实验 4 时域抽样与信号重建

1518 班　15352408　张镓伟

一、实验目的

(1)掌握用 MATLAB 语言进行离散时间傅里叶变换和逆变换的方法。
(2)了解用 MATLAB 语言进行时域抽样与信号重建的方法。
(3)进一步加深对时域信号抽样与恢复的基本原理的理解。
(4)观察信号抽样与恢复的图形，掌握采样频率的确定方法和内插公式的编程方法。

二、实验原理

DTFT

离散时间傅里叶变换(DTFT)是指信号在时域上为离散的，而在频域上则是连续的。

如果离散时间非周期信号为 x(n)，则它的离散傅里叶变换对(DTFT)表示为

$$\mathrm{DTFT}[x(n)] = X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-j\omega n}$$

$$\mathrm{IDTFT}[X(e^{j\omega})] = x(n) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega})e^{j\omega n}d\omega$$

其中 X(ejw)称为信号序列的频谱。将频谱表示为

$$X(e^{j\omega}) = \left|X(e^{j\omega})\right| e^{\varphi(\omega)}$$

|X(ejw)|称为序列的幅度谱 $\varphi(\omega) = \arg\left[X(e^{j\omega})\right]$称为序列的相位谱。

从离散时间傅里叶变换的定义可以看出，信号在时域上是离散的、非周期的，而在频域上则是连续的、周期性的。

离散时间信号大多由连续时间信号(模拟信号)抽样获得。在模拟信号进行数字化处理的过程中，主要经过 A/D 转换、数字信号处理、D/A 转换和低通滤波等过程，如图 4-2 所示。其中，A/D 转换器的作用是将模拟信号进行抽样、量化、编码，变成数字信号。经过处理后的数字信号则由 D/A 转换器重新恢复成模拟信号。

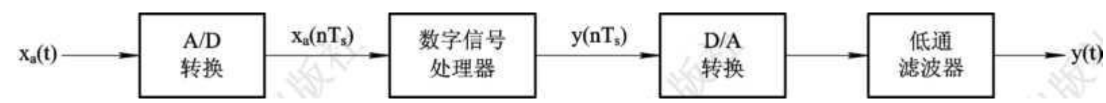


图 4-2 对模拟信号进行数字化处理的过程

如果 A/D 转换电路输出的信号频谱已经发生了混叠现象，则信号再经过后面的数字信号处理电路和 D/A 转换电路就没有实际使用的意义了。因此，信号进行 A/D 转换时，采样频率的确定是非常重要的。

图 4-3 表示了一个连续间信号 $x_a(t)$、对应的抽样后获得的信号 $\hat{x}_a(t)$ 以及对应的频谱。在信号进行处理的过程中，要使有限带宽信号 $x_a(t)$被抽样后能够不失真地还原出原模拟信号，抽样信号 p(t)的周期 T_s 及抽样频率 F_s 的

取值必须符合奈奎斯特(Nyquist)定理。假定 $x_a(t)$的最高频率为 f_m，则应有 $F_s \geq 2f_m$，即 $W_s \geq 2W_m$。

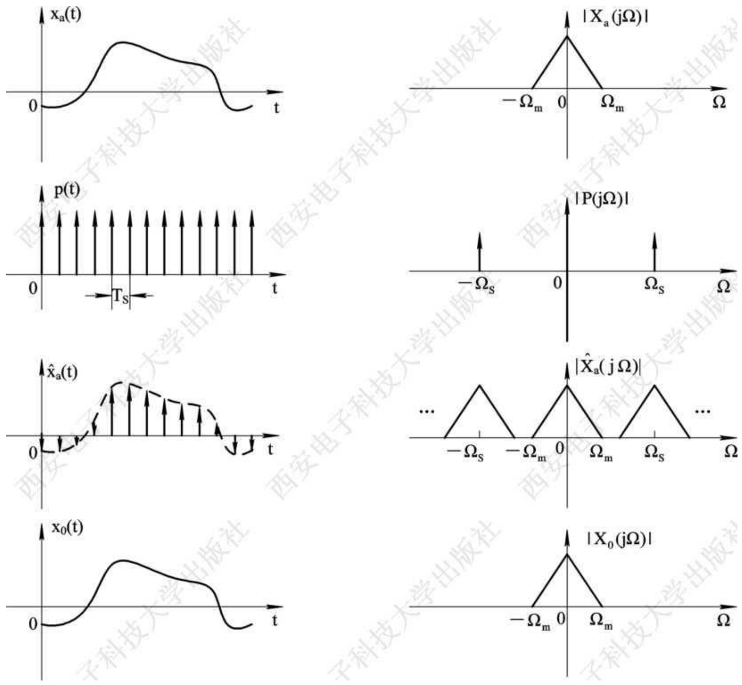


图 4-3 连续时间信号的抽样及其对应的频谱

从图 4-3 中我们可以看出，由于 F_s 的取值符合大于两倍的信号最高频率 f_m，因此只要经过一个低通滤波器，抽样信号 就能不失真地还原出原模拟信号。反之，如果 F_s 的取值小于两倍的信号最高频率 f_m，则频谱将发生混叠，抽样信号$|\hat{X}_a(\omega)|$将无法不失真地还原出原模拟信号。

