

ネーターの定理

まるげり

2025年9月10日

ガチのマジの備忘録.

0 準備: 接バンドルと余接バンドル・ラグランジュ系・ハミルトン系

0.1 接バンドル

M を n 次元多様体とし, M の局所座標系を $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_\alpha$ とする. ($\varphi_\alpha: U_\alpha \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \varphi_\alpha(U_\alpha) \subset M$.) $q \in M$ での接ベクトル空間を $T_q M$ と書くことにする. 接バンドル (あるいは接束) TM を $2n$ 次元多様体として定めよう. まず, 集合として

$$TM := \bigcup_{q \in M} T_q M$$

とする. TM の要素は (q, v) のように書くことができる ($q \in M, v \in T_q M$).

射影 $\pi: TM \rightarrow M$ を, $\pi(q, v) = q$ で定める. $q \in M$ のまわりの座標近傍 $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ に対し, $x = (x_1, \dots, x_n) = \varphi_\alpha^{-1}(q) \in \mathbb{R}^n$ とする. このとき, $T_q M$ の基底として $\left\{ \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \right)_q \right\}$ を選ぶことができる. $\bar{x} = (\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n) \in \mathbb{R}^n$ として, $\Phi_\alpha: \varphi_\alpha^{-1}(U_\alpha) \times \mathbb{R}^n \rightarrow \pi^{-1}(U_\alpha)$ を

$$\Phi_\alpha(x, \bar{x}) = \left(\varphi_\alpha(x), \sum \bar{x}_i \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \right)_{\varphi_\alpha(x)} \right)$$

で定める. このようにして定まる $\{(\pi^{-1}(U_\alpha), \Phi_\alpha)\}_\alpha$ は TM の局所座標系になる. 実際, このとき $\varphi_\alpha^{-1}(U_\alpha \cap U_\beta) \times \mathbb{R}^n$ 上の座標変換 $\Phi_{\alpha\beta} = \Phi_\beta^{-1} \circ \Phi_\alpha$ は, $y = \varphi_\beta^{-1} \circ \varphi_\alpha(x) = y(x_1, \dots, x_n)$, $\bar{y} = \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right) \bar{x}$, ($\bar{y}_i = \sum \left(\frac{\partial y_i}{\partial x_j} \right) \bar{x}_j$) として,

$$\begin{aligned} \Phi_{\alpha\beta}(x, \bar{x}) &= \Phi_\beta^{-1} \left(\varphi_\alpha(x), \sum \bar{x}_i \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \right)_{\varphi_\alpha(x)} \right) \\ &= \Phi_\beta^{-1} \left(\varphi_\beta(\varphi_\beta^{-1} \circ \varphi_\alpha(x)), \sum \bar{x}_j \left(\frac{\partial y_i}{\partial x_j} \right) \left(\frac{\partial}{\partial y_i} \right)_{\varphi_\beta(\varphi_\beta^{-1} \circ \varphi_\alpha(x))} \right) \\ &= \Phi_\beta^{-1} \left(\varphi_\beta(y), \sum \bar{y}_i \left(\frac{\partial}{\partial y_i} \right)_{\varphi_\beta(y)} \right) \\ &= (y, \bar{y}) \end{aligned}$$

となる. これにより, TM が $2n$ 次元多様体として定まる.

M 上の座標変換 $y = \varphi_\beta^{-1} \circ \varphi_\alpha(x) = y(x_1, \dots, x_n)$ によって, $T_q M$ の基底は

$$\left(\frac{\partial}{\partial y_i} \right)_q = \sum \left(\frac{\partial x_j}{\partial y_i} \right)_q \left(\frac{\partial}{\partial x_j} \right)_q$$

と変換されるので, $J = \left(\frac{\partial x}{\partial y} \right) = \left(\frac{\partial x_i}{\partial y_j} \right)_{i,j}$ と書けば, 形式的に

$$\left[\left(\frac{\partial}{\partial y_1} \right)_q \cdots \left(\frac{\partial}{\partial y_n} \right)_q \right] = \left[\left(\frac{\partial}{\partial x_1} \right)_q \cdots \left(\frac{\partial}{\partial x_n} \right)_q \right] J$$

と書ける. これに対して, TM 上の座標変換 $\Phi_{\alpha\beta}(x, \bar{x})$ について,

$$\bar{y} = \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right) \bar{x} = J^{-1} \bar{x}$$

となる. 言い換えると,

$$\left(\frac{\partial \bar{x}}{\partial \bar{y}} \right) = \left(\frac{\partial x}{\partial y} \right) = J.$$

つまり, $T_q M$ の成分は M 上の座標変換 (で定まる基底変換) に対して反変的である.

この構成の下で M 上の曲線 $t \mapsto q(t)$ について考える. $\varphi_\alpha(q(t)) = q_\alpha(t) \in \mathbb{R}^n, \varphi_\beta(q(t)) = q_\beta(t) \in \mathbb{R}^n$ と書くとき, $(q_\alpha(t), \dot{q}_\alpha(t)) \in \varphi_\alpha^{-1}(U_\alpha \cap U_\beta) \times \mathbb{R}^n$ 上であれば,

$$\Phi_{\alpha\beta}(q_\alpha(t), \dot{q}_\alpha(t)) = \left(q_\beta(t), \sum (q_\alpha(t))_j \left(\frac{\partial y_i}{\partial x_j} \right)_{q(t)} \right)$$

となる. これにより,

$$\dot{q}_\beta(t) = \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)_{q(t)} \dot{q}_\alpha(t) = J^{-1} \dot{q}_\alpha(t)$$

が正当化される.

