**MECÁNICA ANALÍTICA**

iimas

**Tarea 4** Semestre 2025-1 Prof. Renato Calleja

**Ejercicio 1.** Una partícula $P$ de masa $m$ se mueve en un círculo de radio $R$ y centro $O$ contenido en un plano vertical. La partícula está sujeta a una fuerza misteriosa cuya energía potencial está dada por $W = -k\sin^2\theta$ donde $k > 0$ y $\theta$ denota el ángulo entre $OP$ y la recta vertical descendente. Además de la fuerza misteriosa, la partícula $P$ también resiente la fuerza de la gravedad.

(a) Haga un diagrama en donde muestre los puntos donde la fuerza misteriosa se anula y su dirección en los otros puntos.

(b) Encuentre expresiones para las energías cinética y potencial de la partícula (añadiendo la fuerza de la gravedad), y así encuentre el Lagrangiano. Deduzca la ecuación de movimiento de la partícula.

(c) Encuentre los equilibrios del sistema (su número dependerá del valor de $k$ comparado con $\frac{1}{2}mgR$).

(d) Determine la estabilidad de los equilibrios encontrados en el inciso anterior y para aquellos que sean estables determine el periodo aproximado de pequeñas oscilaciones.

**Ejercicio 2.** Una partícula de masa $m$ está restringida a moverse sobre el paraboloide de revolución $z = \alpha(x^2 + y^2)$ donde $\alpha > 0$ (cuyo eje es vertical), bajo la influencia de la gravedad y sin fricción.

(a) Encontrar el problema con un grado de libertad que describe el movimiento.

(b) ¿Qué condiciones debe satisfacer la velocidad inicial de la partícula para que el movimiento sea circular ?

(c) Encontrar el periodo de oscilaciones pequeñas alrededor del movimiento circular encontrado en el inciso (b).

**Ejercicio 3.** Una coordenada $q_i$ se llama cíclica si $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} = 0$. Sea $q \in \mathbb{R}^n$ y un Lagrangiano $\mathcal{L}(q, \dot{q}) = \mathcal{L}(q_2, ..., q_n, \dot{q}_1, ..., \dot{q}_n)$. La coordenada $q_1$ es aquí una "coordenada ciclica" del sistema.

(a) Encuentra una familia uniparamétrica de difeomorfismos que deja a $\mathcal{L}$ invariante y también encuentra la ley de conservación correspondiente.

(b) Considera el Lagrangiano $\mathcal{L} = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - V(r)$ (con $r^2 = x^2 + y^2$) y demuestra que es invariante bajo la transformación

$$T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varepsilon & -\sin\varepsilon \\ \sin\varepsilon & \cos\varepsilon \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \tag{1}$$

(c) Haz el cambio de variables a coordenadas polares,

$$x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta.$$

Identifica la variable cíclica y escribe la ley de conservación de acuerdo al inciso (a). Explica la relación entre la ley de conservación y la invarianza bajo la transformación (4).

**Ejercicio 4.** Sea el Lagrangiano

$$\mathcal{L}(q, \dot{q}) = \sum_{i,j=1}^{n} g_{ij}(q)\dot{q}_i\dot{q}_j,$$

con $q \in \mathbb{R}^n$. Suponer que los coeficientes $g_{ij}(q)$ definen una matriz simétrica y positiva, $\forall q$.

(a) Escribe las ecuaciones de Euler-Largrange para $\mathcal{L}$ (estas son las ecuaciones geodésicas para la métrica $g_{ij}$). Mostrar que si $q(t)$ es una solución de las ecuaciones geodésicas, entonces $\frac{d}{dt}\mathcal{L}(q(t), \dot{q}(t)) = 0$.

(b) Escribe las ecuaciones geodésicas para una supeficie de revolución en $\mathbb{R}^3$ (describir la superficie utilizando coordenadas cilindricas). Escribir la primera integral que corresponde a la simetría respecto a rotaciones. Utilizar esta integral para reducir las ecuaciones a un sistema de un grado de libertad.

**Ejercicio 5.** Dos partículas de masas $m_1$ y $m_2$ se mueven en el plano bajo las siguientes condiciones :

La partícula $m_1$ está restringida a moverse en el eje de las $x$ y la partícula $m_2$ al eje de las $y$.

Las partículas se mueven bajo la influencia del potencial

$$U = \frac{-k}{d(m_1, m_2)}$$

donde $k > 0$ es una constante y $d(m_1, m_2)$ es la distancia euclideana entre $m_1$ y $m_2$.

(a) Dar el espacio de configuraciones del sistema y el número de grados de libertad.

(b) Escribir el Lagrangiano del problema.

(c) En el caso en que $m_1 = m_2 = 1$, escribir el Lagrangiano del sistema en coordenadas polares y encontrar una variable cíclica y su correspondiente cantidad conservada.

(d) Es sistema del inciso anterior con una cantidad conservada se puede escribir como un sistema de un grado de libertad. Escribir el sistema y determinar una condición sobre la energía del sistema para que el moviemiento de las partículas sea acotado.

# Tarea 4

**Ejercicio 1:** Una partícula $P$ de masa $m$ se mueve en un círculo de radio $R$ y centro $O$ contenido en un plano vertical. La partícula está sujeta a una fuerza misteriosa cuya energía potencial está dada por $W = -k\sin^2(\theta)$ donde $k > 0$ y $\theta$ denota el ángulo entre $OP$ y la recta vertical decendente. Además de la fuerza misteriosa la partícule $P$ también reciente la fuerza de gravedad.

a) Haga un diagrama en donde muestre los puntos donde la fuerza misteriosa se anula y su dirección en los otros puntos

b) Encuentre expresiones para las energías cinética y potencial de la partícula (añadiendo la fuerza de gravedad) y así encuentre el Lagrangiano. Deduzca la ecuación de movimiento de la partícula.

c) Encuentre los equilibrios del sistema (su número dependerá del valor de $k$ comparado con $\frac{1}{2}mgR$.

