1}{x} \left(\int_0^\infty (e^{-\lambda t} - e^{-(\lambda+x)t}) dt \right) d\psi^{(0)}(x) = \mu_1 \int_0^\infty \frac{d\psi^{(0)}(x)}{\lambda + x}.\end{aligned}$$

Escribimos la fórmula (2.53) para $i = 1, j = 0$ utilizando que $Q_1(x) = -(x - \lambda_0 - \mu_0)/\lambda_0$

$$\begin{aligned}\hat{F}_{10}(\lambda) &= \frac{\int_0^\infty \frac{Q_1(x) Q_0(x)}{\lambda + x} d\psi(x)}{\int_0^\infty \frac{Q_0^2(x)}{\lambda + x} d\psi(x)} = - \frac{\int_0^\infty \frac{(x - \lambda_0 - \mu_0) d\psi(x)}{\lambda_0(\lambda + x)}}{\int_0^\infty \frac{d\psi(x)}{\lambda + x}} \\ &= \frac{\lambda_0 + \mu_0}{\lambda_0} + \frac{1}{\lambda_0} \frac{\int_0^\infty \left[\frac{\lambda}{\lambda + x} - 1 \right] d\psi(x)}{\int_0^\infty \frac{d\psi(x)}{\lambda + x}} = \frac{1}{\lambda_0} \left[\lambda_0 + \mu_0 + \lambda - \left(\int_0^\infty \frac{d\psi(x)}{\lambda + x} \right)^{-1} \right].\end{aligned}$$

Combinando estas dos últimas ecuaciones tenemos que

$$\lambda_0 \mu_1 \int_0^\infty \frac{d\psi^{(0)}(x)}{\lambda + x} = \left[\lambda_0 + \mu_0 + \lambda - \left(\int_0^\infty \frac{d\psi(x)}{\lambda + x} \right)^{-1} \right], \quad (2.56)$$

en otras palabras,

$$\int_0^\infty \frac{d\psi(x)}{\lambda + x} = \left(\lambda_0 + \mu_0 + \lambda - \lambda_0 \mu_1 \int_0^\infty \frac{d\psi^{(0)}(x)}{\lambda + x} \right)^{-1}.$$

Intercambiando λ por $-z$ obtenemos que

$$B(z, \psi) = \frac{1}{\lambda_0 - \mu_0 - z - \lambda_0 \mu_1 B(z, \psi^{(0)})},$$

donde $B(z, \psi)$ es la transformada de Stieltjes de ψ definida en (1.1). Para $k \geq 0$ esta fórmula puede extenderse como

$$B(z, \psi^{(k-1)}) = \frac{\frac{1}{\lambda_k}}{\frac{\lambda_k + \mu_k - z}{\lambda_k} - \mu_{k+1} B(z, \psi^{(k)})}, \quad (2.57)$$

tomando $\psi^{(-1)} = \psi$.

Iterando esta fórmula e identificando los coeficientes de la misma forma que hicimos en el caso discreto, llegamos a que la transformada de Stieltjes, de la medida ψ asociada al proceso original y la de la medida $\psi^{(k)}$ asociada al proceso k -asociado se relacionan mediante la siguiente fórmula

$$B(z, \psi) = \frac{-\mu_k Q_{k-1}^{(0)}(z) B(z, \psi^{(k-1)}) + Q_k^{(0)}(z)}{\mu_k Q_{k-1}(z) B(z, \psi^{(k-1)}) - Q_k(z)}, \quad k \geq 1. \quad (2.58)$$

Podemos generalizar un poco esta fórmula aplicándola al proceso m -asociado, para cualquier $m \in \mathbb{N}_0$. Solo hay que tener cuidado con el factor $-\frac{1}{\lambda_m}$ al observar que para el proceso m -asociado los polinomios ortogonales asociados son $-\lambda_m Q_n^{(m)}$. Con esto en mente obtenemos que

$$B(z, \psi^{(m)}) = \left(\frac{1}{\lambda_m} \right) \frac{\mu_k Q_{k-1}^{(m+1)} B(z, \psi^{(k-1)}) - Q_k^{(m+1)}}{\mu_k Q_{k-1}^{(m)} B(z, \psi^{(k-1)}) - Q_k^{(m)}}, \quad k > m+1 \geq 0. \quad (2.59)$$

Esta fórmula nos permitirá más tarde obtener información probabilística para los procesos de colas de k servidores.

Otro uso de los polinomios k -asociados es que podemos escribir la transformada de Laplace $\hat{P}(\lambda)$ de la función de transición de probabilidad $P(t)$ únicamente en términos de estos polinomios y de $\hat{P}_{00}(\lambda)$. En efecto si $\hat{P}(\lambda)$ es la transformada de Laplace de la función de transición de probabilidad $P(t)$, entonces

$$-I + \lambda \hat{P}(\lambda) = \mathcal{A} \hat{P}(\lambda) = \hat{P}(\lambda) \mathcal{A}.$$

Una solución general de la ecuación anterior se obtiene sumando una solución particular de la ecuación $-I + \lambda \hat{P}(\lambda) = \mathcal{A} \hat{P}(\lambda) = \hat{P}(\lambda) \mathcal{A}$ con una solución general de la ecuación $\lambda \hat{P}(\lambda) = \mathcal{A} \hat{P}(\lambda)$. Por un lado una solución particular de $-I + \lambda \hat{P}(\lambda) = \mathcal{A} \hat{P}(\lambda) = \hat{P}(\lambda) \mathcal{A}$ está dada por

$$\hat{P}_{ij}(\lambda) = Q_i^{(j)}(-\lambda),$$

tal y como se puede verificar mediante la relación de recurrencia (2.50). Por otro lado, una solución general de $\lambda \hat{P}(\lambda) = \mathcal{A} \hat{P}(\lambda)$ está dada por

$$\hat{P}_{ij}(\lambda) = g_j(\lambda) Q_i(-\lambda),$$

donde $g_j(\lambda)$ es alguna función (que determinaremos más adelante). Por lo tanto la solución general de $-I + \lambda \hat{P}(\lambda) = \mathcal{A} \hat{P}(\lambda) = \hat{P}(\lambda) \mathcal{A}$ está dada por

$$\hat{P}_{ij}(\lambda) = Q_i^{(j)}(-\lambda) + g_j(\lambda) Q_i(-\lambda).$$

Ahora, como $Q_0^{(j)} = 0$ y $Q_0 = 1$, tomando $i = 1$ en la fórmula anterior obtenemos que $g_j(\lambda)$ debe de ser $\hat{P}_{0,j}(\lambda)$. Utilizando la simetría $\pi_i \hat{P}_{ij}(\lambda) = \pi_j \hat{P}_{ji}$ en la fórmula anterior con $i = 0$, tenemos que

$$g_j(\lambda) = \hat{P}_{0,j}(\lambda) = \pi_j \left(Q_j^{(0)}(-\lambda) + Q_j(-\lambda) \hat{P}_{00}(\lambda) \right).$$

Por lo tanto

$$\hat{P}_{ij}(\lambda) = Q_i^{(j)}(-\lambda) + \pi_j Q_i(-\lambda) \left(Q_j^{(0)}(-\lambda) + Q_j(-\lambda) \hat{P}_{00}(\lambda) \right). \quad (2.60)$$

En particular para $i \leq j$, tenemos que

$$\hat{P}_{ij}(\lambda) = \pi_j Q_i(-\lambda) \left(Q_j^{(0)}(-\lambda) + Q_j(-\lambda) \hat{P}_{00}(\lambda) \right).$$

En consecuencia, si $i < j$, utilizando (2.52), obtenemos que

$$\hat{F}_{ij}(\lambda) = \frac{\hat{P}_{ij}(\lambda)}{\hat{P}_{ii}(\lambda)} = \frac{Q_i(-\lambda)}{Q_j(-\lambda)}.$$

La fórmula (2.60) nos da otras fórmulas interesantes. Utilizando nuevamente la simetría $\pi_i \hat{P}_{ij} = \pi_j \hat{P}_{ji}$ obtenemos la siguiente relación

$$\pi_i Q_i^{(j)}(-\lambda) + \pi_i \pi_j Q_i(-\lambda) Q_j^{(0)}(-\lambda) = \pi_j Q_j^{(i)}(-\lambda) + \pi_j \pi_i Q_j(-\lambda) Q_i^{(0)}(-\lambda).$$

Para $i > j$, por ejemplo $j = n + i$, tenemos que $Q_i^{(n+i)} = 0$, y por lo tanto

$$\pi_i Q_i(-\lambda) Q_{n+1}^{(0)}(-\lambda) = Q_{n+1}^{(i)}(-\lambda) + \pi_i Q_{n+1}(-\lambda) Q_i^{(0)}(-\lambda).$$

En particular, para $n = 1$ utilizando que $Q_{k+1}^{(k)} = -\frac{1}{\lambda_k}$, tenemos que

$$Q_{i+1}(-\lambda)Q_i^{(0)}(-\lambda) - Q_i(-\lambda)Q_{i+1}^{(0)}(-\lambda) = -\frac{Q_{i+1}^{(i)}(-\lambda)}{\pi_i} = \frac{1}{\lambda_i \pi_i}.$$

Esta expresión puede ser escrita como

$$\frac{Q_{i+1}^{(0)}(-\lambda)}{Q_{i+1}(-\lambda)} = \frac{Q_i^{(0)}(-\lambda)}{Q_i(-\lambda)} - \frac{1}{\lambda_i \pi_i Q_{i+1}(-\lambda) Q_i(-\lambda)},$$

por lo que

$$\frac{Q_{i+1}^{(0)}(-\lambda)}{Q_{i+1}(-\lambda)} = -\sum_{k=0}^i \frac{1}{\lambda_k \pi_k Q_{k+1}(-\lambda) Q_k(-\lambda)}.$$

Aplicando el teorema 1.2.2 obtenemos que

$$\int_0^\infty \frac{d\psi(x)}{x + \lambda} = \sum_{k=0}^\infty \frac{1}{\lambda_k \pi_k Q_{k+1}(-\lambda) Q_k(-\lambda)}. \quad (2.61)$$

Haremos uso de los polinomios duales $Q_n^d(x)$ definidos por

$$Q_0^d(x) = 1, \quad Q_n^d(x) = \frac{1}{\lambda_n \pi_n} (Q_{n+1}(x) - Q_n(x)),$$

si $\mu_0 > 0$. Se puede probar que $Q_k^d(0) = 1$. Gracias a los polinomios duales también se obtiene la siguiente expresión

$$Q_n(0) = 1 + \mu_0 \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{\lambda_k \pi_k}, \quad \mu_0 \geq 0. \quad (2.62)$$

Para más detalles sobre los polinomios duales consúltese [5, Capítulo 3, Sección 3.3.1].

Si ahora tomamos el límite cuando $\lambda \rightarrow 0$ en (2.61) obtenemos

$$\int_0^\infty \frac{d\psi(x)}{x} = \frac{1}{\mu_0} \left(1 - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{Q_n(0)} \right).$$

Utilizando la expresión de $Q_n(0)$ (2.62), tenemos que

$$\int_0^\infty \frac{d\psi(x)}{x} = \frac{1}{\mu_0} \left(1 - \frac{1}{1 + \mu_0 \sum_{n=0}^\infty \frac{1}{\lambda_n \pi_n}} \right) = \frac{\sum_{n=0}^\infty \frac{1}{\lambda_n \pi_n}}{1 + \mu_0 \sum_{n=0}^\infty \frac{1}{\lambda_n \pi_n}}, \quad (2.63)$$

la última expresión sigue siendo válida para $\mu_0 = 0$.

2.2.3. Aspectos probabilísticos de los procesos de nacimiento y muerte

En esta sección supondremos que la medida ψ que hace ortogonales a los polinomios generados por la relación de recurrencia (2.44) es única. Recuérdese que una condición necesaria y suficiente viene dada en la Proposición 2.2.8. La unicidad de ψ en los casos que nosotros estudiaremos, es decir procesos de colas, estará garantizada. Como ψ será única, también existirá una única función de transición de probabilidad $P_{ij}(t, \psi)$ que satisfaga las ecuaciones de Kolmogorov. Enunciaremos los resultados para el caso $\mu_0 = 0$, pues este es el caso que corresponde a los procesos de colas. Si se quiere consultar resultados similares para el caso $\mu_0 > 0$, consultar [5, Sección 3.7].

Supongamos que el proceso de nacimiento y muerte estudiado $\{X_t \mid t \geq 0\}$ es irreducible, por lo cual estudiar la recurrencia dependerá únicamente de la recurrencia del estado 0 pues todos los estados pertenecerán a la misma clase de comunicación.

Teorema 2.2.11. *Supongamos que $\mu_0 = 0$. Los siguientes enunciados son equivalentes:*

1. *El proceso es recurrente.*

$$2. \int_0^\infty \frac{d\psi(x)}{x} = \infty.$$

$$3. \sum_{n=0}^\infty \frac{1}{\lambda_n \pi_n} = \infty.$$

$$4. \int_0^\infty \frac{d\psi^{(0)}(x)}{x} = \frac{1}{\mu_1}.$$

También son equivalentes:

1. *El proceso es positivo-recurrente.*

$$2. \text{La medida espectral } \psi \text{ tiene una masa discreta en el 0 de tamaño } \psi\{(0)\} = \left(\sum_{n=0}^\infty \pi_n \right)^{-1}.$$

$$3. \sum_{n=0}^\infty \pi_n < \infty$$

$$4. \int_0^\infty \frac{d\psi^{(0)}(x)}{x} = \frac{1}{\mu_1} \quad \text{y} \quad \int_0^\infty \frac{d\psi^{(0)}(x)}{x^2} < \infty.$$

Demostración. Dado que el proceso es irreducible, basta estudiar la recurrencia en un solo estado, por ejemplo en 0. Por la definición 2.2.7 el estado 0 es recurrente si y solo si $\lim_{\lambda \rightarrow 0^+} \hat{F}_{00}(\lambda) = \int_0^\infty dF_{00}(t) = 1$. Por la fórmula (2.53) aplicada a $i = j = 0$ esto es posible si y solo si $\lim_{\lambda \rightarrow 0^+} \int_0^\infty (\lambda + x)^{-1} d\psi(x) = \infty$. Por lo tanto se debe cumplir que $\int_0^\infty x^{-1} d\psi(x) = \infty$. La tercera equivalencia es consecuencia de (2.63). Para la última equivalencia hay que hacer tender λ a 0 en la ecuación (2.56) y tomar en cuenta que $\mu_0 = 0$.

El estado 0 es positivo recurrente por definición si el tiempo esperado de retorno al estado 0 es finito o equivalentemente si $\int_0^\infty tF_{00}(t) < \infty$. Si $\sum_{n=0}^\infty \pi_n < \infty$ entonces ψ tiene una masa en $x = 0$ y el tamaño del salto está dado por la fórmula (2.48), tomando en cuenta que $\mu_0 = 0$ y por lo tanto $Q_n(0) = 1$ para $n \geq 0$ (ver (2.62)), tenemos que $\psi(0) = (\sum_{n=0}^\infty \pi_n)^{-1}$ y $\lim_{t \rightarrow \infty} P_{ij}(t) = \psi(\{0\})\pi_j$. El primer momento de $F_{00}(t)$ está dado por $-\lim_{\lambda \rightarrow 0^+} \hat{F}'(\lambda)$. Por lo tanto, utilizando (2.52), obtenemos que

$$-\hat{F}'_{00}(\lambda) = -\frac{\hat{P}'_{00}(\lambda)}{(\lambda + \lambda_0)\hat{P}_{00}^2(\lambda)} - \frac{1}{(\lambda + \lambda_0)^2\hat{P}_{00}(\lambda)}.$$

El segundo término tiende a cero pues el proceso es recurrente, por lo que $\hat{P}_{00}(\lambda) \rightarrow \infty$ cuando $\lambda \rightarrow 0^+$. Por un lado

$$-\frac{\hat{P}_{00}(\lambda)}{\hat{P}_{00}^2(\lambda)} = \frac{\int_0^\infty \frac{d\psi(x)}{(\lambda+x)^2}}{\left(\int_0^\infty \frac{d\psi(x)}{\lambda+x}\right)^2} = \frac{\frac{\psi(\{0\})}{\lambda^2} + \int_0^\infty \frac{d\psi^+(x)}{(\lambda+x)^2}}{\left(\frac{\psi(\{0\})}{\lambda} + \int_0^\infty \frac{d\psi^+(x)}{\lambda+x}\right)^2},$$

donde ψ^+ denota la medida obtenida al remover la masa discreta en $x = 0$ a ψ . Por lo tanto ψ^+ es continua en $x = 0$. Multiplicando y dividiendo por λ^2 obtenemos que

$$\int_0^\infty t dF_{00}(t) = -\lim_{\lambda \rightarrow 0^+} \hat{F}'_{00}(\lambda) = \frac{1}{\lambda_0 \psi(\{0\})},$$

que es finito. Por otro lado, si el proceso es positivo recurrente, la cadena de Markov $P_{ii}(nh)$, con h fijo, es positivo recurrente. Entonces $\lim_{n \rightarrow \infty} P_{ii}(nh) = \psi(\{0\})\pi_j > 0$. Como $\psi(\{0\}) = (\sum_{n=0}^\infty \pi_n)^{-1}$ entonces $\sum_{n=0}^\infty \pi_n < \infty$. Para la última parte observemos gracias a (2.58) y (1.4) se tiene que

$$\psi(\{0\}) = -\lim_{z \rightarrow 0^+} B(z, \psi) = \lim_{\lambda \rightarrow 0^+} \frac{\lambda}{\lambda - \lambda_0 + \lambda_0 \mu_1 \int_0^\infty \frac{d\psi^{(0)}(x)}{x+\lambda}} = \frac{1}{1 + \lambda_0 \mu_1 \int_0^\infty \frac{d\psi^{(0)}(x)}{x^2}}.$$

La última parte fue consecuencia de la regla de l'Hôpital. Por lo tanto $\psi(\{0\}) > 0$ si y solo si $\int_0^\infty x^{-2} d\psi^{(0)}(x) < \infty$. Obsérvese que la última fórmula da una forma alternativa de calcular la masa discreta en $x = 0$ si el proceso es positivo-recurrente. \square

Capítulo 3

Familias de polinomios ortogonales y procesos de colas

En este capítulo iniciaremos el estudio de procesos de colas que son procesos de nacimiento y muerte donde las tasas de nacimiento λ_n son constantes positivas, esto es, $\lambda_n = \lambda > 0$, para cualquier $n \in \mathbb{N}_0$. En este caso el estado del proceso se interpreta como la cantidad de clientes en la cola para la cual los tiempos interarribo entre clientes tienen distribución exponencial de parámetro λ y los tiempos de servicio tienen distribución exponencial con parámetro μ_n donde n es la longitud de la cola.

3.1. El proceso de colas $M/M/\infty$

El primer caso que estudiaremos es una cola con infinitos servidores $M/M/\infty$. Es decir, que siempre que haga falta, abriremos un servidor para atender a todos los clientes en la cola simultáneamente. Esto es $\mu_n = n\mu$, para toda $n \in \mathbb{N}_0$ para alguna $\mu > 0$. Para este proceso los coeficientes potenciales quedan determinados por

$$\pi_j = \frac{\lambda^j}{\mu^j j!}, \quad j \geq 0.$$

Obsérvese que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n} = \infty, \quad B = \sum_{n=0}^{\infty} \pi_n = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n \frac{1}{n!} = e^{\frac{\lambda}{\mu}} \quad \text{y}$$
$$A = \sum_n \frac{1}{\lambda_n \pi_n} = \frac{1}{\lambda} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mu^n}{\lambda^n n!} = \infty.$$

La Proposición 2.2.2 y el Teorema 2.2.11 aseguran que no hay explosiones en tiempos finitos y que el proceso es positivo recurrente. Por los Teoremas 2.2.9 y 2.2.10, existe una única medida de nacimiento y muerte ψ para el

proceso $M/M/\infty$.

