MECÁNICA ANALÍTICA

Tarea 1 Semestre 2025-1 Prof. Renato Calleja

Ejercicio 0. Escribir las ecuaciones de Newton de n masas puntuales que interactúan por la ley de atracción gravitacional de Newton.

Ejercicio 1. Resuelva el sistema

$$m\ddot{x} = -kx - \gamma\dot{x}, \quad m, k, \gamma > 0$$

(el oscilador amortigüado).

(a) Haga un dibujo del plano fase.

(b) Muestre que $\frac{d}{dt}E(t) \leq 0$, donde $E = \frac{1}{2}m(\dot{x})^2 + \frac{1}{2}kx^2$.

Ejercicio 2. Sea el sistema

$$i\dot{A} = i\gamma A + \delta\overline{A}, \quad \gamma, \delta > 0$$

donde $A = x + iy$, x, y reales.

Encuentre la estabilidad del origen y haga un dibujo del espacio fase. (Notar que $\overline{A} = x - iy$

Ejercicio 3. Sea el sistema

$$m\ddot{x} = -x(x-1)(x-2)$$

Haga un dibujo cualitativo del plano fase. Identifique el rango de energias en cada región de diferentes tipos de movimiento.

Ejercicio 4. Sea el sistema

$$m\ddot{q} = -\nabla V \quad \text{en } \mathbb{R}^n,$$

conm $V = V(|q|)$ y $|q|$ la norma euclidiana

(a) Muestre que la dirección de la fuerza es hacia el origen.

(b) Muestre la conservación del *momento angular* $L = mq \times \dot{q}$ de la partícula (en dimensiones 2 y 3).

(c) En el caso tridimensional, el origen, la posición inicial $q(0)$ y la velocidad inicial $\dot{q}(0)$ de la partícula definen un plano $P_0 \subset \mathbb{R}^n$. Muestre que la trayectoria se queda en P_0 para cada tiempo t (de su existencia) y que el problema tridimensional se reduce al problema plano.

(d) Problema plano : Escribe las ecuaciones de Newton en coordenadas polares r, θ. Muestra que

$$m\ddot{r} = -V'(r) + \frac{L^2}{r^3} \quad \text{(ecuacion radial)}$$

Explica en que sentido la conservación del momento angular nos permite reducir el problema a un problema unidimensional.

(e) Estudio del potencial Newtoniano I, $V(q) = -\frac{GMm}{|q|}$ en el plano (G, M, m son constantes positivas. Haz dibujos del plano fase de la ecuación radial anterior para los casos $L = 0$ y $L \neq 0$. En el caso $L = 0$ especifica las condiciones iniciales para las cuales la partícula choca con el centro. En el Caso $L \neq 0$ muestra que la partícula nunca puede chocar con el centro.

(f) Estudio del potencial Newtoniano en el plano II. Especifica las condiciones para las cuales la partícula escapa hacia el infinito (para $L = 0$ y $L \neq 0$). Muestra que el tiempo de escape es siempre infinito.

Ejercicio 5. Sea la ecuación

$$\ddot{\theta} = -\sin\theta - \varepsilon\dot{\theta}, \quad \theta \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0$$

que describe el péndulo matemático amortigüado. Encuentre los puntos fijos y su estabilidad. Haga un dibujo qualitativo del espacio fase.

Ejercicio 7.

(1) Mostrar que las condiciones del teorema de existencia y unicidad (Picard-Lindelöff) no se cumplen para el problema de valores iniciales
$$\dot{x} = x^{1/5}, \quad x(0) = 0$$

(2) Considerar el problema,
$$\dot{x} = x^{1/5}, \quad x(t_0) = 0$$
Encontrar todas las soluciones para este problema.

(3) ¿Se cumplen las condiciones de existencia y unicidad para el siguiente PVI ? ¿Porqué ?
$$\dot{x} = x^{1/5}, \quad x(0) = \frac{1}{2}$$
Calcular una solución y encontrar el intervalo maximal de existencia.

Tarea 1

Ejercicio 0. Escribir las ecuaciones de Newton de n masas puntuales que interactúan por la ley de atracción gravitacional de Newton

Consideremos $\{\underline{r_1}, \dots, \underline{r_n}\} \subseteq \mathbb{R}^3$ partículas, con masas $\{m_1, \dots, m_n\} \subseteq \mathbb{R}$ respectivamente. Supongamos que las únicas fuerzas que sufren las partículas son aquellas generadas por la interacción gravitacional dada por la ley de gravitación de Newton.
Denotemos por F_{ij} la fuerza que ejerce la partícula $\underline{r_j}$ sobre la partícula $\underline{r_i}$, y está dada por

$$F_{ij} = -m_i G \frac{\underline{r_i} - \underline{r_j}}{\|\underline{r_i} - \underline{r_j}\|^3}.$$

Usando la segunda Ley de Newton, obtenemos que

$$m_i \ddot{\underline{r_i}} = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} -m_i G \frac{\underline{r_i} - \underline{r_j}}{\|\underline{r_i} - \underline{r_j}\|^3} \qquad \text{para } i = 1, \dots, n.$$

(Lo cual es un sistema de $3N$ ecuaciones diferenciales).

Ejercicio 1: Resuelva el sistema

$$m\ddot{x} = -Kx - \gamma\dot{x} \qquad m, K, \gamma > 0 \quad (1) \quad (\text{el ocilador armónico amortiguado}).$$

a) Haga un dibujo del plano fase.

b) Muestre que $\frac{d}{dt} E(t) \leq 0$, donde $E = \frac{1}{2} m(\dot{x})^2 + \frac{1}{2} Kx^2$

Rescribimos (1) como

$$\ddot{x} = -\frac{K}{m} x - \frac{\gamma}{m}\dot{x}.$$

Haciendo $\dot{x} = y$ 1 es equivalente al sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -\frac{K}{m} x - \frac{\gamma}{m} y \end{cases}$$

En forma matricial

$$\dot{X} = AX, \quad \text{con} \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad y \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{K}{m} & -\frac{\gamma}{m} \end{pmatrix}.$$

El polinomio característico de A es

$$p(\lambda) = \det \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -\frac{K}{m} & -\frac{\gamma}{m} - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + \frac{\gamma}{m}\lambda + \frac{K}{m}$$

Caso 1: $\frac{\gamma^2}{m^2} - \frac{4K}{m} = \frac{\gamma^2 - 4Km}{m^2} > 0$ (Sobreamortiguado).

