实验 10 z 变换及其应用

1518 班　15352408　张镓伟

一、实验目的

(1) 加深对离散系统变换域分析——z 变换的理解。

(2) 掌握进行 z 变换和 z 反变换的基本方法，了解部分分式法在 z 反变换中的应用。

(3) 掌握使用 MATLAB 语言进行 z 变换和 z 反变换的常用子函数。

二、实验涉及的 MATLAB 子函数

1.ztrans

功能：返回无限长序列函数 x(n)的 z 变换。

调用格式：

X＝ztrans(x)；求无限长序列函数 x(n)的 z 变换 X(z)，返回 z 变换的表达式。

2.iztrans

功能：求函数 X(z)的 z 反变换 x(n)。

调用格式：

x＝iztrans(X)；求函数 X(z)的 z 反变换 x(n)，返回 z 反变换的表达式。

3.syms

功能：定义多个符号对象。

调用格式：

syms a,b,w0；把字符 a，b，w0 定义为基本的符号对象。

4.residuez

功能：有理多项式的部分分式展开。

调用格式：

[r, p, c]＝residuez(b，a)；把 b(z)/a(z)展开成(如式(10-3))部分分式。

[b，a]＝residuez(r, p, c)；根据部分分式的 r、p、c 数组，返回有理多项式。

其中：b，a 为按降幂排列的多项式(如式(7-1))的分子和分母的系数数组；r 为余数数组；p 为极点数组；c 为无穷项多项式系数数组。

三、实验原理

1. 用 ztrans 子函数求无限长序列的 z 变换

MATLAB 为我们提供了进行无限长序列的 z 变换的子函数 ztrans。使用时须知，该函数只给出 z 变换的表达式，而没有给出收敛域。另外，由于这一功能还不尽完善，因而有的序列的 z 变换还不能求出，z 逆变换也存在同样的问题。

2. 用 iztrans 子函数求无限长序列的 z 反变换

MATLAB 还提供了进行无限长序列的 z 反变换的子函数 iztrans。

3. 用部分分式法求 z 反变换

部分分式法是一种常用的求解 z 反变换的方法。当 z 变换表达式是一个多项式时，可以表示为

$$X(z)=\frac{b_0+b_1z^{-1}+b_2z^{-2}+\cdots\cdots+b_Mz^{-M}}{1+a_1z^{-1}+a_2z^{-2}+\cdots\cdots+a_Nz^{-N}} \tag{10-1}$$

将该多项式分解为真有理式与直接多项式两部分，即得到：

$$X(z)=\frac{\bar{b}_0+\bar{b}_1z^{-1}+\bar{b}_2z^{-2}+\cdots\cdots+\bar{b}_{N-1}z^{-N-1}}{1+a_1z^{-1}+a_2z^{-2}+\cdots\cdots+a_Nz^{-N}}+\sum_{k=0}^{M-N}C_kz^{-k} \tag{10-2}$$

对于 X(z)的真有理式部分存在以下两种情况。

情况 1：

X(z)仅含有单实极点，则部分分式展开式为：

$$\begin{aligned}X(z)&=\sum_{k=1}^{N}\frac{r_k}{1-p_kz^{-1}}+\sum_{k=0}^{M-N}C_kz^{-k}\\&=\frac{r_1}{1-p_1z^{-1}}+\frac{r_2}{1-p_2z^{-1}}+\cdots+\frac{r_N}{1-p_Nz^{-1}}+\sum_{k=0}^{M-N}C_kz^{-k}\end{aligned} \tag{10-3}$$

X(z)的 z 反变换为

$$x(n)=\sum_{k=1}^{N}r_k(p_k)^n\,u(n)+\sum_{k=0}^{M-N}C_k\delta\,(n-k)$$

情况 2：

X(z)含有一个 r 重极点。这种情况处理起来比较复杂，本实验不做要求，仅举例 10-4 供使用者参考。

***例 10-4** 用部分分式法求解函数

$$H(z)=\frac{z^{-1}}{1-12\,z^{-1}+36\,z^{-2}}$$

的 z 反变换，写出 h(n)的表示式，并用图形与 impz 求得的结果相比较。

解 求 z 反变换的程序如下：

```
b=[0,1,0];a=[1,-12,36];
[r p c]=residuez(b,a)
```

在 MATLAB 命令窗将显示：

```
r=
-0.1667-0.0000i
0.1667+0.0000i
p=
6.0000+0.0000i
6.0000-0.0000i
c=
 []
```