El operador infinitesimal de un proceso de colas con infinitos servidores, viene dado por:

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} -\lambda & \lambda & & & \\ \mu & -(\lambda + \mu) & \lambda & & \\ & 2\mu & -(\lambda + 2\mu) & \lambda & \\ & & 3\mu & -(\lambda + 3\mu) & \lambda \\ & & & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix}. \quad (3.1)$$

Obsérvese que gracias a la Proposición 2.2.8, como la serie $A = \infty$, entonces la serie $C = \infty$ y por lo tanto el operador \mathcal{A} define un único proceso de nacimiento y muerte. Deseamos ahora encontrar la representación integral (2.47) de este proceso. Para esto obsérvese que la relación de recurrencia que define a los polinomios de nacimiento y muerte en este caso es

$$\begin{aligned} Q_{-1}(x) &= 0, \quad Q_0 = 1, \\ -xQ_0(x) &= \lambda Q_1(x) - \lambda Q_0(x), \\ -xQ_n(x) &= \lambda Q_{n+1}(x) - (\lambda + n\mu)Q_n(x) + n\mu Q_{n-1}(x). \end{aligned} \quad (3.2)$$

Si llamamos $a = \frac{\lambda}{\mu}$ y dividimos la ecuación anterior entre μ , obtenemos que los polinomios $Q_n(x)$ satisfacen la ecuación de recurrencia

$$-\frac{x}{\mu} = aQ_{n+1}(x) - (a + n)Q_n(x) + nQ_{n-1}(x).$$

Como se pudo ver en el primer capítulo, esta relación de recurrencia es la que define a los polinomios de Charlier (véase (1.20)). Por lo que

$$Q_n(x) = C_n\left(\frac{x}{\mu}, \frac{\lambda}{\mu}\right).$$

La medida asociada a los polinomios de Charlier para $a = \frac{\lambda}{\mu}$ es

$$\psi(x) = \sum_{n \geq 0} \frac{e^{-a} a^n}{n!} \delta_{x_n}, \quad x_n = n\mu.$$

De hecho ψ es la única medida que hace ortogonales a los polinomios de Charlier. Por lo tanto la fórmula de representación (2.47) garantiza que la función de transición de probabilidad del proceso de colas con infinitos servidores es:

$$\begin{aligned} P_{ij}(t) &= \pi_j \int_0^\infty e^{-xt} Q_i(x) Q_j(x) d\psi \\ &= \frac{a^j}{j!} \sum_{n=0}^\infty e^{-n\mu t} Q_i(n\mu) Q_j(n\mu) e^{-a} \frac{a^n}{n!}. \end{aligned}$$

Cuando $j = 0$ esta fórmula se simplifica considerablemente utilizando la función generadora de los polinomios de Charlier (1.21) y la ecuación de simetría de estos (1.23):

$$P_{n,0} = e^{-a(1-e^{-\mu})}(1-e^{-\mu})^n.$$

3.2. El proceso de colas $M/M/k$

Estudiemos el caso de k servidores $M/M/k$ con $k \geq 1$, es decir que siempre que no se haya excedido el largo k de la cola, se abrirá un servidor para atender a todos los clientes simultáneamente. Si la cola es más larga que k se seguirá atendiendo con k servidores. Esto se traduce en que

$$\begin{aligned} \lambda_n &= \lambda, \\ \mu_n &= \begin{cases} n\mu, & \text{si } n \leq k, \\ k\mu, & \text{si } n \geq k. \end{cases} \end{aligned} \quad (3.3)$$

En este caso los coeficientes potenciales son

$$\pi_j = \frac{\lambda^j}{\mu^j(j!)}, \quad \text{si } j \leq k, \quad \text{y} \quad \pi_j = \frac{\lambda^j}{\mu^j(k!)k^{j-k}}, \quad \text{si } j > k. \quad (3.4)$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n} &= \infty, \quad \text{y} \quad B = \sum_{n=0}^{\infty} \pi_n = \sum_{n=0}^k \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n \frac{1}{n!} + \frac{k^k}{k!} \sum_{n=k+1}^{\infty} \left(\frac{\lambda}{k\mu}\right)^n, \\ A &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n \pi_n} = \frac{1}{\lambda} \sum_{n=0}^k \left(\frac{\mu}{\lambda}\right)^n \frac{1}{n!} + \frac{k!}{\lambda k^k} \sum_{n=k+1}^{\infty} \left(\frac{k\mu}{\lambda}\right)^n. \end{aligned}$$

La serie B converge si y solo si $\lambda < k\mu$ y la serie A diverge si y solo si $\lambda \leq k\mu$. Por la Proposición 2.2.2 y el Teorema 2.2.11, el proceso de colas con k servidores no tiene explosiones en tiempos finitos y es positivo recurrente si y solo si $k\mu > \lambda$. También podemos notar que es recurrente nulo cuando $k\mu = \lambda$. Por el Teorema 2.2.9 y el Teorema 2.2.10, existe una única medida de nacimiento y muerte ψ para el proceso $M/M/k$. En las siguientes secciones de este capítulo nos dedicaremos a calcular la medida ψ explícitamente.

El operador infinitesimal de un proceso de colas con k servidores como el descrito en el capítulo anterior, viene dado por:

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} -\lambda & \lambda & & & & & \\ \mu & -(\lambda + \mu) & \lambda & & & & \\ & 2\mu & -(\lambda + 2\mu) & \lambda & & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & & k\mu & -(\lambda + k\mu) & \lambda & \\ & & & & k\mu & -(\lambda + k\mu) & \lambda \\ & & & & & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix}. \quad (3.5)$$

También en este caso la Proposición 2.2.8, garantiza que existe un único proceso cuyo operador infinitesimal es \mathcal{A} pues C dado por (2.43) es claramente infinito pues los coeficientes potenciales son constantes a partir de k .

Los primeros $k + 1$ polinomios de nacimiento y muerte $Q_n(x)$ son exactamente los mismos que para el caso de infinitos servidores. Es decir que $Q_n(x) = C_n\left(\frac{x}{\mu}, \frac{\lambda}{\mu}\right)$ para $n \leq k$.

Para determinar los polinomios siguientes definamos la familia de polinomios $R_n(x) = Q_{k+n}(x)$ para $n \geq 0$. Esta satisface la relación de recurrencia:

$$\begin{aligned} R_{-1}(x) &= Q_{k-1}(x), \quad R_0(x) = Q_k(x), \\ -xR_n(x) &= \lambda R_{n+1}(x) - (\lambda + k\mu)R_n(x) + k\mu R_{n-1}(x), \end{aligned} \quad (3.6)$$

cuyos coeficientes no dependen de n . Esto nos permite expresar a la familia de polinomios $\{R_n(x)\}$ en función de los polinomios de Chevychev de primera especie $\{T_n(x)\}$ y de segunda especie $\{U_n(x)\}$. Como vimos en el capítulo 1, estos polinomios satisfacen la relación de recurrencia

$$-xP_n(x) = \frac{1}{2}P_{n-1}(x) + \frac{1}{2}P_{n+1}(x), \quad n \geq 1 \quad (3.7)$$

y

$$T_0(x) = 1, \quad T_1(x) = x, \quad U_0(x) = 1, \quad U_1(x) = 2x.$$

Los polinomios dados por:

$$\begin{aligned} V_n(x) &= \left(\frac{k\mu}{\lambda}\right)^{\frac{n}{2}} T_n(x) \left(\frac{\lambda + k\mu - x}{\sqrt{4k\lambda\mu}}\right), \\ W_n(x) &= \left(\frac{k\mu}{\lambda}\right)^{\frac{n}{2}} U_n(x) \left(\frac{\lambda + k\mu - x}{\sqrt{4k\lambda\mu}}\right), \end{aligned}$$

son solución de (3.7) tales que

$$V_{-1}(x) = \frac{\lambda + k\mu - x}{2k\mu}, \quad V_0(x) = 1, \quad W_{-1}(x) = 0, \quad W_0(x) = 1.$$

Por lo tanto podemos escribir a $R_n(x)$ como combinación lineal de estos polinomios de la siguiente manera

$$R_n(x) = v(x)V_n(x) + w(x)W_n(x), \quad (3.8)$$

para algunas funciones $v(x)$ y $w(x)$. Para determinarlas, evaluamos la fórmula anterior en $n = -1$ y en $n = 0$ y obtenemos que

$$Q_{k-1}(x) = R_{-1}(x) = v(x) \frac{\lambda + k\mu - x}{2k\mu},$$

es decir

$$v(x) = Q_{k-1}(x) \frac{2k\mu}{\lambda + k\mu - x},$$

y

$$Q_k(x) = R_0(x) = v(x) + w(x),$$

es decir

$$w(x) = Q_k(x) - \frac{2k\mu}{\lambda + k\mu - x} Q_{k-1}(x).$$

Remplazando estas funciones en (3.8) obtenemos que

$$R_n(x) = \frac{2k\mu}{\lambda + k\mu - x} Q_{k-1}(x) V_n(x) + \left(Q_k(x) - \frac{2k\mu}{\lambda + k\mu - x} Q_{k-1}(x) \right) W_n(x). \quad (3.9)$$

Utilizando la relación (1.19), podemos escribir a los polinomios $V_n(x)$ en función de los polinomios $W_n(x)$ como

$$\begin{aligned} V_n(x) &= \left(\frac{k\mu}{\lambda} \right)^{\frac{n}{2}} T_n \left(\frac{\lambda + k\mu - x}{\sqrt{4k\lambda\mu}} \right) \\ &= \left(\frac{k\mu}{\lambda} \right)^{\frac{n}{2}} \left[U_n \left(\frac{\lambda + k\mu - x}{\sqrt{4k\lambda\mu}} \right) - \left(\frac{\lambda + k\mu - x}{\sqrt{4k\lambda\mu}} \right) U_{n-1} \left(\frac{\lambda + k\mu - x}{\sqrt{4k\lambda\mu}} \right) \right] \\ &= W_n(x) - \frac{\lambda + k\mu - x}{2\lambda} W_{n-1}(x). \end{aligned}$$

Remplazando $V_n(x)$ en (3.9) obtenemos que

$$R_n(x) = Q_k(x) W_n(x) - \frac{k\mu}{\lambda} Q_{k-1}(x) W_{n-1}(x).$$

Por lo tanto, una expresión para los polinomios es

$$Q_{k+n}(x) = \left(\frac{k\mu}{\lambda}\right)^{\frac{n}{2}} \left[Q_k(x) U_n(x) \left(\frac{\lambda + k\mu - x}{\sqrt{4k\lambda\mu}} \right) - \sqrt{\frac{k\mu}{\lambda}} Q_{k-1}(x) U_{n-1}(x) \left(\frac{\lambda + k\mu - x}{\sqrt{4k\lambda\mu}} \right) \right], \quad n \geq 0. \quad (3.10)$$

De forma análoga podemos obtener que

$$Q_{k+n}^{(0)}(x) = \left(\frac{k\mu}{\lambda}\right)^{\frac{n}{2}} \left[Q_k^{(0)}(x) U_n(x) \left(\frac{\lambda + k\mu - x}{\sqrt{4k\lambda\mu}} \right) - \sqrt{\frac{k\mu}{\lambda}} Q_{k-1}^{(0)}(x) U_{n-1}(x) \left(\frac{\lambda + k\mu - x}{\sqrt{4k\lambda\mu}} \right) \right], \quad n \geq 0. \quad (3.11)$$

Ahora calcularemos de forma explícita la medida espectral de este tipo de procesos. Para esto observemos que al remover las primeras k columnas y los primeros k renglones a la matriz \mathcal{A} descrita en (3.5), los coeficientes de la tridiagonal son constantes. Por lo tanto $B(z, \psi^{(k-1)}) = B(z, \psi^{(k)})$. Aplicando la fórmula (2.57) obtenemos que

$$B(z, \psi^{(k-1)}) = \frac{\lambda + k\mu - z - \sqrt{(\lambda + k\mu - z)^2 - 4k\lambda\mu}}{2k\lambda\mu}. \quad (3.12)$$

Remplazando esta expresión en la fórmula (2.58), racionalizando y utilizando la identidad (2.51), podemos llegar a que

$$B(z, \psi) = -\frac{L_k(z)}{H_k(z)},$$

donde

$$\begin{aligned} L_k(z) &= 4\lambda^2 Q_k(z) Q_k^{(0)}(z) + 4k\lambda\mu Q_{k-1}(z) Q_{k-1}^{(0)}(z) \\ &\quad - 2\lambda(\lambda + k\mu - z) [Q_k(z) Q_{k-1}^{(0)}(z) + Q_k^{(0)}(z) + Q_{k-1}(z)] \\ &\quad + 2(k-1)! \left(\frac{\mu}{\lambda}\right)^{k-1} \sqrt{(\lambda + k\mu - z)^2 - 4k\lambda\mu} \\ &= 4\lambda^2 \left[Q_k(z) Q_k^{(0)}(z) - \frac{1}{2} (Q_{k+1}(z) Q_{k-1}^{(0)}(z) + Q_{k+1}^{(0)}(z) Q_{k-1}(z)) \right] \\ &\quad + 2(k-1)! \left(\frac{\mu}{\lambda}\right)^{k-1} \sqrt{(\lambda + k\mu - z)^2 - 4k\lambda\mu}, \end{aligned} \quad (3.13)$$

y

$$\begin{aligned} H_k(z) &= 4\lambda^2 [Q_k^2(z) - Q_{k-1}(z) Q_{k+1}(z)] \\ &= 4k\lambda\mu [Q_{k-1}^2(z) - Q_{k-2}(z) Q_k(z)] - 4\lambda\mu Q_k(z) [Q_{k-1}(z) - Q_{k-2}(z)]. \end{aligned} \quad (3.14)$$

Observemos la estructura de esta transformada de Stieltjes. En el numerador tenemos a la función $L_k(z)$ que consta de una parte polinomial de grado $2k-1$ y una parte no polinomial. En el denominador tenemos a $H_k(z)$ que es un polinomio de grado $2k$. Aquí entra en juego la fórmula de inversión de Perron-Stieltjes. Por lo que dijimos en el capítulo 1, los únicos candidatos posibles para que la medida tenga una masa discreta son los polos de $B(z, \psi)$, es

decir los ceros de $H_k(z)$. En el resto, la medida será absolutamente continua y estará dada por la fórmula (1.3), es decir

$$\hat{\psi}(x) = \frac{(k-1)!}{2\pi\lambda^2} \left(\frac{\mu}{\lambda}\right)^{k-1} \frac{\sqrt{4k\lambda\mu - (\lambda + k\mu - x)^2}}{[Q_k^2(x) - Q_{k-1}(x)Q_{k+1}(x)]}, \quad (3.15)$$

si $|\lambda + k\mu - x| \leq \sqrt{4k\lambda\mu}$ y cero en otro caso.

Procederemos ahora a obtener información más precisa sobre las posibles masas discretas de la medida ψ .

La fórmula (2.57) nos da la transformada de Stieltjes de $\psi^{(n-1)}$ en función de la de $\psi^{(n)}$

$$B(z, \psi^{(n-1)}) = \frac{1}{\lambda + n\mu - z - (n+1)\lambda\mu B(z, \psi^{(n)})}. \quad (3.16)$$

Gracias a la fórmula (3.12) podemos notar que $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \text{Im}B(x + i\varepsilon, \psi^{(k-1)}) > 0$ en el intervalo $s_0 = \lambda + k\mu - \sqrt{4k\lambda\mu} < x < \lambda + k\mu + \sqrt{4k\lambda\mu} = s_1$ pues es ahí donde el término dentro de la raíz cuadrada es negativo. Por inducción obtenemos que $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \text{Im}B(x + i\varepsilon, \psi^{(n)}) > 0$ para toda $-1 \leq n \leq k-1$, donde $\psi^{(-1)}$ denota a la medida ψ del proceso original. Por lo tanto $\psi^{(n)}(x)$ tiene una parte absolutamente continua en ese intervalo para toda $-1 \leq n \leq k-1$. De (3.16) podemos ver que $\psi^{(n-1)}$ tiene un salto en cada valor $x = z$ donde z es un cero simple del denominador $\lambda + n\mu - z - (n+1)\lambda\mu B(z, \psi^{(n)})$. Estos saltos no pueden ocurrir en el interior del intervalo donde las medidas son absolutamente continuas pues la parte imaginaria del denominador es negativa y no pueden ocurrir en los extremos del intervalo pues ahí $B(z, \psi^{(k-1)})$ y por inducción cada $B(z, \psi^{(n)})$ con $-1 \leq n \leq k-1$ tienen singularidades que no son polos. Por (3.12), $\psi^{(k-1)}(x)$ no tiene saltos. Podemos deducir también que $B(z, \psi^{(k-1)})$ es estrictamente creciente en $(-\infty, s_0]$ y estrictamente decreciente en $[s_1, +\infty)$ como se ilustra en la siguiente gráfica.

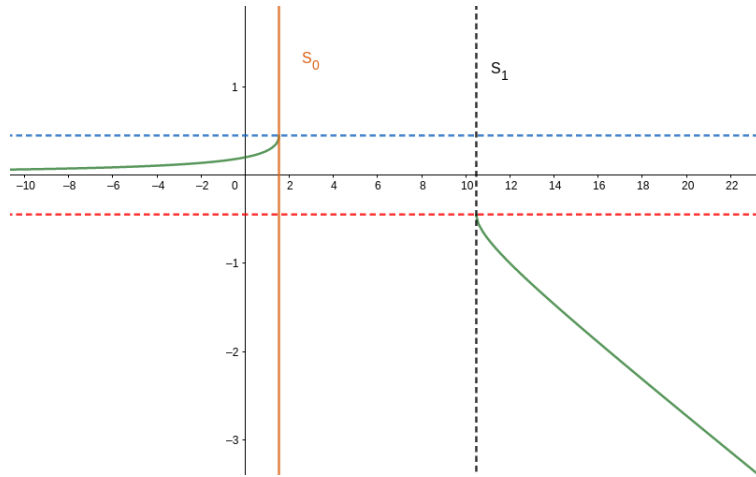


Figura 3.1: $B(x, \psi^{(k-1)})$ con $\lambda = \mu = 1$ y $k = 5$.

Procedamos a localizar los saltos de la medida $\psi^{(k-2)}(x)$. Para esto busquemos los puntos de intersección de la

recta $y = \lambda + (k-1)\mu - x$ y la gráfica de $y = k\lambda\mu B(x, \psi^{(k-1)})$. Definamos la función $h(x) = \lambda + (k-1)\mu - x - k\lambda\mu B(x, \psi^{(k-1)})$ y estudiemos cuando se anula si es que se anula. Por la fórmula (3.12) tenemos que

$$h(x) = \lambda + (k-1)\mu - x - \frac{1}{2} \left(\lambda + k\mu - x - \sqrt{(\lambda + k\mu - x)^2 - 4k\lambda\mu} \right)$$

y por lo tanto

$$h'(x) = -\frac{1}{2} - \frac{\lambda + k\mu - x}{\sqrt{(\lambda + k\mu - x)^2 - 4k\lambda\mu}}.$$

Cuando $x < s_0 = \lambda + k\mu - \sqrt{4k\lambda\mu}$, se tiene que $\lambda + k\mu - x > \sqrt{4k\lambda\mu} > 0$. Por lo tanto $h'(x) < 0$. Es decir que $h(x)$ es estrictamente decreciente en el intervalo $(-\infty, s_0]$. Si evaluamos la fórmula (3.12) en $z = s_0$ tenemos que

$$h(s_0) = \lambda + (k-1)\mu - s_0 - k\lambda\mu B(s_0, \psi^{(k-1)}) = -\mu + \sqrt{k\lambda\mu}. \quad (3.17)$$

Por lo tanto $h(x)$ se anula una única vez en el intervalo $(-\infty, s_0]$ si $-\mu + \sqrt{k\lambda\mu} < 0$ o equivalentemente si $k\lambda < \mu$ y no se anula en $(-\infty, s_0]$ en caso contrario.

Cuando $x > s_1 = \lambda + k\mu + \sqrt{4k\lambda\mu}$, se tiene que $\lambda + k\mu - x < -\sqrt{4k\lambda\mu} < 0$. Podemos reescribir y acotar a $h(x)$ de la siguiente manera

$$\begin{aligned} h(x) &= \frac{1}{2} \left[(\lambda + k\mu - 2\mu) - x - \sqrt{(\lambda + k\mu - x)^2 - 4k\lambda\mu} \right] \\ &\leq \frac{1}{2} \left[\lambda + k\mu - 2\mu - x + \sqrt{(\lambda + k\mu - x)^2} \right] \\ &= \frac{1}{2} [\lambda + k\mu - 2\mu - x - \lambda - k\mu + x] = -\mu. \end{aligned}$$

Por lo tanto $h(x)$ no se anula en el intervalo $[s_1, \infty)$. Podemos entonces afirmar que la medida $\psi^{(k-2)}$ tiene un y solamente un salto solo cuando $\mu > k\lambda$. Es sencillo verificar que cuando $\mu > k\lambda$, el salto se encuentra en el valor $x = (k-1)(\mu - \lambda)$.