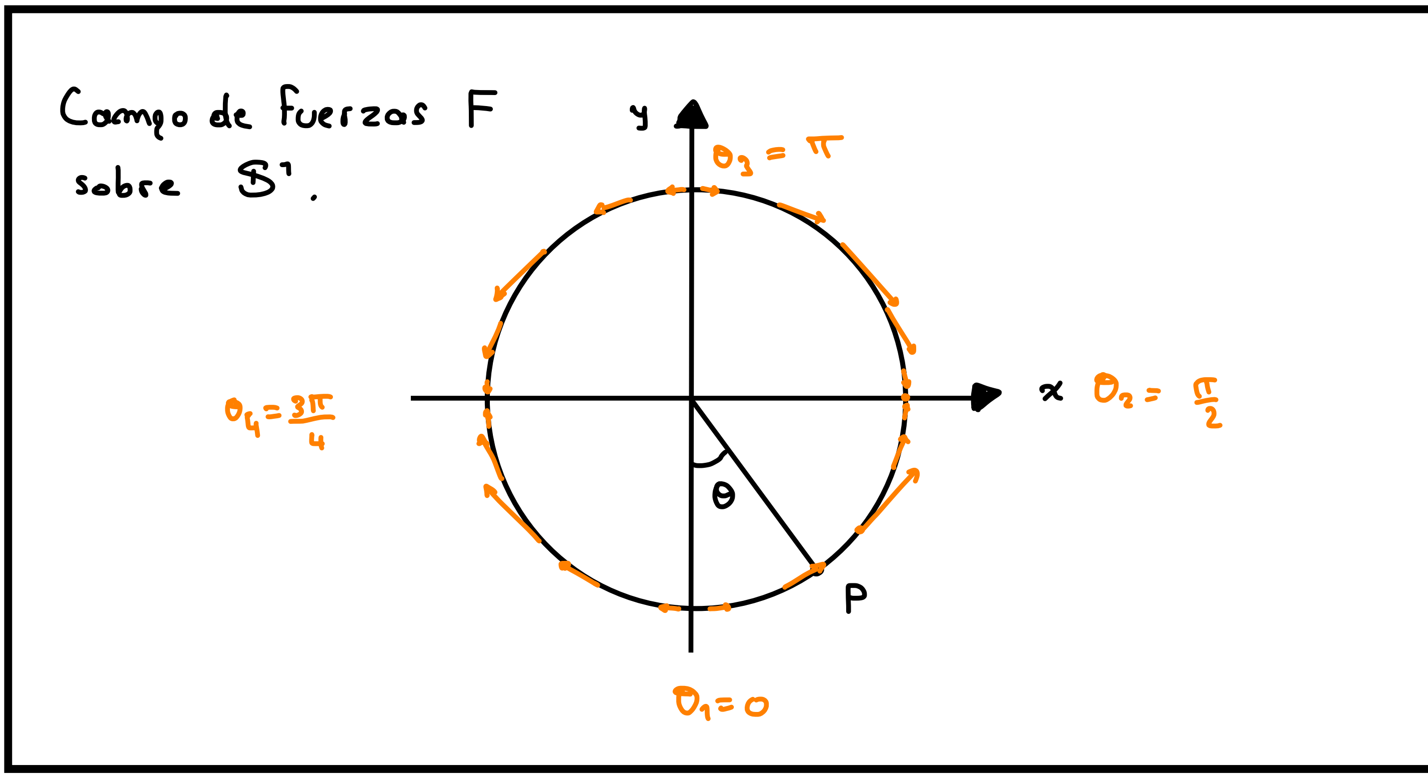
d) Determine la estabilidad de los equilibrios encontrados en el inciso anterior y para aquellos que sean estables determine el periodo aproximado de pequeñas oscilaciones.

respuesta:

a) El potencial $W$ de la fuerza misteriosa es $W = -k\,\text{sen}^2\theta$ y por lo tanto la fuerza misteriosa está dada por $F = -\frac{d}{d\theta}\left(-k\,\text{sen}^2\theta\right) = 2k\,\text{sen}\,\theta\cos\theta$ y está dada en la dirección del cambio en $\theta$, es decir en dirección tangente al círculo.

Notemos que $\boxed{F = 0 \quad \text{sii} \quad \theta = k\frac{\pi}{2}, \quad k \in \mathbb{N}}$

A continuación representamos gráficamente el campo de fuerzas provocado por $W$.




b) La energía cinética de la partícula está dada por

$$E_c = \frac{1}{2} m R^2 \dot{\theta}^2 .$$

La energía potencial es

$$E_p = mg\,h(\theta) + W(\theta)$$

$$= -mgR\cos\theta - K\ \mathrm{sen}^2\theta ,$$

donde $g$ es la constante de gravedad en la tierra $g \approx 9.8 \frac{m}{s^2}$ y $h(\theta)$ es la altura de P.