满足奈奎斯特(Nyquist)抽样定理的信号 $\hat{x}_a(t)$，只要经过一个理想的低通滤波器，将原信号有限带宽以外的频率部分滤除，就可以重建 $x_a(t)$信号，如图 4-6(a)所示。

信号重建一般采用两种方法：一是用时域信号与理想滤波器系统的单位冲激响应进行卷积积分来求解；二是设计实际的模拟低通滤波器对信号进行滤波。我们首先来讨论第一种方法。

(a) 抽样信号通过低通滤波器重建示意图　　(b) 理想低通滤波器频率特性

图 4-6 抽样信号经过理想低通滤波器重建 $x_a(t)$信号

理想低通滤波器的频域特性为一矩形，如图 4-6(b)所示，其单位冲激响应为

$$h(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} H(j\Omega)e^{j\Omega t}d\Omega = \frac{\sin(\pi t/T)}{\pi t/T}$$

信号 $\hat{x}_a(t)$ 通过滤波器输出，其结果应为 $\hat{x}_a(t)$ 与 h(t)的卷积积分：

$$y_a(t) = x_a(t) = \hat{x}_a(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{x}_a(\tau) h(t-\tau) d\tau$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_a(nT) \frac{\sin[\pi(t-nT)/T]}{\pi(t-nT)/T} \qquad \textbf{(4-1)}$$

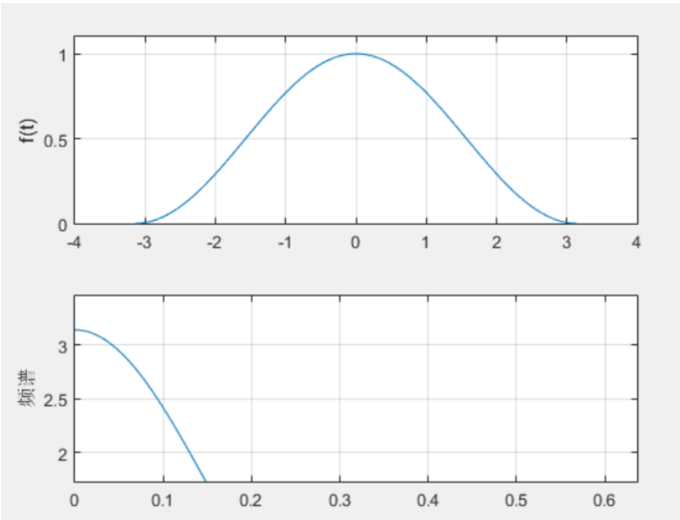
式(4-1)称为内插公式。由式可见，$x_a(t)$信号可以由其抽样值 $x_a(nT)$及内插函数重构。MATLAB 中提供了 sinc 函数，可以很方便地使用内插公式。

三、实验任务

(1)已知一个连续时间信号

$$f(t) = \begin{cases} \frac{1}{2}[1+\cos(t)], & 0 \le |t| \le \pi \\ 0, & |t| > \pi \end{cases}$$