0.2 余接バンドル

接ベクトル空間 $T_q M$ の双対空間を $T_q^* M$ で表すことにする. 余接バンドルを $T^* M$ を接バンドルと同じように定める. つまり, 集合として

$$T^* M = \bigcup_{q \in M} T_q^* M$$

とし, 射影 $\pi(q, p) = q$ とする. ($q \in M, p \in T_q^* M$)

$q \in M$ のまわりの座標近傍 $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ に対し, $T_q M$ の基底 $\left\{ \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \right)_q \right\}$ に対応する双対基底 $\{(dx_i)_q\}$ を $T_q^* M$ の基底として選ぶ. $\Psi_\alpha : \varphi_\alpha^{-1}(U_\alpha) \times \mathbb{R}^n \rightarrow \pi^{-1}(U_\alpha)$ を

$$\Psi_\alpha(x, \tilde{x}) = \left(\varphi_\alpha(x), \sum \tilde{x}_i (dx_i)_{\varphi_\alpha(x)} \right)$$

で定めれば, 先ほどと同様に $\{(\pi^{-1}(U_\alpha), \Psi_\alpha)\}_\alpha$ が $T^* M$ の局所座標系として定まり, $T^* M$ は $2n$ 次元可微分多様体になる. $y = \varphi_\beta^{-1} \circ \varphi_\alpha(x) = y(x_1, \dots, x_n)$, $\tilde{y} = \left(\frac{\partial x}{\partial y} \right)^\top \tilde{x} = \left(\left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)^{-1} \right)^\top \tilde{x}$, ($\tilde{y}_i = \sum \left(\frac{\partial x_j}{\partial y_i} \right) \tilde{x}_j$) として, このときの座標変換 $\Psi_{\alpha\beta} = \Psi_\beta^{-1} \circ \Psi_\alpha$ は

$$\begin{aligned} \Psi_{\alpha\beta}(x, \tilde{x}) &= \Psi_\beta^{-1} \left(\varphi_\alpha(x), \sum \tilde{x}_i (dx_i)_{\varphi_\alpha(x)} \right) \\ &= \Psi_\beta^{-1} \left(\varphi_\beta(\varphi_\beta^{-1} \circ \varphi_\alpha(x)), \sum \tilde{x}_j \left(\frac{\partial x_j}{\partial y_i} \right) (dy_i)_{\varphi_\beta(\varphi_\beta^{-1} \circ \varphi_\alpha(x))} \right) \\ &= \Psi_\beta^{-1} \left(\varphi_\beta(y), \sum \tilde{y}_i (dy_i)_{\varphi_\beta(y)} \right) \\ &= (y, \tilde{y}) \end{aligned}$$

となる.

M 上の座標変換 $y = \varphi_\beta^{-1} \circ \varphi_\alpha(x) = y(x_1, \dots, x_n)$ によって, $T_q^* M$ の基底は

$$(dy_i)_q = \sum \left(\frac{\partial y_i}{\partial x_j} \right)_q (dx_j)_q$$

と変換されるので, 形式的に

$$\begin{bmatrix} dy_1 \\ \vdots \\ dy_n \end{bmatrix} = \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right) \begin{bmatrix} dx_1 \\ \vdots \\ dx_n \end{bmatrix} = J \begin{bmatrix} dx_1 \\ \vdots \\ dx_n \end{bmatrix}$$

と書ける. これに対して, T^*M 上の座標変換 $\Psi_{\alpha\beta}(x, \bar{x})$ について,

$$\tilde{y} = \left(\frac{\partial x}{\partial y} \right)^\top \tilde{x} = J^\top \tilde{x}$$

となる. である. あるいは, 数ベクトル \tilde{x} を横ベクトルで書けば,

$$[\tilde{y}_1 \cdots \tilde{y}_n] = [\tilde{x}_1 \cdots \tilde{x}_n] J$$

となる. つまり, T_q^*M の成分は M 上の座標変換 (で定まる基底変換) に対して共変的である.

$f: M \rightarrow \mathbb{R}$ について, $f_\alpha := f \circ \varphi_\alpha(x): U_\alpha \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ は,

$$\frac{\partial}{\partial y_i} f_\beta(y) = \frac{\partial}{\partial y_i} f \circ \varphi_\beta(y) = \frac{\partial}{\partial y_i} f \circ \varphi_\alpha \circ \varphi_{\beta\alpha}(y) = \sum \left(\frac{\partial x_j}{\partial y_i} \right) \frac{\partial}{\partial x_j} f \circ \varphi_\alpha(x) = \sum \left(\frac{\partial x_j}{\partial y_i} \right) \frac{\partial}{\partial x_j} f_\alpha(x)$$

となるから, $\frac{\partial}{\partial y} f_\beta = J^\top \frac{\partial}{\partial x} f_\alpha$ である. これより, $w \in T_q M$ に対して $\Phi_\alpha^{-1}(q, w) = (x, \bar{w}_\alpha)$ とすれば, $f'_q(q)(w) := \langle \frac{\partial}{\partial x} f_\alpha(\varphi_\alpha^{-1}(q)), w_\alpha \rangle$ は $T_q M \rightarrow \mathbb{R}$ として定まる. ただし, ここでは数ベクトル a, b に対し $\langle a, b \rangle := a^\top b$ としている. 実際, $\bar{w}_\beta = J^{-1} \bar{w}_\alpha$ であるから,

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{\partial}{\partial y} f_\beta(\varphi_\beta^{-1}(q)), \bar{w}_\beta \right\rangle &= \frac{\partial}{\partial y} f_\beta(\varphi_\beta^{-1}(q))^\top \bar{w}_\beta \\ &= \frac{\partial}{\partial x} f_\alpha(\varphi_\alpha^{-1}(q))^\top J J^{-1} \bar{w}_\alpha \\ &= \frac{\partial}{\partial x} f_\alpha(\varphi_\alpha^{-1}(q))^\top \bar{w}_\alpha \\ &= \left\langle \frac{\partial}{\partial x} f_\alpha(\varphi_\alpha^{-1}(q)), \bar{w}_\alpha \right\rangle \end{aligned}$$

であり, $f'_q(q)$ は well-defined である. これは, $f'_q(q) \in T_q^* M$ であることを意味する.

0.3 ラグランジュ系

$q_0, q_1 \in M$ を固定した下で, 固定端の曲線集合 $C := \{q: [t_0, t_1] \rightarrow M | q(t_0) = q_0, q(t_1) = q_1\}$ を考える. 曲線 $q(t) \in C$ に沿った固定端変分ベクトル場 W を, 各 t に対して $W_t \in T_{q(t)} M$ として定まるもので, 滑らかな関数 $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ について関数

$$t \mapsto \langle f'_q(q(t)), W_t \rangle$$

が $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ として滑らかになるもので, 特に $W_{t_0} = W_{t_1} = 0$ となるものとする.

