関数解析ノート

2023 年 4 月 6 日

注意: 基本的に増田久弥『関数解析』[1] のまとめ.

6　レゾルベントとスペクトル

有限次元の線形作用素（つまり, 行列）には固有値 λ が存在し, これがわかれば行列を好き放題できた.

$$Av = \lambda v$$

これは v についての同次方程式 $(\lambda I - A)v = 0$ が非自明な解を持つような λ を求めることをしていて, つまり $\lambda I - A$ が逆作用素を持たないような λ を求めている.

同じことをバナッハ空間の作用素 T に対しても考えることができる. しかし, こちらは少し状況が違ってくる.

6.1　スペクトル

T をバナッハ空間 X 上に稠密に定義された閉作用素とする. $z \in \mathbb{C}$ について, 次のいずれかが成立する.

a) $Tx = zx$ となる $x \in D(T) \quad (x \neq 0)$ が存在する.

b) $Tx = zx$ となる $x \in D(T)$ は $x = 0$ のみであり, $(zI - T)^{-1}$ は X 全体で定義されている.

c) $Tx = zx$ となる $x \in D(T)$ は $x = 0$ のみであるが, $(zI - T)^{-1}$ は X 全体では定義されていない.

(行列のときは c) がなかった. 次元定理からかな?)

これは, それぞれ次のように言い換えられる:

i) $zI - T : D(T) \to R(zI - T)$ は単射でない.

ii) $zI - T : D(T) \to R(zI - T)$ は単射かつ, $(zI - T)^{-1} \in \mathscr{L}(X)$.

iii) $zI - T : D(T) \to R(zI - T)$ は全単射だが全射でない．すなわち, $(zI - T)^{-1} \notin \mathscr{L}(X)$.

$ii)$ は, b) について閉グラフ定理を適用すればわかる．
（たぶんこの辺, $\mathscr{L}(X)$ ではなく $\mathscr{L}(D(T))$ とすべき部分が結構ある）

b) を満たすような z の全体を T のレゾルベント集合といい, $\rho(T)$ で表す．このような z に対して $R(z) \equiv (zI - T)^{-1}$ を T のレゾルベントという．

a), c) を満たす z の全体を T のスペクトルといい, $\sigma(T)$ で表す．特に, a) を満たす z を T の固有値, 固有値の全体を点スペクトルといって $\sigma_p(T)$ とかく．

$$\mathbb{C} = \sigma(T) \oplus \rho(T).$$

$z \in \sigma_p(T)$ のとき,

$$N(T - zI) = \{x \in X | Tx = zx\}$$

を固有値 z に対する T の固有空間といい, この固有空間の次元を固有値 z の多重度という．

まず, レゾルベントの基本的性質を述べる．

命題 6.1.1

$z_1, z_2 \in \rho(T)$ のとき,

$$(z_2I - T)^{-1} - (z_1I - T)^{-1} = (z_1 - z_2)(z_1I - T)^{-1}(z_2I - T)^{-1} \quad (6.1)$$

証明

$$\begin{aligned}
\text{左辺} &= (z_1I - T)^{-1}(z_1I - T)(z_2I - T)^{-1} - (z_1I - T)^{-1}(z_2I - T)(z_2I - T)^{-1} \\
&= (z_1 - z_2)(z_1I - T)^{-1}(z_2I - T)^{-1} = \text{右辺}.
\end{aligned}$$

（証明おしまい）

命題 6.1.2

$\rho(T)$ は開集合である．

証明

$z_0 \in \rho(T)$ とする．このとき, $|z - z_0| \|R(z_0)\| < 1$ となる任意の z に対し, 作用素 S のノルムが 1 未満なら $I - S$ の逆作用素が存在してノイ

マン級数で書けたことから,

$$
\begin{aligned}
[I-(z_0-z)R(z_0)]^{-1}R(z_0) &= \sum_{k=0}^{\infty}(z_0-z)^k R(z_0)^{k+1} \\
&= R(z_0)\sum_{k=0}^{\infty}(z_0-z)^k R(z_0)^k (\equiv S.)
\end{aligned}
$$

が成立. 明らかに $S \in \mathscr{L}(X)$ であって, $x \in X$ に対して $Sx \in D(T)$ であって, $R(z_0) = (z_0 I - T)^{-1}$ より,

$$
\begin{aligned}
(zI-T)Sx &= (z-z_0)Sx + (z_0 I - T)Sx \\
&= -\sum_{k=0}^{\infty}(z_0-z)^{k+1}R(z_0)^{k+1}x + \sum_{k=0}^{\infty}(z_0-z)^k R(z_0)^k x \\
&= Ix = x
\end{aligned}
$$

同様にして, $S(zI-T)x = x$ も確かめられる. これより,

$$
S = (zI-T)^{-1} = R(z)
$$

であり, $z \in \rho(T)$. よって, $\rho(T)$ は開集合.

(証明おしまい)

系 6.1.1

$|z-z_0| < 1/\|R(z_0)\|$ に対して,

$$
\|R(z)\| \leq \|R(z_0)\|(1-|z-z_0|\|R(z_0)\|)^{-1} \tag{6.2}
$$

証明

作用素 T について $\left\|(I-T)^{-1}\right\| \leq (1-\|T\|)^{-1}$ が成り立つことから.

(証明おしまい)

$\mathbb{C}$ 上の開集合 Ω で定義され値をバナッハ空間 X に取る関数 $f(z)$ を考える. $f(z)$ が Ω 上正則とは, 任意の $z_0 \in \Omega$ に対して,

$$
\lim_{z \to z_0} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} (\equiv g(z_0))
$$

が X のノルムで存在し, $g(z_0)$ が z_0 について X のノルムで連続であることを言う. $g(z_0)$ を $f'(z_0)$ とか $\frac{\mathrm{d}f(z_0)}{\mathrm{d}z}$ で書く.

命題 6.1.3

$(zI-T)^{-1}$ は $\rho(T)$ 上正則.

証明

$z_0 \in \rho(T)$ とする. 式 (6.2) より

$$\lim_{z\to z_0} \sup \|R(z)\| \leq \|R(z_0)\|$$

また,

$$\lim_{z\to z_0} \sup |z-z_0| \|(z_0 I-T)^{-1}\| \|(z_0 I-T)^{-1}\| = 0$$

であるから, 式 (6.1) の右辺 $\to 0$. よって,

$$\lim_{z\to z_0} (zI-T)^{-1} = (z_0 I-T)^{-1}$$

すなわち, $(zI-T)^{-1}$ は $\rho(T)$ 上連続. これより, 式 (6.1) から

$$\lim_{z\to z_0} \frac{(zI-T)^{-1}-(z_0 I-T)^{-1}}{z-z_0} = -\lim_{z\to z_0} (z_0 I-T)^{-1}(zI-T)^{-1} = (z_0 I-T)^{-2}$$

であって, $(z_0 I-T)^{-2}$ は z_0 について連続なので, $(zI-T)^{-1}$ は $\rho(T)$ 上正則であって,

$$\frac{\mathrm{d}(zI-T)^{-1}}{\mathrm{d}z} = (zI-T)^{-2}.$$

（証明おしまい）

命題 6.1.4

$T \in \mathscr{L}(X)$ とする.

$$r(T) = \lim_{n\to\infty} \sup \sqrt[n]{\|T^n\|}$$

を T のスペクトル半径という. このとき,

(i) $|z| > r(T)$ ならば, $z \in \rho(T)$ であって,

$$R(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{z^{k+1}} T^k. \tag{6.3}$$

(ii) $|z| = r(T)$ なる $z \in \sigma(T)$ が存在する.

証明

(i) を示す. $|z| > r(T)$ ならば, 十分小さな $\epsilon > 0$ に対してある N が存在して

$$|z| - \epsilon > \sqrt[n]{\|T^n\|} \quad (n \geq N).$$

が成立する. よって,

$$\sum_{n=N}^{\infty} \frac{1}{|z|^{n+1}} T^n \leq \sum_{n=N}^{\infty} \left(\frac{|z| - \epsilon}{|z|^n}\right)^n \frac{1}{|z|} < \infty$$

であり, $S \equiv \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{z^{n+1}} T^n$ は $\mathscr{L}(X)$ のノルムで絶対収束. よって, $S \in \mathscr{L}(X)$. $S = (zI - T)^{-1}$ である.(ノイマン級数の形, および命題 6.1.2 の証明を参照.) よって, $z \in \rho(T)$.
(ii) を示す. $r(T) > 0$ の場合を考える. $|z| = r(T)$ となる z が $\sigma(T)$ に属していないと仮定する. $\sigma(T) = \mathbb{C} \backslash r(T)$ は閉集合であることに注意すると, $0 < \delta < r(T)$ となる適当な δ が存在し, $|z| > r(T) - \delta$ なる z は $\rho(T)$ に属するようにできる. よって, $|z| > r(T) - \delta$ のとき, $R(z)$ は正則. $|z| > r(T)$ で式 (6.3) は収束するが, $|z| > r(T) - \delta$ で $R(z)$ は正則なので, 複素関数において正則性と解析性が同値だったことから, $|z| > r(T) - \delta$ で式 (6.3) は収束. しかし, 複素関数において $|z| < r(T)$ なら式 (6.3) は収束しないはずなので矛盾. ゆえに $|z| = r(T)$ となる $z \in \sigma(T)$ が存在する.

（証明おしまい）

解答: 問 6.1: 複素関数の復習

複素関数の議論にしたがって次を示せ.

(i) $R(z)$ が $|z| > r(T) - \delta$ で正則ならば, この範囲で式 (6.3) は収束.

(ii) $|z| < r(T)$ ならば式 (6.3) は収束しない.

あとでかく.

（おしまい）

X がヒルベルト空間であるときを考える. このとき,

命題 6.1.5

T: ヒルベルト空間 X 上で稠密に定義された閉作用素.
このとき, ヒルベルト空間上の作用素 $T^* : X \to X$ として,

$$\rho(T^*) = \overline{\rho(T)}$$

である．特に T が自己共役作用素であるならば $\sigma_p(T)$ は実数.

証明

$z \in \rho(T)$ とする．つまり, $zI - T$ が単射で $(zI-T)^{-1} \in \mathscr{L}(X)$ である．$zI \in \mathscr{L}(X)$ なので, $zI - T$ は閉作用素であるから, $(zI-T)^*$ は単射であって, $((zI-T)^*)^{-1} \in \mathscr{L}(X^*)$, 値域は X^* 全体となる．以降, $(zI-T)^*$ を, 対応するヒルベルト空間上の作用素 $(zI-T)^*) \in \mathscr{L}(X)$ を表すものとする． このとき, ヒルベルト空間上の作用素としては $(\alpha T)^* = \overline{\alpha} T^*$ であったことを思い出せば,

$$(zI-T)^* = \overline{z}I - T^*$$

であるから, $(\overline{z}I - T^*)^{-1} \in \mathscr{L}(X)$. これは, $\overline{z} \in \rho(T^*)$ を意味する．よって, $\overline{\rho(T)} \subset \rho(T^*)$.
逆に, $\overline{z} \in \rho(T^*)$ とすると, $(\overline{z}I - T^*)$ は単射かつ $(\overline{z}I - T^*)^{-1} \in \mathscr{L}(X)$. 同様にして, $(\overline{z}I - T^*) = (zI-T)^*$ なので, $(zI-T)$ が単射かつ $(zI-T)^{-1} \in \mathscr{L}(X)$ がわかる．これより $z \in \rho(T)$ である．よって, $\rho(T^*) \subset \overline{\rho(T)}$.
以上から, $\rho(T^*) = \overline{\rho(T)}$.
また, T が自己共役作用素ならば, $z \in \sigma_p(T)$ について, $x \neq 0 \in X$ を $Tx = zx$ となる点とすれば,

$$z\|x\|^2 = (zx, x) = (Tx, x) = (x, T^*x) = (x, Tx) = (x, zx) = \overline{z}\|x\|^2$$

これより, $x \neq 0$ より $z = \overline{z}$. よって $z \in \sigma_p(T)$ は実数.