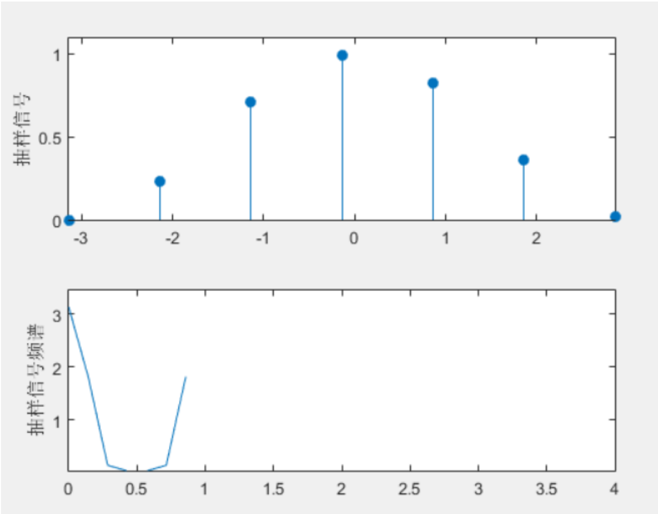
①画出该信号及其频谱；



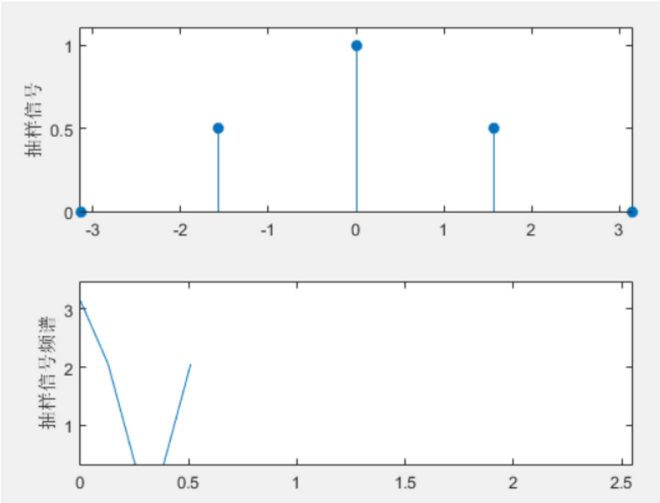

```
clc
clear all
figure;
t=linspace(-pi,pi,500); %将 [-pi, pi] 频率区间分割为500份
f=0.5*(1+cos(t));          %f(t)原信号
subplot(2,1,1),plot(t,f);
ylim([1.1*min(f),1.1*max(f)]);
ylabel('f(t)');grid on;
T=2*pi;wm=2*pi/T;
N=length(t),k=0:N-1;
w1=k*wm/N;dt=t(2)-t(1);
fw=f*exp(-j*t'*w1)*dt;    %f(t)傅里叶变换
subplot(2,1,2),plot(w1/(2*pi),abs(fw)); %画出f(t)频谱
axis([0,4*1/T,1.1*min(abs(fw)),1.1*max(abs(fw))]);
ylabel('频谱');grid on;
```

②分别以抽样周期$T = 1$、$T = \pi / 2$、$T = 2$对该信号采样，分别画出抽样信号 $f_p(n)$ 及其频谱；

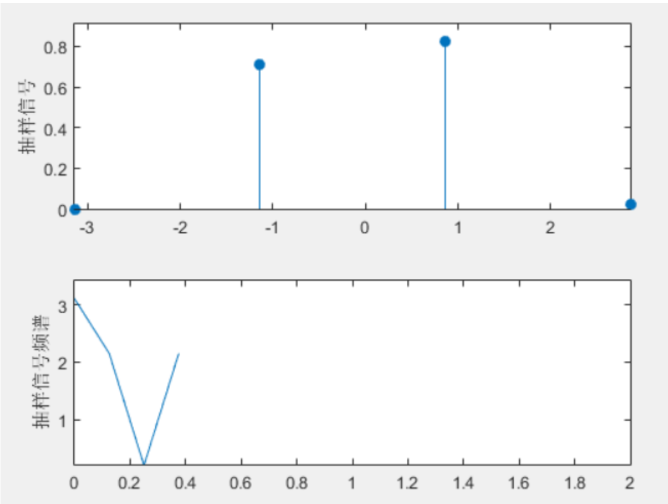
T=1：



T=pi/2:



T=2:



