# 实验 9 离散傅里叶变换的性质

1518 班　15352408　张镓伟

## 一、实验目的

(1)加深对离散傅里叶变换(DFT)基本性质的理解。

(2)了解有限长序列傅里叶变换(DFT)性质的研究方法。

(3)掌握用 MATLAB 语言进行离散傅里叶变换性质分析和程序编写的方法。

## 二、实验原理

### 1. 线性性质

如果两个有限长序列分别为 x1(n)和 x2(n)，长度分别为 N1 和 N2，且 $y(n)=ax_1(n)+bx_2(n)$　(a、b 均为常数)

则该 y(n)的 N 点 DFT 为：

$Y(k)=DFT[y(n)]=aX_1(k)+bX_2(k)\quad 0\le k\le N-1$

其中：$N=\max[N_1, N_2]$，$X_1(k)$和 $X_2(k)$分别为 $x_1(n)$和 $x_2(n)$的 N 点 DFT。

### 2. 循环移位性质

如果有限长序列为 x(n)，长度为 N，将 x(n)左移 m 位，则:$y(n)=x((n+m)_N)R_N(n)$

x(n)左移 m 位的过程可由以下步骤获得：

(1)将 x(n)以 N 为周期进行周期延拓，得到 $\tilde{x}(n)=x((n)_N)$；

(2)将 $\tilde{x}(n)$ 左移 m 位，得到　；

(3)取 $\tilde{x}(n+m)$ 的主值序列，得到 x(n)循环移位序列 y(n)。

有限长序列的移位也称为循环移位，原因是将 x(n)左移 m 位时，移出的 m 位又依次从右端进入主值区。下面举例说明。

### 3. 循环折叠性质

如果要把有限长 N 点序列 x(n)直接进行折叠，则 x 的下标(－n)将不在 0≤n≤N－1 区域内。但根据有限长序列傅里叶变换隐含的周期性，可以对变量(－n)进行 N 求余运算。即在 MATLAB 中，序列 x(n)的折叠可以由 y＝x(mod(－nx，N)＋1)得到。

有限长 N 点序列 x(n)的循环折叠序列 y(n)定义为

$$y(n)=x((-n)_N)=\begin{cases}x(0) & n=0\\ x(N-n) & 1\le n\le N-1\end{cases}$$

可以想像成，序列 x(n)以反时针方向等间隔放置在一个圆周上，则 x(－n)是将 x(n)沿着圆周顺时针方向等间隔放置。

循环折叠性质同样适用于频域。经循环折叠后，序列的 DFT 由下式给出：

$$\begin{aligned}Y(k)&=DFT[x((-n)_N)]\\&=X^*((-k)_N)=\begin{cases}X(0) & k=0\\ X(N-k) & 1\le k\le N-1\end{cases}\end{aligned}$$

就是说，在时域循环折叠后的函数，其对应的 DFT 在频域也作循环折叠，

并取 X(k)的共轭。

**4. 时域和频域循环卷积特性**

离散傅里叶变换的循环卷积特性也称为圆周卷积，分为时域卷积和频域卷积两类。

1)时域循环卷积

假定 x(n)、h(n)都是 N 点序列，则时域循环卷积的结果 y(n)也是 N 点序列：

$$y(n) = x(n) \; ⓝ \; h(n)$$

若 x(n)、h(n)和 y(n)的 DFT 分别为 X(k)、H(k)和 Y(k)，则

$$Y(k) = X(k)H(k)$$

2)频域循环卷积

利用时域和频域的对称性，可以得到频域卷积特性。若

$$y(n) = x(n)h(n)$$

则

$$Y(k) = X(k) \; ⓝ \; H(k)$$

下面重点讨论时域循环卷积。时域循环卷积的方法有多种：

**方法 1：**直接使用时域循环卷积。

由于有限长序列可以看成是周期序列的主值，因此，时域圆周卷积的结果可以由对应的周期序列卷积和取主值部分获得。

**方法 2：**用频域 DFT 相乘再求逆变换。

即先分别求 $x_1(n)$、$x_2(n)$的 DFT$X_1(k)$、$X_2(k)$，再求 Y(k)的 IDFT 获得 y(n)。基本思路如图 9-4 所示。