（証明おしまい）

例 6.1.1

Ω を $\mathbb{R}^n$ の開集合とする．a を Ω 上有界な可測関数とする．このとき, $L^2(\Omega)$ の中の作用素 T を

$$(Tx)(t) = a(t)x(t)$$

と定めると, T は有界作用素であり,

$$\rho(T) = \{z \in \mathbb{C} | |z - a(t)| \geq \delta (t \in \Omega) \text{ となる } \delta > 0 \text{ が存在 } \}$$

である.

例 6.1.2

$L^2(0,1)$ の中の作用素 T を

$$(Tx)(t) = \int_0^t x(s)\mathrm{d}s$$

と定めると, これは明らかに有界作用素.
このとき, T のレゾルベント集合は

$$\rho(T) = \mathbb{C}\backslash\{0\}$$

である.

実際,

$$(zI - T)x(t) = zx(t) - \int_0^t x(s)\mathrm{d}s = 0$$

とする. $z \neq 0$ ならば,

$$x(t) = \frac{1}{z}\int_0^t x(s)\mathrm{d}s$$

となり, 右辺は t について連続なので, x は t について連続. したがって, 右辺の被積分関数は連続になるから, 左辺は微分可能で,

$$x'(t) = \frac{1}{z}x(t) \qquad \therefore x(t) = ce^{\frac{1}{z}t}$$

一方で, 積分形から $x(0) = 0$ である. よって, $c = 0$ であり, $x(t) = 0$ である. これより $zI - T$ は単射.
任意に $y \in L^2(0,1)$ が与えられたとき,

$$x_1(t) = \frac{1}{z}y(t), \cdots, x_n(t) = \frac{1}{z}y(t) + \int_0^t x_{n-1}(s)\mathrm{d}s$$

と関数列を構成する.

$$x_2(t) - x_1(t) = \int_0^t x_1(s)\mathrm{d}s$$

なので, シュワルツの不等式から

$$\begin{aligned}|x_2(t) - x_1(t)| &\leq \int_0^1 |x_1(s)|\mathrm{d}s \\ &\leq \frac{1}{|z|^2}\left(\int_0^1 |y(s)|^2\mathrm{d}s\right)^{1/2} \equiv M.\end{aligned}$$

さらに,

$$|x_n(t) - x_{n-1}(t)| \leq M\frac{t^{n-2}}{(n-2)!}$$

が成り立つ．
(実際, $n=2$ のときは成立し, $n=k$ で成立すると仮定すれば,

$$\begin{aligned}|x_{k+1}(t)-x_k(t)| &\leq \int_0^t |x_k(s)-x_{k-1}(s)|\mathrm{d}s \\ &\leq M\int_0^t \frac{s^{k-2}}{(k-2)!}\mathrm{d}s \\ &\leq M\frac{t^{k-1}}{(k-1)!}\end{aligned}$$

よって, 帰納法から成立.)
さらに, $x_n(t)-x_{n-1}(t)$ が連続関数になることも帰納的にわかる．
さて,

$$u_n(t)=x_n(t)-\frac{1}{z}y(t)$$

とおくと, $u_n=(x_n-x_{n-1})+(x_{n-1}-x_{n-2})+\cdots+(x_2-x_1)$ より連続関数．また,

$$|x_{k+1}(t)-x_k(t)|\leq M\frac{t^{k-1}}{(k-1)!}\leq M\frac{1}{(k-1)!},\quad \sum_{k=1}^{\infty}M\frac{1}{(k-1)!}<\infty$$

より, ワイエルシュトラスの M テスト (関数列 $\{f_n\}$ について, $\|f_n\|\leq M_n$ かつ $\sum M_n<\infty$ なら $\sum f_n$ は一様収束) から $\sum(x_{n+1}-x_n)$ は一様収束．つまり, u_n は一様収束．これを u とする．各 u_n は連続なので, u は連続になる．また,

$$u_n(t)=\int_0^t x_{n-1}(s)\mathrm{d}s=\frac{1}{z}\int_0^t u_{n-1}(s)\mathrm{d}s+\frac{1}{z^2}\int_0^t y(s)\mathrm{d}s$$

であるから, 一様収束列では極限と積分を交換できたことから,

$$u(t)=\frac{1}{z}\int_0^t u(s)\mathrm{d}s+\frac{1}{z^2}\int_0^t y(s)\mathrm{d}s$$

ここで, $x(t)=u(t)+\frac{1}{z}y(t)$ とおくと,

$$x(t)=\frac{1}{z}y(t)+\frac{1}{z}\int_0^t x(s)\mathrm{d}s$$

を満たすことがわかる．よって, $(zI-T)x=y$ となるので, $(zI-T)$ の値域は $L^2(0,1)$ 全体．よって, $z\in\rho(T)$.

また, $z=0$ のときは, $Tx=0$ とすれば $(Tx)'=x=0$ となるから T は単射．しかし, $y\in L^2(0,1)$ として恒等的に 1 になる関数を選ぶと,

$$Tx(t)=\int_0^t x(s)\mathrm{d}s=1$$

となる x は存在しない. ($t=0$ のとき $Tx(0)=0$ となって矛盾.) よって, $z=0$ は T のスペクトル.

例 6.1.3

$X=C[0,1]$ とする.

$$D(T)=\{x\in C^1[0,1], x(0)=0\},\quad (Tx)(t)=x'(t)$$

と定めると, 作用素 T は閉作用素である.
T のレゾルベント集合 $\rho(T)$ は $\mathbb{C}$ 全体である. 実際, 任意の $z\in\mathbb{C}$ について,

$$(zI-T)x(t)=zx(t)-(Tx)(t)=zx(t)-x'(t)=0$$

とすると, $x(t)=ce^{zt}$. 特に, $x(0)=0$ より, $c=0$. よって $x(t)=0$ であり, $zI-T$ は単射. また任意の $y\in C[0,1]$ について,

$$zx(t)-x'(t)=y(t),\quad x(0)=0$$

とすると, 定数変化法から

$$x(t)=-\int_0^t e^{z(t-s)}y(s)\mathrm{d}s$$

が解. 明らかに $x\in D(T)$ であって, $y=(zI-T)x$ となる. これより $zI-I$ は全射. 以上から, $\rho(T)=\mathbb{C}$.

例 6.1.4

$X=L^2(0,1)$ において, 作用素 T を

$$D(T)=\{x|x,x'\in H^1(0,1), x(0)=x(1)=0\}\quad (Tx)(t)=x''(t)$$

とする. ここで, $H^1(0,1)$ はソボレフ空間. T は閉作用素である（後の問題）.
T のスペクトルを決める.

$$(zI-T)x=zx-x''=0,\quad x(0)=x(1)=0$$

を解くと, $z=n^2\pi^2$ のときは

$$x(t)=\sin n\pi t$$

を解に持つ. すなわち, $z=n^2\pi^2$ は固有値である. $z\neq n^2\pi^2$ のときはゼロ解しかない.

$z \neq n^2\pi^2$ のとき, $z \in \rho(T)$ であることを示す.
まず,

$$(zI - T)g(t, s; z) = \delta(s - t)$$

となるような関数 $g(t, s; z)$ を探す. (グリーン関数)

……………………………………………………………………

ここでは, 境界値問題の同次方程式の解からグリーン関数を構成する方法を取る. つまり, $(zI-T)u_1 = 0, u_1(0) = 0$ の解を u_1, $(zI-T)u_2 = 0, u_2(1) = 0$ の解を u_2 として,

$$g(t, s) = \begin{cases} A(s)u_1(t) & (0 \leq t \leq s \leq 1) \\ B(s)u_2(t) & (0 \leq s \leq t \leq 1) \end{cases}$$

とおく.
まず $z \neq 0$ とする. この場合,

$$\begin{aligned} u_1(t) &= \frac{e^{\sqrt{z}t} - e^{-\sqrt{z}t}}{2} = \sinh \sqrt{z}t \\ u_2(t) &= \frac{e^{\sqrt{z}(t-1)} - e^{-\sqrt{z}(t-1)}}{2} = \sinh \sqrt{z}(t-1) \end{aligned}$$

とおけばよい.
$g(t, s)$ は $s = t$ で連続なので,

$$A(s)u_1(s) = B(s)u_2(s)$$

さらに, $(zI - T)g = \delta(s - t)$ の両辺を $t = s - \epsilon$ から $t = s + \epsilon$ まで積分すると,

$$z \int_{s-\epsilon}^{s+\epsilon} g(t, s)\mathrm{d}t - [g'(t, s)]_{s-\epsilon}^{s+\epsilon} = \int_{s-\epsilon}^{s+\epsilon} \delta(s - t)\mathrm{d}t = 1$$

$\epsilon \to 0$ として, g の連続性から測度 0 領域での積分が 0 になるから,

$$-\left(\left.\frac{\partial g(t, s)}{\partial t}\right|_{t=s+0} - \left.\frac{\partial g(t, s)}{\partial t}\right|_{t=s-0} \right) = 1$$

よって,

$$A(s)u_1'(s) - B(s)u_2'(s) = 1$$

ところで, $A(s)u_1(s) = B(s)u_2(s)$ であることを用いれば, ロンスキアン $W(u_1, u_2) = u_1u_2' - u_2u_1'$ として,

$$\begin{aligned} A(s) &= -\frac{u_2}{u_1u_2' - u_2u_1'} = -\frac{u_2}{W(u_1, u_2)} \\ B(s) &= -\frac{u_1}{u_1u_2' - u_2u_1'} = -\frac{u_1}{W(u_1, u_2)} \end{aligned}$$

である. $u_1'(t)=\sqrt{z}\cosh(\sqrt{z}t), u_2'(t)=\sqrt{z}\cosh(\sqrt{z}(t-1))$ なので,

$$\begin{aligned}W(u_1,u_2)&=\sqrt{z}\{\sinh\sqrt{z}t\cosh\sqrt{z}(t-1)-\cosh\sqrt{z}t\sinh\sqrt{z}(t-1)\}\\&=\sqrt{z}\sinh\sqrt{z}(\cosh^2(\sqrt{z}t)-\sinh^2(\sqrt{z}t))\\&=\sqrt{z}\sinh\sqrt{z}\end{aligned}$$

よって,

$$\begin{aligned}A(s)&=-\frac{\sinh(\sqrt{z}(s-1))}{\sqrt{z}\sinh\sqrt{z}}\\B(s)&=-\frac{\sinh(\sqrt{z}s)}{\sqrt{z}\sinh\sqrt{z}}\end{aligned}$$

であり, 求めるグリーン関数 $g(s,t)$ は

$$g(t,s;z)=\begin{cases}-\dfrac{\sinh(\sqrt{z}t)\sinh(\sqrt{z}(s-1))}{\sqrt{z}\sinh\sqrt{z}} & (0\le t\le s\le 1)\\ -\dfrac{\sinh(\sqrt{z}(t-1))\sinh(\sqrt{z}s)}{\sqrt{z}\sinh\sqrt{z}} & (0\le s\le t\le 1)\end{cases}$$

次に, $z=0$ とする. この場合,

$$\begin{aligned}u_1(t)&=t\\u_2(t)&=t-1\end{aligned}$$

としてよい. $W(u_1,u_2)=t-(t-1)=1$ なので,

$$\begin{aligned}A(s)&=-s+1\\B(s)&=-s\end{aligned}$$

となる. よって, 求めるグリーン関数 $g(s,t)$ は

$$g(t,s;0)=\begin{cases}t(1-s) & (0\le t\le s\le 1)\\ s(1-t) & (0\le s\le t\le 1)\end{cases}$$

である.