由此可知，这个多项式含有重极点。多项式分解后表示为

$$\begin{aligned}H(z)&=\frac{-0.1667}{1-6\,z^{-1}}+\frac{0.1667}{(1-6\,z^{-1})^2}\\&=\frac{-0.1667}{1-6\,z^{-1}}+\frac{0.1667}{6}\,z\,\frac{6\,z^{-1}}{(1-6\,z^{-1})^2}\end{aligned}$$

根据时域位移性质，可写出 z 反变换公式：

$$h(n) = -0.1667(6)^n u(n) + \frac{0.1667}{6}(n+1)6^{n+1} u(n+1)$$

如果要用图形表现 h(n)的结果，并与 impz 子函数求出的结果相比较，可以在前面已有的程序后面加以下程序段：

```
N=8;n=0:N-1;
h=r(1)*p(1).^n.*[n>=0]+r(2).*(n+1).*p(2).^n.*[n-1>=0];
subplot(1,2,1),stem(n,h);
title('用部分分式法求反变换 h(n)');
h2=impz(b,a,N);
subplot(1,2,2),stem(n,h2);
title('用 impz 求反变换 h(n)');
```

执行结果如图 10-2 所示

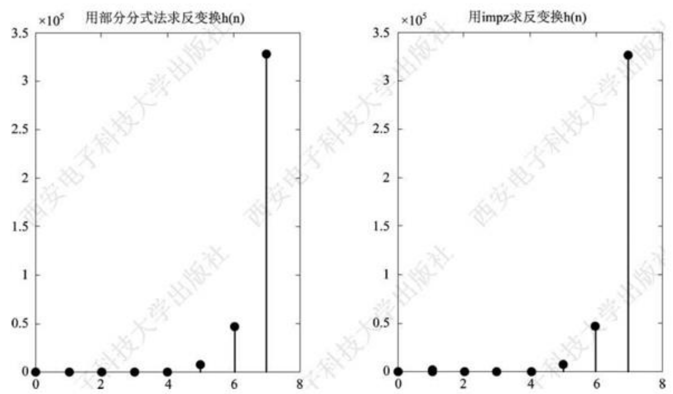


图10-2 用部分分式法和impz子函数求解例11-4的z反变换

注意： impz 是一个求解离散系统冲激响应的子函数，在实验中我们已使用过。如果把 H(z)看成是一个系统的系统函数，则 H(z)的 z 反变换就等于这个系统的冲激响应。因此，可以用 impz 的结果来检验用部分分式法求得的 z 反变换结果是否正确。

4. 从变换域求系统的响应

在实验 6 中，我们表示了离散系统的响应与激励的关系。系统的响应既可以用时域分析的方法求解，也可以用变换域分析法求解。当已知系统函数 H(z)，又已知系统输入序列的 z 变换 X(z)，则系统响应序列的 z 变换可以由 Y(z)＝H(z)X(z)　求出。

四、实验任务

(1)　输入并运行例题程序，理解每一条程序的意义。

以例 10-3 为说明

例 10-3 已知 $X(z) = \frac{z^2}{z^2 - 1.5z + 0.5}$，|z|>1，试用部分分式法求 z 反变换，并列出 N＝20 点的数值。

解： 由表达式和收敛域条件可知，所求序列 x(n)为一个右边序列，且为因果序列。将上式整理得：

$$X(z) = \frac{1}{1 - 1.5z^{-1} + 0.5z^{-2}}$$

求 z 反变换的程序及代码意思如下：

b=[1,0,0]; %b 为分子多项式系数

a=[1,-1.5,0.5]; %a 为分母多项式系数

[r p c]=residuez(b,a)

%将 b(z)/a(z)展开成形如 $\frac{r_1}{1-p_1z^{-1}} + \frac{r_2}{1-p_2z^{-1}} + \cdots + \frac{r_N}{1-p_Nz^{-1}} + \sum_{k=0}^{M-N} C_k z^{-k}$ 的多项式

在 MATLAB 命令窗将显示：

```
r =

     2
    -1


p =

    1.0000
    0.5000


c =

     0
```

