# 实验 11 离散系统的描述模型及其转换

1518 班　15352408　张镓伟

## 一、实验目的

(1) 了解离散系统的基本描述模型。
(2) 掌握各种模型相互间的关系及转换方法。
(3) 熟悉 MATLAB 中进行离散系统模型间转换的常用子函数。

## 二、实验涉及的 MATLAB 子函数

**1. tf2zp**

**功能：**将系统传递函数(tf)模型转换为系统函数的零-极点增益(zpk)模型。

**调用格式：**

［z，p，k］＝tf2zp(num，den)；输入系统传递函数模型中分子(num)、分母(den)多项式的系数向量，求系统函数的零-极点增益模型中的零点向量 z、极点向量 p 和增益系数 k。其中 z、p、k 为列向量。

**2. zp2tf**

**功能：**将系统函数的零-极点增益(zpk)模型转换为系统传递函数(tf)模型。

**调用格式：**

［num，den］＝zp2tf(z，p，k)；输入零-极点增益(zpk)模型零点向量 z、极点向量 p 和增益系数 k，求系统传递函数(tf)模型中分子(num)、分母(den)多项式的系数向量。

**3. tf2sos**

**功能：**将系统传递函数(tf)模型转换为系统函数的二次分式(sos)模型。

**调用格式：**

［sos，g］＝tf2sos(num，den)；输入系统传递函数模型中分子(num)、分母(den)多项式的系数向量，求系统函数的二次分式模型的系数矩阵 sos、增益系数 g。

**4. sos2tf**

**功能：**将系统函数的二次分式(sos)模型转换为系统传递函数(tf)模型。

**调用格式：**

［num，den］＝sos2tf(sos，g)；输入系统函数的二次分式模型的系数矩阵 sos、增益系数 g(默认值为 1)，求系统传递函数模型中分子(num)、分母(den)多项式的系数向量。

**5. sos2zp**

**功能：**将系统函数的二次分式(sos)模型转换为系统函数的零-极点增益(zpk)模型。

**调用格式：**

［z，p，k］＝sos2zp(sos，g)；输入系统函数的二次分式模型的系数矩阵 sos、增益系数 g(默认值为 1)，求系统函数的零-极点增益模型中的零点向量 z、极点向量 p 和增益系数 k。

**6. zp2sos**

**功能：**将系统函数的零-极点增益(zpk)模型转换为系统函数的二次分式(sos)模型。

**调用格式：**

［sos，g］＝zp2sos(z，p，k)；输入系统函数的零-极点增益模型中零点向量 z、极点向量 p 和增益系数 k，求系统函数的二次分式模型的系数矩阵 sos、增益系数 g。

**7. ss2tf**

**功能：**将系统状态空间(ss)模型转换为系统传递函数(tf)模型。

**调用格式：**

［num，den］＝ss2tf(A，B，C，D，xi)；可将系统状态空间(ss)模型转换为相应的传递函数(tf)模型。xi 用于指定变换使用的输入量。

**8. tf2ss**

**功能：**将系统传递函数(tf)模型转换为系统状态空间(ss)模型。

**调用格式：**

［A，B，C，D］＝tf2ss(num，den)；将系统传递函数(tf)模型转换为系统状态空间(ss)模型。num 按 s 降幂排列顺序输入分子系数，den 按 s 降幂排列顺序输入分母系数。

## 三、实验原理

### 1. 离散系统的基本描述模型

一个线性移不变(LSI)离散系统可以用线性常系数差分方程表示：

$$y(n)+\sum_{k=1}^{N}a_k y(n-k)=\sum_{m=0}^{M}b_m x(n-m) \tag{11-1}$$

这是系统在时间域的表达式，如果在变换域对系统进行描述，则可以采用以下几种模型。

(1)系统传递函数(tf)模型。对式(11-1)所示的线性常系数差分方程两边进行 z 变换，可以得到离散 LSI 系统的系统传递函数：

$$H(z)=\frac{Y(z)}{X(z)}=\frac{\sum_{m=0}^{M}b_m z^{-m}}{\sum_{k=0}^{N}a_k z^{-k}}$$

$$\frac{b_0+b_1z^{-1}+b_2z^{-2}+\cdots\cdots+b_Mz^{-M}}{1+a_1z^{-1}+a_2z^{-2}+\cdots\cdots+a_Nz^{-N}} \tag{11-2}$$