曲線 $q(t) \in C$ に対する固定端変分曲線 $\hat{q}: (-\epsilon, \epsilon) \times [t_0, t_1] \times M$ (variation of the path だが, たぶんそんな呼び方しないので後でちゃんと調べる) とは滑らかな関数であって, $\hat{q}(0, t) = q(t)$ であり, 任意の $u \in (-\epsilon, \epsilon)$ について $\hat{q}(u, t_0) = q_0, \hat{q}(u, t_1) = q_1$ となるものとする. 曲線 $q(t)$ の任意の固定端変分曲線 \hat{q} に対し, 対応する固定端のベクトル場 W は

$$W_t = \left. \frac{\partial \hat{q}(u, t)}{\partial u} \right|_{u=0}$$

で与えられる. 逆に, 与えられた固定端変分ベクトル場 W に対して上を満たす変分曲線 \hat{q} が存在する.

汎関数 $F: C \rightarrow \mathbb{R}$ に対し, $q(t) \in C$ の第一変分 $\delta F[W]$ は, W に対応する $q(t)$ の変分曲線 $\hat{q}(u, t)$ を用いて

$$\delta F[W] = \left. \frac{\partial F(\hat{q}(u, t))}{\partial u} \right|_{u=0}$$

で定義される. 曲線 $q(t)$ が汎関数 F の停留点であるとは, $\delta F \equiv 0$ となるような $q(t) \in C$ のことである.

C^3 級関数 $L: \mathbb{R} \times TM \rightarrow \mathbb{R}$ とする. これをラグランジアンと呼ぶ. $M = \mathbb{R}^n$ の際には, $TM \cong \mathbb{R}^{2n}$ として, 典型的には

$$L(t, q, v) = \frac{1}{2} \|v\|^2 - U(q)$$

という形のラグランジアンを考えることが多い. ($U(q)$ をポテンシャル関数という.)

$L(t, q, v)$ に対し, $t \in \mathbb{R}, q \in M$ を固定した下で $L(t, q, \cdot) : T_q M \rightarrow \mathbb{R}$ を考えることができる. $L_\alpha(t, x, \bar{x}) := L(t, \Phi_\alpha(x, \bar{x})) = L(t, \varphi_\alpha(x), \sum x_i \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \right)_q)$ とする.

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \bar{y}_i} L_\beta(t, y, \bar{y}) &= \frac{\partial}{\partial \bar{y}_i} L(t, \Phi_\beta(y, \bar{y})) \\ &= \frac{\partial}{\partial \bar{y}_i} L(t, \Phi_\alpha \circ \Phi_{\beta\alpha}(t, y, \bar{y})) \\ &= \frac{\partial}{\partial \bar{y}_i} L_\alpha(t, x(y), \bar{x}(\bar{y})) \\ &= \sum \left(\frac{\partial \bar{x}_j}{\partial \bar{y}_i} \right)_q \frac{\partial}{\partial \bar{x}_j} L_\alpha(t, x(y), \bar{x}(\bar{y})) \end{aligned}$$

したがって,

$$\frac{\partial}{\partial \bar{y}} L_\beta(t, y, \bar{y}) = J^\top \frac{\partial}{\partial \bar{x}} L_\alpha(t, x, \bar{x})$$

となる.

これより, $w \in T_q M$ に対して $\Phi_\alpha^{-1}(q, w) = (x, \bar{w}_\alpha)$ とし, また数ベクトル $a, b \in \mathbb{R}^n$ について $\langle a, b \rangle := a^\top b$ と表せば,

$$L'_v(t, q, v)(w) := \left\langle \frac{\partial}{\partial \bar{x}} L_\alpha(t, \Phi_\alpha^{-1}(q, v)), \bar{w}_\alpha \right\rangle$$

とすれば, $L'_v(t, q, v) : T_q M \rightarrow \mathbb{R}$ が定まる. 実際, $w \in T_q M$ に対して $\Phi_\beta^{-1}(q, w) = (x, \bar{w}_\beta)$ とすれば $\bar{w}_\beta = J^{-1} \bar{w}_\alpha$ であるから,

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{\partial}{\partial \bar{y}} L_\beta(t, \Phi_\beta^{-1}(q, v)), \bar{w}_\beta \right\rangle &= \left(\frac{\partial}{\partial \bar{y}} L_\beta(t, \Phi_\beta^{-1}(q, v)) \right)^\top \bar{w}_\beta \\ &= \left(\frac{\partial}{\partial \bar{x}} L_\alpha(t, \Phi_\alpha^{-1}(q, v)) \right)^\top J J^{-1} \bar{w}_\alpha \\ &= \left\langle \frac{\partial}{\partial \bar{x}} L_\alpha(t, \Phi_\alpha^{-1}(q, v)), \bar{w}_\alpha \right\rangle \end{aligned}$$

であり, $L'_v(t, q, v)$ は well-defined である. これは $L'_v(t, q, v) \in T_q^* M$ であることを意味する.

また, $t \in \mathbb{R}$ を固定した下で $L_\alpha(t, x, \bar{x})$ を $L_\alpha(t, \cdot, \cdot) : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ として, 任意の固定端の曲線を U_α に写したものの $x(t)$ に対し $[L]_\alpha(x(t)) := \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial}{\partial \bar{x}} L_\alpha(t, x(t), \dot{x}(t)) \right) - \frac{\partial}{\partial x} L_\alpha(t, x(t), \dot{x}(t))$ とすれば, $y(t) = \varphi_{\alpha\beta}(x(t))$ として,