....

g の表示から x は明らかに $D(T)$ に入るので, $y=(zI-T)x$ とかける. これより, $zI-T$ の値域は X 全体であり. $z\in\rho(T)$ である.

解答

例 6.1.3 において, $D(T) \subset C^1[0,1]$ を示せ.

（わからん... ソボレフ空間 $H^1(0,1)$ に属する x' が与えられた条件下で連続関数になることを言いさえすればいいけど...)

（おしまい）

解答

例 6.1.3 において, T が閉作用素であることを示せ.

$x_n \in D(T), x_n \to x \in X, Tx_n \to y \in X$ とする. $x \in D(T)$ かつ $Tx_n = y$ であることを示せばよい.
$H^1(0,1)$ のノルムは

$$\|u\|_{H^1(0,1)} = \|u'\|_{L^2(0,1)}$$

であったことに注意する.
$x_n \in D(T)$ より $x_n' \in L^2(0,1)$ であり,

$$x_n'(t) = x_n'(0) + \int_0^t x_n''(s)\mathrm{d}s$$

と書ける. 微分作用素が閉作用素であることを示したときと同じように,

$$\left| \int_0^t x_n''(s)\mathrm{d}s - \int_0^t y(s)\mathrm{d}s \right| \leq \|x_n'' - y\|_{L^2(0,1)} \to 0$$

よって, $\int_0^t x_n''(s)\mathrm{d}s$ は $\int_0^t y(s)\mathrm{d}s$ に一様収束. また, $x_n(0) = x_n(1) = 0$ より,

$$x_n(t) = \int_0^t x_n'(s)\mathrm{d}s = tx_n'(0) + \int_0^t \int_0^s x_n''(s')\mathrm{d}s'\mathrm{d}s$$

であったので, シュワルツの不等式から

$$\begin{aligned} t|x_n'(0) - x_m'(0)| &\leq |x_n(t) - x_m(t)| + \int_0^t \int_0^s |x_n''(s') - x_m''(s')|\mathrm{d}s'\mathrm{d}s \\ &\leq |x_n(t) - x_m(t)| + \int_0^t \int_0^1 |x_n''(s') - x_m''(s')|\mathrm{d}s'\mathrm{d}s \\ &\leq |x_n(t) - x_m(t)| + \|x_n'' - x_m''\|_{L^2(0,1)} \end{aligned}$$

よって, t について $[0,1]$ 上で積分すれば,

$$\frac{1}{2}|x_n'(0) - x_m'(0)| \leq \|x_n - x_m\|_{L^2(0,1)} + \|x_n'' - x_m''\|_{L^2(0,1)}$$

x_n, x_n'' は収束するので, $\{x_n'(0)\}$ はコーシー列. したがって収束列である. $x_n'(0) \to \alpha$ とする.
これより,

$$z(t) \equiv \alpha t + \int_0^t \int_0^s y(s')\mathrm{d}s'\mathrm{d}s$$

と定める. このとき, $z'(t) = \alpha + \int_0^t y(s)\mathrm{d}s, z''(t) = y(t)$ であって,

$$\begin{aligned}|x_n'(t) - z'(t)| &\leq |x_n'(0) - \alpha| + \int_0^t |x_n''(s) - y|\mathrm{d}s \\ &\leq |x_n'(0) - \alpha| + \|x_n''(s) - y\|_{L^2(0,1)} \to 0\end{aligned}$$

よって, x_n' は z' に一様収束し, したがって x_n' は L^2 ノルムで収束, 特に x_n は z に H^1 ノルムで収束する. $H^1(0,1)$ は完備空間なので, $z \in H^1(0,1)$. また,

$$|x_n(t) - z(t)| \leq t|x_n'(0) - z'(0)| + \|x_n'' - y\|_{L^2(0,1)} \to 0$$

なので, x_n は z に一様収束し, ゆえに x_n は L^2 ノルムで z に収束する. 極限の一意性から $x = z$ である. よって, $x \in H^1(0,1)$. さらに, $x'' = z'' = y$ より, L^2 ノルムで $x_n'' \to y$ なので, x_n' は H^1 ノルムで x' に収束. よって $x' \in H^1(0,1)$.
あとは $x(0) = x(1) = 0$ を示せばよい. z の定め方から,

$$x(0) = z(0) = 0$$

また,

$$|x_n(1) - z(1)| \leq |x_n'(0) - \alpha| + \|x_n'' - y\|_{L^2(0,1)} \to 0$$

よって, $x_n(1) \to z(1)$ である. 一方で, 任意の n について $x_n(1) = 0$ なので, $x_n(1) \to 0$. したがって, $x(1) = z(1) = 0$. 以上から, $x \in D(T)$ であり, $Tx = x'' = y$.

（おしまい）

7 コンパクト作用素

7.1 背景

与えられた $k(t,s), f(t)$ に対して, パラメータ λ を含む古典的な積分方程式

$$u(t) - \lambda \int_a^b k(t,s)u(s)\mathrm{d}s = f(t) \tag{7.1}$$

を解いて未知関数 $u(t)$ を求めたい.

式 (7.1) について, 区間 $[a,b]$ を n 等分して, 分点を $a = s_0 < s_1 < \cdots < s_n = b$ とし, 式 (7.1) の近似解として, $k_{i,j} = k(s_i, s_j)$ として

$$u(s_i) - \lambda \sum_{j=0}^{n} k_{i,j} u(s_j) \frac{b-a}{n} = f(s_i)$$

を考える. これは, $\boldsymbol{u} = (u(s_0), \cdots, u(s_n))^{\mathsf{T}}$ として $(I - \lambda \frac{b-a}{n} K)\boldsymbol{u} = \boldsymbol{f}$ と書ける. フレドホルムは, これを $n \to \infty$ とすることで (7.1) を解いた.

さらに, ヒルベルトは次のように考えた. $\{\varphi_i(t)\}$ を $L^2(a,b)$ の正規直交系として,

$$\begin{aligned} u(t) &= \sum_{i=1}^{\infty} c_i \varphi_i(t), \\ f(t) &= \sum_{i=1}^{\infty} f_i \varphi_i(t), \\ k(t,s) &= \sum_{i,j=1}^{\infty} \tilde{k}_{i,j} \varphi_i(t) \varphi_j(s) \quad \left(\tilde{k}_{i,j} = \int_a^b \int_a^b k(t,s) \varphi_i(t) \varphi_j(s) \mathrm{d}t \mathrm{d}s \right) \end{aligned}$$

と分解し, 式 (7.1) に代入すると,

$$c_i - \lambda \sum_{j=0}^{\infty} \tilde{k}_{i,j} c_j = f_i \tag{7.2}$$

となる. 各 $c_i, f_i, \tilde{k}_{i,j}$ はフーリエ係数なので,

$$\sum_{i=0}^{\infty} |c_i|^2 < \infty \quad \sum_{i=0}^{\infty} |f_i|^2 < \infty \quad \sum_{i,j=0}^{\infty} |\tilde{k}_{i,j}|^2 < \infty.$$

$\tilde{f} = (f_1, f_2, \cdots), \tilde{c} = (c_1, c_2, \cdots)$ とおくと, $\tilde{f}, \tilde{c} \in l^2$ である. ここで, l^2 上の有界線形作用素 K を

$$\tilde{c} \mapsto K \mapsto c = \left(\sum_{j=1}^{\infty} k_1 c_j, \sum_{j=1}^{\infty} k_2 c_j, \cdots \right)$$

と定義すると, 式 (7.2) は l^2 における方程式

$$(I - \lambda K)\tilde{c} = \tilde{f}$$

を解くことと同等.

あるいは, $k(t,s)$ を積分核とする作用素 K を考え,

$$(I - \lambda K)u = f \tag{7.3}$$

を関数空間上で解くことを考えてもよい.

リースとシャウダーは, 作用素 K のコンパクト性（完全連続性）を仮定すれば, フレドホルムの得た結果を式 (7.3) の場合にそのまま拡張できることを示した.

7.2 コンパクト作用素

定義 7.1: コンパクト作用素

X, Y: バナッハ空間.
線形作用素 $T: X \to Y$ について, X の中の任意の有界列 $\{x_n\}$ に対して点列 $\{Tx_n\}$ が Y のある元に収束するような部分列を含むとき, T をコンパクト (または完全連続) という.

T がコンパクト作用素なら, 有界作用素である. 実際, もし有界でなければ, $\|x_n\| \leq 1$ かつ $\|Tx_n\| \to \infty$ となるような点列が存在し, これはコンパクト性に反する.

例 7.2.1

$X = Y = C[0,1]$ とし,

$$Tu(t) = \int_0^1 k(t,s)u(s)\mathrm{d}s$$

と定める. ここで, $k(t,s)$ は $0 \leq t, s \leq 1$ において連続. $\{x_n\}$ を $C[0,1]$ の中の有界列とする: $\|x_n\| \leq M$. このとき,

$$y_n(t) = \int_0^1 k(t,s)x_n(s)\mathrm{d}s = Tx_n(t)$$

とすると, $\{y_n\}$ は一様有界. 実際, $\gamma = \max|k(t,s)|$ とすると, $\|y_n\| \leq \gamma M$ である. さらに, $\{y_n\}$ は同程度連続である. 実際, $k(t,s)$ は $[0,1] \times [0,1]$ で連続であり, またコンパクト距離空間から距離空間への連続写像は一様連続なので, $k(t,s)$ は一様連続. したがって, 任意の $\epsilon > 0$ について

$$|k(t,s) - k(t',s')| \leq \epsilon \quad (|t-t'| < \delta, 0 \leq s \leq 1)$$

となるような $\delta > 0$ が存在する. よって, $|t - t'| < \delta$ なら

$$|y_n(t) - y_n(t')| \leq \int_0^1 |k(t,s) - k(t',s)||x_n(s)|\mathrm{d}s \leq \epsilon M$$

となる. したがって, $\{y_n\}$ は同程度連続.

アスコリ・アルゼラの定理から, $\{y_n\}$ から一様収束する部分列が取り出せて, その部分列は $C[0,1]$ のノルムで収束する. これより, T はコンパクトである.

アスコリ・アルゼラの定理はあとで証明する.
コンパクト作用素のいくつかの重要な性質を確認する.