Probemos ahora que ninguna de las medidas $\psi^{(n)}$ con $0 \leq n \leq k-1$ tiene saltos del lado derecho del intervalo de continuidad $[s_0, s_1]$. Ya lo hemos probado para $\psi^{(k-1)}$ y $\psi^{(k-2)}$, probémoslo ahora por inducción para el resto de las $\psi^{(n)}$. Supongamos que para cualquier r tal que $n \leq r \leq k-2$, $\psi^{(r)}$ no tiene saltos a la derecha de s_1 y que $B(s_1, \psi^{(r)})$ es finito, negativo y mayor que $-\sqrt{k\lambda\mu}$. Esto es válido para $k-2$ pues $B(s_1, \psi^{(k-2)}) = -(\mu + \sqrt{k\lambda\mu})^{-1}$. Por (3.16)

$$B(s_1, \psi^{(n-1)}) = \frac{1}{(n-k)\mu - \sqrt{4k\lambda\mu} - (n+1)\lambda\mu B(s_1, \psi^{(n)})},$$

y por lo asumido para n tenemos que $B(s_1, \psi^{(n-1)})$ es finito, negativo y mayor que $-\sqrt{k\lambda\mu}$. Como $B(s, \psi^{(n)})$ es estrictamente decreciente a la derecha de s_1 entonces el denominador de $B(x, \psi^{(n-1)})$ no se anula para valores

mayores a s_1 , por lo tanto $\psi^{(n-1)}$ no tiene saltos a la derecha de s_1 . Esto completa la inducción.

Supongamos ahora que para λ y μ fijos la medida $\psi^{(n)}$ con $-1 \leq n \leq k-2$, tiene exactamente r saltos. Digamos que estos saltos se encuentran en los puntos $x_1 < x_2 < \dots < x_r$. Por lo tanto $x_r < s_0$. En cada uno de los intervalos $-\infty < z < x_1, x_1 < z < x_2, \dots, x_{r-1} < z < x_r$, la función $(n+1)\lambda\mu B(z, \psi^{(n)})$ crece a $+\infty$ y por lo tanto interseca a la gráfica de $y = \lambda + k\mu - z$ una sola vez. Por consiguiente $\psi^{(n-1)}$ tiene exactamente un salto en cada uno de estos intervalos. En el intervalo $x_r < z < s_0$, la función $(n+1)\lambda\mu B(z, \psi^{(n)})$ crece de forma estricta desde $-\infty$ hasta su posible valor finito en s_0 , por lo cual $\psi^{(n-1)}$ puede tener a lo más un salto en este intervalo. Entonces $\psi^{(n-1)}$ tiene r o $r+1$ saltos. Se sigue que para cualquier $-1 \leq n \leq k-2$, $\psi^{(n)}$ tiene a lo más $k-1-n$ saltos.

Aplicando (3.16) para $z = s_0$, tenemos que

$$B(s_0, \psi^{(n-1)}) = \frac{1}{(n-k)\mu + \sqrt{4\lambda\mu} - (n+1)\lambda\mu B(s_0, \psi^{(n)})}. \quad (3.18)$$

Por lo tanto una condición necesaria y suficiente para que $\psi^{(n-1)}$ tenga un salto más que $\psi^{(n)}$ es que la cantidad anterior sea negativa. Aplicando (3.17) tenemos que

$$B(s_0, \psi^{(k-2)}) = \frac{1}{\sqrt{k\lambda\mu} - \mu},$$

lo cual nos sirve como base de inducción para probar que para $n \leq k-2$,

$$B(s_0, \psi^{(n-1)}) \sim -\frac{1}{(k-n)\mu},$$

cuando $\mu \rightarrow \infty$ y λ fijo. En efecto, si consideramos válida la propiedad para n , es decir

$$B(s_0, \psi^{(n)}) \sim -\frac{1}{(k-n-1)\mu}, \quad \text{cuando } \mu \rightarrow \infty,$$

por la relación (3.18), tenemos que

$$B(s_0, \psi^{(n-1)}) = \frac{1}{(n-k)\mu + \sqrt{4\lambda\mu} - (n+1)\lambda\mu B(s_0, \psi^{(n)})} \sim \frac{1}{(n-k)\mu + \sqrt{4\lambda\mu} + \frac{n+1}{k-n-1}\lambda}.$$

Como

$$\lim_{\mu \rightarrow \infty} \frac{(n-k)\mu + \sqrt{4\lambda\mu} + \frac{n+1}{k-n-1}\lambda}{(n-k)\mu} = 1,$$

concluimos que

$$B(s_0, \psi^{(n-1)}) \sim -\frac{1}{(k-n)\mu}, \quad \text{cuando } \mu \rightarrow \infty.$$

Por consiguiente, para cualquier λ fijo, $\psi^{(n)}$ tiene $k-1-n$ saltos para μ suficientemente grande. Se sigue también por inducción que para cada $n \leq k-2$,

$$0 < \lim_{\mu \rightarrow 0} \sqrt{\mu} B(s_0, \psi^{(n)}) < \sqrt{k\lambda}.$$

En consecuencia para λ fijo $\psi^{(n)}$ no tiene saltos para μ suficientemente pequeño.

Para un trato más preciso sobre el número de saltos de $\psi^{(n)}$ vale la pena hacer uso de los polinomios n -asociados a la cadena de nacimiento y muerte definidos para $n = -1$ como

$$Q_r^{(-1)}(x) = -\frac{1}{\lambda} Q_r(x),$$

y como

$$\begin{aligned} Q_r^{(n)}(x) &= 0 \text{ si } r \leq n \\ Q_{n+1}^{(n)}(x) &= -\frac{1}{\lambda} \\ xQ_r^{(n)}(x) &= \mu_r Q_{r-1}^{(n)}(x) - (\lambda + \mu_r) Q_r^{(n)}(x) + \lambda Q_{r+1}^{(n)}(x), \text{ para } r \geq n+1, \end{aligned} \quad (3.19)$$

para $n \geq 0$ y μ_r está dado por (3.3). La fórmula (2.59) en este caso se escribe como

$$B(z, \psi^{(n-1)}) = \left(\frac{1}{\lambda} \right) \frac{k\mu Q_{k-1}^{(n)}(z) B(z, \psi^{(k-1)}) - Q_k^{(n)}(z)}{k\mu Q_{k-1}^{(n-1)}(z) B(z, \psi^{(k-1)}) - Q_k^{(n-1)}(z)}. \quad (3.20)$$

En términos de la variable $b = \frac{\mu}{\lambda}$, tenemos que

$$s_0 = \lambda \left(1 - \sqrt{kb} \right)^2, \quad y \quad k\mu B(s_0, \psi^{(k-1)}) = \sqrt{kb}.$$

Si definimos

$$P_r^{(n)}(\sqrt{b}) = -\left(\frac{1}{\lambda} \right) b^{-\frac{(r-n-1)}{2}} Q_r^{(n)} \left(\lambda (1 - \sqrt{kb})^2 \right),$$

podemos expresar a $B(s_0, \psi^{(n-1)})$ como

$$B(s_0, \psi^{(n-1)}) = \left(\frac{1}{\lambda} \right) \frac{P_k^{(n)}(\sqrt{b}) - \sqrt{k} P_{k-1}^{(n)}(\sqrt{b})}{P_k^{(n-1)}(\sqrt{b}) - \sqrt{k} P_{k-1}^{(n-1)}(\sqrt{b})}. \quad (3.21)$$

Las cantidades $P_r^{(n)}(\xi)$, satisfacen la relación de recurrencia

$$\begin{aligned} P_n^{(n)}(\xi) &= 0, \quad P_{n+1}^{(n)}(\xi) = 1, \\ -(k-r)\xi P_r^{(n)}(\xi) &= rP_{r-1}^{(n)}(\xi) - 2\sqrt{k}P_r^{(n)}(\xi) + P_{r+1}^{(k)}(\xi), \text{ para } n+1 \leq r \leq k. \end{aligned} \quad (3.22)$$

Por lo tanto, para n fija, $P_r^{(n)}(\xi)$, con $n+1 \leq r \leq k$ define una colección finita de polinomios ortogonales cuya familia 0-asociada es $P_r^{(n+1)}(\xi)$ con $n+2 \leq r \leq k$. Podemos escribir (3.22) como

$$P_{r+1}^{(n)} - \sqrt{k}P_r^{(n)} = \sqrt{k} \left[P_r^{(n)} - \sqrt{k}P_{r-1}^{(n)} \right] + (k-r) \left[P_{r-1}^{(n)} - \xi P_r^{(n)} \right].$$

Se puede probar por inducción que $P_r^{(n)}(\xi)$ y $P_r^{(n)} - \sqrt{k}P_{r-1}^{(n)}$ son estrictamente positivos para $\xi \leq 0$ y $n+1 \leq r \leq k$.

El polinomio

$$G_k^{(n-1)}(\xi) = P_k^{(n-1)}(\xi) - \sqrt{k}P_{k-1}^{(n-1)}(\xi),$$

es cuasi-ortogonal y de grado $k-n$, perteneciente a la familia de polinomios $P_r^{(n-1)}(\xi)$, y cuyo polinomio asociado correspondiente es $G_k^{(n)}(\xi)$. En consecuencia $G_k^{(n-1)}(\xi)$, tiene exactamente $k-n$ raíces positivas distintas, digamos $\xi_1^{(n-1)}, \xi_2^{(n-1)}, \dots, \xi_{k-n}^{(n-1)}$, de tal forma que las $k-n-1$ raíces de $G_k^{(n)}(\xi)$ se ubican en los intervalos abiertos $(\xi_i^{(n-1)}, \xi_{i+1}^{(n-1)})$. Este último párrafo requiere de la definición de polinomios cuasi-ortogonales así como un teorema sobre la ubicación de sus ceros. Estos elementos se pueden encontrar en la Definición 1 y en el Teorema 2 de [3].

Podemos ver que la única raíz de $G_k^{(k-2)}(\xi)$ es $\xi_1^{(k-2)} = \sqrt{k}$. Ya sabemos que $\psi^{(k-2)}$ tiene un salto si $\sqrt{b} > \xi_1^{(k-2)}$, y no tiene salto si $\sqrt{b} \leq \xi_1^{(k-2)}$. Supongamos que ha sido establecido que $\psi^{(n)}$ no tiene saltos si $\sqrt{b} \leq \xi_1^{(n)}$, que tiene r saltos si $\xi_r^{(n)} < \sqrt{b} < \xi_{r+1}^{(n)}$, y que tiene $k-n-1$ saltos si $\sqrt{b} > \xi_{k-n-1}^{(n)}$. Ya sabemos que $\psi^{(n-1)}$ tiene o bien el mismo número de saltos que $\psi^{(n)}$ o bien un salto más. Además ya hemos visto que tiene un salto más si y solo si

$$B(s_0, \psi^{(n-1)}) = \left(\frac{1}{\lambda \sqrt{b}} \right) \frac{G_k^{(n)}(\sqrt{b})}{G_k^{(n-1)}(\sqrt{b})},$$

es una cantidad finita y negativa. Por lo tanto de la propiedad de entrelazamiento de los ceros de $G_k^{(n)}$ y de $G_k^{(n-1)}$ tenemos que $\psi^{(n-1)}$ no tiene saltos si $\sqrt{b} \leq \xi_1^{(n-1)}$, tiene r saltos si $\xi_r^{(n-1)} < \sqrt{b} < \xi_{r+1}^{(n-1)}$ y tiene $(k-n)$ si $\xi_{k-n}^{(n-1)} > \sqrt{b}$.

Hemos probado que $\psi^{(n-1)}$ tiene tantos saltos como raíces del polinomio $G_k^{(n-1)}(\xi)$ que sean menores a \sqrt{b} . Esto nos da en particular cuantos saltos tiene la medida $\psi = \psi^{(-1)}$. Terminaremos esta sección resumiendo todo lo que sabemos de la medida espectral ψ en el siguiente

Teorema 3.2.1. *La medida espectral ψ asociada al proceso de colas cuyo operador infinitesimal es \mathcal{A} en (3.5), tiene una parte absolutamente continua dada por la fórmula (3.15), tiene tantos saltos como raíces tenga el polinomio*

$$\begin{aligned} G_k^{(-1)}(\xi) &= P_k^{(-1)}(\xi) - \sqrt{k}P_{k-1}^{(-1)}(\xi) \\ &= \xi^{-k} \left[Q_k(\lambda(1 - \xi\sqrt{k})^2) - \xi\sqrt{k}Q_{k-1}(\lambda(1 - \xi\sqrt{k})^2) \right], \end{aligned} \tag{3.23}$$

que sean menores que \sqrt{b} , donde $G_k^{(-1)}(\xi)$ es un polinomio en la variable $\xi = \sqrt{\frac{\mu}{\lambda}}$. Además podemos calcular la masa discreta en el cero (si es que la hay) mediante la fórmula

$$\psi(\{0\}) = \left(\sum_{n=0}^{k-1} \frac{1}{n!} \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^n + \frac{1}{k!} \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^k \left(\frac{k\mu}{k\mu - \lambda} \right) \right)^{-1}. \quad (3.24)$$

Demostración. Ya hemos probado la mayoría de afirmaciones de este Teorema, solo falta probar (3.24). Basta recordar el Teorema 2.2.11, el cual afirma que ψ tiene una masa discreta en $x = 0$ si y solo si el proceso es positivo recurrente, si y solo si $k\mu > \lambda$ y está dada por $\psi(\{0\}) = (\sum_{n=0}^{\infty} \pi_n)^{-1}$. Sustituyendo los valores de los coeficientes potenciales (3.4) obtenemos que

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \pi_n &= \sum_{n=0}^k \frac{1}{n!} \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^n + \frac{k^k}{k!} \sum_{n=k+1}^{\infty} \left(\frac{\lambda}{k\mu} \right)^n \\ &= \sum_{n=0}^k \frac{1}{n!} \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^n + \frac{k^k}{k!} \left[\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\lambda}{k\mu} \right)^n - \sum_{n=0}^k \left(\frac{\lambda}{k\mu} \right)^n \right] \\ &= \sum_{n=0}^k \frac{1}{n!} \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^n + \frac{k^k}{k!} \left[\frac{1}{1 - \frac{\lambda}{k\mu}} - \frac{1 - \left(\frac{\lambda}{k\mu} \right)^{k+1}}{1 - \frac{\lambda}{k\mu}} \right] \\ &= \sum_{n=0}^{k-1} \frac{1}{n!} \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^n + \frac{1}{k!} \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^k \left(\frac{k\mu}{k\mu - \lambda} \right). \end{aligned}$$

□

Aunque este resultado no nos dice exactamente donde se encuentran las masas discretas de ψ nos ayuda mucho a entender cuantas masas discretas debemos de esperar. Más adelante aplicaremos esto a algunos casos particulares.

Obsérvese que cualquier medida que haga ortogonales a los polinomios generados a partir de \mathcal{A} mediante la relación de recurrencia a tres términos tiene que tener la forma descrita anteriormente y por lo tanto es única. Otra manera de probar la unicidad de ψ es notar que en el caso de k servidores, J define un operador de Jacobi acotado y por lo tanto podemos aplicar el Teorema de Favard 1.3.3. Una tercer manera de probar la unicidad de ψ es notar que si la serie A en (2.43) converge, entonces $k\mu < \lambda$ y por lo tanto B en (2.43) diverge y viceversa, es decir si B converge entonces A diverge. Entonces $A + B = \infty$ y por el Teorema 2.2.10, ψ es única.

3.2.1. Caso particular 1 servidor

En el caso particular de 1 servidor, es decir $k = 1$, los primeros polinomios asociados al proceso y al proceso 0-asociado son:

$$Q_0(x) = 1, \quad Q_1(x) = \frac{\lambda - x}{\lambda}, \quad Q_2(x) = \frac{(\lambda + \mu - x)(\lambda - x)}{\lambda^2} - \frac{\mu}{\lambda},$$

y

$$Q_0^{(0)}(x) = 0, \quad Q_1^{(0)}(x) = -\frac{1}{\lambda}, \quad Q_2^{(0)}(x) = -\frac{\lambda + \mu - x}{\lambda^2}.$$

Utilizando las fórmulas (3.13) y (3.14) tenemos que la transformada de Stieltjes viene dada por

$$B(z, \psi) = -\frac{L_1(z)}{H_1(z)} = \frac{\lambda - \mu - z - \sqrt{(\lambda + \mu - z)^2 - 4\lambda\mu}}{2\mu z}.$$

De aquí podemos darnos cuenta que si ψ tiene alguna masa discreta, esta tiene que encontrarse en el único polo de $B(z, \psi)$ que se encuentra en el origen. La fórmula (1.4), nos permite calcular este salto como sigue

$$\psi(\{0\}) = \lim_{\varepsilon \rightarrow \infty} \varepsilon B(i\varepsilon, \psi) = \frac{1}{2\lambda} [(\mu - \lambda) + |\mu - \lambda|] = \begin{cases} 0, & \text{si } \mu \leq \lambda, \\ \frac{\mu - \lambda}{\mu}, & \text{si } \mu \geq \lambda. \end{cases}$$

La parte absolutamente continua de ψ está dada por la fórmula (3.15) para $k = 1$, esto es

$$\hat{\psi}(x) = \frac{\sqrt{4\lambda\mu - (\lambda + \mu - x)^2}}{2\pi\mu x},$$

para $|\lambda + \mu - x| \leq \sqrt{4\lambda\mu}$. Por lo tanto la medida espectral del proceso $M/M/1$ es

$$\psi(x) = \frac{\sqrt{4\lambda\mu - (\lambda + \mu - x)^2}}{2\pi\mu x} \mathbb{1}_{\{|\lambda + \mu - x| \leq \sqrt{4\lambda\mu}\}} + \frac{\mu - \lambda}{\mu} \delta_0(x) \mathbb{1}_{\{\lambda < \mu\}},$$

donde $\mathbb{1}$ representa la función indicadora, la cual vale 1 si las variables satisfacen la condición entre paréntesis y 0 en otro caso. Con el fin de hacer más concisa la notación seguiremos utilizando esta función a lo largo del texto.

Otra manera de confirmar que la medida ψ solo tiene un salto cuando $\lambda < \mu$ es calculando el polinomio (3.23)

$$G_1^{(-1)}(\xi) = 1 - \xi,$$

el cual solo tiene una raíz menor a $\sqrt{b} = \sqrt{\frac{\mu}{\lambda}}$ si $\lambda < \mu$.