$$\begin{aligned} [L]_{\beta,i}(y(t)) &= \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial}{\partial \bar{y}_i} L_\beta(t, y(t), \dot{y}(t)) \right) - \frac{\partial}{\partial y_i} L_\beta(t, y(t), \dot{y}(t)) \\ &= \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial}{\partial \bar{y}_i} L_\alpha(t, x(y(t)), \bar{x}(\dot{y}(t))) \right) - \frac{\partial}{\partial y_i} L_\alpha(t, x(y(t)), \bar{x}(\dot{y}(t))) \\ &= \frac{d}{dt} \left(\sum \left(\frac{\partial \bar{x}_j}{\partial \bar{y}_i} \right)_q \frac{\partial}{\partial \bar{x}_j} L_\alpha(t, x(y), \bar{x}(\bar{y})) \right) \\ &\quad - \sum \left(\frac{\partial x_j}{\partial y_i} \right)_q \frac{\partial}{\partial x_j} L_\alpha(t, x(t), \dot{x}(t)) - \sum \left(\frac{\partial x_j}{\partial y_i \partial y_k} \right)_q \dot{y}_k \frac{\partial}{\partial \bar{x}_j} L_\alpha(t, x(t), \dot{x}(t)) \\ &= \frac{d}{dt} \left(\sum \left(\frac{\partial x_j}{\partial y_i} \right)_q \frac{\partial}{\partial \bar{x}_j} L_\alpha(t, x(y), \bar{x}(\bar{y})) \right) \\ &\quad - \sum \left(\frac{\partial x_j}{\partial y_i} \right)_q \frac{\partial}{\partial x_j} L_\alpha(t, x(t), \dot{x}(t)) - \sum \left(\frac{\partial x_j}{\partial y_i \partial y_k} \right)_q \dot{y}_k \frac{\partial}{\partial \bar{x}_j} L_\alpha(t, x(t), \dot{x}(t)) \\ &= \sum \left(\frac{\partial x_j}{\partial y_i \partial y_k} \right)_q \dot{y}_k \frac{\partial}{\partial \bar{x}_j} L_\alpha(t, x(y), \bar{x}(\bar{y})) + \sum \left(\frac{\partial x_j}{\partial y_i} \right)_q \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial}{\partial \bar{x}_j} L_\alpha(t, x(y), \bar{x}(\bar{y})) \right) \\ &\quad - \sum \left(\frac{\partial x_j}{\partial y_i} \right)_q \frac{\partial}{\partial x_j} L_\alpha(t, x(t), \dot{x}(t)) - \sum \left(\frac{\partial x_j}{\partial y_i \partial y_k} \right)_q \dot{y}_k \frac{\partial}{\partial \bar{x}_j} L_\alpha(t, x(t), \dot{x}(t)) \\ &= \sum \left(\frac{\partial x_j}{\partial y_i} \right)_q [L]_{\alpha,j}(x(t)) \end{aligned}$$

である. したがって, $[L]_\beta(y(t)) = J^\top [L]_\alpha(x(t))$ であり, $w_t \in T_{q(t)} M$ に対して $\Phi_\alpha^{-1}(q(t), w_t) = (x(t), \bar{w}_{t,\alpha})$ として, $[L](q(t))(w_t) := \langle [L]_\alpha(\varphi_\alpha^{-1}(q(t))), \bar{w}_{t,\alpha} \rangle$ と定めれば $[L](q(t))$ は $T_{q(t)} M \rightarrow \mathbb{R}$, つまり $T_{q(t)}^* M$ の元として定まる.

作用積分 $F : C \rightarrow \mathbb{R}$ を

$$F[q] = \int_{t_0}^{t_1} L(t, q(t), \dot{q}(t)) dt$$

で定める. このとき, F の第一変分 $\delta F[W]$ は

$$\delta F[W] = - \int_{t_0}^{t_1} [L](q(t))(W_t) dt$$

となる. 実際, W に対応する変分曲線 $\hat{q}(u, t)$ について,

$$\begin{aligned} \delta F_\alpha[W_\alpha] &= \frac{\partial}{\partial u} \int_{t_0}^{t_1} L_\alpha(t, \hat{x}(u, t), \hat{x}'_t(u, t)) dt \Big|_{u=0} \\ &= \int_{t_0}^{t_1} \sum \left(\frac{\partial}{\partial x_i} L_\alpha(t, \hat{x}(u, t), \hat{x}'_t(u, t)) \right) \hat{x}'_{i,u}(u, t) dt \Big|_{u=0} \\ &\quad + \int_{t_0}^{t_1} \sum \left(\frac{\partial}{\partial \bar{x}_i} L_\alpha(t, \hat{x}(u, t), \hat{x}'_t(u, t)) \right) \hat{x}''_{i,ut}(u, t) dt \Big|_{u=0} \end{aligned}$$

第二項は部分積分をすれば, $\hat{x}(0, t) = x(t)$, $W_{\alpha,t} = \hat{x}'_u(0, t)$ であり, $W_{t_0} = W_{t_1} = 0$ であるから,

$$\begin{aligned} &\int_{t_0}^{t_1} \sum \left(\frac{\partial}{\partial \bar{x}_i} L_\alpha(t, \hat{x}(u, t), \hat{x}'_t(u, t)) \right) \hat{x}''_{i,ut}(u, t) dt \Big|_{u=0} \\ &= \left[\left\langle \frac{\partial}{\partial \bar{x}_i} L_\alpha(t, x(t), \dot{x}(t)), W_{\alpha,t} \right\rangle \right]_{t=t_0}^{t_1} - \int_{t_0}^{t_1} \sum \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial}{\partial \bar{x}_i} L_\alpha(t, \hat{x}(u, t), \hat{x}'_t(u, t)) \right) \hat{x}'_{i,u}(u, t) dt \Big|_{u=0} \\ &= - \int_{t_0}^{t_1} \sum \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial}{\partial \bar{x}_i} L_\alpha(t, x(t), \dot{x}(t)) \right) W_{i,\alpha,t} dt \end{aligned}$$

であるから, 結局

$$\delta F_\alpha[W_\alpha] = - \int_{t_0}^{t_1} \left\langle \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial}{\partial \bar{x}} L_\alpha(t, x(t), \dot{x}(t)) \right) - \frac{\partial}{\partial x} L_\alpha(t, x(t), \dot{x}(t)), W_{\alpha,t} \right\rangle dt = - \int_{t_0}^{t_1} \langle [L]_\alpha(q(t)), W_{\alpha,t} \rangle dt$$

一方, この右辺は α によらず, $\delta F[W] = - \int_{t_0}^{t_1} \langle [L](q(t)), W_t \rangle dt$ である.

以上の話は, $q(t) \in C$ が作用積分 F の停留点であることと $[L](q(t)) \equiv 0$ であることが同値であることを意味する. この方程式

$$[L](q(t)) = \frac{d}{dt} L'_v(q(t), \dot{q}(t)) - L'_q(q(t), \dot{q}(t)) = 0$$

をオイラー - ラグランジュ方程式という.

オイラー - ラグランジュ方程式は, 適当な局所座標の下で書き下すと,

$$\sum \frac{\partial^2 L}{\partial \bar{x}_i \partial \bar{x}_j} (x(t), \dot{x}(t)) \ddot{x}_j(t) + \sum \frac{\partial^2 L}{\partial \bar{x}_i \partial x_j} (x(t), \dot{x}(t)) \dot{x}_j(t) + \frac{\partial^2 L}{\partial \bar{x}_i \partial t} - \frac{\partial L}{\partial x_i} (x(t), \dot{x}(t)) = 0$$

であるから, ラグランジアンが正則性条件

$$\det \left(\frac{\partial^2 L}{\partial \bar{x} \partial \bar{x}} \right) \neq 0$$

を満たす下で $\ddot{x} = \dots$ の形に書ける. これを更に (x, \dot{x}) の $2n$ 変数の 1 階の常微分方程式と見たものをラグランジュ系という.

