**Tarea 6**

# MECÁNICA ANALÍTICA

Semestre 2025-1 Prof. Renato Calleja

**Ejercicio 1.** Considere los siguientes sistemas mecánicos :

(1) Una partícula libre en $\mathbb{R}^3$.

(2) Una partícula en $\mathbb{R}^3$ en un campo potencial.

(3) El péndulo plano.

(4) El doble péndulo plano.

(5) El péndulo esférico.

(6) Un oscilador armónico bi-dimensional.

Para cada uno de ellos escribir la función Lagrangiana y las ecuaciones de Lagrange. Efectuar una transformación de Legendre y escribir el Hamiltoniano asociado y las ecuaciones de Hamilton mostrando su equivalencia con las ecuaciones de Lagrange. Encontrar (si existen) cantidades conservadas. ¿Cuál es el espacio de configuraciones para cada uno de estos sistemas ?

**Ejercicio 2.** Sea el Lagrangiano

$$L(q,\dot{q}) = -mc^2\left(1-\left(\frac{\dot{q}}{c}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}} - V(q), \qquad q\in\mathbb{R}.$$

donde $m,c>0$. Encuentre el Hamiltoniano. Haga un dibujo del plano fase para el caso donde $V(q)=\frac{1}{2}kq^2$ ($k>0$). (Este es el Lagrangiano de una partícula en un campo de fuerzas según la teoría de la relatividad).

**Ejercicio 3.** Sea $z_0$ un punto fijo del sistema Hamiltoniano $\dot{z}=J\nabla H(z)$ en $\mathbb{R}^{2n}$.

(a) Muestra que la linealización alrededor de $z_0$ es también un sistema Hamiltoniano. Escribe el Hamiltoniano en términos de $H$ y sus derivadas parciales.

(b) Muestra que si el Hessiano de $H$ en $z_0$ es estríctamente positivo ( o estrictamente negativo) entonces $z_0$ es un punto fijo estable. En este contexto, la estabilidad significa que existen abiertos $U_0\subset U$ alrededor de $z_0$ tal que cada trayectoria de la ecuación que empieza en $U_0$ se queda en $U$, $\forall t\in\mathbb{R}$.

(c) Sea el sistema Newtoniano $\ddot{q}=-\nabla V(q)$ con $q\in\mathbb{R}^n$. Escribe este sistema como un sistema Hamiltoniano y muestra que los equilibrios que corresponden a mínimos locales aislados de $V$ son estables en el sentido de la pregunta anterior.

**Ejercicio 4.** Considere $\mathbb{R}^3$ con variables cartesianas $\mathbf{M}=(M_1,M_2,M_3)$.

(i) Demostrar que la siguiente relación satisface las propiedades de un corchete de Poisson en $\mathbb{R}^3$ para funciones $f,g\in C^\infty(\mathbb{R}^3)$ :

$$\{f,g\}(\mathbf{M}) = \mathbf{M}\cdot(\nabla f(\mathbf{M})\times\nabla g(\mathbf{M}))\,.$$

(ii) Demostrar que la función $K(\mathbf{M})=||\mathbf{M}||^{\mathbf{2}}$ satisface que $\{K,f\}=0$ para toda $f\in C^\infty(\mathbb{R}^3)$. Las funciones con esta propiedad se llaman *Casimires* del corchete de Poisson.

(iii) (Bono) Demostrar que las ecuaciones diferenciales que definen el campo Hamiltoniano de la función

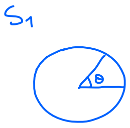
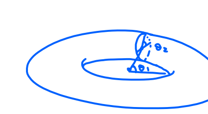
$$H(\mathbf{M}) = \frac{1}{2}\left(\frac{M_1^2}{I_1}+\frac{M_2^2}{I_2}+\frac{M_3^2}{I_3}\right)$$

coinciden con las ecuaciones de Euler para el cuerpo rígido.

Ejercicio 1: Considere los siguientes sistemas mecánicos

1) Una partícula libre en $\mathbb{R}^3$.
2) Una partícula en $\mathbb{R}^3$ en un campo potencial
3) El péndulo plano
4) El doble péndulo plano
5) El péndulo esférico
6) Un ocilador armónico bi-dimensional.

Para cada uno de ellos escribir el Lagrangiano y las ecuaciones de Euler-Lagrange. Efectuar una transformación de Legendre y encontrar el Hamiltoniano asociado y las ecuaciones de Hamilton mostrando su equivalencia con las ecuaciones de Euler Lagrange. Encontrar (si existen) cantidades conservadas. ¿Cual es el espacio de configuraciones de cada uno de los sistemas.