En este caso A tiene dos valores propios reales y distintos

$$\lambda_1 = \frac{-\gamma + \sqrt{\gamma^2 - 4mK}}{2m} \quad y \quad \lambda_2 = \frac{-\gamma - \sqrt{\gamma^2 - 4mK}}{2m}.$$

Observese que $\lambda_1, \lambda_2 > 0$.

Por lo tanto $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} = P^{-1} A P$

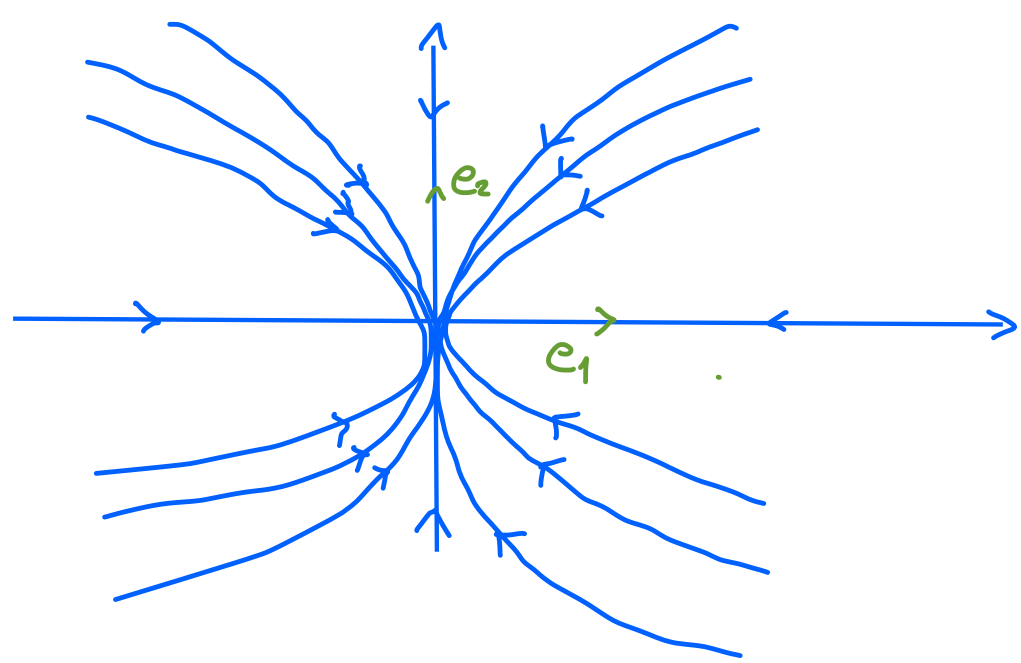
donde P es la matriz de vectores propios de A.

Sea $Y(t) := P X(t)$ entonces $\dot{Y}(t) = D\, Y(t)$.

El cual es un sistema muy sencillo y su solución es

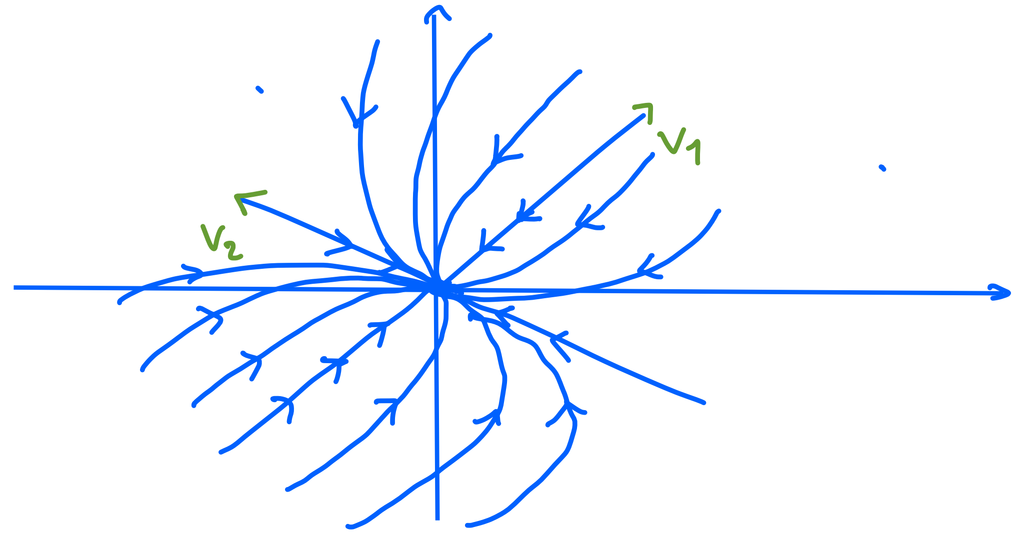
$$Y(t) = C_1 e^{-\lambda_1 t} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + C_2 e^{-\lambda_2 t} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \forall t \geq 0 .$$

Como $\lambda_1 > \lambda_2$ el retrato fase luce como sigue



Retrato fase de Y

La transformación P dependerá de los parámetros m, k, γ pero siempre transformará la base canónica en otra base de $\mathbb{R}^2$ por lo que el retrato fase del sistema original lucirá como sigue



Retrato fase de X.

(Oscilador sobre amortiguado).

Caso 2: $\gamma^2 - 4km < 0$

$$\boxed{\alpha = -\frac{\gamma}{2m} \quad \beta = \frac{\sqrt{4mk-\gamma^2}}{2m}}$$

En este caso A tiene dos valores propios complejos, $\lambda_1 = \alpha + i\beta$, $\lambda_2 = \alpha - i\beta$,
Sea $V = V_1 + i V_2$ el vector propio complejo, asociado a λ_1.

