实验 8 离散傅里叶变换

1518 班　15352408　张镓伟

一、实验目的

(1)加深对离散傅里叶变换(DFT)基本概念的理解。

(2)了解有限长序列傅里叶变换(DFT)与离散时间傅里叶变换(DTFT)的联系。

(3)掌握用 MATLAB 语言进行离散傅里叶变换和逆变换的方法。

二、实验原理

1. 有限长序列的傅里叶变换(DFT)和逆变换(IDFT)

在实际中常常使用有限长序列。如果有限长序列信号为 x(n)，则该序列的离散傅里叶变换对可以表示为:

$$X(k) = DFT[x(n)] = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_N^{nk}, \qquad k = 0, 1, \cdots, N-1 \tag{8-1}$$

$$x(n) = IDFT[X(k)] = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X(k) W_N^{-nk}, \qquad n = 0, 1, \cdots, N-1 \tag{8-2}$$

从离散傅里叶变换定义式可以看出，有限长序列在时域上是离散的，在频域上也是离散的。式中　　　　　　　　　　　　　　　，即仅在单位圆上 N 个等间距的点上取值，这为使用计算机进行处理带来了方便。

由有限长序列的傅里叶变换和逆变换定义可知，DFT 和 DFS 的公式非常相似，因此在程序编写上也基本一致。

例 8-1 已知 x(n)=［0，1，2，3，4，5，6，7］，求 x(n)的 DFT 和 IDFT。要求：

(1)画出序列傅里叶变换对应的|X(k)|和 arg［X(k)］图形。

(2)画出原信号与傅里叶逆变换 IDFT［X(k)］图形进行比较。

解 MATLAB 程序如下：

```
xn=[0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7];    %建立信号序列
    N=length(xn);
    n=0:N-1;
    k=0:N-1;
    Xk=xn*exp(-j*2*pi/N).^(n'*k);%离散傅里叶变换
    x=(Xk*exp(j*2*pi/N).^(n‘*k))/N;%离散傅里叶逆变换
    subplot(2,2,1),stem(n,xn);%显示原信号序列
    title(’x(n)‘);
    subplot(2,2,2),stem(n,abs(x));%显示逆变换结果
    title('IDFT|X(k)|');
    subplot(2,2,3),stem(k,abs(Xk));%显示|X(k)|
    title('|X(k)|');
    subplot(2,2,4),stem(k,angle(Xk));%显示 arg|X(k)|
    title('arg|X(k)|');
```

运行结果如图 8-1 所示。

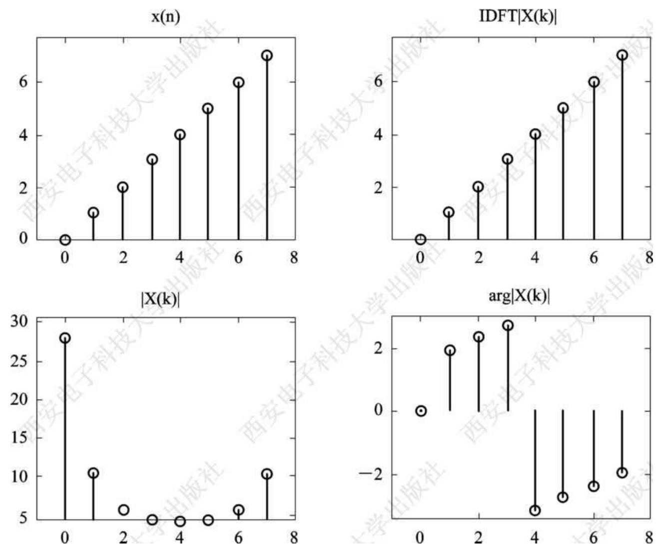


图 8-1 例 8-1 有限长序列的傅里叶变换和逆变换结果

从得到的结果可见，与周期序列不同的是，有限长序列本身是仅有 N 点的离散序列，相当于周期序列的主值部分。因此，其频谱也对应序列的主值部分，是含 N 点的离散序列。

