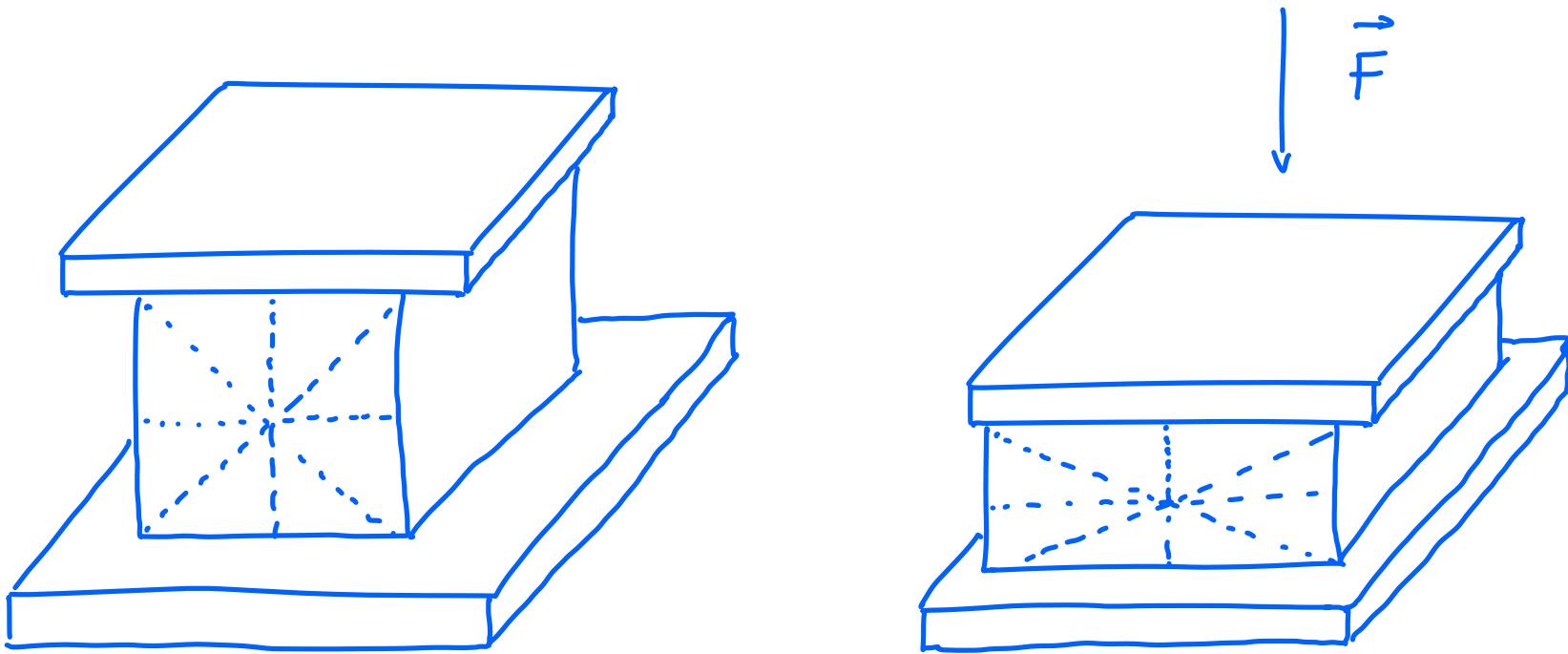


## Capítulo 2 : Deformaciones

### 2.1 Idea intuitiva de las deformaciones

Un ensayo de compresión.



Notamos que bajo la fuerza  $\vec{F}$ , el volumen material  $V$  se deforma. Las líneas verticales del cuadrado frontal se acortaron, las líneas horizontales se alargaron al igual que los diagonales. Algunos ángulos rectos se preservaron, otros se deformaron.

Queremos cuantificar estos deformaciones de forma precisa. El objeto adecuado para tal propósito será el tensor de las deformaciones que describiremos en la sección siguiente.

