Formulario Geometría Diferencial

Examen General Enero 2024

Cálculo diferencial

La diferencial

1. $$f(x+h) = f(x) + Lh + \|h\|\,\varepsilon(h)$$
$$\varepsilon(h) \xrightarrow[h\to 0]{} 0$$

(Definición de diferenciabilidad)

2. $$dB_{(x,y)}(h,k) = B(h,y) + B(x,k)$$

(La diferencial de una forma bilineal).

3. $$\frac{\partial (g\circ f)_i}{\partial x_j}(x_0) = \sum_{k=1}^{q} \frac{\partial g_i}{\partial y_k}(f(x_0))\,\frac{\partial f_k}{\partial x_j}(x_0)$$

(La regla de la cadena para derivadas parciales).

4. $$df = \sum_{i=1}^{p} \frac{\partial f}{\partial x_i}\,dx_i$$

(Notación diferencial de la diferencial de una función).

Teorema de inversión local y Teorema de la función implícita

⑤ $d(f^{-1})_{f(x)} = (df_x)^{-1}$

(La diferencial de la inversa es la inversa de la diferencial).

⑥ $\varphi'(a) = -\dfrac{\frac{\partial}{\partial x} f(a,b)}{\frac{\partial}{\partial y} f(a,b)}$

(Derivación implícita en $\mathbb{R}^2$).

⑦ $T: \dfrac{\partial}{\partial x} f(a,b)(x-a) + \dfrac{\partial}{\partial y} f(a,b)(y-b) = 0$

(Ecuación cartesiana de la tangente).

⑧ $\dfrac{\partial \varphi}{\partial x}(a,b) = -\dfrac{\frac{\partial}{\partial x} f(a,b)}{\frac{\partial}{\partial z} f(a,b)}$ $\qquad \dfrac{\partial \varphi}{\partial y}(a,b) = -\dfrac{\frac{\partial f}{\partial y}(a,b)}{\frac{\partial f}{\partial z}(a,b)}$

(Parciales implícitas ($\mathbb{R}^3$)).

⑨ $d\varphi_a = -d_2 f^{-1}_{(a,b)} \circ d_1 f_{(a,b)}$

(Ecuación general de la diferencial implícita).

⑩ $\varphi \circ f(x_1, \dots, x_p) = (x_1, \dots, x_p, 0, \dots, 0)$

(f como inmersión canónica).

⑪ $f \circ \varphi(x_1, \dots, x_p) = (x_1, \dots, x_q)$

(f como submersión canónica).

Subvariedades, Variedades y el Haz tangente

Subvariedades

(12) $T_a M = \ker(df_a) = \operatorname{im}(d\varphi_0)$

(El espacio tangente como kernel y como imagen directa).

(13) $d(f \circ g)(x_0) = df_{g(x_0)} \circ df_{x_0}$

(Regla de la cadena).

(14) $\begin{cases} f : M \longrightarrow N \\ C^\infty \end{cases} \Longleftrightarrow \psi_2^{-1} \circ f \circ \psi_1 \quad C^\infty.$

(Diferenciabilidad equivale a diferenciabilidad en cartas).

(15) $\# f^{-1}(y) = \{\text{cantidad finita de pts}\}$

(Preimagen de submersion en un compacto da cantidad finita de puntos).

(16) $\phi(\mathcal{U} \cap M) = (\mathbb{R}^n \times \{0\}) \cap V$

(Subvariedad dada por rectificación local)

(17) $M \cap \mathcal{U}_1 \times \mathcal{U}_2 = \{(x, f(x)) \mid x \in \mathcal{U}_1\}$

(Subvariedad dada como gráfica local).

(18) $d\varphi : T\mathcal{U} \longrightarrow \Omega \times \mathbb{R}^n$

$v \longmapsto (\varphi(m), d\varphi_m(v))$

El Haz tangente

(Carta del Haz tangente).

(19) $T_{(x,y)} M \times N = T_x M \times T_y N$

Variedad producto

(El espacio tangente de la variedad producto es el producto de los espacios tangentes).

(20) $T(M \times N) = TM \times TN$

(El Haz tangente de la variedad producto es el producto de los hazes tangentes).

