8 Equation de Schrödinger

Soit $N \geq 1$ et Ω la boule ouverte de $\mathbb{R}^N$ (en fait, les résultats de cet exercice restent vrai lorsque l'on remplace la boule par un ouvert "assez régulier". Pour $f_1, f_2 \in L^2(\Omega)$ on s'interesse au système

$$\begin{aligned} -\Delta u_1 + u_2 &= f_1 \\ -\Delta u_2 - u_1 &= f_2 \end{aligned} \quad \text{dans } \Omega \qquad (2.33) \text{ (Equation de Shrödinger)}.$$

avec diverses conditions aux limites.

1. On s'interesse dans cette première question aux conditions aux limiter $u_1 = u_2 = 0$ sur $\partial\Omega$. (2.34)
Soit $f_1, f_2 \in L^2(\Omega)$. On dit que $(u_1, u_2) \in H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$ est une solution faible de (2.33) – (2.34) si

$$\begin{aligned} \int_\Omega \nabla u_1 \cdot \nabla \varphi + \int_\Omega u_2 \varphi &= \int_\Omega f_1 \varphi \qquad \forall \varphi \in H_0^1(\Omega) \\ \int_\Omega \nabla u_2 \cdot \nabla \varphi - \int_\Omega u_1 \varphi &= \int_\Omega f_2 \varphi, \qquad \forall \varphi \in H_0^1(\Omega). \end{aligned} \qquad (2.35)$$

a) Montrons que le problème (2.35) admet une et une seule solution.
Soit $H = H_0^1(\Omega)^2$. On définit $B : H^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, $L : H \longrightarrow \mathbb{R}$ par

$$B[(u_1, u_2), (v_1, v_2)] = \int_\Omega \nabla u_1 \cdot \nabla v_1 + \int_\Omega \nabla u_2 \cdot \nabla v_2 + \int_\Omega u_2 v_1 - \int_\Omega u_1 v_2 \quad \text{et}$$

$$L((u_1, u_2)) = \int_\Omega f_1 u_1 + \int_\Omega f_2 u_2 \qquad \forall (u_1, u_2), (v_1, v_2) \in H.$$

Continuité:

$$|B[(u_1, u_2); (v_1, v_2)]| = \langle (u_1, u_2), (v_1, v_2) \rangle + \int_\Omega u_2 v_1 - \int_\Omega u_1 v_2$$

avec $\langle , \rangle$ le produit scalaire défini par $\langle (u_1, u_2), (v_1, v_2) \rangle = \int_\Omega \nabla u_1 \cdot \nabla v_1 + \int_\Omega \nabla u_2 \cdot \nabla v_2$ sur H (inégalité de Pointcaré).

Alors

$$\begin{aligned} |B[(u_1, u_2), (v_1, v_2)]| &\leq \|(u_1, u_2)\|_H \|(v_1, v_2)\|_H + \int_\Omega |u_2 v_1| + \int_\Omega |u_1 v_2| \\ &\leq \|(u_1, u_2)\|_H \|(v_1, v_2)\|_H + \|u_2\|_{L^2} \|v_1\|_{L^2} + \|u_1\|_{L^2} \|v_2\|_{L^2} \end{aligned}$$

$$\leqslant \|(v_1,u_2)\|_H \|(v_1,v_2)\|_H + 2\|(u_1,v_2)\|_{L^2\times L^2}\|(v_1,v_2)\|_{L^2\times L^2}$$

$$\leqslant (1+2C)\,\|(u_1,v_2)\|_H \|(v_1,v_2)\|_H \qquad (C \text{ la constante de Poincaré}).$$

$$|L(v_1,u_2)| \leqq \int_\Omega |f_1 u_1| + \int_\Omega |f_2 u_2|$$

$$\leqslant \|f_1\|_{L^2}\|u_1\|_{L^2} + \|f_2\|_{L^2}\|u_2\|_{L^2}$$

$$\leqslant \left(\|f_1\|_{L^2} + \|f_2\|_{L^2}\right)\|(u_1,u_2)\|_{L^2}$$

$$\leqslant \left(\|f_1\|_{L^2} + \|f_2\|_{L^2}\right)\|(u_1,v_2)\|_H . \qquad \forall\,(u_1,u_2)\in H.$$

Coércivité : $B[(u_1,u_2),(v_1,u_2)] = \langle (v_1,u_2),(u_1,u_2)\rangle \geqslant 0$ et égal à 0 ssi (u_1,v_2) est nul (car $\langle\, ,\rangle$ est un produit scalaire).

Le théorème de Lax-Milgram donne l'existence et unicité d'un élément $(u_1,v_2)\in H$ tel que

$$B[(u_1,v_2),(v_1,v_2)] = \int_\Omega \nabla u_1\cdot\nabla v_1 + \int_\Omega \nabla v_2\cdot\nabla v_2 + \int_\Omega u_2 v_1 - \int_\Omega u_1 v_2$$

$$= \int_\Omega f_1 v_1 + \int_\Omega f_2 v_2$$

$$= L((v_1,v_2)) \qquad \forall\,(v_1,v_2)\in H.$$

En particulier, en prenant $(v_1,0)$ et $(0,v_2)$ on obtient l'existence et unicité d'une solution de (2.35).