定理 7.2.1

コンパクト作用素は弱収束列を強収束列に写す.

証明

弱収束列 $\{x_n\}$ について, これは有界列である. さらに, T は連続なので, $\forall g \in Y^*$ について, $f = g \circ T$ とすると $f \in X^*$. よって, $|g(Tx_n) - g(Tx_0)| = |f(x_n) - f(x_0)| \to 0$ であり, これより $\{Tx_n\}$ は Y 上の弱収束列. つまり,

$$y_n = Tx_n \to Tx_0 = y_0 \text{ (weakly)}.$$

もし $\{y_n\}$ が y_0 に強収束しなければ,

$$\left\|y_{n_j} - y_0\right\| > \delta > 0 \quad (j = 1, 2, \cdots)$$

となる部分列 $\{y_{n_j}\}$ が存在. 明らかに $\{x_{n_j}\}$ は有界列なので, T のコンパクト性から $\{y_{n_j}\} = \{Tx_{n_j}\}$ から強収束する部分列 $\{Tx_{n_{j'}}\} = \{y_{j'}\}$ を取り出せる. その極限 y_1 は明らかにこの部分列の弱収束先でもあるので, 弱極限の一意性から $y_1 = y_0$. これは $\left\|y_{n_{j'}} - y_0\right\| > \delta$ に矛盾. よって, $\{y_n\}$ は y_0 に強収束.

（証明おしまい）

解答: 問 7.1

X が有限次元空間とする. T が X からバナッハ空間 Y への線形作用素とすると, T はコンパクトであることを示せ.

(証明)
$\{x_n\}$ を X の有界列とする. $\|x_n\|_X \leq M$ とする. X の基底を $e_1, \cdots, e_N$ とすると, 各 x_n は

$$x_n = x_n^1 e_1 + \cdots + x_n^N e_N = \sum_{i=1}^{N} x_n^i e_i$$

とかける. 特に, ノルムを $\|x\|_X = \max|x^i|$ としてよい. なぜなら, 有限次元空間上の任意のノルムは同値だからである. 特に, このノルムについて $\|e_i\|_X = 1$ で, $\max|x_n^i| \le M$.
$\{Tx_n\}$ が収束する部分列を持つことを示す. $\{\|Tx_n\|_Y\}$ について,

$$\|Tx_n\| \le \sum_{i=1}^{N} |x_n^i| \|Te_i\|_Y \le NM \max \|Te_i\|_Y$$

であるから, 実数列 $\{\|Tx_n\|_Y\}$ は収束する部分列を持つ. これを $\{\left\|Tx_{n_j}\right\|_Y\}$ とする. この収束先を y_0 とすると,

$$\left\|Tx_{n_j} - Tx_{n_k}\right\|_Y \le \left\|Tx_{n_j}\right\|_Y - \|Tx_{n_k}\|_Y \to y_0 - y_0 = 0$$

よって, $\{Tx_{n_j}\}$ はコーシー列であり, Y がバナッハ空間だから $\{Tx_{n_j}\}$ は Y のノルムで収束. これより, T はコンパクト.

（おしまい）

解答: 問 7.2

X がバナッハ空間とする. T が X から有限次元空間 Y への有界線形作用素とすると, T はコンパクトであることを示せ.

$\{x_n\}$ を X の有界列とする. $\|x_n\|_X \le M$ とする. T は有界作用素なので, $\|Tx\|_Y \le M'\|x\|_X$. よって,

$$\|Tx_n\|_Y \le M'\|x_n\|_X \le M'M$$

これから, 実数列 $\{\|Tx_n\|_Y\}$ は収束する部分列を持つ. 部分列を $\{\left\|Tx_{n_j}\right\|_Y\}$ とし, 極限の値を x_0 とする. (Y はバナッハ空間とは限らないことに注意!)

ところで, Y の基底を $e_1, \cdots, e_N$ とし, ノルムを $\|x\| = \max|x^i|$ とする. 各 $\theta \in [0, 2\pi]$ について $\{\left\|Tx_{n_j} + x_0 \exp(i\theta)e_k\right\|\}$ は収束する. その極限 $y_k(\theta)$ とすると,

$$\begin{aligned}
|y_k(\theta) - y_k(\theta')| &= \lim_{j\to\infty} |\left\|Tx_{n_j} + x_0 \exp(i\theta)e_k\right\| - \left\|Tx_{n_j} + x_0 \exp(i\theta)e_k\right\|| \\
&\lim_{j\to\infty} \left\|Tx_{n_j} + x_0 \exp(i\theta)e_k\right\| - \left\|Tx_{n_j} + x_0 \exp(i\theta')e_k\right\| \\
&\le \lim_{j\to\infty} \|x_0(\exp(i\theta) - \exp(i\theta'))e_k\| \\
&\le |x_0||\exp(i\theta) - \exp(i\theta')|
\end{aligned}$$

これより, $y_k(\theta)$ が連続であることがわかる. $[0,2\pi]$ はコンパクトなので, $y_k(\theta)$ は最大値, 最小値をもつ. 特に, ある k, ある θ で $y_k(\theta)=2|x_0|$ となる. このとき, $z_k=|x_0|\exp(i\theta)$ とすると, $\{Tx_{n_j}-z_ke_k\}$ の第 k 成分は 0 に収束し, さらに $\{\|Tx_{n_j}-z_ke_k\|\}$ は収束する. これを繰り返す. (N 回行われる)
これにより, $\{\|Tx_{n_j}-z_1e_1-\cdots-z_Ne_N\|\}$ は 0 に収束する. つまり, $Tx_{n_j}\to\sum z_ke_k$. これは, T がコンパクトであることを示している.

（おしまい）

コンパクト作用素全体を $\mathscr{L}_c(X,Y)$ で表す. $\mathscr{L}_c(X,Y)$ の性質を確認しよう.

定理 7.2.2

$\mathscr{L}(X,Y)$ に作用素ノルムを備えたバナッハ空間と見なしたとき, $\mathscr{L}_c(X,Y)$ は $\mathscr{L}(X,Y)$ の中の閉部分空間.

証明

$T_1,T_2\in\mathscr{L}_c(X,Y)$ とする. 任意の X の有界列 $\{x_n\}$ に対して $\{T_1x_n\}$ が収束する部分列 $\{x_n^{(1)}\}$ が存在. さらに T_2 はコンパクトなので, $\{T_2x_n^{(1)}\}$ が収束する部分列 $\{x_n^{(2)}\}$ が存在. これより, $\lambda_1,\lambda_2\in\mathbb{C}$ について, $\lambda_1T_1x_n^{(1)}+\lambda_2T_2x_n^{(2)}$ は収束. ゆえに, $\lambda_1T_1+\lambda_2T_2\in\mathscr{L}(X,Y)$.
$\{T_n\}$ を $\mathscr{L}_c(X,Y)$ のコーシー列とする. これは $\mathscr{L}(X,Y)$ のコーシー列なので, $T\in\mathscr{L}(X,Y)$ が存在して $T_n\to T$.
さて, 任意の有界列 $\{x_n\}$ をとる. $\|x\|\le M$ とする. T_1 はコンパクトなので, $\{T_1x_n\}$ が収束する部分列 $\{x_n^{(1)}\}$ が取り出せる. また, T_{k-1} はコンパクトなので, $\{T_{k-1}x_n^{(k-1)}\}$ が収束する列 $\{x_n^{(k-1)}\}$ から $\{T_kx_n^{(k)}\}$ が収束する部分列 $\{x_n^{(k)}\}$ を取りだせる. $y_k=x_k^{(k)}$ とおくと, すべての j について $k>j$ ならば $\{y_k\}$ は $\{x_n^{(j)}\}$ の部分列であり, $\{T_jy_k\}$ は収束列. 他方で, 任意の $\epsilon>0$ について $\|T_j-T\|<\epsilon$ となる j を固定する. このとき, $\{y_k\}$ は $\{x_n\}$ の部分列だから $\|y_k\|\le M$ であり,

$$\begin{aligned}\|Ty_k-Ty_m\|&\le\|Ty_k-T_jy_k\|+\|T_jy_k-T_jy_m\|+\|T_jy_m-Ty_m\|\\&\le 2\epsilon M+\|T_jy_k-T_jy_m\|\end{aligned}$$

$\{T_jy_k\}$ は収束列なので,

$$\lim_{k,m\to\infty}\sup\|Ty_k-Ty_m\|\le 2\epsilon M$$

ϵ は任意なので, $\{Ty_k\}$ は Y のコーシー列であり, Y はバナッハ空間だから収束列. $\{y_k\}$ は $\{x_n\}$ の部分列なので, T はコンパクト.

（証明おしまい）

定理 7.2.3

X, Y, Z: バナッハ空間. このとき,

(i) $S \in \mathscr{L}_c(X, Y), T \in \mathscr{L}_c(Y, Z)$ ならば, $TS \in \mathscr{L}_c(X, Z)$.

(ii) $S \in \mathscr{L}(X, Y), T \in \mathscr{L}_c(Y, Z)$ ならば, $TS \in \mathscr{L}_c(X, Z)$

証明

(i) $\{x_n\}$ を X の有界列とする. $\{Sx_n\}$ が収束するような部分列 $\{x_n^{(1)}\}$ を取り出せる. $\{Sx_n^{(1)}\}$ は収束列だから, $\{TSx_n^{(1)}\}$ も収束列. よって, TS はコンパクト.

(ii) $\{x_n\}$ を X の有界列とする. S は有界なので $\{Sx_n\}$ は Y の有界列である. T はコンパクトだから, $\{TSx_n\}$ が収束するような部分列 $\{Sx_n^{(1)}\}$ が取れる. このとき $\{x_n^{(1)}\}$ は $\{x_n\}$ の部分列. ゆえに TS はコンパクト.

(証明おしまい)

定理 7.2.4

$T \in \mathscr{L}_c(X, Y)$ であることと $T^* \in \mathscr{L}_c(Y^*, X^*)$ は同値.

証明

$T^* \in \mathscr{L}_c(Y^*, X^*)$ を示す. $\{y_n^*\}$ を Y^* の有界列とする. $\|y_n^*\| \leq M$ とする.
$TB(0; M) = \{Tx | x \in B(0; M)\}$ について, $\overline{TB(0; M)}$ はコンパクト集合なので, アルゼラの定理から $\overline{TB(0; M)}$ 上一様収束する部分列 $\{y_{n_k}^*\}$ を $\{y_n^*\}$ から選ぶことができる.
ゆえに, $y^*(y) = \langle y^*, y \rangle$ とかけば,

$$\langle y_{n_k}^*, Tx \rangle = \langle T^* y_{n_k}^*, x \rangle$$

が $B(0; M)$ 上で一様収束. したがって, $\{T^* y_{n_k}^*\}$ は $B(0; M)$ 上一様収束. これは, 汎関数のノルムの意味での収束を意味する.
(汎関数 f の K 上でのノルムは

$$\|f\|_K = \sup_{x \in K, \|x\| \leq 1} |f(x)|$$

であった.)
したがって, $\{T^* y_{n_k}^*\}$ は X^* での収束列であり, T^* はコンパクト.

