関数解析ノート

2023 年 3 月 31 日

注意: 基本的に増田久弥『関数解析』[1] のまとめ.

4　一様有界性の原理と閉グラフ定理

4.1　ベールのカテゴリ（範疇）定理

「ベールのカテゴリ定理」：完備距離空間が可算個の閉集合から成るとき, そのうちの一つが開球を含む
⇒ 関数解析の「3 つの基本的原理」＝「一様有界性の原理」,「開写像定理」,「閉グラフ定理」

定義 4.1: ベール空間

位相空間 $(X, \mathscr{O})$ がベール空間であるとは, 次の条件 (i) を満たすことを指す.

(i) 任意の可算閉集合族 $\{C_n\}$ について, 各閉集合の内部が空ならば合併の内部も空. つまり,

$$\mathrm{Int}(C_n) = \varnothing \text{ならば,} \mathrm{Int}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} C_n\right) = \varnothing.$$

また, 条件 (i) と以下の条件 (ii), (iii), (iii) は互いに同値である.

(ii) 可算開集合族 $\{U_n\}$ について, 各開集合が稠密ならば交わりも稠密. つまり,

$$\overline{U_n} = X \text{ ならば,} \overline{\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} U_n\right)} = X.$$

(iii) 可算閉集合族 $\{C_n\}$ について, 各閉集合が疎ならば合併の内部は必ず空になる. つまり,

$$\mathrm{Int}(\overline{C_n}) = \varnothing \text{ならば,} \mathrm{Int}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} C_n\right) = \varnothing.$$

(iv) X の可算閉集合族 $\{C_n\}$ について, 合併が内点を持つならばそれら閉集合の中に内点を持つものがある. つまり,

$$\mathrm{Int}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} C_n\right) \neq \varnothing \text{ならば}, \exists n_0 \in \mathbb{N} \mathrm{s.t.} \mathrm{Int}(C_n) \neq \varnothing.$$

ここで, 疎な集合とは, 閉包の内部が空であるような集合を指す. 疎集合だからといって閉集合とは限らない.

条件 (i) から (iv) の同値性を確認する.

証明

(i) と (iii) の同値性は自明. (iv) は (i) の対偶なので同値.

(ii) が成り立つとき, 可算閉集合族 $\{C_n\}$ が任意の λ について $\mathrm{Int}(C_n) = \varnothing$ であるとする. $U_n = X \backslash C_n$ とすると, U_n の外部は $\mathrm{Int}(C_n) = \varnothing$ なので, $\overline{U_n} = X$. 仮定から $\overline{(\bigcap_{n=1}^{\infty} U_n)} = X$ より,

$$\mathrm{Int}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} C_n\right) = X \backslash \overline{(\bigcap_{n=1}^{\infty} U_n)} = \varnothing$$

よって, (i) が成り立つ. 逆も同様.

（証明おしまい）

定理 4.1.1: ベールのカテゴリ（範疇）定理

(X, d) が完備距離空間ならば, ベール空間である.
つまり, A_n: 閉集合として, $A = \cup_{n=1}^{\infty} A_n$ とすると, A が内点を持つとすると, 少なくとも一つの A_n は疎集合ではない.
特に, X_n: 閉集合として, $X = \cup_{n=1}^{\infty} X_n$ ならば, X_n は少なくとも 1 つの開球を含む.

証明

背理法で示す. $\mathrm{Int}(A) \neq \varnothing$ かつ任意の A_n が疎集合である, つまり $\mathrm{Int}(\overline{A_n}) = \mathrm{Int}(A_n) = \varnothing$ と仮定する. 特に, A_1 は開球を含まないので, $A_1 \neq \overline{A}$. よって, $x_1 \in \overline{A} \backslash A_1$ となる元 x_1 が存在する. A_1 は閉集合なので, $\inf_{x \in A_1} d(x, x_1) \equiv d_1 > 0$.

$$B_1 = B(x_1, \rho_1), \quad \rho_1 = \min\{1, d_1/2\} - \epsilon_1 > 0$$

とすると, $\overline{B_1} \cap A_1 = \varnothing$ かつ $\rho_1 \leq 1$.
A_2 は開球を含まないので, $B_1 \backslash A_2 \neq \varnothing$. $x_2 \in B_1 \backslash A_2$ について, $\inf_{x \in A_2} d(x, x_2) \equiv d_2 > 0$. また, $x_2 \notin \overline{A} \backslash B_1$ なので, $\inf_{x \in \overline{A} \backslash B_1} d(x, x_2) \equiv$

$d_2' > 0$.

$$B_2 = B(x_2, \rho_2), \quad \rho_2 = \min\{1/2, d_2/2, d_2'\} - \epsilon_2 > 0$$

とすると, $B_1 \supset B_2$ かつ $\overline{B_2} \cap A_2 = \varnothing, \rho_2 \leq 1/2$. 以下同様にして,

$$B_1 \supset B_2 \supset \cdots, \quad \overline{B_k} \cap A_k = \varnothing, \quad \rho_k \leq 1/k$$

を満たす開球の列 $\{B_k\}$ を構成できる. B_k の中心 $\{x_k\}$ はコーシー列である. 実際, $k < m$ ならば $x_m \in B_k$ なので, $d(x_k, x_m) \leq 2\rho_k \leq 2/k$ である. (X, d) は完備なので, $\{x_k\}$ は X のある元 x に収束する. $k < m$ として $x_m \in \overline{B_k}$ なので, $x \in \overline{B_k}$. ゆえに, $x \notin A_k$. k は任意だから, $x \notin \cup_{n=1}^{\infty} A_n = A$. 一方, $B_{k-1} \supset \overline{B_k}$ なので, $x \in B_{k-1}$ であり, x は A の内点になっている. これは仮定に矛盾.

（証明おしまい）

4.2 一様有界性の原理

定理 4.2.1: 一様有界性の原理

X, Y: バナッハ空間.
$\{T_\lambda\}$: 線形有界作用素の空間 $\mathscr{L}(X, Y)$ に属する作用素の族.
このとき, 作用させた点が一様に有界ならば, 作用素ノルムは一様に有界である.
つまり, 全ての $x \in X$ で $\sup_\lambda \|T_\lambda x\| < \infty$ ならば $\sup_\lambda \|T_\lambda\| < \infty$ である.

証明

まず, $X_n = \{x \in X | \|T_\lambda x\| \leq n, \lambda \in \Lambda\}$ とおくと, λ 固定の下で $\{x \in X | \|T_\lambda x\| \leq n\}$ は, T_λ の連続性から閉集合であり, X_n は $\lambda \in \Lambda$ について交叉をとったものなので閉集合. 仮定 $\sup_\lambda \|T_\lambda x\| < \infty$ から, $\bigcup_{n=1}^{\infty} X_n = X$. よって, ベールのカテゴリ定理から, 少なくともひとつの X_n は開球を含む. それを $B(x_0, \rho_0) \supset X_{n_0}$ とする. 任意の $x \in B(0, \rho_0)$ に対しては, $x_0 \in B(x_0, \rho_0)$ より $x + x_0 \in B(x_0, \rho_0)$ であるから,

$$\|T_\lambda x\| \leq \|T_\lambda(x + x_0)\| + \|T_\lambda x_0\| \leq 2n_0.$$

ゆえに, 任意の $x \in X$ に対して, $\mu = 2\rho_0^{-1}\|x\|$ とおくと, $\left\|\mu^{-1} x\right\| =$

$\rho_0/2$ より $\mu^{-1}x \in B(0, \rho_0)$ であって,

$$\|T_\lambda x\| = \mu \big\|T_\lambda(\mu^{-1}x)\big\| \le 2\mu n_0 = 4\rho_0^{-1} n_0 \|x\|.$$

よって, $\sup_\lambda \|T_\lambda x\| \le 4\rho_0^{-1} n_0 < \infty$.

（証明おしまい）

この定理の系として, 有名なものにバナッハ・スタインハウスの定理がある.

定理 4.2.2: バナッハ・スタインハウスの定理

$\{T_n\}$ を $\mathscr{L}(X, Y)$ の列とする.
もし各 $x \in X$ に対して $\{T_n x\}$ が Y の中の収束列なら, 極限 $T_n x \to Tx$ が定まるが, このとき $T \in \mathscr{L}(X, Y)$ であって,

$$\|T\| \le \lim_{n\to\infty} \inf \|T_n\|$$

すなわち, 有界線形作用素の列 $\{T_n\}$ について, 各点に作用させたものが"点として"収束するなら, 作用素の"極限"が定まって, しかもこれが有界線形作用素になることを述べている.

証明

まず, $\gamma = \lim_{n\to\infty} \inf \|T_n\|$ とする. 一様有界性の原理から, $\sup_n \|T_n\| < \infty$ であるから $\gamma < \infty$.
下極限の定義から, 任意の $\epsilon > 0$ に対し

$$\|T_{n_k}\| \le \gamma + \epsilon$$

となる無限点列 $\{n_k\}$ が取れる. ノルムの連続性から $\|T_{n_k} x\| \to \|Tx\|$. $\|T_{n_k} x\| \le (\gamma + \epsilon)\|x\|$ より, $\|Tx\| \le (\gamma + \epsilon)\|x\|$. x は任意だから, T は有界作用素. さらに, $\epsilon > 0$ は任意だから $\|T\| \le \gamma$.

（証明おしまい）

いくつか有用な命題

命題 4.2.1

$T_n \in \mathscr{L}(X, Y)$ が次の仮定をみたすとする.

(1) $\|T_n\| \le M$.

(2) X の中の稠密な集合 D が存在して, $\forall x \in D$ について $\{T_n x\}$ が収束.

このとき, すべての $x \in X$ について $\{T_n x\}$ は収束列で, $T_n x \to Tx$ と

すれば $T \in \mathscr{L}(X,Y)$ であって, $\|T\| \leq \lim_{n\to\infty} \inf \|T_n\|$

証明

$x \in X$ を固定. D は稠密なので, $\|x-y\| < \epsilon/M$ となる $y \in D$ が存在する. 条件 (2) からある n_0 について

$$\|T_n y - T_m y\| < \epsilon \quad (n, m > n_0).$$

よって,

$$\begin{aligned}\|T_n x - T_m x\| &\leq \|T_n x - T_n y\| + \|T_n y - T_m y\| + \|T_m y - T_m x\| \\ &\leq (\|T_n\| + \|T_m\|)\|x-y\| + \|T_n y - T_m y\| \\ &< 3\epsilon\end{aligned}$$

であり, $\{T_n x\}$ は収束列. あとはバナッハ・スタインハウスの定理.

（証明おしまい）

命題 4.2.2

$T_n, T \in \mathscr{L}(X,Y), S_n, S \in \mathscr{L}(Y,Z)$ となる $\{T_n\}, \{S_n\}$ が $T_n x \to Tx (x \in X), S_n y \to Sy (y \in Y)$ を満たせば,

$$S_n T_n x \to STx$$

証明

一様有界性の原理から, $\{\|S_n\|\}$ は有界列 $\|S_n\| \leq M$.

$$\begin{aligned}\|S_n T_n x - STx\| &\leq \|S_n T_n x - S_n Tx\| + \|S_n Tx - STx\| \\ &\leq M\|T_n x - Tx\| + \|(S_n - S)(Tx)\|\end{aligned}$$

よって, $S_n T_n x \to STx$.

（証明おしまい）

例 4.2.1

全ての $\varphi \in L^2(\Omega)$ に対して $f \cdot \varphi$ が Ω 上可積分ならば, $f \in L^2(\Omega)$

証明

まず, $|f(t)|=\infty$ なる $t\in\Omega$ の全体は測度 0 であるということを示す.

$$\Omega_\infty=\{t\in\Omega||f(t)|=\infty\}$$
$$\Omega_{\infty,N}=\{t\in\Omega_\infty||t|<N\}$$
$$\varphi(t)=\begin{cases}1 & (t\in\Omega_{\infty,N})\\ 0 & (t\in\Omega\backslash\Omega_{\infty,N})\end{cases}$$

とおく. $\varphi\in L^2(\Omega)$ より, $f\cdot\varphi$ は Ω で可積分. よって,

$$\int_\Omega|f(t)||\varphi(t)|\mathrm{d}t=\int_{\Omega_{\infty,N}}|f(t)|\mathrm{d}t<\infty$$

である. $\Omega_{\infty,N}$ 上で $|f(t)|=\infty$ より, $\Omega_{\infty,N}$ は測度 0. N は任意だから, 測度の増加列連続性から $|\Omega|=0$. したがって, $|f(t)|=\infty$ となる t 全体の集合は測度 0.

さて, Ω_N を

$$\Omega_N=\{t\in\Omega||t|<N \text{ かつ } |f(t)|<N\}$$

とすると, これは Ω の可測部分集合で測度有限.

$$f_N(t)\begin{cases}f(t) & (t\in\Omega_N)\\ 0 & (t\in\Omega\backslash\Omega_N)\end{cases}$$

とおくと,

$$\int_\Omega|f_N(t)|^2\mathrm{d}t=\int_{\Omega_N}|f(t)|^2\mathrm{d}t\le N^2|\Omega_N|<\infty$$

より $f_N\in L^2(\Omega)$. そこで, 作用素 $T_N:L^2(\Omega)\to K(K$ は $\mathbb{C}$ または $R)$ を

$$T_Nx=\int_\Omega\overline{f_N(t)}x(t)\mathrm{d}t$$

と定めると, シュワルツの不等式から $|T_Nx|\le\|f_N\|\|x\|$ であり, $T_N\in\mathscr{L}(L^2(\Omega),K)$. さらに, $\varphi\in L^2(\Omega)$ に対して $f\cdot\varphi$ が Ω 上可積分と仮定したので,

$$|T_Nx|\le\int_\Omega|f_N(t)||x(t)|\mathrm{d}t\le\int_\Omega|f(t)||x(t)|\mathrm{d}t(\equiv M)<\infty$$

であり, 各 $x\in L^2(\Omega)$ に対して

$$\sup_N|T_Nx|<\infty.$$

よって, 一様有界性の原理から,

$$\sup_N \|T\| (\equiv M_0) < \infty.$$

作用素ノルムの定義から

$$\|f_N\|_{L^2} = \frac{|T_N f_N|}{\|f_N\|_{L^2}} \leq \|T_N\|$$

である.
$|\Omega_\infty| = 0$ なので $\Omega \backslash \Omega_\infty$ 上で

$$g(t) \equiv \lim_{N\to\infty} |f_N(t)|^2 < \infty \quad \text{a.e.}$$

が定まるが, 関数列 $\{|f_N|^2\}$ は非負かつ単調増加な列なので単調収束定理が使え, さらに $\sup_N \|f_N\|_{L^2} \leq M_0 < \infty$ から

$$\int_\Omega |g(t)| \mathrm{d}t = \lim_{N\to\infty} \int_\Omega |f_N|^2 \mathrm{d}t \leq \sup_N \|f_N\|_{L^2}^2 \leq M_0^2$$

よって, $g \in L^1(\Omega)$ かつ $\|g\|_{L^1} \leq M_0^2$.
$t \in \displaystyle\bigcup_{N=1}^{\infty} \Omega_N$ に対して, ある N_0 があって, $t \in \Omega_N \quad (N \geq N_0)$.$k > N$ ととれば $|f_k(t)| = |f(t)|$ であるから, $t \in \displaystyle\bigcup_{N=1}^{\infty} \Omega_N$ で $g(t) = |f(t)|^2$.
$\Omega = \Omega_\infty \cup \displaystyle\bigcup_{N=1}^{\infty} \Omega_N$ であり, $|\Omega_\infty| = 0$ なので, $g(t) = |f(t)|^2$ a.e.
したがって, $f \in L^2(\Omega)$ かつ $\|f\|_{L^2} \leq M_0$.