0.4 ハミルトン系

$L'_v(t, q, v)$ は $T_q^* M$ の元と考えられた. C^2 級写像 $FL : \mathbb{R} \times TM \rightarrow \mathbb{R} \times T^*M$ を

$$FL(t, q, v) = (t, q, L'_v(t, q, v))$$

で定めると, 適当な局所座標の下で FL の微分に対応するヤコビ行列は

$$J(FL)(t, x, \bar{x}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & E_n & O_n \\ L''_{t\bar{x}} & L''_{x\bar{x}} & L''_{\bar{x}\bar{x}} \end{bmatrix}$$

であるからヤコビアンは $\det(L''_{\bar{x}\bar{x}})$ となる。したがって、逆関数の定理からラグランジアン L が正則性条件を満たす点 (t, q, v) の近傍で FL は微分同相になる。

FL が微分同相になる領域、つまり $p \in T_q^*M$ に対したただ一つ $v \in T_qM$ が存在して $p = L'_v(t, q, v)$ となる領域において、この v は $v(t, q, p)$ と考えてよい。この領域 $U \subset \mathbb{R} \times TM, V \subset \mathbb{R} \times T^*M$ でハミルトニアン $H : V \rightarrow \mathbb{R}$ を

$$H(t, q, p) := \langle p, v(t, q, p) \rangle - L(t, q, v(t, q, p))$$

と定義できる。先ほどの写像 FL をルジャンドル変換という。

変換則 $L'_v = p$ より、

$$\begin{aligned} H_{x_i} &= \sum p_j \frac{\partial v_j}{\partial x_i} - L'_{x_i} - \sum L'_{v_j} \frac{\partial v_j}{\partial x_i} = -L_{x_i}, \\ H_{p_i} &= v_i + \sum p_j \frac{\partial v_j}{\partial p_i} - \sum L'_{v_j} \frac{\partial v_j}{\partial p_i} = v_i \end{aligned}$$

がわかる。 $x(t)$ がオイラー-ラグランジュ方程式の解ならば $L'_x = \frac{d}{dt}L'_v = \dot{p}$ であり、ハミルトン方程式

$$\begin{aligned} \dot{q}_i &= H_{p_i} \\ \dot{p}_i &= -H_{q_i} \end{aligned}$$

を満たす。

一方で、 $p = p(t, q, v)$ と表すことも可能で、この場合 $v(t, q, p(t, q, v)) = v$ となるので、ルジャンドル変換の定義式を移項すれば

$$\langle p(t, q, v), v \rangle - H(t, q, p(t, q, v)) = L(t, q, v(t, q, p)) = L(t, q, v)$$

であり、逆にハミルトニアンが与えられた下でラグランジアンを与えることもでき、その際はハミルトン方程式の解がオイラー-ラグランジュ方程式を満たす。

以上の話は局所的にのみルジャンドル変換が定義されたが、ラグランジアンに L''_{vv} に TM 上の一様正定値性と超線形性 ($\lim_{|v| \rightarrow \infty} L(v)/|v| = \infty$) を課した下ではルジャンドル変換

$$H(t, q, p) = \sup_v \{ \langle p, v \rangle - L(t, q, v) \}$$

が大域的に定義される。

以下、ハミルトニアン H は時間によらないものとする。ハミルトン方程式のベクトル場をハミルトンベクトル場 X_H という。これは、局所座標を用いて

$$X_H = \frac{\partial H}{\partial p} \frac{\partial}{\partial q} - \frac{\partial H}{\partial q} \frac{\partial}{\partial p}$$

と書けるので、正準 2-形式 $\omega = \sum dp_i \wedge dq_i$ を用いれば

$$\iota_{X_H} \omega = -\frac{\partial H}{\partial q_i} dq_i - \frac{\partial H}{\partial p} dp_i = dH(q, p)$$

となる。したがって、

$$\iota_{X_H} \omega = -dH$$

である。こちらをハミルトンベクトル場 X_H の定義とすることも多い。

ハミルトニアン H が時間 t によらずに定まるとき、 $H(q, p)$ はハミルトン方程式の解に沿って不変である。実際、

$$\frac{d}{dt} H(q(t), p(t)) = \frac{\partial H}{\partial q} \dot{q} + \frac{\partial H}{\partial p} \dot{p} = \frac{\partial H}{\partial q} \frac{\partial H}{\partial p} - \frac{\partial H}{\partial p} \frac{\partial H}{\partial q} = 0$$

となる。これは、ハミルトンベクトル場 $X_H = \frac{\partial H}{\partial p} \frac{\partial}{\partial q} - \frac{\partial H}{\partial q} \frac{\partial}{\partial p}$ を用いて

$$X_H H = 0$$

と書くこともできる。 $z = (q, p) \in T^*M$ と書けば、ハミルトン方程式は

$$\dot{z} = J \nabla H(z), \quad J = \begin{bmatrix} 0 & E_n \\ -E_n & 0 \end{bmatrix}$$

と書くことができる。ハミルトンベクトル場のフロー $\phi^t(\zeta)$ について,

$$\frac{d}{dt}\phi^t(\zeta) = J \left(\frac{\partial H}{\partial z}(\phi^t(\zeta)) \right)$$

であるが、ヤコビ行列 $\left(\frac{\partial \phi^t(\zeta)}{\partial \zeta} \right)$ は変分方程式

$$\frac{d}{dt}Y = J \left(\frac{\partial^2 H}{\partial z \partial z} \right)_{\phi^t(\zeta)} Y, \quad Y(0) = E$$

の解である。 $Y^\top JY$ の時間微分を考えると, $J^\top = J^2 = -J$ より,

$$\frac{d}{dt}(Y^\top JY) = \dot{Y}^\top JY + Y^\top J\dot{Y} = Y^\top \left(\left(\frac{\partial^2 H}{\partial z \partial z} \right)_{\phi^t(\zeta)}^\top J^\top J + J^2 \left(\frac{\partial^2 H}{\partial z \partial z} \right)_{\phi^t(\zeta)} \right) Y = 0$$

となるので

$$Y^\top(t)JY(t) = Y^\top(0)JY(0) = J.$$

である。つまり,

$$\left(\frac{\partial \phi^t(\zeta)}{\partial \zeta} \right)^\top J \left(\frac{\partial \phi^t(\zeta)}{\partial \zeta} \right) = J$$

であり, ϕ^t は正準変換である。

特に, X_H フローは正準 2-形式 $\omega = \sum dp_i \wedge dq_i$ を保存するのみならず, 正準 1-形式 $\lambda = \sum p_i dq_i$ について $(\phi^t)^*\lambda - \lambda$ が完全形式にもなる。(証明にはポアンカレ-カルタンの積分不変式を用いる.)

