Ejercicios sesión 1: Cinemática del medio continuo.

Ejercicio 1: Probar con la notación tensorial (índices y dobles sumas implícitas)

$$\boxed{\vec{\gamma} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \frac{1}{2}\,\text{grad}_{\vec{x}}\, \vec{v}^{\,2} + (\text{rot}_{\vec{x}}\, \vec{v}) \wedge \vec{v}} \qquad (1.23)$$

hints:

i) Usar el tensor de orientación

$$\varepsilon_{ijk} = \begin{cases} 1 & \text{si } (i,j,k) \text{ es una permutacion circular de } (1,2,3) \\ -1 & \text{si } (i,j,k) \text{ es una permutación circular de } (3,2,1) \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

ii) Usar las expresiones de $\wedge$ y $\text{rot}_{\vec{x}}$ en coordenadas.

- $[\vec{u} \wedge \vec{v}]_i = \varepsilon_{ijk}\, u_j v_k$
- $[\text{rot}\, \vec{v}]_i = \varepsilon_{ijk}\, \partial_j v_k$

iii) Usar la identidad $\varepsilon_{ijk}\, \varepsilon_{jlm} = \delta_{im}\delta_{kl} - \delta_{il}\delta_{km}$
Ver el Anexo 1. para mas identidades del tensor de orientación.

Solución:

$$\begin{aligned}
\left[(\text{rot}_{\vec{x}}\, \vec{v}) \wedge \vec{v}\right]_i &= \varepsilon_{ijk}\, [\text{rot}_{\vec{x}}\, \vec{v}]_j\, v_k \\
&= \varepsilon_{ijk}\, \varepsilon_{jlm}\, (\partial_l v_m) v_k \\
&= (\delta_{im}\delta_{kl} - \delta_{il}\delta_{km})\, \partial_l v_m\, v_k \\
&= v_k \partial_k v_i - v_k\, \partial_i v_k
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\left[\frac{1}{2}\,\text{grad}\, \vec{v}^{\,2}\right]_i &= \frac{1}{2}\partial_i\, v_j v_j \\
&= v_j\, \partial_i v_j
\end{aligned}$$

Así $\left[\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \frac{1}{2} \operatorname{grad}_{\vec{x}} \vec{v} + (\operatorname{rot}_{\vec{x}} \vec{v}) \wedge \vec{v} \right]_i$

$$= \left[\frac{\partial \vec{v}}{\partial t}\right]_i + v_k \partial_k v_i$$

$$= \left[\frac{\partial \vec{v}}{\partial t}\right]_i + \left[\vec{v} \cdot \operatorname{grad}_{\vec{x}} \vec{v} \right]_i$$

$$= \vec{\gamma} .$$

<u>Ejercicio 2</u>: Probar que cuando un flujo es irrotacional, es decir $\operatorname{rot}_{\vec{x}} \vec{v} = 0$, entonces el campo de aceleraciones proviene de un potencial.

<u>Solución</u>: Para que esto sea cierto, debemos de asumir que $\vec{v}$ es un campo sobre un dominio simplemente conexo. En este caso el lema de pointcaré afirma que una forma es exacta sii es cerrada. Concretamente en este caso tenemos que

$\vec{v}$ proviene de un potencial φ $\iff$ La forma $v_1\, dx + v_2\, dy + v_3\, dz$ es cerrada.

$$\iff \underbrace{d}_{\text{derivada exterior}} \left(v_1\, dx + v_2\, dy + v_3\, dz \right) = 0$$

$$\iff \left(\frac{\partial v_1}{\partial y} - \frac{\partial v_2}{\partial x} \right) dx \wedge dy + \left(\frac{\partial v_1}{\partial z} - \frac{\partial v_3}{\partial x} \right) dx \wedge dz + \left(\frac{\partial v_2}{\partial z} - \frac{\partial v_3}{\partial y} \right) dy \wedge dz = 0$$

$$\iff \operatorname{rot} \vec{v} = 0$$

Así si $\operatorname{rot} \vec{v} = 0$ entonces el campo de velocidades proviene de un potencial φ, es decir $\vec{v} = \operatorname{grad}_{\vec{x}} \varphi$.