例 8-2 已知周期序列的主值 x(n)＝［0，1，2，3，4，5，6，7］，求 x(n)周期重复次数为 4 次时的 DFS。要求：

(1)画出原主值和信号周期序列信号。

(2)画出序列傅里叶变换对应的|[AKX~](k)|和 arg［[AKX~](k)］的图形。

解 MATLAB 程序如下：

```
xn=[0,1,2,3,4,5,6,7];
N=length(xn);
n=0:4*N-1;
k=0:4*N-1;
xn1=xn(mod(n,N)+1);%mod (a, m), a is dividend,and    is divisor
%即 xn1＝［xn，xn，xn，xn］
 Xk=xn1*exp(-j*2*pi/N).^(n‘*k);%离散傅里叶变换
subplot(2,2,1),stem(xn);%显示序列主值
title(’原主值信号 x(n)‘);
subplot(2,2,2),stem(n,xn1);%显示周期序列
title(’周期序列信号‘);
subplot(2,2,3),stem(k,abs(Xk));%显示序列的幅度谱
title(’|X(k)|‘);
subplot(2,2,4),stem(k,angle(Xk));%显示序列的相位谱
title('arg|X(k)|');
```

运行结果如图 8-2 所示。

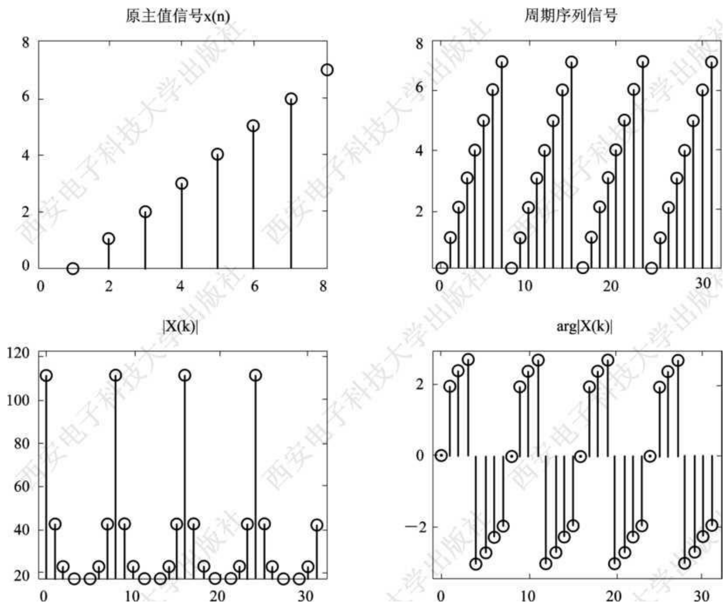


图 8-2 例 8-2 周期序列的傅里叶级数(DFS)结果

由这个周期序列的实验我们可以看出，与例 8-1 相比，有限长序列 x(n) 可以看成是周期序列的一个周期；反之，周期序列可以看成是有限长序列 x(n) 以 N 为周期的周期延拓。频域上的情况也是相同的。从这个意义上说，周期序列只有有限个序列值有意义。

2. 有限长序列 DFT 与离散时间傅里叶变换 DTFT 的联系

离散时间傅里叶变换(DTFT)是指信号在时域上为离散的，而在频域上则是连续的。

如果离散时间非周期信号为 x(n)，则它的离散傅里叶变换对(DTFT)表示为：

$$\mathrm{DTFT}[x(n)] = X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-j\omega n}$$

$$\mathrm{IDTFT}[X(e^{j\omega})] = x(n) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega})e^{j\omega n}d\omega$$

其中X(ejω)称为信号序列的频谱。将频谱表示为：

$$X(e^{j\omega}) = \left|X(e^{j\omega})\right| e^{\varphi(\omega)}$$

$|X(e^{j\omega})|$称为序列的幅度谱，称为序列的相位谱。

从离散时间傅里叶变换的定义可以看出，信号在时域上是离散的、非周期的，而在频域上则是连续的、周期性的。

与有限长序列相比，$X(e^{jw})$仅在单位圆上取值，X(k)是在单位圆上 N 个等间距的点上取值。因此，连续谱 $X(e^{jw})$可以由离散谱 X(k)经插值后得到。