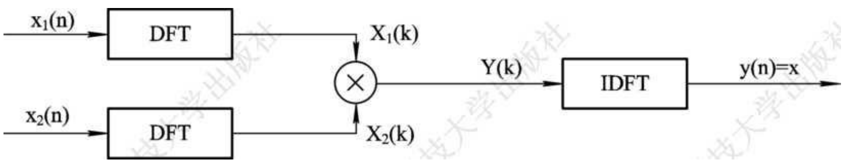



图 9-4 用 DFT 实现循环卷积的框图

**方法 3：**用 FFT 和 IFFT 进行循环卷积。

基本思路同方法 2，但直接使用了 MATLAB 提供的 fft 和 ifft 子函数来实现。

**5.循环对称性**

由于序列 x(n)及其离散傅里叶变换 X(k)的定义在主值为 0～N－1 的区间，因此 DFT 的循环对称性对时间序列是指关于 n＝0 和 n＝N/2 的对称性，对频谱序列是关于数字频率为 0 和 p 的对称性。

本实验重点分析实序列的循环对称性。

实序列 x(n)可以分解为循环偶序列 $x_e(n)$和循环奇序列 $x_o(n)$：

$$x(n) = x_e(n) + x_o(n) \qquad 0 \le n \le N-1$$

其中：

$$x_e(n) = \frac{1}{2}[x(n) + x(-n)]$$

$$x_o(n) = \frac{1}{2}[x(n) - x(-n)]$$

设 DFT［x(n)］＝X(k)＝Re［X(k)］＋j*Im［X(k)］，则有：

$$DFT[x_e(n)] = R_e[X(k)]$$

$$DFT[x_o(n)] = j * I_m[X(k)]$$

即实序列中的偶序列 $x_e(n)$对应于 x(n)的离散傅里叶变换 X(k)的实部，而实序列中的奇序列 $x_o(n)$对应于 x(n)的离散傅里叶变换 X(k)的虚部。

## 三、实验任务

(1)　阅读并输入实验原理中介绍的例题程序，观察输出的数据和图形，结合基本原理理解每一条语句的含义。

以例 9-1 为说明。

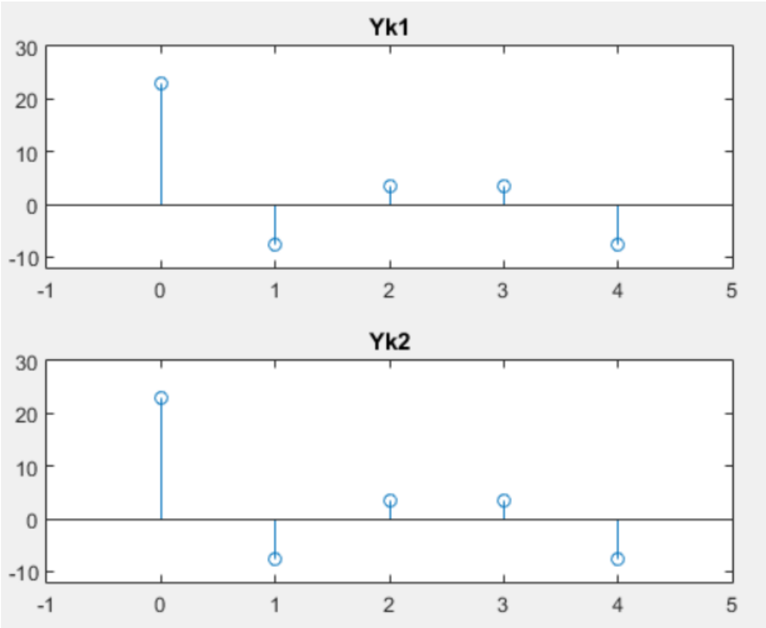
已知 $x_1(n)$＝［0，1，2，4］，$x_2(n)$＝［1，0，1，0，1］，求：