Entonces

$$\mathcal{L}(\theta,\dot{\theta}) = \underbrace{\frac{1}{2} m R^2 \dot{\theta}^2}_{E_c} + \underbrace{mgR\cos\theta + K\ \mathrm{sen}^2\theta}_{-E_p}$$

Los ecuaciones de movimiento están dada por la ecuación de E.L

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} = 0$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} = mR^2\dot{\theta} \quad , \quad \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} = mR^2\ddot{\theta} \quad , \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} = -mg \operatorname{sen}\theta + 2K^2 \cos\theta \operatorname{sen}\theta.$$

Así

$$\boxed{mR^2\ddot{\theta} = -mgR \operatorname{sen}\theta + 2K \cos\theta \operatorname{sen}\theta}$$

es la ecuación de movimiento del sistema.

c) Buscamos $\theta_e \in [-\pi, \pi]$ tal que

$$-mgR \operatorname{sen}\theta_e + 2K \cos(\theta_e) \operatorname{sen}(\theta_e) = 0 .$$

Una solución posible es $\operatorname{sen}(\theta_e) = 0$ en cuyo caso $\boxed{\theta_e = 0 \text{ o } \theta_e = \pi}$.

Si $\operatorname{sen}\theta_e \neq 0$ entonces buscamos $\theta_e$ tal que

$$2K^2 \cos(\theta_e) = mgR$$

$$\cos(\theta_e) = \frac{mgR}{2K}.$$

Esto nos lleva a distinguir casos.

Caso 1: $\frac{mgR}{2} \geqslant K$,

Solo hay dos equilibrios posibles $\theta_e = 0$ o $\theta_e = \pi$.

Caso 2 $\frac{mgR}{2} < K$

Entonces hay cuatro equilibrios posibles:

$$\theta_e^1 = 0 \ , \ \theta_e^2 = \pi \ , \ \theta_e^3 = \arccos\left(\frac{mgR}{2K}\right) , \ \theta_e^4 = -\arccos\left(\frac{mgR}{2K}\right)$$

d) Escribamos la ecuación de movimiento como un sistema

$$\dot{\theta} = \mu$$
$$\dot{\mu} = -\frac{g}{R}\operatorname{sen}\theta + \frac{2k}{mR^2}\cos\theta \operatorname{sen}\theta \;,$$

o bien como

$$\dot{X}(t) = f(X(t)) \qquad \text{donde} \quad X(t) = \begin{pmatrix} \theta(t) \\ \mu(t) \end{pmatrix}$$

y $f\begin{pmatrix} \theta \\ \mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu \\ -\frac{g}{R}\operatorname{sen}\theta + \frac{2k}{mR^2}\cos\theta\operatorname{sen}\theta \end{pmatrix}$.

Linealicemos el sistema.

$$\operatorname{jac} f\begin{pmatrix} \theta \\ \mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{g}{R}\cos\theta + \frac{2k}{mR^2}(\cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta) & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{g}{R}\cos\theta + \frac{2k}{mR^2}(2\cos^2\theta - 1) & 0 \end{pmatrix}$$

Evaluando en los equilibrios,

$$\operatorname{jac} f\begin{pmatrix} \theta_e^1 \\ \mu_e^1 \end{pmatrix} = \operatorname{jac} f\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{g}{R} + \frac{2k}{mR^2} & 0 \end{pmatrix}$$

Con valores propios reales $\lambda_1 = \sqrt{\frac{g}{R} + \frac{2k}{mR^2}} > 0$, $\lambda_2 = -\sqrt{\frac{g}{R} + \frac{2k}{mR^2}} < 0$,

lo cual refleja que hay un $\boxed{\text{equilibrio inestable}}$.

$$\operatorname{jac} f\begin{pmatrix} \theta_e^2 \\ \mu_e^2 \end{pmatrix} = \operatorname{jac}\begin{pmatrix} \pi \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{2k}{mR^2} - \frac{g}{R} & 0 \end{pmatrix}$$

Cuyos valores propios son

$$\lambda_1 = \sqrt{\frac{2k - Rgm}{mR^2}} > 0 \;, \quad \lambda_2 = -\sqrt{\frac{2k - Rgm}{mR^2}} < 0 \;,$$

si estamos en el <u>caso 2</u> $(2k - Rgm > 0)$.

Lo cual dá un $\boxed{\text{equilibrio inestable}}$.

Si estamos en el caso 1 $(2k - Rgm \leq 0)$

$$\lambda_1 = i\sqrt{\frac{Rgm - 2k}{mR^2}}, \qquad \lambda_2 = -i\sqrt{\frac{Rgm-2k}{mR^2}}$$

En este caso el teorema de Hartman-Grobman no permite establecer resultados sobre la estabilidad del equilibrio.

Suponiendo que estamos en el caso 2, analicemos la naturaleza de los equilibrios $\begin{pmatrix}\theta_e^3\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\arccos\left(\frac{mgR}{2k}\right)\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}\theta_e^4\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-\arccos\left(\frac{mgR}{2k}\right)\\0\end{pmatrix}$.

$$\operatorname{jac} f\begin{pmatrix}\theta_e^3\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & 1\\ \frac{g}{R}\cos\theta_e^3 + \frac{2k}{mR^2}\left(2\cos^2\theta_e^3 - 1\right) & 0\end{pmatrix}$$