La fórmula (3.10) para $k = 1$ permite calcular los polinomios asociados a este proceso en función de los polinomios de Chevychev.

$$Q_n(x) = \left(\frac{\mu}{\lambda}\right)^{\frac{n-1}{2}} \left[\frac{\lambda - x}{\lambda} U_{n-1}\left(\frac{\lambda + \mu - x}{\sqrt{4\lambda\mu}}\right) - \sqrt{\frac{\mu}{\lambda}} U_{n-2}\left(\frac{\lambda + \mu - x}{\sqrt{4\lambda\mu}}\right) \right], \quad n \geq 0. \quad (3.25)$$

Gracias a la relación de recurrencia que define a los polinomios de Chevychev de segunda especie (1.17), podemos reescribir el polinomio $U_{n-2}(x)$ en función de $U_n(x)$ y $U_{n-1}(x)$. Haciendo esta sustitución en la fórmula anterior obtenemos que

$$\begin{aligned}
Q_n(x) &= \left(\frac{\mu}{\lambda}\right)^{\frac{n-1}{2}} \left[\frac{\lambda-x}{\lambda} U_{n-1} \left(\frac{\lambda+\mu-x}{\sqrt{4\lambda\mu}} \right) - \sqrt{\frac{\mu}{\lambda}} U_{n-2} \left(\frac{\lambda+\mu-x}{\sqrt{4\lambda\mu}} \right) \right] \\
&= \left(\frac{\mu}{\lambda}\right)^{\frac{n-1}{2}} \left[\frac{\lambda-x}{\lambda} U_{n-1} \left(\frac{\lambda+\mu-x}{\sqrt{4\lambda\mu}} \right) - 2\sqrt{\frac{\mu}{\lambda}} \left(\frac{\lambda+\mu-x}{\sqrt{4\lambda\mu}} U_{n-1} \left(\frac{\lambda+\mu-x}{\sqrt{4\lambda\mu}} \right) - U_n \left(\frac{\lambda+\mu-x}{\sqrt{4\lambda\mu}} \right) \right) \right] \\
&= \left(\frac{\mu}{\lambda}\right)^{\frac{n}{2}} \left[U_n \left(\frac{\lambda+\mu-x}{\sqrt{4\lambda\mu}} \right) - \sqrt{\frac{\mu}{\lambda}} U_{n-1} \left(\frac{\lambda+\mu-x}{\sqrt{4\lambda\mu}} \right) \right], \quad n \geq 0.
\end{aligned}$$

3.2.2. Caso particular 2 servidores

En el caso de dos servidores $k = 2$, tenemos que los primeros polinomios, son idénticos al caso de 1 servidor, es decir:

$$Q_0(x) = 1, \quad Q_1(x) = \frac{\lambda-x}{\lambda}, \quad Q_2(x) = \frac{(\lambda+\mu-x)(\lambda-x)}{\lambda^2} - \frac{\mu}{\lambda},$$

y

$$Q_0^{(0)}(x) = 0, \quad Q_1^{(0)}(x) = -\frac{1}{\lambda}, \quad Q_2^{(0)}(x) = \frac{\lambda+\mu-x}{\lambda^2}.$$

Esto nos basta para calcular la transformada de Stieltjes de la medida espectral asociada al proceso mediante las fórmulas (3.13) y (3.14) con $k = 2$. Obtenemos que:

$$L_2(z) = \frac{2\mu}{\lambda^2} \left[(\lambda-z)(2\mu-\lambda-2z) + \lambda \sqrt{(\lambda+2\mu-z)^2 - 8\lambda\mu} \right],$$

y

$$H_2(z) = \frac{4\mu z}{\lambda^2} [z^2 - (2\lambda + \mu)z + \lambda(\lambda + 2\mu)].$$

Por lo tanto

$$B(z, \psi) = -\frac{(\lambda-z)(2\mu-\lambda-2z) + \lambda \sqrt{(\lambda+2\mu-z)^2 - 8\lambda\mu}}{2z(z^2 - (2\lambda + \mu)z + \lambda(\lambda + 2\mu))}.$$

Por lo tanto, la parte absolutamente continua de la medida viene dada por

$$\hat{\psi}(x) = \frac{\lambda \sqrt{8\lambda\mu - (\lambda+2\mu-x)^2}}{2\pi x(x^2 - (2\lambda + \mu)x + \lambda(\lambda + 2\mu))},$$

en el intervalo $|\lambda + 2\mu - x| \leq \sqrt{8\lambda\mu}$. Para ubicar las posibles masas discretas de la medida factorizamos el denominador de $B(z, \psi)$

$$\begin{aligned}
2x(x^2 - (2\lambda + \mu)x + \lambda(\lambda + 2\mu)) &= 2x\left(x - \frac{2\lambda + \mu}{2}\right)^2 - \frac{\mu(\mu - 4\lambda)}{4} \\
&= 2x\left(x - \frac{2\lambda + \mu}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{\mu(\mu - 4\lambda)}\right)\left(x - \frac{2\lambda + \mu}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\mu(\mu - 4\lambda)}\right).
\end{aligned}$$

Tomando en cuenta que la última factorización solo tiene sentido cuando $\mu \geq 4\lambda$, pues de lo contrario las dos raíces no nulas del polinomio serían complejas, caso que no nos interesa pues las únicas masas discretas posibles se encuentran en el eje real positivo. La fórmula (1.4) nos permite determinar el tamaño del salto en las tres raíces. La masa que se encuentra en el origen $s_0 = 0$, esta dada por:

$$\psi(\{0\}) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon \text{Im} B(0 + i\varepsilon, \psi) = \frac{(2\mu - \lambda) + \sqrt{(2\mu - \lambda)^2}}{2(2\mu + \lambda)} = \begin{cases} 0, & \text{si } 2\mu \leq \lambda, \\ \frac{2\mu - \lambda}{2\mu + \lambda}, & \text{si } 2\mu > \lambda. \end{cases}$$

Las otras dos raíces son

$$s_1 = \frac{2\lambda + \mu}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{\mu(\mu - 4\lambda)}, \quad s_2 = \frac{2\lambda + \mu}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\mu(\mu - 4\lambda)}, \quad (3.26)$$

y coinciden cuando $\mu = 4\lambda$. Sin embargo en ese caso no hay una masa discreta adicional en $z = 3\lambda$ pues tanto el numerador como el denominador de $B(z, \psi)$ tienen un cero de multiplicidad 2 en $z = 3\lambda$.

Solo falta determinar cuanto valen los saltos en s_1 y s_2 cuando $\mu > 4\lambda$.

$$\begin{aligned}
\psi(\{s_1\}) &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon \text{Im} B(s_1 + i\varepsilon, \psi) \\
&= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \text{Im} \left[-\varepsilon \frac{(\lambda - s_1)(2\mu - \lambda - 2s_1) + \lambda \sqrt{(\lambda + 2\mu - s_1 - i\varepsilon)^2 - 8\lambda\mu}}{2(s_1 + i\varepsilon)(s_1 + i\varepsilon - s_2)(s_1 + i\varepsilon - s_1)} \right] \\
&= \frac{(\lambda - s_1)(2\mu - \lambda - 2s_1) + \lambda \sqrt{(\lambda + 2\mu - s_1)^2 - 8\lambda\mu}}{2s_1(s_1 - s_2)} \\
&= \frac{(-\frac{\mu}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\mu(\mu - 4\lambda)})(\mu - 3\lambda + \sqrt{\mu(\mu - 4\lambda)}) + \lambda \sqrt{\left(\lambda + 2\mu - \frac{2\lambda + \mu}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\mu(\mu - 4\lambda)}\right)^2 - 8\lambda\mu}}{(2\lambda + \mu - \sqrt{\mu(\mu - 4\lambda)})\sqrt{\mu(\mu - 4\lambda)}} \\
&= \frac{\frac{\lambda}{2} \left(-\mu - 3\sqrt{\mu(\mu - 4\lambda)} \right) + \frac{\lambda}{2} \sqrt{9\mu^2 + 6\mu\sqrt{\mu(\mu - 4\lambda)} + \mu^2 - 36\lambda\mu}}{(2\lambda + \mu - \sqrt{\mu(\mu - 4\lambda)})\sqrt{\mu(\mu - 4\lambda)}} \\
&= \frac{\frac{\lambda}{2} \left(-\mu - 3\sqrt{\mu(\mu - 4\lambda)} \right) + \frac{\lambda}{2} \sqrt{\left(3\sqrt{\mu(\mu - 4\lambda)}\right)^2 + 6\mu\sqrt{\mu(\mu - 4\lambda)} + \mu^2}}{(2\lambda + \mu - \sqrt{\mu(\mu - 4\lambda)})\sqrt{\mu(\mu - 4\lambda)}} \\
&= \frac{\frac{\lambda}{2} \left(-\mu - 3\sqrt{\mu(\mu - 4\lambda)} + \left| \mu + 3\sqrt{\mu(\mu - 4\lambda)} \right| \right)}{(2\lambda + \mu - \sqrt{\mu(\mu - 4\lambda)})\sqrt{\mu(\mu - 4\lambda)}} \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Por lo tanto no hay una masa positiva en s_1 . Sin embargo para s_2 tenemos que

$$\begin{aligned}
 \psi(\{s_2\}) &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon \operatorname{Im} B(s_2 + i\varepsilon, \psi) \\
 &= \frac{(\lambda - s_2)(2\mu - \lambda - 2s_2) + \lambda \sqrt{(\lambda + 2\mu - s_2)^2 - 8\lambda\mu}}{2s_2(s_2 - s_1)} \\
 &= \frac{\frac{\lambda}{2} \left[\left(3\sqrt{\mu(\mu - 4\lambda)} - \mu \right) + \left| 3\sqrt{\mu(\mu - 4\lambda)} - \mu \right| \right]}{\left(2\lambda + \mu + \sqrt{\mu(\mu - 4\lambda)} \right) \sqrt{\mu(\mu - 4\lambda)}} \\
 &= \begin{cases} 0, & \text{si } 3\sqrt{\mu(\mu - 4\lambda)} \leq \mu, \\ \frac{\lambda \left[3\sqrt{\mu(\mu - 4\lambda)} - \mu \right]}{\left(2\lambda + \mu + \sqrt{\mu(\mu - 4\lambda)} \right) \sqrt{\mu(\mu - 4\lambda)}}, & \text{si } 3\sqrt{\mu(\mu - 4\lambda)} > \mu. \end{cases}
 \end{aligned}$$

La condición $3\sqrt{\mu(\mu - 4\lambda)} > \mu$ es equivalente a $\frac{\mu}{\lambda} > \frac{9}{2}$. Otra forma de verlo es calculando el polinomio

$$G_2^{(-1)}(\xi) = \xi^{-2} \left[Q_2 \left(\lambda(1 - \xi\sqrt{2})^2 \right) - \xi\sqrt{2}Q_1 \left(\lambda(1 - \xi\sqrt{2})^2 \right) \right] = 2\xi^2 - 4\sqrt{2}\xi + 3,$$

cuyas raíces son $\xi_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}$ y $\xi_2 = \frac{3\sqrt{2}}{2}$. Podemos notar que si $\sqrt{\frac{\mu}{\lambda}} \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$, o equivalentemente si $\frac{\mu}{\lambda} \leq \frac{1}{2}$, la medida no tiene masas discretas. Si $\frac{\sqrt{2}}{2} < \sqrt{\frac{\mu}{\lambda}} \leq \frac{3\sqrt{2}}{2}$, o equivalentemente si $\frac{1}{2} < \frac{\mu}{\lambda} \leq \frac{9}{2}$, entonces la medida tendrá solamente una masa discreta en el 0. Por último si $\frac{\mu}{\lambda} > \frac{9}{2}$, entonces la medida tendrá dos masas discretas.

La medida ψ queda dada de forma explícita por

$$\begin{aligned}
 \psi(x) &= \frac{\lambda \sqrt{8\lambda\mu - (\lambda + 2\mu - x)^2}}{2\pi x(x^2 - (2\lambda + \mu)x + \lambda(\lambda + 2\mu))} \mathbb{1}_{\{| \lambda + 2\mu - x | \leq \sqrt{8\lambda\mu}\}} \\
 &\quad + \delta_0(x) \frac{2\mu - \lambda}{2\mu + \lambda} \mathbb{1}_{\{\frac{\mu}{\lambda} > \frac{1}{2}\}} \\
 &\quad + \delta_{s_2}(x) \frac{\lambda \left[3\sqrt{\mu(\mu - 4\lambda)} - \mu \right]}{\left(2\lambda + \mu + \sqrt{\mu(\mu - 4\lambda)} \right) \sqrt{\mu(\mu - 4\lambda)}} \mathbb{1}_{\{\frac{\mu}{\lambda} > \frac{9}{2}\}}.
 \end{aligned}$$

3.2.3. Ejemplos con 3 servidores

En esta sección trataremos de describir la medida para el caso de 3 servidores, es decir $k = 3$. Aunque no será posible obtener una expresión explícita manejable para el caso general, trataremos de obtener la medida de la forma más explícita posible en varios casos particulares. Lo primero que haremos es calcular los primeros polinomios determinados por la relación de recurrencia (2.44) que están dados por

$$Q_0(x) = 1, \quad Q_1(x) = \frac{\lambda - x}{\lambda}, \quad Q_2(x) = \frac{(\lambda + \mu - x)(\lambda - x)}{\lambda^2} - \frac{\lambda}{\mu},$$

$$Q_3(x) = \frac{(\lambda + 2\mu - x)(\lambda + \mu - x)(\lambda - x)}{\lambda^3} - \frac{\mu(\lambda + 2\mu - x)}{\lambda^2} - \frac{2\mu(\lambda - x)}{\lambda^2}.$$

Los primeros polinomios 0-asociados descritos por (2.50) son

$$Q_0^{(0)}(x) = 0, \quad Q_1^{(0)}(x) = -\frac{1}{\lambda}, \quad Q_2^{(0)}(x) = -\frac{\lambda + \mu - x}{\lambda^2},$$

$$Q_3^{(0)}(x) = -\frac{(\lambda + 2\mu - x)(\lambda + \mu - x)}{\lambda^3} + \frac{2\mu}{\lambda^2}.$$

Mediante las fórmulas (3.13) y (3.14) con $k = 3$ obtenemos que

$$L_3(z) = \frac{4\mu}{\lambda^4} (z^4 + (-3\lambda - 4\mu)z^3 + (3\lambda^2 + 9\lambda\mu + 5\mu^2)z^2 + (-\lambda^3 - 4\lambda^2\mu - 6\lambda\mu^2 - 2\mu^3)z - \lambda^3\mu + 3\lambda^2\mu^2)$$

$$+ \frac{4\mu^2 \sqrt{(\lambda + 3\mu - z)^2 - 12\lambda\mu}}{\lambda^2},$$

y

$$H_3(z) = -\frac{4\mu z}{\lambda^4} (-z^4 + (4\lambda + 4\mu)z^3 + (-6\lambda^2 - 12\lambda\mu - 5\mu^2)z^2$$

$$+ (4\lambda^3 + 12\lambda^2\mu + 8\lambda\mu^2 + 2\mu^3)z - \lambda^4 - 4\lambda^3\mu - 6\lambda^2\mu^2).$$

Por lo tanto la transformada de Stieltjes de la medida espectral ψ es

$$B(z, \psi) = \frac{(z^4 + (-3\lambda - 4\mu)z^3 + (3\lambda^2 + 9\lambda\mu + 5\mu^2)z^2 + (-\lambda^3 - 4\lambda^2\mu - 6\lambda\mu^2 - 2\mu^3)z - \lambda^3\mu + 3\lambda^2\mu^2) + \mu\lambda^2 \sqrt{(\lambda + 3\mu - z)^2 - 12\lambda\mu}}{z(-z^4 + (4\lambda + 4\mu)z^3 + (-6\lambda^2 - 12\lambda\mu - 5\mu^2)z^2 + (4\lambda^3 + 12\lambda^2\mu + 8\lambda\mu^2 + 2\mu^3)z - \lambda^4 - 4\lambda^3\mu - 6\lambda^2\mu^2)}.$$

De aquí obtenemos inmediatamente la masa discreta en 0

$$\psi(\{0\}) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon \operatorname{Im} B(i\varepsilon, \psi) = \frac{(3\lambda^2\mu^2 - \lambda^3\mu) + |3\lambda^2\mu^2 - \lambda^3\mu|}{\lambda^4 + 4\lambda^3\mu + 6\lambda^2\mu^2} = \begin{cases} 0, & \text{si } 3\mu \leq \lambda, \\ \frac{2\mu(3\mu - \lambda)}{\lambda^2 + 4\lambda\mu + 6\mu^2}, & \text{si } 3\mu > \lambda. \end{cases}$$

La parte absolutamente continua de la medida será

$$\hat{\psi}(x) = \frac{\mu \sqrt{12\lambda\mu - (\lambda + 3\mu - x)^2}}{x\pi \left(\frac{1}{\lambda^2}x^4 + \frac{(-4\lambda - 4\mu)}{\lambda^2}x^3 + \frac{(6\lambda^2 + 12\lambda\mu + 5\mu^2)}{\lambda^2}x^2 + \frac{(-4\lambda^3 - 12\lambda^2\mu - 8\lambda\mu^2 - 2\mu^3)}{\lambda^2}x + (\lambda^2 + 4\lambda\mu + 6\mu^2) \right)},$$

en el intervalo $|\lambda + 3\mu - x| \leq \sqrt{12\lambda\mu}$. A continuación se muestran las gráficas de la parte absolutamente continua de la medida para los diferentes valores particulares de λ y μ estudiados. En el siguiente enlace podemos encontrar una animación de la gráfica de $\hat{\psi}$ en función de los parámetros λ y μ : <https://www.geogebra.org/m/rheaxbyu>.

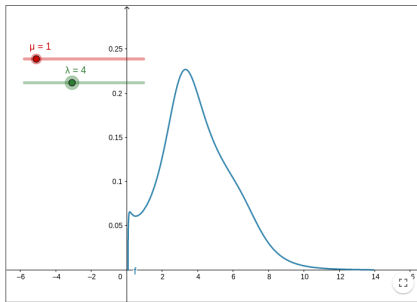


Figura 3.2: $\hat{\psi}(x)$ con $\mu = 1, \lambda = 4$

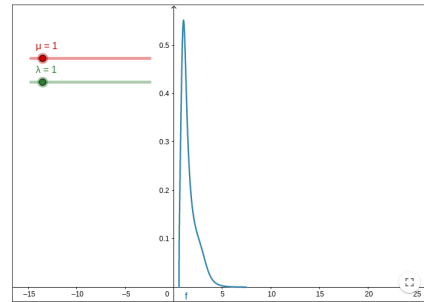
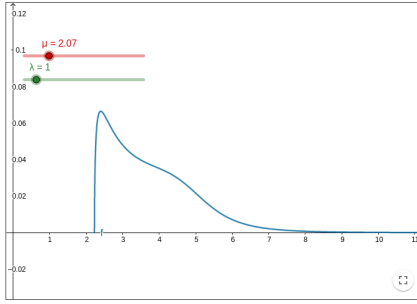
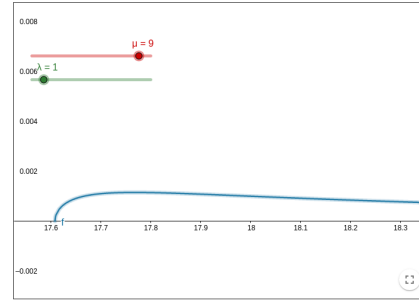


Figura 3.3: $\hat{\psi}(x)$ con $\mu = 1, \lambda = 1$

Figura 3.4: $\hat{\psi}(x)$ con $\mu = 2,07, \lambda = 1$ Figura 3.5: $\hat{\psi}(x)$ con $\mu = 9, \lambda = 1$

Para calcular el número de masas discretas calculamos el polinomio

$$\begin{aligned} G_3^{(-1)}(\xi) &= P_3^{(-1)}(\xi) - \sqrt{3}P_2^{(-1)}(\xi) \\ &= \xi^{-3} \left[Q_3(\lambda(1 - \xi\sqrt{3})^2) - \xi\sqrt{3}Q_2(\lambda(1 - \xi\sqrt{3})^2) \right] \\ &= -6\xi^3 + 16\sqrt{3}\xi^2 - 35\xi + 7\sqrt{3}. \end{aligned}$$

Cuyas raíces se ubican en los puntos $\xi_1 \approx 0,577, \xi_2 \approx 1,257$ y $\xi_3 \approx 2,784$. Sabemos que el número de saltos va a depender de donde se encuentre la cantidad $\sqrt{\frac{\mu}{\lambda}}$ en relación a las raíces ξ_i . En efecto, sabemos que la medida tiene r saltos en $[0, \lambda + 3\mu - \sqrt{12\lambda\mu})$ si y solo si $\xi_r < \sqrt{\frac{\mu}{\lambda}} < \xi_{r+1}$. Veamos con más detalle algunos ejemplos que confirmen este resultado.

- 1) Los ejemplos más sencillos son cuando la medida no tiene ningún salto, basta tomar $3\mu \leq \lambda$. Un ejemplo de este tipo es $\mu = 1$ y $\lambda = 4$. La medida solo consta de una parte absolutamente continua que es

$$\psi(x) = \frac{\sqrt{48 - (7-x)^2}}{x\pi \left(\frac{x^4}{16} - \frac{5x^3}{4} + \frac{149x^2}{16} - \frac{241x}{8} + 38 \right)}, \quad (3.27)$$

en el intervalo $|x - 7| \leq 4\sqrt{3}$.