(2)零-极点增益(zpk)模型。对式(11-2)表示的系统传递函数进行因式分解，可以得到系统传递函数的零-极点增益模型：

$$H(z)=k\frac{(z-q_1)(z-q_2)\cdots(z-q_M)}{(z-p_1)(z-p_2)\cdots(z-p_N)} \tag{11-3}$$

(3)极点留数(rpk)模型。当式(8-3)模型中的极点均为单极点时，可以将式(11-3)分解为部分分式，表示为系统的极点留数模型：

$$H(z)=\frac{r_1}{1-p_1z^{-1}}+\frac{r_2}{1-p_2z^{-1}}+\cdots+\frac{r_N}{1-p_Nz^{-1}}+k_0 \tag{11-4}$$

(4)二次分式(sos)模型。离散 LSI 系统函数经常包含复数的零、极点，把每

一对共轭零点或共轭极点多项式合并，就可以得到二次分式模型：

$$H(z) = g\prod_{k=1}^{l} \frac{b_{0k} + b_{1k}z^{-1} + b_{2k}z^{-2}}{1 + a_{1k}z^{-1} + a_{2k}z^{-2}} \tag{11-5}$$

(5)状态变量(ss)模型。系统的状态方程可表示为：

$$\begin{aligned} W(n+1) &= AW(n) + BX(n) \\ Y(n) &= CW(n) + DX(n) \end{aligned} \tag{11-6}$$

其中 W 为 N 维状态向量，X 为 R 维输入向量，Y 为 M 维输出向量
A 为 N*N 矩阵，称系统矩阵，B 为 N*R 矩阵，称输入矩阵或控制矩阵，
C 为 M*N 矩阵，称为输出矩阵，D 为 M*R 矩阵，称直接传输矩阵
表示为传递函数形式：

$$\begin{aligned} H(z) &= \frac{Y(z)}{X(z)} = C\frac{W(z)}{X(z)} + D \\ &= C(z\mathrm{I} - A)^{-1}B + D \end{aligned} \tag{11-7}$$

在 MATLAB 中提供了上述各种模型之间的转换函数。这些函数为系统特性的分析提供了有效的手段。

**2. 系统传递函数(tf)模型与零-极点增益(zpk)模型间的转换**

**例 11-1** 已知离散时间系统的传递函数

$$H(z) = \frac{10z^{-1}}{1 - 3z^{-1} + 2z^{-2}}$$

求系统的零点向量 z、极点向量 p 和增益系数 k，并列出系统函数的零-极点增益模型。

**解** MATLAB 程序如下：

```
num=[0,10,0];
den=[1,-3,2];
[z,p,k] = tf2zp(num, den)
```

程序运行结果如下：

```
z＝
    0
p＝
    2
    1
k＝
    10
```

根据程序运行结果，零-极点增益模型的系统函数为

$$H(z) = 10\left(\frac{z}{z-2}\right)\left(\frac{z}{z-1}\right)$$

**例 11-2** 已知离散时间系统的零-极点增益模型

$$H(z) = 5\frac{(z-1)(z+3)}{(z-2)(z+4)}$$

求系统的传递函数(tf)模型。

**解** MATLAB 程序如下：

```
z=[1,-3]';
p=[2,-4]';
k=5;
[num, den]=zp2tf(z,p,k)
```

程序运行结果如下：

```
num＝
   5    10   －15
den＝
   1      2   －8
```

根据程序运行结果，可知系统的传递函数为

$$H(z) = \frac{5 + 10z^{-1} - 15z^{-2}}{1 + 2z^{-1} - 8z^{-2}}$$

### 3. 系统传递函数(tf)模型与二次分式(sos)模型间的转换

**例 11-3** 将系统传递函数

$$H(z) = \frac{1.9 + 2.5z^{-1} + 2.5z^{-2} + 1.9z^{-3}}{1 - 6z^{-1} + 5z^{-2} - 0.4z^{-3}}$$

转换为二次分式模型。

**解** MATLAB 程序如下：

```
num=[1.9,2.5,2.5,1.9];
den=[1,-6,5,-0.4];
[sos,g]=tf2sos(num,den)
```

程序运行结果如下：

```
sos =
1.0000       1.0000             0       1.0000      -5.0198             0
1.0000       0.3158       1.0000       1.0000      -0.9802       0.0797
g＝
1.9000
```

根据程序运行结果，可求出二次分式为

$$H(z) = 1.9 \cdot \frac{(1 + z^{-1})}{(1 - 5.0198z^{-1})} \cdot \frac{(1 + 0.3158z^{-1} + z^{-2})}{(1 - 0.9802z^{-1} + 0.0797z^{-2})}$$