Remarque Si (u_1,u_2) est la solution de (2.35) alors

$$|B[(u_1,u_2),(u_1,u_2)]| = \|u_1\|^2_{H_0^1} + \|u_2\|^2_{H_0^1} = \left|\int_\Omega f_1 u_1 + \int_\Omega f_2 u_2\right|$$

$$\leqslant \left(\|f_1\|_{L^2} + \|f_2\|_{L^2}\right)\|(u_1,u_2)\|_{L^2(\Omega)^2}$$

$$\leqslant C\left(\|f_1\|_{L^2} + \|f_2\|\right)\|(u_1,u_2)\|_H$$

$$\leqslant C\,\|(f_1,f_2)\|_{L^2(\Omega)^2}$$

b) Montrons que le problème (2.33) - (2.34) admet une unique solution au sens suivant : $u_1, u_2 \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ et (2.33) est vérifié p.p.t sur Ω.

Soit $(u_1, u_2) \in H_0^1(\Omega)^2$ l'unique solution de (2.35). Observons que $u_1 \in H_0^1(\Omega)$ et $u_2 \in H_0^1(\Omega)$ sont les solutions aux problèmes (indépendants)

$$\underbrace{\int_\Omega \nabla u_1 \nabla \varphi = \int_\Omega (f - u_2)\varphi, \ \forall \varphi \in H_0^1(\Omega)}_{(2.35^*)} \quad \text{et} \quad \underbrace{\int_\Omega \nabla u_2 \cdot \nabla \varphi = \int_\Omega (f - u_1)\varphi \quad \forall \varphi \in H_0^1(\Omega).}_{(2.35^{**})}$$

Le théorème de régularité 2.15 permet d'ofirmer que $u_1, u_2 \in H^2(\Omega)$. Par la définition des dérivés secondes faibles dans $H^2(\Omega)$ (on peut le voir comme une intégration par parties) nous avons que

$$\int_\Omega -\Delta u_1 \varphi = \int_\Omega (u_2 - f)\varphi \quad \forall \varphi \in H_0^1(\Omega) \quad \text{et} \quad \int_\Omega -\Delta u_2 \varphi = \int_\Omega (f - u_1)\varphi \quad \forall \varphi \in H_0^1(\Omega).$$

Le lemme fondamental du calcul des variations permet d'afficmer que $-\Delta u_1 + u_2 = f_1$ et $-\Delta u_2 - u_1 = f$ p.p.t.

Supposons maintenant que $-\Delta u_1 + u_2 = f_1$ et $-\Delta u_2 - u_1 = f_2$, avec $(u_1, u_2) \in H_0^1(\Omega)^2$.
En multipliant par $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$ et en intégrant par parties on obtient que (u_1, u_2) vérifient (2.35) or (2.35) a une unique solution. Ainsi le problème (2.33)-(2.34) a une solution unique au sens décrit par cette question.

Supposons maintenant que $f_1, f_2 \in C^\infty(\bar{\Omega})$. Montrons que alors $u_1, u_2 \in C^\infty(\bar{\Omega})$.
D'après ce que l'on vient de prouver, comme $u_1 \in H_0^1(\Omega)$ est solution de (2.35^*) avec $u_2 - f \in H^2(\Omega)$, le théorème de régularité 2.15 permet d'ofirmer que $u_1 \in H^4(\Omega)$. De la même façon on argumente que $u_2 \in H^4(\Omega)$. En répétant l'argument on en déduit que $u_1, u_2 \in H^k(\Omega)$ $\forall k \in \mathbb{N}^*$. Des résultats de régularité, en particulier l'inégalité de Sobolev généralisé permet d'affirmer que $u_1, u_2 \in C^\infty(\bar{\Omega})$.

c) Pour $f = (f_1, f_2)^t \in L^2(\Omega) \times L^2(\Omega)$ soit $u = (u_1, u_2)^t \in H_0^1(\Omega)^2$ la solution de (2.35), on note $u = T(f)$.

Montrons que $T : f \longmapsto u$ est un opérateur linéaire compact de $L^2(\Omega) \times L^2(\Omega)$ dans lui même.

Soit $\tilde{T} : L^2(\Omega)^2 \longrightarrow H_0^1(\Omega)^2$ qui à $(f_1, f_2) \in L^2(\Omega)^2$, associe $(u_1, u_2) \in H_0^1(\Omega)$ la solution faible de (2.35).

$\tilde{T}$ est clairement linéaire. Pour la continuité on utilise la remarque *

$$
\begin{aligned}
\| \tilde{T}(f_1, f_2) \|_H^2 &= \| (u_1, u_2) \|^2_{H_0^1(\Omega)^2} \\
&= \| u_1 \|^2_{H_0^1(\Omega)} + \| u_2 \|^2_{H_0^1(\Omega)} \\
&\leq C \left(\| f_1 \|_{L^2(\Omega)} + \| f_2 \|_{L^2(\Omega)} \right) \| (u_1, u_2) \|_H \\
&\leq C \, \| (f_1, f_2) \|_{L^2(\Omega)^2} \, \| \tilde{T}(f_1, f_2) \|_H
\end{aligned}
$$

Notons que le théorème de Rellich-Kondrachov donne l'injection compacte $H_0^1(\Omega)^2 \hookrightarrow L^2(\Omega)^2$ et donc $T = i \circ \tilde{T} : L^2(\Omega)^2 \longrightarrow L^2(\Omega)^2$ est compacte.

$$
\begin{tikzcd}
L^2(\Omega)^2 \arrow[rr, "T"] \arrow[dr, "\tilde{T}"'] & & L^2(\Omega)^2 \\
& H_0^1(\Omega)^2 \arrow[ur, "i"'] &
\end{tikzcd}
$$