$2k > Rgm$

$$\frac{g}{R}\cos\theta_e^3 + \frac{2k}{mR^2}\left(2\cos^2\theta_e^3 - 1\right)$$

$$= \frac{g}{\cancel{R}}\frac{mg\cancel{R}}{2k} + \frac{2k}{mR^2}\left(2\left(\frac{mgR}{2k}\right)^2 - 1\right)$$

$$= \frac{m}{2k}g^2 + \frac{\cancel{4k}}{\cancel{mR^2}}\frac{m^{\cancel{2}}g^2\cancel{R^2}}{\cancel{4}k^{\cancel{2}}} - \frac{2k}{mR^2}$$

$$= \frac{m}{2k}g^2 + \frac{m}{k}g^2 - \frac{2k}{mR^2}$$

$$= \frac{3m}{2k}g^2 - \frac{2k}{mR^2}$$

$$= \frac{3m^2g^2R^2 - 4k^2}{2kmR^2}$$

$-mgR + 2k\cos\theta = 0$

$mgR + \cancel{2}k\frac{mgR}{\cancel{2}}$

$4k^2 > R^2g^2m^2$

$2k > Rgm$

Cuyo signo podría ser positivo o negativo.

Por último, consideremos el equilibrio $\begin{pmatrix}\theta_e^4\\0\end{pmatrix}$:

$$\frac{g}{R}\cos\theta_e^4 + \frac{2k}{mR^2}\left(2\cos^2\theta_e^4 - 1\right)$$

$$= -\frac{m}{2k} g^2 + \frac{m}{k} g^2 - \frac{2k}{mR^2}$$

$$= \frac{m}{2k} g^2 - \frac{2k}{mR^2}$$

$$= \frac{m^2R^2g^2 - 4k^2}{2kmR^2} < 0$$ pues estamos en el caso 2 $2k > mgR$.

De nuevo como $\lambda_1 = i\sqrt{\frac{4k^2 - m^2R^2g^2}{2kmR^2}}$ y $\lambda_2 = -i\sqrt{\frac{4k^2 - m^2R^2g^2}{2kmR^2}}$

En cuyo caso no aplica Hartman-Grobman.

**Ejercicio 2:** Una partícula de masa $m$ está restringida a moverse sobre el paraboloide de revolución $z = \alpha(x^2+y^2)$ donde $\alpha > 0$ (cuyo eje es vertical) bajo la influencia de la gravedad y sin fricción.

a) Encontrar el problema con un grado de libertad que describe el movimiento.

b) ¿Que condiciones debe satisfacer la velocidad inicial para que el movimiento sea circular?

c) Encontrar el periodo de oscilaciones pequeñas alrededor del movimiento circular encontrado en el inciso b).

a) Trabajemos en coordenadas cilíndricas, es decir

$$x = r\cos\theta \qquad y = r\,\text{sen}\,\theta \,, \qquad z = \alpha r^2$$

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \dot{r}\cos\theta - r\dot{\theta}\,\text{sen}\,\theta \\ \dot{y} &= \dot{r}\,\text{sen}\,\theta + r\dot{\theta}\cos\theta \\ \dot{z} &= 2\alpha r\dot{r} \end{aligned} \qquad (1)$$

La energía cinética del sistema es

$$\begin{aligned} E_c = \frac{1}{2}m\Big( & \dot{r}^2\cos^2\theta - 2\dot{r}\dot{\theta}r\cancel{\cos\theta}\,\text{sen}\,\theta + r^2\dot{\theta}^2\,\text{sen}^2\theta \\ & + \dot{r}^2\,\text{sen}^2\theta + 2\dot{r}\dot{\theta}r\cancel{\text{sen}\,\theta}\cos\theta + r^2\dot{\theta}^2\cos^2\theta \\ & + 4\alpha^2 r^2\dot{r}^2 \Big) \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2}m\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + 4\,r^2\dot{r}^2\right)$$

La energía potencial es

$$E_p = mg\alpha r^2$$

Por lo tanto, el Lagrangiano es

$$L(r,\theta,\dot r,\dot\theta) = \frac{1}{2}m\left(\dot r^2 + r^2\dot\theta^2 + 4r^2\dot r^2\right) - mg\alpha r^2$$

Escribamos las ecuaciones de Euler - Lagrange

Observemos primero que $\theta$ es una variable cíclica y por lo tanto una de las ecuaciones de Euler - Lagrange nos dá la cantidad conservada

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot\theta} = 2r^2\dot\theta = 2L .$$

Calculamos

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot r} = m(1+4r^2)\dot r$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot r} = m\left(8r\dot r^2 + (1+4r^2)\ddot r\right)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial r} = 2r\left(\frac{1}{2}m\left(\dot\theta^2 + 4\dot r^2\right) - mg\alpha\right)$$

Utilizando la conservación de momento angular los ecuaciones de EL son

$$8mr\dot r^2 + m(1+4r^2)\ddot r - rm\left(\dot\theta^2 + 4\dot r^2\right) + 2rmg\alpha = 0$$

$$8mr\dot r^2 + m(1+4r^2)\ddot r - \frac{mL^2}{r^3} - 4mr\dot r^2 + 2rmg\alpha = 0$$

$$m(1+4r^2)\ddot{r} + 4mr\dot{r} + 2rmg\alpha - \frac{mL^2}{r^3} = 0$$

es la ecuación del movimiento con un grado de libertad.

b) Supongamos que la partícula está en movimiento circular, es decir $r$ es constante y por lo tanto $\dot{r} = \ddot{r} = 0$.

La ecuación de movimiento es entonces

$$2r\cancel{m}g\alpha = \frac{\cancel{m}L^2}{r^3}, \quad \text{entonces}$$

$$L = r^2\sqrt{2\alpha g}.$$

Recordando la definición de $L$ tenemos que.