このように, 正準変換 φ について $\varphi^*\lambda - \lambda$ が完全形式になる場合, φ を完全シンプレクティック写像という。

ハミルトン方程式の第一積分を G とする。これはつまり, ハミルトン方程式の解 $(q(t), p(t))$ について

$$\frac{d}{dt}G(q(t), p(t)) = \frac{\partial G}{\partial q} \frac{\partial H}{\partial p} - \frac{\partial G}{\partial p} \frac{\partial H}{\partial q} = 0$$

を意味する。ハミルトンベクトル場で書けば $X_H G = 0$ である。そこで, ポアソン括弧 $\{ \cdot, \cdot \}$ を

$$\{F, G\} := X_F G = \langle \nabla G, J \nabla F \rangle$$

で定義する。局所座標で書けば

$$\{F, G\} = \sum \frac{\partial G}{\partial q_i} \frac{\partial F}{\partial p_i} - \frac{\partial G}{\partial p_i} \frac{\partial F}{\partial q_i}$$

である。明らかに $\{G, F\} = -\{F, G\}$ である。また, 正準変換 φ に対して $\{F, G\} \circ \varphi = \{F \circ \varphi, G \circ \varphi\}$ が成り立つ。

1 オイラー-ラグランジュ方程式に関するネーターの定理

M を n 次元可微分多様体とする。 $\{\varphi^t\}_{t \in \mathbb{R}}$ を M 上の 1 パラメータ変換群, つまり

- (i) 各 t で $\varphi^t : M \rightarrow M$ が微分同相で,
- (ii) $\varphi^0 = id, \varphi^t \circ \varphi^s = \varphi^{s+t}, (\varphi^t)^{-1} = \varphi^{-t}$ を満たし,
- (iii) $TM \ni (t, q) \mapsto \varphi^t(q) \in M$ は C^∞ 級写像

となるものとする。

このとき, 元の M 上の 1 パラメータ変換群 $\{\varphi^t\}_t$ から誘導される接バンドル TM 上の 1 パラメータ変換群 $\{\Phi^t\}_t$ を次で定める:

$$\Phi^t(q, v) = (\varphi^t(q), (d\varphi^t)_q(v)).$$

(実際,

$$\Phi^t \circ \Phi^s(q, v) = \Phi^s(\varphi^t(q), (d\varphi^t)_q(v)) = (\varphi^s(\varphi^t(q)), (d\varphi^s)_{\varphi^t(q)}((d\varphi^t)_q(v))) = ((\varphi^{s+t}(q)), (d\varphi^{s+t})_q(v)) = \Phi^{s+t}(q, v)$$

であるから 1 パラメータ変換群になっている。)

M 上のベクトル場 X が 1 パラメータ変換群 $\{\varphi^t\}_t$ の無限小変換であるとは、任意の関数 $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ に対し、 $X_q \in T_q M$ が

$$X_q(f) = \left. \frac{d}{dt} f(\varphi^t(q)) \right|_{t=0}$$

を満たすことである。($\mathbb{R} \ni t \mapsto f(\varphi^t(q)) \in \mathbb{R}$ であることに注意.) これは、局所座標を使って言い換えれば、 $q = (\xi_1, \dots, \xi_n)$, $\varphi^t(\xi) = (x_1(t; \xi), \dots, x_n(t; \xi))$, $X = \sum X_i \frac{\partial}{\partial x_i}$ と書いたときに、

$$X_i(\xi) = \left. \frac{dx_i(t; \xi)}{dt} \right|_{t=0}$$

を満たすのと同じであり、このとき 1 パラメータ変換群 $x(t; \xi)$ は常微分方程式 $\frac{dx}{dt}(t) = X(x(t))$ の初期値 ξ の下での解になる。

いま、「系が対称性を持つ」というのを、ラグランジアン $L : TM \rightarrow \mathbb{R}$ がこの 1 パラメータ変換群 $\{\Phi^t\}_t$ で不変であること、つまり

$$L \circ \Phi^t(q, v) = L(q, v)$$

を満たすことと定義する。

ネーターの定理 (Noether's theorem)¹は、「系が対称性を持つのならば、第一積分（保存量）が存在する」ということを述べたものである。

Theorem 1 (ネーター). TM 上の 1 パラメータ変換群 $\{\Phi^t\}_t$ を、 M 上の 1 パラメータ変換群 $\{\varphi^t\}_t$ から誘導されるものとする。関数 $L : TM \rightarrow \mathbb{R}$ が $\{\Phi^t\}_t$ で不変であるとき、 $\{\varphi^t\}_t$ の無限小変換を X とすると

$$G(q, v) := \langle L'_v(q, v), X_q \rangle$$

はオイラー-ラグランジュ方程式の第一積分である。

Proof. 上で述べたように、1 パラメータ変換群 $\varphi^t(\xi)$ は常微分方程式 $\frac{dx}{dt} = X(x(t))$ の初期値 ξ の下での解になる。また、局所座標の下で $(d\varphi^t)_\xi$ はヤコビ行列 $\left(\frac{\partial x}{\partial \xi} \right)$ であるが、これは先の常微分方程式の解 $\varphi^t(\xi)$ に沿った変分方程式 $\frac{d}{dt} Y = \left(\frac{\partial X}{\partial \xi} \right) Y$ の初期値 $Y(0) = E$ (単位行列) についての解になる。