Nota: Denotaremos por  ${}^t M$  a la transpuesta de  $M$ .

## 2.2 Tensor de Cauchy (Derecho) y tensor de Green-Lagrange

Sean  $d\vec{x}^1, d\vec{x}^2 \in T_{\vec{x}} \mathcal{N}_0$  y  $d\vec{x}^1, d\vec{x}^2$  sus respectivos imágenes bajo  $F$ .

Entonces

$$\begin{aligned} d\vec{x}^1 \cdot d\vec{x}^2 &= {}^t d\vec{x}^1 \quad d\vec{x}^2 \\ &= {}^t(F d\vec{x}^1) \quad (F d\vec{x}^2) \\ &= {}^t d\vec{x}^1 \quad ({}^t F \quad F) \quad d\vec{x}^2. \end{aligned}$$

Así el tensor  ${}^t FF$  relaciona el producto escalar de  $d\vec{x}^1$  con  $d\vec{x}^2$  con  $d\vec{x}^1$  y  $d\vec{x}^2$ .

Definición 9: El tensor de segundo orden  ${}^t FF$  es llamado **tensor de deformaciones de Cauchy** o tensor de Cauchy y se denota por  $C$ . Es decir

$$C := {}^t FF \quad (2.1)$$

Definición 10: Otro tensor útil es el **tensor de Green-Lagrange** dado por

$$L = \frac{1}{2} (C - S) \quad (2.2)$$

donde  $S$  es el tensor identidad de segundo orden.

Con esta notación tenemos que

$$\vec{d}\vec{x}^1 \cdot \vec{d}\vec{x}^2 = {}^t \vec{d}\vec{x}^1 C \vec{d}\vec{x}^2 \quad (2.2+)$$

y que

$$\vec{d}\vec{x}^1 \cdot \vec{d}\vec{x}^2 - \vec{d}\vec{x}^1 \cdot \vec{d}\vec{x}^2 = {}^t \vec{d}\vec{x}^1 2L \vec{d}\vec{x}^2 \quad (2.2**)$$

Ejercicio 4 :

1) Probar que la derivada material de la transformación tangente  $F$  es  
 $\dot{F} = GF$  donde  $G = \text{grad}_{\vec{x}} \vec{v}$ .

2) Probar que  $\dot{C} = {}^t F (2D) F$  donde  $D = \frac{1}{2} ({}^t G + G)$

## 2.3 Descomposición polar de la transformación tangente

Teorema 4 : La transformación lineal tangente  $F$  se descompone de forma única como

$$F = RU = VR \quad (2.3)$$

donde  $R$  es una rotación y  $U$  y  $V$  son SDP (simétricos)

dem: Probemos la existencia y unicidad de la descomposición  $F = RU$ .

i) (Unicidad) Supongamos que  $F = R_1 U_1 = R_2 U_2$ , con  $R_1, R_2$  rotaciones y  $U_1, U_2$  SDP.

$$\begin{aligned} \text{Entonces } C &= {}^t F F \\ &= {}^t (R_1 U_1) (R_1 U_1) \\ &= {}^t U_1 {}^t R_1 R_1 U_1 \\ &= U_1^2 \end{aligned}$$

Análogamente  $C = U_2^2$ . Así  $U_1^2 = U_2^2$  y como son SDP, entonces  $\sqrt{U_1^2} = U_1 = \sqrt{U_2^2} = U_2$ . Así  $R_1 U = R_2 U$  con  $U = U_1 = U_2$  invertible, así  $R_1 = R_2$ .

ii) (Existencia.) Sea  $U = \sqrt{C}$ . Notemos que  $U$  es SDP.

