Martes 10 de Junio 2025

Capítulo 1: Cinemática del medio continuo.

Cinemática := ciencia del movimiento.

1.1 La transformación del medio continuo

Definición 1: Un cuerpo material es un conjunto $\mathcal{M}$ de partículas.

A continuación describiremos las hipótesis necesarias para que un cuerpo material se considere un medio continuo.

Hipótesis 1 (Continuidad) Un cuerpo continuo $\mathcal{M}$ satisface la hipótesis de continuidad sii $\forall\, t \in \mathbb{R}^+$, $\mathcal{M}$ está en biyección con un abierto $\Omega_t \subseteq \mathbb{R}^3$. Denotaremos tal biyección como $K_t : \mathcal{M} \longrightarrow \Omega_t$.

Definición 2: La aplicación $\mathcal{F}_t = K_t \circ K_0^{-1}$ descrita por el diagrama

$$\begin{tikzcd} & \Omega_0 \arrow[dd, "\boxed{K_t \circ K_0^{-1} := \mathcal{F}_t}"] \\ \mathcal{M} \arrow[ur, "K_0"] \arrow[dr, "K_t"'] & \\ & \Omega_t \end{tikzcd} \tag{1.1}$$

es llamada transformación del medio continuo.

Definición 3: Dado un referencial ortonormal $R = (O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ de $\mathbb{R}^3$ diremos que Ω_0 es la configuración de referencia y cada vector $\vec{X} \in \Omega_0$ será llamado vector Lagrangiano en contraste con cada vector

$$\boxed{\vec{x}(t) := \mathfrak{F}_t(\vec{X})} \quad . \qquad (1.2)$$

que será llamado vector euleriano.

Notación: Si X_K, $K \in \{1,2,3\}$ son los componentes en la base $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ del vector $\vec{X} \in \Omega_0$, usando la convención de suma con indices repetidos podemos escribir

$$\boxed{\vec{X} = X_K \vec{e}_K} \quad . \qquad (1.3)$$

Analogamente, si denotamos como x_i los componentes de $\vec{x}$ en esta base, tenemos que

$$\boxed{\vec{x} = x_i \vec{e}_i} \quad . \qquad (1.4)$$

1.2 La transformación tangente

Hipotesis 2: (Continuidad de la transformación)

i) Regularidad espacial: $\forall t \geqslant 0$, $\mathfrak{F}_t : \Omega_0 \longrightarrow \Omega_t$ es un C^1- difeomorfismo.

ii) Regularidad temporal: $\forall \vec{X} \in \Omega_0$, $t \longmapsto \mathfrak{F}_t(x)$ y $t \longmapsto \partial_K \mathfrak{F}_t(\vec{X})$ son continuas $\forall K \in \{1,2,3\}$.

Notación: Denotaremos como $F(\vec{X}, t)$ a la transformación lineal tangente de $\mathfrak{F}_t(\vec{X})$, es decir

$$\boxed{F(\vec{X}, t) := \operatorname{grad}_{\vec{X}} \mathfrak{F}_t(\vec{X})} \qquad (1.5)$$

En coordenadas $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$, F se escribe como

$$\boxed{F_{iK} = \frac{\partial x_i}{\partial X_K}} \qquad i, K \in \{1,2,3\} \qquad (1.6)$$

Denotaremos como $d\vec{X}$ a cualquier vector en $T_{\vec{X}}\Omega_0$ y como $d\vec{x}$ a cualquier vector en $T_{\vec{x}}\Omega_t$. Con esta notación podemos escribir

$$\boxed{d\vec{x} = F\, d\vec{X}} \qquad (1.7)$$

o en coordenados

$$\boxed{dx_i = F_{iK}\, dX_K} \qquad (1.8)$$

<u>Teorema 1</u>: F es invertible y F^{-1} es la derivada de $\mathcal{F}^{-1}$. Es decir

$$\boxed{F^{-1}(\vec{x}, t) = \mathrm{grad}_{\vec{x}}\, \mathcal{F}^{-1}(\vec{x}, t)} \qquad (1.9)$$