逆を示す．T^* をコンパクトと仮定する．$\{x_n\}$ を X の有界列とする．$\|x\| \leq M$. T^* がコンパクトより, $T^{**} \in \mathscr{L}_{c(X^{**},Y^{**})}$. よって, $\{T^{**}x_n\}$ は Y^{**} で収束する部分列をもつ．しかるに, $T^{**}x_n = Tx_n$ であるから $\{Tx_n\}$ は Y^{**} で収束する部分列をもつ. $Tx_n \in Y$ かつ Y はバナッハ空間であって Y^{**} の中で閉じているから, $\{Tx_n\}$ は Y の中での収束列. よって, T はコンパクト.

（証明おしまい）

7.2.1 アスコリ・アルゼラの定理

ここで, アスコリ・アルゼラの定理を示しておく．$\{f_n\}$ が一様有界とは, 定義域上の任意の x について $|f_n(x)| \leq M$ が成立すること．また関数列が同程度連続であるとは, 任意の $\epsilon > 0$ に対してある $\delta > 0$ が存在し, $|x-y| < \delta$ ならば $|f_n(x) - f_n(y)| < \epsilon$ が, すべての f_n について成り立つことを言う.

アスコリ・アルゼラの定理は, 有界閉区間上で定義される実数値連続関数 $\{f_n\}$ が一様有界かつ同程度連続であるならば, 一様収束する部分列 $\{f_{n_k}\}$ が存在する, というものである.

これは言い換えると, 次のようになる.

定理 7.2.5: アスコリ・アルゼラの定理

K をバナッハ空間 X のコンパクト集合, $\{f_n\}$ を $\|f_n\|$ を X^* の有界列: $\|f_n\| \leq M$.
このとき, K 上一様収束する $\{f_n\}$ の部分列が存在.

証明

X を可分とした場合について証明する．K のなか稠密な部分集合を D とする．完備距離空間においてコンパクト集合は全有界集合なので, 任意の $\epsilon > 0$ に対して有限個の D の元 $x_1, x_2, \cdots, x_m$ が存在し,
$K \subset \bigcup B(x_j, \epsilon)$ とできることに注意.
さて, f_n の定義域を K に制限したものを考え, これも $f_n \in K^*$ とする．これは有界関数列である.

$$|f_n(x_1)| \leq \|f_n\|_K \|x_1\| \leq M \max \|x_i\|$$

より，実数（複素数）列 $\{f_n(x_1)\}$ は有界であり，収束する部分列 $\{f_{1n}(x_1)\}$ が取れる． こうして構成した $\{f_{1n}\}$ に対して，$\{f_{1n}(x_2)\}$ も有界なので, これにより収束する部分列 $\{f_{2n}(x_2)\}$ が取れる．これを繰り返すことで, 各 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ を代入した際に収束する部分列 $\{g_n\} = \{f_{nn}\}$ を取り出せる．ハーン・バナッハの定理から, 定義域を

X に拡張してもよい.
あとは K^* のノルムで g_n が収束することを示せばよい. K^* は汎関数の部分空間上のノルムでバナッハ空間（のはず...）. よって, $\{g_n\}$ が K^* のコーシー列であることを示す.
$x_1, \cdots, x_n$ の取り方から, 任意の x に対して $\|x - x_i\| < \epsilon$ となる i が存在する.

$$
\begin{aligned}
|g_k(x) - g_m(x)| &\leq |g_k(x) - g_k(x_i)| + |g_k(x_i) - g_m(x_i)| + |g_m(x) - g_m(x_i)| \\
&\leq \|g_k\|\|x - x_i\| + |g_k(x_i) - g_m(x_i)| + \|g_m\|\|x - x_i\| \\
&\leq 2M\epsilon + |g_k(x_i) - g_m(x_i)|
\end{aligned}
$$

$\{g_n(x_i)\}$ は収束列なので, 十分大きな k, m で $|g_k(x_i) - g_m(x_i)| \leq M\epsilon$ となるから,

$$|g_k(x) - g_m(x)| \leq 3M\epsilon$$

したがって, 両辺の上限を取れば

$$\|g_k - g_m\|_K \leq 3M\epsilon$$

ϵ は任意だから, $\{g_n\}$ はコーシー列であることがわかる. よって K^* のノルムで収束し, 特に K^* のノルムの決め方から $\{g_n\}$ は K 上で一様収束.

（証明おしまい）

7.3 ヒルベルト空間におけるコンパクト作用素の固有関数展開

無限次元の作用素でも対角化みたいなことしたい.

定理 7.3.1: コンパクト作用素の固有関数展開

X: 無限次元可分なヒルベルト空間.
T: コンパクトな自己共役作用素.
このとき, 固有値 $\{\lambda_n\}_n^\infty (\lambda_n \neq 0)$ に対応する固有ベクトル $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ からなる正規直交系が存在し, 任意の $x \in X$ は

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} c_k x_k + x' \tag{7.4}$$

と一意に表される. ただし, x' は $Tx' = 0$ となる X の元.

さらに,

$$Tx = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k c_k x_k \tag{7.5}$$

ここで, λ_n は実数で, $n \to \infty$ のとき 0 に近づく.

$T \neq 0$ と仮定してよい. 証明の前に, 2 つの命題を示す.

命題 7.3.1

ヒルベルト空間における有界な自己共役作用素の固有値はすべて実数.

証明

$Tx = \lambda x, \|x\| \neq 0$ とすれば, $T = T^*$ なので,

$$\lambda \|x\|^2 = (Tx, x) = (x, Tx) = (x, \lambda x) = \overline{\lambda} \|x\|^2$$

よって, $\lambda = \overline{\lambda}$

（証明おしまい）

命題 7.3.2

有界な自己共役作用素の異なる固有値に対応する固有ベクトルは互いに直交.

証明

$Tx_1 = \lambda_1 x_1, Tx_2 = \lambda_2 x_2$ として,

$$\lambda_1 (x_1, x_2) = (Tx_1, x_2) = (x_1, Tx_2) = \overline{\lambda_2} (x_1, x_2)$$

$\lambda_1 \neq \lambda_2$ より $(x_1, x_2) = 0$.

（証明おしまい）

まず補題を用意. $Q(y)$ を以下のように定める.

$$Q(y) \equiv (Ty, y), \quad y \in X$$

補題 7.3.1

$\{y_n\}$ が y に弱収束し, T がコンパクト作用素なら, $Q(y_n) \to Q(y)$

証明

$$Q(y_n) - Q(y) = (Ty_n - Ty, y_n) + (Ty, y_n - y)$$

である. T はコンパクトだから, $\{Ty_n\}$ は強収束し, $\|Ty_n - Ty\| \to 0$.
また $\{y_n\}$ は弱収束列だから有界. よって,

$$|(Ty_n - Ty, y_n)| \leq \|Ty_n - Ty\|\|y_n\| \to 0$$

また, 仮定から

$$|(Ty, y_n - y)| \leq \|Ty\|\|y_n - y\| \to 0$$

よって,

$$|Q(y_n) - Q(y)| \leq |(Ty_n - Ty, y_n)| + |(Ty, y_n - y)| \to 0$$

（証明おしまい）

補題 7.3.2

T: 有界な自己共役作用素
$|(Ty, y)|$ が単位球 $\|y\| = 1$ 上のある点 y_0 で最大値を取ると仮定する.
このとき, $(y_0, y) = 0$ となるすべての $y \in X$ について

$$(Ty_0, y) = (y_0, Ty) = 0$$

となる. 特に, すべての $y \in X$ について $(Ty, y) = 0$ ならば $T = 0$.

証明

$(y_0, y) = 0$ となるすべての $y \in X$ に対して, $\lambda \in \mathbb{C}$ として

$$x = \frac{y_0 + \lambda y}{\sqrt{1 + |\lambda|^2 \|y\|^2}}$$

とおく. 明らかに $\|x\| = 1$ であって, $|Q(x)| \leq |Q(y_0)|$. さらに, $x = y_0 + \lambda y + O(|\lambda|^2)$.
$\lambda = t\overline{(Ty_0, y)}$ とすると,

$$Q(x) = Q(y_0) + 2t|(Ty_0, y)|^2 + O(t^2).$$

もし $(Ty_0, y) \neq 0$ ならば, $|t|$ を十分小さくとることによって, $|Q(x)| > |Q(y_0)|$ とできる. ($Q(y_0) \geq 0$ なら $t > 0$, $Q(y_0) < 0$ ならば $t < 0$ とする.) これは矛盾. よって, $(Ty_0, y) = 0$.

$Q(y) = 0 (y \in X)$ と仮定すると,

$$Q(y+z) = Q(y) + 2\mathrm{Re}(Ty, z) + Q(z) = 2(Ty, z) = 0 \quad (y, z \in X)$$

であるから, $Ty = 0$. よって, $T = 0$.

（証明おしまい）

補題 7.3.3

$|Q(y)|$ が単位球上 $y = y_0$ で最大値を取るとすれば, この y_0 は作用素 T の固有ベクトルで, その固有値 λ_0 で $|\lambda_0| = |Q(y_0)|$.

証明

y_0 で張られる 1 次元部分空間 X_0

$$X_0 = \{\lambda y_0 | \lambda \in \mathbb{C}\}.$$

このとき, X_0 は閉部分空間なので, 直交分解できて,

$$X = X_0 + X_0^{\perp}$$

$y \in X_0^{\perp}$ とすると, $(y_0, y) = 0$ であるから, 補題7.3.2 より $(Ty_0, y) = 0$.
ゆえに, $Ty_0 \in X_0$, すなわち, $Ty_0 = \lambda_0 y_0$ となる λ_0 が存在.

（証明おしまい）

さて, 準備がおわったので, 定理 7.3.1 の証明を行おう.

証明

(Step 1) まず式 (7.4) の c_k, x' が x によって一意に定まることを示す. x が式 (7.4) で書けているとする. 固有ベクトル $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ の中から適当に x_p を選び, x との内積を取ると,

$$(x, x_p) = \sum_k c_k (x_k, x_p) + (x', x_p) = c_p$$

実際, $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ は正規直交系なので, $(x_k, x_p) = \delta_{k,p}$. また, $Tx_p = \lambda_p x_p$ として, $\lambda_p \neq 0$ より,

$$(x', x_p) = \lambda_p^{-1}(x', Tx_p) = \lambda_p^{-1}(Tx', x_p) = 0$$

である. これより, c_p は x によって一意に定まり, $c_p = (x, x_p)$. さらに $x' = x - \sum_k c_k x_k$ と書けて, x' は x によって一意.

(Step 2)

$$s = \sup_{\|x\| \le 1} |(Tx, x)|$$

とおく. $s = 0$ ならば補題 7.3.2 より $T = 0$ となり, 定理が成立.