由此可知，这是多项式 M<N 的情况，多项式分解后表示为

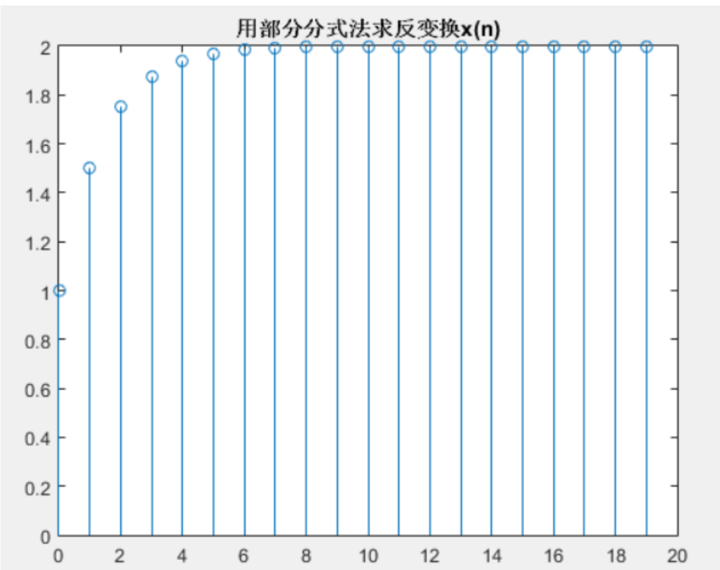
$$X(z) = \frac{2}{1 - z^{-1}} - \frac{1}{1 - 0.5z^{-1}}$$

根据常用 z 变换对表可写出 z 反变换公式：

$x(n) = 2u(n) - (0.5)^n u(n)$

用图形表示 x(n)的程序如下

```
x=r(1)*p(1).^n+r(2)*p(2).^n%根据[r,p,c]写出z反变换x(n)的表达式
stem(n,x);
title('用部分分式法求反变换x(n)');
```



(2) 求以下各序列的 z 变换：

$$x_1(n) = na^n \qquad x_2(n) = \sin(\omega_0 n)$$

$$x_3(n) = 2^n \qquad x_4 = e^{-an}\sin(n\omega_0)$$

本题我们使用 ztrans 函数求 z 变换，首先列出原函数表达式，再调用 ztrans 求，Matlab 代码如下：

```
clc
clear all;
syms w0 n z a;
x1=n*a^n;                    X1=ztrans(x1)
x2=sin(w0*n);                X2=ztrans(x2)
x3=2^n;                      X3=ztrans(x3)
x4=exp(-a*n)*sin(n*w0);      X4=ztrans(x4)
```

Matlab 命令窗显示的结果：

```
X1 =

(a*z)/(a - z)^2


X2 =

(z*sin(w0))/(z^2 - 2*cos(w0)*z + 1)


X3 =

z/(z - 2)


X4 =

(z*exp(a)*sin(w0))/(exp(2*a)*z^2 - 2*exp(a)*cos(w0)*z + 1)
```

结合变换表可知结果正确。

(3) 求下列函数的 z 反变换。

$$X_1(z) = \frac{z}{z-a} \qquad X_2(z) = \frac{z}{(z-a)^2}$$

$$X_3(z) = \frac{z}{z-e^{j\omega_0}} \qquad X_4(z) = \frac{1-z^{-3}}{1-z^{-1}}$$

本题我们使用 iztrans 函数求 z 变换，首先列出 Z 变换后的函数表达式，再调用 iztrans 求，Matlab 代码如下：

```
clc
clear all
syms n z a w0;
X1=z/(z-a);                  x1=iztrans(X1);
X2=z/(z-a)^2;                x2=iztrans(X2);
X3=z/(z-exp(i*w0));          x3=iztrans(X3);
X4=(1-z^(-3))/(1-z^(-1));    x4=iztrans(X4);
%由于求出来之后太长，所以我用了simplify函数化简表达:
x1=simplify(x1)
x2=simplify(x2)
x3=simplify(x3)
x4=simplify(x4)
```

Matlab 命令窗显示的结果：

```
x1 =

piecewise([a == 0, kroneckerDelta(n, 0)], [a ~= 0, a^n])


x2 =

piecewise([a == 0, kroneckerDelta(n - 1, 0)], [a ~= 0, a^(n - 1)*n])


x3 =

exp(w0*1i)^n


x4 =

kroneckerDelta(n - 1, 0) + kroneckerDelta(n - 2, 0) + kroneckerDelta(n, 0)
```