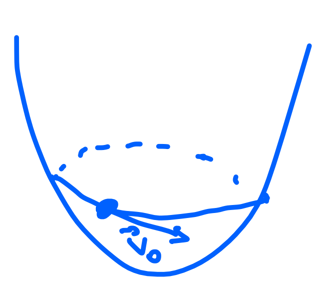
$$\cancel{r^2}\dot{\theta} = \cancel{r^2}\sqrt{2\alpha g} \qquad \forall t.$$

$$y \quad \theta(t) = t\sqrt{2\alpha g} + C$$

Tomando en cuenta esto en las ecuaciones de la velocidad de la partícula (1)

$$\begin{aligned}
\dot{x} &= \cancel{\dot{r}\cos\theta} - r\dot{\theta}\operatorname{sen}\theta &&= -r\sqrt{2\alpha g}\operatorname{sen}\left(t\sqrt{2\alpha g}+C\right)\\
\dot{y} &= \cancel{\dot{r}\operatorname{sen}\theta} + r\dot{\theta}\cos\theta &&= r\sqrt{2\alpha g}\cos\left(t\sqrt{2\alpha g}+C\right)\\
\dot{z} &= 2\cancel{\alpha r\dot{r}} &&= 0.
\end{aligned}$$

Es decir que la velocidad inicial tiene que ser el vector $\vec{V}_0 = \begin{pmatrix} -r\sqrt{2\alpha} \\ r\sqrt{2\alpha} \\ 0 \end{pmatrix}$ para que la partícula se mantenga en un círculo.



c) La trayectoria circular viene dada por

$$x(t) = r\cos\left(t\sqrt{2\alpha g} + C\right)$$
$$y(t) = r\,\mathrm{sen}\left(t\sqrt{2\alpha g} + C\right)$$

Entonces su periodo de oscilación es

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{2\alpha g}}$$

**Ejercicio 3:** Una coordenada $q_i$ es llamada cíclica si $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} = 0$. Sea $q \in \mathbb{R}^n$ y un Lagrangiano $\mathcal{L}(q,\dot{q}) = \mathcal{L}(q_1,\dots,q_n,\dot{q}_1,\dots,\dot{q}_n)$. La coordenada $q_i$ es aquí una coordenada cíclica del sistema.

a) Encuentre una familia uniparamétrica de difeomorfismos que deja a $\mathcal{L}$ invariante y también encuentra la ley de conservación correspondiente.

b) Considera el Lagrangiano $\mathcal{L} = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2+\dot{y}^2) - V(r)$ (con $r^2 = x^2+y^2$) y demuestra que es invariante bajo la transformación

$$T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varepsilon & -\sin\varepsilon \\ \sin\varepsilon & \cos\varepsilon \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

c) Haz el cambio de variables a coordenadas polares

$$x = r\cos\theta \quad , \quad y = r\,\mathrm{sen}\,\theta .$$

Identifica la variable cíclica y escribe la ley de conservación de acuerdo al inciso a). Explica la relación entre la ley de conservación y la invarianza bajo la transformación.

respuesta:

a) Consideremos la familia de difeomorfismos

$$Q_\varepsilon : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

$$(q_1,\dots,q_n) \longmapsto (q_1,\dots,q_i+\varepsilon,\dots,q_n)$$

Entonces $\mathcal{L}(Q_\varepsilon(q)) = \mathcal{L}(q) \quad \forall\, \varepsilon > 0$ pues $q_i$ es cíclica.

El teorema de Nother implica que

$$J(q,\dot{q}) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j}(q,\dot{q}) \left[\frac{d}{d\varepsilon} Q_\varepsilon(q)_j\right]_{\varepsilon=0}$$

$$= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \quad , \text{ es una cantidad conservada.}$$

b) Tomemos en cuenta lo siguiente,

$Q_\varepsilon := T_\varepsilon$ es lineal $\forall \varepsilon > 0$ entonces

$$D_{\binom{x}{y}} Q_\varepsilon = T_\varepsilon \qquad \forall \varepsilon > 0 .$$

Además $T_\varepsilon$ es una transformación ortogonal por lo cual $|T_\varepsilon q| = |q| \ \forall q \in \mathbb{R}^n$ donde $|\cdot|$ es la norma euclidiana. Entonces

$$\mathcal{L}\left( Q_\varepsilon \binom{x}{y} , \left(D_{\binom{x}{y}} Q_\varepsilon\right)\binom{\dot{x}}{\dot{y}}\right)$$

$$= \frac{1}{2} m \left( T_\varepsilon \binom{\dot{x}}{\dot{y}}_1^2 + T_\varepsilon \binom{\dot{x}}{\dot{y}}_2^2 \right) - V\left( \sqrt{T_\varepsilon \binom{x}{y}_1^2 + T_\varepsilon \binom{x}{y}_2^2} \right)$$

$$= \frac{1}{2} m \left| T_\varepsilon \binom{\dot{x}}{\dot{y}} \right|^2 - V\left( \left| T_\varepsilon \binom{x}{y} \right| \right)$$

$$= \frac{1}{2} m \left| \binom{\dot{x}}{\dot{y}} \right|^2 - V\left( \left| \binom{x}{y} \right| \right)$$

$$= \mathcal{L}(x, y, \dot{x}, \dot{y}) \quad ,$$

donde $T\binom{x}{y}_1$ y $T\binom{x}{y}_2$ son los componentes de $T\binom{x}{y}$.