(1)y(n)＝$2x_1(n)$＋$3x_2(n)$，再由 y(n)的 N 点 DFT 获得 Y(k)；

(2)由 $x_1(n)$、$x_2(n)$求 $X_1(k)$、$X_2(k)$，再求 Y(k)＝$2X_1(k)$＋$3X_2(k)$。

**解：**matlab 代码如下图所示，各句的含义如注释。

```
clc
clear all
xn1=[0,1,2,4]; %建立xn1序列
xn2=[1,0,1,0,1];%建立xn2序列
N1=length(xn1);%求xn1的长度
N2=length(xn2);%求xn2的长度
N=max(N1,N2);%确定N
if N1>N2
    xn2=[xn2,zeros(1,N1-N2)];%对长度短的序列补0
elseif N2>N1
    xn1=[xn1,zeros(1,N2-N1)];
end
yn=2*xn1+3*xn2;%计算yn
n=0:N-1;
k=0:N-1;
Yk1=yn*(exp(-j*2*pi/N)).^(n'*k);%求yn的N点DFT
Xk1=xn1*(exp(-j*2*pi/N)).^(n'*k);%求xn1的N点DFT
Xk2=xn2*(exp(-j*2*pi/N)).^(n'*k);%求xn2的N点DFT
Yk2=2*Xk1+3*Xk2;%由Xk1、Xk2求Yk
subplot(2,1,1);stem(n,Yk1); %画出Yk1
axis([-1,N,-12,30]);
title('Yk1');
subplot(2,1,2);stem(n,Yk2); %画出Yk1
axis([-1,N,-12,30]);
title('Yk2');
```



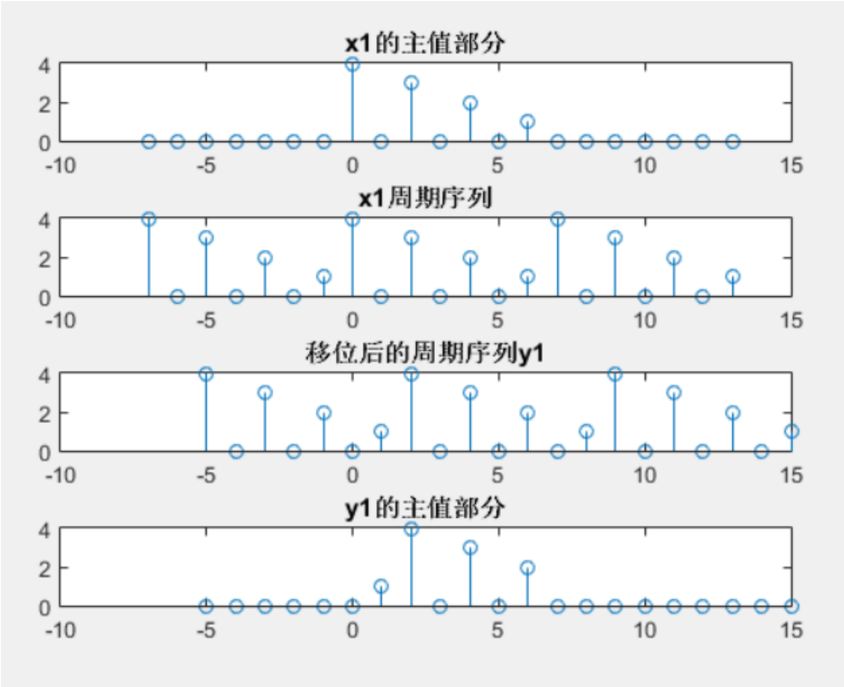

由图可以看出 Yk1 和 Yk2 是一样的，以此验证了 DFT 满足线性性质。

(2) 已知有限长序列 x(n)＝［4，0，3，0，2，0，1］，求 x(n)右移 2 位成为新的向量 y(n)，并画出循环移位的中间过程。

**解：**matlab 的代码如下图所示。

```
clc
clear all
xn=[4,0,3,0,2,0,1];%建立xn序列
Nx=length(xn);
n=0:Nx-1;
nx1=-Nx:2*Nx-1;%设立周期延拓的范围
x1=xn(mod(nx1,Nx)+1);%建立周期延拓序列
ny1=nx1+2;
y1=x1;%将x1右移2位，得到y1
RN=(nx1>=0)&(nx1<Nx);%在x1的位置向量nx1上设置主值窗
RN1=(ny1>=0)&(ny1<Nx);%在y1的位置向量ny1上设置主值窗
subplot(4,1,1),stem(nx1,RN.*x1);%画出x1的主值部分
title('x1的主值部分')
subplot(4,1,2),stem(nx1,x1);%画出x1
title('x1周期序列');
subplot(4,1,3),stem(ny1,y1);%画出y1
title('移位后的周期序列y1');
axis([-10,15,0,4]);
subplot(4,1,4),stem(ny1,RN1.*y1);%画出y1的主值部分
title('y1的主值部分');
axis([-10,15,0,4]);
```