**例 11-4** 已知系统的二次分式模型为

$$H(z) = 4 \cdot \frac{1 + Z^{-1}}{1 - 0.5Z^{-1}} \cdot \frac{1 - 1.4Z^{-1} + Z^{-2}}{1 + 0.9Z^{-1} + 0.8Z^{-2}}$$

试将其转换为系统传递函数(tf)模型。

**解** MATLAB 程序如下：

```
sos=[1.0000        1.0000          0    1.0000        -0.5000             0;
         1.0000       -1.4000    1.0000    1.0000          0.9000    0.8000];
g=4;
```

[num,den]=sos2tf(sos,g)

**程序运行结果如下：**

num＝4.0000 －1.6000 －1.6000 4.0000

den＝ 1.0000 0.4000 0.3500 －0.4000

根据程序运行结果，可求出系统传递函数为

$$H(z) = \frac{4 - 1.6z^{-1} - 1.6z^{-2} + 4z^{-3}}{1 + 0.4z^{-1} + 0.35z^{-2} - 0.4z^{-3}}$$

**4. 零-极点增益(zpk)模型与二次分式(sos)模型间的转换**

**例 11-5** 已知离散时间系统(如例 11-2)的零-极点增益模型

$$H(z) = 5\frac{(z-1)(z+3)}{(z-2)(z+4)}$$，求系统的二次分式模型。

**解** MATLAB 程序如下：

```
z=[1,-3]';
p=[2,-4]';
k=5;
[sos,g]=zp2sos(z,p,k)
```

程序运行结果如下：

sos＝1 2 －3 1 2 －8

g＝5

根据程序运行结果，可求出二次分式为

$$H(z) = 5\cdot\frac{(1 + 2z^{-1} - 3z^{-2})}{(1 + 2z^{-1} - 8z^{-2})}$$

**例 11-6** 已知离散时间系统的二次分式模型(如例 11-3)为

$$H(z) = 1.9\cdot\frac{(1 + z^{-1})}{(1 - 5.0198z^{-1})}\cdot\frac{(1 + 0.3158z^{-1} + z^{-2})}{(1 - 0.9802z^{-1} + 0.0797z^{-2})}$$

求系统的零-极点增益模型。

**解** MATLAB 程序如下：

```
sos =[1.0000   1.0000   0    1.0000   -5.0198   0;
      1.0000   0.3158   1.0000   1.0000   -0.9802   0.0797];
g =  1.9;
[z,p,k]= sos2zp(sos,g)
```

程序运行结果如下：

z =

－1.0000

－0.1579 ＋0.9875i

－0.1579 － 0.9875i

p =

5.0198

0.8907

0.0895

k =1.9000

根据程序运行结果，零-极点增益模型的系统函数为

$$H(z) = 1.9 \cdot \frac{(z+1)}{(z-5.0198)} \cdot \frac{(z+0.1579-0.9875i)}{(z-0.8907)}$$

$$\frac{(z+0.1579+0.9875i)}{(z-0.0895)}$$

**5. 系统传递函数(tf)模型与极点留数(rpk)模型间的转换**

在实验 10 中，我们用部分分式法求系统函数的 z 反变换，实际上也就是利用 residuez 子函数，将系统的传递函数(tf)模型转换为极点留数(rpk)模型。反之，利用 residuez 子函数，还能将系统的极点留数(rpk)模型转换为传递函数(tf)模型。

**例 11-7** 已知离散时间系统的传递函数(tf)模型(如例 11-1)为

$H(z) = \dfrac{10z^{-1}}{1-3z^{-1}+2z^{-2}}$，求系统的极点留数(rpk)模型。

**解** MATLAB 程序如下：

```
num=[0,10,0];
den=[1,-3,2];
[r,p,k] = residuez(num, den)
```

程序运行结果如下：

```
r＝
    10
  －10
p＝
   2
   1
k＝0
```

根据程序运行结果，极点留数(rpk)模型为

$$H(z) = \frac{10}{1-2z^{-1}} - \frac{10}{1-z^{-1}}$$

**例 11-8** 已知离散时间系统的极点留数(rpk)模型为

$H(z) = \dfrac{2}{1-z^{-1}} - \dfrac{1}{1-0.5z^{-1}} + \dfrac{1}{1+0.5z^{-1}}$ 求系统的传递函数(tf)模型。

**解** MATLAB 程序如下：

```
r=[2,-1,1]';
p=[1,0.5,-0.5]';
k=0;
[num, den]=residuez(r,p,k)
```

程序运行结果如下：

```
num＝2.0000    －1.0000    0.5000         0
den＝1.0000    －1.0000    －0.2500    0.2500
```