- 2) Veamos un ejemplo en donde solo hay un salto en 0. Sean $\lambda = \mu$. Por lo tanto solo habrá una masa ubicada en el origen pues $\xi_1 < \sqrt{\frac{\mu}{\lambda}} < \xi_2$. En este caso sin importar los valores de λ y de μ el salto mide

$$\psi(\{0\}) = \frac{4}{11}.$$

La parte absolutamente continua de la medida se simplifica como

$$\hat{\psi}(x) = \frac{\sqrt{12\mu^2 - (4\mu - x)^2}}{\pi x \left(-104x + \frac{23}{\mu}x^2 - \frac{8}{\mu^2}x^3 + \frac{1}{\mu^3}x^4 + 11\mu \right)},$$

en el intervalo $\left[(4 - \sqrt{12})\mu, (4 + \sqrt{12})\mu \right]$.

Por lo tanto, la medida espectral en este caso viene dada por

$$\psi(x) = \frac{\sqrt{12\mu^2 - (4\mu - x)^2}}{\pi x \left(-104x + \frac{23}{\mu}x^2 - \frac{8}{\mu^2}x^3 + \frac{1}{\mu^3}x^4 + 11\mu \right)} \mathbb{1}_{\{(4 - \sqrt{12})\mu, (4 + \sqrt{12})\mu\}}(x) + \frac{4}{11} \delta_0(x).$$

- 3) Veamos un caso en donde la medida tiene exactamente 2 saltos. Para esto tomemos $\lambda = 1$ y $\mu = \frac{13}{36\gamma} + \gamma + \frac{5}{6}$, donde $\gamma = \sqrt[3]{\frac{\sqrt{183}}{72} + \frac{31}{108}}$. Hemos elegido esta μ con el propósito de que la medida tenga un salto en $x = 2$. Por lo tanto $\mu \approx 2,0764$. Como $\sqrt{\frac{\mu}{\lambda}} \approx 1,4409$, tenemos que $\xi_2 < \sqrt{\frac{\mu}{\lambda}} < \xi_3$, por lo cual ψ va a tener efectivamente 2 masas discretas. Una de ellas está en el punto 0 y la otra en el punto 2 los cuales son ceros de $H_3(x)$ y polos de $B(z, \psi)$. Podemos aproximar numéricamente estas cantidades mediante la fórmula (1.4). Obtenemos que

$$\psi(\{0\}) \approx 0,6174 \quad \text{y} \quad \psi(\{2\}) \approx 0,2505.$$

Podemos confirmar que estas son aproximaciones coherentes con la teoría pues al integrar numéricamente la parte absolutamente continua de $\hat{\psi}$ obtenemos que

$$\int_{\lambda+3\mu-2\sqrt{3}\sqrt{\lambda\mu}}^{\lambda+3\mu+2\sqrt{3}\sqrt{\lambda\mu}} \hat{\psi}(x) dx \approx 0,1322$$

y por lo tanto

$$\psi(\{0\}) + \psi(\{2\}) + \int_{\lambda+3\mu-2\sqrt{3}\sqrt{\lambda\mu}}^{\lambda+3\mu+2\sqrt{3}\sqrt{\lambda\mu}} \hat{\psi}(x) dx \approx 1.$$

Esta aproximación se puede hacer tan fina como se desee tomando una ε más pequeña en la fórmula (1.4) y refinando el método de integración numérico que se utilice para calcular la integral de la parte absolutamente continua de ψ obteniendo valores cada vez mas cercanos a 1.

- 4) Veamos ahora un caso con tres saltos. Para esto tomemos $\lambda = 1$, $\mu = \frac{481}{324\gamma} + \gamma + \frac{113}{18}$, donde $\gamma = \sqrt[3]{\frac{16\sqrt{337}}{81} + \frac{23633}{5832}}$, por lo que $\mu \approx 9,0031$. En este caso $\sqrt{\frac{\mu}{\lambda}} \approx 3,0005$ y por lo tanto $\sqrt{\frac{\mu}{\lambda}} > \xi_3$. El valor de μ se eligió estratégicamente para que una de las masas discretas se encuentre en el valor $x = 9$. Por lo tanto dos de las masas se encuentran en 0 y 9 los cuales son ceros de $H_3(x)$ y polos de $B(z, \psi)$. Numéricamente encontramos que

$$\psi(\{0\}) \approx 0,8948 \quad \psi(\{9\}) \approx 0,0993.$$

La tercera masa discreta se encuentra en uno de los ceros de $H_3(z)$, digamos r , y su valor puede ser aproximado como

$$\psi(\{r\}) = 1 - \int_{\lambda+3\mu-2\sqrt{3}\sqrt{\lambda\mu}}^{\lambda+3\mu+2\sqrt{3}\sqrt{\lambda\mu}} \hat{\psi}(x) dx - \psi(\{0\}) - \psi(\{9\}) \approx 0,0038.$$

Para encontrar la ubicación exacta del tercer salto utilicemos la propiedad de ortogonalidad de los polinomios $Q_n(x)$ con respecto a ψ . En particular sabemos que

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\mathbb{R}} Q_0(x) Q_1(x) d\psi(x) \\ &= \int_{\lambda+3\mu-2\sqrt{3}\sqrt{\lambda\mu}}^{\lambda+3\mu+2\sqrt{3}\sqrt{\lambda\mu}} Q_1(x) \hat{\psi}(x) dx + Q_1(0)\psi(\{0\}) + Q_1(9)\psi(\{9\}) + Q_1(r)\psi(\{r\}). \end{aligned}$$

En otras palabras tenemos que

$$Q_1(r) = \psi(\{r\})^{-1} \left(- \int_{\lambda+3\mu-2\sqrt{3}\sqrt{\lambda\mu}}^{\lambda+3\mu+2\sqrt{3}\sqrt{\lambda\mu}} Q_1(x) \hat{\psi}(x) dx - Q_1(0)\psi(\{0\}) - Q_1(9)\psi(\{9\}) \right).$$

Aproximando numéricamente todas las cantidades del lado derecho de la ecuación obtenemos que

$$\psi(\{r\})^{-1} \left(- \int_{\lambda+3\mu-2\sqrt{3}\sqrt{\lambda\mu}}^{\lambda+3\mu+2\sqrt{3}\sqrt{\lambda\mu}} Q_1(x) \hat{\psi}(x) dx - Q_1(0)\psi(\{0\}) - Q_1(9)\psi(\{9\}) \right) \approx -16,3983.$$

Evaluando a $Q_1(x)$ en las distintas raíces de $H_3(z)$ que denotaremos como $\{r_1, \dots, r_5\}$ tenemos que

$$Q_1(r_1) \approx 1, \quad Q_1(r_2) \approx 0,7499, \quad Q_1(r_3) \approx -8, \quad Q_1(r_4) \approx -12,3641, \quad Q_1(r_5) \approx -16,3983.$$

Por lo tanto el salto debe de encontrarse en r_5 , es decir en la mayor de las raíces del polinomio $H_3(z)$ ubicada aproximadamente en $r_5 \approx 17,3982$.

Capítulo 4

Cálculo de varias cantidades de interés probabilístico

En este capítulo expondremos de la forma más explícita posible ciertas cantidades que son de interés probabilístico.

4.1. Caso particular 1 servidor

Como resultado principal, tenemos a la fórmula de la función de transición de probabilidad de un proceso de colas de un servidor

$$P_{ij}(t) = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^j \left(\frac{\mu - \lambda}{\mu}\right) \mathbb{1}_{\{\mu > \lambda\}} + \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^j \int_{\lambda + \mu - \sqrt{4\lambda\mu}}^{\lambda + \mu + \sqrt{4\lambda\mu}} e^{-xt} Q_i(x) Q_j(x) \frac{\sqrt{4\lambda\mu - (\lambda + \mu - x)^2}}{2\pi\mu x} dx, \quad (4.1)$$

donde los polinomios están dados por (3.25).

4.1.1. Distribución del tiempo de espera de un cliente que llega al tiempo t

En este punto ya somos capaces de calcular la distribución del tiempo de espera de un cliente que llega al tiempo t . Si al tiempo t el estado del proceso es n , entonces el cliente tendrá que esperar un tiempo dado por la distribución Gamma de orden n y de parámetro μ . La probabilidad de que el proceso se encuentre en el estado n al tiempo t sabiendo que el proceso comenzó en el estado i es $P_{in}(t)$. Por lo tanto podemos calcular la función de densidad de la distribución del tiempo de espera de un cliente que llega al tiempo t dado que el proceso inició en el estado i , de la siguiente forma

$$w_i(t, \xi) = \sum_{n=1}^{\infty} P_n(t) \frac{\mu^n \xi^{n-1} e^{-\mu \xi}}{(n-1)!}.$$

Asumamos que $\lambda < \mu$ para que el tiempo de espera sea finito. Insertando la fórmula (4.1) en la expresión anterior tenemos que

$$\begin{aligned} w_i(t, \xi) &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\mu}{\lambda} \right)^n \left(\frac{\mu - \lambda}{\mu} \right) \left(\frac{\mu^n \xi^{n-1} e^{-\mu \xi}}{(n-1)!} \right) \\ &\quad + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^n \int_{\lambda+\mu-\sqrt{4\lambda\mu}}^{\lambda+\mu+\sqrt{4\lambda\mu}} e^{-xt} Q_i(x) Q_n(x) \frac{\sqrt{4\lambda\mu - (\lambda + \mu - x)^2}}{2\pi\mu x} dx \right] \left(\frac{\mu^n \xi^{n-1} e^{-\mu \xi}}{(n-1)!} \right). \end{aligned}$$

La primera serie puede ser calculada como

$$\begin{aligned} &\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\mu}{\lambda} \right)^n \left(\frac{\mu - \lambda}{\mu} \right) \left(\frac{\mu^n \xi^{n-1} e^{-\mu \xi}}{(n-1)!} \right) \\ &= \frac{\lambda}{\mu} (\mu - \lambda) e^{-\mu \xi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\lambda \xi)^{n-1}}{(n-1)!} \\ &= \frac{\lambda}{\mu} (\mu - \lambda) e^{-(\mu - \lambda) \xi}. \end{aligned}$$

La segunda serie puede escribirse como

$$\frac{\lambda e^{-\mu \xi}}{2\pi\mu} \int_{\lambda+\mu-\sqrt{4\lambda\mu}}^{\lambda+\mu+\sqrt{4\lambda\mu}} \frac{e^{-xt} Q_i(x)}{x} \sum_{n=1}^{\infty} Q_n(x) \sqrt{4\lambda\mu - (\lambda + \mu - x)^2} \frac{(\lambda \xi)^{n-1}}{(n-1)!} dx. \quad (4.2)$$

Si tomamos $\cos(\theta) = \frac{\lambda + \mu - x}{\sqrt{4\lambda\mu}}$, gracias a la forma trigonométrica de los polinomios de Chebychev (1.16) y la ecuación (3.25) tenemos que

$$\begin{aligned} Q_n(x) &= \left(\frac{\mu}{\lambda} \right)^{\frac{n-1}{2}} \left[\frac{\lambda - x}{\lambda} U_{n-1} \left(\frac{\lambda + \mu - x}{\sqrt{4\lambda\mu}} \right) - \sqrt{\frac{\mu}{\lambda}} U_{n-2} \left(\frac{\lambda + \mu - x}{\sqrt{4\lambda\mu}} \right) \right] \\ &= \left(\frac{\mu}{\lambda} \right)^{\frac{n-1}{2}} \left[\frac{\lambda - x}{\lambda} U_{n-1}(\cos(\theta)) - \sqrt{\frac{\mu}{\lambda}} U_{n-2}(\cos(\theta)) \right] \\ &= \left(\frac{\mu}{\lambda} \right)^{\frac{n-1}{2}} \left[\left(\frac{\lambda - x}{\lambda} \right) \frac{\sin(n\theta)}{\sin(\theta)} - \sqrt{\frac{\mu}{\lambda}} \frac{\sin((n-1)\theta)}{\sin(\theta)} \right]. \end{aligned}$$

Además se tiene que $1 - \sin^2(\theta) = \cos^2(\theta) = \frac{(\lambda + \mu - x)^2}{4\lambda\mu}$ y por lo tanto $\sqrt{4\lambda\mu} \sin(\theta) = \sqrt{4\lambda\mu - (\lambda + \mu - x)^2}$. En consecuencia

$$\begin{aligned} Q_n(x) \sqrt{4\lambda\mu - (\lambda + \mu - x)^2} &= \sqrt{4\lambda\mu} \left(\frac{\mu}{\lambda} \right)^{\frac{n-1}{2}} \left[\left(\frac{\lambda - x}{\lambda} \right) \frac{\sin(n\theta)}{\sin(\theta)} - \sqrt{\frac{\mu}{\lambda}} \frac{\sin((n-1)\theta)}{\sin(\theta)} \right] \\ &= \operatorname{Im} \left[\sqrt{4\lambda\mu} \left(\frac{\mu}{\lambda} \right)^{\frac{n-1}{2}} \left(\left(\frac{\lambda - x}{\lambda} \right) e^{in\theta} - \sqrt{\frac{\mu}{\lambda}} e^{i(n-1)\theta} \right) \right]. \end{aligned}$$

Esto nos permite calcular la serie que aparece en la expresión (4.2) como sigue

$$\begin{aligned}
 & \sum_{n=1}^{\infty} Q_n(x) \sqrt{4\lambda\mu - (\lambda + \mu - x)^2} \frac{(\lambda\xi)^{n-1}}{(n-1)!} \\
 &= \text{Im} \left[e^{i\theta} \left(\frac{\lambda - x}{\lambda} \right) \sqrt{4\lambda\mu} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(\lambda\xi \sqrt{\frac{\mu}{\lambda}} e^{i\theta} \right)^{n-1}}{(n-1)!} \right] \\
 &= \frac{\sqrt{4\lambda\mu}}{\lambda} \text{Im} \left[\left(e^{i\theta} (\lambda - x) - \sqrt{\lambda\mu} \right) e^{\xi \sqrt{\lambda\mu} e^{i\theta}} \right].
 \end{aligned}$$

Así obtenemos la siguiente fórmula explícita para la distribución del tiempo de espera

$$\begin{aligned}
 w_i(t, \xi) &= \frac{\lambda}{\mu} (\mu - \lambda) e^{-(\mu - \lambda)\xi} \\
 &+ e^{-\mu\xi} \sqrt{\frac{\lambda}{\mu}} \frac{1}{\pi} \int_{\lambda + \mu - \sqrt{4\lambda\mu}}^{\lambda + \mu + \sqrt{4\lambda\mu}} \frac{e^{-xt} Q_i(x)}{x} \text{Im} \left[((\lambda - x) e^{i\theta} - \sqrt{\lambda\mu}) e^{\xi \sqrt{\lambda\mu} e^{i\theta}} \right] dx.
 \end{aligned}$$

donde recordaremos que $\cos(\theta) = \frac{\lambda + \mu - x}{\sqrt{4\lambda\mu}}$.

Veamos un ejemplo. Supongamos que tenemos un servidor o una caja atendiendo con tasa $\mu = \frac{1}{2}$, es decir que la caja despacha en promedio un cliente por dos unidades de tiempo. Digamos que la unidad de tiempo son minutos. Supongamos que cada 5 minutos en promedio llega un cliente, esto es $\lambda = \frac{1}{5}$. A continuación se ilustra como se distribuye el tiempo de espera de un cliente que llega 5 minutos después de que la caja fue abierta con i clientes ya en cola para diversos valores de i .

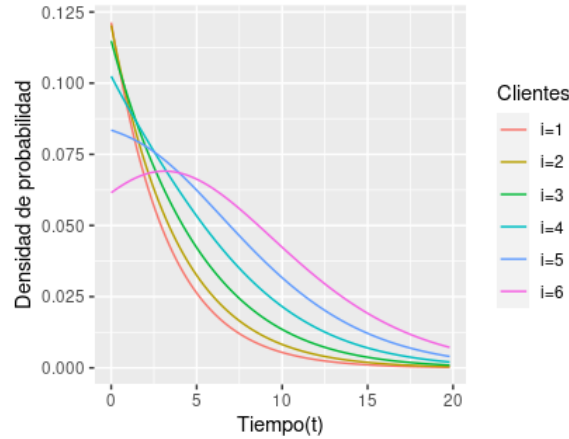


Figura 4.1: Gráfica de $w_i(t = 5, \xi)$ con $\lambda = \frac{1}{5}$, $\mu = \frac{1}{2}$ y $k = 1$.

Podemos notar que a medida que incrementamos la cantidad de clientes, la probabilidad de tener que esperar más para ser atendido aumenta, lo que es de esperarse.

4.1.2. Comportamiento asintótico del proceso

La representación integral de Karlin-McGregor nos permite también estimar la tasa de aproximación al equilibrio cuando $\mu > \lambda$. Gracias a (4.1) obtenemos que

$$\left| P_{ij}(t) - \left(\frac{\mu - \lambda}{\mu} \right) \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^j \right| \leq M e^{-t(\lambda + \mu - \sqrt{4\lambda\mu})}.$$

El comportamiento asintótico de $P_{ij}(t)$ para grandes valores de t también puede ser determinado gracias a (4.1). Por ejemplo cuando $\lambda = \mu$

$$P_{00}(t) = \frac{1}{2\pi\mu} \int_0^{4\lambda} e^{-xt} \sqrt{\frac{4\lambda - x}{x}} dx.$$

Cuando t es grande, la contribución principal en esta integral proviene de una vecindad de $x = 0$. En efecto

$$P_{00}(t) \sim \frac{1}{\pi\sqrt{\mu}} \int_0^1 \frac{e^{-xt}}{\sqrt{x}} dx = \frac{1}{\pi\sqrt{t\mu}} \int_0^t \frac{e^{-\xi}}{\sqrt{\xi}} d\xi.$$

Como

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{\pi\sqrt{t\mu}} \int_0^t \frac{e^{-\xi}}{\sqrt{\xi}} d\xi}{\frac{1}{\sqrt{\pi\mu t}}} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t \frac{e^{-\xi}}{\sqrt{\xi}} d\xi = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = 1,$$

donde Γ es la función gamma, cuyo valor en $\frac{1}{2}$ es $\sqrt{\pi}$, se tiene entonces

$$P_{00}(t) \sim \frac{1}{\sqrt{\pi\mu t}}, \quad \text{cuando } t \rightarrow \infty.$$

4.1.3. Distribución de la longitud del periodo de servicio

Consideremos ahora el problema de determinar la distribución de la longitud de un periodo de servicio, es decir un periodo en el cual nuestro único servidor esté ocupado. Un periodo de servicio comienza cuando la cadena alcanza el estado uno y termina cuando la cadena pasa (después de haber visitado tal vez otros estados) al estado 0. Preguntarse por la distribución de un tiempo de servicio es lo mismo que preguntarse por la función de primer tiempo de llegada del estado 1 al estado 0, $F_{1,0}(t)$, la cual a su vez puede expresarse como la probabilidad de absorción en el estado -1 del proceso 0-asociado (2.55).

$$F_{1,0}(t) = \mu_1 \int_0^t P_{00}^{(0)}(s) ds = \mu_1 \int_0^\infty \frac{1 - e^{-xt}}{x} d\psi^{(0)}(x).$$

Por la fórmula (3.12) tenemos que la transformada de Stieltjes de la medida 0-asociada es

$$B(z, \psi^{(0)}) = \frac{\lambda + \mu - z - \sqrt{(\lambda + \mu - z)^2 - 4\lambda\mu}}{2\lambda\mu},$$

la cual no tiene polos y por lo tanto la medida asociada consiste únicamente de la parte absolutamente continua dada por

$$\psi^{(0)}(x) = \frac{1}{2\pi\lambda\mu} \sqrt{4\lambda\mu - (\lambda + \mu - x)^2},$$

en el intervalo $|\lambda + \mu - x| \leq \sqrt{4\lambda\mu}$. Por lo tanto

$$F_{1,0}(t) = \frac{1}{2\pi\lambda} \int_{\lambda+\mu-\sqrt{4\lambda\mu}}^{\lambda+\mu+\sqrt{4\lambda\mu}} \frac{1-e^{-xt}}{x} \sqrt{4\lambda\mu - (\lambda + \mu - x)^2} dx, \quad (4.3)$$

es la probabilidad de que la longitud de un periodo de servicio sea $\leq t$. Podemos ser más generales y pensar en la distribución del tiempo en que la cola pasa de n clientes a vaciarse por primera vez. Esta viene dada por la fórmula (2.54) aplicada al proceso 0-asociado y es

$$F_{n,0}(t) = F_{n-1,-1}^{(0)}(t) = \frac{1}{2\pi\lambda} \left(\frac{\mu}{\lambda}\right)^{\frac{n-1}{2}} \int_{\lambda+\mu-\sqrt{4\lambda\mu}}^{\lambda+\mu+\sqrt{4\lambda\mu}} \frac{1-e^{-xt}}{x} U_{n-1}\left(\frac{\lambda + \mu - x}{\sqrt{4\lambda\mu}}\right) \sqrt{4\lambda\mu - (\lambda + \mu - x)^2} dx.$$

Si hacemos $\cos(\theta) = \frac{\lambda + \mu - x}{\sqrt{4\lambda\mu}}$, y utilizamos la expresión trigonométrica de los polinomios de Chevychev de segunda especie (1.18), podemos reescribir la fórmula anterior como

$$F_{n,0}(t) = \frac{1}{\pi} \left(\sqrt{\frac{\mu}{\lambda}}\right)^n \int_{\lambda+\mu-\sqrt{4\lambda\mu}}^{\lambda+\mu+\sqrt{4\lambda\mu}} \frac{1-e^{-t(\lambda+\mu-\sqrt{4\lambda\mu}\cos(\theta))}}{\lambda + \mu - \sqrt{4\lambda\mu}\cos(\theta)} \sin(n\theta) dx.$$

Ilustremos esto con un ejemplo. Supongamos que en una cola hay $n = 5$ clientes. Supongamos que llega en promedio un cliente cada 5 minutos, es decir $\lambda = \frac{1}{5}$ y que se atiende un cliente cada 2 minutos, es decir $\mu = \frac{1}{2}$. Entonces la probabilidad de que se hayan atendido a los 5 clientes iniciales antes del tiempo t se ve ilustrada en la siguiente gráfica.

