MECÁNICA ANALÍTICA

Tarea 3 Semestre 2025-1 Prof. Renato Calleja

Ejercicio 1. Sean $q^1, \ldots, q^n$ coordenadas generalizadas en el espacio de configuraciones Q, y sea $L(q, \dot{q}, t)$ una función Lagrangiana. Supongamos que se introducen otras coordenadas $s^1, \ldots, s^n$ mediante las fórmulas

$$q^i = q^i(s^1, \ldots, s^n, t), \qquad i = 1, \ldots, n.$$

Dicha transformación se llama una *transformación puntual*. Exprese la función Lagrangiana en términos de $s^i, \dot{s}^i$, y t y muestre que las ecuaciones de Euler-Lagrange en las variables $(q, \dot{q})$ se transforman en las ecuaciones de Euler-Lagrange en las variables $(s, \dot{s})$. Es decir, la forma de las ecuaciones de Euler-Lagrange es invariante bajo transformaciones puntuales.

Ejercicio 2. Sea $\mathbf{B}$ un campo magnético en $\mathbb{R}^3$ El movimiento de una partícula de masa m y carga e que se mueve bajo la influencia de $\mathbf{B}$ está determinado por la denominada fuerza de Lorentz :

$$m\ddot{\mathbf{q}} = e\dot{\mathbf{q}} \times \mathbf{B}.$$

Encontrar una función Lagrangiana $L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ de forma que las ecuaciones de movimiento anteriores coincidan con las ecuaciones de Lagrange para L.

Sugerencia : La respuesta involucra al potencial vectorial $\mathbf{A}$ tal que $\nabla \times \mathbf{A} = \mathbf{B}$.

Ejercicio 3. Sea $f(x)$ un campo vectorial suave en $\mathbb{R}^n$ y sea Φ^t el flujo asociado a la ecuación diferencial

$$\dot{x} = f(x).$$

Sea D una región arbitraria de $\mathbb{R}^n$. Demostrar que

$$\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \int_{\Phi^t(D)} dx = \int_D \operatorname{div}(f)(x)\, dx\,.$$

Ejercicio 4. Considere el sistema mecánico con un grado de libertad correspondiente a la partícula de masa m que se mueve en el campo de fuerzas definido por el potencial

$$U(x) = -U_0 \operatorname{sech}^2(\alpha x),$$

donde $U_0 \in \mathbb{R}$ es una constante positiva. Dibuje el plano de fases en detalle. En particular determine el período de oscilaciones pequeñas y el comportamiento de la velocidad cuando $t \to \pm\infty$ para las trayectorias que no son acotadas.

Ejercicio 5. Considere el Lagrangiano

$$L(x, \dot{x}, t) = t\dot{x} + x.$$

Calcule las ecuaciones de Lagrange para L. ¿Qué sucede? Generalice el fenómeno que observa y dé una demostración de sus afirmaciones.

Ejercicio 6. Demostrar que el período T de oscilación de un péndulo de longitud ℓ que se suelta con velocidad inicial cero desde una amplitud inicial θ_0 (con $-\pi < \theta_0 < \pi$) está dado por la serie

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}\left(1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 k^2 + \left(\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\right)^2 k^4 + \left(\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\right)^2 k^6 + \ldots\right)$$

donde $k = \sin(\theta_0/2)$.

Explicar a partir de la serie, que esperamos que ocurra cuando θ_0 se aproxima a π.

Ejercicio 1: Sean $q^1, \dots, q^n$ coordenadas generalizadas en el espacio de configuraciones Q, y sea $L(q, \dot{q}, t)$ una función Lagrangiana. Supongamos que se introducen otras coordenadas $s^1, \dots, s^n$, mediante las fórmulas