为了进一步理解有限长序列的傅里叶变换(DFT)与离散时间傅里叶变换(DTFT)的联系，我们举例说明离散时间傅里叶变换的使用方法和结果。

例 8-3 求 x(n)＝［0，1，2，3，4，5，6，7］，0≤n≤7 的 DTFT，将(－2p，2p)区间分成 500 份。要求：

(1)画出原信号。

(2)画出由离散时间傅里叶变换求得的幅度谱 X(ejw)和相位谱 arg［X(e^{jw})］图形。

解 MATLAB 程序如下：

```
xn=[0,1,2,3,4,5,6,7];
N=length(xn);
n=0:N-1;
w=linspace(-2*pi,2*pi,500); %将［－2p，2p］频率区间分割为 500 份
X=xn*exp(-j*n'*w);%离散时间傅里叶变换
subplot(3,1,1),stem(n,xn,'k');
ylabel('x(n)');
subplot(3,1,2),plot(w,abs(X),'k');%显示序列的幅度谱
axis([-2*pi,2*pi,1.1*min(abs(X)),1.1*max(abs(X))]);
ylabel('幅度谱');
subplot(3,1,3),plot(w,angle(X),'k');%显示序列的相位谱
axis([-2*pi,2*pi,1.1*min(angle(X)),1.1*max(angle(X))]);
ylabel('相位谱');
```

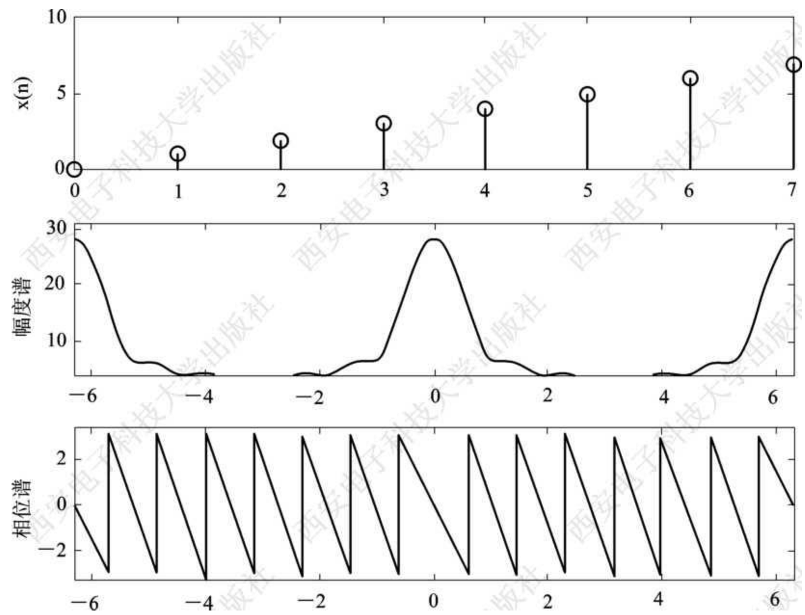


图 8-3 例 8-3 离散时间傅里叶变换(DTFT)的结果

由图 8-3 与 DFT 的结果图 8-1 相比可以看出，两者有一定的差别。主要原因在于，该例进行 DTFT 时，X(e^{jw})在单位圆上取 250 个点进行分割；而图 12-1 进行 DFT 时，X(k)是在单位圆上 N＝8 的等间距点上取值，X(k)的序列长度与 X(e^{jw})相比不够长。

例 8-4 仍然用 x(n)＝［0，1，2，3，4，5，6，7］，将 x(n)的有限长序列后面

补足至 N＝100，求其 DFT，并与例 12-3 进行比较。

解 将例 8-1 程序的前 2 行改为

N＝100；

xn＝［0，1，2，3，4，5，6，7，zeros(1，N－8)］；

则|X(k)|和 arg［X(k)］的图形接近由离散时间傅里叶变换求得的幅度谱 $X(e^{jw})$和相位谱 arg［$X(e^{jw})$］的图形，如图 12-4 所示。注意，此图对应［0，2p］区间。