其中 kroneckerDelta 是克罗内克函数，克罗内克函数的自变量（输入值）一般是两个整数，如果两者相等，则其输出值为 1，否则为 0。其实就是我们熟悉的单位冲激函数。
piecewise 表示该表达式是一个分段函数，每一段函数用[expr1，expr2]表示，其中 expr1 表示范围表达式，expr1 是该范围的函数表达式。
该结果转成我们熟悉的形式后如下：

$$X_1=\begin{cases}\delta[n], & a=0\\ a^n, & a\neq 0\end{cases}$$

$$X_2=\begin{cases}\delta[n-1], & a=0\\ na^{n-1} & a\neq 0\end{cases}$$

$$X_3=e^{jw_0 n}$$

$$X_4=\delta[n-1]+\delta[n-2]+\delta[n]$$

(4) 用部分分式法求解下列系统函数的 z 反变换，写出 x(n)的表示式，并用图形与 impz 求得的结果相比较，取前 10 个点作图。

① $$X(z)=\frac{10+20z^{-1}}{1+8z^{-1}+19z^{-2}+12z^{-3}}$$

首先求出展开后的多项式：

```
clc
clear all;
b=[10,20,0,0];
a=[1,8,19,12];
[r p c]=residuez(b,a)
```

```
r =

   26.6667
  -15.0000
   -1.6667


p =

   -4.0000
   -3.0000
   -1.0000


c =

     0
```

根据结果可得 X(z)=$\frac{26.6667}{1+4z^{-1}}+\frac{-15.0000}{1+3z^{-1}}+\frac{-1.6667}{1+z^{-1}}$

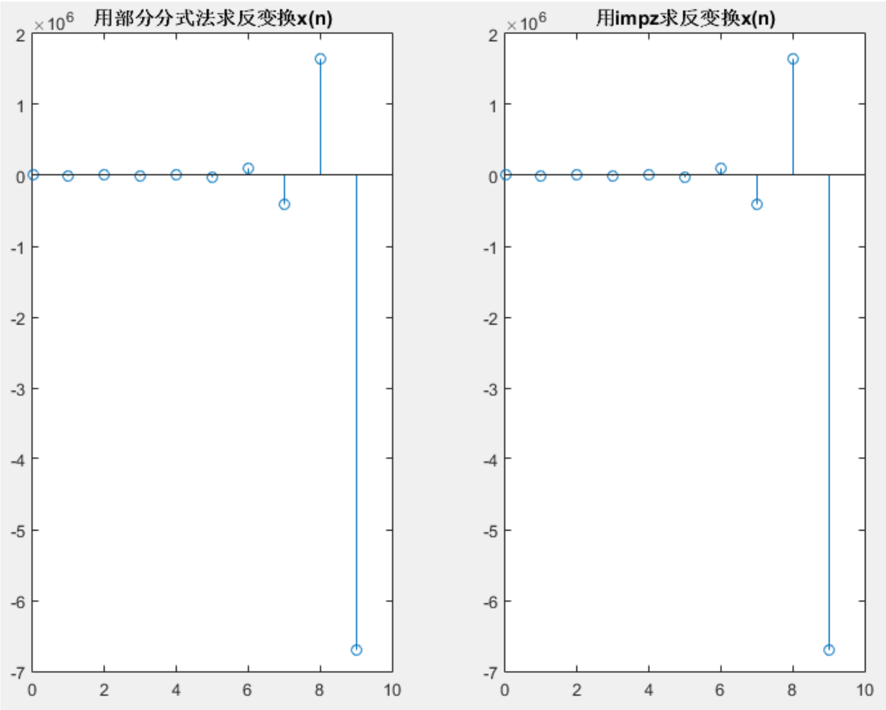
可写出 z 反变换公式：

$x(n)=26.6667(-4)^n u(n)-15.0000(-3)^n u(n)-1.6667(-1)^n u(n)$

如要用图形表现 x(n)的结果，并与 impz 子函数求出的结果相比较，可以在前面已有的程序后面加以下程序段：

```
N=10;n=0:N-1;
x=r(1)*p(1).^n+r(2)*p(2).^n+r(3)*p(3).^n;
subplot(1,2,1),stem(n,x);
title('用部分分式法求反变换x(n)');
x2=impz(b,a,N);
subplot(1,2,2),stem(n,x2);
title('用impz求反变换x(n)');
```