| respuesta | Lagrangiano | Ecuaciones de E-L | Hamiltoniano | Ecuaciones de Hamilton | Cantidades conservadas | Espacio fase |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1) Una partícula libre en $\mathbb{R}^3$ | $\mathcal{L} = \frac{1}{2} m \lvert\dot{q}\rvert^2$ | $\ddot{q} = 0$ | $\mathcal{H} = \frac{1}{2m}\lvert p\rvert^2$ | $\begin{cases} \dot{q}_i = \frac{1}{m} p_i \\ \dot{p}_i = 0 \end{cases}$ <br> $i = 1,2,3$ | $E = \frac{1}{2m}\lvert p\rvert^2$ (Energía) <br> $M_\ell = m\dot{q}$ (Momento lineal). <br> $M = q \times \dot{q}$ (Momento angular) | $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ |
| 2) Una partícula en $\mathbb{R}^3$ en un campo potencial | $\mathcal{L} = \frac{1}{2} m \lvert\dot{q}\rvert^2 - U(q,t)$ <br> con $U$ el potencial | $m\ddot{q}_i - \frac{\partial U}{\partial q_i} = 0$ <br> $i = 1,2,3$ <br> $m\ddot{q} - \nabla_q U = 0$ | $\mathcal{H} = \frac{1}{2m}\lvert p\rvert^2 + U(q,t)$ | $\begin{cases} \dot{q}_i = \frac{1}{m} p_i \\ \dot{p}_i = \frac{\partial U}{\partial q_i} \end{cases}$ <br> $i = 1,2,3$ | $E = \frac{1}{2} m \lvert\dot{q}\rvert^2 - U(q)$ (Energía) cuando U no depende de t <br> $M = q \times \dot{q}$ (Momento angular si U es central). | $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ |
| 3) El péndulo plano | $\mathcal{L} = \frac{1}{2} m \ell^2 \dot{\theta}^2 + mg\ell\cos\theta$ | $\ddot{\theta} = -\frac{g}{\ell}\operatorname{sen}\theta$ | $\mathcal{H} = \frac{1}{2m\ell^2} p^2 - m\ell g\cos\theta$ | $\dot{\theta} = \frac{1}{m\ell^2} p$ <br> $\dot{p} = -mg\ell\operatorname{sen}\theta$ | $E = \frac{1}{2m\ell^2} p^2 - mg\ell\cos\theta$ (Energía) | $S_1$ <br>   |
| 4) El pendulo doble plano | (1) | (2a) y (2b) | | | | $S_1 \times S_1 = \mathbb{T}^2$ <br>   |
| 5) El pendulo esférico | $\mathcal{L} = \frac{1}{2} m(\ell^2\dot{\theta} + \ell^2\operatorname{sen}^2\theta\,\dot{\phi}^2)$ <br> $- mg\ell\cos\theta$ | $\ddot{\theta} = \frac{g}{\ell}\operatorname{sen}\theta + \dot{\varphi}^2\operatorname{sen}\theta\cos\theta$ <br> $2\dot{\theta}\dot{\varphi}\operatorname{sen}\theta\cos\theta + \operatorname{sen}^2\theta(\ddot{\varphi} - \varphi) = 0$ | $\mathcal{H} =$ <br> $\frac{1}{2m\ell^2} p_\theta^2 + \frac{1}{2m\ell^2\operatorname{sen}^2\theta} p_\varphi^2$ <br> $+ mg\ell\cos\theta$ | $\dot{\theta} = \frac{1}{m\ell^2} p_\theta$ <br> $\dot{\varphi} = \frac{1}{m\ell^2\operatorname{sen}^2\theta} p_\varphi$ <br> $\dot{p}_\theta = mg\ell\operatorname{sen}\theta$ <br> $\dot{p}_\varphi = 0$ | $E = \mathcal{H}$ (Energía) <br> $m\ell^2\operatorname{sen}^2\theta\,\dot{\varphi}$ (momento angular respecto de $\varphi$?) | $S_1 \times S_1$ |
| 6) El osilador armónico bi-dimensional | $\mathcal{L} = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - \frac{1}{2}k(x^2+y^2)$ | $m\ddot{x} = -kx$ <br> $m\ddot{y} = -ky$ | $\mathcal{H} = \frac{1}{2m}(p_x^2 + p_y^2)$ <br> $+ \frac{1}{2}k(x^2+y^2)$ | $\dot{x} = \frac{p_x}{m}$ <br> $\dot{y} = \frac{p_y}{m}$ <br> $\dot{p}_x = -kx$ <br> $\dot{p}_y = -ky$ | $E = \mathcal{H}$ (Energía) | $R^4 \times \mathbb{R}^4$ |

1) Una partícula libre en $\mathbb{R}^3 \ni q(t)$.

$$\mathcal{L}(q) = \frac{1}{2} m |\dot{q}|^2 \quad , \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} = m \dot{q}_i \quad , \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} = 0$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} = 0 \iff m \ddot{q}_i = 0$$

$$p_i = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} = m \dot{q}_i \implies \sum_{i=1}^{3} p_i^2 = m^2 \sum \dot{q}_i^2 \Rightarrow \frac{|p|^2}{m^2} = |\dot{q}|^2$$

$$\mathcal{H} = \sum_{i=1}^{3} p_i \dot{q}_i - \mathcal{L} = m |\dot{q}|^2 - \frac{m}{2} |\dot{q}|^2 = \frac{1}{2} m |\dot{q}|^2 = \frac{1}{2m} |p|^2$$

$$\begin{cases} \dot{q}_i = \dfrac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i} = \dfrac{1}{m} p_i \\[2ex] \dot{p}_i = - \dfrac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i} = 0 \end{cases}$$

2) Partícula en un campo potencial en $\mathbb{R}^3$

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} m |\dot{q}|^2 - U(q,t) \quad , \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} = m \dot{q}_i \quad , \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} = - \frac{\partial U}{\partial q_i}$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} = 0 \iff m \ddot{q}_i = - \frac{\partial U}{\partial q_i}$$

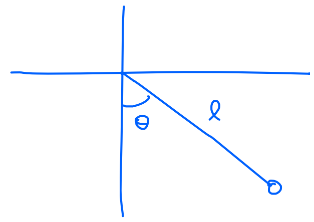
$$p_i = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} = m \dot{q}_i \Rightarrow |p|^2 = m^2 |\dot{q}|^2$$

$$\mathcal{H} = \sum_{i=1}^{3} \dot{q}_i p_i - \mathcal{L} = \frac{1}{m} |p|^2 - \frac{1}{2m} |p|^2 + U(q,t)$$

$$= \frac{1}{2m} |p|^2 + U(q,t)$$

$$\begin{cases} \dot{q}_i = \dfrac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i} = \dfrac{1}{m} p_i \\[2ex] \dot{p}_i = - \dfrac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i} = - \dfrac{\partial U}{\partial q_i} \end{cases}$$

3) <u>El péndulo plano.</u>




$$x = \ell \operatorname{sen}\theta$$
$$y = -\ell\cos\theta$$

$$\dot{x} = \ell\dot{\theta}\cos\theta$$
$$\dot{y} = \ell\dot{\theta}\operatorname{sen}\theta$$

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}m\ell^2\dot{\theta}^2 + mg\ell\cos\theta \quad , \quad \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\theta}} = m\ell^2\dot{\theta} \quad , \quad \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\theta} = -mg\ell\operatorname{sen}\theta$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\theta}} - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\theta} = 0 \iff m\ell^2\ddot{\theta} = -mg\ell\operatorname{sen}\theta$$
$$\iff \ddot{\theta} = -\frac{g}{\ell}\operatorname{sen}\theta$$