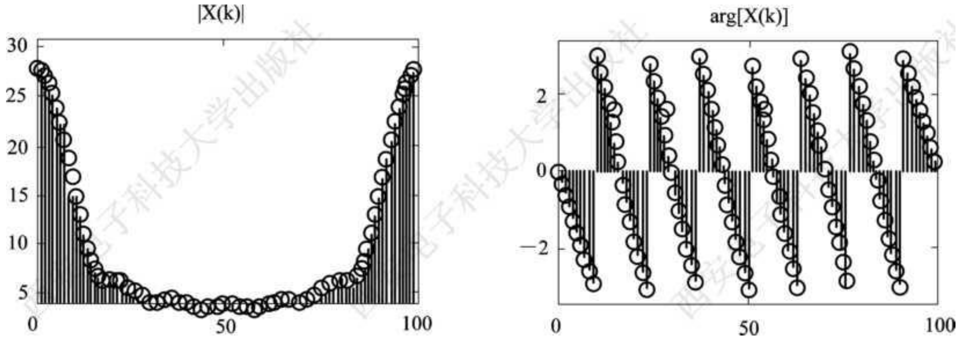


图 12-4 增长有限长序列的长度得到|X(k)|和 arg［X(k)］

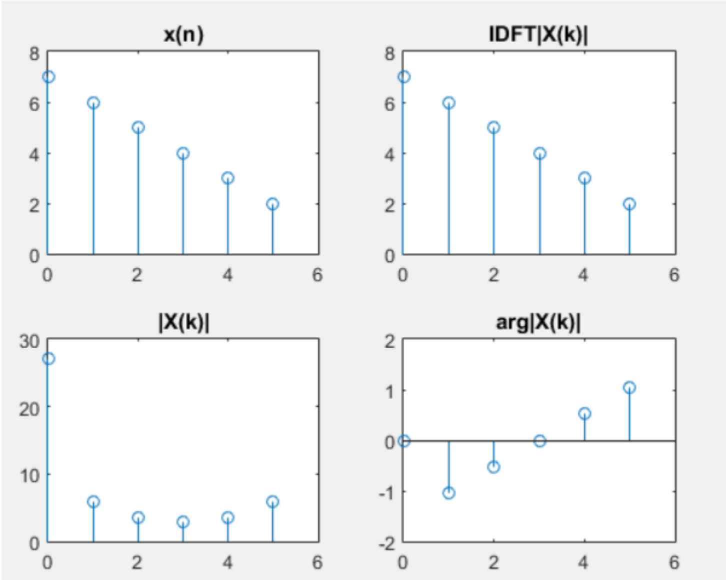
三、实验任务

(1)已知有限长序列 x(n)＝［7，6，5，4，3，2］，求 x(n)的 DFT 和 IDFT。要求：

①画出序列傅里叶变换对应的|X(k)|和 arg［X(k)］的图形。

②画出原信号与傅里叶逆变换 IDFT［X(k)］的图形进行比较。

```
clc
clear all
xn=[7,6,5,4,3,2];
N=length(xn);
n=0:N-1;
k=0:N-1;
Xk=xn*exp(-j*2*pi/N).^(n'*k);%离散傅里叶变换
x=(Xk*exp(j*2*pi/N).^(n'*k))/N;%离散傅里叶逆变换
subplot(2,2,1),stem(n,xn);%显示原信号序列
title('x(n)');
subplot(2,2,2),stem(n,abs(x));%显示逆变换结果
title('IDFT|X(k)|');
subplot(2,2,3),stem(k,abs(Xk));%显示|X(k)|
title('|X(k)|');
subplot(2,2,4),stem(k,angle(Xk));%显示arg|X(k)|
title('arg|X(k)|');
```