（証明おしまい）

例 4.2.2: 少なくとも 1 点でフーリエ級数が収束しない連続関数

$f \in C(-\infty, \infty)$ を周期 2π の周期関数とし, このような f の全体を $C_{2\pi}$ とする. $C_{2\pi}$ 上のノルムを $\|f\| = \max_t |f(t)|$ とすると, $C_{2\pi}$ はバナッハ空間.
このとき, f のフーリエ級数

$$\frac{1}{2}\alpha_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (\alpha_k \cos kt + \beta_k \sin kt)$$

が少なくとも 1 点で収束しない f が存在する. （ただし,

$$\alpha_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos kt \mathrm{d}t, \quad \beta_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin kt \mathrm{d}t$$

とおいた. ）

証明

$f \in C_{2\pi}$ に対して,

$$S_n(t;f) = \frac{1}{2}\alpha_0 + \sum_{k=1}^{n}(\alpha_k \cos kt + \beta_k \sin kt)$$

とおく．適当に f をとれば, $\{S_n(0;f)\}$ は収束しないことを示す．全ての $f \in C_{2\pi}$ に対して収束すると仮定して矛盾を導こう．

$T_n f = S_n(0;f)$ とおくと,

$$\begin{aligned} T_n f &= \frac{1}{2}\alpha_0 + \sum_{k=1}^{n}\alpha_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\left(\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n}\cos kt\right)\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)D_n(t)\mathrm{d}t \end{aligned}$$

ここで, $D_n = \dfrac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{2\sin\frac{t}{2}}$.

$$|T_n f| \leq \frac{1}{\pi}\|f\|\int_{-\pi}^{\pi}|D_n(t)|\mathrm{d}t$$

であるから, T_n は有界線形汎関数．よって,

$$\|T_n\| \leq \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|D_n(t)|\mathrm{d}t.$$

また, 仮定から任意の $f \in C_{2\pi}$ に対して $\{T_n f\}$ は収束するから, バナッハ・スタインハウスの定理から $\{\|T_n\|\}$ は有界であることがわかる．

他方, $\mathrm{sgn}(x)$ を $x > 0$ で 1, $x = 0$ で 0, $x < 0$ で -1 とおくと,

$$\int_{-\pi}^{\pi}\mathrm{sgn}(D_n(t))D_n(t)\mathrm{d}t = \int_{-\pi}^{\pi}|D_n(t)|\mathrm{d}t.$$

$\mathrm{sgn}(D_n(t))$ は

$$\pm\frac{2\pi}{2n+1}, \pm\frac{4\pi}{2n+1}, \cdots, \pm\frac{2n\pi}{2n+1}$$

を除いて $[-\pi,\pi]$ 上連続である．$\mathrm{sgn}(D_n(t))$ の不連続点のまわりで連続になるように修正し, 周期性によって定義域を $\mathbb{R}$ にしたものを f_n とすると,

$$\left|\int_{-\pi}^{\pi} f_n(t)D_n(t)\mathrm{d}t - \int_{-\pi}^{\pi}|D_n(t)|\mathrm{d}t\right| < \epsilon$$

が成立するようにできる．この $f_n \in C_{2\pi}$ は

$$|T_n(f_n)| = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|D_n(t)|\mathrm{d}t - \epsilon$$

を満たし, ゆえに,

$$\|T_n\| = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |D_n(t)|\mathrm{d}t.$$

次に, $2\sin(t/2) \le t \quad (t \in [0,\pi])$ であるから,

$$\begin{aligned}
\int_{-\pi}^{\pi} |D_n(t)|\mathrm{d}t &= 2\int_0^{\pi} |D_n(t)|\mathrm{d}t \\
&\ge 2\int_0^{\pi} \frac{\left|\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t\right|}{t}\mathrm{d}t = 2\int_0^{\pi/2} \frac{|\sin(2n+1)t|}{t}\mathrm{d}t \\
&\ge 2\sum_{k=0}^{n-1}\int_{k\pi/(2n+1)}^{(k+1)\pi/(2n+1)} \frac{|\sin(2n+1)t|}{t}\mathrm{d}t \\
&\ge 2\sum_{k=0}^{n-1}\frac{2n+1}{(k+1)\pi}\int_{k\pi/(2n+1)}^{(k+1)\pi/(2n+1)} \frac{|\sin(2n+1)t|}{t}\mathrm{d}t \\
&= 2\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{(k+1)\pi}\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{|\sin t|}{t}\mathrm{d}t = \frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{k+1}.
\end{aligned}$$

級数 $\sum \frac{1}{k+1}$ は発散するので, $n \to \infty$ で $\int_{-\pi}^{\pi} |D_n(t)|\mathrm{d}t \to \infty$. これは, $\{\|T_n\|\}$ が有界であることに矛盾. よって, 背理法から, $S_n(0;f)$ が収束しない f が存在.

（証明おしまい）

4.3 開写像の定理

定理 4.3.1: 開写像の定理

$T \in \mathscr{L}(X,Y)$ の値域 $R(T)$ が Y と一致しているとき, T は開写像.

補題 4.3.1

開写像の定理の仮定の下で, $T(B_X(0,1)) \supset B_Y(0,\eta)$ となる正数 η が存在する.

証明

まず, $\overline{T(B_X(0,1))} \supset B_Y(0,\rho)$ となる $\rho > 0$ の存在を示す.
明らかに

$$Y = \bigcup_{n=1}^{\infty} T(B_X(0,n)) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \overline{T(B_X(0,n))}$$

であるから, ベールのカテゴリ定理から,

$$\overline{T(B_X(0,n))} \supset B_Y(a,\delta)$$

となる $n, a \in Y, \delta > 0$ が存在する.
$y \in B_Y(0,\delta)$ をとる. $y = (y+a) - a$ と分けると, $y + a \in B_Y(a,\delta)$ であり, さらに $\overline{T(B_X(0,n))} \supset B_Y(a,\delta)$ だったので, $y_k \to y+a, y'_k \to a$ となる点列 $\{y_k\}, \{y'_k\}$ が $T(B_X(0,n))$ の中に存在. よって,

$$y_k - y'_k \in T(B_X(0,2n))$$

したがって, $y \in \overline{T(B_X(0,2n))}$. y は $B_Y(0,\delta)$ の中の任意の点だったから,

$$B_Y(0,\delta) \subset \overline{T(B_X(0,2n))}.$$

よって, T の線形性から $\rho = \delta/2n$ とすれば $B_Y(0,\rho) \subset \overline{T(B_X(0,1))}$.

さて, 任意の $y \in B_Y(0,\rho)$ に対して,

$$y = Tx$$

となる $x \in B_X(0,2)$ の存在を示そう. (そうすれば, $\eta = \rho/2$ とすればいいことがわかる.)
$\epsilon_k = 2^{-k}$ とおく. $B_Y(0,\epsilon_k\rho) \subset \overline{T(B_X(0,\epsilon_k))}$ に注意する. $y \in B_Y(0,\rho)$ より

$$x_0 \in B_X(0,1), \quad \|y - Tx_0\| < \epsilon_1\rho$$

となるような x_0 が存在する. ($p \in \overline{A}$ と p の任意の開近傍が A との交わることが同値だから.)
$y - Tx_0 \in B_Y(0,\epsilon_1\rho)$ より,

$$x_1 \in B_X(0,\epsilon_1), \quad \|y - Tx_0 - Tx_1\| < \epsilon_2\rho$$

となる x_1 が存在する. 以降, これを繰り返すことで,

$$x_k \in B_X(0,\epsilon_k), \quad \|y - Tx_0 - Tx_1 - \cdots - Tx_k\| < \epsilon_k\rho$$

が取れる. このようにして得た点列 $\{x_k\}$ について,

$$\left\|\sum_{j=k}^{m} x_j\right\| \leq \sum_{j=k}^{m} \|x_j\| \leq \sum_{j=k}^{m} \epsilon_j = \sum_{j=k}^{m} 2^{-j} \to 0 \quad (k, m \to \infty)$$

であるから, $\sum_{k=0}^{\infty} x_k$ は収束. この点を x とする. T は有界作用素なので連続で,

$$Tx = \sum_{k=0}^{\infty} Tx_k$$

また,

$$\|x\| < \|x_0\| + \sum_{k=1}^{\infty} \epsilon_k < 1 + 1 < 2$$

より, $x \in B_X(0, 2)$. x_k の定め方から,

$$y = \sum_{k=0}^{\infty} Tx_k = Tx$$

である.

（証明おしまい）

これより, 開写像の定理を示す.

証明

G を X の任意の開集合とし、$y_0 \in T(G)$ とする. つまり, $y_0 = Tx_0$ となる $x_0 \in G$ が存在する. G は開集合だから,

$$B(x_0, \delta) \subset G$$

となる $\delta > 0$ が存在する. 補題から $T(B_X(0,1)) \supset B_Y(0, \eta)$ となる η が存在. 任意の $y \in B_Y(y_0, \delta\eta)$ をとる. このとき, $y = y_0 + y'$ となる $y' \in B_Y(0, \delta\eta)$ が存在する. η の選び方から, $y' = Tx'$ となるような $x' \in B_X(0, \delta)$ が存在. よって, $x_0 + x' \in G$ であり, $y = T(x_0 + x') \in T(G)$. ゆえに $B_Y(y_0, \delta) \subset T(G)$ であり, $T(G)$ は開集合.

（証明おしまい）

これから導かれる重要な定理.

定理 4.3.2: 値域定理

$T \in \mathscr{L}(X, Y)$ が全単射でかつ $R(T) = Y$ ならば, $T^{-1} \in \mathscr{L}(Y, X)$.

証明

仮定より, T^{-1} は $Y \to X$ の線形作用素. 開写像の定理から T^{-1} は連続. よって, $T^{-1} \in \mathscr{L}(Y, X)$.

（証明おしまい）

定理 4.3.3: 閉グラフ定理

$T : X \to Y$ は閉作用素とする．もし $D(T) = X$ ならば, $T \in \mathscr{L}(X, Y)$.

証明

まず, $Z = \{(x, Tx) \in X \times Y | x \in X\}$ とする．この空間にノルム

$$\|(x, Tx)\|_Z = \|x\|_X + \|Tx\|_Y$$

を入れると, ノルム空間になる．T は閉作用素だったので, $X = D(T)$ は $\|x\| = \|x\|_X + \|Tx\|_Y$ というノルムで完備．これは, Z が先のノルムで完備であるということと同じである．すなわち Z はバナッハ空間. 次に, 作用素 $S : Z \to X$ を $S(x, Tx) = x$ と定める．これは有界線形作用素であり, $R(S) = X$．さらに Z の定め方から S は全単射．よって値域定理から S^{-1} は有界線形作用素で, ある定数 M により

$$\left\|S^{-1}x\right\| = \|(x, Tx)\|_Z \leq M\|x\|_X.$$

よって, $\|\cdot\|_Z$ の定義から,

$$\|Tx\|_Y \leq \|(x, Tx)\|_Z \leq M\|x\|_X.$$

であり, T は有界線形作用素.

（証明おしまい）

4.4 至る所微分不可能な連続関数

・ワイエルシュトラスによる構成: b は奇数, $a \in (0, 1)$ は $ab > 1 + \frac{3}{2}\pi$ を満たす数として,

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a^n \cos(b^n t), \quad (t \in [0, 1])$$

・高木貞治による構成（高木関数）: まず $t \in [0, 1]$ を 2 進数

$$t = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{2^n} \quad (c_n \in \{0, 1\})$$

で表し, s_n, s'_n を

$$s_n = \frac{c_n}{2^n} + \frac{c_{n+1}}{2^{n+1}} + \cdots, \quad s'_n = \frac{1}{2^{n-1}} - s_n$$

とおく. これに対し,

$$f(t)=\sum_{n=1}^{\infty} r_n, \quad (t\in[0,1])$$

ここで,

$$r_n=\begin{cases} s_n & (c_n=0) \\ s'_n & (c_n=1) \end{cases}$$

である. この f は $[0,1]$ 上連続で, かつ至る所微分不可能である.

・さて, これからベールのカテゴリ定理を用いて, 至る所微分不可能である連続関数が存在することを示す.

証明

$X=C[0,1]$ とおく. さらに, 適当に t をとると,

$$\sup_h \left|\frac{f(t+h)-f(t)}{h}\right| \le n \quad (-t\le h\le 1-t, h\ne 0)$$

が成立するような $f \in X$ の全体を X_n とおく. このとき, <u>各 n に対して $\overline{X}_n$ は開集合を含まない</u>ことが示されれば, ベールのカテゴリ定理(の対偶)から $X\ne\bigcup_{n=1}^{\infty}\overline{X}_n$ であり, $f\in X\setminus\bigcup_{n=1}^{\infty}X_n$ が存在することがわかる. この f は, 全ての n について $f\notin X_n$ であり, 任意の $t\in[0,1]$ に対して, 適当な h(t と n に依存) をとれば,

$$\left|\frac{f(t+h)-f(t)}{h}\right|>n.$$

t を固定すると, $f(t+h), f(t)$ は有界だから, $n\to\infty$ のとき $h\to 0$ のはずである. よって,

$$\lim_{h\to 0}\left|\frac{f(t+h)-f(t)}{h}\right|=\infty.$$

これは, どの t についても f が微分できないことを表している.
(下線部の証明)
まず X_n が閉集合であることを示す. $f_k(\in X_k)\to f$ が X の位相で成り立つとする. $f_k\in X_k$ より, 適当な $t_k\in[0,1]$ で

$$\left|\frac{f_k(t_k+h)-f_k(t_k)}{h}\right|\le n, \quad (-t_k\le 1-t_k, h\ne 0)$$

$[0,1]$ はコンパクトなので, $\{t_k\}$ は収束する部分列を持つ. これを改めて $\{t_k\}$ とかく. $t_k\to t_0$ とする.

$$\frac{f(t_0+h)-f(t_0)}{h}=\frac{f(t_0+h)-f(t_k+h)}{h}+\frac{f(t_k+h)-f_k(t_k+h)}{h}$$
$$+\frac{f_k(t_k+h)-f_k(t_k)}{h}+\frac{f_k(t_k)-f(t_k)}{h}+\frac{f(t_k)-f(t_0)}{h}$$

$\equiv I_1+I_2+I_3+I_4+I_5.$

h を固定. 任意の $\epsilon > 0$ に対し, $t_k \to t_0$ より, 十分大きな k で

$$|I_1| < \epsilon, |I_5| < \epsilon$$

とできる. $f_k \to f([0,1]$ 上一様収束) より, さらに大きな k で

$$\sup_t |f_k(t) - f(t)| < \epsilon$$

よって, $|I_2| < \epsilon, |I_4| < \epsilon$ とできる. そして, $f_k \in X_k$ より, $|I_3| \leq n$.
したがって,

$$\left| \frac{f(t_0 + h) - f(t_0)}{h} \right| \leq n + 4\epsilon$$

ϵ は任意だから,

$$\left| \frac{f(t_0 + h) - f(t_0)}{h} \right| \leq n.$$

よって $f \in X_n$ であり, X_n は閉集合.
$x \in X_n, \epsilon > 0$ を勝手に取る. $[0,1]$ を 2^N 等分し, その分点を $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_{2^N} = 1$ とする. つまり $t_k = k/2^N$. 各点 $(t_k, x(t_k))$ を線分でつないで区分的に線形な曲線 $x_N = x_N(t)$ を作る: 区間 $[t_k, t_{k+1}]$ において

$$x_N(t) = x(t_k) + 2^N(x(t_{k+1}) - x(t_k))(t - t_k).$$

$x \in C[0,1]$ より, コンパクト距離空間の間の連続写像は一様連続だから, x は一様連続. よって, 十分 N を大きくとれば,

$$\|x - x_N\| < \frac{\epsilon}{2}$$

とできる. さらにその部分区間 $[t_k, t_{k+1}]$ を $2m$ 等分しその分点を $t_{k,j} = t_k + \frac{j}{2m}(t_{k+1} - t_k)$ とおく. 点 $(t_k, x_N(t_k) \pm \frac{\epsilon}{2})$ と $(t_{k+1}, x_N(t_{k+1}) \pm \frac{\epsilon}{2})$ を結ぶ線分を $l_\pm$ とする. 直線 $t = t_{k,2j}$ と l_- との交点を P_j, 直線 $t_{k,2j+1}$ と l_+ との交点を Q_j とする. P_j と Q_j, Q_j と P_{j+1} とを結んでいき, のこぎりの歯状の折れ線を得る. これを各 k について構成し, 得られた $[0,1]$ 上での折れ線を $x_{N,m}(t)$ とする. 各折れ線の勾配は, $t \in [t_k, t_{k+1}]$ で

$$\pm\{2^N(x(t_{k+1}) - x(t_k)) + 2^{N+1}\epsilon m\}$$

そのうえ, $\|x_N - x_{N,m}\| \leq \epsilon/2$. よって, $\|x - x_{N,m}\| \leq \epsilon$. 一方で, m を十分大きくとれば, $x_{N,m}$ の勾配も大きくなり, $x_{N,m} \notin X_n$. よって, X_n のどんな点の近傍にも X_n に属さない点が存在している. つまり, $\overline{X}_n = X_n$ は開集合を含まない.