Como
$$A(V_1 + iV_2) = (\alpha + i\beta)(V_1 + iV_2)$$
$$AV_1 + iAV_2 = (\alpha V_1 - \beta V_2) + i(\beta V_1 + \alpha V_2)$$

Entonces $AV_1 = \alpha V_1 - \beta V_2$ y $AV_2 = \beta V_1 + \alpha V_2$

Sea P la matriz formada por los vectores columna V_1 y V_2.
Entonces

$$\begin{aligned}(P^{-1}AP)e_1 &= P^{-1}AV_1 \\ &= P^{-1}(\alpha V_1 - \beta V_2) \\ &= \alpha e_1 - \beta e_2\end{aligned}$$, donde $e_1 = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ y $e_2 = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$.

y
$$\begin{aligned}(P^{-1}AP)e_2 &= P^{-1}AV_2 \\ &= P^{-1}(\beta V_1 + \alpha V_2) \\ &= \beta e_1 + \beta e_2 .\end{aligned}$$

Así

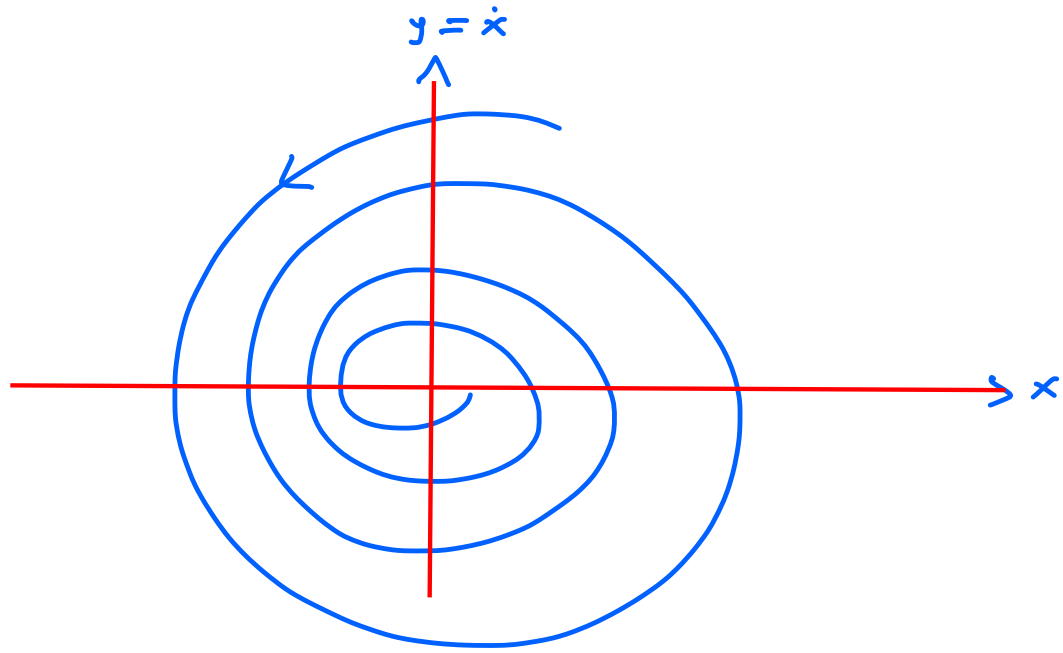
$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix}\alpha & \beta \\ -\beta & \alpha\end{pmatrix} =: C$$

Haciendo $Y(t) = PX(t)$, $Y(t)$ satisface que

$\dot{Y}(t) = CY(t)$, sistema cuyas soluciones son

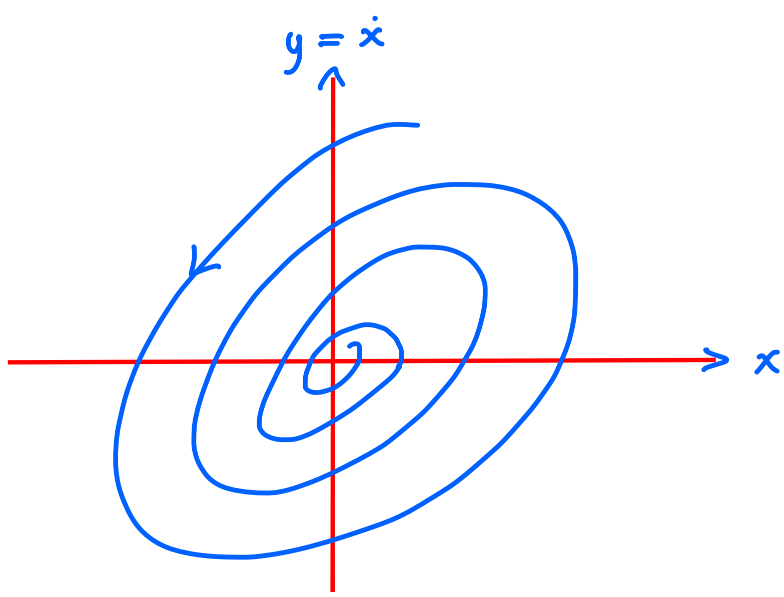
$$Y(t) = C_1 e^{\alpha t}\begin{pmatrix}\cos\beta t \\ -\sin\beta t\end{pmatrix} + C_2 e^{\alpha t}\begin{pmatrix}\sin\beta t \\ \cos\beta t\end{pmatrix}$$

Y por lo tanto el retrato fase para Y luce como



Retrato fase de Y

$$\Big\downarrow P^{-1}$$



Retrato fase de X

(Ocilador subamortiguado)

Caso 3: $\dfrac{\gamma^2 - 4km}{m^2} = 0$.

El único valor propio del sistema es $\lambda = -\dfrac{\gamma}{2m}$

Busquemos un vector propio asociado:

$$(A - \lambda I)\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = 0 \qquad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & -\frac{\gamma}{m} \end{pmatrix}.$$

$$\Longleftrightarrow \begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ -\frac{k}{m} & -\left(\lambda + \frac{\gamma}{m}\right) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = 0$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} -\lambda v_1 + v_2 = 0 \\ -\frac{k}{m} v_1 - \frac{\gamma}{2m} v_2 = 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \boxed{v_2 = \lambda v_1}$$

Lo cual muestra que el espacio propio asociado al valor propio λ es el generado por $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{\gamma}{2m} \end{pmatrix} \right\}$.