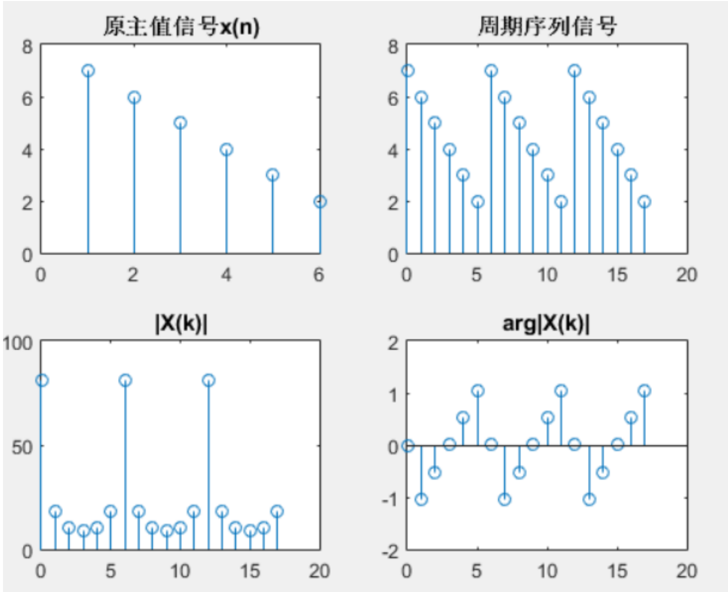
可以看出序列傅里叶变换对应的|X(k)|和 arg［X(k)］的图形完全一致。

(2)已知周期序列的主值 x(n)＝［7，6，5，4，3，2]，求 x(n)周期重复次数为 3 次时的 DFS 和 IDFS。要求：

①画出原信号序列的主值和周期序列的图形。

②画出序列傅里叶变换对应的 $\left|\tilde{X}(k)\right|$ 和 $\arg\tilde{X}(k)$ 的图形。

```
clc
clear all
xn=[7,6,5,4,3,2];
N=length(xn);
n=0:3*N-1;
k=0:3*N-1;
xn1=xn(mod(n,N)+1);%mod (a, m), a is dividend,and  is divisor
%即xn1= [xn，xn，xn，xn]
Xk=xn1*exp(-j*2*pi/N).^(n'*k);%离散傅里叶变换
subplot(2,2,1),stem(xn);%显示序列主值
title('原主值信号x(n)');
subplot(2,2,2),stem(n,xn1);%显示周期序列
title('周期序列信号');
subplot(2,2,3),stem(k,abs(Xk));%显示序列的幅度谱
title('|X(k)|');
subplot(2,2,4),stem(k,angle(Xk));%显示序列的相位谱
title('arg|X(k)|');
```