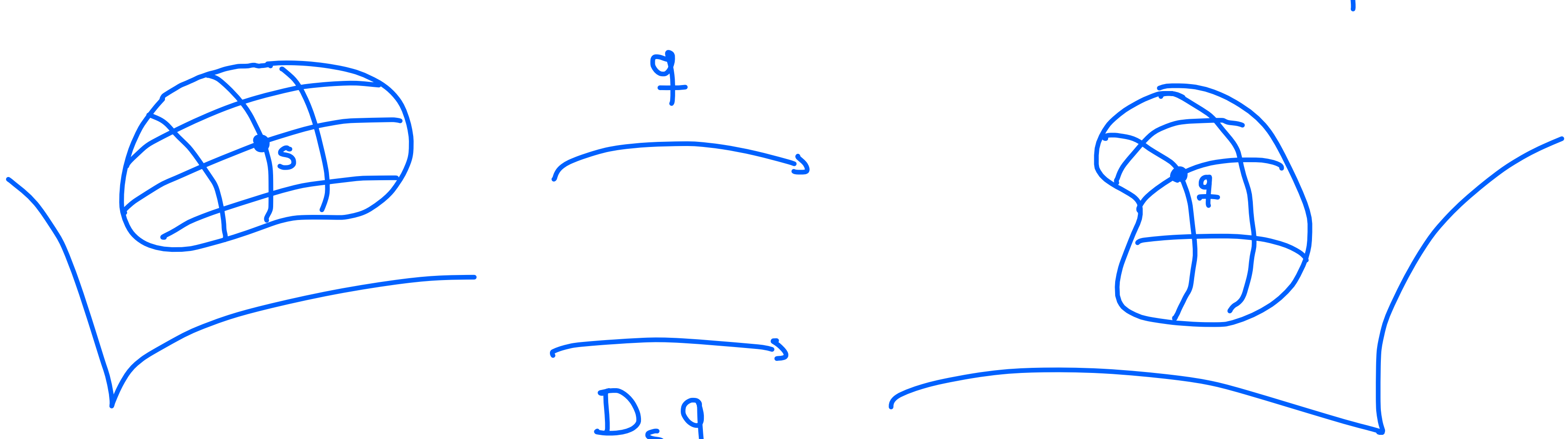
$q^i = q^i(s_1, \dots, s_n, t)$. Dicha transformación se llama transformación puntual. Exprese la función Lagrangiana en términos de s^i, $\dot{s}^i$, t y muestre que las ecuaciones de Euler-Lagrange en las variables $(q, \dot{q})$ se transforman en las ecuaciones de Euler-Lagrange en las variables $(s, \dot{s})$. Es decir Las ecuaciones de Euler-Lagrange son invariantes bajo transformaciones puntuales.

dem: Supongamos que $\mathcal{L}(q, \dot{q}, t)$ satisface las ecuaciones de Euler Lagrange

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} = 0$$

Veamos que $\tilde{\mathcal{L}}(s, \dot{s}, t) := \mathcal{L}\left(q(s,t), (D_s q)\dot{s}, t\right)$ donde $D_s q$ es la diferencial del cambio de coordenadas.

Coordenadas s Coordenadas q



Calculemos $\frac{d}{dt}\frac{\partial\tilde{\mathcal{L}}}{\partial\dot{s}^i}$ y $\frac{\partial\tilde{\mathcal{L}}}{\partial s^i}$ en función de las antiguas coordenadas.

$$\frac{\partial\tilde{\mathcal{L}}}{\partial\dot{s}^i} = \cancel{\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial q^k}\frac{\partial q^k}{\partial\dot{s}^i}} + \sum_{k=1}^{n}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{q}^k}\frac{\partial\left(D_s q[\dot{s}]\right)_k}{\partial\dot{s}^i}$$

$$= \sum_{k=1}^{n}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{q}^k}\frac{\partial}{\partial\dot{s}^i}\left(\sum_{l=1}^{n}\frac{\partial q}{\partial s^l}\dot{s}^l\right)_k$$

$$= \sum_{k=1}^{n}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{q}^k}\frac{\partial q_k}{\partial s^i}$$

Derivando respecto de t,

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial\tilde{\mathcal{L}}}{\partial\dot{s}^i} = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{q}^k}\right)\frac{\partial q_k}{\partial s^i} + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{q}^k}\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial q_k}{\partial s_i}\right). \qquad (1)$$

También

$$\frac{\partial\tilde{\mathcal{L}}}{\partial s^i} = \sum_{k=1}^{n}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial q^k}\frac{\partial q^k}{\partial s^i} + \sum_{k=1}^{n}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{q}^k}\frac{\partial}{\partial s^i}\left(D_s q[\dot{s}]\right)_k$$

$$= \sum_{k=1}^{n}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial q^k}\frac{\partial q^k}{\partial s^i} + \sum_{k=1}^{n}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{q}^k}\frac{\partial}{\partial s_i}\left(\sum_{l=1}^{n}\frac{\partial q}{\partial s_l}\dot{s}^l\right)_k$$

$$= \sum_{k=1}^{n}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial q^k}\frac{\partial q^k}{\partial s^i} + \sum_{k=1}^{n}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{q}^k}\sum_{l=1}^{n}\frac{\partial^2 q_k}{\partial s_i\partial s_l}\dot{s}^l \qquad (2)$$