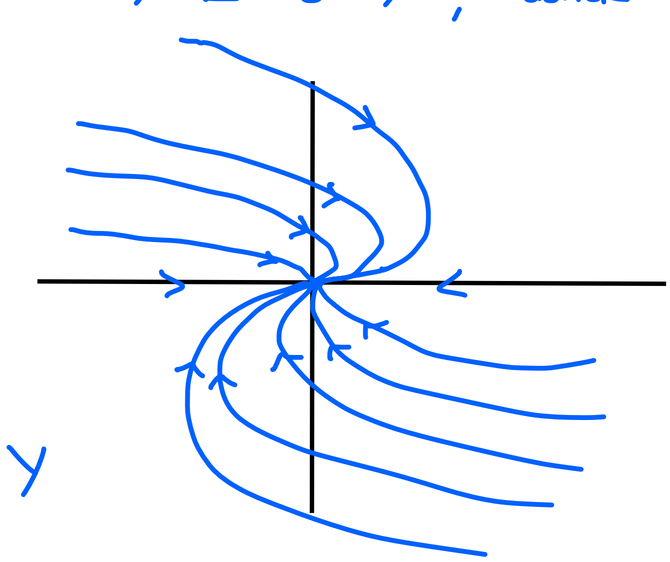
Busquemos un vector propio generalizado V_2 de tal forma que

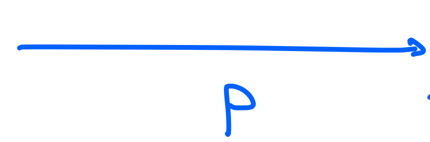
$$P^{-1} A P = J \quad \text{donde} \quad P = (v_1\ v_2) \quad \text{y} \quad J = \begin{pmatrix} -\frac{\gamma}{2m} & 1 \\ 0 & -\frac{\gamma}{2m} \end{pmatrix}.$$

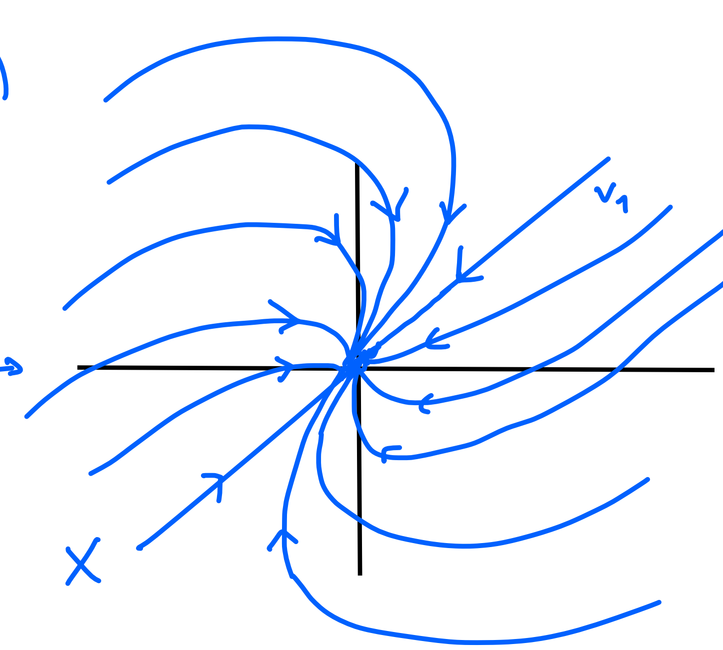
El vector $v_2 = \begin{pmatrix} -\frac{k}{m} \\ 1 \end{pmatrix}$ conviene.

Por lo tanto el sistema es equivalente (salvo un cambio de base al sistema

$$\dot{Y} = JY, \quad \text{donde} \quad Y(t) = PX(t)$$







b) En cualquier caso, la derivada de la energía es

$$\frac{d}{dt}E(t) = m\dot{x}\ddot{x} + kx\dot{x} = \dot{x}(m\ddot{x} + kx) = \dot{x}(-\gamma\dot{x}) \leq 0 \quad \forall t \geq 0.$$

Ejercicio 2 Sea el sistema

$$i\dot{A} = i\gamma A + \delta \bar{A} \qquad \gamma, \delta > 0 \text{, donde } A = x + iy \text{ , } x, y \in \mathbb{R}.$$

Encuentre la estabilidad del origen y haga un dibujo del espacio fase.

$$i\dot{A} = i(\dot{x} + i\dot{y}) = -\dot{y} + i\dot{x}$$

$$\begin{aligned} i\gamma A + \delta \bar{A} &= i\gamma(x+iy) + \delta(x - iy) \\ &= (\delta x - \gamma y) + i(\gamma x - \delta y) \end{aligned}$$

Así, el sistema se puede escribir como

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \gamma x - \delta y \\ \dot{y} &= -\delta x + \gamma y \end{aligned}$$, o, en forma matricial

$$\dot{X} = AX \qquad \text{donde} \qquad X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} \gamma & -\delta \\ -\delta & \gamma \end{pmatrix}$$