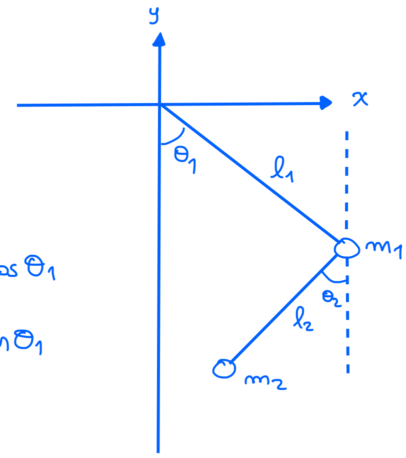
$$p = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\theta}} = m\ell^2\dot{\theta} \implies \dot{\theta} = \frac{1}{m\ell^2}p \qquad \frac{1}{2}\cancel{m}\cancel{\ell^2}\frac{1}{m^{\cancel{2}}\ell^{\cancel{4}2}}p^2 = \frac{1}{2m\ell^2}p^2$$

$$\mathcal{H} = \dot{\theta}p - \mathcal{L} = \frac{1}{m\ell^2}p^2 - \frac{1}{2m\ell^2}p^2 - mg\ell\cos\theta = \frac{1}{2m\ell^2}p^2 - mg\ell\cos\theta$$

$$\dot{q} = \frac{\partial\mathcal{H}}{\partial p} = \frac{1}{m\ell^2}p$$

$$\dot{p} = -\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial\theta} = -mg\ell\operatorname{sen}\theta$$

## 4) Cuentas del péndulo doble:




$$x_1 = l_1 \operatorname{sen}\theta_1 \qquad \dot{x}_1 = l_1\dot{\theta}_1 \cos\theta_1$$

$$y_1 = -l_1 \cos\theta_1 \qquad \dot{y}_1 = l_1\dot{\theta}_1 \operatorname{sen}\theta_1$$

$$x_2 = x_1 + l_2 \operatorname{sen}\theta_2 = l_1 \operatorname{sen}\theta_1 + l_2 \operatorname{sen}\theta_2 \qquad \dot{x}_2 = l_1\dot{\theta}_1\cos\theta_1 + l_2\dot{\theta}_2\cos\theta_2$$

$$y_2 = y_1 - l_2\cos\theta_2 = -l_1\cos\theta_1 - l_2\cos\theta_2 \qquad \dot{y}_2 = l_1\dot{\theta}_1\operatorname{sen}\theta_1 + l_2\dot{\theta}_2 \operatorname{sen}\theta_2$$

$$(1) \quad \mathcal{L} = \frac{1}{2}\left[m_1 l_1^2\dot{\theta}_1^2 + m_2 l_1^2 \dot{\theta}_1^2 + m_2 l_2^2 \dot{\theta}_2^2\right] + m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 \cos(\theta_1-\theta_2) + m_1 g l_1 \cos\theta_1 + m_2 g l_1\cos\theta_1 + m_2 g l_2 \cos\theta_2$$

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\theta}_1} = m_1 l_1^2\dot{\theta}_1 + m_2 l_1^2\dot{\theta}_1 + m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_2\cos(\theta_1-\theta_2) \quad , \quad \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\theta_1} = -m_2 l_1 l_2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 \operatorname{sen}(\theta_1-\theta_2) - m_1 g l_1 \operatorname{sen}\theta_1 - m_2 g l_1 \operatorname{sen}\theta_1$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\theta}_1} = m_1 l_1^2\ddot{\theta}_1 + m_2 l_1^2 \ddot{\theta}_1 + m_2 l_1 l_2\left[\ddot{\theta}_2\cos(\theta_1-\theta_2) - \dot{\theta}_2 \operatorname{sen}(\theta_1-\theta_2)(\dot{\theta}_1-\dot{\theta}_2)\right]$$

$$= \ddot{\theta}_1\left(m_1 l_1^2 + m_2 l_1^2\right) + \ddot{\theta}_2\left(m_2 l_1 l_2\cos(\theta_1-\theta_2)\right) - \dot{\theta}_2(\dot{\theta}_1-\dot{\theta}_2)\operatorname{sen}(\theta_1-\theta_2)\, m_2 l_1 l_2$$

$$(2_a) \quad \frac{d}{dt}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\theta}_1} - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\theta_1} = \ddot{\theta}_1\left(m_1 l_1^2 + m_2 l_1^2\right) + \ddot{\theta}_2\left(m_2 l_1 l_2\cos(\theta_1-\theta_2)\right) + \dot{\theta}_2^2 \operatorname{sen}(\theta_1-\theta_2)\, m_2 l_1 l_2 + m_1 g l_1 \operatorname{sen}\theta_1 + m_2 g l_1 \operatorname{sen}\theta_2$$
$$= 0$$

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\theta}_2} = m_2 l_2^2\dot{\theta}_2 + m_2 l_1 l_2\dot{\theta}_1\cos(\theta_1-\theta_2) \quad , \quad \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\theta_2} = m_2 l_1 l_2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 \operatorname{sen}(\theta_1-\theta_2) - m_2 g l_2 \operatorname{sen}\theta_2$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\theta}_2} = m_2 l_2^2\ddot{\theta}_2 + m_2 l_1 l_2\left[\ddot{\theta}_1\cos(\theta_1-\theta_2) - \dot{\theta}_1 \operatorname{sen}(\theta_1-\theta_2)(\dot{\theta}_1-\dot{\theta}_2)\right]$$

$$(2_b) \quad \frac{d}{dt}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\theta}_2} - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\theta_2} = m_2 l_2^2\ddot{\theta}_2 + m_2 l_1 l_2\ddot{\theta}_1\cos(\theta_1-\theta_2) - m_2 l_1 l_2\dot{\theta}_1^2 \operatorname{sen}(\theta_1-\theta_2) + m_2 g l_2 \operatorname{sen}\theta_2 = 0$$