Notando que

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial q_k}{\partial s_i}\right) = \sum_{l=1}^{n}\frac{\partial^2 q_k}{\partial s^l\partial s^i}\cdot\dot{s}_l + \frac{\partial^2 q_k}{\partial t\,\partial s_i}$$

y restando (1) y (2) tenemos que

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \tilde{\mathcal{L}}}{\partial \dot{s}^i} - \frac{\partial \tilde{\mathcal{L}}}{\partial s^i} = \sum_{k=1}^{n} \cancel{\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^k} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q^k}\right)} \frac{\partial q^k}{\partial s^i}$$

$$+ \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_k}\left(\cancel{\sum_{l=1}^{n} \frac{\partial^2 q^k}{\partial s^l \partial s^i}\dot{s}^l} + \frac{\partial q_k}{\partial t} - \cancel{\sum_{l=1}^{n} \frac{\partial^2 q^k}{\partial s^l \partial s^i}\dot{s}^l}\right)$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_k} \frac{\partial^2 q_k}{\partial t\, \partial s^i}.$$

Si suponemos que $\frac{\partial q}{\partial s_i}$ no depende de t recuperamos las ecuaciones de Euler - Lagrange

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \tilde{\mathcal{L}}}{\partial \dot{s}^i} - \frac{\partial \tilde{\mathcal{L}}}{\partial s^i} = 0$$

en las nuevas coordenadas.

Observese que esta suposición abarca todos los ejemplos vistos en clase. En particular un ejemplo en el cual el cambio de coordenadas dependía de t como sigue

$$x = \frac{2\pi R}{\omega} t + \frac{R}{2}\cos\left(\frac{2\pi}{\omega}t\right) + l \operatorname{sen}\theta$$

$$y = R + \frac{R}{2}\operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{\omega}t\right) - l\cos\theta .$$

Aquí $\frac{\partial x}{\partial \theta}$ y $\frac{\partial y}{\partial \theta}$ claramente no dependen de t.

Ejercicio 3: Sea $f(x)$ un campo vectorial suave en $\mathbb{R}^n$ y sea ϕ^t el flujo asociado a la ecuación diferencial

$$\dot{x} = f(x).$$

Sea D una región arbitraria de $\mathbb{R}^n$. Demostrar que

$$\frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \int_{\phi^t(D)} dx = \int_D \operatorname{div}(f)(x)\, dx .$$

dem: Aplicando el teorema de cambio de variable al difeomorfismo ϕ^t

$$\int_{\phi^t(D)} dx = \int_D \operatorname{Jac}_x \phi^t(x)\, dx$$

$$\frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \int_{\phi^t(D)} dx$$

$$= \int_D \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \operatorname{Jac}_x \phi^t(x)\, dx$$

$$= \int_D \sum_{k=1}^{n} \det \left| \frac{\partial \phi^t}{\partial x_1}\Big|_{t=0} ; \dots ; \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \frac{\partial \phi^t}{\partial x_k} ; \dots , \frac{\partial \phi^t}{\partial x_n} \right| dx$$

$$= \int_D \sum_{k=1}^{n} \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \frac{\partial \phi_k^t}{\partial x_k}\, dx$$

$$= \int_D \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_k} \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \phi_k^t(x)\, dx = \int_D \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f_k}{\partial x_k}\, dx = \int_D \operatorname{div} f\, dx$$

Ejercicio 4: Considere el sistema mecánico con un grado de libertad correspondiente a la partícula de masa m que se mueve en el campo de fuerzas definido por el potencial

$$U(x) = -U_0 \operatorname{sech}^2(\alpha x),$$

donde $U_0 \in \mathbb{R}$ es una constante positivo. Dibuje el plano fase en detalle. En particular determine el periodo de oscilaciones pequeñas y el comportamiento de la velocidad cuando $t \to \pm\infty$ para las trayectorias que no son acotadas.