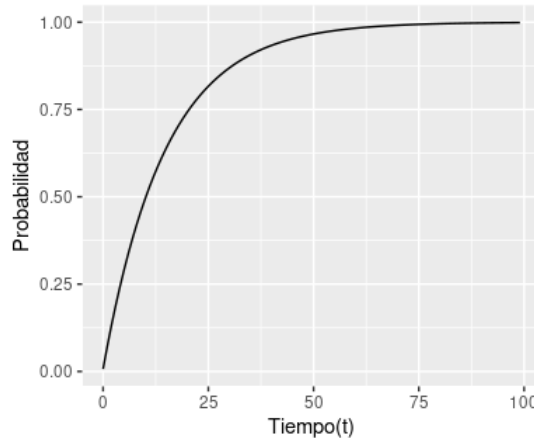


Figura 4.2: Gráfica de $F_{n,0}(t)$ con $\lambda = \frac{1}{5}$ y $\mu = \frac{1}{2}$, $k = 1$ y $n = 5$.

4.1.4. Distribución del número de clientes durante un periodo de servicio

La cuestión se torna ahora hacia la distribución del número de clientes N_1 que llegan durante un periodo de servicio, o de manera más general hacia la distribución del número de clientes N_k que llegan antes de que la cola se vacíe por completo dado que había k clientes en la cola inicialmente. Para esto, recurriremos a la teoría sobre procesos de nacimiento y muerte a tiempo discreto vista en el segundo capítulo de esta tesis y lo aplicaremos a la cadena de nacimiento y muerte (discreta) subyacente al proceso original (continuo) que mencionamos al final del capítulo 2 cuya matriz está dada por (2.42). En el caso presente, las probabilidades de transición están dadas por

$$P_{ij} = \begin{cases} p = \frac{\lambda}{\lambda+\mu}, & \text{si } j = i + 1, \\ q = \frac{\mu}{\lambda+\mu}, & \text{si } j = i - 1, \\ 0, & \text{si } j = i \text{ ó } |j - i| > 1. \end{cases} \quad (4.4)$$

Por lo tanto, la matriz de transición es

$$P = \begin{pmatrix} 0 & \frac{\lambda}{\lambda+\mu} & & & \\ \frac{\mu}{\lambda+\mu} & 0 & \frac{\lambda}{\lambda+\mu} & & \\ & \frac{\mu}{\lambda+\mu} & 0 & \frac{\lambda}{\lambda+\mu} & \cdots \\ & & \frac{\mu}{\lambda+\mu} & 0 & \frac{\lambda}{\lambda+\mu} & \cdots \\ & & & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix}. \quad (4.5)$$

Lo interesante de fijarnos en la matriz subyacente es que ahora la variable aleatoria N_k tiene un significado sencillo. N_k es el número de pasos hacia la derecha que la cadena tiene que dar antes de llegar al estado 0 sabiendo que inició en el estado k . Denotamos por M_k al número de pasos totales que realiza la cadena antes de volver al estado 0, dado que este comenzó en el estado k . Observando que hay que realizar el mismo número de pasos a la derecha que hacia la izquierda para regresar al punto de partida (el estado k), y a esto hay que sumarle k pasos para volver al estado 0, llegamos a que

$$M_k = k + 2N_k.$$

Pero para conocer la distribución de M_k conviene fijarnos en el proceso 0-asociado pues en términos de este proceso para que M_k tome el valor m tiene que suceder que el proceso vaya del estado $k - 1$ al estado 0 en $m - 1$ pasos y en seguida se absorba. Por lo tanto

$$\mathbb{P}(M_k = m) = qP_{k-1,0}^{(m-1)},$$

y

$$\mathbb{P}(N_k = m) = \mathbb{P}(M_k = 2m + k) = qP_{(k-1),0}^{2m+k-1}.$$

Notemos que en este caso el proceso 0-asociado y el proceso original son idénticos, así que podemos mantener la misma notación para estos dos procesos, es decir $P_{ij}^{(n),(0)} = P_{ij}^{(n)}$. Esto no será el caso para dos o más servidores.

Lo que ahora necesitamos es la representación espectral (2.19) para el caso particular de esta cadena. Esta cadena es un caso particular de la cadena que representa el problema conocido como *la ruina del jugador* (ver [5] (2.4.2)). Para calcular la medida espectral de esta cadena volveremos a utilizar la misma técnica que ya hemos aplicado en el caso continuo. Es decir, calcularemos su transformada de Stieltjes y recurriremos a la fórmula de inversión de Perron-Stieltjes. La fórmula (2.25) se escribe como

$$B(z, \psi^{(0)}) = \frac{\frac{1}{p}}{\frac{z}{p} + qB(z, \psi^{(1)})}.$$

Como $B(z, \psi^{(0)}) = B(z, \psi^{(1)})$, tenemos que

$$B(z, \psi^{(0)}) = \frac{-z + \sqrt{z^2 - 4pq}}{2pq}. \quad (4.6)$$

Obsérvese que como la transformada de Stieltjes debe de tender a 0 a medida que $z \rightarrow \infty$, de ahí que podemos descartar la raíz negativa. Dado que $B(z, \psi^{(0)})$ no tiene polos, $\psi^{(0)}$ no tiene masas discretas. La parte absolutamente continua está dada por la fórmula (1.3), que en nuestro caso se escribe como

$$\begin{aligned} \psi^{(0)}(x) &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\pi} \text{Im} B(x + i\varepsilon, \psi^{(0)}) \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\pi} \text{Im} \frac{-(x + i\varepsilon) + \sqrt{(x + i\varepsilon)^2 - 4pq}}{2pq} \\ &= \frac{1}{\pi} \frac{\sqrt{4pq - x^2}}{2pq} \text{ cuando } -\sqrt{4pq} \leq x \leq \sqrt{4pq} \\ &= \frac{1}{\pi} \frac{(\lambda + \mu)}{\sqrt{\lambda\mu}} \sqrt{1 - \left(\frac{(\lambda + \mu)x}{\sqrt{4\lambda\mu}} \right)^2} \text{ cuando } -\frac{\sqrt{4\lambda\mu}}{\lambda + \mu} \leq x \leq \frac{\sqrt{4\lambda\mu}}{\lambda + \mu} \end{aligned} \quad (4.7)$$

Ahora que hemos determinado la medida espectral, procedamos a calcular los polinomios asociados. Estos están dados por

$$\begin{aligned} R_{-1}(x) &= 0, \quad R_0(x) = 1, \quad R_1(x) = \frac{x}{p}, \\ xR_n(x) &= pR_{n+1}(x) + qR_{n-1}(x) \text{ para } n \geq 1. \end{aligned} \quad (4.8)$$

Por lo tanto los podemos expresar en términos de los polinomios de Chevychev de la siguiente manera

$$R_n(x) = \left(\frac{\mu}{\lambda} \right)^{\frac{n}{2}} U_n \left(\frac{x(\lambda + \mu)}{\sqrt{4\lambda\mu}} \right), \quad n \geq 0.$$

En el Capítulo 2 de esta tesis, vimos que

$$\pi_j = \left(\frac{\mu}{\lambda}\right)^j, \quad j \geq 0.$$

Por lo tanto, la fórmula de Karlin-McGregor (2.19) para la cadena discreta es

$$P_{ij}^{(n)} = \left(\frac{\mu}{\lambda}\right)^{\frac{3j+i}{2}} \frac{2}{\pi} \frac{\lambda + \mu}{\sqrt{4\lambda\mu}} \int_{-\frac{\sqrt{4\lambda\mu}}{\lambda+\mu}}^{\frac{\sqrt{4\lambda\mu}}{\lambda+\mu}} x^n U_i\left(\frac{x(\lambda + \mu)}{\sqrt{4\lambda\mu}}\right) U_j\left(\frac{x(\lambda + \mu)}{\sqrt{4\lambda\mu}}\right) \sqrt{1 - \left(\frac{(\lambda + \mu)x}{\sqrt{4\lambda\mu}}\right)^2} dx.$$

Por lo tanto la distribución del número de clientes que llega a la cola antes que esta se desocupe dado que esta empieza con k clientes está dado por

$$\mathbb{P}(N_k = m) = \mu \left(\frac{\mu}{\lambda}\right)^{\frac{k-1}{2}} \frac{2}{\pi} \frac{1}{\sqrt{4\lambda\mu}} \int_{-\frac{\sqrt{4\lambda\mu}}{\lambda+\mu}}^{\frac{\sqrt{4\lambda\mu}}{\lambda+\mu}} x^{2m+k-1} U_{k-1}\left(\frac{x(\lambda + \mu)}{\sqrt{4\lambda\mu}}\right) \sqrt{1 - \left(\frac{(\lambda + \mu)x}{\sqrt{4\lambda\mu}}\right)^2} dx. \quad (4.9)$$

Haciendo el cambio el cambio de variable $\xi = \frac{\lambda + \mu}{\sqrt{4\lambda\mu}}$ obtenemos

$$\mathbb{P}(N_k = m) = \frac{2\mu}{\lambda + \mu} \left(\frac{\mu}{\lambda}\right)^{\frac{k-1}{2}} \left(\frac{\sqrt{4\lambda\mu}}{\lambda + \mu}\right)^{2m+k-1} \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \xi^{2m+k-1} U_{k-1}(\xi) \sqrt{1 - \xi^2} d\xi, \quad (4.10)$$

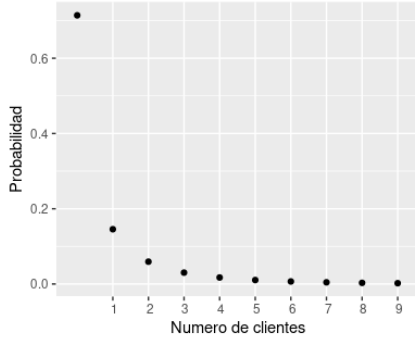
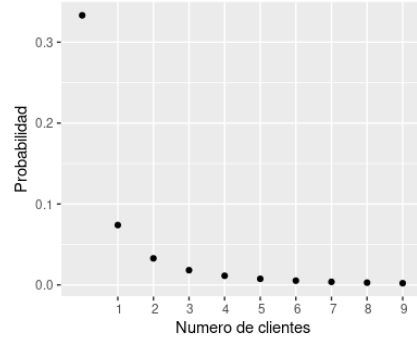
de donde se desprende y simplifica el caso particular N_1 que es el número de clientes que llegan durante un periodo de servicio (al menos una caja ocupada)

$$\mathbb{P}(N_1 = m) = \frac{2\mu}{\pi\sqrt{4\lambda\mu}} \int_{-\frac{\sqrt{4\lambda\mu}}{\lambda+\mu}}^{\frac{\sqrt{4\lambda\mu}}{\lambda+\mu}} x^{2m} \sqrt{1 - \left(\frac{(\lambda + \mu)x}{\sqrt{4\lambda\mu}}\right)^2} dx,$$

o

$$\mathbb{P}(N_1 = m) = \frac{2\mu}{\mu + \lambda} \left(\frac{\sqrt{4\lambda\mu}}{\lambda + \mu}\right)^{2m} \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \xi^{2m} \sqrt{1 - \xi^2} d\xi. \quad (4.11)$$

Ilustremos esto con dos ejemplos, el primero es el ejemplo estudiado en la sección anterior. Es decir que tenemos un servidor atendiendo a 1 cliente cada 2 minutos y una tasa de llegada de 1 cliente cada 5 minutos. Por lo tanto $\lambda = \frac{1}{5}$ y $\mu = \frac{1}{2}$. El siguiente ejemplo será con un servidor atendiendo a 1 cliente cada 2 minutos y una tasa de llegada de 1 cliente por cada minuto, es decir $\lambda = 1$ y $\mu = \frac{1}{2}$. A continuación se muestra la distribución de probabilidad del número de clientes que llegan durante un periodo de servicio en ambos casos.

Figura 4.3: $\mathbb{P}(N_1 = m)$ con $\lambda = \frac{1}{5}, \mu = \frac{1}{2}$ Figura 4.4: $\mathbb{P}(N_1 = m)$ con $\lambda = 1, \mu = \frac{1}{2}$

Podemos observar que ambas gráficas tienen el mismo comportamiento. Podemos observar que en ambos casos lo más probable es que no llegue ningún cliente antes de que se vacíe la cola. Es decir que lo mas probable es que llegue un cliente y en seguida la cola vuelva a vaciarse. Esto era de esperarse cuando $\lambda < \mu$, pero puede parecer extraño en el segundo caso en donde $\lambda > \mu$. Sin embargo, si observamos bien, cuando $\lambda > \mu$, las masas de probabilidad de la segunda gráfica no suman 1, en realidad suman algo cercano a 0,491. Esto significa que con probabilidad positiva, cercana a 0,509, el periodo de servicio será infinito, lo cual es de esperarse cuando $\lambda > \mu$. Siguiendo este razonamiento podemos escribir una fórmula para la probabilidad de que un periodo de servicio sea infinito, es decir que llegue un cliente a una caja y esta no vuelva a vaciarse nunca. Esta probabilidad está dada por

$$\begin{aligned}
 1 - \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(N_1 = n) &= 1 - \left(\frac{2\mu}{\mu + \lambda} \right) \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\sqrt{4\lambda\mu}}{\lambda + \mu} \xi \right)^{2n} \sqrt{1 - \xi^2} d\xi \\
 &= 1 - \left(\frac{2\mu}{\mu + \lambda} \right) \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\sqrt{1 - \xi^2}}{1 - \frac{\sqrt{4\lambda\mu}}{\lambda + \mu} \xi} d\xi.
 \end{aligned}$$

4.2. Caso particular 2 servidores

Como para el caso de 1 servidor, ya tenemos todos los elementos de la fórmula de representación de Karlin-McGregor la cual viene dada por

$$\begin{aligned}
P_{ij}(t) = & \mathbb{1}_{\{2\mu > \lambda\}} 2 \left(\frac{2\mu - \lambda}{2\mu + \lambda} \right) \left(\frac{\lambda}{2\mu} \right)^j + \\
& + \mathbb{1}_{\{2\mu > 9\lambda\}} \frac{2\lambda \left[3\sqrt{\mu(\mu - 4\lambda)} - \mu \right]}{\left[2\lambda + \mu + \sqrt{\mu(\mu - 4\lambda)} \right] \sqrt{\mu(\mu - 4\lambda)}} \left(\frac{\lambda}{2\mu} \right)^j e^{-s_2 t} Q_i(s_2) Q_j(s_2) \\
& + \left(\frac{\lambda}{2\mu} \right)^j \frac{\lambda}{\pi} \int_{\lambda+2\mu-\sqrt{8\lambda\mu}}^{\lambda+2\mu+\sqrt{8\lambda\mu}} e^{-xt} Q_i(x) Q_j(x) \frac{\sqrt{8\lambda\mu - (\lambda + 2\mu - x)^2}}{x(x^2 - (2\lambda + \mu)x + \lambda(\lambda + 2\mu))} dx,
\end{aligned} \tag{4.12}$$

donde los polinomios son los polinomios generados por la relación de recurrencia (2.44) para el caso particular de dos servidores y s_2 está dado por (3.26). Para que la fórmula siga siendo válida en el caso $j = 0$ solo hay que remplazar $\left(\frac{\lambda}{2\mu}\right)^j$, por $\frac{1}{2}$.

4.2.1. Distribución del tiempo de espera de un cliente que llega al tiempo t

Cuando un cliente llega a la cola al tiempo t y esta tiene exactamente n clientes, este tiene que esperar $n - 2$ tiempos exponenciales de tasa 2μ para ser atendido. Por lo tanto el tiempo de espera de un cliente que llega al tiempo t dado que en ese momento había n clientes en la fila sigue una distribución Gamma, con parámetros $n - 2$ y 2μ . La probabilidad de haber estado en el estado n dado que la cadena empezó en el estado i es precisamente $P_{in}(t)$. Por lo tanto la función de densidad de probabilidad del tiempo de espera de un cliente que llega al tiempo t dado que la cadena empezó en el estado i está dada por

$$\begin{aligned}
w_i(t, \xi) = & \sum_{n=2}^{\infty} P_{in}(t) \frac{(2\mu)^{n-1} \xi^{n-2}}{(n-2)!} e^{-2\xi} \\
= & \frac{2\mu - \lambda}{2\mu + \lambda} \frac{\lambda^2}{\mu} e^{-(2\mu - \lambda)\xi} \\
& + \mathbb{1}_{\{2\mu > 9\lambda\}} \frac{2\lambda^3}{\mu} \frac{Q_i(s_2) e^{-s_2 t} \sqrt{8\lambda\mu} e^{-2\mu\xi}}{\sqrt{\mu(\mu - 4\lambda)} \left[2\lambda + \mu + \sqrt{\mu(\mu - 4\lambda)} \right]} \\
& \cdot \operatorname{Im} \left\{ \left[\frac{(\lambda + \mu - s_2)(\lambda - s_2) e^{i\theta}}{\lambda^2} - \sqrt{\frac{2\mu}{\lambda}} \left(\frac{\lambda - s_2}{\lambda} \right) \right] e^{\xi \sqrt{2\mu\lambda} e^{i\theta*}} \right\} \\
& + e^{-2\mu\xi} \frac{\lambda^3}{2\mu\pi} \sqrt{8\lambda\mu} \int_{\lambda+2\mu-\sqrt{8\lambda\mu}}^{\lambda+2\mu+\sqrt{8\lambda\mu}} \frac{e^{-xt} Q_i(x)}{x[x^2 - (2\lambda + \mu)x + \lambda(\lambda + 2\mu)]} \\
& \cdot \operatorname{Im} \left\{ \left[\frac{(\lambda + 2\mu - \sqrt{8\lambda\mu})(\lambda - x)}{\lambda^2} e^{i\theta} - \sqrt{\frac{2\mu}{\lambda}} \left(\frac{\lambda - x}{\lambda} \right) \right] e^{\xi \sqrt{2\lambda\mu} e^{i\theta}} \right\} dx,
\end{aligned}$$

donde $\cos(\theta) = \frac{\lambda+2\mu-x}{\sqrt{8\lambda\mu}}$ y $\cos(\theta^*) = \frac{\lambda+2\mu-s_2}{\sqrt{8\lambda\mu}}$ y s_2 está dado por (3.26). A continuación se pueden visualizar estas funciones de densidad en el caso $\lambda = \frac{1}{5}$ y $\mu = \frac{1}{2}$ para varios valores del número i de clientes que se encontraba en la cola.