（証明おしまい）

5　線形汎関数とハーン・バナッハの定理

5.1　線形汎関数と共役空間

$X^* = (X, K)$: 有界線形汎関数の全体, これを共役空間という.
X がヒルベルト空間の場合, 有界線形汎関数はある点と内積をとることと同じになる. このことを述べるのがリースの定理.

定理 5.1.1: リースの表現定理

ヒルベルト空間 X 上の有界線形汎関数 f は, それに対して一意に定まる $y \in X$ があって

$$f(x) = (x, y)$$

と表せて, しかも

$$\|f\| = \|y\|_X$$

証明

$f = 0$ のときは $y = 0$. $f \neq 0$ とする. $N = \{x \in X | f(x) = 0\}$ とすると, N は和とスカラー倍で閉じており, f の連続性から $x_n (\in N) \to x$ とすると $f(x) = \lim f(x_n) = 0$ となって $x \in N$ なので N は閉部分空間. $N \neq X$ だから, 射影定理から

$$X = N \oplus N^{\perp}$$

と直交分解できる. $y_0 \neq 0 \in N^{\perp}$ を一つとると,

$f(y_0)x - f(x)y_0 \in N$, つまり, $(f(y_0)x - f(x)y_0, y_0) = f(y_0)(x, y_0) - f(x)\|y_0\|^2 = 0$

両辺を $\|y_0\|^2$ で割ると, $\alpha = \overline{f(y_0)}/\|y_0\|^2, y = \alpha y_0$ とおいて,

$$f(x) = (x, y).$$

$x \in X$ は任意なので, $f(x) = (x, y)$.
次に一意性を示す. $f(x) = (x, y) = (x, y')$ とすると, $(x, y - y') = 0$.
x は任意なので, $x = y - y'$ とおくことで, $y = y'$ がわかる.
さらに, $\|x\| = 1$ となる x を選ぶと, シュワルツの不等式から,

$$|f(x)| = |(x, y)| \leq \|x\|\|y\| = \|y\|$$

よって, 作用素ノルムの定義から $\|f\| \leq \|y\|$.
特に, $x = y/\|y\|$ を考えれば,

$$\|y\| = \frac{f(y)}{\|y\|} = f(x) \leq \sup_{\|x\|=1} |f(x)| = \|f\|$$

より, $\|f\| = \|y\|$

（証明おしまい）

これにより, X がヒルベルト空間の場合は X^* と X を同一視できる. たとえば, $L^2(0,1)^* = L^2(0,1)$.

一方, 一般のバナッハ空間に対してその共役空間を定めるのは難しい.

例 5.1.1: $(\mathbb{C}^N)^* = \mathbb{C}^N$

$\underline{(\mathbb{C}^N)^* = \mathbb{C}^N \text{ である.}}$ 実際, 任意の $\xi = (\xi_1, \cdots, \xi_N) \in C^N$ に対して,

$$f_\xi(\zeta) = \sum_{j=1}^{N} \xi_j \zeta_j \quad (\zeta \in \mathbb{C}^N)$$

とすると, 明らかに $f_\xi \in (\mathbb{C}^N)^*$ であり, シュワルツの不等式から,

$$|f_\xi(\zeta)| = (\bar{\xi}, \zeta) \leq |\xi||\zeta|$$

より, $\|f_\xi\| \leq |\xi|$. また, $\zeta = \bar{\xi}$ よおくと $f_\xi(\bar{\xi}) = |\xi|^2$ より,

$$\left| f_\xi \left(\frac{\bar{\xi}}{|\xi|} \right) \right| = |\xi| \leq \|f_\xi\|$$

よって, $\|f_\xi\| = |\xi|$.

一方, $f \in (\mathbb{C}^N)^*$ について, $e_j = (0, \cdots, 1, \cdots, 0)$($j$ 番目のみ 1) とおいて,

$$f(e_j) = \xi_j$$

と定めると, 任意の $\zeta = (\zeta_1, \cdots, \zeta_N)$ について, $\zeta = \zeta_1 e_1 + \cdots, \zeta_N e_N$ より,

$$f(\zeta) = \sum_{j=1}^{N} \zeta_j f(e_j) = \sum_{j=1}^{N} \zeta_j \xi_j = f_\xi(\zeta)$$

すなわち, ある ξ によって, $f = f_\xi$ と表せる. これにより, $(\mathbb{C}^N)^*$ と $\mathbb{C}^N$ の間にノルムが保存される同型対応 (ノルムを保存する線形同型) が存在する.

例 5.1.2: $(l^p)^* = l^q$

$1 \leq p < \infty$ とする. $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ とするとき, $(l^p)^* = l^q$ である.

(証明):

・$p \neq 1$ のとき, 任意の $x \in (\xi_k) \in l^q$ に対して,

$$f_x(y) = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k \eta_k \quad (y = (\eta_k) \in l^p)$$

と f_x を定める. (数え上げ測度における) ヘルダーの不等式から,

$$f_x(y) \leq \sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k||\eta_k| \leq \|x\|_{l^q}\|y\|_{l^p}$$

これより, f_x は l^p 上の有界線形汎関数で, $\|f_x\| \leq \|x\|_{l^q}$ である.
一方, $\xi_k = |\xi_k|e^{i\theta_k}$ と表し, η_k として,

$$\eta_k = |\xi_k|^{q-1}e^{-i\theta_k}$$

と定め, $y = (\eta_k)$ とすると, $\|y\|_{l^p} = (\sum |\xi_k|^{p(q-1)})^{1/p} = (\sum |\xi_k|^q)^{(q-1)/q} = \|x\|_{l^q}^{q-1}$ なので,

$$f_x(y) = \|x\|_{l^q}^q = \|x\|_{l^q}\|y\|_{l^p}$$

これより, $\|f_x\| \geq \|x\|_{l^q}$ であり, したがって, $\|f_x\| = \|x\|_{l^q}$.

逆に, $f \in (l^p)^*$ を任意にとる. 各 j に対して, $\zeta_k = \delta_{j,k}, y_j = (\zeta_k)$ とすると, 明らかに $y_j \in l^p$. これに対し, $\xi_j = f(y_j), x = (\xi_j)$ とおく. $\xi = |\xi_j|e^{i\theta_j}$ とおいて,

$$x^{(n)} = \sum_{j=1}^{n} |\xi_j|^{q-1}e^{-i\theta_j}y_j$$

とおくと,

$$f(x^{(n)}) = \sum_{j=1}^{n} |\xi_j|^{q-1}e^{-i\theta_j}f(y_j) = \sum_{j=1}^{n} |\xi_j|^q$$

他方,

$$|f(x^{(n)})| \leq \|f\|\left\|x^{(n)}\right\|_{l^p} = \|f\|\left(\sum_{j=1}^{n} |\xi_j|^{p(q-1)}\right)^{1/p} = \|f\|\left(\sum_{j=1}^{n} |\xi_j|^q\right)^{1/p}$$

よって,

$$\|f\| \geq \left(\sum_{j=1}^{n} |\xi_j|^q\right)^{1/q}$$

n は任意なので, $n \to \infty$ としても $\|f\|$ で上から抑えられる. よって, $x = (\xi_k) \in l^q$. 任意の $y \in l^q$ は $y = \sum_{j=1}^{\infty} \eta_j y_j$ とかけるので, f の連続性から,

$$f(y) = \sum_{j=1}^{\infty} \eta_j f(y_j) = \sum_{j=1}^{\infty} \eta_j \xi_j = f_x(y)$$

よって, f は f_x の形にかける.

・$p=1$ のとき, $q=\infty$ なので, $x=(\xi_k)\in l^\infty$.
ヘルダーの不等式は $(p,q)=(1,\infty)$ のときも適用できて, $\|f_x\|\le\|x\|_{l^q}$
一方で, l^∞ のノルムは $\sup_k|\xi_k|$ なので, $\epsilon>0$ に対して, $|\xi_j|\ge\|x\|_{l^\infty}-\epsilon$ となる j が存在. この j に対して $\eta_k=\delta_{j,k}$ とおくと, $y=(\eta_k)$ として

$$f_x(y)=\xi_j$$

よって,

$$\|x\|_{l^\infty}-\epsilon\le|\xi_j|=|f_x(y)|\le\|f_x\|\|y\|_l^1=\|f_x\|.$$

ϵ は任意なので, $\|x\|_{l^\infty}\le\|f_x\|$. これより, $\|f_x\|=\|x\|_{l^\infty}$.
逆に, $f\in(l^1)^*$ について, $p>1$ のときと同様に y_j と ξ_j を定めると,

$$|\xi_j|=|f(y_j)|\le\|f\|\|y_j\|_{l^1}=\|f\|$$

より $x=(\xi_j)$ について, $\|x\|_{l^\infty}=\sup_k|\xi_k|<\|f\|$. よって, $x\in l^\infty$. $y=(\eta_j)\in l^1$ に対し, $f(y)=f_x(y)$. かくして, 同型.

解答: 問 5.1: $(L^p(\Omega))^*=L^q(\Omega)$

Ω は $\mathbb{R}^n$ の開集合. $1\le p<\infty$ とすると, $(L^p(\Omega))^*$ と $L^q(\Omega)$ は同型. ここで, $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ である.

ルベーグ測度は σ 有限であるから, 非交差列 $\{A_n\}$ で

$$\Omega=\bigcup_{n=1}^\infty A_n,\quad |A_n|<\infty\ (n\in\mathbb{N})$$

となるものが存在することに注意しておく.
まず, $1<p<\infty$ について, ヘルダーの不等式 (およびその証明) から $u\in L^p(\Omega), v\in L^q(\Omega)$ について,

$$\left|\int_\Omega u(t)v(t)\mathrm{d}t\right|\le\int_\Omega|u(t)v(t)|\mathrm{d}t\le\|u\|_{L^p}\|v\|_{L^q}$$

である. また, $p=1$ の場合は $|v(t)|\le\|v\|_{L^\infty}$

$$\left|\int_\Omega u(t)v(t)\mathrm{d}t\right|\le\|v\|_{L^\infty}\int_\Omega|u(t)|\mathrm{d}t\le\|u\|_{L^1}\|v\|_{L^\infty}$$

よって, $1\le p<\infty$ で $u\cdot v\in L^1(\Omega)$ となる.

このようにして定まる

$$(u,v)=\int_\Omega u(t)v(t)\mathrm{d}t$$

が L^p の共役空間と L^q とを対応付けるものである．すなわち，$T\in L^p(\Omega)^*$ について，ある $v\in L^q(\Omega)$ で

$$T(u)=\int_\Omega u(t)v(t)\mathrm{d}t$$

となるようなものが存在する，というのが示す目標である．
ここで，もし上の形でかけたなら，ヘルダーの不等式を思い出せば，

$$\|T\|\leq\|v\|_{L^q}$$

であることが，ただちに言えることに注意しておく．

(Step 1) 単射性の証明

任意の $u\in L^p(\Omega)$ について $(u,v)=0$ ならば $v=0$ であることを言えばよい．つまり，任意の n についてほとんど至る所で $v(t)\chi_{A_n}(t)=0$ であることを言えばよい．任意の可測集合 E に対して $\chi_{E\cap A_n}\in L^p(\Omega)$ なので，仮定から

$$\int_E v(t)\chi_{A_n}(t)\mathrm{d}t=(\chi_{E\cap A_n},v)=0.$$

よって，$v(t)\chi_{A_n}(t)=0$ a.e. が成り立つ．

(Step 2) Ω の有界の場合の全射性とノルム保存性

任意の $T\in L^p(\Omega)^*$ を取る．$|\Omega|<\infty$ より任意の Ω の可測な部分集合 E について $\chi_E\in L^p(\Omega)$．よって，

$$\nu(E)\equiv T(\chi_E)$$

として測度 ν が定義できる．T の線形性から ν は有限加法的である．さらに，任意の増加列 $\{E_n\}$ に対し $E=\bigcup_{n=1}^\infty E_n$ とおくと，測度の単調増加性から，

$$|\nu(E)-\nu(E_n)|\leq\|T\|\|\chi_E-\chi_{E_n}\|_{L^p(\Omega)}=\|T\||E\backslash E_n|^{1/p}\to 0$$

なので，ν は複素数値測度．$|\nu(E)|\leq\|T\||E|^{1/p}$ であるから，ν はルベーグ測度について絶対連続．そこで，ν のルベーグ測度に関するラドン・ニコディム導関数 $g\in L^1(\Omega)$ とすると，ラドン・ニコディムの定理から，

$$T(\chi_E)=\nu(E)=\int_E g(t)\mathrm{d}t=(\chi_E,g)$$

(内積は $L^\infty(\Omega)$ と $L^1(\Omega)$ についてのもの) よって, 任意の可測単関数 $s:\Omega\to\mathbb{C}$ に対し,

$$T(s)=(s,g)\quad(s\in L^\infty(\Omega),g\in L^1(\Omega))$$

任意の $f\in L^\infty(\Omega)$ は適当な単関数列 (s_n) で $\|f-s_n\|_{L^\infty}\to 0$ となるものが存在. $|\Omega|<\infty$ より,

$$\int_\Omega |f(t)|^p\mathrm{d}t\le|\Omega|\|f\|_{L^\infty(\Omega)}<\infty$$

よって, $L^\infty(\Omega)\subset L^p(\Omega)$ であり,

$$\|f-s_n\|_p\le|\Omega|^{1/p}\|f-s_n\|_{L^\infty}\to 0$$

であるから, 一様収束なら極限と積分を交換できて,

$$T(f)=\lim_{n\to\infty}T(s_n)=\lim_{n\to\infty}(s_n,g)_{L^\infty,L^1}=(f,g)_{L^\infty,L^1}$$

ゆえに, $T(f)=(f,g)_{L^\infty,L^1}$.

さて, $g\in L^q(\Omega)$ であって, さらに $\|g\|_{L^q(\Omega)}\le\|T\|$ ということを示す.

$p=1,q=\infty$ のとき, 任意の可測集合 E について,

$$\left|\int_E g(t)\mathrm{d}t\right|=|T(\chi_E)|\le\|T\|\|\chi_E\|_{L^1}=\|T\||E|$$

であるから, 測度の全変動についての議論 (?) から,

$$\int_E|g(t)|\mathrm{d}t=|T(\chi_E)|\le\|T\|\|\chi_E\|_{L^1}=\|T\||E|$$

よって,

$$\int_E(|g(t)|-\|T\|)\mathrm{d}t\le 0$$

特に, $E=\{t\in\Omega|\|T\|<|g(t)|\}$ とおくと,

$$\int_{\{\|T\|<|g(t)|\}}(|g(t)|-\|T\|)\mathrm{d}t\le 0$$

集合の取り方から, $\{\|T\|<|g(t)|\}$ の測度は 0.