respuesta: Utilizando el principio de conservación de la energía

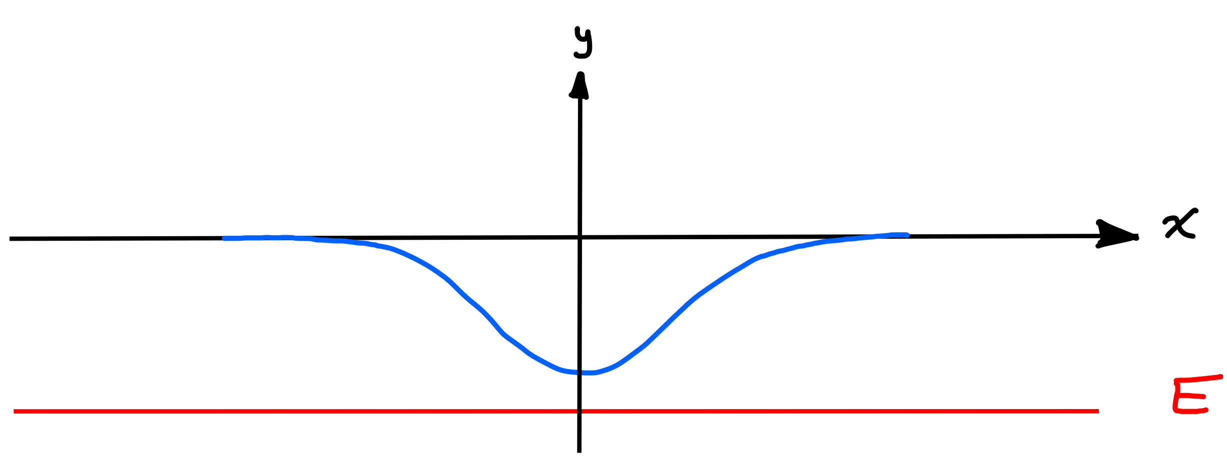
$$E = E_c + E_p$$

$$= \frac{m}{2} y^2 + U(x)$$

$$= \frac{m}{2} y^2 - U_0 \operatorname{sech}^2(\alpha x) \qquad \text{donde } y = \dot{x}.$$

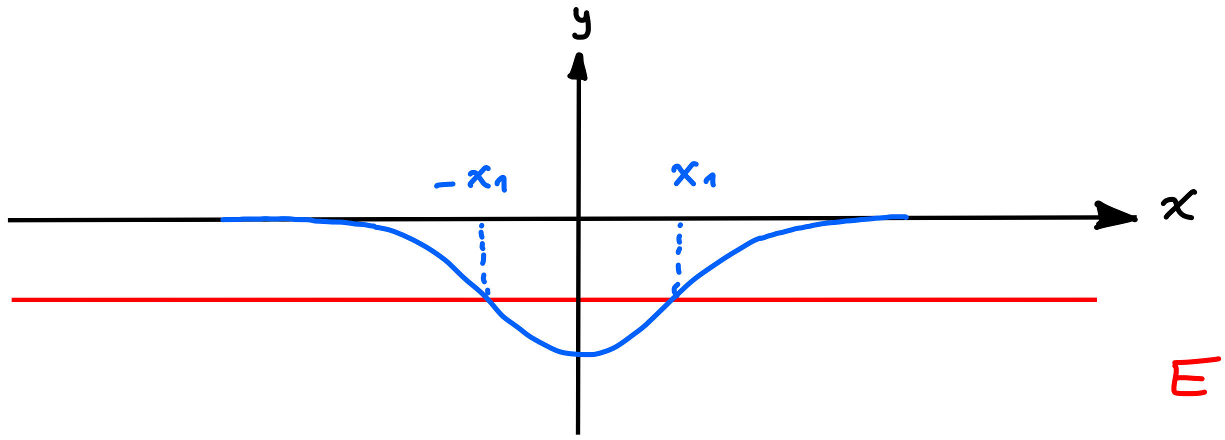
Estudiemos los siguientes casos

Caso 1: $E < -\frac{U_0}{4} = \inf\limits_{x \in \mathbb{R}} -U_0 \operatorname{sech}^2(\alpha x)$



En este caso no hay trayectorias correspondientes a este nivel de energía.