循环过程如下图所示：



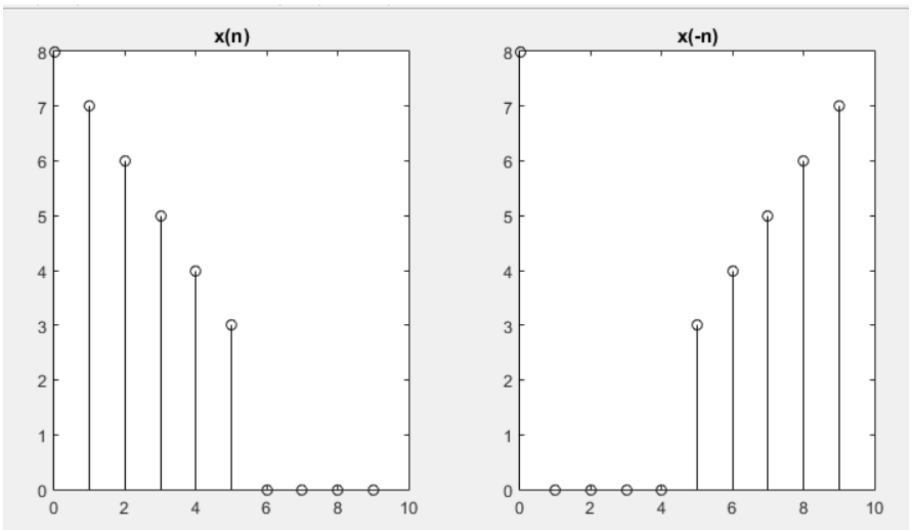

由 x1 的主值部分和 y1 的主值部分可以看出 x1 右移两位时，移出的 2 位又依次从左端进入主值部分得到 y1.所以 DFT 的循环移位性质得到验证。

(3) 已知一个有限长信号序列 x(n)＝［8，7，6，5，4，3］，循环长度取 N＝10。求证：在时域循环折叠后的函数 x(－n)，其对应的 DFT 在频域也作循环折叠。

**解：**matlab 的代码如下图所示。

```
clc
clear all
x1=[8,7,6,5,4,3];%建立x(n) N=6序列
N=length(x1);n=0:N-1;
y1=x1(mod(-n,N)+1);%建立x(-n)，N=6序列
N2=10;
x2=[x1,zeros(1,N2-N)];%建立x(n) N=10序列
n2=0:N2-1;
y2=x2(mod(-n2,N2)+1);%建立x(-n)，N=10序列
k=0:N2-1;
Xk=x2*exp(-j*2*pi/N2).^(n2'*k)%求x(n)的DFT
Yk=y2*exp(-j*2*pi/N2).^(n2'*k)%求x(-n)的DFT
subplot(1,2,1),stem(n2,x2,'k'),title('x(n)');%画x(n)，N=10
subplot(1,2,2),stem(n2,y2,'k'),title('x(-n)');%画x(-n)，N=10
```

x(n)和 x(-n)的图像如下：




两者的频域各点的值如下：

```
Xk =

  Columns 1 through 7

  33.0000 + 0.0000i    7.7361 -16.9273i    5.5000 - 3.4410i    3.2639 - 3.9960i    5.5000 - 0.8123i    3.0000 - 0.0000i    5.5000 + 0.8123i

  Columns 8 through 10

   3.2639 + 3.9960i    5.5000 + 3.4410i    7.7361 +16.9273i


Yk =

  Columns 1 through 7

  33.0000 + 0.0000i    7.7361 +16.9273i    5.5000 + 3.4410i    3.2639 + 3.9960i    5.5000 + 0.8123i    3.0000 - 0.0000i    5.5000 - 0.8123i

  Columns 8 through 10

   3.2639 - 3.9960i    5.5000 - 3.4410i    7.7361 -16.9273i
```