すなわち, ほとんど至る所で $|g(t)|\le\|T\|$ が成立. よって, ほとんど至る所で $\|g\|_{L^\infty(\Omega)}\le\|T\|<\infty$ であり, $g\in L^\infty(\Omega)$.

$1 < p < \infty$ のとき,

$$\omega(t) \equiv \begin{cases} \dfrac{|g(t)|}{g(t)} & (x \in \{|g| > 0\}) \\ 1 & (x \in \{|g| = 0\}) \end{cases}$$

として, 可測関数 $\omega : \Omega \to \mathbb{C}$ を定める. このとき, $\omega(t)g(t) = |g(t)|, |\omega(t)| = 1$. $E_n = \{|g| \leq n\}$ とおき, $f_n = \chi_{E_n}|g|^{q-1}\omega \in L^\infty(\Omega) \subset L^p(\Omega)$ とおくと,

$$f_n g = \chi_{E_n}|g|^q, \quad |f_n|^p = \chi_{E_n}|g|^{p(q-1)} = \chi_{E_n}|g|^q$$

である. よって,

$$\begin{aligned} \int_{E_n} |g(t)|^q \mathrm{d}t = \int_\Omega f_n(t)g(t)\mathrm{d}t = T(f_n) \\ \leq \|T\|\|f_n\|_{L^p} = \|T\|\left(\int_{E_n} |g|^q\right)^{1/p} \end{aligned}$$

したがって,

$$\left(\int_{E_n} |g|^q\right)^{1/q} \leq \|T\|$$

である. $\{E_n\}$ は単調増加列で, $\Omega = \bigcup_n E_n$ なので, $\{\chi_{E_n} g\}$ に対する単調収束定理から,

$$\left(\int_\Omega |g|^q\right)^{1/q} = \lim_{n\to\infty} \left(\int_{E_n} |g|^q\right)^{1/q} \leq \|T\|$$

が成り立つ. ゆえに, $g \in L^q(\Omega)$ かつ $\|g\|_{L^q} \leq \|T\|$

最後に, 任意の $f \in L^p(\Omega)$ を取ってきたときに, $\|g\|_{L^q} \geq \|T\|$ であることを示そう.

やはり, f に対して, 可測な単関数の列 (s_n) が存在して

$$\|f - s_n\|_{L^p} \to 0$$

である. 一様収束するなら極限と積分を交換できるから,

$$T(f) = \lim_{n\to\infty} (s_n, g)_{L^\infty, L^1} = \lim_{n\to\infty} (s_n, g)_{L^p, L^q} = (f, g)_{L^p, L^q}.$$

よって, $T = (\cdot, g)$. またこの形に書けるなら, $\|T\| \leq \|g\|_{L^q}$ であるので,

$$\|T\| = \|g\|_{L^q}$$

であって, この対応はノルムを保存する.

(Step 3) $|\Omega| = \infty$ の場合の全射性とノルム保存性

$$\omega(t) \equiv \sum_n \frac{1}{2^n(|A_n|+1)} \chi_{A_n}(t) \in (0,1)$$

とおき, 有限測度

$$\mu_\omega : E \mapsto \int_E \omega(t)\mathrm{d}t \in [0,1]$$

を定義する.

任意の $r \in [1,\infty]$ に対し, $f \in L^r(\Omega;\mu_\omega)$ を $f\omega^{1/r} \in L^r(\Omega)$ を考えると, s を単関数として,

$$\begin{aligned}
\int_\Omega |f(t)|^r \mathrm{d}\mu_\omega(t) &= \sup\left(\sum_{y=s(t)} y\mu_\omega(\{t|s(t)=y, s \le |f|^r\})\right) \\
&= \sup\left(\sum_{y=s(t)} y \int_{\{t|s(t)=y,s\le|f|^r\}} \omega(t)\mathrm{d}t\right) \\
&= \sup\left(\sum_{y=s(t)} y\left(\sum_{y'=s'(t)} y'|\{t|s(t)=y, s'(t)=y', s\le|f|^r, s'\le\omega\}|\right)\right) \\
&= \sup\left(\sum_{y=s(t),y'=s'(t)} yy'|\{t|s(t)=y, s'(t)=y', ss'\le|f|^r\omega\}|\right) \\
&= \int_\Omega |f(t)|^r\omega(t)\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

より, 対応はノルムを保存する.

よって, 任意の $T \in L^p(\Omega)^*$ に対し, $\tilde{T} \in L^p(\Omega;\mu_\omega)^*$ を,

$$\tilde{T}(f) = T(f\omega^{1/p}) \quad (f \in L^p(\Omega;\mu_\omega))$$

と定めれば, $\|T\| = \left\|\tilde{T}\right\|$.

また, (Step2) で有限測度の場合は示されているので, $L^p(\Omega;\mu_\omega)^* = L^q(\Omega;\mu_\omega)$ であり, $\tilde{f} \in L^p(\Omega;\mu_\omega)$ について

$$\tilde{T}(\tilde{f}) = \int_\Omega \tilde{f}(t)g(t)\omega^{-1/q}\mathrm{d}\mu_\omega(t), \quad \left\|\tilde{T}\right\| = \left\|g\omega^{-1/q}\right\|_{L^q(\Omega;\mu_\omega)}$$

となる $g\omega^{-1/q} \in L^q(\Omega;\mu_\omega)$ が存在する.

よって, $f \in L^p(\Omega)$ については, $1/p + 1/q = 1$ と $T(f) = \tilde{T}(f\omega^{-1/p})$ より,

$$T(f) = \int_\Omega f(t)g(t)\omega^{-1}(t)\mathrm{d}\mu_\omega(t) = \int_\Omega f(t)g(t)\mathrm{d}t$$

さらに, ノルムは保存されるから,

$$\|g\|_{L^q} = \left\|g\omega^{-1/q}\right\|_{L^q(\Omega;\mu_\omega)} = \left\|\tilde{T}\right\| = \|T\|$$

である.

以上から, T は $(\cdot, g)$ と書けて, しかもノルムは保存される.

（おしまい）

5.2 ハーン・バナッハの定理

ヒルベルト空間における正規直交系に対応するものとして, バナッハ空間には連続線形汎関数がある.

定理 5.2.1: ハーン・バナッハの定理

X: 実線形空間, $p(x)$: X 上の半ノルム, つまり

(i) スカラー倍: $p(\lambda x) = \lambda p(x) \quad (\lambda > 0, x \in X)$

(ii) 劣加法性: $p(x+y) \leq p(x) + p(y)$

を満たす実数値関数.
f: X の線形部分空間 L 上で定義された実数値線形汎関数で

$$f(x) \leq p(x)$$

を満たすもの.

このとき, X 全体で定義された実数値線形汎関数 F で

$$\begin{aligned} F(x) &= f(x) \quad (x \in L) \\ F(x) &\leq p(x) \quad (x \in X) \end{aligned}$$

を満たすものが存在する.

X がノルム空間の場合は, p はノルムである. すなわち, ハーン・バナッハの定理は, ノルム空間の一部で定まった線形汎関数で作用素ノルムが 1 以下のものは, X 全体に拡張することができるということを述べている.

証明

(Step 1) $L \neq X$ とする. $x_0 \in X \backslash L$ について

$$L_1 = \{y + tx_0 | y \in L, t \in \mathbb{R}\}$$

は X の実線形空間. また, L_1 の元は $x = y + tx_0$ と一意に表される. ($y+tx_0 = y'+t'x_0$ のとき, $t \neq t'$ なら $(t'-t)^{-1}(y-y') \in L$ かつ $x_0 \in X \backslash L$ より, 矛盾.)

f を L^1 に拡張する. $x \in L_1$ に対し,

$$F(x) = F(y + tx_0) \equiv f(y) + ct$$

と定める（c は任意に固定した定数.）この F の L_1 上での線形性を確かめる. $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2$ について,

$$\begin{aligned} F(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) &= f(\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2) + c(\alpha_1 t_1 + \alpha_2 t_2) \\ &= \alpha_1 f(y_1) + \alpha_2 f(y_2) + \alpha_1 ct_1 + \alpha_2 ct_2 \\ &= \alpha_1 F(x_1) + \alpha_2 F(x_2) \end{aligned}$$

よって, F は線形. さらに, 特に $x \in L$ なら $t = 0$ なので $F(x) = f(x) \quad (x \in L)$ となる.

次に, L_1 上で $F(x) \leq p(x)$ を示す.

c を適当にとれば,

$$\begin{cases} f(y) + c \leq p(y + x_0) & (y \in L) \\ f(y') - c \leq p(y' - x_0) & (y' \in L) \end{cases}$$

とできる. 実際,

$$f(y) + f(y') = f(y + y') \leq p(y + y') \leq p(y + x_0) + p(y' - x_0)$$

であるから,

$$f(y') - p(y' - x_0) \leq f(y) - p(y + x_0)$$

左辺の sup を β_1, 右辺の inf を β_2 とすれば,

$$\beta_1 \leq c \leq \beta_2$$

となる c が存在する. この c は条件を満たす.

これから, この c について $t > 0$ ならば,

$$\begin{aligned} F(x) = f(y) + tc &= t(f(t^{-1}y) + c) \\ &\leq tp(t^{-1}y + x_0) \\ &= p(y_0 + tx_0) = p(x) \end{aligned}$$

$t < 0$ ならば,

$$\begin{aligned} F(x) &= f(y) + tc = (-t)(f((-t)^{-1}y) - c) \\ &\leq (-t)p((-t)^{-1}y - x_0) \\ &= p(y_0 + tx_0) = p(x) \end{aligned}$$

$t = 0$ ならば $F(x) = f(y) \leq p(y) = p(x)$

これより, L_1 上で $F(x) \leq p(x)$ がわかる.

(Step 2) F を X 全体に拡張するのに, ツォルンの補題 (帰納的順序集合は極大元を持つ) を用いる.

g: 線形汎関数. g が定義された実部分空間を L_g とする. このような g の中で,

(i) $L \subset L_g$ かつ L 上で $g(x) = f(x)$.

(ii) $g(x) \leq p(x) \quad (x \in L_g)$

となるもの全体の集合を Φ とし, Φ に半順序 $\prec$ を導入する: $g \prec g'$ を

$$L_g \subset L_g' \text{かつ } g(x) = g'(x)(x \in L_g)$$

とする. これは半順序の性質を持つ. 集合 Φ 内の任意の全順序集合 $\{g_\alpha\}$ をとる.

g_α の定義域 L_α について,

$$L_0 = \bigcup_\alpha L_\alpha$$

とおくと, L_0 は部分空間. L_0 上の線形汎関数 g_0 を定める. $x \in L_0$ について, $x \in L_\alpha$ となる α が存在. この α について,

$$g_0(x) = g_\alpha(x)$$

と定める. これは α の取り方によらない. ($x \in L_\alpha \cap L_\beta$ のとき, $L_\alpha \subset L_\beta$（またはその逆）であり, いずれにしても小さい方の集合上で $g_\alpha(x) = g_\beta(x)$ であるから.)

g_0 は明らかに線形汎関数. また, 任意の $x \in L_0$ に対し, $x \in L_\alpha$ となる α が存在して

$$g_0(x) = g_\alpha(x) \leq p(x) \quad (x \in L_\alpha)$$

なので, $g_0(x) \leq p(x) \quad (x \in L_0)$ である．よって, $g_0 \in \Phi$ であり, 明らかに $g_\alpha \prec g_0$ なので, $\{g_\alpha\}$ は上限を持つ．したがって, Φ は帰納的順序集合であり, 極大元 F が存在する．この F は X 全体で定義されていなければならない (さもなくば, Step1 の手順により F の定義域を拡張できてしまい, $F \prec F'$ となる F' を作れてしまうので極大性に矛盾.)

以上から, 線形汎関数を定義域全体に拡張できることが言える.

（証明おしまい）

この定理のいくつかのバージョンを述べる.

定理 5.2.2: ハーン・バナッハの定理（複素型）

X: 複素線形空間, $p(x)$: X 上の半ノルム, つまり

(i) スカラー倍: $p(\lambda x) = |\lambda| p(x) \quad (\lambda > 0, x \in X)$

(ii) 劣加法性: $p(x+y) \leq p(x) + p(y)$

を満たす非負実数値関数.
f: X の線形部分空間 L 上で定義された複素数値線形汎関数で

$$|f(x)| \leq p(x)$$

を満たすもの.

このとき, X 全体で定義された複素数値線形汎関数 F で

$$F(x) = f(x) \quad (x \in L)$$
$$|F(x)| \leq p(x) \quad (x \in X)$$

を満たすものが存在する.

証明

$x \in L$ に対して, $f(x) = g(x) + ih(x)$ と分解. g, h は L を実空間と見たとき (つまり, $x = a + ib$ について x と (a, b) を対応させる) の実数値線形汎関数であって, L 上で $g(x) \leq p(x), h(x) \leq p(x)$. さらに, $f(ix) = if(x)$ なので,

$$h(x) = -g(ix)$$

つまり,

$$f(x) = g(x) - ig(ix)$$

である.

g に実数値におけるハーン・バナッハの定理を適用し, 定義域を X 全体に拡張した線形汎関数 G を得る. このとき, $G(x) \leq p(x)$ であり, $-G(x) = G(-x) \leq p(-x) = p(x)$ より $|G(x)| \leq p(x)$.
いま, F として

$$F(x) = G(x) - iG(ix)$$

とおく. $x \in L$ で $G(x) = g(x)$ より, $F(x) = g(x) - ig(ix) = f(x)$. また, $x_1, x_2 \in X, a \in \mathbb{R}$ について $F(x_1 + x_2) = F(x_1) + F(x_2), F(ax) = aF(x)$ は明らか.

$$F(ix) = G(ix) - iG(-x) = i(G(x) - iG(ix)) = iF(x)$$

なので $\alpha \in \mathbb{C}$ について $F(\alpha x) = \alpha F(x)$ が言える. よって, F は線形である.
あとはノルムについての不等式を示せばよいが, $x \in X$ に対して $F(x) = re^{i\theta}$ とすると, $e^{-i\theta}F(x)$ は実数であり, $e^{-i\theta}F(x) = F(e^{-i\theta}x) = G(e^{-i\theta}x)$. よって,

$$\begin{aligned} |F(x)| &= |e^{-i\theta}F(x)| = |F(e^{-i\theta}x)| = |G(e^{-i\theta}x)| \\ &\leq p(e^{-i\theta}x) = |e^{-i\theta}|p(x) = p(x) \end{aligned}$$

これで定理が証明された.

（証明おしまい）

定理 5.2.3: ハーン・バナッハの定理（実ノルム空間）

X: 実ノルム空間.
f: X の線形部分空間 L 上で定義された実数値連続線形汎関数.
このとき, X 上で定義された連続線形汎関数 F で

(i) $F(x) = f(x) \quad (x \in L)$

(ii) $\|F\|_X = \|f\|_L$

を満たすものが存在する.

ここで, f が L 上で連続とは, $x_n, x \in L, x_n \to x$ ならば $f(x_n) \to f(x)$ で

あることを言い, このとき

$$\|f\|_L \equiv \sup_{x\in L, \|x\|\le 1} |f(x)| < \infty$$

である.

(実際, もし $\|f\|_L = \infty$ であれば, 任意の $M > 0$ に対して $\|x\| \le 1$ かつ $|f(x)| > M$ となる $x \in L$ が存在する. $M = 2^n$ として, そのような x を x_n と取ると, $y_n = x_n/2^{n-1}$ について $\|y_n\| \le 1/2^{n-1}$ かつ $|f(y_n)| > 2$. よって, $y_n \to 0$ かつ任意の n で $|f(y_n)| > 2$. これは $f(y_n) \to f(0) = 0$ に矛盾する.)