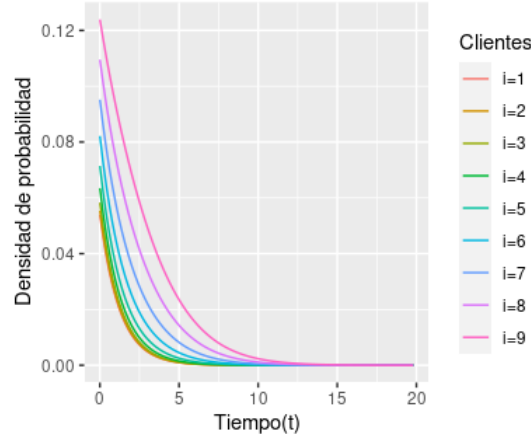


Figura 4.5: Gráfica de $w_i(t=5, \xi)$ con $\lambda = \frac{1}{5}$, $\mu = \frac{1}{2}$ y $k = 2$.

4.2.2. Comportamiento asintótico del proceso

Para analizar el comportamiento asintótico del proceso, podemos observar que el primer término del lado derecho de la fórmula (4.12) va representar la mayor contribución a la probabilidad $P_{ij}(t)$ siempre y cuando no sea nulo y para t suficientemente grande. El segundo término se hará prácticamente nulo para t suficientemente grande. Por último podemos estudiar el comportamiento de la parte integral de la fórmula, por ejemplo para $\lambda = 2\mu$, tenemos que

$$P_{00}(t) = \frac{\lambda}{2\pi} \int_0^{4\lambda} e^{-xt} \sqrt{\frac{4\lambda - x}{x}} \frac{1}{x(x^2 - \frac{5}{2}\lambda x + 2\lambda^2)} dx,$$

integral cuyo valor proviene de una vecindad de $x = 0$. Por lo tanto podemos obtener que

$$P_{00}(t) \sim \frac{1}{2\sqrt{\lambda}\pi} \int_0^1 \frac{e^{-xt}}{\sqrt{x}} dx,$$

cuando $t \rightarrow \infty$. Haciendo el cambio de variable $\xi = xt$, tenemos que

$$P_{00}(t) \sim \frac{1}{2\sqrt{\lambda}t\pi} \int_0^t \frac{e^{-\xi}}{\sqrt{\xi}} d\xi \sim \frac{1}{2\sqrt{\lambda}t\pi} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2\sqrt{\lambda}\pi t},$$

cuando $t \rightarrow \infty$.

4.2.3. Distribución de la longitud de los periodos de servicio, con uno o dos servidores ocupados

En este caso, un periodo de servicio puede significar dos cosas, la primera que por lo menos un servidor esté ocupado, la segunda que los dos servidores estén ocupados.

Consideremos el caso de dos servidores ocupados. Sea T_2 el tiempo que pasa hasta que el proceso llega al estado 1 dado que este se encontraba en el estado 2. Entonces $\mathbb{P}(T_2 < t)$ es la probabilidad de que el proceso 1-asociado se absorba al estado -1 antes del tiempo t . Esto es muy útil ya que el segundo proceso asociado es sencillo, de hecho es idéntico al proceso de un solo servidor, cambiando μ por 2μ . Por lo tanto podemos aplicar la fórmula (4.3) para obtener que

$$\mathbb{P}(T_2 < t) = \frac{1}{2\pi\lambda} \int_{\lambda+2\mu-\sqrt{8\lambda\mu}}^{\lambda+2\mu+\sqrt{8\lambda\mu}} \frac{1-e^{-xt}}{x} \sqrt{8\lambda\mu - (\lambda+2\mu-x)^2} dx.$$

Para lo que sigue será útil mantener en mente que dado que el proceso 1-asociado es como el proceso de un solo servidor, la transformada de Stieltjes de la medida 1-asociada es

$$B(z, \psi^{(1)}) = \frac{\lambda + 2\mu - z - \sqrt{(\lambda + 2\mu - z)^2 - 8\lambda\mu}}{4\mu z}.$$

Pensemos ahora en el caso con por lo menos un servidor ocupado. Sea T_1 la longitud de un periodo de servicio con al menos un servidor ocupado. Entonces T_1 es el tiempo que pasa hasta que el proceso llega al estado 0 por primera vez dado que comenzó en el estado 1. La probabilidad $\mathbb{P}(T_1 < t)$, puede verse como la probabilidad de que el proceso 0-asociado se absorba al estado -1 antes del tiempo t , (2.55). Dado que ya conocemos la medida $\psi^{(1)}$ del proceso 1-asociado, basta utilizar la fórmula (2.57) para $k = 1$, para obtener que

$$\begin{aligned} B(z, \psi^{(0)}) &= \frac{1}{\lambda + \mu - z - 2\lambda\mu B(z, \psi^{(1)})} \\ &= \left(\frac{1}{2\mu} \right) \frac{\lambda - z - \sqrt{(\lambda + 2\mu - z)^2 - 8\lambda\mu}}{z - (\mu - \lambda)}. \end{aligned}$$

Mediante la fórmula de inversión de Perron-Stieltjes, obtenemos que la parte absolutamente continua de $\psi^{(0)}$ es

$$\hat{\psi}^{(0)}(x) = \frac{1}{2\pi\mu} \frac{\sqrt{8\lambda\mu - (\lambda + 2\mu - x)^2}}{x - (\mu - \lambda)},$$

en el intervalo $|\lambda + 2\mu - x| \leq \sqrt{8\lambda\mu}$.

La única masa discreta que puede tener esta medida se encuentra en $x = \mu - \lambda$, sin embargo esta es no nula solo cuando $\mu > 2\lambda$ pues la magnitud del salto está dada por la fórmula (1.4) como sigue

$$\psi^{(0)}(\{\mu - \lambda\}) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon \operatorname{Im} B((\mu - \lambda) + i\varepsilon, \psi^{(0)}) = \frac{1}{2\mu} (-2\lambda + \mu + |2\lambda - \mu|) = \begin{cases} 0, & \text{si } \lambda \geq \mu, \\ \frac{\mu - 2\lambda}{\mu}, & \text{si } 2\lambda < \mu. \end{cases}$$

Tenemos todos los elementos para desarrollar la fórmula (2.55), y obtener la distribución de T_1 .

$$\mathbb{P}(T_1 \leq t) = \mu \int_0^\infty \frac{1 - e^{-xt}}{x} d\psi^{(0)}(x) = \mathbb{1}_{\{\mu > 2\lambda\}} (\mu - 2\lambda) \frac{1 - e^{-(\mu - \lambda)t}}{\mu - \lambda} + \frac{1}{2\pi} \int_{\lambda + 2\mu - \sqrt{8\lambda\mu}}^{\lambda + 2\mu + \sqrt{8\lambda\mu}} \frac{1 - e^{-xt}}{x} \frac{\sqrt{8\lambda\mu - (\lambda + 2\mu - x)^2}}{x - (\mu - \lambda)} dx.$$

A continuación se muestra la gráfica de $\mathbb{P}(T_1 \leq t)$ para valores de λ y μ específicos.

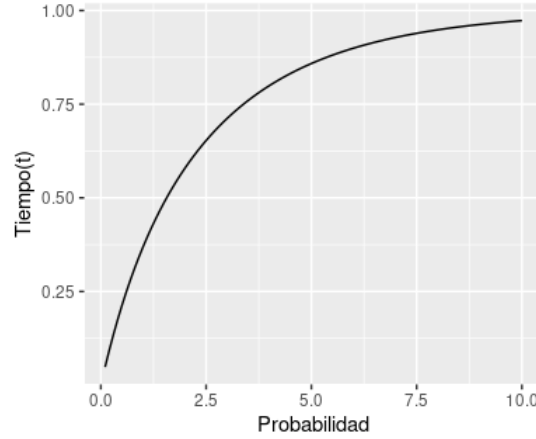


Figura 4.6: Gráfica de $\mathbb{P}(T_1 \leq t)$ con $\lambda = \frac{1}{5}$, $\mu = \frac{1}{2}$ y $k = 2$.

4.2.4. Distribución del número de clientes durante un periodo de servicio

Fijémonos primero en la distribución del número N de clientes que llegan durante un periodo de servicio con dos servidores ocupados. En realidad ya hemos discutido este caso pues mientras dos servidores están ocupados la cola se comporta exactamente igual que si se tratase de una cola de un solo servidor dos veces más rápido (de parámetro 2μ en vez de μ). Por lo tanto la fórmula (4.11) permite afirmar que

$$\mathbb{P}(N = m) = \frac{4\mu}{2\mu + \lambda} \left(\frac{\sqrt{8\lambda\mu}}{\lambda + 2\mu} \right)^{2m} \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \xi^{2m} \sqrt{1 - \xi^2} d\xi. \quad (4.13)$$

La fórmula (4.10), nos permite obtener el resultado un poco más general de que el número de clientes que llegan antes de que se desocupe por lo menos una de las dos cajas dado que la cola empezó con $i + 1$ clientes que denotaremos por $N^{(i)}$ se distribuye

$$\mathbb{P}(N^{(i)} = m) = \frac{4\mu}{\lambda + 2\mu} \left(\frac{2\mu}{\lambda} \right)^{\frac{i-1}{2}} \left(\frac{\sqrt{8\lambda\mu}}{\lambda + 2\mu} \right)^{2m+i-1} \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \xi^{2m+i-1} U_{i-1}(\xi) \sqrt{1 - \xi^2} d\xi. \quad (4.14)$$

Pensemos ahora en el número de clientes N^* que llegan durante un periodo de servicio con por lo menos un servidor ocupado. Al igual que hicimos para el caso de un servidor, es conveniente pensar en el proceso discreto asociado al proceso original.

$$P_{ij} = \begin{cases} p_i, & \text{si } j = i + 1 \\ q_i, & \text{si } j = i - 1 \\ 0, & \text{si } j = i \text{ o } |j - i| > 1, \end{cases} \quad (4.15)$$

donde $q_1 = \frac{\mu}{\lambda + \mu}$, $q_i = q = \frac{2\mu}{\lambda + 2\mu}$ para $i \geq 2$, $p_0 = p_1 = \frac{\lambda}{\lambda + \mu}$ y $p_i = p = \frac{\lambda}{\lambda + 2\mu}$, para $i \geq 2$.

Por lo tanto, la matriz de transición es

$$P = \begin{pmatrix} 0 & \frac{\lambda}{\lambda + \mu} & & & \\ \frac{\mu}{\lambda + \mu} & 0 & \frac{\lambda}{\lambda + \mu} & & \\ & \frac{2\mu}{\lambda + 2\mu} & 0 & \frac{\lambda}{\lambda + 2\mu} & \\ & & \frac{2\mu}{\lambda + 2\mu} & 0 & \frac{\lambda}{\lambda + 2\mu} \\ & & & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix}. \quad (4.16)$$

Pensar en términos de este proceso es útil en la misma forma que lo fue para el caso de un servidor. Lo que nos interesa es calcular el número de clientes que llegaron a la cola antes de que el proceso pasara del estado k al estado 0. Esto es lo mismo que el número de clientes que llegaron a la cola antes de que el proceso 0-asociado (discreto) se absorbiera al estado -1 dado que este empezó en el estado $k - 1$. Si denotamos por M_k el número de pasos totales que da el proceso 0-asociado antes de absorberse al estado -1 dado que empezó en el estado k , y N_k el número de pasos hacia la derecha que da el proceso 0-asociado dado comenzó en el estado k . Entonces

$$M_k = k + 2N_k.$$

La distribución de M_k está dada por

$$\mathbb{P}(M_k = m) = q_1 P_{k,0}^{m-1,(0)},$$

donde el exponente (0) sobre la matriz de transición P_{ij} indica que se trata de la matriz de transición del proceso 0-asociado. Entonces la probabilidad de que hayan llegado m clientes durante un periodo de servicio con por lo menos una caja ocupada dado que la cola comenzó con k clientes es

$$\mathbb{P}(N_{k-1} = m) = \mathbb{P}(M_{k-1} = k + 2m) = q_1 P_{k-1,0}^{k+2m-1,(0)}. \quad (4.17)$$

La cuestión es entonces calcular la matriz de transición del proceso 0-asociado $P_{i,j}^{m,(0)}$. Para esto debemos calcular la medida $\psi^{(0)}$. Sin embargo ya conocemos la medida $\psi^{(1)}$ pues el proceso 1-asociado es idéntico a un proceso de un solo servidor reemplazando μ por 2μ . Por lo tanto la fórmula (4.6) nos da que

$$B(z, \psi^{(1)}) = \frac{-z + \sqrt{z^2 - 4pq}}{2pq},$$

donde p y q son los que ya habíamos especificado unas líneas atrás. Aplicando la fórmula (2.26) para $k = 1$, obtenemos que

$$B(z, \psi^{(0)}) = -\frac{1}{z + p_1 q_2 B(z, \psi^{(1)})} = -\frac{\frac{(2p-p_1)}{p_1} z - \sqrt{z^2 - 4pq}}{z^2 \frac{(2p-2p_1)}{p_1} + 2p_1 q}.$$

Aplicando la fórmula de inversión de Perron-Stieltjes (1.3) obtenemos que la parte absolutamente continua de la medida es

$$\hat{\psi}(x) = \frac{1}{\pi} \left(\frac{\sqrt{4pq - x^2}}{x^2 \left(\frac{2p-2p_1}{p_1} \right) + 2p_1 q} \right) = \frac{1}{\pi} \left(\frac{\sqrt{\frac{8\lambda\mu}{(\lambda+2\mu)^2} - x^2}}{x^2 \left(\frac{-2\mu}{\lambda+2\mu} \right) + \frac{4\lambda\mu}{(\lambda+\mu)(\lambda+2\mu)}} \right),$$

en el intervalo $[-\sqrt{4pq}, \sqrt{4pq}] = \left[-\frac{2\sqrt{2\lambda\mu}}{\lambda+2\mu}, \frac{2\sqrt{2\lambda\mu}}{\lambda+2\mu} \right]$. Además $B(z, \psi^{(0)})$ no tiene polos reales.

Para poder obtener la representación integral de Karlin-McGregor para el proceso 0-asociado hay que observar que los polinomios que juegan el papel de los polinomios $Q_n(x)$ son los polinomios 0-asociados, salvo por el factor $-\frac{1}{p_0}$ y recorridos de un índice para que el grado del polinomio coincida. Es decir que los polinomios $-p_0 Q_{n+1}^{(0)}(x)$ jugarán el papel de los polinomios $Q_n(x)$. La representación integral para el proceso 0-asociado discreto que obtenemos es

$$P_{ij}^{n,(0)} = p_0^2 \pi_j^{(0)} \int_{-1}^1 x^n Q_{i+1}^{(0)}(x) Q_{j+1}^{(0)}(x) d\psi^{(0)}(x),$$

donde $\pi_j^{(0)}$ son los coeficientes potenciales del proceso 0-asociado y están dados por $\pi_j^{(0)} = \pi_j \frac{p_j q_1}{p_0 q_{j+1}}$.

Utilizando esta fórmula y la fórmula (4.17), obtenemos que la probabilidad de que hayan llegado m clientes durante un periodo de servicio con por lo menos una caja ocupada dado que la cola comenzó con k clientes es

$$\begin{aligned} q_1 P_{k-1,0}^{k+2m-1,(0)} &= -q_1 p_0 \int_{-1}^1 x^{k+2m-1} Q_k^{(0)}(x) d\psi^{(0)}(x) \\ &= -\frac{\lambda\mu}{(\lambda+\mu)^2} \int_{-\frac{2\sqrt{2\lambda\mu}}{\lambda+2\mu}}^{\frac{2\sqrt{2\lambda\mu}}{\lambda+2\mu}} x^{k+2m-1} Q_k^{(0)}(x) \left(\frac{1}{\pi} \right) \left(\frac{\sqrt{\frac{8\lambda\mu}{(\lambda+2\mu)^2} - x^2}}{x^2 \left(\frac{-2\mu}{\lambda+2\mu} \right) + \frac{4\lambda\mu}{(\lambda+\mu)(\lambda+2\mu)}} \right) dx. \end{aligned} \quad (4.18)$$

Regresamos al caso particular en donde queremos determinar la distribución del número de clientes que llegan durante un periodo de servicio con al menos un servidor ocupado. En este caso la probabilidad de que hayan llegado m clientes a la cola corresponde a remplazar k por 1 en la fórmula anterior. Es decir, la probabilidad de que hayan llegado m clientes a la cola en un periodo de servicio con al menos un servidor ocupado es

$$q_1 P_{0,0}^{2m,(0)} = \frac{\mu}{\lambda + \mu} \int_{-\frac{2\sqrt{2\lambda\mu}}{\lambda+2\mu}}^{\frac{2\sqrt{2\lambda\mu}}{\lambda+2\mu}} x^{2m} \left(\frac{1}{\pi} \right) \left(\frac{\sqrt{\frac{8\lambda\mu}{(\lambda+2\mu)^2} - x^2}}{x^2 \left(\frac{-2\mu}{\lambda+2\mu} \right) + \frac{4\lambda\mu}{(\lambda+\mu)(\lambda+2\mu)}} \right) dx. \quad (4.19)$$

A continuación se muestra la gráfica de la distribución del número de clientes que llegan en un periodo de servicio con por lo menos un servidor ocupado en el caso $\lambda = \frac{1}{5}$ y $\mu = \frac{1}{2}$.

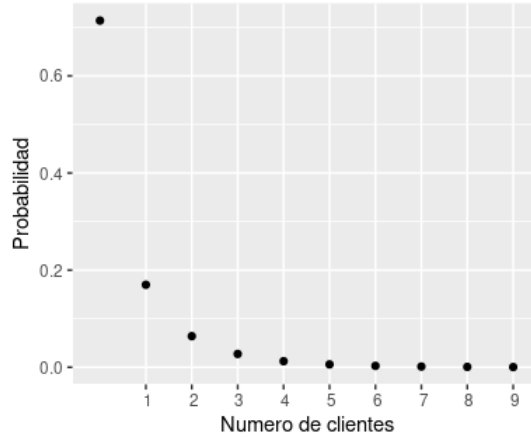


Figura 4.7: Distribución del numero de clientes con $\lambda = \frac{1}{5}$, $\mu = \frac{1}{2}$ y $k = 2$.

En resumen hemos encontrado la distribución del número de clientes que llegan durante un periodo de servicio con dos servidores ocupados (4.13), y en general encontramos la distribución de cuantos clientes llegan desde que la cola tiene k clientes hasta que uno de los dos servidores se vacía (4.14). Hemos encontrado la distribución del número de clientes que llegan durante un periodo de servicio con por lo menos un servidor ocupado (4.19). Y más generalmente la distribución del número de clientes que llegan desde que la cola tiene k clientes hasta que se vacían los dos servidores (4.18).

4.3. Cantidades probabilísticas en el caso de 3 o más servidores

Aunque no pudimos obtener una fórmula explícita y manejable para el caso de $k = 3$ servidores, siempre podemos utilizar las aproximaciones numéricas de la medida espectral que hicimos para casos particulares y a partir de ella calcular varias cantidades probabilísticas. Gracias a la fórmula de Karlin-McGregor podemos calcular $P_{ij}(t)$ de forma numérica en los casos particulares estudiados.