观察两者的值可知当 x(n)在时域循环折叠后，其 DFT 在频域也循环折叠，刚好是 X(K)的共轭。

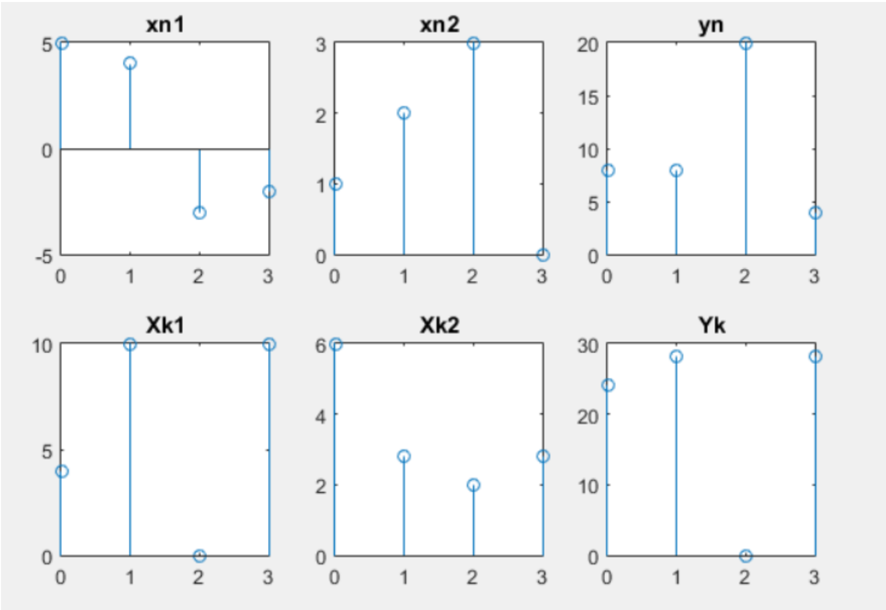
(4) 已知两个有限长序列 x1＝［5，4，－3，－2］，x2＝［1，2，3，0］，用 DFT 求时域循环卷积 y(n)并用图形表示。

**解：**matlab 的代码如下图所示。

```
clc
clear all;
xn1=[5,4,-3,-2];%建立x1(n)序列
xn2=[1,2,3,0];%建立x2(n)序列
N=length(xn1);
n=0:N-1;
k=0:N-1;
Xk1=xn1*(exp(-j*2*pi/N)).^(n'*k)%由x1(n)的DFT求X1(k)
Xk2=xn2*(exp(-j*2*pi/N)).^(n'*k)%由x2(n)的DFT求X2(k)
Yk=Xk1.*Xk2;%Y(k)=X1(k)X2(k)
yn=Yk*(exp(j*2*pi/N)).^(n'*k)/N;%由Y(k)的IDFT求y(n)
```

```
yn=abs(yn) %取模值，消除DFT带来的微小复数影响
subplot(2,3,1);stem(n,xn1);title('xn1');
subplot(2,3,2);stem(n,xn2);title('xn2');
subplot(2,3,3);stem(n,yn);title('yn');
subplot(2,3,4);stem(n,abs(Xk1));title('Xk1');
subplot(2,3,5);stem(n,abs(Xk2));title('Xk2');
subplot(2,3,6);stem(n,abs(Yk));title('Yk');
```

图像如下：




(5)思考题：

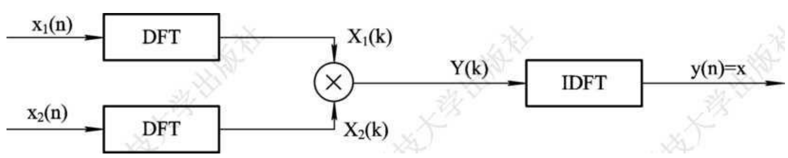
①回答预习思考题：　离散傅里叶变换(DFT)有哪些常用的基本性质？

答：**DFT** 常用性质有线性性质、循环移位性质、循环折叠性质、时域循环卷积和频域循环卷积定理、循环对称性。

②简述离散傅里叶变换(DFT)时域循环卷积的基本方法，其与 DTFT、DFS 时域卷积有何联系与区别？

答：时域循环卷积的方法有多种：

1. 由于有限长序列可以看成是周期序列的主值，因此，时域圆周卷积的结果可以由对应的周期序列卷积和取主值部分获得。
2. 先分别求 $x_1(n)$、$x_2(n)$的 DFT$X_1(k)$、$X_2(k)$，再求 Y(k)的 IDFT 获得 y(n)。




3. 基本思路同方法 2，但直接使用了 MATLAB 提供的 fft 和 ifft 子函数来实现。

DFS,是针对时域周期信号提出的，对有限长序列进行周期延拓，再进行 DFS，然后截取其主值部分，则与 DFT 是一一对应的精确关系。所以 DFT 的时域循环卷积就相当于将 DFS 的时域卷积先移动同样的位数再截取主值部分。

而 DFS 就相当于对 DTFT 进行采样。则 DFT 的时域循环卷积就相当于将 DTFT 的时域卷积先移动同样的位数在采样并截取主值部分。