証明

$x \in X$ に対して $p(x) = \|f\|_L\|x\|$ とおく. これはノルムの定数倍なので明らかに半ノルムであり, さらに $x \in L$ で

$$f(x) \le |f(x)| = \left|f\left(\frac{x}{\|x\|}\right)\right|\|x\| \le \|x\|\left(\sup_{x\in L,\|x\|\le 1}|f(x)|\right) = \|f\|_L\|x\| = p(x)$$

これから, ハーン・バナッハの定理から,

$$F(x) = f(x) \quad (x \in L), \quad F(x) \le p(x) \quad (x \in X)$$

を満たす線形汎関数 F が存在. $p(x) = \|f\|_L\|x\|$ より

$$F(x) \le \|f\|_L\|x\|$$

x を $-x$ とすると, $-F(x) = F(-x) \le \|f\|_L\|x\|$ なので,

$$|F(x)| \le \|f\|_L\|x\|$$

これより, $\|F\|_X \le \|f\|$ であり, F は有界なので連続.
一方で, $x \in L$ で $f(x) = F(x)$ なので,

$$|f(x)| = |F(x)| \le \|F\|_X\|x\|$$

よって, $\|f\|_L \le \|F\|_X$.
ゆえに,

$$\|f\|_L = \|F\|_X.$$

（証明おしまい）

定理 5.2.4: ハーン・バナッハの定理（複素ノルム空間）

X: 複素ノルム空間.
f: X の線形部分空間 L 上で定義された実数値連続線形汎関数.
このとき, X 上で定義された連続線形汎関数 F で

(i) $F(x) = f(x) \quad (x \in L)$

(ii) $\|F\|_X = \|f\|_L$

を満たすものが存在する.

証明

$p(x) = \|f\|_L \|x\|$ とおいて, 複素型のハーン・バナッハの定理を適用すればよい.

（証明おしまい）

定理 5.2.5

X: ノルム空間.
任意の $x_0 \neq 0 \in X$ に対して,

$$f_0(x_0) = \|x_0\|, \quad \|f_0\| = 1$$

を満たす連続線形汎関数 f_0 が存在.

証明

$L = \{x = tx_0 | t \in \mathbb{R}\}$ とする. L は部分空間である.
L 上の汎関数 f を

$$f(x) = f(tx_0) \equiv t\|x_0\|$$

と定めると, f は L 上で線形かつ連続. 特に,

$$|f(x)| = |t|\|x_0\| = \|x\|$$

なので $\|f\|_L = 1$.
（複素）ノルム空間でのハーン・バナッハの定理からこの f の定義域を X に拡張した連続線形汎関数 f_0 が存在し,

$$\|f_0\|_X = \|f\|_L = 1, \quad f_0(x_0) = f(x_0) = \|x_0\|.$$

（証明おしまい）

定理 5.2.5 を $\mathbb{R}^n$ 上で考える. $\mathbb{R}^n$ 上の連続線形汎関数 f に対し, リースの定理から,

$$f(x) = (\xi, x) = \sum_{k=1}^{n} \xi_k x_k$$

となる $\xi = (\xi_k) \in \mathbb{R}^n$ が存在する. よって, 連続線形汎関数と $\mathbb{R}^n$ の超平面

の族

$$\{x|\sum_{k=1}^{n}\xi_k x_k = (const)\}$$

は 1 対 1 に対応する．定理 5.2.5 は $\mathbb{R}^n$ 上の任意の点 $x^0 = (x_k^0)$ に対して，

$$\sum_{k=1}^{n}\xi_k^0 x_k^0 = \|x^0\|, \quad \|\xi^0\| = 1$$

となる平面，すなわち x_0 を通り法線が ξ^0 な平面:

$$\{x|\sum_{k=1}^{n}\xi_k^0 x_k = \|x^0\|\}$$

の存在を意味する．これは極平面を意味している．

定理 5.2.6

X: ノルム空間. L: 部分空間
$x_0 \in X\backslash L$ に対して，

$$d \equiv \inf_{y\in L}\|x_0 - y\| > 0$$

と仮定する．
このとき，

$$f_0(x) = 0 \quad (x \in L), \quad f_0(x_0) = 1, \quad \|f_0\| \leq \frac{1}{d}$$

を満たす連続線形汎関数 f_0 が存在する．

証明

部分空間 $L_1 = \{y + tx_0|y \in L, t \in \mathbb{R}\}$ 上での線形汎関数 $f(x) = f(y + tx_0) \equiv t$ を考える．$x \in L$ ならば $f(x) = 0$．$t \neq 0$ ならば $f(x) \neq 0$ であり $x = y + tx_0 \neq 0$ より

$$|f(x)| = |t| = \frac{|t|\|x\|}{\|y + tx_0\|} = \frac{\|x\|}{\|x_0 - (-y)/t\|} \leq \frac{1}{d}\|x\|$$

よって，$\|f\|_L \leq \frac{1}{d}$．
この f についてノルム空間でのハーン・バナッハの定理から X 全体で定義された f_0 に拡張できる．この際，ノルムは保存されるから f_0 は求める連続線形汎関数である．

（証明おしまい）

例 5.2.1: l^p

$x_0 = (\xi_k^0) \in l^p (1 \le p < \infty)$ とする．このとき，$f(x_0) = \|x_0\|_{l^p}$ かつ $\|f\| = 1$ となる連続線形汎関数 f を求めよう．

$(l^p)^* = l^q$ より，$f \in l^q$ と考えてよい．$\xi_k^0 = 0$ のとき $\eta = 0$, $\xi_k^0 \neq 0$ のとき $\eta_k = \overline{\xi_k^0} |\xi_k^0|^{p-2}$ とおくと，

$$\xi_k^0 \eta_k = |\xi_k^0|^p, \quad |\eta_k|^q = |\xi_k^0|^p$$

よって，$y \equiv (\eta_k) \in l^q$ で，$\|y\|_{l^q} = \|x_0\|_{l^p}^{p/q}$.
$f(x) = \sum \xi_k \eta_k / \|x_0\|_{l^p}^{p-1}$ とおくと，f は l^p 上の連続線形汎関数であって，ヘルダーの不等式から

$$|f(x)| \le \|x\|_{l^p} \|y\|_{l^q} / \|x_0\|_{l^p}^{p-1} = \|x\|_{l^p} \|x_0\|_{l^p}^{p/q+1-p} = \|x\|_{l^p}$$

よって，$\|f\| \le 1$.
一方で,$x = x_0$ とすれば，

$$f(x_0) = \sum \xi_k^0 \eta_k / \|x_0\|_{l^p}^{p-1} = \|x_0\|_{l^p}^p / \|x_0\|_{l^p}^{p-1} = \|x_0\|_{l^p}$$

なので，$\|f\| \ge 1$.
以上から $\|f\| = 1$.
これより，求める汎関数は $f(x) = \sum \xi_k \eta_k / \|x_0\|_{l^p}^{p-1}$.

解答: 問 5.3: $L^p(\Omega)$

$x_0 \in L^p(\Omega)$ について，

$$f(x_0) = \|x_0\|_{L^p}, \quad \|f\| = 1$$

となる $L^p(\Omega)$ 上の連続線形汎関数 f は?

適当な $y \in L^q(\Omega)$ に対して，

$$f(x) = \int_\Omega y(t) x(t) \mathrm{d}t$$

と見てよい．特に，今回は $|x_0(t)|^{p-2} \overline{x_0(t)} \in L^q(\Omega)$ より，

$$f(x) = \frac{1}{\|x_0\|_{L^p}^{p-1}} \int_\Omega |x_0(t)|^{p-2} \overline{x_0(t)} x(t) \mathrm{d}t$$

とおけばよい．証明は l^p のやり方とほとんど同じ．

（おしまい）

5.3　分離定理

X の集合 C が原点を頂点に持つ錐とは, $x \in C$ ならば $\lambda > 0$ について $\lambda x \in C$ であること. y を頂点に持つ錐は, $x - y \in C$ なら $\lambda(x-y) \in C$ であること.

K_1, K_2 が連続線形汎関数 $f(\neq 0)$ で分離されているとは, ある実数 c が存在して $x \in K_1$ なら $\mathrm{Re} f(x) \leq c$, $x \in K_2$ なら $\mathrm{Re} f(x) \geq c$ となること.

定理 5.3.1: 分離定理

K_1, K_2: ノルム空間 X の凸集合.
K_1 は少なくとも 1 つの内点を持ち, K_2 は K_1 の内点を 1 つも持たないとする.
このとき, K_1 と K_2 を分離する 0 でない連続線形汎関数 F が存在.

証明の準備として, 0 を内点として持つ凸集合 K に対して, X 上の関数 $p_K(x)$ を

$$p_K(x) = \inf_{\lambda} \lambda \quad (\lambda^{-1} x \in K)$$

と定義する (K のサポート関数 (ミンコフスキー汎関数))

この関数は次の性質を持つ:

(i) $0 \leq p(x) < \infty$

(ii) $p(\lambda x) = \lambda p(x), \quad \lambda \geq 0$

(iii) $p(x+y) \leq p(x) + p(y)$

(iv) $x \in K$ ならば $p(x) \leq 1$

(v) x が K の内点 $\Leftrightarrow p(x) < 1$

(vi) K の境界点は $p(x) = 1$ となる点と一致する.

(vii) $p(x) \leq M\|x\|$ (M は定数)

以下で性質を確認しておく. (読みとばしてよい).

. . . .

(iii) を確認する. $\lambda^{-1}x, \mu^{-1}y \in K$ とする. K は凸集合だから

$$\frac{x+y}{\lambda+\mu} = \frac{\lambda}{\lambda+\mu}\lambda^{-1}x + \frac{\mu}{\lambda+\mu}\mu^{-1}y \in K$$

よって, $p(x+y) \leq \lambda+\mu$ であり, λ と μ の加減を取れば, $p(x+y) \leq p(x)+p(y)$.

(v) を確認する. $0 \in K$ なので, 凸性から x が内点ならば $p(x) < 1$ は明らか.　$p(x) < 1$ とする. $0 < \lambda < 1$ かつ $\lambda^{-1}x \in K$. 0 は K の内点なので, $\|z\| < \delta$ なら $z \in K$ となる δ が存在. よって, 凸性から

$$(1-\lambda)z + \lambda(\lambda^{-1}x) \in K$$

$z = (1-\lambda)^{-1}y$ と取れば, $\|y\| < (1-\lambda)\delta$ ならば $y + x \in K$. これは, $B(x;(1-\lambda)\delta) \subset K$ であることを示している. よって x は内点である.

(vi) を確認する. 同様に, x が K の外点ならば明らかに $p(x) > 1$ である. また逆に $p(x) > 1$ のとき, もし x が K の外点でなければ, 任意の $\epsilon > 0$ について $x' \in B(x;\epsilon) \cap K$, つまり $\|x' - x\| < \epsilon$ となる x' が存在. 一方で, $p(x) > 1$ より $\lambda^{-1}x \in K, \mu^{-1}x \notin K$ となる $0 < \lambda^{-1} < \mu^{-1} < 1$ が存在する. $t \in \mathbb{R}$ に対して, x' と $\mu^{-1}x$ を通る直線（線分ではない）$\{y = tx' + (1-t)\mu^{-1}x | t \in \mathbb{R}\}$ 上の点と原点との距離は, 各 t について,

$$\left\|tx' + (1-t)\mu^{-1}x\right\| \le |t|\|x' - x\| + \left\|tx + (1-t)\mu^{-1}x\right\| < |t|\epsilon + |\mu^{-1} + t(1-\mu^{-1})|\|x\|$$

特に, $t = -\frac{\mu^{-1}}{1-\mu^{-1}} = \frac{1}{1-\mu}$ では, $\left\|-\frac{1}{\mu-1}x' + \frac{\mu}{\mu-1}(\mu^{-1}x)\right\| < \frac{1}{\mu-1}\epsilon$ である.

ところで, 0 は K の内点なので, ある $\delta > 0$ が存在して $\{\|z\| < \delta\} \subset K$ となる. ϵ は任意だったから, 特に $\epsilon = (\mu-1)\delta$ とおけば, $-\frac{1}{\mu-1}x' + \frac{\mu}{\mu-1}(\mu^{-1}x) \in K$ であることがわかる.

K の凸性から, $0 \le s \le 1$ について $(1-s)x' + s(-\frac{1}{\mu-1}x' + \frac{\mu}{\mu-1}(\mu^{-1}x)) \in K$. 特に, $1 < \mu$ より $0 \le \frac{\mu-1}{\mu} \le 1$ より $s = \frac{\mu-1}{\mu}$ と選べば, $\mu^{-1}x \in K$ が言える. これは, μ の定め方から矛盾. 背理法から, x は K の外点.

これと (v) から, K の境界点が $p(x) = 1$ となる点と一致することがわかる.

(vii) を確認する. 0 は内点だから, ある M が存在して $\{\|z\| < M^{-1}\} \subset K$ であり, (iv) より $p(z) \le 1$. 任意の $x \in X$ について, $\frac{x}{M\|x\|} \in \{\|z\| \le M^{-1}\}$ なので, (ii) から

$$\frac{1}{M\|x\|}p(x) = p(\frac{x}{M\|x\|}) \le 1. \quad \therefore p(x) \le M\|x\|.$$

....

さて, 分離定理の証明に入ろう.

証明

K_1 の内点を原点としても一般性を失わない.

$x_0 \in K_2$ を任意にとり,

$$K = \{x = x_0 + x_1 - x_2 | x_1 \in K_1, x_2 \in K_2\}$$

と K を定める.

このとき, 以下の性質が満たされる.

(a) K は凸集合.

(b) 原点は K の内点.

(c) x_0 は K の内点ではない.

....

(性質の証明)

(a) $x, y \in K$ とする. $x = x_0 + x_1 - x_2, y = x_0 + y_1 - y_2$ と書けるので, $0 \leq \lambda \leq 1$ に対して,

$$\lambda x + (1-\lambda)y = x_0 + (\lambda x_1 + (1-\lambda)y_1) - (\lambda x_2 + (1-\lambda)y_2)$$

となる. K_1, K_2 は凸集合なので, $\lambda x_1 + (1-\lambda)y_1 \in K_1, \lambda x_2 + (1-\lambda)y_2 \in K_2$. よって, K は凸集合.

(b) 0 は K_1 の内点なので, ある $\delta > 0$ が存在して $\{\|z\| < \delta\} \subset K_1$. この中の任意の z について,

$$z = x_0 + z - x_0 \in K$$

であり, $z \in K$. よって 0 は K の内点.

(c) x_0 は K の内点とすると, $\|z\| < \delta'$ について $x_0 + z \subset K$ となる $\delta' > 0$ が存在する. よって,

$$x_0 + z = x_0 + x_1 - x_2. \quad \therefore z = x_1 - x_2$$

となる $x_1 \in K_1, x_2 \in K_2$ が存在.

ここで, 任意の $y \in K_2$ について, 十分小さい $\lambda > 0$ について $\lambda\|y\| < \delta'$ とできるから,

$$\lambda y = x_1 - x_2$$

とできる. よって, $x_1 = \lambda y + x_2 \in K_2$ で, 特に,

$$\frac{\lambda}{\lambda+1}y + \frac{1}{\lambda+1}x_2 = \frac{1}{\lambda+1}x_1$$

について, $\frac{1}{\lambda+1}x_1 \in K_1 \cap K_2$.

さて, 0 は K_1 の内点なので, $\|z\| < \delta$ なら $z \in K_1$ となる δ が存在. $z = \frac{\lambda+1}{\lambda}y'$ とおく. つまり, $\|y'\| < \frac{\lambda}{\lambda+1}\delta$ とすると, $\|z\| < \delta$ となる. $z, x_1 \in K_1$ より, 凸性から, $\|z\| < \delta$ のとき,

$$\frac{\lambda}{\lambda+1}z + \frac{1}{\lambda+1}x_1 \in K_1$$

特に, $z = \frac{\lambda+1}{\lambda}y'$ より $y' + \frac{1}{\lambda+1}x_1 \in K_1$. これは, $\frac{1}{\lambda+1}$ が K_1 の内点であることを示しているが, K_2 の仮定より矛盾. よって, 0 は K_1 の内点ではない.