Caso 2: $-\frac{U_0}{4} \leq E < 0$



En este caso tenemos trayectorias acotadas dadas por

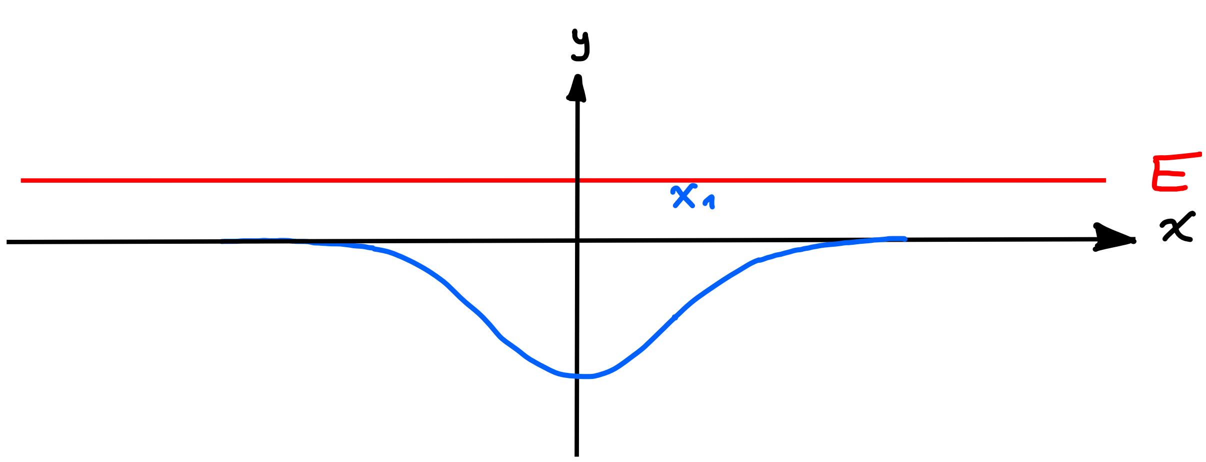
$$y = \pm \frac{2}{m}\sqrt{E + U_0 \operatorname{sech}^2(\alpha x)}$$

$$y = \pm \frac{2}{m}\sqrt{E + U_0 \operatorname{sech}^2(\alpha x)} \quad \forall x \in [-x_E, x_E]$$

donde x_E y $-x_E$ son los/la solucion/es de $E = -U_0 \operatorname{sech}^2(\alpha x)$.

En este caso tenemos trayectorias acotadas.