Campos, flujos y corchetes de Lie

Derivadas y corchetes de Lie

(27) $\delta(fg) = \delta f\, g(m) + f(m)\,\delta(g)$

(Definición de derivación puntual o regla de leibnitz para derivaciones puntuales).

(28) $\mathcal{L}_{\xi} f = df_m(\xi)$

(La derivada de Lie).

Previo

(25) $\begin{cases} d\varphi \circ X \circ \varphi^{-1} : \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \Omega \times \mathbb{R}^n \\ x \longmapsto (x, d\varphi_{\varphi^{-1}(x)} X(\varphi^{-1}(x))) \end{cases}$

(Cuando un Campo es C^∞).

(26) $X = \sum_{i=1} X_i \dfrac{\partial}{\partial x_i}$ (Un campo en coordenadas locales).

(29) $\delta(fg) = \delta f\, g + f\,\delta g$

(Definición de derivación global o regla de leibnitz para derivaciones globales).

(30) $\mathcal{L}_X f = df(X) \overset{\text{en carta}}{\rightsquigarrow} \mathcal{L}_X f = \sum X_i \dfrac{\partial f}{\partial x_i}$

(La derivada de lie en coordenadas locales).

(31) $[\delta, \delta'] = \delta \circ \delta' - \delta' \circ \delta$ (El Corchete de lie para derivaciones).

(32) $[X, Y] \simeq \mathcal{L}_{[X,Y]} := [\mathcal{L}_X, \mathcal{L}_Y]$

(Definición mediante isomorfismo del Corchete de Lie para campos).

(33) $[X,Y]_i = \sum_j X^j \dfrac{\partial Y^i}{\partial x_j} + Y^j \dfrac{\partial X^i}{\partial x_j}$

(El corchete de Lie en coordenadas locales).

(34) $[X,[Y,Z]] + [Y,[Z,X]] + [Z,[X,Y]] = 0$

(Identidad de Jacobi).

El flujo de un campo vectorial

(35) $\gamma'(t) = X(\gamma(t))$

(Definición de Curva integral).

(36) $$\begin{aligned} \Phi(\mathcal{U}) &\longrightarrow M \\ (x,t) &\longmapsto \gamma_x(t) \end{aligned}$$

(Definición de Mapeo integral)

(37) $\varphi_t := \Phi(\cdot, t)$

(Definición de flujo como pseudogrupo a un parámetro de difeomorfismos).

(38) $$\begin{cases} \bullet\ \varphi_0 = \mathbb{1}_M \\ \bullet\ \varphi_{t+s} = \varphi_t \circ \varphi_s \\ \bullet\ \varphi_t^{-1} = \varphi_{-t} \end{cases}$$

(Propiedades del Flujo).

(39) $\phi_* X(y) = d\phi_{\phi^{-1}(y)} X(\phi^{-1}(y))$ / $\phi_* X = d\phi(x) \circ \phi^{-1}$

(Definición de la imagen directa de un campo por un difeomorfismo).

(40) $\mathcal{L}_{\phi_* X} f = \mathcal{L}_X (f \circ \phi) \circ \phi^{-1}$

(La derivada de Lie de la imagen de un campo por un difeomorfismo).

(41) $[\phi_* X, \phi_* Y] = \phi_* [X, Y]$ Relación entre el corchete de Lie y el flujo de campos

(El corchete preserva la imagen directa de un campo por un difeomorfismo).

(42) $X \sim \varphi_t \Longrightarrow \phi_* X \sim \phi \circ \varphi_t \circ \phi^{-1}$

(El flujo de la imagen directa de un campo).

(43) $\mathcal{L}_X Y := \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} (\varphi_{-t})_* Y$

(Versión geométrica del corchete de Lie).

(44) $\mathcal{L}_X Y = [X, Y]$

(Equivalencia de las definiciones de corchete de Lie).

(45) $\begin{cases} \bullet\ \mathcal{L}_X Y = -\mathcal{L}_Y X \\ \bullet\ \mathcal{L}_X (aY + bZ) = a\mathcal{L}_X(Y) + b\mathcal{L}_X(Z) \\ \bullet\ \mathcal{L}_X (fY) = (X \cdot f) Y + f \mathcal{L}_X Y \end{cases}$

(Propiedades del Corchete de Lie).