Así $\mathcal{L}$ es invariante bajo $Q_\varepsilon$.

c) Hagamos el cambio de variables

$$x = r\cos\theta \quad , \quad y = r\,\mathrm{sen}\,\theta$$

$$\dot{x} = \dot{r}\cos\theta - r\dot{\theta}\,\mathrm{sen}\,\theta \qquad \dot{y} = \dot{r}\,\mathrm{sen}\,\theta + r\dot{\theta}\cos\theta$$

Entonces el lagrangiano en estos nuevos variables se escribe como

$$\mathcal{L}(r,\theta,\dot{r},\dot{\theta}) = \frac{1}{2}\Big( \dot{r}^2\cos^2\theta - \cancel{2r\dot{r}\dot{\theta}\cos\theta\,\mathrm{sen}\,\theta} + r^2\dot{\theta}^2\,\mathrm{sen}^2\theta$$

$$+ \dot{r}^2\,\mathrm{sen}^2\theta + \cancel{2r\dot{r}\dot{\theta}\,\mathrm{sen}\,\theta\cos\theta} + r^2\dot{\theta}^2\cos^2\theta \Big)$$

$$- V(r)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2\right) - V(r),$$

que no depende de $\theta$. Así $\theta$ es una variable cíclica.

Usando lo que se afirmó en el inciso a) tenemos que

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} = r^2\dot{\theta}$$ es una cantidad conservada.

Ejercicio 4 Sea el Lagrangiano

$$\mathcal{L}(q,\dot q) = \sum_{i,j=1}^{n} g_{ij}(q)\,\dot q_i \dot q_j$$

Con $q \in \mathbb{R}^n$. Suponer que los coeficientes $g_{ij}(q)$ definen una matriz simétrica y positiva, $\forall q$.

a) Escribe las ecuaciones de Euler Lagrange para $\mathcal{L}$ (Estas son las ecuaciones geodésicas para la métrica $g_{ij}$). Mostrar que si $q(t)$ es una solución de las ecuaciones geodésicas, entonces $\frac{d}{dt}\mathcal{L}(q(t),\dot q(t)) = 0$

b) Escribe las ecuaciones geodésicas para una superficie de revolución en $\mathbb{R}^3$. (describir la superficie utilizando coordenadas cilíndricas.) Escribir la primera integral que corresponde a la simetría respecto a las rotaciones. Utilizar esta integral para reducir las ecuaciones a un sistema de un grado de libertad.

a) Derivemos $\mathcal{L}$ con respecto a $\dot q_i$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot q_\ell} = \frac{\partial}{\partial \dot q_\ell} \sum_{i,j=1}^{n} g_{ij}(q)\,\dot q_i \dot q_j$$

$$= \sum_{i=1}^{n} g_{i\ell}(q)\,\dot q_i + \sum_{j=1}^{n} g_{\ell j}(q)\,\dot q_j$$

$$= 2\sum_{i=1}^{n} g_{i\ell}(q)\,\dot q_i, \qquad \forall\, \ell = 1,\dots,n,$$

o, de forma mas compacta

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot q} = 2 g \dot q,$$

donde $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot q} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot q_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot q_n} \end{pmatrix}$, $g = (g_{ij})$ $\dot q = \begin{pmatrix} \dot q_1 \\ \vdots \\ \dot q_n \end{pmatrix}$.

Derivemos con respecto a $t$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot q_k} = 2\sum_{i=1}^{n}\frac{d}{dt}\left(g_{ik}(q)\,\dot q_i\right)$$

$$= 2\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial g_{ik}(q)}{\partial q_j}\dot q_j\right)\dot q_i + g_{ik}\ddot q_i$$

$$= 2\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial g_{ik}(q)}{\partial q_j}\dot q_j\dot q_i + 2\sum_{i=1}^{n} g_{ik}\ddot q_i \;. \qquad \forall k=1,\dots,n.$$

$$= \sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial g_{ik}(q)}{\partial q_j}\dot q_j\dot q_i + \sum_{i,j}^{n}\frac{\partial g_{ik}}{\partial q_j}\dot q_j\dot q_i + 2\sum_{i=1}^{n} g_{ik}\ddot q_i$$

$$= \sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial g_{ik}(q)}{\partial q_j}\dot q_j\dot q_i + \sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial g_{jk}}{\partial q_i}\dot q_i\dot q_j + 2\sum_{i=1}^{n} g_{ik}\ddot q_i$$

Por otro lado, derivando $\mathcal{L}$ respecto a $q_i$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_k} = \sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial g_{ij}(q)}{\partial q_k}\dot q_i\dot q_j$$

Por lo tanto, las ecuaciones de Euler-Lagrange para las geodésicas son

$$\text{(A)}\quad \sum_{i,j}^{n}\left(\frac{\partial g_{jk}}{\partial q_i}+\frac{\partial g_{ik}}{\partial q_j}-\frac{\partial g_{ij}}{\partial q_k}\right)\dot q_i\dot q_j + 2\sum_{i=1}^{n} g_{ik}\ddot q_i = 0 \quad \forall k=1,\dots,n.$$

Sea $\Delta^k_{ij} = \frac{\partial g_{jk}}{\partial q_i}+\frac{\partial g_{ik}}{\partial q_j}-\frac{\partial g_{ij}}{\partial q_k} \qquad i,j,k=1,\dots,n$

Sea $V$ el vector cuyas entradas son

$V_k = \sum_{i,j=1}^{n}\Delta^k_{ij}\dot q_i\dot q_j$ La ecuación (A) se escribe matricialmente

$$V + 2g\ddot q = 0$$

Entonces

$$\ddot{q} = -\frac{1}{2} g^{-1} V \text{ , o bien entrada a entrada}$$

$$\ddot{q}_\ell = -\frac{1}{2} \sum_{k}^{n} g^{\ell k} V_k$$

$$= -\frac{1}{2} \sum_{k} g^{\ell k} \left( \sum_{i,j=1}^{n} \Delta_{ij}^{k} \dot{q}_i \dot{q}_j \right)$$

Así

$$\boxed{\ddot{q}_\ell = -\frac{1}{2} \sum_{i,j,k} g^{\ell k} \left( \frac{\partial g_{jk}}{\partial q_i} + \frac{\partial g_{ik}}{\partial q_j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial q_k} \right) \dot{q}_i \dot{q}_j}$$

son las ecuaciones de las geodésicas.