Caso 3: $E \geq 0$



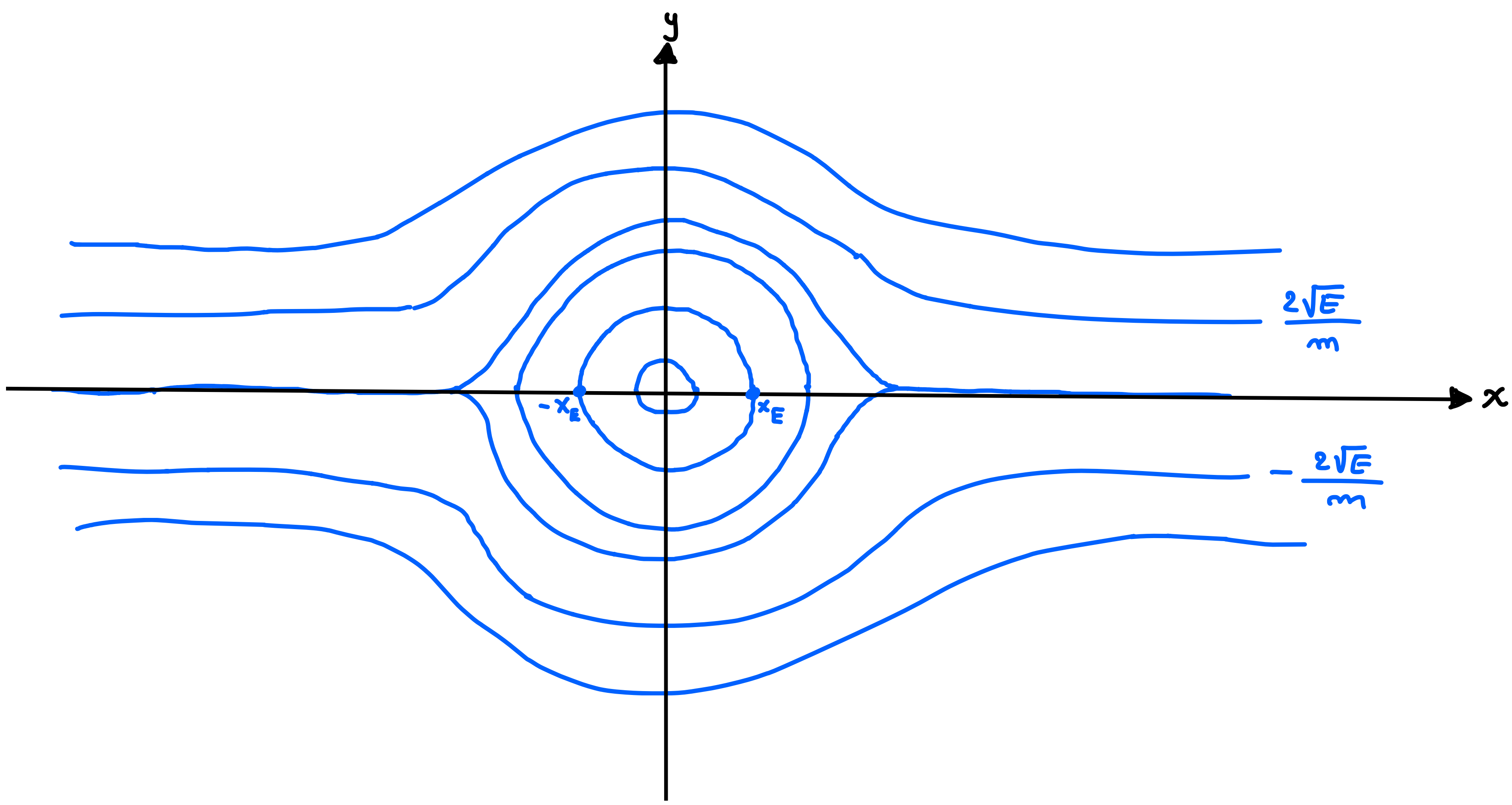
$$y = \pm \frac{2}{m}\sqrt{E + U_0 \operatorname{sech}^2(\alpha x)} \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Notemos que en este caso

$$\lim_{x \to \pm\infty} \pm \frac{2}{m}\sqrt{E + U_0 \sec^2(\alpha x)} = \pm \frac{2\sqrt{E}}{m}.$$

Es decir que en este caso cuando la partícula escapa al infinito, lo hace con una velocidad cada ves mas cercana a $\pm \frac{2\sqrt{E}}{m}$.

Juntando la información de estos tres casos obtenemos el siguiente retrato fase



Por último, utilizando el ejercicio 4 de la tarea 2, que da precisamente el periodo de las ocilaciones pequeñas para un sistema conservativo de un grado de libertad con potencial $U(x)$ que cumple que $U''(0) > 0$, obtenemos que

$$T = \lim_{E \to 0} T(E) = \frac{2\pi}{\sqrt{U''(0)}}.$$

$$U(x) = -U_0 \operatorname{sech}^2(\alpha x)$$

$$U'(x) = \alpha 2 U_0 \operatorname{sech}(\alpha x) \operatorname{sech}(\alpha x) \tanh(\alpha x)$$

$$U''(x) = \alpha 2 U_0 \left[-2\alpha \operatorname{sech}^2(\alpha x) \tanh^2(\alpha x) + \alpha \operatorname{sech}^4(\alpha x)\right]$$

En este caso $U''(0) = 2\alpha^2 U_0$

Entonces

$$T = \frac{2\pi}{\alpha\sqrt{2U_0}}$$

Ejercicio 5: Considere el Lagrangiano

$$L(x,\dot{x},t) = t\dot{x} + x.$$

Calcule las ecuaciones de Euler-Lagrange para L. ¿Que sucede? Generalice el fenameno que observa y dé una demostración de sus afirmaciones.

respuesta: Para este Lagrangiano tenemos que

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} = 1 = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} \quad , \text{ es decir que}$$

cual quier curva $x(t)$ satisface la ecuación de Euler-Lagrange

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = 0 .$$

Esto sucede porque el funcional

$$A_{\mathcal{L}} : x \longmapsto \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L}(x(t),\dot{x}(t),t)\, dt$$

es constante para curvas que tienen los mismos puntos, inicial y final.

$$\int_{t_1}^{t_2} \dot{x}(t)t + x(t)\, dt = \int_{t_1}^{t_2} (x(t)t)^{\bullet}\, dt$$

$$= x(t_2)t_2 - x(t_1)t_1$$

que solo depende de los puntos, inicial y final de la curva.