结果如图，可以看出两者是一样的：



② $X(z) = \dfrac{5z^{-2}}{1 + z^{-1} - 6z^{-2}}$

首先求出展开后的多项式：

```
b=[0,0,5];
a=[1,1,-6];
[r p c]=residuez(b,a)
```

```
r =

    0.3333
    0.5000


p =

    -3
     2


c =

   -0.8333
```

根据结果可得 $X(z)=\frac{0.3333}{1+3z^{-1}} + \frac{0.5000}{1-2z^{-1}} - 0.8333$

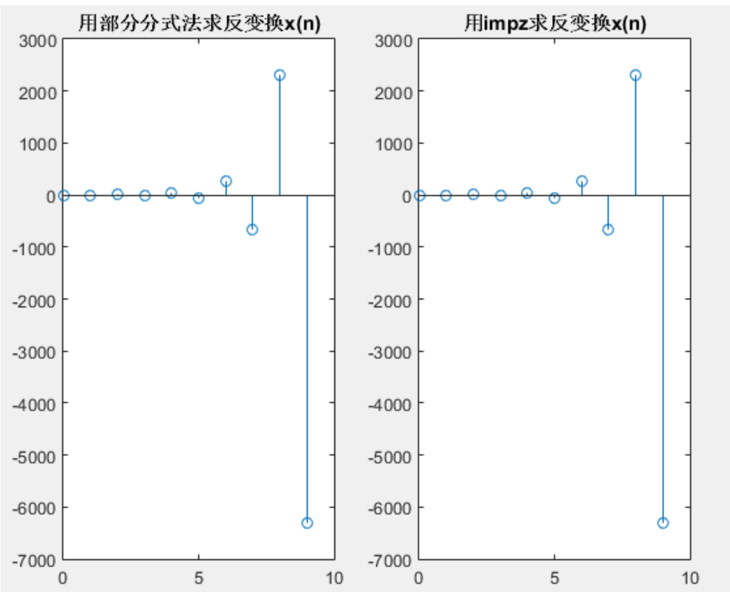
可写出 z 反变换公式：

$x(n)=0.3333(-3)^n u(n) + 0.5000(2)^n u(n) - 0.8333\,\delta(n)$

如要用图形表现 x(n)的结果，并与 impz 子函数求出的结果相比较，可以在前面已有的程序后面加以下程序段：

```
N=10;n=0:N-1;
x=r(1)*p(1).^n+r(2)*p(2).^n+c(1).*[n==0];
subplot(1,2,1),stem(n,x);
title('用部分分式法求反变换x(n)');
x2=impz(b,a,N);
subplot(1,2,2),stem(n,x2);
title('用impz求反变换x(n)');
```

结果如图，可以看出两者是一样的：



③ $$X(z)=\frac{1}{(1-0.9z^{-1})^2(1+0.9z^{-1})}$$

整理该式得：

$$X(z)=\frac{1}{1-0.9z^{-1}-0.81z^{-2}+0.729z^{-3}}$$

然后求出展开式：

```
b=[1,0,0,0];
a=[1,-0.9,-0.81,0.729];
[r p c]=residuez(b,a)
```

```
r =

    0.2500
    0.5000
    0.2500


p =

    0.9000
    0.9000
   -0.9000


c =

     0
```

由该结果可知，该多项式含有多重极点，多项式分解后表示为：

$$X(z)=\frac{0.2500}{1-0.9z^{-1}}+\frac{0.5}{0.9}z\frac{0.9z^{-1}}{(1-0.9z^{-1})^2}+\frac{0.2500}{1+0.9z^{-1}}$$