En el caso de $\lambda = 4$ y $\mu = 1$ tenemos que

$$P_{ij}(t) = \pi_j \int_{7-4\sqrt{2}}^{7+4\sqrt{3}} e^{-xt} Q_i(x) Q_j(x) \frac{\sqrt{48 - (7-x)^2}}{x\pi \left(\frac{x^4}{16} - \frac{5x^3}{4} + \frac{149x^2}{16} - \frac{241x}{8} + 38 \right)} dx,$$

donde

$$\pi_j = \frac{4^j}{(j!)}, \quad \text{si } j \leq 3 \quad \text{y} \quad \pi_j = \frac{4^j}{(3!)3^{j-3}}, \quad \text{si } j > 3.$$

En consecuencia podemos calcular estas cantidades de forma numérica. En la siguiente tabla se pueden ver varios de estos valores numéricos.

| $\lambda = 4, \mu = 1$ | | | | |
|------------------------|--------------|--------------|--------------|--------------|
| j | $P_{0,j}(1)$ | $P_{0,j}(2)$ | $P_{0,j}(3)$ | $P_{0,j}(4)$ |
| 1 | 0.0795 | 0.0290 | 0.0168 | 0.0115 |
| 2 | 0.1995 | 0.0961 | 0.0600 | 0.0421 |
| 3 | 0.2466 | 0.1550 | 0.1043 | 0.0756 |
| 4 | 0.1941 | 0.1590 | 0.1163 | 0.0876 |
| 5 | 0.1310 | 0.1477 | 0.1207 | 0.0959 |
| 6 | 0.0772 | 0.1256 | 0.1174 | 0.0996 |
| 7 | 0.0404 | 0.0985 | 0.1074 | 0.0985 |
| 8 | 0.0189 | 0.0716 | 0.0929 | 0.0932 |
| 9 | 0.0080 | 0.0484 | 0.0761 | 0.0845 |
| 10 | 0.0031 | 0.0306 | 0.0593 | 0.0735 |
| 11 | 0.0011 | 0.0182 | 0.0439 | 0.0614 |

Hagamos lo mismo en el caso particular $\lambda = \mu = 1$, recordemos que en este caso la medida tiene un salto en el origen, y por lo tanto va a haber una contribución en la fórmula de Karlin-McGregor por parte del cero. En efecto tenemos que

$$P_{ij}(t) = \pi_j \int_{4-2\sqrt{3}}^{4+2\sqrt{3}} e^{-xt} Q_i(x) Q_j(x) \frac{\sqrt{12 - (4-x)^2}}{\pi x (x^4 - 8x^3 + 23x^2 - 104x + 11)} dx + \frac{4}{11} Q_i(0) Q_j(0),$$

donde

$$\pi_j = \frac{1}{j!} \quad \text{si } j \leq 3 \quad \text{y} \quad \pi_j = \frac{1}{(3!)3^{j-3}} \quad \text{si } j > 3.$$

A continuación se muestran los valores numéricos calculados a partir de esta fórmula.

| $\lambda = 1 = \mu = 1$ | | | | |
|-------------------------|--------------|--------------|--------------|--------------|
| j | $P_{0,j}(1)$ | $P_{0,j}(2)$ | $P_{0,j}(3)$ | $P_{0,j}(4)$ |
| 0 | 0.5315 | 0.4209 | 0.3857 | 0.3727 |
| 1 | 0.3359 | 0.3634 | 0.3655 | 0.3649 |
| 2 | 0.1060 | 0.1563 | 0.1726 | 0.1782 |
| 3 | 0.0220 | 0.0441 | 0.0538 | 0.0577 |
| 4 | 0.0040 | 0.0116 | 0.0161 | 0.0183 |
| 5 | 0.0006 | 0.0028 | 0.0046 | 0.0057 |
| 6 | 0.0001 | 0.0006 | 0.0013 | 0.0017 |
| 7 | 0.0000 | 0.0001 | 0.0003 | 0.0005 |
| 8 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0001 | 0.0001 |
| 9 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 |
| 10 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 |

Para los siguientes casos no tenemos una expresión analítica de las masas discretas, sin embargo nuestras aproximaciones numéricas nos permiten calcular las $P_{ij}(t)$.

Una cantidad probabilística que también nos puede resultar de interés es la probabilidad de no tener que esperar para ser atendido, dado que llegamos al tiempo t . Esta se calcula como

$$P_{i,0}(t) + P_{i,1}(t) + P_{i,2}(t).$$

A continuación veamos como lucen algunas gráficas de la probabilidad de no tener que esperar para ser atendido en función del tiempo en el cual se llegó a la fila. Se aprecia como la probabilidad de no tener que esperar para ser atendido disminuye conforme el tiempo aumenta.

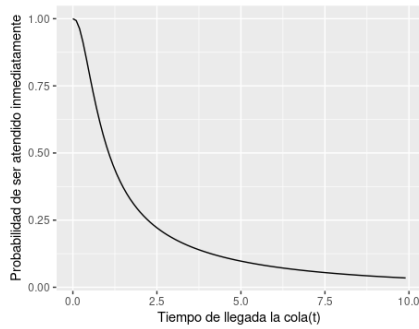


Figura 4.8: Probabilidad de ser atendido inmediatamente con $\lambda = 4$, $\mu = 1$ y $k = 3$.

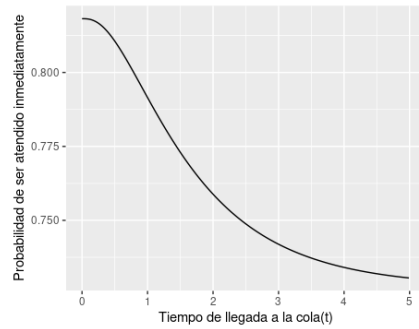


Figura 4.9: Probabilidad de ser atendido inmediatamente con $\lambda = 1$, $\mu = 1$ y $k = 3$.

4.3.1. Distribución del tiempo de espera de un cliente que llega al tiempo t

En el caso de k servidores, podemos razonar de forma muy similar a como lo hicimos con uno o dos servidores. Cuando un cliente llega a la cola al tiempo t y esta tiene exactamente n clientes, este tiene que esperar $n - k$ tiempos exponenciales de tasa $k\mu$ para ser atendido. Por lo tanto el tiempo de espera de un cliente que llega al tiempo t dado que en ese momento había n clientes en la fila se distribuye Gamma de parámetros $n - k, k\mu$. La probabilidad de haber estado en el estado n dado que la cadena empezó en el estado i es precisamente $P_{in}(t)$. Por lo tanto la función de densidad de probabilidad del tiempo de espera de un cliente que llega al tiempo t dado que la cadena empezó en el estado i está dada por

$$w_i(t, \xi) = \sum_{n=k}^{\infty} P_{in}(t) \frac{(k\mu)^{n-k+1} \xi^{n-k}}{(n-k)!} e^{-k\mu\xi}.$$

Centrémonos en los ejemplos estudiados con $k = 3$. Dado que ya hemos calculado numéricamente las $P_{ij}(t)$, somos también capaces de aproximar la distribución del tiempo de espera de un cliente que llega un cierto tiempo t . Sigamos con algunos ejemplos.

En el caso $\lambda = 4, \mu = 1$. La gráfica de la densidad de probabilidad del tiempo de espera de un cliente que llega al tiempo $t = 1$ está ilustrada en la figura siguiente.

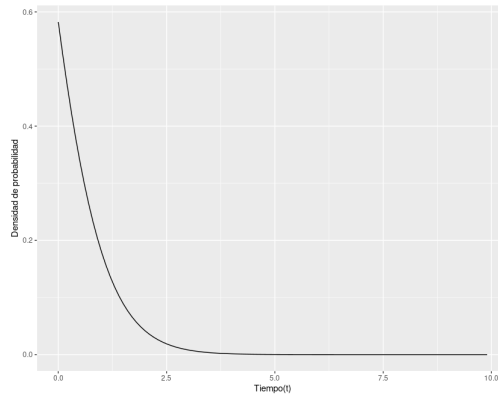


Figura 4.10: Gráfica de $w_0(1, \xi)$ con $\lambda = 4, \mu = 1$ y $k = 3$.

Puede parecer extraño que el área bajo la curva no de 1, en efecto, el área bajo esta curva es aproximadamente 0,4742. Sin embargo esto es totalmente coherente pues para que la función integre 1, hay que añadir la masa discreta en 0 que corresponde a la probabilidad de que el cliente no tenga que esperar para ser atendido. Es decir que la probabilidad de que un cliente que llega al tiempo 1 no tenga que esperar para ser atendido es aproximadamente de 0,5258.

Para el caso $\lambda = \mu = 1$ la gráfica de la densidad de probabilidad del tiempo de espera de un cliente que llega al tiempo t luce muy similar al caso anterior. Sin embargo esta vez el área bajo la curva es menor, como se puede ver en la siguiente gráfica. Esta función integra aproximadamente 0,02680. Igual que en el caso anterior, esto sucede puesto que la probabilidad de que el cliente no deba de esperar dado que llegó al tiempo $t = 1$ es aproximadamente 0,9732.

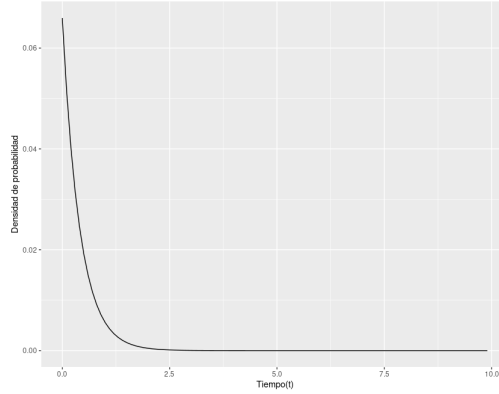


Figura 4.11: Gráfica de $w_0(1, \xi)$ con $\lambda = 4$, $\mu = 1$ y $k = 3$.

4.3.2. Distribución de la longitud del periodo de servicio general de k -servidores

La técnica que hemos seguido hasta ahora para encontrar la distribución de la longitud del periodo de servicio es establecer primero cuantos tipos de periodos de servicio hay. Como estamos en el caso de k servidores, en este caso podemos encontrarnos de 1 a k cajas ocupadas. Denotemos por T_n el tiempo que transcurre desde que el proceso se encuentra en el estado n hasta el momento en que se encuentra por primera vez en el estado $n - 1$. Al igual que en el caso de 1 y 2 servidores, no tendremos problemas en determinar la distribución de T_k . En efecto si consideramos el proceso $(k - 1)$ -asociado, podemos observar que este es idéntico al proceso de un solo servidor con tasa de muerte $k\mu$ en vez de μ . Por lo tanto la distribución de T_k está dada por (4.3) y queda dada como

$$\mathbb{P}(T_k < t) = \frac{1}{2\pi\lambda} \int_{\lambda+k\mu-\sqrt{4k\lambda\mu}}^{\lambda+k\mu+\sqrt{4k\lambda\mu}} \frac{1-e^{-xt}}{x} \sqrt{4k\lambda\mu - (\lambda+k\mu-x)^2} dx.$$

Para cualquier otra $n = 1, \dots, k - 1$, la fórmula (2.54) nos permite calcular la longitud de cualquier periodo de servicio como

$$\mathbb{P}(T_n < t) = F_{0,-1}^{(k-1)} = n\mu \int_0^\infty \frac{1-e^{-xt}}{x} d\psi^{(n-1)}(x).$$

Aunque no tenemos una forma explícita de la medida $\psi^{(n-1)}(x)$, sí podemos calcular su transformada de Stieltjes a partir de $B(z, \psi^{(k-1)})$, la cual conocemos muy bien, y de la fórmula (3.20).

4.3.3. Distribución del número de clientes durante un periodo de servicio general de k -servidores

Nos preguntamos ahora como se distribuye el número de clientes en los periodos de servicio. Recordemos que como estamos en el caso de k servidores podemos encontrarnos de 1 a k servidores ocupados. Denotemos por N_n el número de clientes que llega en un periodo de servicio con n servidores ocupados. Al igual que para dos servidores, determinar la distribución de N_k es sencillo si nos apoyamos en los resultados obtenidos para 1 servidor. Preguntarnos por el número de clientes que llegan durante un periodo de servicio con k servidores ocupados es lo mismo que preguntarnos por el número de clientes que llegan a la cola del proceso $(k-1)$ -asociado antes de que este se absorba dado que inició en el estado 0. Recordando que el proceso $(k-1)$ -asociado es idéntico al proceso con un solo servidor reemplazando μ por $k\mu$, podemos reutilizar la fórmula (4.11) para obtener que

$$\mathbb{P}(N_k = m) = \frac{2k\mu}{k\mu + \lambda} \left(\frac{\sqrt{4k\lambda\mu}}{\lambda + k\mu} \right)^{2n} \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \xi^{2n} \sqrt{1 - \xi^2} d\xi, \quad (4.20)$$

que es la probabilidad de que lleguen m clientes durante un periodo de servicio con k servidores ocupados. También podemos obtener la fórmula más general

$$\mathbb{P}(N_k^{(j)} = m) = \frac{2k\mu}{\lambda + k\mu} \left(\frac{k\mu}{\lambda} \right)^{\frac{j-1}{2}} \left(\frac{\sqrt{4k\lambda\mu}}{\lambda + k\mu} \right)^{2m+j-1} \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \xi^{2m+j-1} U_{j-1}(\xi) \sqrt{1 - \xi^2} d\xi, \quad j \geq 1, \quad (4.21)$$

donde $N_k^{(j)}$ denota la cantidad de clientes que llegan al proceso $(k-1)$ -asociado antes de que se absorba dado que empezó en $(j-1)$, o lo que es lo mismo, el número de clientes que llegan a la cola dado que esta empezó con $(k+j-1)$ clientes, con $j \geq 1$.

Procedamos a dar una expresión para la distribución de N_n con $n < k$. En este caso no obtendremos una expresión tan explícita como para el caso $n = k$ pero lograremos obtener una expresión en función de la medida $(n-1)$ -asociada al proceso discreto, la cual a su vez podemos calcular si conocemos la medida $\psi^{(k-1)}$, la cual sí conocemos. Para esto analicemos el proceso discreto asociado al proceso de colas de k servidores

$$P_{ij} = \begin{cases} p_i, & \text{si } j = i + 1 \\ q_i, & \text{si } j = i - 1 \\ 0, & \text{si } j = i \text{ o } |j - i| > 1, \end{cases} \quad (4.22)$$

donde $q_i = \frac{i\mu}{\lambda + i\mu}$ para $0 \leq i \leq k$, $q_i = \frac{k\mu}{\lambda + k\mu}$, para $i \geq k$, $p_i = \frac{\lambda}{\lambda + i\mu}$ para $0 \leq i \leq k$ y $p_i = \frac{\lambda}{\lambda + k\mu}$, para $i \geq k$.

Por lo tanto, la matriz de transición es

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & & \\ \frac{\mu}{\lambda+\mu} & 0 & \frac{\lambda}{\lambda+\mu} & & & \\ & \frac{2\mu}{\lambda+2\mu} & 0 & \frac{\lambda}{\lambda+2\mu} & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & \frac{k\mu}{\lambda+k\mu} & 0 & \frac{\lambda}{\lambda+k\mu} \\ & & & & \frac{k\mu}{\lambda+k\mu} & 0 & \frac{\lambda}{\lambda+k\mu} \\ & & & & & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix}.$$

Lo que nos interesa es el número N_n de clientes que llegaron a la cola a partir del momento en que esta se encontraba en el estado n hasta que pasara por primera vez al estado $n-1$. O de manera un poco más general, el número de clientes $N_n^{(j)}$ que llegaron a la cola a partir del momento que esta se encontraba en el estado $n+j-1$ hasta que pasara por primera vez al estado $n-1$. Obsérvese que $N_n^{(1)} = N_n$. En términos del proceso $(n-1)$ -asociado, lo que nos interesa es la cantidad de clientes que llegan a partir de que el proceso $(n-1)$ -asociado se encuentra en el estado $j-1$ hasta que se absorbe. Podemos notar nuevamente que si $M_n^{(j)}$ es el número de pasos que da el proceso $(n-1)$ -asociado antes de absorberse, dado que empezó en el estado $j-1$, entonces

$$M_n^{(j)} = j + 2N_n^{(j)}$$

y

$$\mathbb{P}(M_n^{(j)} = m) = q_n P_{j-1,0}^{(m-1),(n-1)}.$$

Por lo tanto

$$\mathbb{P}(N_n^{(j)} = m) = q_n P_{j-1,0}^{(2m+j-1),(n-1)},$$

es la probabilidad de que hayan llegado m clientes a la cola a partir del momento que esta se encontraba en el estado $n+j-1$ con $j \geq 1$ hasta que pasara por primera vez al estado $(n-1)$.

Apliquemos la fórmula de Karlin-McGregor para obtener una representación integral del proceso $(n-1)$ -asociado. Hay que observar que los polinomios que juegan el papel de los polinomios en la fórmula de Karlin-McGregor son los polinomios $(n-1)$ -asociados, salvo por el factor $-\frac{1}{p_{n-1}}$ y recorridos de un índice para que el grado del polinomio coincida. Es decir que los polinomios $\left(-p_{n-1} Q_{i+n}^{(n-1)}(x)\right)_{i \in \mathbb{N}_0}$ jugarán el papel de los polinomios ortogonales en la fórmula de Karlin-McGregor. La representación integral para el proceso $(n-1)$ -asociado discreto que obtenemos es

$$P_{ij}^{m,(n-1)} = p_{n-1}^2 \pi_j^{(n-1)} \int_{-1}^1 x^m Q_{i+n}^{(n-1)}(x) Q_{j+n}^{(n-1)}(x) d\psi^{(n-1)}(x),$$

donde $\pi_j^{(n-1)}$ son los coeficientes potenciales del proceso $(n-1)$ -asociado.

Por lo tanto

$$\mathbb{P}(N_n^{(j)} = m) = q_n P_{j-1,0}^{(2m+j-1),(n-1)} = -q_n p_{n-1} \int_{-1}^1 x^{2m+j-1} Q_{j-1+n}^{(n-1)}(x) d\psi^{(n-1)}(x).$$

Cuando $j = 1$ tenemos que

$$\mathbb{P}(N_n = m) = q_n \int_{-1}^1 x^{2m} d\psi^{(n-1)}(x),$$

lo cual nos da la distribución del número de clientes que llegan durante un periodo de servicio con $n \leq k$ servidores ocupados. Podemos observar que aunque no conocemos explícitamente $\psi^{(n-1)}(x)$ esta se puede determinar mediante la fórmula (2.30), dado que conocemos $\psi^{(k-1)}$.

Bibliografía

- [1] W.J. Anderson. *Continuous-time Markov chains*. Springer series in Statistics, 1991.
- [2] G.E. Andrews, R. Askey y R. Roy. *Special Functions*. Encyclopedia of Mathematics 71. Cambridge University Press, Cambridge, 1999.
- [3] C. Brezinski, K.A. Driver y M. Redivo-Zaglia. Quasi-orthogonality with applications to some families of classical orthogonal polynomials. *Appl. Numer. Math*, 48:157–168, 2004.
- [4] H. Dette y W.J. Studen. *The theory of canonical moments with applications in statistics, probability and analysis*. John Wiley and Sons, N.Y., 1997.
- [5] M. Domínguez de la Iglesia. *Orthogonal polynomials in the spectral analysis of Markov processes. Birth-death models and diffusion*. Encyclopedia of Mathematics and its Applications 181, Cambridge University Press, 2021.
- [6] A.K. Erlang. The theory of probabilities and telephone conversations. *Nyt Tidsskrift for Matematik*, B:20–33, 1909.
- [7] S. Karlin y J. McGregor. Representation of a class of stochastic processes. *Proc. Nat. Acad. Sci*, 4:387–391, 1955.
- [8] S. Karlin y J. McGregor. The differential equations of birth and death processes. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 85:489–546, 1957.
- [9] S. Karlin y J. McGregor. Many server queueing processes with poisson input and exponential service times. *Pacific Journal of Mathematics*, 8:87–118, 1958.
- [10] S. Karlin y J. McGregor. Random walks. *Illinois J.Math*, 3:66–81, 1959.
- [11] D.G. Kendall. Stochastic processes in the theory of queues. *Ann. Math. Stat.*, 24:333–354, 1953.
- [12] E. Koelink. Spectral theory and special functions. <http://arxiv.org/abs/math/0107036v1>, 2000.
- [13] W. Rudin. *Functional Analysis*. McGraw-Hill, 1973.

- [14] E. Seneta. *Non-negative Matrices and Markov Chains*. Springer series in statistics. Springer, rev. print edition, 2006.
- [15] J.F. Shortle, J.M. Thomson, D. Gross y C.M. Harris. *Fundamentals of queueing theory, Fifth Edition*. John Wiley and Sons, Inc. Hoboken, NJ, 2018.
- [16] L. Takács. Investigation of waiting time problems by reduction to Markov processes. *Acta Math. Acad. Sci. Hung.*, 6:101–129, 1955.
- [17] J. Wolfowitz y J. Kiefer. On the theory of queues with many servers. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 78:1–18, 1955.
- [18] M. Zukerman. Introduction to queueing theory and stochastic teletraffic models. *arXiv:1307.2968*, 2020.