....

さて, K の性質 (a), (b) から K のサポート関数 $p(x)$ を構成できる. (c) から, $p(x_0) \geq 1$. さらに, $L = \{y | y = \lambda x_0, \lambda \in \mathbb{R}\}$ とおき, L 上の汎関数 f を $f(y) = f(\lambda x_0) = \lambda p(x_0)$ とおく. サポート関数の性質から f は明らかに連続線形汎関数で, さらに $\lambda > 0$ のとき $f(y) = \lambda p(x_0) = p(\lambda x_0) = p(y)$, $\lambda = 0$ のとき, $f(0) = 0 \leq p(0)$, $\lambda < 0$ のとき, $f(y) = \lambda p(x_0) < 0 \leq p(y)$. よって,

$$f(y) \leq p(y)$$

であり, 実線形空間のハーン・バナッハの定理が使え,

$$F_1(x) = f(x) \quad (x \in L), \quad F_1(x) \leq p(x) \quad (x \in X)$$

となる X 上の線形汎関数 F_1 が存在する. 特に, (vii) より F_1 は連続. X が実ノルム空間の場合は, $F = F_1$ とすればよいし, 複素ノルム空間のときは $F(x) = F_1(x) - iF_1(ix)$ とすればよい.
この関数が K_1 と K_2 を分離することを示そう.
$x \in K$ に対して, (iv) より,

$$\mathrm{Re}F(x) = F_1(x) \leq p(x) \leq 1.$$

また, $F_1(x_0) = p(x_0) \geq 1$. よって, $x \in K$ のとき,

$$\mathrm{Re}F(x) = F_1(x) \leq F_1(x_0)$$

$x = x_0 + x_1 - x_2$ なので,

$$\mathrm{Re}F(x) = F_1(x_0) + \mathrm{Re}F(x_1) - \mathrm{Re}F(x_2)$$

よって, 任意の $x_1 \in K_1, x_2 \in K_2$ について,

$$\mathrm{Re}F(x_1) \leq \mathrm{Re}F(x_2)$$

が成り立つ. したがって, $\sup_{x_1 \in K_1} F(x_1) \leq c \leq \inf_{x_2 \in K_2} F(x_2)$ となる c を取ることができ, この c について F によって K_1, K_2 は分離できる.

（証明おしまい）

5.4　第 2 共役空間

バナッハ空間 X の共役空間 X^* はバナッハなので, さらにその共役空間 X^{**} を考えることができる.

定理 5.4.1

ノルム空間 X はバナッハ空間 X^{**} の部分空間として同型である. すなわち, 単射かつ $\|J\| = 1$ となる有界線形作用素 $J : X \to X^{**}$ が存在.

証明

任意の $x \in X$ に対し, $g_x \in X^{**}$ を

$$g_x(f) = f(x) \quad (f \in X^*)$$

と定める. これは明らかに X^* 上の線形汎関数であり,

$$|g_x(f)| = |f(x)| \le \|f\|\|x\|$$

であるから, 連続であって, $\|g_x\| \le \|x\|$.
よって, $J : x \mapsto g_x$ とすると, $\|Jx\| = \|g_x\| \le \|x\|$ となって, 有界線形作用素. 特に, $\|J\| \le 1$.
一方で, 定理 5.2.5 から, 各 $x \in X$ に対して $\|f_0\| = 1, f_0(x) = \|x\|$ となる連続線形汎関数 f_0 が存在. よって,

$$g_x(f_0) = f_0(x) = \|x\|, |g_x(f)| \le \|g_x\|\|f_0\| = \|g_x\|$$

であり, $\|x\| \le \|g_x\|$.
したがって, $\|Jx\| = \|g_x\| = \|x\|, \|J\| = 1$.
また, $Jx = 0$ が成り立つとき, $\|Jx\| = \|x\| = 0$ より $x = 0$ となる. これより, J が単射であることがわかる.

（証明おしまい）

$X = X^{**}$ のとき, X を反射的バナッハ空間という. $L^p(\Omega)^* = L^q(\Omega), L^q(\Omega)^* = L^p(\Omega)$ より $L^p(\Omega)$ は反射的バナッハ空間.

5.5　弱収束

点列 $\{x_n\}$ がある点 x に収束, つまり $x_n \to x$ となるとき, 任意の連続線形汎関数 $f \in X^*$ に対して

$$f(x_n) \to f(x)$$

であった.

逆に, 点列 $\{x_n\}$ が任意の連続線形汎関数 $f \in X^*$ に対して

$$f(x_n) \to f(x)$$

を満たすとする. このとき, x_n は x に弱収束するという. これを,

$$x_n \to x \text{ (weakly) とか } \lim_{n\to\infty} x_n = x \text{ (weakly)}$$

と書くことにする. 普通の極限を強極限と呼ぶこともある.

弱極限は, 存在すれば一意. (定理 5.2.5 から, $f_0(x-x') = \|x - x'\|, \|f_0\| = 1$ となる $f_0 \in X^*$ が存在することから.)

強収束ならば弱収束だが, その逆は一般には成り立たない.

例 5.5.1: l^2 の場合

$X = l^2$ とする. 任意の $f \in X^*$ に対し,

$$f(x) = \sum_{j=1}^{\infty} \eta_j \xi_j \quad (x = (\xi_j) \in l^2)$$

となる $y = (\eta_j) \in l^2$ が存在.
ここで, $x_n = (\delta_{n,j})$ とする (第 n 成分のみ 1 の点). このとき,

$$f(x_n) = \eta_n \to 0 \quad (n \to \infty)$$

なので, $x_n \to 0$ (weakly). しかし, $\|x_n - x_m\| = \sqrt{2}$ なので $\{x_n\}$ は強収束列ではない.

弱収束のいくつかの性質:

定理 5.5.1

点列 $\{x_n\}$ は x に弱収束しているとする. このとき, そのノルムの実数列 $\{\|x_n\|\}$ は有界列で,

$$\|x\| \leq \lim_{n\to\infty} \inf \|x_n\| \tag{5.1}$$

が成立.

証明

任意の $f \in X^*$ に対して, $T_n \in X^{**}$ を

$$T_n(f) = f(x_n)$$

で定める. 弱収束性から $\{T_n(f)\}$ は収束列であり,

$$Tf = f(x) = \lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} T_n f.$$

いま, 定理 5.4.1 において $Jx_n = T_n, Jx = T$ であったから $\|T_n\| = \|x_n\|, \|T\| = \|x\|$ であり, さらにすべての $f \in X^*$ で $|T_n(f)| = |f(x_n)| < \infty$($f$ は連続であるがゆえに有界) なので, 一様有界性の原理から $\sup_n \|T_n\| = \sup_n \|x_n\| < \infty$. バナッハ・スタインハウスの定理から, $\|T\| \leq \lim_{n\to\infty} \inf \|T_n\|$.

$$\|x\| = \|T\| \leq \lim_{n\to\infty} \inf \|T_n\| = \lim_{n\to\infty} \inf \|x_n\|$$

となり, (5.1) の成立がわかる.

（証明おしまい）

弱収束列が強収束する条件を知りたい.

定理 5.5.2

X: ヒルベルト空間. 点列 $\{x_n\}$ が弱収束し, さらにノルムも収束する ($\|x_n\| \to \|x\|$) とき, $\{x_n\}$ は x に強収束.

証明

$$\|x_n - x\|^2 = \|x_n\|^2 + \|x\|^2 - 2\mathrm{Re}(x_n, x)$$

となるが, $\mathrm{Re}(\cdot, x)$ はシュワルツの不等式から連続線形汎関数であることがわかるから, 弱収束という仮定から $\mathrm{Re}(x_n, x) \to \mathrm{Re}(x, x) = \|x\|^2$. また, 仮定から $\|x_n\| \to \|x\|$. よって, 右辺は 0 に収束し, これから $\{x_n\}$ は x に強収束.

（証明おしまい）

X の点列 $\{x_n\}$ に対し,

$$S_n = \left\{ \sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k | \lambda_k \geq 0, \sum_{k=1}^{n} \lambda_k = 1 \right\}$$

とおくと, S_n は凸集合. (なぜなら, $\mu \in [0,1]$ について

$$(1-\mu)\sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k + \mu \sum_{k=1}^{n} \lambda'_k x_k = \sum_{k=1}^{n} ((1-\mu)\lambda_k + \mu\lambda'_k) x_k$$

であるが,

$$\sum_{k=1}^{n} ((1-\mu)\lambda_k + \mu\lambda'_k) = (1-\mu)\sum_{k=1}^{n} \lambda_k + \mu \sum_{k=1}^{n} \lambda'_k = (1-\mu) + \mu = 1$$

なので, これは S_n に属する.)

また,

$$S = \bigcup_{n=1}^{\infty} S_n$$

とおくと, S は明らかに凸集合. さらに, S の閉包 $\overline{S}$ も凸集合となり, しかも最小の閉凸集合になる. これを点列 $\{x_n\}$ の閉凸包という.

解答: 問 5.4: $\overline{S}$ は S の最小の閉凸集合

$\overline{S}$ は S の最小の閉凸集合であることを示せ.

(証明) 最小の閉集合であることは明らか. $x, y \in \overline{S}$ について, 任意の $\delta > 0$ に対して, $\{\|z\| < \delta\}$ で $x + z \in S$ かつ $y + z' \in S$ となる z, z' が存在する.

$$\lambda(x+z) + (1-\lambda)(y+z') = \lambda x + (1-\lambda)y + \lambda z + (1-\lambda)z'$$

である. 左辺は S に属し, また $\|\lambda z + (1-\lambda)z'\| \leq \delta$ なので, $\lambda x + (1-\lambda)y \in \overline{S}$. よって, $\overline{S}$ は凸.

(おしまい)

定理 5.5.3

X における点列 $\{x_n\}$ が x に弱収束するならば, x は $\{x_n\}$ の閉凸包に属する.

証明

もし x が $\{x_n\}$ の閉凸包 K に含まれないとすると, x は K の外点になるから, K と $K' \equiv \overline{B}(x; \delta)$ に対して分離定理を用いれば

$$\sup_{y \in K} \mathrm{Re} f(y) \leq \mathrm{Re} f(y') \quad (y' \in K')$$

となる $f \in X^*$ が取れる. 一方で, 弱収束性から $f(x_n) \to f(x)$ なので, $x_n \in K, x \in K$ より

$$\mathrm{Re} f(x_n) \to \mathrm{Re} f(x)$$

したがって, $\mathrm{Re} f(x) \leq \mathrm{Re} f(y')$.
一方で, $y' = x + e^{i\theta} z \quad (\|z\| < \delta)$ とすれば, $f(y') = f(x) + e^{i\theta} f(\delta')$ であって,

$$\mathrm{Re} f(y') = \mathrm{Re} f(x) + \mathrm{Re} f(z) \cos\theta.$$

したがって, $0 \leq \mathrm{Re} f(z) \cos\theta$ であるが, 任意の θ に対してこれが成り立つためには $\|z\| < \delta$ である任意の z に対して $f(z) = 0$ となる必要

がある．それゆえ, $\sup_{y\in K} f(y) \leq 0$ となり, 結果として K または K' 上で f は正の値を取らない．しかし, これは分離定理による f の構成の仕方から $f(x_0) \geq 1$ となることに矛盾.

（証明おしまい）

X が反射的バナッハ空間であるときの性質をいくつか.

定理 5.5.4

X: 反射的バナッハ.
$\{x_n\}$ について, 任意の $f \in X^*$ で $\{f(x_n)\}$ がコーシー列になるならば, $\{x_n\}$ はある x に弱収束する.

証明

$T_n \in X^{**}$ を $T_n(f) = f(x_n)$ と定める. これは X^* 上の連続線形汎関数. さらに,

$$T(f) = \lim_{n\to\infty} T_n(f)$$

と置くと, 任意の n で, 任意の f について $|T_n(f)| < \infty$ なので, 一様有界性の原理から,

$$\sup_n \|T_n\| = \sup_n \|x_n\| \equiv K < \infty$$

したがって,

$$|T(f)| = \lim_{n\to\infty} |T_n(f)| \leq \sup_n \|T_n\|\|f\| \leq K\|f\|$$

が任意の f について成り立つ．よって, $T \in X^{**}$. 反射的バナッハなので, ある $x \in X$ が存在して

$$T(f) = f(x)$$

と書ける．一方, $\{f(x_n)\}$ はコーシー列なので, ある点 y に収束するが, 収束先の一意性から $y = f(x)$ である.
以上から, 任意の $f \in X^*$ について $f(x_n) \to f(x)$ であり, $\{x_n\}$ は弱収束列.

（証明おしまい）

定理 5.5.5

X: 反射的バナッハ空間.
$\{x_n\}$ の点列が有界であれば, 弱収束する部分列を含む.

証明

X^* が可分の場合を示す. (一般の場合もこれに帰着)
X^* は可分なので, X^* の中の稠密な可算個の点列 $\{f_k\}$ が存在する.
f_1 について, $\{f_1(x_n)\}$ は実数（ないし複素数）の有界列だから, ボルツァーノ・ワイエルシュトラスの定理から適当な部分列 $\{x_{n,1}\}$ をとれば $\{f_1(x_{n,1})\}$ は収束列. 同様に, f_2 についても $\{f_2(x_{n,1})\}$ は有界列なので, 収束する部分列 $\{f_2(x_{n,2})\}$ が取れる. このようにして, f_1 から f_k までについて行って, 部分列 $\{x_{n,k}\}$ が取れる. 明らかに, $\{f_j(x_{n,k})\}$ は $1 \leq j \leq k$ のとき収束.
さて, $x^{(n)} = x_{n,n}$ とする. k を固定すれば, $\{f_k(x^{(n)})\}$ は $n \to \infty$ で収束. f を X^* の任意の元とする. 稠密性から, 任意の $\epsilon > 0$ に対して,

$$\|f - f_k\| < \epsilon$$

となる k が存在.

$$f(x^{(n)}) - f(x^{(m)}) = (f - f_k)(x^{(n)}) + f_k(x^{(n)} - x^{(m)}) + (f - f_k)(x^{(m)})$$

であるから, $M = \sup \|x_k\|$ とおけば,

$$\begin{aligned}|f(x^{(n)}) - f(x^{(m)})| &\leq \|f - f_k\| \left\|x^{(n)}\right\| + |f_k(x^{(n)} - x^{(m)})| + \|f - f_k\| \left\|x^{(m)}\right\| \\ &\leq 2M\|f - f_k\| + |f_k(x^{(n)} - x^{(m)})| \\ &\leq 2M\epsilon + |f_k(x^{(n)} - x^{(m)})|\end{aligned}$$

任意の k についても $\{f_k(x^{(n)})\}$ は収束列であったからコーシー列であって, 両辺について n, m の上極限を取れば,

$$\lim_{n,m\to\infty} \sup |f(x^{(n)}) - f(x^{(m)})| \leq 2M\epsilon$$

ϵ は任意だから, 結局 $|f(x^{(n)}) - f(x^{(m)})|$ は収束し, $\lim_{n,m\to\infty} |f(x^{(n)}) - f(x^{(m)})| = 0$. すなわち, 任意の $f \in X^*$ について $\{f(x^{(n)})\}$ は収束列. これは元の点列の部分列 $\{x^{(n)}\}$ が弱収束列であることを意味している.

（証明おしまい）

定理 5.5.6

X:反射的バナッハ空間.
X の閉凸集合 K と任意の $x \in X$ に対して,

$$\|x - y\| = d(x, K) \equiv \inf_{z \in K} \|x - z\|$$

となる $y \in K$ が存在する.