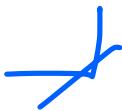
Sea  $R = FU^{-1}$ . Así

$$\begin{aligned} {}^t R R &= {}^t (FU^{-1}) (FU^{-1}) \\ &= (U^{-1}) {}^t F F U^{-1} \\ &= U^{-1} U^2 U^{-1} \\ &= I. \end{aligned}$$

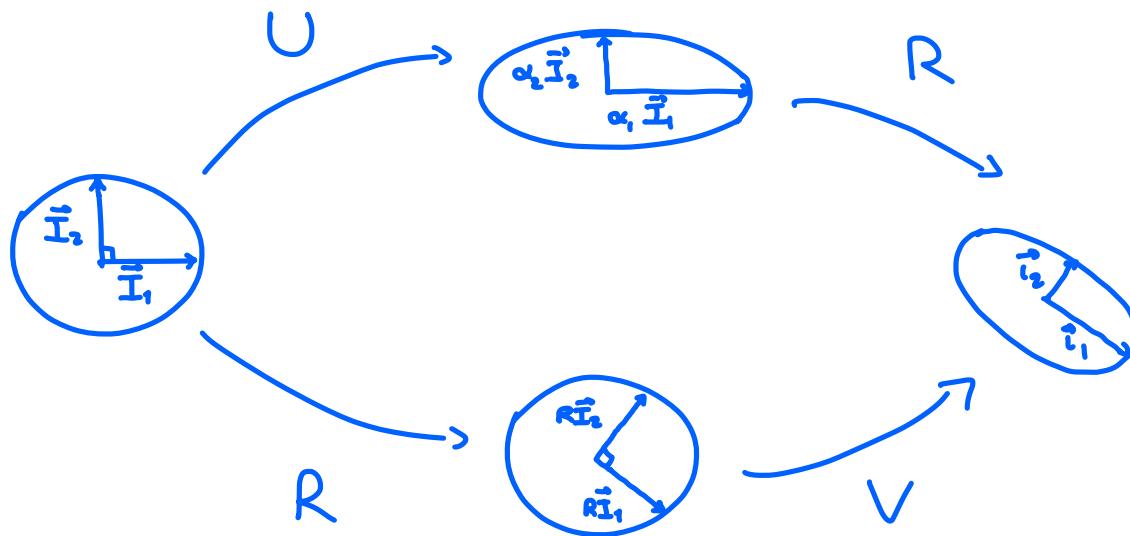
Es decir  $R$  es ortogonal. Además  $\det R = \det(F) \det(U^{-1}) > 0$   
 $\therefore \det R = 1$  y  $R$  es una rotación.

La prueba de existencia y unicidad de la descomposición  $F = VR$

es muy similar.



Corolario 1:  $U$  y  $V$  tienen los mismos valores propios y las direcciones principales (propios)  $\vec{I}_1, \vec{I}_2, \vec{I}_3$  de  $V$  son las rotaciones de las direcciones principales  $\vec{I}_1, \vec{I}_2, \vec{I}_3$  de  $U$  (y de  $C$ ).



A  $U$  se le suele llamar **de formación pura** o deformación antes de rotación.

Observación:  $U$  y  $V$  son la misma transformación salvo rotación.

## 2.4 Variación de cantidades materiales

En esta sección veremos como el tensor de deformaciones de Cauchy permite escribir naturalmente la variación de ciertas cantidades materiales. (longitudes, ángulos, volúmenes, áreas).

Sea  $\vec{N} = \frac{d\vec{x}}{\|d\vec{x}\|}$  para algún  $d\vec{x} \in T_{\vec{x}} \mathcal{S}_0$  y

$$\vec{n} = \frac{d\vec{x}}{\|d\vec{x}\|} \quad d\vec{x} \in T_{\vec{x}} \mathcal{S}_t .$$

Definición 11 : Definimos la dilatación en dirección  $\vec{N}$  como

$$\epsilon_{NN} := \frac{\|\vec{d}\vec{x}\| - \|\vec{d}\vec{x}'\|}{\|\vec{d}\vec{x}\|} \quad (2.4)$$

de tal forma que

$$\|\vec{d}\vec{x}\| = (1 + \epsilon_{NN}) \|\vec{d}\vec{x}'\|. \quad (2.5)$$

En términos del tensor de Cauchy :

$$\epsilon_{NN} = \sqrt{{}^t N C N} - 1. \quad (2.6)$$

Veamos ahora como varían los ángulos :