Ahora supongamos que $q$ es solución de estas ecuaciones.

$$\frac{d}{dt} \mathcal{L}(q(t), \dot{q}(t)) = \sum_{\ell=1}^{n} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_k} \dot{q}_k + \sum_{\ell=1}^{n} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_k} \ddot{q}_k$$

$$= \sum_{\ell=1}^{n} \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial g_{ij}(q)}{\partial q_k} \dot{q}_i \dot{q}_j \dot{q}_k + 2 \sum_{k=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} g_{ik}(q) \dot{q}_i \ddot{q}_k$$

Multiplicando (A) por $\dot{q}_k$ y sumando sobre todas las $k$ tenemos

$$\sum_{i,j,\ell}^{n} \left( \frac{\partial g_{kj}}{\partial q_i} + \frac{\partial g_{ki}}{\partial q_j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial q_k} \right) \dot{q}_i \dot{q}_j \dot{q}_k + 2 \sum_{i,k}^{n} g_{ik} \ddot{q}_i \dot{q}_k = 0 \text{ , así}$$

$$\sum_{i,j,k}^{n} \frac{\partial g_{ij}}{\partial q_k} \dot{q}_i \dot{q}_j \dot{q}_k + 2 \sum_{i,k}^{n} g_{ik} \ddot{q}_k \dot{q}_i = 0$$

$$\therefore \frac{d}{dt} \mathcal{L}(q(t), \dot{q}(t)) = 0$$

b) Recordemos que una superficie de revolución puede parametrizarse como

$$\varphi\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r(u)\cos(v) \\ r(u)\operatorname{sen}(v) \\ u \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial u} = \begin{pmatrix} r'(u)\cos(v) \\ r'(u)\sin(v) \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial v} = \begin{pmatrix} -r(u)\sin(v) \\ r(u)\cos(v) \\ 0 \end{pmatrix}$$

La métrica esta dada por

$$g(u,v) = \begin{pmatrix} r'(u)+1 & 0 \\ 0 & r^2(u) \end{pmatrix} \qquad g^{-1}(u,v) = \begin{pmatrix} \frac{1}{r'(u)^2+1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{r(u)^2} \end{pmatrix}$$

Gracias a la forma diagonal de la métrica, las ecuaciones de los geodésicas se simplifican. Manteniendo la notación de los incisos a) y b) las geodésicas se escriben como

$$\ddot{q}_\ell = -\frac{1}{2} \sum_{i,j,k} g^{\ell k} \left( \frac{\partial g_{jk}}{\partial q_i} + \frac{\partial g_{ik}}{\partial q_j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial q_k} \right) \dot{q}_i \dot{q}_j$$

$$\ddot{q}_\ell = -\frac{1}{2} \sum_{i,j} g^{\ell\ell} \left( \frac{\partial g_{j\ell}}{\partial q_i} + \frac{\partial g_{i\ell}}{\partial q_j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial q_\ell} \right) \dot{q}_i \dot{q}_j$$

Notemos que

$$A := -\frac{1}{2} \sum_{ij} g^{\ell\ell} \frac{\partial g_{j\ell}}{\partial q_i} \dot{q}_i \dot{q}_j = -\frac{1}{2} \sum_{i} g^{\ell\ell} \frac{\partial g_{\ell\ell}}{\partial q_i} \dot{q}_i \dot{q}_\ell$$

$$B := -\frac{1}{2} \sum_{ij} g^{\ell\ell} \frac{\partial g_{i\ell}}{\partial q_j} \dot{q}_i \dot{q}_j = -\frac{1}{2} \sum_{j} g^{\ell\ell} \frac{\partial g_{\ell\ell}}{\partial q_j} \dot{q}_\ell \dot{q}_j$$

$$C := \frac{1}{2}\sum_{ij} g^{\ell\ell}\frac{\partial g_{ij}}{\partial q_\ell}\dot{q}_i\dot{q}_j = \frac{1}{2}\sum_i g^{\ell\ell}\frac{\partial g_{ii}}{\partial q_\ell}\dot{q}_i^2$$

$$A+B+C = -\sum_i g^{\ell\ell}\frac{\partial g_{\ell\ell}}{\partial q_i}\dot{q}_i\dot{q}_\ell + \frac{1}{2}\sum_{i=1} g^{\ell\ell}\frac{\partial g_{ii}}{\partial q_\ell}$$

$$= g^{\ell\ell}\left(\sum_i -\frac{\partial g_{\ell\ell}}{\partial q_i}\dot{q}_i\dot{q}_\ell + \frac{1}{2}\frac{\partial g_{ii}}{\partial q_\ell}\dot{q}_i^2\right)$$