(46) $[X, Y] = 0 \Longleftrightarrow \varphi_s \circ \psi_t = \psi_t \circ \varphi_s$

(El corchete es nulo sii los flujos conmutan).

(47) $X(x_0), Y(x_0)$ l.i. $[X, Y] = 0$

$\Longleftrightarrow \exists \varphi$ tq $\varphi_* X = e_1$ $\varphi_* Y = e_2$

(Teorema de la caja de flujo).

Formas diferenciales

(48) $\varphi \otimes \psi\,(x_1,\dots,x_p,x_{p+1},\dots,x_{p+q}) = \varphi(x_1,\dots,x_p)\,\psi(x_1,\dots,x_q)$

(Producto tensorial de formas lineales).

(56) $\alpha = \sum_{i_1<\dots<i_k} \alpha_{i_1,\dots,i_k}\, dx_{i_1}\wedge\dots\wedge dx_{i_k}$

(Base de las formas multilineales alternantes).

(49) $\varphi(x_{\sigma(1)},\dots,x_{\sigma(k)}) = \varepsilon(\sigma)\,\varphi(x_1,\dots,x_k)$

(Definición de k-forma alternante)

(50) $\mathrm{Alt}:\ \varphi \longmapsto \mathrm{Alt}\,\varphi(x_1,\dots,x_k) := \frac{1}{k!}\sum_{\sigma} \varepsilon(\sigma)\,(x_{\sigma(1)},\dots,x_{\sigma(k)})$

(La proyección alternante).

(51) $\alpha\wedge\beta = \frac{(p+q)!}{p!\,q!}\,\mathrm{Alt}\,\alpha\otimes\beta$

(El producto exterior de formas lineales).

Algebra Multilineal

(51*) $\alpha_1\wedge\alpha_2\wedge\dots\wedge\alpha_k\,(x_1,\dots,x_k) = \sum_{\sigma} \varepsilon(\sigma)\,\alpha_1(x_{\sigma(1)})\cdots\alpha_k(x_{\sigma(k)}) = \det\left(\alpha_i(x_j)\right)_{i,j\leq k}$

(fórmula explícita del producto exterior de 1-formas).

(52) $\dim \mathrm{Alt}_k(E,\mathbb{R}) = \binom{n}{k}$

(La dimensión del espacio vectorial de las k-formas alternantes).

(53) $\alpha_{\sigma(1)}\wedge\dots\wedge\alpha_{\sigma(k)} = \varepsilon(\sigma)\,\alpha_1\wedge\dots\wedge\alpha_k$

(El producto exterior de una permutación de 1-formas).

(54) $\alpha\wedge\beta = (-1)^{pq}\,\beta\wedge\alpha$ (El producto exterior de la permutación de dos formas).

(55) $dx_{i\,\psi(x)}\left(\frac{\partial}{\partial x_j}(\psi(x))\right) = \delta_{ij}$ (Definición de las 1-formas dx_i.)

57
- d = "la diferencial sobre $C^\infty(M)$"
- $d(df) = 0$
- $d(\alpha \wedge \beta) = d\alpha \wedge \beta + (-1)^{s} \alpha \wedge d\beta$

(Propiedades que definen la diferencial exterior).

58 $$d(f\beta) = df \wedge \beta + f\, d\beta$$

(Diferencial exterior de una función y de una forma).

59 $$\phi^* \alpha_p(x_1, \dots, x_k) = \alpha_{\phi(p)}\left(d\phi_p(x_1), \dots, d\phi_p(x_k)\right)$$

(El Pull back de una forma diferencial).

60 $\phi^* f = f \circ \phi$ (El pullback de una 0-forma).

61
- $\phi^*(\alpha \wedge \beta) = \phi^*\alpha \wedge \phi^*\beta$
- $(\phi \circ \psi)^* \alpha = \psi^*(\varphi^* \alpha)$
- $(\phi^{-1})^*(\phi\alpha) = \alpha$

(Propiedades del Pullback "cuña, composición, inversa").