Calculemos los momentos generalizados

$$p_1 = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\theta}_1} = m_1 l_1^2\dot{\theta}_1 + m_2 l_1^2\dot{\theta}_1 + m_2 l_1 l_2\dot{\theta}_2\cos(\theta_1-\theta_2)$$

$$p_2 = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\theta}_2} = m_2 l_2^2\dot{\theta}_2 + m_2 l_1 l_2\dot{\theta}_1\cos(\theta_1-\theta_2)$$

Notemos que podemos escribir estos momentos como un sistema lineal

$$p_1 = \alpha \dot{\theta}_1 + \beta \dot{\theta}_2$$
$$p_2 = \beta \dot{\theta}_1 + \gamma \dot{\theta}_2$$

o $\begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \end{pmatrix}$, donde $A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & \gamma \end{pmatrix}$ y

$$\alpha = l_1^2 (m_1 + m_2)$$
$$\beta = m_2 l_1 l_2 \cos(\theta_1 - \theta_2)$$
$$\gamma = m_2 l_2^2 .$$

Para invertir el sistema, calculamos

$$\alpha\gamma - \beta^2 = m_2 l_1^2 l_2^2 (m_1 + m_2) - m_2^2 l_1^2 l_2^2 \cos^2(\theta_1 - \theta_2)$$
$$= m_2 l_1^2 l_2^2 \left[ (m_1 + m_2) - m_2 \cos^2(\theta_1 - \theta_2) \right]$$
$$= m_2 l_1^2 l_2^2 \left[ m_1 + \operatorname{sen}^2(\theta_1 - \theta_2) m_2 \right]$$

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & \gamma \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{\alpha\gamma - \beta^2} \begin{pmatrix} \gamma & -\beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & \gamma \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{m_2 l_1^2 l_2^2 (m_1 + m_2 \operatorname{sen}^2(\theta_1 - \theta_2))} \begin{pmatrix} m_2 l_2^2 & -m_2 l_1 l_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) \\ -m_2 l_1 l_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) & l_1^2 (m_1 + m_2) \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & \gamma \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{m_2 l_1^2 l_2^2 (m_1 + m_2 \operatorname{sen}^2(\theta_1 - \theta_2))} \begin{pmatrix} p_1 m_2 l_2^2 - p_2 m_2 l_1 l_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) \\ -p_1 m_2 l_1 l_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) + p_2 l_1^2 (m_1 + m_2) \end{pmatrix}$$

$$\dot{\theta}_1^2 = \frac{1}{l_1^4 l_2^2 (m_1 + m_2 \operatorname{sen}^2(\theta_1 - \theta_2))^2} \left[ p_1^2 l_2^2 - 2 p_1 p_2 l_1 l_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) + p_2^2 l_1^2 \cos^2(\theta_1 - \theta_2) \right]$$

$$\dot{\theta}_2^2 = \frac{1}{m_2^2 l_1^2 l_2^4 (m_1 + m_2 \operatorname{sen}^2(\theta_1 - \theta_2))^2} \left[ p_1^2 m_2^2 l_2^2 \cos^2(\theta_1 - \theta_2) - 2 p_1 p_2 m_2 l_1 l_2 \cos(\theta_1 - \theta_2)(m_1 + m_2) + p_2^2 l_1^2 (m_1 + m_2)^2 \right]$$

$$\dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 = \frac{1}{m_2 l_1^3 l_2^2 (m_1 + m_2 \operatorname{sen}^2(\theta_1 - \theta_2))^2} \left[ -p_1^2 m_2 l_2^2 \cos(\theta_1 - \theta_2) + p_1 p_2 l_1 (m_1 + m_2) + p_1 p_2 m_2 l_1 \cos^2(\theta_1 - \theta_2) - p_2^2 l_1 (m_1 + m_2) \right]$$

Con esto podemos escribir el Hamiltoniano del sistema

$$\mathcal{H}(\theta_1, \theta_2, p_1, p_2) = \qquad (3)$$

$$\frac{1}{2}\frac{m_1+m_2}{l_1^2 l_2^2 (m_1+m_2 \operatorname{sen}^2(\theta_1-\theta_2))^2}\left[p_1^2 l_2^2 - 2p_1p_2 l_1 l_2 \cos(\theta_1-\theta_2) + p_2^2 l_1^2 \cos^2(\theta_1-\theta_2)\right]$$

$$+ \frac{1}{2}\frac{m_2}{m_2^2 l_1^2 l_2^2 (m_1+m_2 \operatorname{sen}^2(\theta_1-\theta_2))^2}\left[p_1^2 m_2^2 l_2^2 \cos^2(\theta_1-\theta_2) - 2p_1p_2 m_2 l_1 l_2 \cos(\theta_1-\theta_2)(m_1+m_2) + p_2^2 l_1^2 (m_1+m_2)^2\right]$$

$$+ \frac{\cos(\theta_1-\theta_2)}{l_1^2 l_2 (m_1+m_2 \operatorname{sen}^2(\theta_1-\theta_2))^2}\left[-p_1^2 m_2 l_2^2 \cos(\theta_1-\theta_2) + p_1p_2 l_1(m_1+m_2) + p_1p_2 m_2 l_1 \cos^2(\theta_1-\theta_2) - p_2^2 l_1 (m_1+m_2)\right]$$

$$- m_1 g l_1 \cos\theta_1 - m_2 g l_1 \cos\theta_1 - m_2 g l_2 \cos\theta_2$$

Las ecuaciones de Hamilton son

$$\dot{p}_1 = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \theta_1}, \quad \dot{p}_2 = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \theta_2}, \quad \dot{\theta}_1 = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_1}, \quad \dot{\theta}_2 = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_2}$$

5) El péndulo esférico. Consideremos las coordenadas esféricas

$$\left.\begin{aligned} x &= r\cos\varphi \operatorname{sen}\theta \\ y &= r \operatorname{sen}\varphi \operatorname{sen}\theta \\ z &= r\cos\theta \end{aligned}\right\}$$ Observese que $\theta = -\tilde{\theta}$ donde $\tilde{\theta}$ es el angulo formado por el pendulo esferico y el eje z.