Denotemos como

$$\vec{N} = \frac{\vec{d}\vec{x}^1}{\|\vec{d}\vec{x}^1\|}, \quad \vec{T} = \frac{\vec{d}\vec{x}^2}{\|\vec{d}\vec{x}^2\|}, \quad \vec{n} = \frac{\vec{d}\vec{x}^1}{\|\vec{d}\vec{x}^1\|}, \quad \vec{t} = \frac{\vec{d}\vec{x}^2}{\|\vec{d}\vec{x}^2\|} \quad (2.7)$$

Con  $d\vec{x}^1 \in T_{\vec{x}} \mathcal{N}_0$  y  $d\vec{x}^2 \in T_{\vec{x}} \mathcal{N}_t$ .

Notemos que, con el tensor de Green Lagrange podemos escribir

$$d\vec{x}^1 \cdot d\vec{x}^2 - d\vec{x}^1 \cdot d\vec{x}^2 = {}^t d\vec{x}^1 \cdot 2L d\vec{x}^2 \quad (2.8)$$

Lo cual a nivel de ángulos se puede expresar como

$$\|\vec{d}\vec{x}^1\| \|\vec{d}\vec{x}^2\| \cos(\theta_{nt}) - \|\vec{d}\vec{x}^1\| \|\vec{d}\vec{x}^2\| \cos(\theta_{NT}) = {}^t d\vec{x}^1 \cdot 2L d\vec{x}^2 \quad (2.9)$$

donde  $\theta_{nt}$  y  $\theta_{NT}$  son los ángulos formados entre  $d\vec{x}^1, d\vec{x}^2$  y  $d\vec{x}^1, d\vec{x}^2$  resp.

Definición 12: Se asume que  $\vec{N}$  y  $\vec{T}$  son ortogonales, se define entonces la distorsión o distorsión angular en las direcciones  $\vec{N}, \vec{T}$  como

$$\gamma_{NT} := \frac{\pi}{2} - \theta_{NT} \quad (2.10)$$

También se define la media-distorsión como

$$\bar{\epsilon}_{NT} = \frac{1}{2} \gamma_{NT} \quad (2.11)$$

Usando que  $\theta_{NT} = \frac{\pi}{2}$  en (2.9) y usando (2.6) obtenemos

$$\sin(2\bar{\epsilon}_{NT}) = \frac{{}^t N \cdot 2L T}{\sqrt{{}^t N C N} \cdot \sqrt{{}^t T C T}} \quad (2.12)$$

habiéndolo así expresada la distorsión en términos del tensor de Cauchy.

Definición 13: Se definen la dilatación volumétrica y la dilatación superficial como:

$$\theta_V = \frac{dv - dV}{dV} \quad \text{y} \quad \theta_N = \frac{ds - dS}{dS} \quad (2.13)$$

3-forma 2-forma .

Observaciones:  $\theta_V = J - 1 \quad (2.14)$ .

Para expresar la dilatación de área con la ayuda del tensor de Cauchy y en términos de la transformación tangente, tenemos que tener bien clara

la relación entre  $ds$  y  $d\vec{s}$ .

Adoptemos la notación  $\vec{ds} = d\vec{x}^1 \wedge d\vec{x}^2$  y  $d\vec{s} = d\vec{X}^1 \wedge d\vec{X}^2$ .

$$\begin{aligned}[d\vec{x}^1 \wedge d\vec{x}^2]_i &= \varepsilon_{ijk} dx_j dx_k \\ &= \varepsilon_{ijk} F_{jL} d\vec{X}_L^1 F_{kM} d\vec{X}_M^2 \\ &\quad , \{i,j,k\} \{L,M,N\}\end{aligned}$$