根据程序运行结果，可求出系统传递函数为

$$H(z) = \frac{2 - z^{-1} + 0.5z^{-2}}{1 - z^{-1} - 0.25z^{-2} + 0.25z^{-3}}$$

**6.系统传递函数(tf)模型与状态变量(ss)模型间的转换**

**例 11-9** 将系统传递函数

$$H(z) = \frac{1.9 + 2.5z^{-1} + 2.5z^{-2} + 1.9z^{-3}}{1 - 6z^{-1} + 5z^{-2} - 0.4z^{-3}}$$

转换为状态变量模型。

**解** MATLAB 程序如下：

```
num=[1.9,2.5,2.5,1.9];
den=[1,-6,5,-0.4];
[A,B,C,D]=tf2ss(num,den)
```

程序运行结果如下：

```
A＝6.0000    －5.0000    0.4000
   1.0000         0         0
        0    1.0000         0
B＝1
   0
   0
C＝13.9000 －7.0000 2.6600
D＝1.9000
```

将以上数据代入式(11-6)，可得到系统的状态方程。

同理，如果知道式(11-6)，则可以由状态变量模型转变为系统传递函数形式。

## 四、实验任务

(1) 阅读并输入实验原理中介绍的例题程序，理解每一条语句的含义，观察程序输出数据及公式。

以例 11-1 为例。

**例11-1** 已知离散时间系统的传递函数

$$H(z) = \frac{10z^{-1}}{1-3z^{-1}+2z^{-2}}$$

求系统的零点向量z、极点向量p和增益系数k，并列出系统函数的零-极点增益模型。

代码及注释：

```
clc
clear;
num=[0,10,0];%分子系数向量
den=[1,-3,2];%分母系数向量
[z,p,k] = tf2zp(num, den)%使用tf2zp求零-极点增益模型
```

程序输出结果:

```
z =

     0

p =

     2
     1

k =

    10
```

根据程序运行结果，零-极点增益模型的系统函数为

$$H(z) = 10\frac{z}{(z-2)(z-1)}$$

(2) 已知离散时间系统的传递函数(tf)模型：

$$H(z) = \frac{2+3z^{-1}}{1+0.4z^{-1}+z^{-2}}$$

要求将其转换为：

①零-极点增益(zpk)模型；

②二次分式(sos)模型；

③极点留数(rpk)模型；

④状态变量(ss)模型。

Matlab 代码如下：

```
clc
clear;
num=[2,3,0];%分子系数向量
den=[1,0.4,1];%分母系数向量
[z,p,k] = tf2zp(num, den)%使用tf2zp求零-极点增益模型
[sos,g] = tf2sos(num, den)%使用tf2sos求二次分式模型
[r,p,k] = residuez(num, den)%使用residuez求极点留数(rpk)模型
[A,B,C,D] = tf2ss(num,den)%使用tf2ss(num,den)求状态变量模型
```

程序输出结果：

①零-极点增益模型：

```
z =

         0
   -1.5000

p =

  -0.2000 + 0.9798i
  -0.2000 - 0.9798i

k =

     2
```

根据输出结果，可得零-极点增益模型的系统函数为

$$H(z)=2\frac{z(z+1.5)}{(z+0.2-0.9798i)(z+0.2+0.9798i)}$$

②二次分式(sos)模型:

```
sos =

    1.0000    1.5000         0    1.0000    0.4000    1.0000


g =

     2
```

根据输出结果，可得二次分式模型为

$$H(z)=2\frac{(1+1.5z^{-1})}{(1+0.4z^{-1}+z^{-2})}$$

③极点留数(rpk)模型

```
r =

   1.0000 - 1.3268i
   1.0000 + 1.3268i


p =

  -0.2000 + 0.9798i
  -0.2000 - 0.9798i


k =

     0
```

根据输出结果，可得极点留数模型为

$$H(z)=\frac{1-1.3268i}{1-(-0.2+0.9798i)z^{-1}}+\frac{1+1.3268i}{1-(-0.2-0.9798i)z^{-1}}$$

④状态变量(ss)模型。

```
A =

  -0.4000   -1.0000
   1.0000         0


B =

     1
     0


C =

   2.2000   -2.0000


D =

     2
```