Por la restricción del movimiento del péndulo esférico tenemos que $r = l$ constante

Las velocidades del péndulo esférico estan dadas por

$$\dot{x} = -\dot{\varphi} l \operatorname{sen}\varphi \operatorname{sen}\theta + \dot{\theta} l \cos\varphi\cos\theta$$
$$\dot{y} = \dot{\varphi} l \cos\varphi \operatorname{sen}\theta + \dot{\theta} l \operatorname{sen}\varphi \cos\theta$$
$$\dot{z} = -l\dot{\theta}\operatorname{sen}\theta,$$

y $\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2 = \dot{\varphi}^2 l^2 \operatorname{sen}^2\theta + \dot{\theta}^2 l^2 \cos^2\theta + l^2\dot{\theta}^2\operatorname{sen}^2\theta = \dot{\varphi}^2 l^2 \operatorname{sen}^2\theta + \dot{\theta}^2 l^2$

Por lo tanto el Lagrangiano del péndulo esférico está dado por

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial\dot{\theta}} = ml^2\ddot{\theta} \qquad \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\theta} = mgl\operatorname{sen}\theta + m\dot{\varphi}^2 l^2 \operatorname{sen}\cos$$

$$\mathcal{L}(\theta,\varphi,\dot{\theta},\dot{\varphi}) = \frac{m}{2}\left(\dot{\varphi}^2 l^2 \operatorname{sen}^2\theta + \dot{\theta}^2 l^2\right) - mgl\cos\theta ,\quad \left\{\begin{aligned} \ddot{\theta} &= \frac{g}{l}\operatorname{sen}\theta + \dot{\varphi}^2\operatorname{sen}\theta\cos\theta \\ 2\dot{\theta}\dot{\varphi}\operatorname{sen}\theta\cos\theta &+ \operatorname{sen}^2\theta(\ddot{\varphi} - \dot{\varphi}) = 0 \end{aligned}\right.$$

Observemos que $\mathcal{L}$ no depende explicitamente de $\varphi$, por lo que

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\varphi}} = (ml^2\operatorname{sen}^2\theta\,\dot{\varphi}) = ml^2\left(2\operatorname{sen}\theta\cos\theta\,\dot{\theta}\dot{\varphi} + \operatorname{sen}^2\theta\,\ddot{\varphi}\right)$$

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\varphi}} = ml^2\operatorname{sen}^2\theta\,\dot{\varphi}$$ es una cantidad conservada.

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\varphi}} = ml^2\operatorname{sen}^2\theta\,\dot{\varphi}$$

Calculemos los momentos generalizados $p_\theta = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\theta}} = ml^2\dot{\theta}$ y $p_\varphi = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\varphi}} = ml^2\operatorname{sen}^2\theta\,\dot{\varphi}$

El Hamiltoniano es entonces

$$\mathcal{H}(\theta,\varphi,\dot{\theta},\dot{\varphi}) = \dot{\theta}p_\theta + \dot{\varphi}p_\varphi - \frac{m}{2}\left(\dot{\varphi}^2 l^2\operatorname{sen}^2\theta + \dot{\theta}^2 l^2\right) - mgl\cos\theta$$
$$= \frac{1}{ml^2}p_\theta^2 + \frac{1}{ml^2\operatorname{sen}^2\theta}p_\varphi^2 - \frac{1}{2ml^2\operatorname{sen}^2\theta}p_\varphi^2 - \frac{1}{2ml^2}p_\theta^2 + mgl\cos\theta$$
$$= \frac{1}{2ml^2}p_\theta^2 + \frac{1}{2ml^2\operatorname{sen}^2\theta}p_\varphi^2 + mgl\cos\theta .$$

Las ecuaciones de Hamilton son entonces

$$\dot{\theta} = \frac{1}{2ml^2}p_\theta ,\quad \dot{\varphi} = \frac{1}{ml^2\operatorname{sen}^2\theta}p_\varphi \qquad \dot{p}_\theta = mgl\operatorname{sen}\theta \qquad \dot{p}_\varphi = 0$$

6) El oscilador armónico bi-dimensional.

El Lagrangiano viene dado por

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} m \left( \dot{x}^2 + \dot{y}^2 \right) - \frac{1}{2} k \left( x^2 + y^2 \right)$$

Las ecuaciones de Euler Lagrange son entonces

$$m \ddot{x} = -kx \qquad y \qquad m \ddot{y} = -ky$$

Los momentos generalizados son $p_x = m\dot{x}$, $p_y = m\dot{y}$.

El Hamiltoniano está dado por

$$\mathcal{H}(x, y, p_x, p_y) = \frac{1}{2m} \left( p_x^2 + p_y^2 \right) + \frac{1}{2} k \left( x^2 + y^2 \right).$$

Las ecuaciones de Hamilton son

$$\dot{x} = \frac{p_x}{m}, \quad \dot{y} = \frac{p_y}{m}, \quad \dot{p}_x = -kx, \quad \dot{p}_y = -ky$$

Ejercicio 2. Sea el Lagrangiano

$$\mathcal{L}(q,\dot q) = -mc^2\left(1-\left(\frac{\dot q}{c}\right)^2\right)^{1/2} - V(q) \quad , \quad q\in\mathbb{R} \quad , \quad \text{donde} \quad m, c>0.$$

Encuentre el Hamiltoniano. Haga un dibujo del plano fase para el caso donde $V(q) = \frac{1}{2}kq^2$ $(k>0)$.
(Este es el Lagrangiano de una partícula en un campo de fuerza según la teoría de la relatividad).

respuesta:

Calculemos el momento generalizado

$$p = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot q} = -mc^2\frac{1}{2\left(1-\left(\frac{\dot q}{c}\right)^2\right)^{1/2}}\left(-\frac{2\dot q}{c^2}\right)$$

$$= \frac{m\dot q}{\left(1-\left(\frac{\dot q}{c}\right)^2\right)^{1/2}}.$$

Pongamos a $\dot q$ en función de $p$. Notemos que $p$ y $\dot q$ siempre tienen el mismo signo y que $|\dot q|<c$

$$p^2\left(1-\frac{\dot q^2}{c^2}\right) = m\dot q^2$$

$$p^2 - p^2\frac{\dot q^2}{c^2} - m\dot q^2 = 0$$

$$\dot q^2\left(\frac{p^2}{c^2}+m\right) = p^2$$

$$\dot q^2 = \frac{p^2}{\left(\left(\frac{p}{c}\right)^2+m\right)} \implies \dot q = \frac{p}{\left(\left(\frac{p}{c}\right)^2+m\right)^{1/2}}.$$