Esta observación se generaliza de la siguiente manera.

Si un Lagrangiano está dado por

$$\mathcal{L}(x,\dot{x},t) = \nabla_x f \cdot \dot{x} + \frac{\partial f}{\partial t} \quad , \text{ donde } \begin{array}{l} f : \mathbb{R}^{n+1} \longrightarrow \mathbb{R} \\ (x,t) \longmapsto f(x,t) \quad , x \in \mathbb{R}^n . \end{array}$$

Entonces las ecuaciones de Euler Lagrange se satisfacen trivialmente.

<u>Dem</u>:

$$\int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L}(x,\dot{x},t)\, dt = \int_{t_1}^{t_2} \nabla_x f \cdot \dot{x} + \frac{\partial f}{\partial y}\, dt$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt} f(x(t),t)\, dt$$

$$= f(x(t_2),t_2) - f(x(t_1),t_1),$$

solo depende de los puntos inicial y final de la curva.

Es decir el funcional $A_{\mathcal{L}}$ es constante sobre cualquier conjunto de curvas que inicien y terminen en los mismos puntos.

Así cualquiera de estas curvas satisface las ecuaciones de Euler Lagrange.

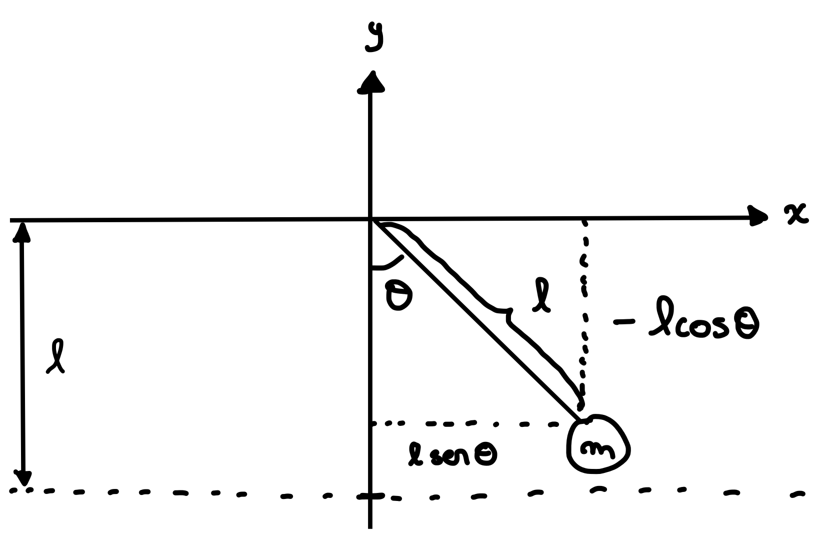
Ejercicio 6: Demostrar que el periodo T de oscilación de un péndulo de longitud ℓ que se suelta con velocidad inicial cero, desde una amplitud inicial θ_0 (con $-\pi < \theta_0 < \pi$) está dado por la serie

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}\left(1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 k^2 + \left(\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\right)^2 k^4 + \left(\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\right)^2 k^6 + \cdots\right)$$

donde $k = \sin(\theta_0/2)$.

Explicar a partir de la serie que esperamos que ocurra cuando $\theta_0 \longrightarrow \pi$.

dem: Consideremos el siguiente modelo del péndulo



$$x = \ell \operatorname{sen}\theta \qquad \dot{x} = \ell\dot{\theta}\cos\theta$$
$$y = -\ell\cos\theta \qquad \dot{y} = \ell\dot{\theta}\operatorname{sen}\theta$$

La ley de conservación de energía se escribe como sigue

$$E = E_c + E_p$$

$$= \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + mgh$$

$$= \frac{m}{2}\ell^2\dot{\theta}^2 + mg(\ell - \ell\cos\theta)$$, donde g es la constante de gravedad de Newton y h es la altura del péndulo medida respecto a

su posición mas baja.