根据输出结果，可得状态变量模型为

$$W(n+1)=\begin{bmatrix}-0.4 & -1\\ 1 & 0\end{bmatrix}W(n)+\begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix}X(n)$$

$$Y(n+1)=\begin{bmatrix}2.2 & -2\end{bmatrix}W(n)+[2]X(n)$$

(3) 已知离散时间系统的零-极点增益(zpk)模型为

$$H(z) = 3 \cdot \frac{(z-1)}{(z-2)} \cdot \frac{(z+3)}{(z-4)} \cdot \frac{(z-5)}{(z+6)}$$

要求将其转换为：

①传递函数(tf)模型；

②二次分式(sos)模型；

③极点留数(rpk)模型。

Matlab 代码如下：

```
clc
clear all;
%先根据零-极点模型的系统函数写出z,p,k
z=[1,-3,5]';
p=[2,4,-6]';
k=3;
[num,den]=zp2tf(z,p,k)%使用zp2tf求tf模型
[sos,g]=zp2sos(z,p,k)%使用zp2sos求sos模型
[r,p,k] = residuez(num,den)%可通过之前求出的tf模型使用residuez求极点留数(rpk)模型
```

程序输出结果：

①传递函数(tf)模型；

```
num =

     3    -9   -39    45


den =

     1     0   -28    48
```

根据输出结果可得传递函数模型为：

$$\mathrm{H(z)} = \frac{3 - 9z^{-1} - 39z^{-2} + 45z^{-3}}{1 - 28z^{-2} + 48z^{-3}}$$

②二次分式(sos)模型；

```
sos =

     1     3     0     1     6     0
     1    -6     5     1    -6     8


g =

     3
```

根据输出结果可得二次分式模型为：

$$\mathrm{H(z)} = 3\frac{(1+3z^{-1})(1-6z^{-1}+5z^{-2})}{(1+6z^{-1})(1-6z^{-1}+8z^{-2})}$$

③极点留数(rpk)模型。

```
r =

    1.4437
   -0.7875
    1.4062


p =

   -6.0000
    4.0000
    2.0000


k =

    0.9375
```

根据输出结果，可得极点留数模型为

$$\mathrm{H(z)}=\frac{1.4437}{1+6z^{-1}}+\frac{-0.7875}{1-4z^{-1}}+\frac{1.4062}{1-2z^{-1}}+0.9375$$

(4) 思考题：

①回答预习思考题：　离散系统有几种常用的系统描述模型？它们的公式如何？

答：有种常用的系统描述模型。

1. 系统传递函数(tf)模型

$$H(z)=\frac{Y(z)}{X(z)}=\frac{\sum_{m=0}^{M}b_m z^{-m}}{\sum_{k=0}^{N}a_k z^{-k}}$$

$$\frac{b_0+b_1z^{-1}+b_2z^{-2}+\cdots\cdots+b_Mz^{-M}}{1+a_1z^{-1}+a_2z^{-2}+\cdots\cdots+a_Nz^{-N}}$$

2. 零-极点增益(zpk)模型

$$H(z)=k\frac{(z-q_1)(z-q_2)\cdots(z-q_M)}{(z-p_1)(z-p_2)\cdots(z-p_N)}$$

3. 极点留数(rpk)模型

$$H(z)=\frac{r_1}{1-p_1z^{-1}}+\frac{r_2}{1-p_2z^{-1}}+\cdots+\frac{r_N}{1-p_Nz^{-1}}+k_0$$

4. 二次分式(sos)模型

$$H(z)=g\prod_{k=1}^{l}\frac{b_{0k}+b_{1k}z^{-1}+b_{2k}z^{-2}}{1+a_{1k}z^{-1}+a_{2k}z^{-2}}$$

5. 状态变量(ss)模型。系统的状态方程可表示为：

$$W(n+1)=\mathrm{AW}(n)+\mathrm{BX}(n)$$

$$Y(n)=\mathrm{CW}(n)+\mathrm{DX}(n)$$

表示为传递函数形式：

$$H(z)=\frac{Y(z)}{X(z)}=C\frac{W(z)}{X(z)}+D$$

$$=C(z\mathrm{I}-A)^{-1}B+D$$

其中 W 为 N 维状态向量，X 为 R 维输入向量，Y 为 M 维输出向量
A 为 N*N 矩阵，称系统矩阵，B 为 N*R 矩阵，称输入矩阵或控制矩阵，
C 为 M*N 矩阵，称为输出矩阵，D 为 M*R 矩阵，称直接传输矩阵

②通过本实验，你能进行哪些系统描述模型之间的转换？

答：tf –>zpk
tf –>rpk
tf –>sos
tf –>ss
zpk –>tf
zpk –>rpk
zpk –>sos