Multiplicando por  $F_{iN}$

$$\begin{aligned}F_{iN} [dx^1 \wedge dx^2]_i &= \varepsilon_{ijk} F_{iN} F_{jL} F_{kM} dX_L^1 dX_M^2 \\ &= J \varepsilon_{NML} dX_L^1 dX_M^2 \\ &= J [d\vec{X}^1 \wedge d\vec{X}^2]_N\end{aligned}$$

es decir

$${}^t F (d\vec{x}^1 \wedge d\vec{x}^2) = J [d\vec{X}^1 \wedge d\vec{X}^2]$$

o bien

$$d\vec{x}^1 \wedge d\vec{x}^2 = J {}^t F^{-1} d\vec{X}^1 \wedge d\vec{X}^2$$

Es decir

$$\vec{ds} = J {}^t F^{-1} d\vec{S} \quad (2.15)$$

Como

$$\Theta_N = \frac{ds - d\vec{s}}{ds}$$

(2.16)

$$\Theta_N = \frac{\|ds\| - \|d\vec{s}\|}{\|d\vec{S}\|}$$

Para expresar esto en función del tensor de Cauchy hacemos

$$\|\vec{ds}\|^2 = {}^t(J^t F^{-1} \vec{ds}) (J^t F^{-1} \vec{ds})$$

$$= J^2 {}^t \vec{ds} F^{-1} {}^t F^{-1} \vec{ds}$$

$$= J^2 {}^t \vec{ds} \cdot C^{-1} \vec{ds}$$

es decir

$$\|\vec{ds}\| = J \sqrt{{}^t \vec{ds} \cdot C^{-1} \vec{ds}}. \quad (2.17)$$

Así  $\Theta_N = \frac{\|\vec{ds}\| - \|\vec{dS}\|}{\|\vec{ds}\|}$

$$= \frac{J \sqrt{{}^t \vec{ds} C^{-1} \vec{ds}}}{\|\vec{ds}\|} - 1$$

$$= J \sqrt{{}^t \vec{N} C^{-1} \vec{N}} - 1$$

donde  $\vec{N} = \frac{\vec{dS}}{\|\vec{dS}\|}$ .

Recapitulando

$$\Theta_N = J \sqrt{{}^t \vec{N} C^{-1} \vec{N}} - 1 \quad (2.18)$$

## 2.5 Transformaciones infinitesimales

En esta parte consideremos el campo de los desplazamientos

$$\vec{u}(\vec{x}, t) = \vec{x}(\vec{x}, t) - \vec{X} . \quad (2.19)$$

Entonces

$$F = S + H \quad (2.20)$$

donde  $H = \text{grad}_{\vec{X}} \vec{u}$  es llamado el gradiente del desplazamiento.

Supondremos en esta sección que

$$\|H\| \ll 1 . \quad (2.21)$$

Descomponiendo a  $H$  como

$$H = \epsilon + \omega$$

con

$$\epsilon = \frac{1}{2} (H + {}^t H)$$

$$\omega = \frac{1}{2} (H - {}^t H)$$

(2.22)

(2.23)

(2.24)

El tensor de las deformaciones se puede escribir como

$$\begin{aligned} C &= {}^t F F \\ &= {}^t (S + H) (S + H), \end{aligned}$$

por lo que:

$$C = S + {}^t H + H + {}^t H H \quad (2.25*)$$

Tomando en cuenta (2.21) y (2.23) tenemos que

$$C \approx S + 2\epsilon \quad (2.25)$$

Ejercicio 5: Mostrar que en pequeñas deformaciones (2.21), el tensor de Green-Lagrange se puede aproximar por

$$L \approx \epsilon$$

(2.26)

Proposición 1: En pequeñas deformaciones (2.21) tenemos las aproximaciones

i)

$$U \approx V \approx S + \epsilon$$

(2.27)

ii)

$$R \approx S + \omega$$

(2.28)

donde  $U$  y  $V$  son las deformaciones pures en la descomposición  $F = RU = VR$ . Por esta razón  $\epsilon$  y  $\omega$  son llamados tensor de pequeñas deformaciones y tensor de pequeñas rotaciones respectivamente.