De aquí se deduce que $\dfrac{m}{\left(\left(\frac{p}{c}\right)^2+m\right)^{1/2}} = \dfrac{m\dot q}{p} = \left(1-\left(\frac{\dot q}{c}\right)^2\right)^{1/2}.$

Entonces el Hamiltoniano es

$$\mathcal{L}(q,\dot q) = -mc^2\left(1-\left(\frac{\dot q}{c}\right)^2\right)^{1/2} - V(q) \quad , \quad q\in\mathbb{R} \quad , \quad \text{donde}$$

$$\mathcal{H} = p\dot q - \mathcal{L}$$

$$\mathcal{H} = \frac{p^2}{\left(\left(\frac{p}{c}\right)^2+m\right)^{1/2}} + \frac{m^2c^2}{\left(\left(\frac{p}{c}\right)^2+m\right)^{1/2}} + V(q).$$

Cuando $V(q) = \frac{1}{2} k q^2$ ,

$$\mathcal{H} = \frac{p^2 + m^2c^2}{\left(\left(\frac{p}{c}\right)^2 + m\right)^{\frac{1}{2}}} + \frac{1}{2} k q^2 .$$

Como este Hamiltoniano no depende explícitamente del tiempo, tenemos que la energía del sistema se conserva. En base a esto podemos dibujar el plano fase tomando las curvas de nivel correspondientes a una energía $E$.

$$\frac{p^2}{\left(\left(\frac{p}{c}\right)^2 + m\right)^{\frac{1}{2}}} + \frac{1}{2} k q^2 = E$$

$$\Longleftrightarrow \quad q = \pm\sqrt{\frac{2}{k}\left(E - \frac{p^2}{\left(\left(\frac{p}{c}\right)^2 + m\right)^{\frac{1}{2}}}\right)}$$

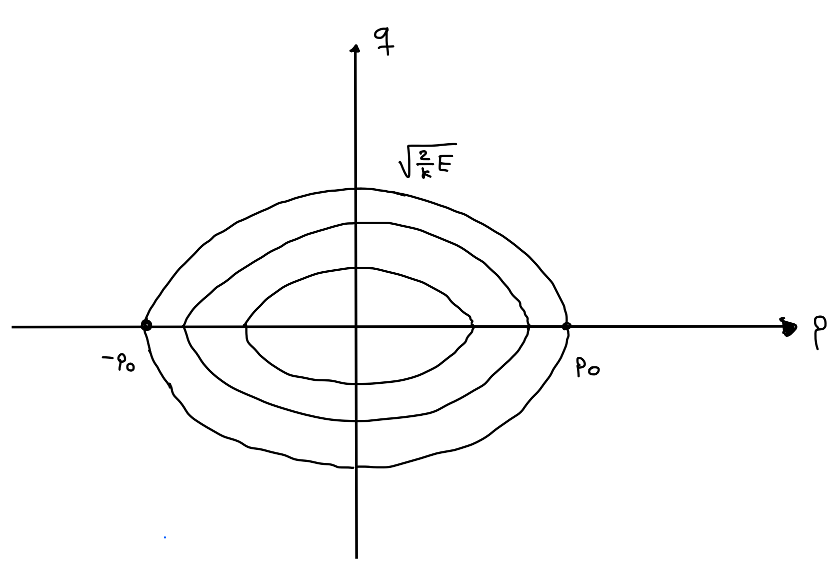
Notamos que para $p = 0$ $\quad q = \pm\sqrt{\frac{2E}{k}}$ .

Como $\lim\limits_{p\to\infty} \frac{p^2}{\sqrt{\left(\frac{p}{c}\right)^2 + m}} = \infty$ , existe $p_0 > 0$ tq $\quad q(p_0) = 0$ .

Derivando $\left(\frac{p^2}{\sqrt{\left(\frac{p}{c}\right)^2 + m}}\right)' = \frac{2p\sqrt{\left(\frac{p}{c}\right) + m} + p^2 \frac{2p/c^2}{2\sqrt{\left(\frac{p}{c}\right)^2 + m}}}{\left(\frac{p}{c}\right)^2 + m} > 0$ si $p > 0$

Así $p \longmapsto +\sqrt{\frac{2}{k}\left(E - \frac{p^2}{\sqrt{\left(\frac{p}{c}\right)^2 + m}}\right)}$ es decreciente de $0$ a $p_0$ .

Notando que es simétrica, utilizando la solución negativa y variando los niveles de energía, obtenemos el siguiente retrato fase



Ejercicio 3 : Sea $z_0$ un punto fijo del sistema Hamiltoniano $\dot{z} = J \nabla \mathcal{H}(z)$ en $\mathbb{R}^{2n}$.

a) Muestra que la linealización alrededor de $z_0$ es también un sistema Hamiltoniano. Escribe el Hamiltoniano en terminos de $\mathcal{H}$ y sus derivados parciales.

b) Muestra que si el Hessiano de $\mathcal{H}$ es estrictamente positivo (o estrictamente negativo) entonces $z_0$ es un punto fijo estable. En este contexto la estabilidad significa que existen abiertos $U_0 \subset U$ tales que toda trayectoria que comienza en $U_0$ permanece en $U$ $\forall t \in \mathbb{R}$.

c) Sea el sistema Newtoniano $\ddot{q} = -\nabla V(q)$ con $q \in \mathbb{R}^n$. Escribe este sistema como un sistema Hamiltoniano y muestra que los equilibrios que corresponden a minimos locales aislados de $V$ son estables en el sentido de la pregunta anterior.

respuesta El sistema linealizado alrededor de $z_0$ es

$$\dot{z} = J \operatorname{Hess} \mathcal{H}(z_0)\, z \,,$$

donde $\operatorname{Hess} \mathcal{H}(z_0)$ es la matriz Hessiana de $\mathcal{H}$ en $z_0$, que denotaremos por $H(z_0)$

Para ver que este sistema es Hamiltoniano, hay que encontrar $\tilde{\mathcal{H}}$ tal que $H(z_0) z = \nabla \tilde{\mathcal{H}}(z)$, es decir que el campo $H(z_0) z$ es potencial.