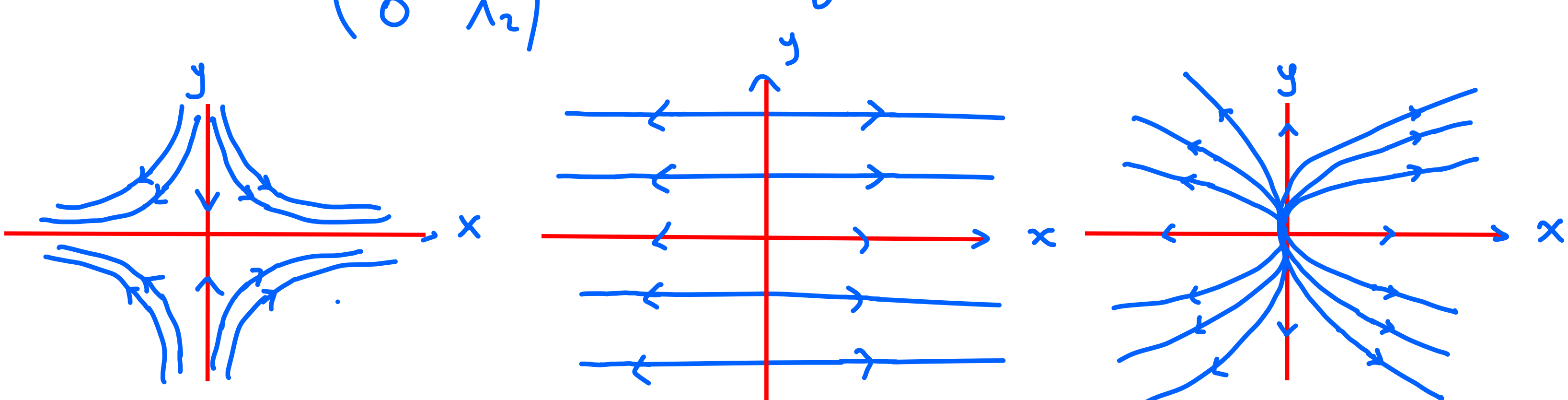
Calculamos los valores propios de A

$p(\lambda) = (\gamma - \lambda)^2 - \delta^2 = (\gamma + \delta - \lambda)(\gamma - \delta - \lambda)$.

Entonces $\lambda_1 = \gamma + \delta$ y $\lambda_2 = \gamma - \delta$ son los v.p distintos de A.

Por lo tanto, salvo un cambio lineal de coordenadas (dado por la matriz de vectores propios) el sistema es equivalente a

$$\dot{Y}(t) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} Y(t) \text{ ,}$$ cuyo retrato fase es:



$\gamma < \delta$ $\qquad$ $\gamma = \delta$ $\qquad$ $\gamma > \delta$

Ejercicio 3: Sea el sistema

$$m\ddot{x} = -x(x-1)(x-2) . \qquad m\ddot{x} = -\mathcal{U}'(x)$$

Haga un dibujo cualitativo del plano fase. Identifique el rango de energías en cada región de diferentes tipos de movimientos.

Respuesta: Primero, notemos que el sistema

$$\dot{x} = y$$

$$\dot{y} = -\frac{1}{m} x(x-1)(x-2) ,$$

tiene 3 puntos de equilibrio $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Linealizando alrededor de estos puntos obtenemos los sistemas linealizados

$$(S_1) \quad \dot{X} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{m}(3x^2-6x+2) & 0 \end{pmatrix}\Bigg|_{x=y=0} X$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{2}{m} & 0 \end{pmatrix} X$$

Cuyos valores propios son $\lambda = \pm i\sqrt{\frac{2}{m}}$, lo cual muestra una dinámica circular periódica alrededor de $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

$$(S2) \quad \dot{X} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{m}(3x^2-6x+2) & 0 \end{pmatrix}\Bigg|_{x=1,y=0} X$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{m} & 0 \end{pmatrix} X$$

Cuyos valores propios son $\lambda = \pm\sqrt{\frac{1}{m}}$, lo cual prueba que tenemos un equilibrio inestable alrededor de $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$.

$$(S3)\quad \dot{X} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{m}(3x^2-6x+2) & 0 \end{pmatrix}\Bigg|_{x=2,\,y=1} X$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{2}{m} & 0 \end{pmatrix} X$$

Por lo que la dinámica del punto $\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix}$ son iguales, es decir, tenemos trayectorias circulares periódicas

Ya que conocemos la estabilidad de los puntos de equilibrio hagamos un análisis de la energía.

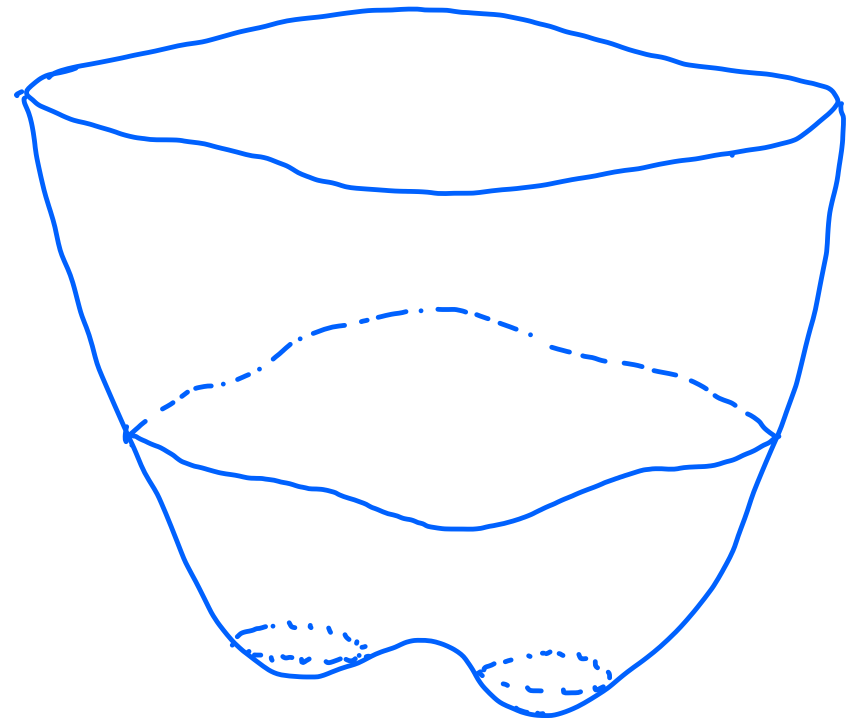
Como la fuerza es $-\frac{1}{m}x(x-1)(x-2)$, entonces el potencial es

$$\mathcal{U}(x) = \frac{1}{m}\int x(x-1)(x-2)\,dx = \frac{1}{m}\left(\frac{1}{4}x^4 - x^3 + x^2\right).$$