$s \neq 0$ とする. この場合, まず固有値 λ_1 とそれに対応する固有ベクトル x_1 を構成しよう. $|Q(x)| = |(Tx, x)|$ が単位球面上のある x_1 で最大値を取ることを示せば, 補題 7.3.3 より x_1 は固有ベクトルで, 固有値 λ_1 は $|(Tx_1, x_1)| = |\lambda_1|$ をみたす.

s の定義から, $\left\|x^{(k)}\right\| \le 1$ であって

$$\lim_{k \to \infty} |(Tx^{(k)}, x^{(k)})| = s$$

となる点列 $\{x^{(k)}\}$ がある. X の単位球 $B = \{x \in X | \|x\| \le 1\}$ は弱コンパクトである. 実際, リースの表限定理からヒルベルト空間 X は反射的バナッハ空間であることがわかり, 反射的バナッハ空間上での有界列は弱収束する部分列をもつことから B は弱コンパクトである. これにより, 点列 $\{x^{(k)}\}$ には弱収束する部分列 $\{x^{(k')}\}$ が存在. この収束先を x_1 とする.

$$\|x_1\| \le \liminf \left\|x^{(k')}\right\| \le 1$$

また, T はコンパクト作用素だから $\{Tx^{(k')}\}$ は $\{Tx_1\}$ は強収束. よって, 補題 7.3.1 から

$$(Tx^{(k')}, x^{(k')}) \to (Tx_1, x_1)$$

以上から,

$$|(Tx_1, x_1)| = s = \sup_{\|x\| \le 1} |(Tx, x)|$$

もし $x_1 = 0$ ならば $T = 0$ となるから, $x_1 \neq 0$. もし $\|x\| < 1$ ならば, $y_1 = x_1 / \|x_1\|$ とおくと $\|y_1\| = 1$ かつ

$$|(Ty_1, y_1)| = \|x_1\|^{-2} |(Tx_1, x_1)| > |(Tx_1, x_1)|$$

なので矛盾. よって, $\|x_1\| = 1$ であり, $|Q(x)|$ が単位球の上で最大値をとる.

(Step 3) いま, 固有値 $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ と固有ベクトル $x_1, \cdots, x_n$ が構成されたとする.

$$Y_n = \left\{ \sum_{j=1}^{n} \alpha_j x_j | \alpha_j \in \mathbb{C} \right\}$$

とおくと, これは X の閉部分空間. X_n を Y_n の直交ホ空間とする (つまり, $X = X_n + Y_n$.)

任意の $y \in Y_n$ に対して,

$$Ty = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j T x_j = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \lambda_j x_j \in Y_n$$

であり, 任意の $x \in X_n$ に対して,

$$(Tx, y) = (x, Ty) = 0.$$

ゆえに, $Tx \in X_n$. T はヒルベルト空間 X_n の中でも自己共役なコンパクト作用素. Step 2 の結果を X_n に対して用いる.

$$s_n = \sup_{x \in X_n, \|x\| \leq 1} |(Tx, x)|$$

とおいたとき,

(i) $s_n = 0$ の場合.
$x' \in X_n$ に対して $Tx' = 0$ となるので, 固有値は $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$, 固有ベクトル $x_1, \cdots, x_n$ であって, 任意の $x \in X$ は $x = y + x' = \sum \alpha_k x_k + x'$ と書けて, 定理が成立.

(ii) $s_n > 0$ の場合.
Step 2 の結果から固有値 λ_{n+1} と固有ベクトル x_{n+1} を得る.

このような操作を次々と行う. 可算無限の固有値の列 $\{\lambda_k\}$ と対応する固有ベクトルの列 $\{x_k\}$ を得る.

$\lambda_k \to 0$ を示そう. 各 X_k の取り方から $\{x_k\}$ は正規直交系ゆえに有界列であり, 部分列 $\{x_{k'}\}$ がある点 $x \in X$ に弱収束する. $k \neq j$ のとき $(x_k, x_j) = 0$ より j を固定した下で, $f(y) = (y, x_j)$ は連続線形汎関数なので,

$$\lim_{k' \to \infty} (x_{k'}, x_j) = (x, x_j) = 0$$

よって, 任意の j について $(x, x_j) = 0$. つまり $(x_j, x) = 0$. また $g(y) = (y, x)$ は連続線形汎関数なので,

$$\lim_{k' \to \infty} (x_{k'}, x) = (x, x) = 0$$

以上から $x = 0$. 任意の収束する部分列の収束先が 0 なので, $\{x_k\}$ は 0 に弱収束する. T はコンパクト作用素なので, $\{Tx_{k'}\}$ は 0 に強収束. $Tx_k = \lambda_k x_k$ と $\|x_k\| = 1$ より, $\|Tx_k\| = |\lambda_k| \|x_k\| = |\lambda_k| \to 0$.

次に,

$$X_0 = \bigcap_n X_n, \quad Y = \bigcup_n Y_n \text{の閉包}$$

とおくと, X は X_0 と Y に直交分解: $X = X_0 + Y$. 特に, 任意の $y \in Y$ は

$$y = \sum_{k=1}^{\infty} c_k x_k$$

と表される. (閉集合だから.)

$x \in X_0$ とすると, 任意の n に対して $x \in X_n$ であり, s_n の定義より

$$|(Tx, x)| \leq s_n \|x\|^2.$$

Step 2 より $s_n = |\lambda_n|$ であり, $\lambda_n \to 0$ より, $(Tx, x) = 0$. ゆえに補題 7.3.2 より $Tx = 0 \quad (x \in X_0)$. かくして, 任意の $x \in X$ は

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} c_k x_k + x', \quad Tx' = 0$$

の形に表される. これより, $Tx_k = \lambda_k x_k$ より,

$$Tx = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \lambda_k x_k$$

(証明おしまい)

7.4 リースの理論とリース・シャウダーの定理

補題 7.4.1

T:X の中のコンパクト作用素, $\lambda \neq 0$.
もし,

$$(\lambda I - T)x_n \to 0, \quad \|x_n\| = 1 \tag{7.6}$$

なる点列 $\{x_n\}$ が存在すれば, λ は T の固有値.

証明

T:コンパクト作用素であるから, $\{Tx_n\}$ から収束する部分列 $\{Tx_{n'}\}$ が存在. よって, 式 (7.6) と $\lambda \neq 0$ より,

$$|\lambda|\|x_{n'} - x_{m'}\| \leq \|(\lambda I - T)x_{n'} - (\lambda I - T)x_{m'}\| + \|Tx_{n'} - Tx_{m'}\| \to 0$$

よって, $\{x_{n'}\}$ 自身コーシー列. その極限を x とすれば, コンパクト作用素が有界作用素であることから $Tx_{n'} \to Tx$. これから, $\lambda x - Tx = 0$. また, $\|x_{n'}\| \to \|x\|$ より $\|x\| = 1$. よって, λ は固有値.

（証明おしまい）

補題 7.4.2

L: X の真閉部分空間.
このとき, 次の性質をもつ $x \in X$ が存在:

$$d(x, L) \equiv \inf_{y \in L} \|x - y\| > \frac{1}{2}, \quad \|x\| = 1.$$

証明

$z \in X \backslash L$ ととり, $\delta_0 = d(z, L)$ とおく. 点列 $\{y_n\}$ を $\|z - y_n\| = \delta_n \to \delta_0, y_n \in L$ となるようにとり, $x_n = \frac{z - y_n}{\delta_n}$ とおく. ($\delta_n > \delta_0$ である.)
このとき, $\|x_n\| = 1$ であって, $y_n - \delta_n y \in L$ より,

$$\inf_{y \in L} \|x_n - y\| = \inf_{y \in L} \frac{1}{\delta_n} \|z - y_n - \delta_n y\| \geq \inf_{y \in L} \frac{1}{\delta_n} \|z - y\| \geq \frac{\delta_0}{\delta_n}$$

以上から, 十分大きな n について $\delta_n < 2\delta_0$ であり, $\inf_{y \in L} \|x_n - y\| > \frac{1}{2}$. これより補題が成立.

（証明おしまい）

命題 7.4.1

$\{\lambda_n\}$: コンパクト作用素 T の相異なる固有値の列. このとき, $\lambda_n \to 0$.

証明

λ_n は固有値なので, $(\lambda_n I - T)x_n = 0, \|x_n\| = 1$ となる x_n が存在. よって $|\lambda_n| \le \|Tx_n\| \le \|T\|$. $\{\lambda_n\}$ は有界列であり, ゆえに収束する部分列 $\{\lambda_{n'}\}$ が存在.
$\lambda_{n'} \to \lambda$ とする. 以下, n' を n で表す.
$\lambda \neq 0$ と仮定して矛盾を導く. このとき,

$$\{x_n\} \text{ は 1 次独立.}$$

実際, もしある n で

$$x_{n+1} = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

と書ける. ($c_1, \cdots, c_n$ は少なくとも一つが非ゼロ). n として, このような性質をもつ最初の自然数とする. 両辺に $\lambda_{n+1} - T$ を作用させると,

$$0 = \sum_{j=1}^{n} c_j(\lambda_{n+1} - \lambda_j)x_j$$

$c_j \neq 0$ となる最大の $j \in \{1, \cdots, n\}$ で, $\lambda_{n+1} \neq \lambda_j$ より,

$$x_j = \{c_n(\lambda_{n+1} - \lambda_j)\}^{-1} \sum_{k=1}^{j-1} (\lambda_{n+1} - \lambda_k) c_k x_k.$$

$j - 1 < n$ より, これは n が最初であることに矛盾.
さて,

$$L_n = \left\{ \sum_{j=1}^{n} c_j x_j | c_j \in K \right\}$$

とおく. $L_1 \subset L_2 \subset \cdots$ は閉部分空間の列である. 補題 7.4.2 より, 各 n について

$$d(y_n, L_{n-1}) > \frac{1}{2}, \quad \|y_n\| = 1.$$

$\lambda \neq 0$ であるから, $\{y_n/\lambda_n\}$ は有界列と仮定してよい. ($\lambda_n = 0$ となる n はたかだか有限個であり, $\{\lambda_n\}$ の部分列として, すべての λ_n が非ゼロであるようなものが取れる).

$$y_n = \sum_{j=1}^{n} c_{nj} x_j$$

と表すと,

$$T(y_n/\lambda_n) = \sum_{j=1}^{n-1} c_{nj} \frac{\lambda_j}{\lambda_n} x_j + c_{nn} x_n \in L_n$$

適当な $y \in L_{n-1}$ により

$$\|T(y_n/\lambda_n) - T(y_k/\lambda_k)\| = \|y_n - y\| \quad (n > k)$$

したがって,

$$\|T(y_n/\lambda_n) - T(y_k/\lambda_k)\| > \frac{1}{2}.$$

T はコンパクト作用素かつ $\{y_n/\lambda_n\}$ は有界列なので, $\{T(y_n/\lambda_n)\}$ は収束する部分列を持つはずである. しかし, 上の式から $\{T(y_n/\lambda_n)\}$ はコーシー列ではない. これは矛盾.
以上から, $\lambda = 0$. したがって, どんな固有値列の部分列も 0 に収束する.

(証明おしまい)

命題 7.4.2

コンパクト作用素 T のスペクトルは, たかだか可算個の固有値からなる. ただし, その他に 0 があることもある.