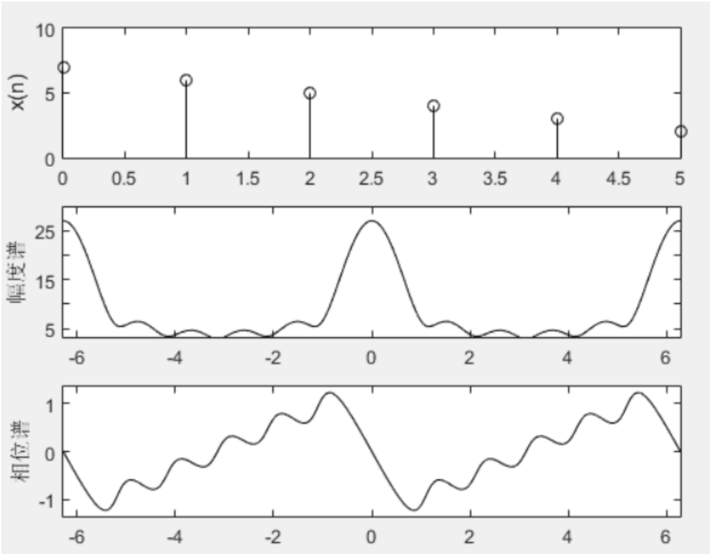


(3)求 x(n)＝［7，6，5，4，3，2］，0≤n≤5 的 DTFT，将(－2p，2p)区间分成 500 份。要求：

①画出原信号。

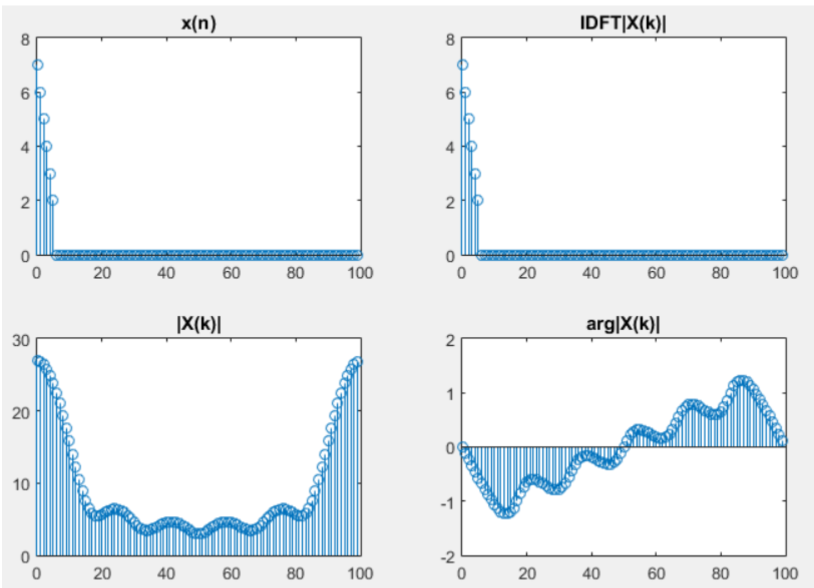
②画出由离散时间傅里叶变换求得的幅度谱 $X(e^{jw})$和相位谱 arg［$X(e^{jw})$］的图形。

```
xn=[7,6,5,4,3,2];
N=length(xn);
n=0:N-1;
w=linspace(-2*pi,2*pi,500);
%将［－2p，2p］频率区间分割为500份
X=xn*exp(-j*n'*w);
%离散时间傅里叶变换
subplot(3,1,1),stem(n,xn,'k');
ylabel('x(n)');
subplot(3,1,2),plot(w,abs(X),'k');
%显示序列的幅度谱
axis([-2*pi,2*pi,1.1*min(abs(X)),1.1*max(abs(X))]);
ylabel('幅度谱');
subplot(3,1,3),plot(w,angle(X),'k');
%显示序列的相位谱
axis([-2*pi,2*pi,1.1*min(angle(X)),1.1*max(angle(X))]);
ylabel('相位谱');
```



③求有限长序列 x(n)＝［7，6，5，4，3，2］，N＝100 时的 DFT，并与 DTFT 的结果进行比较。

```
figure;
N=100;
xn=[7,6,5,4,3,2,zeros(1,N-6)];
n=0:N-1;
k=0:N-1;
Xk=xn*exp(-j*2*pi/N).^(n'*k);%离散傅里叶变换
x=(Xk*exp(j*2*pi/N).^(n'*k))/N;%离散傅里叶逆变换
subplot(2,2,1),stem(n,xn);%显示原信号序列
title('x(n)');
subplot(2,2,2),stem(n,abs(x));%显示逆变换结果
title('IDFT|X(k)|');
subplot(2,2,3),stem(k,abs(Xk));%显示|X(k)|
title('|X(k)|');
subplot(2,2,4),stem(k,angle(Xk));%显示arg|X(k)|
title('arg|X(k)|');
```



(3)思考题：

①回答预习思考题:有限长序列的离散傅里叶变换(DFT)与周期序列的傅里叶级数(DFS)有何联系与区别？有限长序列的离散傅里叶变换(DFT)有何特点？

答：

1. 时域周期序列可看作是有限长序列 x(n)的周期延拓；同理把频域周期序列$\overline{X(K)}$也看作是有限长序列 X(k)的周期延拓。这样我们只要把 DFS 的定义式两边取主值区间，就得到了一个关于有限长序列的时频域对应的变换对——DFT。
2. DFT 特点：
   (1)适用于有限长序列， x(n) 和 X (k) 只有 N 个值，但隐含周期性。
   (2)遵循循环移位定理
   (3)遵循循环卷积定理
   (4) 具有对称性。

②有限长序列的离散傅里叶变换(DFT)与离散时间傅里叶变换(DTFT)有何联系与区别？

答：X(k)是 x(n)的离散时间傅立叶变换 X(e^(jw))在区间[0，2π]上的 N 点等间隔采样。DFT 的变换区间长度 N 不同，对 X(e^(jw))在[0，2π]区间上的采样间隔和采样点数也会不同，从而不同的 N 对应的 DFT 的变换结果不同。连续谱 $X(e^{jw})$可以由离散谱 X(k)经插值后得到。