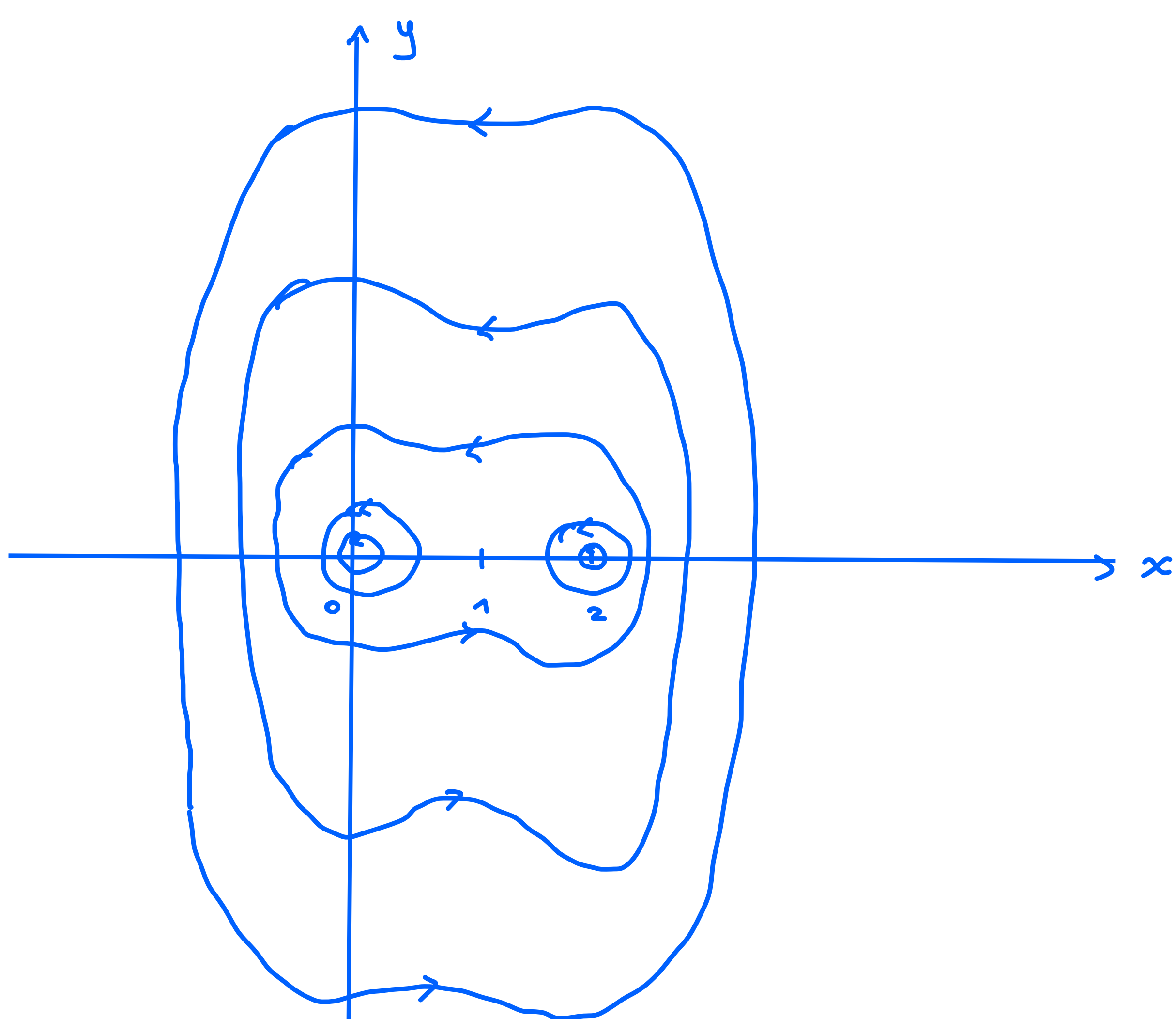
La energía es entonces

$$E = \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{m}\left(\frac{1}{4}x^4 - x^3 + x^2\right).$$

Recordando que los trayectorias tienen energía constante, estos están contenidas en las curvas de nivel de la gráfica siguiente



De esto y de las observaciones de estabilidad sobre los equilibrios podemos esbozar el plano fase como sigue



Ejercicio 4: Sea el sistema

$$m\ddot{q} = -\nabla V \quad \text{en } \mathbb{R}^n,$$

con $V = V(|q|)$ y $|q|$ la norma euclidiana.

a) Muestre que la dirección de la fuerza es hacia el origen

b) Muestre la conservación del momento angular $L = mq \times \dot{q}$ de la partícula (en dimensiones 2 y 3).

c) En el caso tridimensional, el origen, la posición inicial $q(0)$ y la velocidad inicial $\dot{q}(0)$ de la partícula definen un plano $P_0 \subset \mathbb{R}^3$. Muestre que la trayectoria se queda en P_0 para cada tiempo t (de su existencia) y que el problema tridimensional se reduce al problema plano.

d) Problema plano: Escribe las ecuaciones de Newton en coordenadas polares, r, θ. muestra que

$$m\ddot{r} = -V'(r) + \frac{L^2}{r^3} \quad \text{(ecuación radial)}.$$

Explica en que sentido la conservación de momento angular nos permite reducir el problema a un problema unidimensional.

e) Estudio del potencial Newtoniano I, $V(q) = -\frac{GMm}{|q|}$ en el plano $G, M, m > 0$. Haz dibujos del plano fase de la ecuación radial anterior para los casos $L = 0$ y $L \neq 0$. En el caso $L \neq 0$ muestra que la partícula nunca puede chocar en el centro.

f) Estudio del potencial Newtoniano en el plano II. Especifica las condiciones para las cuales la partícula escapa hacia infinito (para $L = 0$ y $L \neq 0$). Muestra que el tiempo de escape es siempre finito.

a) Aplicando la regla de la cadena $\nabla V(q) = V'(|q|)\frac{q}{|q|}$ $\forall q \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.