Prueba:  $\|H\| \ll 1$ , entonces  $\|\epsilon\| \ll 1$

$$\text{Entonces } (S + \epsilon)^2 = S + 2\epsilon + \epsilon^2 \approx S + 2\epsilon = C$$

Recordando que  $U = \sqrt{C}$ , obtendremos que  $U \approx S + \epsilon$ .

Análogamente  $V \approx S + \epsilon$ .

Notemos que  $(S + \epsilon)(S - \epsilon) = S - \epsilon^2 \approx S$ , es decir  $U^{-1} \approx S - \epsilon$

Por (2.20) y la descomposición (2.3)

$$F \approx S + H \quad RU \approx R(S + \epsilon)$$

$$\text{Así } S + H \approx R(S + \epsilon)$$

$$\begin{aligned} R &\approx (S - \epsilon)(S + H) \\ &\approx S - \epsilon + H - \cancel{\epsilon H} \\ &\approx S + \omega \end{aligned}$$

+

Como  $\omega$  es un tensor antisimétrico, existe un único vector  $\tilde{\omega}$  tq  $\omega \vec{z} = \tilde{\omega} \wedge \vec{z}$ ,  $\forall \vec{z} \in \mathbb{R}^3$ . De hecho

$$\tilde{\omega} = \begin{pmatrix} -\omega_{23} \\ -\omega_{31} \\ -\omega_{12} \end{pmatrix} \quad (2.28)$$

Por lo tanto

$$u(\vec{x} + \vec{dx}, t) \approx u(\vec{x}, t) + H(\vec{x}, t) \vec{dx} \quad (\text{al primer orden})$$

$$u(\vec{x} + \vec{dx}, t) = u(\vec{x}, t) + \epsilon \vec{dx} + \tilde{\omega} \wedge \vec{dx} \quad (2.29)$$

## 2.6 Variación de cantidades materiales en pequeñas deformaciones

En esta sección veremos que, bajo la hipótesis de pequeñas deformaciones (2.21) las dilataciones y distorsiones angulares se simplifican, de hecho están dadas por las componentes del tensor  $\epsilon$  de (2.22), lo cual justifica esta notación.

Apliquemos la fórmula (2.2\*) con  $\vec{dx}^1 = \vec{dx}^2 = \vec{dx}$  y  $\vec{dX}^1 = \vec{dX}^2 = \vec{dX}$ .

$$\|\vec{dx}\|^2 - \|\vec{dX}\|^2 = {}^t \vec{dX} 2L \vec{dx}.$$

Utilizando (2.5), tenemos que

$$(1 + \epsilon_{NN})^2 \|\vec{dX}\|^2 - \|\vec{dx}\|^2 = {}^t \vec{dX} 2L \vec{dx}$$

$$2\epsilon_{NN} + \epsilon_{NN}^2 = \frac{{}^t \vec{dX} 2L \vec{dx}}{\|\vec{dx}\|^2}$$

$$\epsilon_{NN} + \frac{1}{2} \epsilon_{NN}^2 = {}^t N L N \quad (2.30)$$

Utilizando la hipótesis (2.21) y la aproximación (2.26) obtenemos

$$\epsilon_{NN} \approx {}^t N \epsilon N . \quad (2.31)$$

Es decir que en la base  $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$  las componentes diagonales de  $\epsilon$  son  $\epsilon_{11}, \epsilon_{22}$  y  $\epsilon_{33}$ .

Observación: La relación entre el tensor de pequeñas deformaciones y las dilataciones es lineal mientras que para deformaciones generales la relación (2.6) es no lineal.

Ejercicio 6: Mostrar la aproximación al primer orden

$$\epsilon_{NT} \approx \vec{N} \epsilon \vec{T} . \quad (2.32)$$

Indicaciones: Desarrollar al primer orden en  $\epsilon$  la fórmula (2.12) es decir, despreciar los términos en orden mayor a  $\|\epsilon\|^2$ .