<u>Observación 1</u>: En coordenadas

$$\boxed{F^{-1}_{Ki} = \frac{\partial X_K}{\partial x_i}} \qquad (1.10)$$

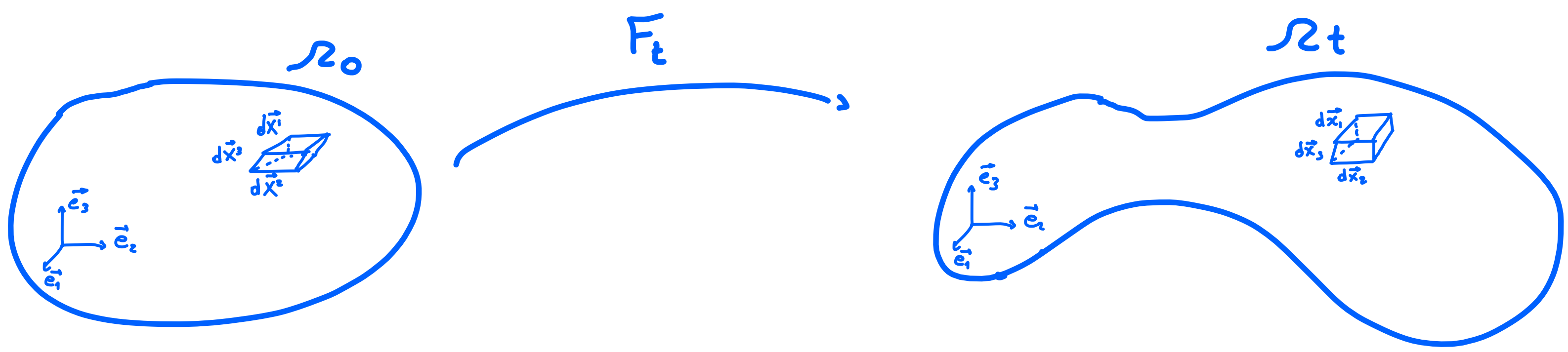
$$\boxed{F_{iK} F^{-1}_{Kj} = \frac{\partial x_i}{\partial X_K} \cdot \frac{\partial X_K}{\partial x_j} = \delta_{ij}} \qquad (1.11).$$

donde δ_{ij} representa el tensor identidad de segundo orden.

Definición 4: Decimos que un subconjunto de $\mathbb{R}^3$ es un dominio material si está constituido por las mismas partículas en todo tiempo. En particular hablaremos de curvas materiales, superficies materiales y volúmenes materiales que denotaremos por $\mathcal{C}_t$, S_t y V_t respectivamente.

Un dominio material, por ejemplo un volumen, si es suficientemente pequeño puede ser generado por los vectores $d\vec{X}^1, d\vec{X}^2$ y $d\vec{X}^3$

Que volumen ocupa la imagen de este volumen elemental bajo la transformación de medio continuo?



$$dv = \det[d\vec{x}^1, d\vec{x}^2, d\vec{x}^3]$$
$$= \det[F\,d\vec{X}^1, F\,d\vec{X}^2, F\,d\vec{X}^3]$$
$$= \det F \, \det[dX^1, dX^2, dX^3].$$
$$= J\, dV$$

donde $J = \det F$ es el determinante jacobiano de la transformación tangente, y dV es el volumen del paralelepípedo generado por $d\vec{X}^1$, $d\vec{X}^2$ y $d\vec{X}^3$.

Tenemos que $$\boxed{dv = J\, dV} \qquad (1.12)$$

Théorème 2 $J(\vec{X}, t) > 0.$

prueba: $J(\vec{X}, t) \neq 0$ pues F es invertible como $F(\vec{X}, 0) = id_{\Omega_0}$ entonces $J(\vec{X}, 0) = 1$

por la continuidad de $t \longmapsto J(\vec{X},t)$ concluimos que $J(\vec{X},t) > 0 \quad \forall t \geq 0$.

1.3 Trayectorias y líneas de corriente

Definición 5: Definimos el campo de velocidades lagrangiano.

$$\boxed{\vec{v}(\vec{X},t) = \frac{d}{dt}\mathcal{F}_t(\vec{X})} \qquad (1.13)$$

El campo euleriano de velocidades se define como

$$\boxed{\vec{v}(\vec{x},t) = \frac{d\vec{x}}{dt}} \qquad (1.14)$$

Observación 2: El campo Lagrangiano de velocidades describe la velocidad que tiene la partícula $\vec{X}$ de la configuración de referencia Ω_0 al "seguirla" en su trayectoria al tiempo t. El campo euleriano de velocidades "observa" un punto fijo del espacio y mide la velocidad de las partículas que pasan por ese punto.

Nótese que denotar por la misma letra al campo euleriano y Lagrangiano de velocidades es un abuso de notación.

Definición 6:

i) Las soluciones del sistema diferencial (1.14) se conocen como trayectorias.

ii) Para cada tiempo t definimos las líneas de corriente como las soluciones des sistema diferencial

$$\boxed{\frac{dx_1}{v_1(x,t)} = \frac{dx_2}{v_2(x,t)} = \frac{dx_3}{v_3(x,t)}} \qquad (1.15)$$

que geométricamente corresponden a las curvas tangentes al campo de velocidades $v(\cdot,t)$ para t fijo.