Usando la fórmula del ejercicio 1, obtenemos que

$$\vec{\gamma} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \frac{1}{2}\,\mathrm{grad}_{\vec{x}}\, v^2 + \cancel{(\mathrm{rot}_{\vec{x}}\, \vec{v})} \wedge \vec{v}$$

$$= \frac{\partial}{\partial t}\,\mathrm{grad}_x\, \varphi + \frac{1}{2}\,\mathrm{grad}_{\vec{x}}\,(\mathrm{grad}_{\vec{x}}\, \varphi)^2$$

$$= \mathrm{grad}_{\vec{x}} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{1}{2}(\mathrm{grad}_{\vec{x}}\, \varphi)^2 \right)$$

Así $\vec{\gamma}$ proviene del potencial

$$\psi = \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{1}{2}(\mathrm{grad}_{\vec{x}}\, \varphi)^2$$

Ejercicio 3: Consideremos un flujo caracterizado por su campo de velocidades Euleriano $\vec{v}(\vec{x},t)$ y su campo de vorticidad $\vec{\omega} = \frac{1}{2}\,\mathrm{rot}_{\vec{x}}\, v$.

1) Mostrar que si el campo de aceleraciones $\vec{\gamma}$ deriva de un potencial, entonces $\frac{\partial \vec{\omega}}{\partial t} + \mathrm{rot}_{\vec{x}}(\vec{\omega} \times \vec{v}) = 0$.

2) Demostrar el teorema de Lagrange:

Teorema 3: Si un fluido es puesto en movimiento sin un choque a partir de su estado de reposo y si en todo tiempo el campo de las aceleraciones deriva de un potencial entonces el flujo es irrotacional.

Solución: 1) $\vec{\gamma} = \mathrm{grad}_x\, \psi$

$$\vec{\gamma} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \frac{1}{2}\,\mathrm{grad}_{\vec{x}}\, \vec{v}^2 + (\mathrm{rot}_x \vec{v}) \wedge \vec{v} \qquad (\text{ejercicio } 1)$$

Sacando el rotacional tenemos que

$$\mathrm{rot}_x \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \cancel{\mathrm{rot}_x \frac{1}{2}\mathrm{grad}_x \vec{V}^2} + \mathrm{rot}_x \left[(\mathrm{rot}_x \vec{v}) \wedge \vec{v} \right] = 0$$

$$\frac{\partial \vec{\omega}}{\partial t} + \mathrm{rot}_x (\vec{\omega} \wedge \vec{v}) = 0$$

2) Supongamos que el campo de velocidades $\vec{v}$ es un campo vectorial dado.

La ecuación $\frac{\partial \vec{\omega}}{\partial t} + \mathrm{rot}_{\vec{x}} (\vec{\omega} \wedge \vec{v}) = 0$ es una EDP lineal (en $\vec{\omega}$).

Probemos que la única solución analítica de esta EDP es la solución nula si la condición inicial es nula, es decir si $\omega(0,x) = 0 \ \forall x$.

Probemos por inducción que $\frac{\partial^n \vec{\omega}}{\partial t^n}(0,x) = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

$$\frac{\partial \vec{\omega}}{\partial t}(0,x) = -\mathrm{rot}_x \left(\vec{\omega}(0,\vec{x}) \wedge \vec{v}(0,\vec{x}) \right) = 0$$

Supongamos que $\frac{\partial^k \vec{\omega}}{\partial t^k}(0,x) = 0, \quad \forall k \leq n$.

Entonces
$$\frac{\partial^{n+1} \vec{\omega}}{\partial t^{n+1}}(0,x) = \frac{\partial^n}{\partial t^n} \frac{\partial \vec{\omega}}{\partial t} \bigg|_{t=0}$$

$$= -\frac{\partial^n}{\partial t^n} \mathrm{rot}_x (\vec{\omega} \wedge \vec{v}) \bigg|_{t=0}$$

$$= -\mathrm{rot}_x \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{\partial^k \vec{\omega}}{\partial t^k} \wedge \frac{\partial^{n-k} \vec{v}}{\partial t^{n-k}} \right) \bigg|_{t=0}$$

$$= 0 .$$

Así
$$\vec{\omega}(t,x) = \sum_{t=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} \frac{\partial^k \vec{\omega}}{\partial t^k}(0,\vec{x}) = 0 \qquad \forall x,t .$$

Esto da una prueba (parcial) del teorema de Lagrange.

Ejercicios sesión 2: (Deformaciones)

Ejercicio 4:

1) Probar que la derivada material de la transformación tangente F es $\dot{F} = GF$ donde $G = \text{grad}_{\vec{x}} \vec{v}$.