62 $$d\alpha := \varphi_i^*\left(d\,(\varphi_i^{-1})^* \alpha\right)$$

(La diferencial exterior de una forma sobre una variedad).

63 $$d\alpha(X_0, \dots, X_k) = \sum_{i=0}^{k} (-1)^i X_i \cdot \alpha(X_1, \dots, \hat{X}_i, \dots, X_k) + \sum_{0 \le i < j \le p} (-1)^{i+j} \alpha([X_i, X_j], X_1, \dots, \hat{X}_i, \dots, \hat{X}_j, \dots, X_p)$$

(Fórmula explícita de la diferencial exterior).

64 $$d\alpha(X, Y) = X \cdot \alpha(Y) - Y \cdot \alpha(X) - \alpha([X, Y])$$ (Formula explícita de la diferencial exterior de 1-formas).

79 $\mathrm{Long}(\gamma) = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{a_i}^{a_{i+1}} \|\gamma'(t)\|\, dt \quad , \quad \|\gamma'(t)\| = \left(g_{\gamma(t)}(\gamma'(t), \gamma'(t)) \right)^{\frac{1}{2}}$

(Longitud de arco)

Longitud de arco y forma volumen canonico

80 $V_{g_m}(e_1, \dots, e_n) = 1$

(Existencia y unicidad de forma volumen canónico).

81 $V_g = \sqrt{(\det(g_{ij}))_{ij}}\; dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n$

(forma volumen canónico en coordenadas locales).

Integración de formas con soporte compacto sobre variedades orientables

67 $\psi^* dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n = \mathrm{Jac}(\psi)\, dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n$

(Expresión explícita del pullback en $\mathbb{R}^n$)

68 $\int_M \alpha := \int_{\Omega_i} (\varphi_i^{-1})^* \alpha_{|U_i} = \int_{\Omega_i} f_i \, dx_1 \dots dx_n$

(Definición de la integral de una forma de grado máximo).

69 $\int_M \alpha := \sum_{i \in I} \int_M \rho_i \alpha$

(Definición global de la integral usando partición de la unidad).

70 $\int_N \alpha = \int_M F^* \alpha$

(Fórmula de cambio de variable en variedades).

Formas exactas y teorema de Stokes

71 $d\alpha = 0 \Longrightarrow \alpha = d\beta$

(Lema de Pointcarée).

72 $$\int_M d\alpha = \int_{\partial M} i^*\alpha$$

(Teorema de Stokes)

73 $$\int_U \operatorname{div}(X)\, dx\,dy\,dz = \int_S \langle X, N\rangle \overbrace{\sigma}^{\text{forma de area}}$$

(Gauss - Ostrogradski).

74 $d(x_1\, dx_2 \wedge \dots \wedge dx_n) = dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n$

(La forma volumen es exacta).

Conexiones de Levi Cevita o Derivada covariante

Métrica riemanniana

(75) $\left(g_{ij}(x)\right)_{i,j} = \left(g_x\left(\frac{\partial}{\partial x_i}(x), \frac{\partial}{\partial x_j}(x)\right)\right)_{ij} \geq 0$

(Métrica riemanniana en coordenados locales)

(76) $g = \sum_{i,j} g_{ij}\, dx_i\, dx_j = \sum_i g_{ii}\, dx_i^2 + 2\sum_{i<j} g_{ij}\, dx_i\, dx_j$

(Notación diferencial de la métrica riemamiana).

(77) $g = \sum_{j\in J} \alpha_j\, g^{(j)} \qquad g^{(j)} = dx_1^2 + \dots + dx_n^2$

(Existencia global de métrica riemamiana).

(78) $g_x(u,v) = h_{f(x)}\left(df_x(u), df_x(v)\right)$

(Definición de isometría riemanniana)

Longitud de curva y forma volumen

(79) $\operatorname{long}(\gamma) = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{a_i}^{a_{i+1}} \underbrace{\|\gamma'(t)\|}_{\left(g_{\gamma(t)}(\gamma'(t),\gamma'(t))\right)^{1/2}} dt$

(definición de longitud de curva).