仮定より $L \circ \Phi^t$ は t について不変なので、任意の $(\xi, \bar{\xi})$ について、

$$\begin{aligned} \left. \frac{d}{dt} L \circ \Phi^t(\xi, \bar{\xi}) \right|_{t=0} &= \left\langle L'_x(\xi, \bar{\xi}), \left. \frac{d}{dt} \varphi^t(\xi) \right|_{t=0} \right\rangle + \left\langle L'_v(\xi, \bar{\xi}), \left. \frac{d}{dt} \frac{\partial x(t)}{\partial \xi} \right|_{t=0} \bar{\xi} \right\rangle \\ &= \langle L'_x(\xi, \bar{\xi}), X_\xi \rangle + \left\langle L'_v(\xi, \bar{\xi}), \left(\frac{\partial X}{\partial \xi} \right) \bar{\xi} \right\rangle \\ &\equiv 0 \end{aligned}$$

となる。

一方、初期値 $(\xi, \bar{\xi})$ とするオイラー・ラグランジュ方程式の解 $(x(t), \dot{x}(t))$ について、

$$\begin{aligned} \left. \frac{d}{dt} G(x(t), \dot{x}(t)) \right|_{t=0} &= \left. \frac{d}{dt} \langle L'_v(x(t), \dot{x}(t)), X_{x(t)} \rangle \right|_{t=0} \\ &= \left\langle \frac{d}{dt} L'_v(x(t), \dot{x}(t)), X_{x(t)} \right\rangle \Big|_{t=0} + \left\langle L'_v(x(t), \dot{x}(t)), \frac{d}{dt} X_{x(t)} \right\rangle \Big|_{t=0} \\ &= \langle L'_x(x(t), \dot{x}(t)), X_{x(t)} \rangle \Big|_{t=0} + \left\langle L'_v(x(t), \dot{x}(t)), \left(\frac{\partial X}{\partial \xi} \right) \dot{x}(t) \right\rangle \Big|_{t=0} \\ &= \langle L'_x(\xi, \bar{\xi}), X_\xi \rangle + \left\langle L'_v(\xi, \bar{\xi}), \left(\frac{\partial X}{\partial \xi} \right) \bar{\xi} \right\rangle \end{aligned}$$

となる。これは上の式と一致するので、 $\left. \frac{d}{dt} G(x(t), \dot{x}(t)) \right|_{t=0} = 0$ であり、 G はオイラー-ラグランジュ方程式の解に沿って保存される。 □

¹たまたに綴りが Nöther の本もあるが、Noether が正しそう。

Example 1 (角運動量保存則). $M = \mathbb{R}^3$ として, 中心力場のラグランジアン

$$L(x, v) = \frac{m}{2}|v|^2 - U(|x|) \quad (x \in \mathbb{R}^3, v \in T\mathbb{R}^3 \cong \mathbb{R}^3)$$

を考える. \mathbb{R}^3 の回転を表す行列 $R(t) \in SO(3)$ に関して M 上の 1 パラメータ変換群 $\varphi^t(x) = R(t)x$ を考えると, それから誘導される TM 上の 1 パラメータ変換群は

$$\Phi^t(x, v) = (\varphi^t(x), (d\varphi^t)_x(v)) = (R(t)x, R(t)v)$$

で, $L \circ \Phi^t(x, v) = L(Rx, Rv) = L(x, v)$ よりラグランジアンは不変である.

この変換に対応する第一積分を求めよう. $SO(3)$ 内の 1 パラメータ変換群 $R(t)$ は

$$R_1(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos t & -\sin t \\ 0 & \sin t & \cos t \end{bmatrix}, \quad R_2(t) = \begin{bmatrix} \cos t & 0 & \sin t \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin t & 0 & \cos t \end{bmatrix}, \quad R_3(t) = \begin{bmatrix} \cos t & -\sin t & 0 \\ \sin t & \cos t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

の積で書ける.

これより, $\xi \mapsto R_j(t)\xi$ ($j = 1, 2, 3$) の無限小変換は

$$\left. \frac{d}{dt} R_j(t)\xi \right|_{t=0} = A_j \xi$$

である. ただし,

$$A_1(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad A_2(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad A_3(t) = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

としている. $\xi \mapsto R(t)\xi$ の無限小変換は $A_1\xi, A_2\xi, A_3\xi$ の和で書ける:

$$X_\xi = c_1 A_1 \xi + c_2 A_2 \xi + c_3 A_3 \xi.$$

$L'_{v_i}(x, v) = mv_i$ であるから, $R_j(t)$ に対応するネーターの定理から

$$G_j(x, \dot{x}) = \langle L'_v(x, \dot{x}), X_x \rangle = m\dot{x}^\top A_j x$$

となる. $j = 1, 2, 3$ それぞれについて書き下すと,

$$G_1(x, v) = m(x_2\dot{x}_3 - x_3\dot{x}_2), \quad G_2(x, v) = m(x_3\dot{x}_1 - x_1\dot{x}_3), \quad G_3(x, v) = m(x_1\dot{x}_2 - x_2\dot{x}_1)$$

であり, これは角運動量が第一積分であることを意味している.

Example 2 (運動量保存則). n 体問題のラグランジアン

$$L(x, v) = \sum_i \frac{m_i}{2}|v_i|^2 - \sum_{j \neq i} U_{i,j}(|x_i - x_j|) \quad (x_i \in \mathbb{R}^3, v_i \in T\mathbb{R}^3 \cong \mathbb{R}^3, k = 1, \dots, n)$$

について, $e_1 = [1, 0, 0]^\top, e_2 = [0, 1, 0]^\top, e_3 = [0, 0, 1]^\top$ として, 平行移動に関する M 上の 1 パラメータ変換群

$$\varphi_k^t(x) = x + te_k$$

を考えると, 対応する TM 上の 1 パラメータ変換群 $\Phi^t(x, v)$ は

$$\Phi_k^t(x, v) = (x + te_k, v)$$

となる. これによってラグランジアンは不変である.

M 上の 1 パラメータ変換群 $\varphi_k^t(x)$ の無限小変換は $X_{k,x} = e_k$ であるから, ネーターの定理から, $P = \sum_i mv_i \in \mathbb{R}^3$ として,

$$G_k(x, v) = \langle L'_v(x, v), X_{k,x} \rangle = \left\langle \sum_i mv_i, e_k \right\rangle = P_k$$

である. これは運動量保存則を表している.