Usar el desarrollo de Taylor:

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} \approx 1 - \frac{1}{2}x + O(x^2) .$$

Así, en pequeñas deformaciones, en la base usual,

$$\epsilon = \begin{pmatrix} \epsilon_{11} & \epsilon_{12} & \epsilon_{13} \\ \epsilon_{21} & \epsilon_{22} & \epsilon_{23} \\ \epsilon_{31} & \epsilon_{32} & \epsilon_{33} \end{pmatrix} \quad (2.33)$$

Estudiemos ahora la variación de volumen en pequeñas deformaciones.

Recordemos que  $\frac{dv}{dV} = J$  ,

$$J = \det(S + H)$$

$$= \det \begin{vmatrix} H_{11}+1 & H_{12} & H_{13} \\ H_{21} & H_{22}+1 & H_{23} \\ H_{31} & H_{32} & H_{33}+1 \end{vmatrix}$$

$$= (H_{11}+1) \begin{vmatrix} H_{22}+1 & H_{23} \\ H_{32} & H_{33}+1 \end{vmatrix} + H_{21} \begin{vmatrix} H_{12} & H_{13} \\ H_{32} & H_{33}+1 \end{vmatrix} + H_{31} \begin{vmatrix} H_{12} & H_{13} \\ H_{22}+1 & H_{23} \end{vmatrix}$$

$$= 1 + (H_{11} + H_{22} + H_{33}) + O(\|H\|^2)$$

$$\approx 1 + \operatorname{tr} H$$

$$= 1 + \operatorname{tr} \epsilon \quad (2.33^*)$$

Por lo tanto, la dilatación volumétrica se puede expresar como

$$\Theta_V = \frac{dV - V}{V} = \operatorname{tr} \epsilon \quad (2.34)$$

O bien

$$\Theta_V = \operatorname{div}_{\vec{x}} \vec{u} \quad (2.35)$$

Ejercicio 7: Mostrar que en pequeñas deformaciones la dilatación de área está dada por

$$\Theta_N = \operatorname{tr} \epsilon - \vec{N} \cdot \vec{\epsilon} \cdot \vec{N} \quad (2.36)$$

Indicaciones: Usar (2.18) y desarrollar al orden 1 usando (2.25) y (2.33\*).

Probar que  $C^{-1} \approx S - 2\epsilon$

## 2.7 Representación geométrica de las deformaciones planas

Supongamos que estamos en el caso de pequeñas deformaciones y que estas ocurren solamente en un plano, es decir que

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & 0 \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.37)$$

Que denotaremos simplemente  $\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} \end{pmatrix}$ .

Sea  $R^P = \{P_t, \vec{l}_1, \vec{l}_2\}$  el referencial principal de  $\boldsymbol{\varepsilon}$ , es decir la base ortogonal directa formada por los vectores propios  $\vec{l}_1$  e  $\vec{l}_2$  de  $\boldsymbol{\varepsilon}$ . Relativamente a esta base  $\boldsymbol{\varepsilon}$  se expresa como

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 \end{pmatrix} \quad (2.38)$$

donde  $\varepsilon_1 \geq \varepsilon_2$  son los valores propios de  $\boldsymbol{\varepsilon}$ .

Definición 14: El Círculo de Mohr se define como el lugar geométrico formado por los puntos  $M_n$  definidas como

$$\overrightarrow{P_t M_n} = E_{nn} \vec{n} + E_{nt} \vec{t} \quad (2.39)$$

donde  $\vec{n}$  es un vector unitario en el plano y  $\vec{t} = \text{rot}_{\frac{\pi}{2}} \vec{n}$ . y  $E_{nn}$  y  $E_{nt}$  la dilatación en dirección  $\vec{n}$  y la media distorsión angular respectivamente.