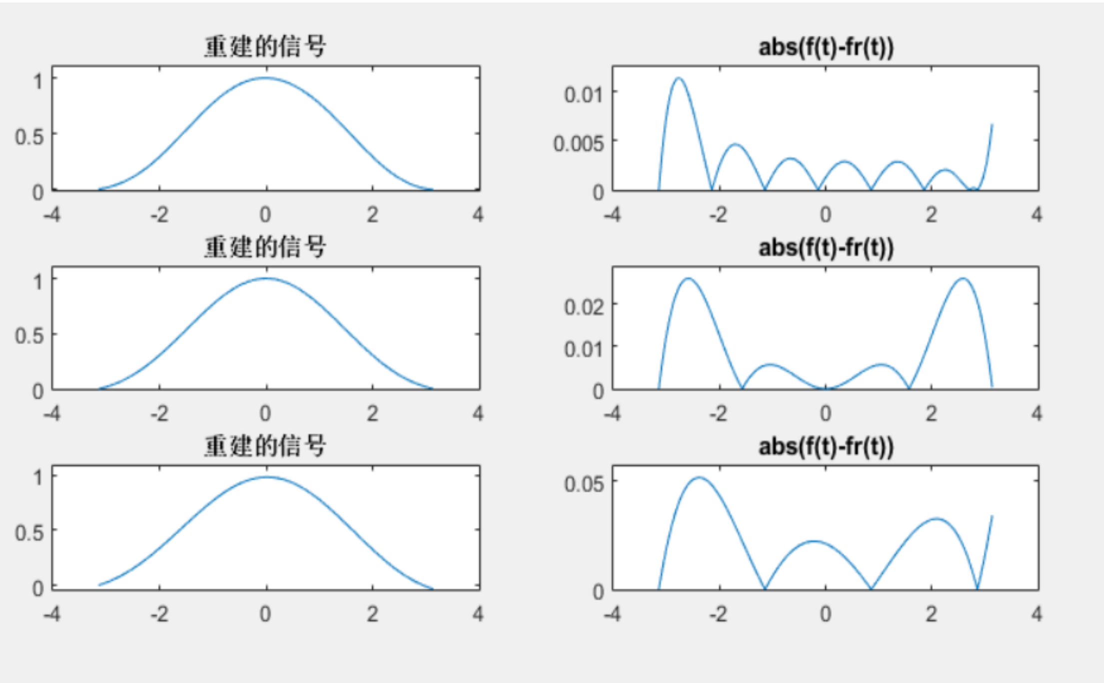
Code:

```
for i=0:2
    figure;
    if i==0              %抽样周期
        T=1;
    elseif i==1
        T=pi/2;
    else
        T=2;
    end
    fs=1/T;              %抽样频率
    n=-pi:T:pi;
    f=0.5*(1+cos(n)); %生成抽样信号
    subplot(2,1,1);stem(n,f,'filled');
    ylabel('抽样信号');
    axis([min(n),max(n),1.1*min(f),1.1*max(f)]);
    N=length(n),k=0:N-1;
    wm=2*pi*fs;w=k*wm/N;
    fw=f*exp(-j*n'*w)*T;    %对抽样信号进行傅里叶变换
    subplot(2,1,2),plot(w/(2*pi),abs(fw)); %画出f(t)频谱
    ylabel('抽样信号频谱');
    axis([0,4*fs,1.1*min(abs(fw)),1.1*max(abs(fw))]);

end
```

③使 $f_p(n)$ 通过截止频率 $\omega_c = 2.4$ 的低通滤波器，重建信号 $f_r(t)$，分别画出上述三个抽样周期所对应的 $f_r(t)$，并画出 $f_r(t)$ 和 $f(t)$ 之间的绝对误差。

从上到下依次为 T=1，T=pi/2,T=2 的结果



Code:

```
figure;
T0=2*pi;f0=1/T0;dt=0.01;
t0=-pi:dt:pi;
f0=0.5*(1+cos(t0));
for i=0:2
    if i==0            %抽样周期
        T=1;
    elseif i==1
        T=pi/2;
    else
        T=2;
    end
    fs=1/T;            %抽样频率
    n=-pi:T:pi;         %生成n序列
    f=0.5*(1+cos(n));   %抽样信号
    t_nT=ones(length(n),1)*t0-n'*ones(1,length(t0)); %t-nT序列
    fr=f*sinc(fs*t_nT); %重建的信号
    subplot(4,2,i*2+1);plot(t0,fr);
    title('重建的信号');
    axis([-4,4,1.1*min(fr),1.1*max(fr)]);
    delta=f0-fr;         %与原信号的绝对误差
    subplot(4,2,i*2+2);plot(t0,abs(delta));
    title('abs(f(t)-fr(t))');
    axis([-4,4,1.1*min(abs(delta)),1.1*max(abs(delta))]);
end
```

(2)预习思考题：什么是内插公式？在 MATLAB 中内插公式可以用什么函数来编写程序。

答：内插公式：

$$x_a(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_a(nT) \frac{\sin[\pi(t-nT)/T]}{\pi(t-nT)/T}$$

利用内插公式可以很方便地将信号重采样信号恢复成采样信号。

MATLAB 中可以使用 sinc 函数来编写程序，sinc(x)=sin(pi*x)/(pi*x)

(3)通过本次实验，对实验观察到的结果加以解释。

答：首先我们看抽样信号，发现 T=1，T=pi/2，T=2 三种信号抽样的结果越来越稀疏。这是因为抽样间隔变大了。三种抽样信号的频谱没有发生混叠现象。因为都满足奈奎斯特采样定律 fs>=2fm，而正因如此，它们也可以重采样信号恢复成原信号，误差非常小。显然，fs 越大的采样信号，恢复回来的误差越小。