(80) $V_{g_m}(e_1,\dots,e_n) = 1$ (Propiedad característica de la forma volumen)

(81) $V_g = \sqrt{(\det(g_{ij}))_{ij}}\; dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n$

(forma volumen en coorduadar locales).

82 $\begin{cases} \bullet\ \nabla_{fX}(Y) = f\nabla_X Y \\ \bullet\ \nabla_X(fY) = (X\cdot f)Y + f\nabla_X Y \end{cases}$ (Propiedades de definición de derivada covariante)

83 $T(X,Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X,Y]$ (Definición de torsión, tensor de torsión).

84 $X\cdot g(Y,Z) = g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z)$ (Conexión compatible con la métrica.)

(Definen Conexión de Levi Cevita).

85 $$2\langle \nabla_X Y, Z\rangle = X\cdot\langle Y,Z\rangle + Y\cdot\langle Z,X\rangle - Z\langle X,Y\rangle + \langle [X,Y],Z\rangle - \langle [X,Z],Y\rangle - \langle [Y,Z],X\rangle$$

(Formula de Kozul) (No hay que saberla solo poder usarla para deducir formula de Christoffel).

86 $\nabla_X Y = dY(X)$

(Conexión en $\mathbb{R}^n$ euclidiano)

87 $dY(X) - dX(Y) = [X,Y]$

(El corchete de Lie en $\mathbb{R}^n$ en función de la conexión de L.C)

87 $$\nabla_{\frac{\partial}{\partial x_j}} \frac{\partial}{\partial x_k} = \sum_i \Gamma^i_{jk} \frac{\partial}{\partial x_i}$$

(Definición de los simbolos de Christoffel)

88 $$\nabla_X Y = \sum_i \left(\sum_j X^j \frac{\partial Y^i}{\partial x_j} + \sum_{j,k} \Gamma^i_{jk} X^j Y^k \right) \frac{\partial}{\partial x_i}$$

(Conexión de L.C en coord locales)

(89) $$\Gamma^i_{jk} = \frac{1}{2}\sum_{\ell} g^{i\ell}\left(\partial_j g_{k\ell} + \partial_k g_{\ell j} - \partial_\ell g_{jk}\right)$$

(Formula de Christoffel *).

(90) $$\nabla_X Y(m) = \left(\tilde{\nabla}_X \tilde{Y}(m)\right)^T$$

(La conexion como componente tangencial de una extención).

(91)* $$\nabla_X S(X_1,\dots,X_q) = X\cdot S(X_1,\dots,X_q) - \sum_{k=1}^{q} S(X_1,\dots,\nabla_X X_k,\dots)$$

(Derivada covariante de un $(0,q)$-tensor).

(91)** $$\nabla_X S(X_1,\dots,X_q) = \nabla_X\left(S(X_1,\dots,X_q)\right) - \sum_{k=1}^{q} S(X_1,\dots,\nabla_X X_k,\dots)$$

(Derivada covariante de un $(1,q)$-tensor).

Derivada covariante sobre curvas

91 $\frac{D}{dt}(fX)(t) = f'(t)X(t) + f(t)\frac{D}{dt}X(t)$

(Propiedad ① que define la Derivada covariante sobre curvas)

92 $\frac{D}{dt}X(t) = \nabla_{\gamma'(t)}\tilde{X}$

(Propiedad ② que define la Derivada covariante sobre curvas)

91 $K(s) := \left\| \frac{D}{ds}T(s) \right\|$

(Definición de curvatura geodésica)

92 $\frac{DX}{dt}(t) = \left(\frac{\tilde{D}X}{dt}\right)^T$

(Conexión sobre curva como componente tangencial de extensión)

93 $\frac{D}{dt}X(t) = 0$

(Definición de campo paralelo)

94 $X_v(t_0) = v$

(Existencia y unicidad de campo paralelo con condición inicial v).