Proposición 2: El círculo de Mohr es un círculo.

dem: Sea  $\alpha \in [0, 2\pi]$  el ángulo entre  $\vec{l}_1$  y  $\vec{n}$ .

entonces  $\vec{n} = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) \\ \sin(\alpha) \end{pmatrix}$  y  $\vec{t} = \begin{pmatrix} -\sin(\alpha) \\ \cos(\alpha) \end{pmatrix}$

Las fórmulas (2.31) y (2.32) (expresión de  $\epsilon_{nn}$  y  $\epsilon_{nt}$  en función del tensor  $\epsilon$ ) nos dan que

$$\epsilon_{nn} = \vec{n}^T \epsilon \vec{n} = \epsilon_1 \cos^2(\alpha) + \epsilon_2 \sin^2(\alpha)$$

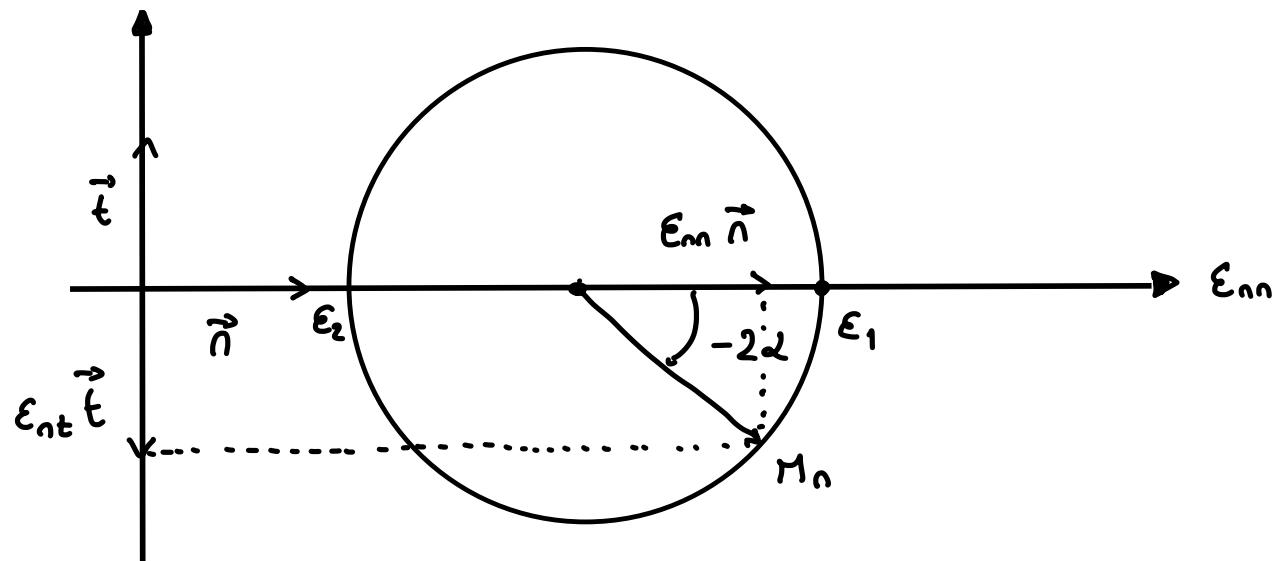
$$\epsilon_{nt} = \vec{n}^T \epsilon \vec{t} = (\epsilon_2 - \epsilon_1) \cos \alpha \sin \alpha ,$$

que se puede escribir como

$$\epsilon_{nn} = \frac{\epsilon_1 + \epsilon_2}{2} + \frac{\epsilon_1 - \epsilon_2}{2} \cos(-2\alpha) \quad (2.40)$$

$$\epsilon_{nt} = \frac{\epsilon_1 - \epsilon_2}{2} \sin(-2\alpha).$$

Esto representa el círculo de Mohr ilustrado a continuación:



Ejercicio 8 : Que puntos del círculo de Mohr representan una dilatación máxima? Que pasa con la distorsión angular en estos puntos? Que puntos presentan la distorsión angular máxima? Que pasa con las dilataciones en estos puntos? .

Ejercicio 9 : Notese que el círculo de Mohr es un círculo con respecto al referencial  $\{P_t, \vec{n}, \vec{t}\}$  sin embargo, con respecto al referencial fijo  $\{P_t, \vec{i}_1, \vec{i}_2\}$  es una ellipse llamada **ellipse de Lamé**. Probarlo.