1.4 La derivada material

Definición 7: Sea $P \in \mathcal{M}$ y $g(P,t)$ una cantidad escalar que evoluciona en el tiempo. Abusando de la notación, escribiremos $g(\vec{X},t)$ y $g(\vec{x},t)$ para referirnos a $g(K_0^{-1}(\vec{X}),t)$ y a $g(K_t^{-1}(\vec{x}))$. Se define la **derivada material** de la cantidad g en el punto P al tiempo t como

$$\boxed{\mathring{g}(P,t) := \frac{d}{dt}\, g(P,t)} \qquad (1.16)$$

Observación 3: Si adoptamos un

Punto de vista Lagrangiano:

$$\boxed{\mathring{g} = \frac{\partial}{\partial t}\, g(\vec{X},t)} \qquad (1.17)$$

Punto de vista Euleriano

$$\begin{aligned}
\mathring{g} &= \frac{d}{dt}\, g(\vec{x}(t),t) \\
&= \frac{\partial g}{\partial t}(\vec{x}(t),t) + \frac{\partial g}{\partial x_i}(x(t),t)\,\frac{dx_i}{dt} \\
&= \frac{\partial g}{\partial t}(\vec{x}(t),t) + \operatorname{grad}_{\vec{x}} g\,(\vec{x}(t),t) \cdot \vec{v}(\vec{x},t)
\end{aligned}$$

Es decir

$$\boxed{\mathring{g} = \frac{\partial g}{\partial t} + \operatorname{grad}_{\vec{x}} g \cdot \vec{v}} \qquad (1.18)$$

Observación 4: Cuando g es una cantidad vectorial o tensorial la derivada material se toma componente a componente.

Definición 8 El campo de aceleraciones $\vec{\gamma}$ se define como la derivada material del campo de velocidades.

Observacion 5:

i) Del punto de vista Lagrangiano, el campo de aceleraciones es simplemente

$$\boxed{\vec{\gamma}(\vec{X},t) = \frac{d^2}{dt^2}\mathcal{F}_t(\vec{X})} \qquad (1.19)$$

Esta formula puede ser mas natural vista como

$$\boxed{\vec{\gamma}(\vec{X},t) = \frac{\partial^2}{\partial t}u(\vec{X},t)} \qquad (1.20)$$

Donde $\boxed{u(\vec{X},t) = \vec{x}(\vec{X},t) - \vec{X}}$ (1.21)

es el campo de desplazamientos.

ii) Del punto de vista Euleriano el campo de acceleracione re calcula como

$$\begin{aligned}\vec{\gamma}(\vec{x},t) &= \frac{d^2}{dt^2}x(t)\\ &= \frac{d}{dt}V(\vec{x}(t),t)\\ &= \frac{\partial V}{\partial t}(\vec{x},t) + \mathrm{grad}_{\vec{x}}\vec{V}(\vec{x},t)\cdot\vec{V}(x,t).\end{aligned}$$

O en forma mas compacta

$$\boxed{\vec{\gamma} = \frac{\partial V}{\partial t} + \vec{V}\cdot\mathrm{grad}_{\vec{x}}\vec{V}} \qquad (1.22)$$

Ejercicio 1: Probar con la notación tensorial (indices y dobles sumas implícitas) que

$$\boxed{\vec{\gamma} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \frac{1}{2}\,\mathrm{grad}_{\vec{x}}\, \vec{v}^{\,2} + (\mathrm{rot}_{\vec{x}}\, \vec{v}) \wedge \vec{v}} \qquad (1.23)$$

hints:

i) Usar el tensor de orientación

$$\varepsilon_{ijk} = \begin{cases} 1 & \text{si } (i,j,k) \text{ es una permutacion circular de } (1,2,3) \\ -1 & \text{si } (i,j,k) \text{ es una permutación circular de } (3,2,1) \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

ii) Usar la expresión de $\wedge$ en coordenadas:

- $[\vec{u} \wedge \vec{v}]_i = \varepsilon_{ijk}\,(u_j v_k - u_k v_j)$
- $[\mathrm{rot}\, \vec{v}]_i = \varepsilon_{ijk}\, \partial_j v_k$

iii) Usar la identidad $\varepsilon_{ijk}\, \varepsilon_{jlm} = \delta_{im}\,\delta_{kl} - \delta_{il}\,\delta_{km}$

Ver el Anexo 1. para mas identidades del tensor de orientación.

Ejercicio 2: Probar que cuando un flujo es irrotacional, es decir $\mathrm{rot}_{\vec{x}}\, \vec{v} = 0$, entonces el campo de aceleraciones proviene de un potencial.

Ejercicio 3 : Consideremos un flujo caracterizado por su campo de velocidades Euleriano $\vec{v}(\vec{x},t)$ y su campo de vorticidad $\vec{\omega} = \frac{1}{2}\,\mathrm{rot}_{\vec{x}}\, v$.

1) Mostrar que si el campo de aceleraciones $\vec{\gamma}$ deriva de un potencial, entonces $\frac{\partial \vec{\omega}}{\partial t} + \mathrm{rot}_{\vec{x}}(\vec{\omega} \times \vec{v}) = 0$.

2) Demostrar el teorema de Lagrange :

Teorema 3 : Si un fluido es puesto en movimiento sin un choque a partir de su estado de reposo y si en todo tiempo el campo de las aceleraciones deriva de un potencial entonces el flujo es irrotacional.