$\therefore$ La fuerza $-\nabla V(q)$ apunta hacia el centro.

b)
$$\frac{d}{dt}(mq \times \dot{q}) = m\dot{q} \times \dot{q} + mq \times \ddot{q}$$
$$= mq \times \ddot{q}$$
$$= mq \times V'(|q|)\frac{q}{|q|}$$
$$= 0$$

$\therefore$ Se preserva el momento angular.

c) Dado que $\dot{q}(t)$ siempre pertenece al plano que pasa por el origen cuyo vector normal es $\vec{n} = mq(t) \times \dot{q}(t)$, y este último no depende de t, concluimos que $\dot{q}(t)$ siempre está en un mismo plano y por lo tanto la trayectoria es plana.

d) Por el inciso anterior podemos suponer que el movimiento ocurre en el plano xy. Podemos escribir

$$q = r\begin{pmatrix}\cos\theta\\ \sin\theta\\ 0\end{pmatrix}$$

$$\dot{q} = \dot{r}\begin{pmatrix}\cos\theta\\ \sin\theta\\ 0\end{pmatrix} + r\begin{pmatrix}-\dot{\theta}\sin\theta\\ \dot{\theta}\cos\theta\\ 0\end{pmatrix}$$
$$= \dot{r}\,\underline{e_r} + r\dot{\theta}\,\underline{e_\theta} \quad , \text{ donde } e_r = \begin{pmatrix}\cos\theta\\ \operatorname{sen}\theta\\ 0\end{pmatrix} \text{ y } \underline{e_\theta} = \begin{pmatrix}-\operatorname{sen}\theta\\ \cos\theta\\ 0\end{pmatrix}$$

$$\ddot{q} = \ddot{r}\,\underline{e_r} + \dot{r}\dot{\theta}\,\underline{e_\theta} + (\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})\underline{e_\theta} - r\dot{\theta}^2\,\underline{e_r}$$
$$= (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\,\underline{e_r} + (2\dot{r}\dot{\theta} - r\ddot{\theta})\,\underline{e_\theta}$$

Como $m\ddot{q} = -V'(r)\dfrac{q}{r} = -V'(r)\,\underline{e_r}$

entonces $m\ddot{r} = V'(r) + r\dot{\theta}^2$

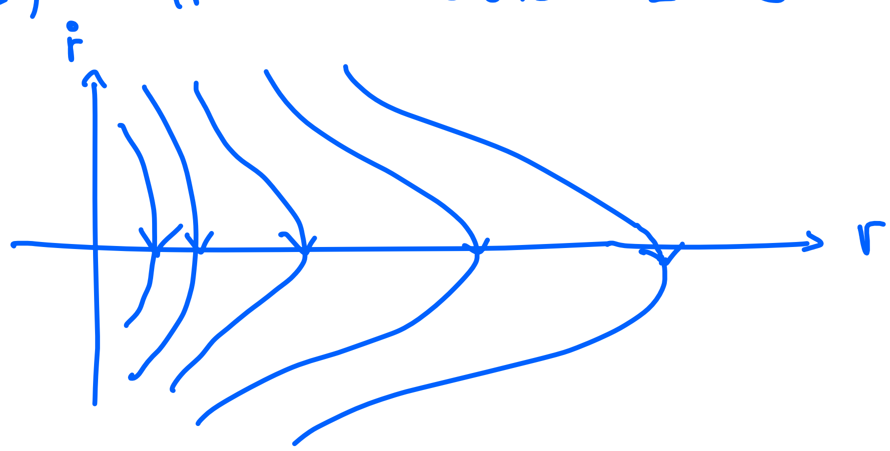
$$= V'(r) + \frac{L}{r^3}$$

$r^2\dot{\theta} = L$

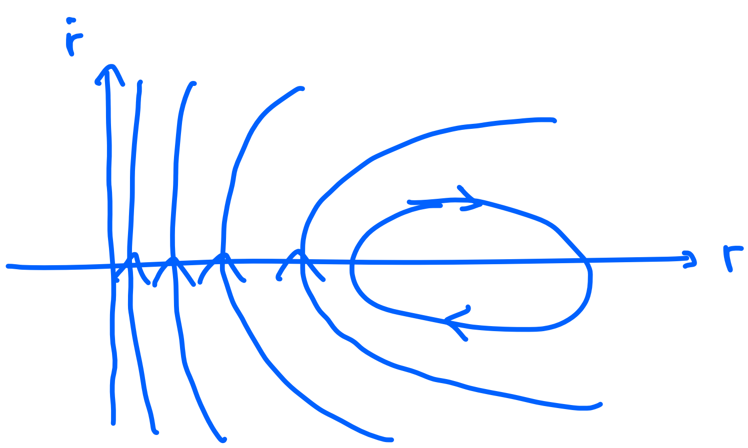
$r\dot{\theta}^2 = r\dfrac{L}{r^4} = \dfrac{L}{r^3}$

Aquí fue clave, que el momento angular es constante, pues de esta forma L^2 no depende de $\dot{\theta}$ y por lo tanto obtenemos una ecuación de una sola dimensión.

e) Retrato fase cuando $L = 0$



Retrato fase cuando $L \neq 0$



f) Para encontrar las condiciones de escape a infinito de la partícula analicemos la energía.

Ejercicio 5 : Sea la ecuación

$$\ddot{\theta} = -\operatorname{sen}\theta - \varepsilon\dot{\theta}, \quad \theta \in \mathbb{R}, \ \varepsilon > 0$$

que describe el péndulo matemático amortigüado. Encuentre sus puntos fijos y su estabilidad. Haga un dibujo qualitativo des espacio fase.

Respuesta: Supongamos que $\theta(t) \equiv \theta$ es una solución constante de la ecuación. Entonces $\operatorname{sen}\theta = 0$, por lo que $\theta_1 = 0$ y $\theta_2 = \pi$ son las soluciones constantes de la ecuación (modulo 2π).

Haciendo $x = \theta$ y $y = \dot{\theta}$, la ecuación se escribe como:

$$\dot{X} = \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ -\operatorname{sen}x - \varepsilon y \end{pmatrix}.$$

Los puntos fijos del sistema son entonces $X_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ y $X_2 = \begin{pmatrix} \pi \\ 0 \end{pmatrix}$.

Podemos linealizar el sistema alrededor de estos puntos como sigue:

(SL1) $\dot{X} = A_1 X$ donde

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\cos x & -\varepsilon \end{pmatrix}\Bigg|_{x=y=0} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -\varepsilon \end{pmatrix}$$

(SL2) $\dot{X} = A_2 X$

$$A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\cos x & -\varepsilon \end{pmatrix}\Bigg|_{x=\pi,y=0} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -\varepsilon \end{pmatrix}$$

Para determinar la estabilidad de los sistemas calculemos los valores propios de A_1 y A_2, para ello calculemos las raíces de los polinomios característicos.