証明

$\lambda \neq 0$ が T のレゾルベント集合 $\rho(T)$ の境界点であれば, $\lambda_n \in \rho(T)$ であって, $\lambda_n \to \lambda$ なる λ_n が存在. このとき, $\|R(\lambda_n)\| \to \infty$ である.
(実際, もし $\|R(\lambda_n)\|$ が有界なら, 任意の n について $\|R(\lambda_n)\| \leq M$ となる M が存在. 十分大きな n で $|\lambda - \lambda_n| < 1/M$ となるから,

$$|\lambda - \lambda_n|\|R(\lambda_n)\| < 1$$

となる. したがって, 命題 6.1.2 の証明のようにして $\lambda \in \rho(T)$ が示されるが, これは $\rho(T)$ が開集合であることと λ が境界点であることに矛盾.)
よって, $\|y_n\| = 1, \|R(\lambda_n)y_n\| \to \infty$ なる点列 $\{y_n\}$ が存在する. $x_n = R(\lambda_n)y_n/\|R(\lambda_n)y_n\|$ とおくと, $\|x_n\| = 1$ かつ

$$(\lambda I - T)x_n = (\lambda - \lambda_n)x_n + (\lambda_n I - T)x_n = (\lambda - \lambda_n)x_n + y_n/\|R(\lambda_n)y_n\|$$

右辺は 0 に収束するから, $(\lambda I - T)x_n \to 0$. 補題 7.4.1 より, λ は T の固有値である. $\rho(T)$ および $\sigma(T)$ の境界点は (0 以外は) 全て T の固有値である. しかし, 命題 7.4.1 より相異なる固有値の列は 0 に収束するから, $\sigma(T)$ の境界点のうち集積点であるのは 0 のみ. したがって, $\sigma(T)\backslash\{0\}$ は孤立点. ($\sigma(T)$ は閉集合であり, かつ境界点は 0 を除いて全て孤立点だから, 内点は存在せず, $\sigma(T)$ 上の点はすべて境界点であ

る.) 孤立点は境界だから, $\sigma(T)$ は 0 を除いてすべて固有値であり, その数はたかだか可算個. これに固有値 0 を加えても, 可算個.

（証明おしまい）

....

補足: $\sigma(T)\backslash\{0\}$ の点がすべて境界点であることのもう少しちゃんとした証明.

閉集合 A の境界 ∂A が 0 を含み, かつ $\partial A\backslash\{0\}$ が全て孤立点であるとする. A に内点が存在しないことを背理法によって示すため, $\mathrm{Int}(A) \neq \varnothing$ と仮定する.

(Step 1) $\overline{\mathrm{Int}(A)}$ の境界が 1 点集合 $\{0\}$ であることを示す.

まず, A は閉集合なので, $\overline{A} = A$ だから

$$A = \mathrm{Int}(A) \cup \partial A$$

であり,

$$A\backslash\{0\} = \mathrm{Int}(A) \cup (\partial A\backslash\{0\})$$

である. $\partial A\backslash\{0\}$ の点は全て孤立点だから, 任意の $x \in \partial A\backslash\{0\}$ について $B(x;\delta) \cap \mathrm{Int}(A) = \varnothing$ となる $\delta > 0$ が存在. したがって,

$$\overline{\mathrm{Int}(A)} \cap (\partial A\backslash\{0\}) = \varnothing \tag{7.7}$$

である.

一方で, $\mathrm{Int}(A) \subset A$ かつ A が閉集合なので, $\overline{\mathrm{Int}(A)} \subset A$. 特に $\partial\overline{\mathrm{Int}(A)} \subset A$. $x \in \partial\overline{\mathrm{Int}(A)}$ について,

$$\varnothing \neq B(x;\epsilon) \cap (X\backslash\overline{\mathrm{Int}(A)}) \subset B(x;\epsilon) \cap (X\backslash\mathrm{Int}(A))$$

もし $x \in \mathrm{Int}(A)$ ならば. ある $\epsilon_1 > 0$ について

$$B(x;\epsilon_1) \cap (X\backslash\mathrm{Int}(A)) = \varnothing$$

となって矛盾. よって, $x \in \partial\overline{\mathrm{Int}(A)}$ ならば $x \in \partial A$. 式 (7.7) より, $\partial\overline{\mathrm{Int}(A)} = \{0\}$ である.

(Step 2) 次に, $\mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$ において, 閉集合であって境界が 1 点集合であるものは存在しないことを示す. B を閉集合かつ境界が 1 点集合 $\{0\}$ であるものとする:

$$B = \mathrm{Int}(B) \cup \{0\}$$

半径 r の円周 $S_r = \{re^{i\theta} | r > 0, \theta \in [0, 2\pi]\}$ を考える．これは $\mathbb{C}$ における閉集合であるから，$B \cap S_r$ は閉集合であり，かつ（S_r の相対位相において）境界を持たない．したがって，

$$B \cap S_r = S_r$$

であって，

$$\begin{aligned}
\mathrm{Int}(B) &= B \cap (\mathbb{C} \backslash \{0\}) \\
&= B \cap \left(\bigcup_{r>0} S_r \right) \\
&= \bigcup_{r>0} (B \cap S_r) \\
&= \bigcup_{r>0} S_r \\
&= \mathbb{C} \backslash \{0\}
\end{aligned}$$

以上から，$B = \mathbb{C}$ がわかる．しかし，$\mathbb{C}$ は境界を持たないので，B の定め方に矛盾する．以上から，B のような集合は存在しないことがいえる．

A がもし内部を持てば，(Step 1) から $\overline{\mathrm{Int}(A)}$ は境界が $\{0\}$ となる $\mathbb{C}$ 上の閉集合になる．しかし，そのような閉集合は存在しないという (Step 2) の帰結に矛盾する．したがって，背理法から $\mathrm{Int}(A) = \varnothing$ がいえる．

ここで，命題 7.4.2 の状況の下では $\sigma(T)$ は閉集合であって境界が 0 を含み，かつ 0 以外の境界点が孤立点である．これから，$\sigma(T)$ が内点を持たないことがわかる．(補足おわり)

. . . .

話を戻す．広義固有空間を定義する．

定義 7.2: 広義固有空間

$\lambda \neq 0$ に対して，

$$N_j = N((\lambda I - T)^j) = \{x \in X | (\lambda I - T)^j x = 0\}$$

とおくと，$N_j \subset N_{j+1}, TN_j \subset N_j, (\lambda I - T)N_{j+1} \subset N_j$ となる．このとき，

$$N_{j_0} = N_{j_0+1}$$

となる最初の j_0 を固有値 λ に対するインデックスという．N_{j_0} を広義固有空間という．

命題 7.4.3

$\lambda \neq 0$: コンパクト作用素 T の固有値.
このとき, N_j は有限次元であり, インデックスは有限.

証明

まず N_1 が有限次元であることを示す. 一般の j の場合も同様にして示せる.
もし無限次元なら, 任意の n に対して N_1 から n 個の 1 次独立なベクトルを選ぶことができる. したがって, 命題 7.4.1 の証明と同じようにして, 可算個の 1 次独立な点列 $\{x_n\}$ で,

$$x_j \in N_1, \|x_j\| = 1, \|x_j - x_k\| > \frac{1}{2}$$

となるものが存在することがわかる. $Tx_j = \lambda x_j$ から, $|\lambda|^{-1}\|Tx_j - Tx_k\| > \frac{1}{2}$. 他方, $\|x_j\| = 1$ であるから $\{x_n\}$ は有界列であって, T はコンパクト作用素であるから $\{Tx_n\}$ は収束する部分列が取り出せるはずだが, しかし任意の j, k に対して $\|Tx_j - Tx_k\| > \frac{|\lambda|}{2}$ であることに反する. よって, N_1 は無限次元.

インデックスが有限であることを示す. $N_j \subsetneq N_{j+1}(j = 1, 2, \cdots)$ と仮定する. このとき, 補題 7.4.2 より

$$y_j \in N_1, \|y_j\| = 1, d(y_j, N_{j-1}) \geq \frac{1}{2}$$

となる点列 $\{y_j\}$ が存在. よって, $n > j$ とすると

$$\begin{aligned}
\|Ty_n - Ty_j\| &= \|(T - \lambda)y_n + \lambda y_n - Ty_j\| \\
&= |\lambda|\left\|y_n - \lambda^{-1}Ty_j\right\| \\
&\geq |\lambda| d(y_n, N_j) \\
&\geq |\lambda|/2
\end{aligned}$$

これは , $\{y_n\}$ は有界列であって $\{Ty_n\}$ からは収束する部分列を取り出せるということに矛盾する. よって, インデックスは有限.

（証明おしまい）

命題 7.4.4

$\lambda \neq 0$ とする. コンパクト作用素 T について, 作用素 $\lambda I - T$ の値域 $R(\lambda I - T)$ は閉部分空間である.

証明

$y \in \overline{(\lambda I - T)X}$ とする．このとき, $(\lambda I - T)x_n \to y$ となる $\{x_n\}$ が存在.
まず $d(x_n, N_1)$ が有界であることを示す．もし $d(x_n, N_1) \to \infty$ ならば, $z_n = x_n/d(x_n, N_1)$ について $d(z_n, N_1) = 1$. よって, $\|z_n - t_n\| < 2$ となる点 $t_n \in N_1$ が存在する．$s_n = z_n - t_n$ とおくと,

$$(\lambda I - T)s_n = (\lambda I - T)z_n = (\lambda I - T)x_n/d(x_n, N_1)$$

$\{(\lambda I - T)x_n\}$ は収束列ゆえに有界列であり, 仮定から $d(x_1, N_1)$ は発散するので, 右辺は 0 に収束．よって, $\lambda s_n - Ts_n \to 0$. 他方で $\{s_n\}$ は有界列だから, $\{Ts_n\}$ には収束する部分列がある．これを改めて $\{Ts_n\}$ とかく．$s_n = \lambda^{-1}(Ts_n + (\lambda s_n - Ts_n))$ より, $\{s_n\}$ 自身収束するので, その極限を s とすると, $Ts_n \to Ts, \lambda s_n - Ts_n \to 0$ より $\lambda s - Ts = 0$. よって, $s \in N_1$.
しかし, $d(s_n, N_1) \to d(s, N_1) = 1$. これは $s \in N_1$ に反する．よって, ある M によって $d(x_n, N_1) < M$. これより,

$$\|x_n - x'_n\| < M$$

となる $x'_n \in N_1$ が存在し, $(\lambda I - T)(x_n - x'_n) \to y$. T はコンパクト作用素であり, $\{x_n - x'_n\}$ は有界列なので, $\{T(x_n - x'_n)\}$ から収束する部分列が取り出せる．よって, 先ほどと同じ理由で $\{x_n - x'_n\}$ から収束する部分列を取り出せる．その極限を x とすれば, $T(x_n - x'_n) \to Tx$. よって, $\lambda x - Tx = y$ であり, $y \in R(\lambda I - T)$.

（証明おしまい）

さて, 本命のリース・シャウダーの交代定理を述べる.

定理 7.4.1: リース・シャウダーの交代定理 (第 1 型式)

T を X で稠密に定義されたコンパクト作用素とし, $\lambda \neq 0$ とする．このとき, 次の 3 つの条件は同値.

(i) $N(\lambda I - T) = 0$. 言い換えると, $\lambda I - T : X \to X$ は単射である.

(ii) $(\lambda I - T)^{-1}$ は有界．言い換えると, $\lambda I - T : X \to X$ は全単射かつ有界.

(iii) $(\lambda I - T)X = X$. 言い換えると, $\lambda I - T : X \to X$ は全射である.

証明

(ii) ⇒ (iii) は明らか.

(i) ⇒ (ii) を示す. (i) が成り立つ下で, $\lambda x - Tx \neq 0 (x \in X, x \neq 0)$ であるから, λ は固有値ではない. 命題 7.4.2 から, T がコンパクト作用素なら $\mathbb{C} = \rho(T) \cup \sigma_p(T)$ なので, $\lambda \in \rho(T)$. よって, $\lambda I - T$ は $D(T)$ 上で全単射であって, $(\lambda I - T)^{-1} \in \mathscr{L}(D(T))$ である. さらに, T は稠密に定義されているから, $\overline{D(T)} = X$. また命題 7.4.4 から $R(\lambda I - T) = D(T)$ は閉集合なので, $D(T) = X$. これは (ii) の成立を表している.