Para $\ell = 1$

$$\ddot{u} = g^{11}\left(-\cancel{\frac{\partial g_{11}}{\partial u}}\dot{u}^2 + \frac{1}{2}\frac{\partial g_{11}}{\partial u}\dot{u}^2 - \cancel{\frac{\partial g_{11}}{\partial v}}\dot{v}\dot{u} + \frac{1}{2}\frac{\partial g_{22}}{\partial u}\dot{q}_2^2\right)$$

$$\ddot{u} = \frac{1}{r'(u)^2+1}\left(-\frac{1}{2}r''(u)\dot{u}^2 + \frac{1}{\cancel{2}}\cancel{2}r(u)r'(u)\dot{v}^2\right)$$

$$\boxed{\ddot{u} = \frac{-r''(u)\dot{u}^2 + r(u)r'(u)\dot{v}^2}{r'(u)^2+1}} \qquad (M)$$

Para $\ell = 2$

$$\ddot{v} = g^{22}\left(-\frac{\partial g_{22}}{\partial u}\dot{u}\dot{v} + \frac{1}{2}\cancel{\frac{\partial g_{11}}{\partial v}}\dot{u}^2 - \cancel{\frac{\partial g_{22}}{\partial v}}\dot{v}^2 + \frac{1}{2}\cancel{\frac{\partial g_{22}}{\partial v}}\dot{v}^2\right)$$

$$\boxed{\ddot{v} = \frac{-2r'(u)\dot{u}\dot{v}}{r(u)}} \qquad (N)$$

Podemos ahora notar que al ser este Lagrangiano invariante por rotaciones, tenemos que el momento angular

$$r^2(u)\dot{v} = L \quad \text{es constante.}$$

Los ecuaciones (M) y (N) se reducen a

$$\boxed{\ddot{u} = \frac{-r''(u)\,\dot{u}^2 + \frac{r'(u)\,L^2}{r^3(u)}}{r'(u)+1}}$$

$$\boxed{\ddot{v} = \frac{-2\,r'(u)\,\dot{u}\,L}{r^3(u)}}$$

Son los ecuaciones reducidos a un grado de libertad.

**Ejercicio 5.** Dos partículas de masas $m_1$ y $m_2$ se mueven en el plano bajo las siguientes condiciones: La partícula $m_1$ está restringida a moverse en el eje $x$ y la partícula $m_2$ en el eje $y$. Las partículas se mueven bajo la influencia del potencial

$$U = \frac{-K}{d(m_1, m_2)},$$

donde $K > 0$ es una constante y $d$ es la distancia euclidiana.

a) Dar el espacio de configuraciones del sistema y el numero de grados de libertad.

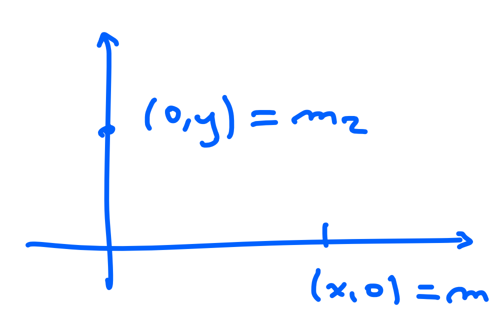
b) Escribir el Lagrangiano del problema

c) En caso de que $m_1 = m_2 = 1$, escribir el Lagrangiano del sistema en coordenadas polares y encontrar una variable cíclica y su correspondiente cantidad conservada

d) El sistema del inciso anterior con una cantidad conservada se puede escribir como un sistema de un grado de libertad. Escribir el sistema y determinar una condicion sobre la enería del sistema para que el movimiento de las partículas sea acotado.

respuesta:

a) El espacio de configuraciones es $\mathbb{R}^2$, el sistema tiene por lo tanto dos grados de libertad




b) El Lagrangiano del problema es

$$\mathcal{L}(x, y, \dot{x}, \dot{y}) = \frac{1}{2}\left(m_1 \dot{x}^2 + m_2 \dot{y}^2\right) + \frac{K}{\sqrt{x^2 + y^2}},$$

donde $x$ es la primera componente de la partícula $m_1$ y $y$ es la segunda componente de la partícula $m_2$.

c) Supongamos que $m_1 = m_2 = 1$

Hagamos el cambio de variables

$$x = r\cos\theta \quad , \quad y = r\,\mathrm{sen}\,\theta$$

$$\dot{x} = \dot{r}\cos\theta - r\dot{\theta}\,\mathrm{sen}\,\theta \qquad \dot{y} = \dot{r}\,\mathrm{sen}\,\theta + r\dot{\theta}\cos\theta$$

Usando los calculos del ejercicio 3

$$\therefore \quad \mathcal{L}(r,\theta,\dot{r},\dot{\theta}) = \frac{1}{2}\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2\right) + \frac{k}{r}$$

Es decir $\mathcal{L}(r,\theta,\dot{r},\dot{\theta}) = \mathcal{L}(r,\dot{r},\dot{\theta})$. Entonces $\theta$ es una variable cíclica.

Vimos también que el momento angular $r^2\dot{\theta}$ es una cantidad conservada.

d) Tomando en cuenta que $L = r^2\dot{\theta}^2$ es constante, podemos escribir la energía del sistema como

$$\frac{1}{2}\left(\dot{r}^2 + L\right) - \frac{k}{r} = E.$$

Supongamos que la partícula escapa a $\infty$.
Entonces lo hace con una velocidad constante dada por

$$\frac{1}{2}\dot{r}^2 = E - \frac{L}{2},$$

lo cual exige que $E \geq \frac{L}{2}$.