証明

点列 $\{y_n\} \subset K$ で $\|x - y_n\| \to d(x, K)$ となるものが存在. 不等式

$$\|y_n\| \leq \|x - y_n\| + \|x\|$$

の右辺は有界だから, $\{\|y_n\|\}$ は有界列. よって, 定理 5.5.5 から, ある $y \in X$ に弱収束する部分列 $\{y_{n'}\}$ が存在. $y_{n'} \in K$ であり, K は閉凸集合で, 閉凸包は $\{y_{n'}\}$ を含む最小の閉凸集合だから, 定理**??**より $y \in K$ が言える. よって, $\{y_n\}$ の取り方から,

$$\|x - y\| \geq d(x, K)$$

他方で, 定理 5.5.1 から,

$$\|x - y\| \leq \liminf_{n\to} \|x - y_{n'}\| = \lim_{n\to} \|x - y_{n'}\| = d(x, K)$$

以上より, $y \in K$ は

$$\|x - y\| = d(x, K)$$

を満たす.

（証明おしまい）

解答: 問 5.5: 汎弱収束性

(i) $f_n \in X^*$ が $f \in X^*$ に汎弱収束するとは, 任意の $x \in X$ に対して

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$$

となることを言う. 次を示せ

$$\|f\| \leq \lim_{n\to\infty} \inf \|f_n\|. \tag{5.2}$$

(ii) $f_n \in X^*$ とする. 任意の $x \in X$ に対して, $\{f_n(x)\}$ がコーシー列であれば, $\{f_n\}$ はある $f \in X^*$ に汎弱収束する. 示せ.

(i) $x \in X$ を任意にとる. 汎弱収束の定義から $\{f_n(x)\}$ は $f(x)$ に収束する. 任意の x でこれが言えるので, バナッハ・スタインハウスの定理から,

$$\|f\| \leq \lim_{n\to\infty} \inf \|f_n\|.$$

(ii) 各 $x \in X$ について, コーシー列は収束するから $\{f_n(x)\}$ の収束点として $f(x)$ が存在する.$f : x \mapsto f(x)$ を考えると, これは X 全体で定義された汎関数で, 特にバナッハ・スタインハウスの定理から $f \in X^*$.

（おしまい）

5.6 共役作用素

行列 A に対して, 共役な行列として転置行列（あるいは複素共役とった転置行列）A^* が定まった.

ところで, 行列は有限次元ベクトル空間の線形写像と対応していた. それならば, 線形作用素に対して「共役」な作用素を定めされるはず...

定義 5.1: 共役作用素

$T : X \to Y$: 線形作用素で定義域 $D(T)$ が X の中で稠密.
このとき, $x \in D(T)$ について

$$g(Tx) = f(x)$$

となる $f \in X^*$ があるような $g \in Y^*$ の全体を $D(T^*)$ とし, この集合を定義域とするような Y^* から X^* への線形作用素 T^* を

$$T^* g = f$$

と定める. この T^* を T の共役作用素という.

ここで, g に対し $g(Tx) = f(x)$ を満たす f は一意的に定まる. 実際, もし $g(Tx) = f'(x)$ となる $f' \in X^*$ が存在すると仮定すると, $x \in D(T)$ で $f(x) = f'(x)$ である. $D(T)$ は X の中で稠密だから, 任意の $x \in X$ に対して $x_n \to x$ となる $x_n \in D(T)$ が存在する. f, f' の連続性から

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} f'(x_n) = f'(x)$$

よって, 任意の $x \in X$ について $f(x) = f'(x)$ となり, 汎関数として $f = f'$ であることが言える. これより, 一意性がわかる.

特に, $T \in \mathscr{L}(X, Y)$(有界作用素) の場合は $D(T) = X$ となるから, 任意の $g \in Y^*$ に対して

$$f(x) = g(Tx) \quad (\text{つまり}, f = g \circ T.)$$

とおくと $f \in X^*$ となる．よって，共役作用素が定義でき，$Y^* = D(T^*)$ となる．

もし X, Y がヒルベルト空間であれば，リースの定理から，$f \in X^*, g \in Y^*$ について，ある $\xi \in X, \eta \in Y$ がただ一つ存在して，

$$f(x) = (x, \xi), \quad g(y) = (y, \eta)$$

と書ける．よって，$f(x) = g(Tx)$ は

$$(x, \xi) = (Tx, \eta) \quad (x \in D(T))$$

と書ける．ところで，共役作用素の定義から $T^* : g \mapsto f$ なので，これに対応した Y から X への写像 $\eta \mapsto \xi$ が存在する．記号を濫用してこれを T^* と書けば，$T^*\eta = \xi$ なので，

$$(x, T^*\eta) = (Tx, \eta) \quad (x \in D(T), \eta \in D(T^*))$$

となる．したがって，特にヒルベルト空間の場合は，

- $D(T^*) = D(T), Tx = T^*x$ が成立するとき，T を自己共役作用素 (エルミート作用素).
- $D(T^*) \supset D(T), Tx = T^*x$ のとき，すなわち $(x, Ty) = (Tx, y)$ となるとき，T を対称作用素という．

例 5.6.1: $\mathbb{R}$ 上の共役作用素は転置行列

実ヒルベルト空間 $\mathbb{R}^n$ から $\mathbb{R}^n$ への有界作用素 T に対し，$\mathbb{R}^n$ の基底を $\{e_1, \cdots, e_n\}$ とし，

$$(Te_j, e_k) = t_{j,k}$$

とおく．$Tx = y$ は，$x = (x_1, \cdots, x_n), y = (y_1 \cdots, y_n)$ とすると，$(y, e_k) = (Tx, e_k)$ を考えることにより，

$$y_k = \sum_{j=1}^{n} t_{j,k} x_j$$

と表される．$\eta = (\eta_1, \cdots, \eta_n)$ とおくと，$(x, T^*\eta) = (Tx, \eta)$ は，

$$\sum_{j,k} x_j \eta_k (e_j, T^* e_k) = \sum_{j,k} x_j \eta_k (Te_j, e_k) = \sum_{j,k} x_j \eta_k t_{j,k}$$

したがって，$(T^* e_j, e_k) = s_{j,k}$ と書けば，$(e_j, T^* e_k) = (T^* e_k, e_j) = s_{k,j}$ であり，

$$\sum_{j,k} x_j \eta_k s_{k,j} = \sum_{j,k} x_j \eta_k t_{j,k}$$

となる．これが全ての x, η について成り立つので，

$$s_{k,j} = t_{j,k}$$

となる．すなわち，T^* を特徴付ける行列を $(s_{j,k})$ は，T を特徴付ける行列 $(t_{j,k})$ の転置行列になる．

解答: 問 5.6: $\mathbb{C}$ 上の共役作用素は複素転置

例 5.6.1 と同じことを $\mathbb{C}$ で考えよ．

$\mathbb{C}$ はヒルベルト空間なので，有界作用素 T について，$\mathbb{R}$ と同様の議論によって

$$\sum_{j,k} x_j \eta_k (e_j, T^* e_k) = \sum_{j,k} x_j \eta_k (T e_j, e_k) = \sum_{j,k} x_j \eta_k t_{j,k}$$

が導ける．$(T^* e_j, e_k) = s_{j,k}$ と書けば，複素内積の性質から $(e_j, T^* e_k) = \overline{(T^* e_k, e_j)} = \overline{s_{k,j}}$ より，

$$\overline{s_{k,j}} = t_{j,k}$$

が導ける．したがって，T を作用素に対応する行列と同一視すれば，$T^* = (\overline{T}^{\mathsf{T}})$ と書ける．

（おしまい）

例 5.6.2: $L^2(0,1)$

$k(s,t)$ は $0 \le s, t \le 1$ 上連続とする．$x \in L^2(0,1)$ に対し，

$$y(t) = \int_0^1 k(t,s) x(s) \mathrm{d}s$$

とした $y \in L^2(0,1)$ に写す作用素 T は有界作用素．実際，t を固定した下でのシュワルツの不等式から，

$$\begin{aligned} |y(t)|^2 &= \left| \int_0^1 k(t,s) x(s) \mathrm{d}s \right|^2 \le |(|k(t,s)|, |x(s)|)|^2 \\ &\le \left(\int_0^1 |k(t,s)|^2 \mathrm{d}s \right) \left(\int_0^1 |x(s)|^2 \mathrm{d}s \right) \end{aligned}$$

これを t について積分することで,

$$\begin{aligned}\|Tx\|^2 = \|y\|^2 &= \int_0^1 |y(t)|^2 \mathrm{d}t \\ &\leq \left(\int_0^1 \int_0^1 |k(t,s)|^2 \mathrm{d}s\mathrm{d}t\right)\|x\|^2\end{aligned}$$

したがって, T は有界作用素であることがわかる.
フビニの定理から,

$$\begin{aligned}(Tx, y) &= \int_0^1 \left(\int_0^1 k(s,t)x(t)\mathrm{d}t\right)\overline{y(s)}\mathrm{d}s \\ &= \int_0^1 x(t)\overline{\left(\int_0^1 \overline{k(s,t)}y(s)\mathrm{d}s\right)}\mathrm{d}t\end{aligned}$$

一方で, $T^*y = z$ とおくと,

$$(x, T^*y) = \int_0^1 x(t)\overline{z(t)}\mathrm{d}t$$

よって, $(Tx, y) = (x, T^*y)$ より

$$(T^*y)(t) = z(t) = \int_0^1 \overline{k(s,t)}y(s)\mathrm{d}s$$

が言える. これは, $k(t,s)$ を積分核に持つ作用素の共役作用素は $\overline{k(s,t)}$ を積分核に持つ作用素 (t と s が入れ替わっていることに注意!) であることを示している.

例 5.6.3: $L^2(-\infty,\infty), Tx = tx$

ヒルベルト空間 $X = L^2(-\infty,\infty)$ を考える.

$$D(T) = \{x \in X | tx(t) =\in L^2(-\infty,\infty)\}, \quad (Tx)(t) = tx(t)$$

と定める. $D(T)$ は X の中で稠密. 実際, $\{|t| \leq n\}$ についての特性関数を χ_n とすると, 任意の $x \in L^2(-\infty,\infty)$ に対して,

$$\int_{-\infty}^{\infty} |t\chi_n(t)x(t)|^2 \mathrm{d}t = \int_{-n}^{n} |t|^2|x(t)|^2 \mathrm{d}t \leq n^2 \int_{-n}^{n} |x(t)|^2 \mathrm{d}t < \infty$$

であるから $\chi_n x \in D(T)$. さらに, $\lim_{n\to\infty}\{|t| > n\}$ は測度 0(マルコフの不等式から導かれる) であるから, $x \in L^2(-\infty,\infty)$ より

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\chi_n(t)x(t) - x(t)|^2 \mathrm{d}t \leq \int_{|t|>n} |x(t)|^2 \mathrm{d}t \to 0$$

よって, $\|\chi_n x - x\| \to 0$ であり, $D(T)$ は X の中で稠密である.
さて, T が自己共役作用素であることを示す.

$$(Tx, y) = (x, Ty) = \int_{-\infty}^{\infty} (tx(t)\overline{y(t)})\mathrm{d}t$$

である. また, 上より $D(T) \subset D(T^*)$ は明らか. $y \in D(T^*)$ とする. 任意の $x \in L^2(-\infty, \infty)$ について,

$$\tilde{x}(t) \equiv \frac{1}{t+i}x(t) \in D(T)$$

よって,

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\overline{y(t)}\mathrm{d}t &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{t+i}{t+i}x(t)\overline{y(t)}\mathrm{d}t = ((T+i)\tilde{x}, y) \\
&= (\tilde{x}, (T^* - i)y) \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x(t)}{t+i}\overline{T^*y(t) - iy(t)}\mathrm{d}t \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\overline{z(t)}\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

ここで, $z(t) = \frac{T^*y(t) - iy(t)}{t-i}$ である. よって,

$$y(t) = \frac{T^*y(t) - iy(t)}{t-i}$$

これより, $y \in D(T)$ および $ty(t) = T^*y(t)$ がわかる. したがって, $D(T^*) \subset D(T)$, よって $D(T) = D(T^*)$ であり, T は自己共役作用素である.

例 5.6.4: $L^2(-\infty, \infty), Tx = \frac{1}{i}x'$

$X = L^2(-\infty, \infty)$. $x \in L^2(-\infty, \infty)$ であって, $t \in (-\infty, \infty)$ において絶対連続かつ $x' \in L^2(-\infty, \infty)$ に属するような x 全体を $D(T)$ とし, $Tx = \frac{1}{i}x'$ とおく. 有界な台を持ち無限回微分可能な関数全体 $C_0^{\infty}(-\infty, \infty)$ は $L^2(-\infty, \infty)$ で稠密なので, $D(T)$ は X の中で稠密. さらに x, y は有界な台をもつから $t = \pm\infty$ で 0 であり,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{i}x'(t)\overline{y(t)}\mathrm{d}t = -\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{i}x(t)\overline{y'(t)}\mathrm{d}t$$

であるから $(\frac{1}{i}x', y) = (x, \frac{1}{i}y') \quad (x, y \in D(T))$. よって T は対称作用素. また, $D(T) \subset D(T^*)$ は明らかで, 任意の $z \in L^2(-\infty, \infty)$ に対

して,

$$x(t) = \int_{-\infty}^{t} e^{-(t-s)} z(s) \mathrm{d}s \tag{5.3}$$

とおくと, これは $t > 0$ で $\rho(t) = e^{-t}$, $t < 0$ で $\rho(t) = 0$ となるものに対するたたみ込み積であって, $x \in L^2(-\infty, \infty)$. また $x(t)$ は絶対連続で,

$$x'(t) = z(t) - x(t) \text{ a.e.} \tag{5.4}$$

を得る.

($f(t,s)$ について, $\int_a^t f(t,s)\mathrm{d}s$ を t で微分することを考える. $F(t,s) = \int f(t,s)\mathrm{d}s$ とすれば, $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}F(t,t) = \partial_1 F(t,s)|_{s=t} + \partial_2 F(t,s)|_{s=t} = \partial_1 F(t,s)|_{s=t} + f(t,t)$

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_a^t f(t,s)\mathrm{d}s &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(F(t,t) - F(t,a)) \\
&= \partial_1 F(t,s)|_{s=t} + f(t,t) - \partial_1 F(t,s)|_{s=a} \\
&= f(t,t) + \int_a^t \partial_1 f(t,s)\mathrm{d}s
\end{aligned}$$

特に, $f(t,s) = e^{-(t-s)}z(s)$ とおけば, $f(t,t) = z(t), \partial_1 f(t,s) = -e^{-(t-s)}z(s) = -f(t,s)$ である. したがって, $x(t) \neq \infty$ となる部分で

$$x'(t) = z(t) - \int_{\infty}^{t} f(t,s)\mathrm{d}s = z(t) - x(t)$$

が成立.)

$y \in D(T^*)$ とすると,

$$(x', y) = i(x, T^* y) \quad (x \in D(T))$$

であるから, (5.3) の x を代入すると,

$$(z, y) = (x, y - iT^* y) = (z, \tilde{y})$$

ここで,

$$\tilde{y}(s) = \int_s^{\infty} e^{-(t-s)}(y(t) - i(T^* y)(t))\mathrm{d}t$$

とした. z は任意だから,

$$y(s) = \int_s^{\infty} e^{-(t-s)}(y(t) - i(T^* y)(t))\mathrm{d}t.$$

s で微分すれば, 式 (5.4) から

$$y'(s) = y(s) - (y(s) - i(T^* y)(s)) \text{ a.e.}$$

よって,
$$\frac{1}{i}y'(s) = (T^*y)(s)$$
よって, $y \in D(T)$ かつ $T^*y = Ty$ a.e. であり, T は自己共役作用素である.

共役作用素 T^* の性質を確認する.