(iii) ⇒ (i) を示す. $x_1 \in N(\lambda I - T), x_1 \neq 0$ とする. (iii) より,

$$(\lambda I - T)x_2 = x_1$$

となる $x_2 \in X$ が存在する. このようにして, 帰納的に

$$(\lambda I - T)x_{n+1} = x_n$$

となる点列 $\{x_n\}$ を構成できる. このとき,

$$(\lambda I - T)^n x_{n+1} = x_1 \neq 0, \quad (\lambda I - T)^{n+1} x_{n+1} = 0$$

より, $N_{n+1} \subsetneq N_n$. これは命題 7.4.3 に矛盾. よって, $N(\lambda I - T) = 0$. (i) が成立.

（証明おしまい）

定理 7.4.2: リースの交代（択一）定理

T を X で稠密に定義されたコンパクト作用素とし, $\lambda \neq 0$ とする. このとき, 次の 6 つの条件は同値.

(i) $N(\lambda I - T) = 0$.

(ii) $(\lambda I - T)^{-1}$ は X 上有界.

(iii) $(\lambda I - T)X = X$.

(iv) $N(\lambda I - T^*) = 0$.

(v) $(\lambda I - T^*)^{-1}$ は X^* 上有界.

(vi) $(\lambda I - T^*)X^* = X^*$.

証明

定理**??**からTがコンパクト作用素ならT^*もコンパクト作用素である. したがって, リース・シャウダーの定理から, $(i),(ii),(iii)$は互いに同値であり, $(iv),(v),(vi)$は互いに同値である.
(iii) $\Rightarrow$ (iv) を示す. $y \in N(\lambda I - T^*)$とすると, $\lambda y - T^* y = 0$. 任意の$x \in X$に対して (iii) より$\lambda x' - Tx' = x$となる$x' \in X$が存在する. $y(x) = \langle y, x \rangle$とかくことにすれば,

$$\langle y, x \rangle = \langle y, (\lambda I - T)x' \rangle = \langle (\lambda I - T^*)y, x' \rangle = 0$$

よって, $y = 0$. これより, (iv) が成立.
(vi) $\Rightarrow$ (i) を示す. $x \in N(\lambda I - T), x \neq 0$と仮定. ハーン・バナッハの定理から, $\langle y, x \rangle = \|x\|$となる$y \in X^*$が存在. 一方で, (vi) から$(\lambda I - T^*)z = y$となる$z \in X^*$が存在する. したがって,

$$0 = \langle z, (\lambda I - T)x \rangle = \langle (\lambda I - T^*)z, x \rangle = \langle y, x \rangle = \|x\| > 0$$

となり, 矛盾. よって, $N(\lambda I - T) = 0$で, (i) が成立.
（証明おしまい）

ここで, $x \in X$と$y \in X^*$が直交するとは,

$$\langle y, x \rangle = y(x) = 0$$

であることとする. $A \subset X, B^* \subset X^*$について$A \perp B$とは任意の$x \in A, y \in B^*$について$x \perp y$となることをいい, $A^* \in X^*$とは任意の$x \in A$に対して$x \perp y$となる$y^* \in X^*$全体の集合とする.
また, 部分空間Lに属さない1次独立な元がk個取れて, $\{x_1, \cdots, x_k\}$とLがXを張るとき, Lの余次元$\mathrm{co} - \dim L$がkであるという.

定理 7.4.3

$\lambda \neq 0$とする. このとき,

(i) $R(\lambda I - T)^\perp = N(\lambda I - T^*)$.

(ii) $N(\lambda I - T)^\perp = R(\lambda I - T^*)$.

(iii) $\mathrm{co} - \dim(R(\lambda I - T)) = \dim N(\lambda I - T^*) = \dim N(\lambda I - T)$.

証明

(i) $y \in R(\lambda I - T)^\perp$に対して,

$$\langle y, (\lambda I - T)x \rangle = 0. \quad (x \in X)$$

これより,

$$\langle (\lambda I - T^*)y, x\rangle = 0. \quad (x \in X)$$

よって, $(\lambda I - T^*)y = 0$ であって $y \in N(\lambda I - T^*)$.

逆に, $z \in N(\lambda I - T^*)$ に対して,

$$\langle z, (\lambda I - T)x\rangle = \langle (\lambda I - T^*)z, x\rangle = 0. \quad (x \in X)$$

よって, $z \in R(\lambda I - T)^{\perp}$. これにより (i) が分かる.

(ii) $y \in R(\lambda I - T^*), x \in N(\lambda I - T)$ に対して, $y = (\lambda I - T^*)y'$ となる $y' \in X^*$ が存在し,

$$\langle y, x\rangle = \langle (\lambda I - T^*)y', x\rangle = \langle y, (\lambda I - T)x\rangle = 0$$

よって, $y \in N(\lambda I - T)^{\perp}$ であって, $R(\lambda I - T^*) \subset N(\lambda I - T)^{\perp}$.

これより,

$$N(\lambda I - T)^{\perp\perp} \subset R(\lambda I - T^*)^{\perp}.$$

もし $R(\lambda I - T^*) \neq N(\lambda I - T)^{\perp}$ とすれば, $y_0 \in N(\lambda I - T)^{\perp} \backslash R(\lambda I - T^*)$ が存在. $R(\lambda I - T^*)$ は閉部分空間かつ $y_0 \notin R(\lambda I - T^*)$ だから $d(y_0, R(\lambda I - T^*)) > 0$ で, さらにハーン・バナッハの定理から,

$$\langle f, y\rangle = 0 \ (y \in R(\lambda I - T^*)), \quad \langle f, y_0\rangle = 1$$

となる $f \in X^{**}$ が存在. $y_0 \in N(\lambda I - T)^{\perp\perp}$ より $f \in R(\lambda I - T^*)^{\perp}$ かつ $f \notin N(\lambda I - T)^{\perp\perp}$. すなわち,

$$N(\lambda I - T)^{\perp\perp} \subsetneq R(\lambda I - T^*)^{\perp}.$$

一方で, (i) を T^* に適用すれば, $R(\lambda I - T^*)^{\perp} = N(\lambda I - T^{**})$ で, 次の命題 7.4.5 を用いれば, $N(\lambda I - T^{**}) = N(\lambda I - T)$ なので,

$$N(\lambda I - T)^{\perp\perp} \subsetneq N(\lambda I - T).$$

しかし明らかに $N(\lambda I - T) \subset N(\lambda I - T)^{\perp\perp}$ であるから矛盾. ゆえに (ii) が成立.

(iii) これは (i) と次の命題 7.4.5 により成立.

（証明おしまい）

命題 7.4.5

$\mathrm{dim}N(\lambda I-T)=\mathrm{dim}N(\lambda I-T^*)$

証明

$p=\mathrm{dim}N(\lambda I-T), q=\mathrm{dim}N(\lambda I-T^*)$ とおく. $x_1,\cdots,x_p$ を $N(\lambda I-T)$ の基底, $y_1^*,\cdots,y_q^*$ を $N(\lambda I-T^*)$ の基底とする. たとえば x_k 以外の上の基底によって張られる閉部分空間 L_k を考えれば, ハーン・バナッハの定理から,

$$x_j^*(x_k)=\delta_{j,k}$$

となる $x_j^*\in X^*$ が存在する. また, y_j^* についても同様に

$$y_j^*(y_k)=\delta_{j,k}$$

となる $y_k\in X$ が存在する.
$p<q$ と仮定する.

$$Sx=Tx+\sum_{j=1}^{p}x_j^*(x)y_j$$

とおくと, S はコンパクト作用素. その上, $N(\lambda I-S)=0$. 実際, $Sx=\lambda x$ とすると, $(\lambda I-T)x=\sum x_j^*(x)y_j$. よって, 各 j について

$$0=(\lambda I-T^*)y_j^*(x)=y_j^*((\lambda I-T)x)=x_j^*(x)$$

であり, $(\lambda I-T)x=0$. よって, $x=\sum a_jx_j$ と書け, さらに $0=x_j^*(x)=a_j$ なので $x=0$. よって, $N(\lambda I-S)=0$. したがって, リースの択一定理から $R(\lambda I-S)X=X$ であって, $y_{p+1}=(\lambda I-S)x$ となる $x\in X$ が存在する.

$$1=y_{p+1}^*(y_{p+1})=y_{p+1}^*\Big[(\lambda I-T)x-\sum x_j^*(x)y_j\Big]=(\lambda I-T^*)y_{p+1}^*(x)=0$$

これは矛盾. よって, $p\geq q$, つまり $\mathrm{dim}N(\lambda I-T)\geq\mathrm{dim}N(\lambda I-T^*)$.
また, $N(\lambda I-T)\subset N(\lambda I-T^{**})$ より

$$q=\mathrm{dim}N(\lambda I-T^*)\geq\mathrm{dim}N(\lambda I-T^{**})\geq\mathrm{dim}N(\lambda I-T)=p$$

であるから, $p=q$.

（証明おしまい）

また, この命題から

$$N(\lambda I-T)=N(\lambda I-T^{**}) \tag{7.8}$$

がわかる.

定理 7.4.4: フレドホルムの交代定理

$\lambda \neq 0$, Ω を $\mathbb{R}^n$ の有界領域. $k \in L^2(\Omega \times \Omega)$.
このとき, 任意の $f \in L^2(\Omega)$ に対して,

$$x(t) - \lambda \int_\Omega k(t,s)x(s)\mathrm{d}s = f(t) \tag{7.9}$$

は解 $x \in L^2(\Omega)$ をただ一つ持つか, または

$$\overline{x}(t) - \lambda \int_\Omega k(t,s)\overline{x}(s)\mathrm{d}s = 0 \tag{7.10}$$

が非自明な $L^2(\Omega)$ に属する解を持つかのいずれか.
第一の場合, 式 (7.9) の $k(t,s)$ を $k(s,t)$ に替えても解をただ一つ持つ.
第二の場合, 式 (7.10) の $k(t,s)$ を $k(s,t)$ に替えても非自明な解を持つ.

証明

$$(Kx)(t) = \int_\Omega k(t,s)x(s)\mathrm{d}s$$

とおくと, K は $L^2(\Omega)$ のコンパクト作用素である.
式 (7.9) は

$$(\lambda^{-1}I - K)x = f$$

式 (7.10) は

$$(\lambda^{-1}I - K)x = 0$$

と書ける.
$N(\lambda^{-1}I - T) = 0$ の場合, リース・シャウダーの交代定理から $(\lambda^{-1}I - T)^{-1}$ は $L^2(\Omega)$ 上有界であって,

$$x = (\lambda^{-1}I - T)^{-1}f$$

と一意に書ける.
$N(\lambda^{-1}I - T) \neq 0$ の場合, 非自明解を持つのは明らか.

（証明おしまい）

参考文献

[1] 増田久弥, 『数学シリーズ 関数解析』, 裳華房

[2] 杉浦光夫, 『解析入門 I』, 東京大学出版会