Podemos reescribir esto como

$$\frac{E}{mgl} = \frac{1}{2}\frac{l}{g}\dot{\theta}^2 + (1-\cos\theta)$$

$$\dot{\theta} = \pm\sqrt{\frac{2E\cancel{g}}{mgl^2} - \frac{2g}{l}(1-\cos\theta)}$$

$$1 = \frac{\dot{\theta}}{\sqrt{\frac{2E}{ml^2} - \frac{2g}{l}(1-\cos\theta)}}$$

Aquí podemos notar que por el principio de conservación de energía y la definición de θ_0

$E = mg(l - l\cos\theta_0)$. Se sigue que

$$\frac{2E}{ml^2} - \frac{2g}{l} = \frac{2mgl(1-\cos\theta_0) - 2gml}{ml^2} = -\frac{2\cancel{m}g\cancel{l}\cos\theta_0}{\cancel{m}l^{\cancel{2}}} = -\frac{2g}{l}\cos\theta_0$$

Integrando (3) de 0 a t tenemos que

$$t = \int_0^t \frac{\dot{\theta}}{\sqrt{\frac{2g}{l}(\cos\theta - \cos\theta_0)}}\,dt$$

$$= \sqrt{\frac{l}{2g}}\int_{\theta(0)}^{\theta(t)} \frac{d\theta}{\sqrt{\cos\theta - \cos\theta_0}}$$

usando que $\cos\theta = 1 - 2\,\text{sen}^2\left(\frac{\theta}{2}\right)$

$1 - 2\,\text{sen}^2\left(\frac{\theta_0}{2}\right)$

$$= \sqrt{\frac{l}{2g}}\int_{\theta(0)}^{\theta(t)} \frac{d\theta}{\sqrt{2\left(\text{sen}^2\left(\frac{\theta_0}{2}\right) - \text{sen}^2\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)}}$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\ell}{g}} \int_{\theta(0)}^{\theta(t)} \frac{d\theta}{\sqrt{\operatorname{sen}^2\left(\frac{\theta_0}{2}\right) - \operatorname{sen}^2\left(\frac{\theta}{2}\right)}}$$

Haciendo el cambio de variable $\operatorname{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right) = k \operatorname{sen}(\varphi)$ tenemos que

$$\frac{1}{2}\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) d\theta = k \cos\varphi \, d\varphi \, , \qquad \varphi = \operatorname{arcsen}\left(\frac{\operatorname{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right)}{k}\right)$$

$$\sqrt{1 - \operatorname{sen}^2\left(\frac{\theta}{2}\right)} \, d\theta = 2k \cos\varphi \, d\varphi$$

$$\sqrt{1 - k^2 \operatorname{sen}^2(\varphi)} \, d\theta = 2k \cos\varphi \, d\varphi$$

$$d\theta = \frac{2k\sqrt{1-\operatorname{sen}^2\varphi}}{\sqrt{1-k^2\operatorname{sen}^2\varphi}} \, d\varphi .$$

Hasta ahora no nos hemos ocupado de los límites de integración. No temos que si integramos de 0 a θ_0 obtenemos un cuarto del periodo de ocilasión. Así

$$\frac{T}{4} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\ell}{g}} \int_{0}^{\theta_0} \frac{d\theta}{\sqrt{\operatorname{sen}^2\left(\frac{\theta_0}{2}\right) - \operatorname{sen}^2\left(\frac{\theta}{2}\right)}}$$

$$= \frac{1}{\cancel{2}}\sqrt{\frac{\ell}{g}} \int_{0}^{\operatorname{arcsen}\left(\frac{\operatorname{sen}\frac{\theta_0}{2}}{k}\right) = \frac{\pi}{2}} \frac{\cancel{2}\sqrt{\cancel{k^2 - k^2\operatorname{sen}^2\varphi}}}{\sqrt{\cancel{k^2 - k^2\operatorname{sen}^2\varphi}}\sqrt{1-k^2\operatorname{sen}^2\varphi}} \, d\varphi$$

$$= \sqrt{\frac{\ell}{g}} \int_{0}^{\pi/2} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\operatorname{sen}^2\varphi}} \, ,$$

la cual es la conocida integral elíptica de primera clase. Obtenemos así la representación en serie para el periodo

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}\left(1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 k^2 + \left(\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\right)^2 k^4 + \left(\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\right)^2 k^6 + \cdots\right).$$

Cuando $\theta_0 \to \pi/2$ $T \to \infty$, pues la serie diverge para $k=1$