Sabemos que $H(z_0)\, z$ es potencial sii $\frac{\partial}{\partial z_i} [H(z_0) z]_j = \frac{\partial}{\partial z_j} [H(z_0) z]_i$ $\forall i,j = 1, \dots, 2n$.

$$[H(z_0) z]_j = H(z_0)_{j,k}\, z_k = \frac{\partial^2 \mathcal{H}(z_0)}{\partial z_j \partial z_k} z_k \quad \text{entonces}$$

$$\frac{\partial}{\partial z_i} [H(z_0) z]_j = \frac{\partial^2 \mathcal{H}(z_0)}{\partial z_j \partial z_i} = \frac{\partial^2 \mathcal{H}(z_0)}{\partial z_i \partial z_j} = \frac{\partial}{\partial z_j} [H(z_0) z]_i$$

Por lo tanto $\tilde{\mathcal{H}}$ existe y el sistema linealizado es Hamiltoniano.

De hecho, podemos expresar explicitamente a $\tilde{\mathcal{H}}$ en terminos de los derivados porciales de $\mathcal{H}$ como sigue

$$\tilde{\mathcal{H}}(z) = \tilde{\mathcal{H}}(p,q) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^2 \mathcal{H}(z_0)}{\partial q_k^2} q_k^2 + \sum_{\ell<k}^{2n} \frac{\partial^2 \mathcal{H}(z_0)}{\partial z_\ell \partial z_k} z_\ell z_k + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^2 \mathcal{H}(z_0)}{\partial p_k^2} p_k^2$$

de tal manera que $[\nabla \tilde{\mathcal{H}}(z)]_i = \frac{\partial \tilde{\mathcal{H}}(z)}{\partial z_i} = \sum_{\ell=1}^{n} \frac{\partial^2 \mathcal{H}(z_0)}{\partial z_\ell \partial z_i} z_i = [H(z_0) z]_i$ , $i = 1, \dots, n$, es decir

$$\nabla \tilde{\mathcal{H}}(z) = H(z_0)\, z \,.$$

b) Propongamos la siguiente función de Liapunov, $V(z) = \mathcal{H}(z) - \mathcal{H}(z_0)$, claramente $V(z_0) = 0$.
Como $z_0$ es un punto fijo del sistema tenemos que $\nabla \mathcal{H}(z_0) = 0$. Por hypótesis $H(z_0)$ es positivo definida /negativo definida por lo que $V(z) > 0 \;\; \forall \; z \in \mathcal{U}$ con $\mathcal{U}$ alguna vecindad de $z_0$.
Además si $z$ es solución del sistema, tenemos que

$$\dot{V}(z) = \nabla V(z) \cdot J \nabla \mathcal{H}(z)$$
$$= \nabla \mathcal{H}(z) \cdot J \nabla \mathcal{H}(z) = 0$$

El teorema de estabilidad de Liápunov afirma que $z_0$ es un equilibrio estable del sistema.

c) Consideremos el Lagrangiano $\mathcal{L}(q, \dot{q}) = \frac{1}{2}|\dot{q}|^2 - V(q)$
Las ecuaciones de Euler-Lagrange correspondientes son

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} = \ddot{q}_i = -\frac{\partial V}{\partial q_i} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} \qquad i = 1, \dots, n,$$

que corresponde con la ecuación de Newton

$$\ddot{q} = -\nabla V(q).$$

Calculamos el Hamiltoniano correspondiente. Primero $p_i = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} = \dot{q}_i$, luego

$$\mathcal{H}(p, q) = \frac{1}{2}|p|^2 + V(q).$$

Notemos que $q_0$ es un mínimo local aislado de $V(q_0)$ si y solo si $(p_0, q_0) = (0, q_0)$ es un mínimo local de $\mathcal{H}$.

Por lo tanto una solución de equilibrio $(p_0, q_0)$ del sistema tal que $q_0$ es mínimo local de $V$ cumple que $H$ es positivo definido en una vecindad de $(p_0, q_0)$. Por el inciso anterior el punto de equilibrio $(p_0, q_0)$ es estable.

## Ejercicio 4: Considere $\mathbb{R}^3$ con las variables cartesianas $M = (M_1, M_2, M_3)$.

i) Demostrar que la siguiente relación satisface las propiedades de un corchete de Poisson para funciones $f, g \in C^\infty(\mathbb{R}^3)$:

$$\{f,g\} = M \cdot \left( \nabla f(M) \times \nabla g(M) \right).$$

ii) Demostrar que la función $K(M) = \|M\|^2$ satisface $\{K, f\} = 0 \quad \forall f \in C^\infty(\mathbb{R}^3)$. Las funciones con esta propiedad se llaman Casimires del corchete de Poisson.

iii) (Bono) Demostrar que las ecuaciones diferenciales que definen el campo Hamiltoniano de la función

$$H(M) = \frac{1}{2}\left( \frac{M_1^2}{I_1} + \frac{M_2^2}{I_2} + \frac{M_3^2}{I_3} \right)$$

coinciden con las ecuaciones de Euler del cuerpo rígido.

respuesta: Durante este ejercicio utilizaremos la notacion indicial siguiente

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i=j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases} \qquad \varepsilon_{ijk} = \begin{cases} 1 & \text{si } i,j,k \text{ es una permutación cíclica de } \{1,2,3\} \\ -1 & \text{si } i,j,k \text{ es una permutación cíclica de } \{3,2,1\} \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

También adoptaremos la convención de Einstein para las sumas.