可写出 z 反变换公式：

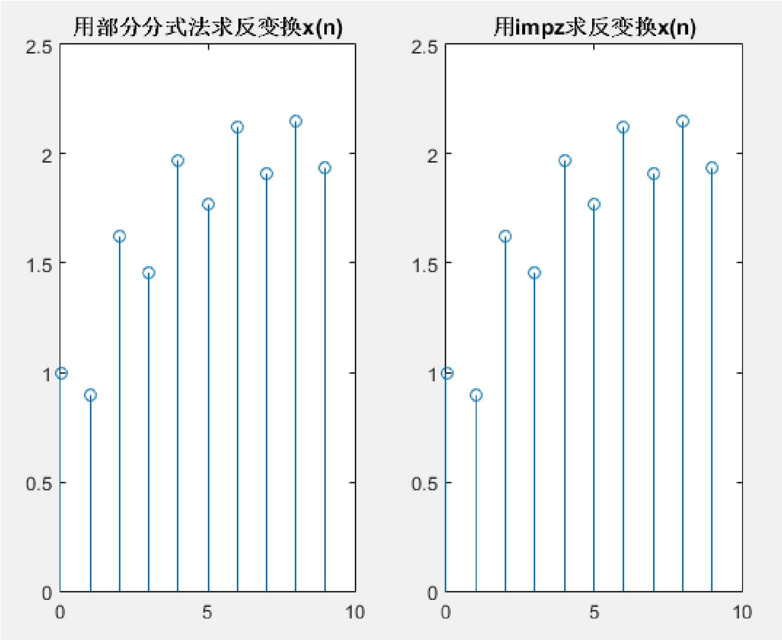
$$x(n)=0.25(0.9)^n u(n)+\frac{0.5}{0.9}(n+1)0.9^{n+1}u(n+1)+0.25(-0.9)^n u(n)$$

$$=0.25(0.9)^n u(n)+0.5(n+1)0.9^n u(n+1)+0.25(-0.9)^n u(n)$$

如果要用图形表现 x(n)的结果，并与 impz 子函数求出的结果相比较，可以在前面已有的程序后面加以下程序段：

```
N=10;n=0:N-1;
x=r(1)*p(1).^n+r(2).*(n+1).*p(2).^n.*[n+1>=0]+r(3)*p(3).^n;
subplot(1,2,1),stem(n,x);
title('用部分分式法求反变换x(n)');
x2=impz(b,a,N);
subplot(1,2,2),stem(n,x2);
title('用impz求反变换x(n)');
```

结果图像如下，可以看出两者是一样的：



(5)思考题：

①回答预习思考题： 使用部分分式法进行 z 反变换一般会遇到哪几种情况？如何处理？

答： 首先部分分式法将 z 变换的多项式表达式分解为真有理式和直接多项式两部分：

$$X(z)=\frac{\bar{b}_0+\bar{b}_1 z^{-1}+\bar{b}_2 z^{-2}+\cdots\cdots+\bar{b}_{N-1} z^{-N-1}}{1+a_1 z^{-1}+a_2 z^{-2}+\cdots\cdots+a_N z^{-N}}+\sum_{k=0}^{M-N} C_k z^{-k}$$

当 M<N 时，第二部分为 0。

对于真有理式部分存在以下两种情况：

情况 1：

X(z)仅含有单实极点，则部分分式展开式为：

$$X(z)=\sum_{k=1}^{N}\frac{r_k}{1-p_k z^{-1}}+\sum_{k=0}^{M-N} C_k z^{-k}$$

$$=\frac{r_1}{1-p_1 z^{-1}}+\frac{r_2}{1-p_2 z^{-1}}+\cdots+\frac{r_N}{1-p_N z^{-1}}+\sum_{k=0}^{M-N} C_k z^{-k}$$

X(z)的 z 反变换为

$$x(n)=\sum_{k=1}^{N} r_k (p_k)^n\, u(n)+\sum_{k=0}^{M-N} C_k \delta(n-k)$$

情况 2：

X(z)含有一个 r 重极点。这种情况处理起来比较复杂。实验任务的用部分分式法求逆 z 变换的第三个小问就属于这种情况，有 k 重根的话，就写成$\frac{r}{1-pz^{-1}}+\frac{r}{(1-pz^{-1})^2}+\frac{r}{(1-pz^{-1})^3}+\cdots++\frac{r}{(1-pz^{-1})^k}$的形式，

其他没有重根的写成情况 1 的形式。然后有重根这部分再通过分子分母一些同时放大或缩小的变换变成我们熟悉的形式，然后可通过查表形式写出逆 z 变换，实在不行就只能用反变换公式算了。

②MATLAB 中提供的 ztrans 和 iztrans 变换方法，使用中有何问题需要注意？

答：在调用函数 ztrans( )及 iztrans( )之前，要用 syms 命令对所有需要用到的变量（如 a,n,z）等进行说明，即要将这些变量说明成符号变量。

这两个变换的功能还不完善，有些变换是求不出的。