$p_1(\lambda) = \lambda^2 + \lambda\varepsilon + 1$ cuyas raíces son $\dfrac{-\varepsilon \pm \sqrt{\varepsilon^2 - 4}}{2} < 0$ si $\varepsilon \geq 2$.

o bien $\dfrac{-\varepsilon \pm i\sqrt{4-\varepsilon^2}}{2}$, cuya parte real $-\dfrac{\varepsilon}{2} < 0$ si $\varepsilon < 2$.

En este caso, podemos concluir que la solución $X_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ es una solución estable para el sistema linealizado alrededor de X_1.

$p_2(\lambda) = \lambda^2 + \lambda\varepsilon - 1$ cuyas raíces son $\dfrac{-\varepsilon \pm \sqrt{\varepsilon^2 + 4}}{2}$.

Observamos que la primera raíz $\lambda_1 = \dfrac{-\varepsilon + \sqrt{\varepsilon^2 + 4}}{2} > 0$, mientras que $\lambda_2 = \dfrac{-\varepsilon - \sqrt{\varepsilon^2 + 4}}{2} < 0$.

Por lo tanto la solucion $X_2 = \begin{pmatrix} \pi \\ 0 \end{pmatrix}$ es inestable para el sistema linealizado alrededor de X_2 es inestable.

Por el Teorema de estabilidad de Lyapunov, concluimos que el sistema no lineal tiene un equilibrio estable $X_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ y un equilibrio inestable $X_2 = \begin{pmatrix} \pi \\ 0 \end{pmatrix}$.

Ejercicio 7

(1) Mostrar que las condiciones del teorema de existencia y unicidad (Picard-Lindeloff) no se cumplen para el problema de valores iniciales

$$\dot{x} = x^{1/5}, \quad x(0) = 0.$$

(2) Considerar el problema,

$$\dot{x} = x^{1/5}, \quad x(t_0) = 0.$$

Encontrar todas las soluciones para este problema.

(3) ¿Se cumplen las condiciones de existencia y unicidad para el siguiente PVI?

$$\dot{x} = x^{1/5}, \quad x(0) = \frac{1}{2}.$$

Calcular una solución y encontrar el intervalo maximal de existencia.

Solución:

1) Consideremos la función $x(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \leq 0 \\ \left(\frac{4}{5}\right)^{5/4} t^{5/4} & \text{si } t > 0 \end{cases}$

$$\dot{x}(t) = \frac{5}{4}\left(\frac{4}{5}\right)^{5/4} t^{\frac{1}{4}}$$

$$= \left(\frac{4}{5}\right)^{\frac{1}{4}} t^{\frac{1}{4}} = x(t)^{\frac{1}{5}} \qquad \forall t > 0.$$

$$\dot{x}(t) = 0 \qquad \forall t < 0.$$

En $t = 0$ $\dot{x}(t) = 0$ (la derivada por la derecha y por la izquierda coincide).

$\therefore$ $x(t)$ así definida es solución del PVI

$$\dot{x} = x^{1/5} \quad \text{y} \quad x(0) = 0.$$

Sin embargo $x(t) \equiv 0$ también es solución. Por lo tanto no se cumplen las condiciones del teorema de Picard - Lindeloff.
(Se puede verificar que esto se debe a que $x \mapsto x^{1/5}$ no es lipshitz continua en 0).

2) Observemos que la función $x(t) \equiv 0$ es una solución de

$$\dot{x} = x^{1/5} \quad , \quad x(t_0) = 0 . \qquad (1)$$

Supongamos que existe una función $x(t)$ no identicamente 0, que sea solución de del PVI (1).

Entonces existe $t_1 \neq t_0$ en $\mathbb{R}$ y $\varepsilon > 0$ tal que $x(t_1) > 0$.

Denotemos por $x_1 =: x(t_1)$ el valor de x en el punto t_1.

Consideremos el PVI

$$\dot{x} = x^{1/5} \quad , \quad x(t_1) = x_1 . \qquad (2)$$

Como la función $x \longmapsto x^{1/5}$ es Lipshitz continua en una vecindad de x_1, el teorema de Picard Lindelof asegura que el PVI (2) tiene una solución maximal única.

Por otro lado, tenemos que

$$\tilde{x}(t) = \left(\frac{4}{5}\right)^{5/4} (t - C)^{5/4} \qquad \text{con} \quad C = t_1 - \frac{5}{4} x_1^{4/5}$$

es una solución maximal del PVI (2) con intervalo de definición $[C, +\infty)$. Entonces

$$x(t) = \tilde{x}(t) \quad \forall t \geq C .$$

Como $x(t)$ es no decreciente, no negativa y $x(t_0)=0$ entonces $0 \leq x(t) \leq x(C) = 0$ $\forall t \leq C$.

Por lo tanto las soluciones del PVI (1) son

$$x(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \leq C \\ \left(\frac{4}{5}\right)^{5/4} (t-C)^{5/4} & \text{si } t \geq C \end{cases},$$

con $C \geq t_0$.

3) En efecto, se cumplen las condiciones del teorema de existencia y unicidad de Picard - Lindeloff para el PVI

$\dot{x} = x^{1/5}$, $x(0) = \frac{1}{2}$ (3), pues la función $x \longmapsto x^{1/5}$ es Lipshitz continua

en una vecindad de $\frac{1}{2^5}$ (ya que es C^1 en $(0, +\infty)$.

Inspirados en lo que se hizo anteriormente, buscamos una solución de la forma

$x(t) = \left(\frac{4}{5}\right)^{5/4} (t-c)^{5/4}$. Utilizando que $x(0) = \frac{1}{2}$

tenemos que $C = -\frac{5}{4} \frac{1}{2^{4/5}}$.

Así, $x(t)$ definida de esta manera, es la solución maximal del PVI (3) y su intervalo de definición es $[C, +\infty)$.