Con esta notación el producto vectorial se escribe como $(V \times W)_i = \varepsilon_{ijk} V_j W_k$

i) Sean $f, g, h \in C^\infty(\mathbb{R}^3)$ y $\alpha \in \mathbb{R}$.

a) (Antisimetría)

$$\begin{aligned} \{f,g\} &= M \cdot \left( \nabla f(M) \times \nabla g(M) \right) \\ &= M_k \left( \nabla f(M) \times \nabla g(M) \right)_k \\ &= M_k \left( \varepsilon_{k\ell m} \, \partial_\ell f \, \partial_m g \right) \\ &= -M_k \left( \varepsilon_{km\ell} \, \partial_m g \, \partial_\ell f \right) \\ &= -M \cdot \left( \nabla g(M) \times \nabla f(M) \right). \\ &= -\{g,f\} \end{aligned}$$

b) (Linealidad)

$$\begin{aligned} \{f, \alpha g + h\} &= M \cdot \left( \nabla f(M) \times \nabla(\alpha g + h)(M) \right) \\ &= M_k \left( \nabla f(M) \times (\alpha \nabla g(M) + \nabla h(M)) \right)_k \\ &= M_k \, \varepsilon_{k\ell m} \left( \partial_\ell f (\alpha \partial_m g + \partial_m h) \right) \\ &= \alpha M_k \, \varepsilon_{k\ell m} \, \partial_\ell f \, \partial_m g + M_k \, \varepsilon_{k\ell m} \, \partial_\ell f \, \partial_m h \\ &= \alpha M \cdot \left( \nabla f \times \nabla g \right) + M \cdot \left( \nabla f \times \nabla h \right) \\ &= \alpha \{f,g\} + \{f,h\} \end{aligned}$$

c) Identidad de Leibnitz

$$
\begin{aligned}
\{f, gh\} &= M \cdot \left(\nabla f \times \nabla gh\right) \\
&= M \cdot \left(\nabla f \times \left[(\nabla g)h + g(\nabla h)\right]\right) \\
&= M \cdot \left(\nabla f \times (\nabla g)h + \nabla f \times g(\nabla h)\right) \\
&= h\, M \cdot (\nabla f \times \nabla g) + g\, M (\nabla f \times \nabla h) \\
&= h\{f, g\} + g\{f, h\}
\end{aligned}
$$

d) Identidad de Jacobi.

$$
\begin{aligned}
\{f, \{g, h\}\} &= M \cdot \left(\nabla f \times \nabla\{g, h\}\right) \\
&= M \cdot \left(\nabla f \times \nabla(M \cdot \nabla g \times \nabla h)\right) \\
&= M_i \left(\nabla f \times \nabla(M \cdot \nabla g \times \nabla h)\right)_i \\
&= M_i \left(\varepsilon_{ijk}\, \partial_j f\, \partial_k (M \cdot \nabla g \times \nabla h)\right) \\
&= M_i \left(\varepsilon_{ijk}\, \partial_j f\, \partial_k \left[M_l\, \varepsilon_{lmn}\, \partial_m g\, \partial_n h\right]\right. \\
&= M_i\, \varepsilon_{ijk}\, \partial_j f\, M_l\, \varepsilon_{lmn} \left[\partial^2_{k,m} g\, \partial_n h + \partial_m g\, \partial^2_{k,n} h\right] \\
&= \varepsilon_{ijk}\, \varepsilon_{lmn}\, M_i M_l\, \partial_j f \left(\partial^2_{k,m} g\right) \partial_n h \\
&\quad + \varepsilon_{ijk}\, \varepsilon_{lmn}\, M_i M_l\, \partial_j f\, \partial_m g \left(\partial^2_{k,n} h\right)
\end{aligned}
$$

$$
\{f, \{g, h\}\} = \underbrace{\varepsilon_{ijk}\, \varepsilon_{lmn}\, M_i M_l\, \partial_j f \left(\partial^2_{k,m} g\right) \partial_n h}_{1} + \underbrace{\varepsilon_{ijk}\, \varepsilon_{lmn}\, M_i M_l\, \partial_j f\, \partial_m g \left(\partial^2_{k,n} h\right)}_{2}
$$

De aquí tenemos que

$$
\{g, \{h, f\}\} = \underbrace{\varepsilon_{ijk}\, \varepsilon_{lmn}\, M_i M_l\, \partial_j g \left(\partial^2_{k,m} h\right) \partial_n f}_{3} + \underbrace{\varepsilon_{ijk}\, \varepsilon_{lmn}\, M_i M_l\, \partial_j g\, \partial_m h \left(\partial^2_{k,n} f\right)}_{4}
$$

$$
\{h, \{f, g\}\} = \underbrace{\varepsilon_{ijk}\, \varepsilon_{lmn}\, M_i M_l\, \partial_j h \left(\partial^2_{k,m} f\right) \partial_n g}_{5} + \underbrace{\varepsilon_{ijk}\, \varepsilon_{lmn}\, M_i M_l\, \partial_j h\, \partial_m f \left(\partial^2_{k,n} g\right)}_{6}
$$

Tenemos que $1 = -6$, $2 = -3$, $4 = -5$

Por ejemplo,

$$
\begin{aligned}
3 &= \varepsilon_{imk}\, \varepsilon_{lnj}\, M_i M_l\, \partial_m g \left(\partial^2_{k,n} h\right) \partial_j f \\
&= -\varepsilon_{ijk}\, \varepsilon_{lmn}\, M_i M_l\, \partial_m g \left(\partial^2_{k,n} h\right) \partial_j f = -1 .
\end{aligned}
$$

Los demas igualdades son análogas.

Así $\{f,\{g,h\}\} + \{g,\{h,f\}\} + \{h,\{f,g\}\} = 0$ .

ii) $\{K,f\} = M\cdot\left(\nabla f(M) \times \nabla K(M)\right)$

$= 2M\cdot\left(\nabla f(M) \times M\right)$

$= 2\det\left(M, \nabla f(M), M\right) = 0 \qquad \forall f \in C^{\infty}(\mathbb{R}^3)$ .

Así $K$ es un Casimir del corchete de Poisson.