命題 5.6.1

$T \in \mathscr{L}(X,Y)$ ならば, $T^* \in \mathscr{L}(Y^*,X^*)$ であって,
$$\|T\| = \|T^*\| \tag{5.5}$$

証明

$D(T) = X$ なので, 任意の $x \in X$ に対して, $Tx \in Y$ が存在. 任意の $g \in Y^*$ に対して, $g(Tx) \in \mathbb{R}(or\mathbb{C})$ が存在し, $T^*g : x \mapsto g(Tx)$.
$$|T^*g(x)| = |g(Tx)| \le \|g\|\|T\|\|x\|$$
であるから, $T^*g \in X^*$. よって, $D(T^*) \in Y^*$ であって, $T^* \in \mathscr{L}(Y^*,X^*), \|T^*g\| \le \|g\|\|T\|$. よって, $\|T^*\| \le \|T\|$.
逆に, $g : y \mapsto \|y\|$ について, $g \in Y^*$ かつ
$$g(Tx) = \|Tx\|, \quad \|g\| = 1.$$
ところで, $g(Tx) = (T^*g)(x) \le \|T^*g\|\|x\| \le \|T^*\|\|x\|$ なので, $\|T\| \le \|T^*\|$.
以上から, $\|T^*\| = \|T\|$.

（証明おしまい）

命題 5.6.2

(i) $(T+S)^* = T^* + S^* \quad S,T \in \mathscr{L}(X,Y)$

(ii) $(\alpha T)^* = \alpha T^* \quad \alpha \in K, T \in \mathscr{L}(X,Y)$.
ただし, X,Y がヒルベルト空間で T^* を $Y \to X$ の写像と見なした場合は, $(\alpha T)^* = \overline{\alpha}T^*$ が成立.

(iii) $(ST)^* = T^*S^* \quad T \in \mathscr{L}(X,Y), S \in \mathscr{L}(Y,Z)$.

証明

(i) $(T+S)^*(g)(x) = g(T+S)(x) = g(Tx)+g(Sx) = ((T^*+S^*)g)(x)$

(ii)

$$(\alpha T)^* g(x) = g(\alpha Tx) = \alpha g(Tx) = \alpha(T^* g)(x) = (\alpha T^*)g(x).$$

また, X, Y がヒルベルト空間であるとき, $T^* : Y \to X$ と見なせば, $(x, T\eta) = (T^* x, \eta)$ が成立するから,

$$((\alpha T)^* x, \eta) = (x, \alpha T\eta) = \overline{\alpha}(x, T\eta) = \overline{\alpha}(T^* x, \eta) = (\overline{\alpha} T^* x, \eta).$$

(iii) $(ST)^*(g)(x) = g(STx) = (S^* g)(Tx) = (T^* S^* g)(x)$.

（証明おしまい）

解答: 問 5.7: ヒルベルト空間上の共役作用素

X: ヒルベルト空間, $T \in \mathscr{L}(X, X)$. 次を示せ.

(i) $\|TT^*\| = \|T^*T\| = \|T\|^2$

(ii) $T^{**} = T$

(i) まず, $\|T^*Tx\| \leq \|T\|\|T^*\|\|x\|$ より $\|T^*T\| \leq \|T\|^2$ がわかる. 一方, シュワルツの不等式から,

$$\|Tx\|^2 = |(Tx, Tx)| = |(x, T^*Tx)| \leq \|x\|^2 \|T^*T\|$$

これより, $\|T\|^2 \leq \|T^*T\|$ であって, $\|T^*T\| = \|T\|^2$.

また, やはり $\|TT^*\| \leq \|T\|^2$ であって, $\|T^*\| = \|T\|$ なので,

$$\|T^*x\|^2 = |(TT^*x, x)| \leq \|x\|^2 \|TT^*\|$$

なので $\|TT^*\| = \|T\|^2$.

(ii) X はヒルベルト空間なので, リースの表現定理から, $x, y \in X$ について

$$(Tx, y) = (x, T^*y) = \overline{(T^*y, x)} = \overline{(y, T^{**}x)} = (T^{**}x, y)$$

よって, $T^{**} = T$.

（おしまい）

命題 5.6.3

$T: X \to Y$ が稠密に定義された作用素であれば, T^* は閉作用素.

証明

T は稠密に定義されているので, T^* が定まる.
$T^*\xi_n \to \eta_0 \in X^*, \xi_n \to \xi_0 \in Y^*$ となる点列 $\{\xi_n\} \subset D(T^*)$ $(\subset Y^*)$ をとる. ここで, 任意の $x \in D(T)$ に対して,

$$\xi_n(Tx) = (T^*\xi_n)(x)$$

であるから, $n \to \infty$ とすれば,

$$\xi_0(Tx) = \eta_0(x)$$

よって, $\eta_0 \in X^*, \xi_0 \in Y^*$ であるから, $\xi_0 \in D(T^*)$ かつ $T^*\xi_0 = \eta_0$. これは T^* が閉作用素であることを示している.

（証明おしまい）

命題 5.6.4

$T: X \to Y$:閉作用素. $D(T)$ は X の中稠密.
このとき, 次の条件 (i), (ii) は同値:

(i) T は全単射であって, $T^{-1} \in \mathscr{L}(Y, X)$.

(ii) T^* は全単射であって, $(T^*)^{-1} \in \mathscr{L}(X^*, Y^*)$.

さらに, (i) または (ii) が成立するとき,

$$(T^*)^{-1} = (T^{-1})^*.$$

証明

(i) を仮定する. $\eta \in D(T^*)$ が $T^*\eta = 0$ を満たすとする. 任意の $x \in D(T)$ に対して, $f(x) = \langle x, f \rangle$ とかくことにすると,

$$\langle Tx, \eta \rangle = \langle x, T^*\eta \rangle = 0.$$

T は全射だから, $\eta = 0$. よって, T^* は単射.
任意の $\xi \in X^*$ に対して, $\eta = (T^{-1})^*\xi$ とおくと, $y \in Y$ において

$$\langle T^{-1}y, \xi \rangle = \langle y, (T^{-1})^*\xi \rangle = \langle y, \eta \rangle.$$

特に $z \in D(T)$ に対して $y = Tz$ とおくと,

$$\langle z, \xi \rangle = \langle Tz, \eta \rangle$$

よって, $\eta \in D(T^*)$ であり, $\xi = T^*\eta$. これより T^* は全射であり, $T^{-1} \in \mathscr{L}(Y, X)$ より $(T^*)^{-1} = (T^{-1})^* \in \mathscr{L}(X^*, Y^*)$.

(ii) を仮定する. $(T^*)^{-1} \in \mathscr{L}(X^*, Y^*)$ なので,

$$\langle Tx, (T^*)^{-1}\xi \rangle = \langle x, \xi \rangle \quad (x \in D(T), \xi \in X^*).$$

$x \in D(T)$ を固定すると, $\|\xi\| = 1$ かつ $\langle x, \xi \rangle = \xi(x) = \|x\|$ となる $\xi \in X^*$ が存在する. (定理 5.2.5 参照.) これより,

$$\|x\| = \langle x, \xi \rangle = \langle Tx, (T^*)^{-1}\xi \rangle \leq \|Tx\| \left\| (T^*)^{-1} \right\|$$

よって, $Tx = 0$ なら $x = 0$ であり, T は単射であって, T^{-1} は有界. $D(T^{-1})$ は Y の中稠密であることを示そう. もし稠密でなければ, $D(T^{-1})$ に属さず, かつ $D(T^{-1})$ との距離が 0 より大きくなるような点が存在する. よって, 定理 5.2.6 より $g(Tx) = 0 \quad (x \in D(T))$ なる $g \neq 0 \in Y^*$ が存在する. これは $g \in D(T^*)$ かつ $T^*g = 0$ となるが, しかし仮定から T^* は単射なので, $g = 0$ となり, 矛盾する. よって, $D(T^{-1})$ は Y の中稠密.
任意の $y \in Y$ に対して, $y_n \to y$ となる点列 $\{y_n\} \subset D(T^{-1})$ が取れる. $x_n = T^{-1}y_n$, すなわち $y_n = Tx_n$ とすれば,

$$\|x_n - x_m\| \leq \left\| (T^*)^{-1} \right\| \|Tx_n - Tx_m\| = \left\| (T^*)^{-1} \right\| \|y_n - y_m\| \to 0$$

であるから $\{x_n\}$ はコーシー列. よって, $x_n \to x$ となる $x \in X$ が存在する. $Tx_n = y_n \to y$ であり, T は閉作用素なので, $x \in D(T)$ かつ $Tx = y$. よって, $y \in D(T^{-1})$. これより T^{-1} は全単射であり, $T^{-1} \in \mathscr{L}(Y, X)$.

（証明おしまい）

5.7 ラックス・ミルグラムの定理

偏微分方程式への応用を念頭に置いて, リースの定理を拡張した定理として, ラックス・ミルグラムの定理が知られている.

定理 5.7.1: ラックス・ミルグラムの定理

X: ヒルベルト空間. $B(x, y)$: 積ヒルベルト空間 $X \times X$ 上で定義された複素数値に値を取る汎関数で, 次の条件を満たすとする:

(i) (共役線形性)

$$B(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2, y) = \lambda_1 B(x_1, y) + \lambda_2 B(x_2, y)$$
$$B(x, \lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2) = \overline{\lambda_1} B(x, y_1) + \overline{\lambda_2} B(x, y_2)$$

(ii) (有界性)
$$|B(x,y)| \leq M\|x\|\|y\|$$

(iii) (正値性, 強圧性 (coercive), あるいは強楕円的 (strongly elliptic))

$$B(x,x) \geq \delta\|x\|^2$$

このとき, 次の (a), (b), (c) の性質をもつ有界線形作用素 $S \in \mathscr{L}(X,X)$ がただ一つ存在:

(a) S は有界な逆作用素 S^{-1} を持つ.

(b) $(x,y) = B(x,Sy) \quad (x,y \in X)$.

(c) $\|S\| \leq \delta^{-1}, \left\|S^{-1}\right\| \leq M$.

リースの表現定理から, 任意の有界線形汎関数 f は $f(x) = (x,y)$ と書けるので, (b) より $f(x) = B(x,Sy)$ と書ける. 内積は (i), (ii), (iii) を満たす B の一種である. よって, ラックス・ミルグラムの定理はリースの表現定理の拡張になっている.

例 5.7.1: ポアソン方程式

有界開集合 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 上のポアソン方程式

$$\begin{cases} -\nabla^2 u(t) = f(t), & t \in \Omega \\ u(t) = 0, & t \in \partial\Omega \end{cases}$$

の弱解 $u(t)$ を考えよう. $X = H_0^1(\Omega)$(ソボレフ空間で台がコンパクト) として, 任意の $v \in X$ について v は境界上で 0 になるので,

$$-\int_\Omega \frac{\partial^2}{\partial t_i^2} u(t)v(t)\mathrm{d}t = \int_\Omega \frac{\partial}{\partial t_i} u(t) \frac{\partial}{\partial t_i} v(t)\mathrm{d}t$$

よって, ポアソン方程式の弱問題は,

$$\int_\Omega \nabla u(t) \cdot \nabla v(t)\mathrm{d}t = \int_\Omega f(t)v(t)\mathrm{d}t \quad (\forall v \in H_0^1(\Omega))$$

である. 特に, u と v を $\int_\Omega \nabla u(t) \cdot \nabla v(t)\mathrm{d}t$ に写す作用素 B は条件 (i), (ii), (iii) を満たし, 弱問題は与えられた $f \in H_0^1(\Omega) \subset L^2(\Omega)$ に対して

$$B(u, v) = (f, v)$$

を満たす u を求める問題と言い換えられる．ラックス・ミルグラムの定理は, この弱問題について, (ちょっと書き方が違うけど) 特に f を u に写す有界線形作用素 $S : X \to X : f \mapsto Sf = u$ はただ一つ存在する, ということを示している (弱解の一意存在性).

証明

$$(x, y) = B(x, y^*) \quad (x \in X)$$

となる $y^* \in X$ が存在するような y 全体を D とする．$y = 0$ について, $B(x, 0) = 0$ なので, $0 \in D$ がわかる．y^* は y によって一意に定まる．(実際, $(x, y) = B(x, y_1^*) = B(x, y_2^*)$ とすると, $B(x, y_1^* - y_2^*) = 0$. $x \in X$ は任意なので, $x = y_1^* - y_2^*$ とすれば, $B(y_1^* - y_2^*, y_1^* - y_2^*) \geq \delta\|y_1^* - y_2^*\| = 0$. よって $y_1^* = y_2^*$.)
D は線形集合である．(実際, $y_1, y_2 \in D, \lambda \in \mathbb{C}$ について,

$$(x, y_1 + y_2) = (x, y_1) + (x, y_2) = B(x, y_1^*) + B(x, y_2^*) = B(x, y_1^* + y_2^*)$$
$$(x, \lambda y) = \overline{\lambda}(x, y) = \overline{\lambda} B(x, y^*) = B(x, \lambda y^*)$$

より, $y_1 + y_2, \lambda y \in D$.)
$y \in D$ に対し, $Sy = y^*$ とおくと, S は線形である．(iii) およびシュワルツの不等式から,

$$\delta\|Sy\|^2 \leq B(Sy, Sy) = B(Sy, y^*) = (Sy, y) \leq \|Sy\|\|y\|$$

よって,

$$\delta\|Sy\| \leq \|y\|. \tag{5.6}$$

$D = D(S)$ は X の閉部分空間である．(実際, $y_n \in D, y_n \to y \in X$ とする．(5.6) より,

$$\|Sy_n - Sy_m\| \leq \delta^{-1}\|y_n - y_m\| \to 0.$$

よって, $Sy_n \to z$ となる $z \in X$ が存在する．S の定義から

$$(x, y_n) = B(x, Sy_n) \tag{5.7}$$

であるが, $n \to \infty$ としたとき, 内積の連続性から左辺は (x, y) に収束し, 右辺は (ii) より

$$|B(x, Sy_n) - B(x, z)| = |B(x, Sy_n - z)| \leq M\|x\|\|Sy_n - z\| \to 0$$

となるので $B(x,z)$ に収束. すなわち式 (5.7) から $(x,y)=B(x,z)$ が成立する. すなわち $y\in D$ かつ $Sy=z$ であり, D は閉部分空間.)
$D=X$ を示す. もし $D\neq X$ ならば, 射影定理から D に直交する元 $y_0\in X \quad (y_0\neq 0)$ が存在する. この y_0 によって

$$f(z)=B(z,y_0)\quad (z\in X)$$

と f を定めると, f は有界線形汎関数. リースの表現定理からある $y_0'\in X$ が存在して

$$B(z,y_0)=f(z)=(z,y_0')\quad (z\in X)$$

とかける. $y_0'\in D$ であり, $Sy_0'=y_0$. 特に, $z=y_0$ とすると, $y_0\perp D$ より, $B(y_0,y_0)=(y_0,y_0')=0$. これは B の正値性（強圧性）に矛盾. よって, $D=X$.
逆作用素 S^{-1} が存在することを示す. もし $Sy=0$ ならば $(y,y)=B(y,Sy)=0$ となるので $y=0$. よって S は単射である. また, 任意の $y\in X$ を固定した下で先ほどと同じようにリースの表現定理を用いれば $B(z,y)=(z,y')$ となる $y'\in X$ が取れて, S の定義から $y=Sy'$ となるから S は全射である. ゆえに S は全単射であり S^{-1} は存在する.
最後に (c) を確認する. $\|S\|\leq\delta^{-1}$ は式 (5.6) からわかる. また,

$$|(z,S^{-1}y)|=|B(z,y)|\leq M\|z\|\|y\|$$

なので, $=S^{-1}y$ とすれば $\left\|S^{-1}y\right\|\leq M\|y\|$ となり, これから $\left\|S^{-1}\right\|\leq M$ がわかる.

（証明おしまい）

参考文献

[1] 増田久弥, 『数学シリーズ 関数解析』, 裳華房

[2] 杉浦光夫, 『解析入門 I』, 東京大学出版会