95 $$\begin{aligned} P_t : T_{\gamma(0)}M &\xrightarrow{\text{iso}} T_{\gamma(t)}M \\ v &\longrightarrow X_v(t) \end{aligned}$$

(Definición de transporte paralelo)

96 $\frac{d}{dt}\langle X(t), Y(t)\rangle = \left\langle \frac{D}{dt}X(t), Y(t)\right\rangle + \left\langle X(t), \frac{D}{dt}Y(t)\right\rangle$

(Regla del producto para la derivada covariante sobre curvas).

Geodésicas

(97) $\frac{D}{dt}\gamma'(t) = 0$

(Definición de geodésica).

(98) $(\gamma''(t))^T = 0$

(geodésicas en subvariedades de $\mathbb{R}^n$)

(99) $\ddot{x}_i + \sum_{j,k} \Gamma^i_{jk}\, \dot{x}_j \dot{x}_k = 0$

(Ecuación de geodésica en coordenadas locales).

La aplicación exponencial

(100) $\exp(v) = \gamma_v(1)$

(Formula que define la función exponencial).

(101) $\exp_m = \exp_{|\Omega \cap T_m M}$

(Definición de $\exp_m$).

(102) $\gamma_v(s) = \exp(sv)$ (La exponencial de sv)

(103) $d(\exp_m)_{0_m} = \mathbb{1}_{T_m M}$

(La derivada de la exponencial en 0).

(104) $B(0_m, \varepsilon) \subseteq T_m M \xrightarrow[\exp_m]{\text{difeo}} U \subseteq M$ ($\exp_m$ define coordenadas normales).

(105) $g\left(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}\right) = \delta_{ij}$ (La métrica en coordenadas normales).

(106) $\nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} \frac{\partial}{\partial x_j} = 0$ (La conexión en coordenadas normales).

(107) $\Gamma^i_{j,k} = 0$ (Los símbolos de Christoffel en coordenadas normales).

Curvatura

Definición

(107) $\nabla^2_{X,Y} Z := \nabla(\nabla Z)(X,Y) = \nabla_X(\nabla_Y Z) - \nabla_{\nabla_X Y} Z$

(Notación para la segunda derivada "tensorial")

(108) $\nabla^2_{X,Y} Z - \nabla^2_{Y,X} Z = \nabla_X(\nabla_Y Z) - \nabla_Y(\nabla_X Z) - \nabla_{[X,Y]} Z$

(Definición de la curvatura)

Tensor de curvatura

(109) $R(X,Y) := \nabla^2_{X,Y}$, $R_m(x,y) \in \mathcal{L}(T_mM, T_mM)$

(Curvatura como (2-2)-tensor)

(110) $R(X,Y,Z) := R(X,Y)Z$, $R_m(x,y)z \in T_mM$ (1,3) tensor

(Curvatura como (1,3)-tensor)

(111) $R(X,Y,Z,T) := \langle R(X,Y)Z, T\rangle$, $R_m(x,y,z,t) = \langle R_m(x,y)z, t\rangle \in \mathbb{R}$

(Curvatura como (0,4)-tensor)

Identidades de Bianchi (simetrías)

(112)
- $R(x,y,z,t) = -R(y,x,z,t) = -R(x,y,t,z)$
- $R(x,y,z,t) + R(y,z,x,t) + R(z,x,y,t) = 0$
- $R(x,y,z,t) = R(z,t,x,y)$

Curvatura en coordenadas

(114) $$R\left(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}\right)\frac{\partial}{\partial x_k} = \sum_{l} R_{i,j,k}^{l} \frac{\partial}{\partial x_l}$$

Otras definiciones de curvatura

(113) $$K_m(P) = \frac{R_m(x,y,y,x)}{\|x\|^2\|y\|^2-\langle x,y\rangle^2}$$ (Curvatura seccional)

(115) $$\mathrm{Ric}_m(x,y) = \mathrm{tr}\left(v \longmapsto R(v,x)y\right)$$ (Curvatura de Ricci)

(116) $$\mathrm{Scal}_m(x,y) = \sum_i \mathrm{Ric}_m(e_i,e_i) = \sum_{i,j} R(e_i,e_j,e_j,e_i)$$

(Curvatura escalar)

Interpretación de la curvatura

(117) $$\alpha+\beta+\gamma = \pi + \int_T K\, dA$$