2) Probar que $\dot{C} = {}^tF(2D)F$ donde $D = \frac{1}{2}({}^tG + G)$

Solución:

1) $$\frac{d}{dt}\left[F(\vec{X},t)\right]_{ij} = \frac{d}{dt}\frac{\partial x_i(\vec{X},t)}{\partial X_j}$$

$$= \frac{\partial}{\partial X_j} v_i(x(t),t)$$

$$= \frac{\partial v_i}{\partial x_k}\cdot\frac{\partial x_k}{\partial X_j}$$

$$= G_{ik}F_{kj}$$

$$\therefore \quad \dot{F} = GF$$

2) $$\dot{C} = \dot{({}^tF F)}$$

$$= {}^t\dot{F}F + {}^tF\dot{F}$$

$$= {}^t(GF)F + {}^tFGF$$

$$= {}^tF\,{}^tG F + {}^tFGF$$

$$= {}^tF({}^tG+G)F$$

$$= {}^tF(2D)F$$

Ejercicio 5: Mostrar que en pequeños deformaciones (2.21), el tensor de Green-Lagrange se puede aproximar por

$$\boxed{L \approx \varepsilon} \qquad (2.26)$$

Solución 1: (Usando que $C \approx \delta + 2\varepsilon$)

$$L = \frac{1}{2}(C - \delta) \approx \frac{1}{2}(\delta + 2\varepsilon - \delta) = \varepsilon$$

Solución 2: (Expresar a L en función de H y ${}^tH$)

$$L = \frac{1}{2}\left({}^t(\delta + H)(\delta + H) - \delta\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\delta + {}^tH + H + {}^tHH - \delta\right)$$

$$\approx \frac{1}{2}({}^tH + H) = \varepsilon$$

Ejercicio 6: Mostrar la aproximación al primer orden

$$\boxed{\varepsilon_{NT} \approx \vec{N}\varepsilon\vec{T}.} \qquad (2.32)$$

Indicaciones: Desarollar al primer orden en ε la formula (2.12) es decir, despreciar los términos en orden mayor a $\|\varepsilon\|^2$.
Usar el desarollo de Taylor:

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} \approx 1 - \frac{1}{2}x + O(x^2).$$

Solución: Por la fórmula (2.12)

$$\operatorname{sen}(2\varepsilon_{NT}) = \frac{{}^t\vec{N}2L\vec{T}}{\sqrt{{}^t\vec{N}C\vec{N}}\sqrt{{}^t\vec{T}C\vec{T}}}$$

Aproximando $L \approx \varepsilon$, $C \approx \delta + 2\varepsilon$ y $\operatorname{sen}(2\varepsilon_{NT}) \approx 2\varepsilon_{NT}$

$$2\varepsilon_{NT} \approx \frac{{}^tN 2\varepsilon T}{\sqrt{1+2\,{}^tN\varepsilon N}\,\sqrt{1+2\,{}^tT\varepsilon T}}$$

$$\approx {}^tN2\varepsilon T\left(1-\tfrac{1}{\cancel{2}}\cancel{2}\,{}^tN\varepsilon N + O(\|\varepsilon\|^2)\right)\left(1-\tfrac{1}{2}\,2\,{}^tT\varepsilon T + O(\|\varepsilon\|^2)\right)$$

$$\simeq {}^tN\,2\varepsilon T$$

<u>Ejercicio 7</u>: Mostrar que en pequeñas deformaciones la dilatación de area está dada por

$$\boxed{\theta_N = \operatorname{tr}\varepsilon - {}^t\vec{N}\varepsilon\vec{N}} \qquad (2.36)$$

<u>Indicaciones</u>: Usar (2.18) y desarrollar al orden 1 usando (2.25) y (2.33ª).

y probar que $C^{-1} \simeq \delta - 2\varepsilon$

<u>Solución</u>: Por 2.18

$$\theta_N = J\sqrt{{}^tNCN} - 1$$

Por (3.33ª) $J \approx (1+\operatorname{tr}\varepsilon)$ y por (2.25), $C^{-1} \approx \delta - 2\varepsilon$

$$\theta_N = (1+\operatorname{tr}\varepsilon)\sqrt{{}^tN(\delta-2\varepsilon)N} - 1$$

$$= (1+\operatorname{tr}\varepsilon)\sqrt{1-2\,{}^tN\varepsilon N} - 1 \qquad (\text{Notar que } \|N\| = 1)$$

$$\approx (1+\operatorname{tr}\varepsilon)(1-{}^tN\varepsilon N) - 1 \qquad \left(\sqrt{1+x} \approx 1 + \tfrac{x}{2} + O(x^2)\right)$$

$$\approx \operatorname{tr}\varepsilon - {}^tN\varepsilon N$$