2 ハミルトン方程式に関するネーターの定理

ハミルトニアンは時間によらないものとする。まず、次の事実を確認しておく。

Proposition 1. $\{\Psi^t\}_t$ が T^*M 上の 1 パラメータ変換群で、 Ψ^t が完全シンプレクティックであるならば、ある T^*M 上の関数 G が存在し、 Ψ^t が G をハミルトニアンとするハミルトンベクトル場 X_G のフローになっている。

Proof. ベクトル場 X を Ψ^t の無限小変換とする：

$$\left. \frac{d}{dt} \Psi^t(z) \right|_{t=0} = X_z.$$

正準 1-形式 λ をベクトル場 X に沿ってリー微分すると、その定義から

$$L_X \lambda = \left. \frac{d}{dt} ((\Psi^t)^* \lambda - \lambda) \right|_{t=0}$$

である。いま、完全シンプレクティック性から、 $(\Psi^t)^* \lambda - \lambda = dF$, $F(0) = 0$ となる関数 $F(t)$ が存在するので、

$$L_X \lambda = dF'_t|_{t=0}$$

一方、 $\omega = d\lambda$ とカルタンの公式から $L_X \lambda = \iota_X \omega + d(\iota_X \lambda)$ であり、

$$dF'_t|_{t=0} = \iota_X \omega + d(\iota_X \lambda)$$

である。 $G := \iota_X \lambda - F'_t|_{t=0}$ とすると、

$$\iota_X \omega = -dG$$

となる。 X がハミルトンベクトル場 X_G にほかならないことを意味している。 □

さて、ハミルトン系に対するネーターの定理は、ラグランジュ系のときより一般化された形で次のように述べられる。

Theorem 2 (ネーター). ハミルトニアン H が T^*M 上の完全シンプレクティックな 1 パラメータ変換群 $\{\Psi^t\}$ について不変、つまり $H \circ \Psi^t = H$ であるとする、 $\{\Psi^t\}$ の無限小変換はハミルトンベクトル場であり、そのハミルトニアンは X_H の第一積分である。

Proof. 先の命題から、 $\{\Psi^t\}$ に対してある関数 G が存在し、 $\{\Psi^t\}$ は X_G のフローになっている。 $H \circ \Psi^t = H$ より H は X_G の第一積分であり、 $X_G H = 0$ である。ところが、

$$X_G H = \{G, H\} = -\{H, G\} = X_H G$$

であるから、 $X_H G = 0$ であり G は X_H の第一積分である。 □

M 上の 1 パラメータ変換群 $\{\varphi^t\}$ については、 T^*M 上の 1 パラメータ変換群 $\{\Psi^t\}$ を

$$\Psi^t(q, p) = (\varphi^t(q), \left(\left(\frac{\partial \varphi^t}{\partial q} \right)^{-1} \right)^T p)$$

で定義すれば、 $\lambda = p^T dq$ であるから、

$$(\Psi^t)^* \lambda = p^T \left(\frac{\partial \varphi^t}{\partial q} \right)^{-1} \left(\frac{\partial \varphi^t}{\partial q} \right) dq = \lambda$$

であり、これより Ψ^t は完全シンプレクティックであるからネーターの定理が適用できる。このとき、第一積分 G は無限小変換 $X = \left. \frac{d}{dt} \Psi^t \right|_{t=0}$ として $G = \iota_X \lambda - F'_t|_{t=0}$ で与えられたが、今回は $(\Psi^t)^* \lambda - \lambda = 0$ なので $F = 0$ であり、また $\lambda = \sum p_i dq_i$ なので、 $X = X_q \frac{\partial}{\partial q} + X_p \frac{\partial}{\partial p}$ と書けば

$$G = \iota_X \lambda = \langle p, X_q \rangle$$

である。 X_q は φ^t の無限小変換であり、またルジャンドル変換から $p = L'_v$ なので、 G はラグランジュ系のネーターの定理から導かれる第一積分と同じものである。

Example 3. 角運動量保存則の導出をハミルトニアンの場合でも確認しておこう.

今回は回転行列 $R_3(t)$ についてだけ考える. (一般の場合も同様.) M 上の 1 パラメータ変換群 $\varphi^t(x) = R_3(t)x$ に対応する T^*M 上の完全シンプレクティック 1 パラメータ変換群 $\Psi^t(x, p)$ は,

$$\Psi^t(x, p) = (R_3(t)x, R_3(-t)^T p)$$

であらわされる. 無限小変換 $X = \frac{d}{dt}\Psi^t|_{t=0}$ は $X_{(x,p)}(A_3x, -A_3^T p)$ なので,

$$G_3 = \langle p, X_q \rangle = p^T A_3 x = x_1 p_2 - x_2 p_1$$

となる. ルジャンドル変換 $p = L'_v = m\dot{x}$ よりこれは角運動量である.

Example 4 (ラプラス-ルンゲ-レンツベクトル). $M = \mathbb{R}^3$ の下で, ケプラー問題のハミルトニアン

$$H(x, y) = \frac{1}{2}|y|^2 - \frac{1}{|x|}$$

を考える. これは中心力場であるから角運動量保存則は当然成り立つが, ハミルトニアン H , 角運動量 G とは別の第一積分であるラプラス-ルンゲ-レンツベクトル R が存在する: これは局所座標の下で第 i 成分が

$$(R(x, y))_i = -(x \cdot y)p_i + |y|^2 x_i - \frac{x_i}{|x|}$$

で表されるものである. これは $SO(4)$ に由来する対称性から導かれる.

ラプラス-ルンゲ-レンツベクトルが第一積分であることを [?] を参考にエネルギーが負 (簡単のため, $H = -1/2$) の場合について導こう. 以下, $M = \mathbb{R}^n$ としてより一般の場合 ($n \geq 2$) について考える.

TO DO: Moser の正則化変換を用いてラプラス-ルンゲ-レンツベクトルが第一積分であることを導出する.

まず, 特異点 $|x| = 0$ を解消するときに用いる時間変数変換

$$\frac{ds}{dt} = |x|^{-1}$$

を考える. $\square' = \frac{d}{ds}\square$ とすればベクトル場は

$$x'_i = |x| \frac{\partial H}{\partial y_i}, \quad y'_i = -|x| \frac{\partial H}{\partial y_i}$$

である. これ自体はハミルトン系ではなくなるが, そのベクトル場は $|q|X_H$ と書けて, 特に等エネルギー曲面 $\{H = -1/2\}$ 上のフローは別のハミルトニアン

$$K_0 = |x| \left(H + \frac{1}{2} \right) + 1 = \frac{|x|}{2} (|y|^2 + 1)$$

の等位集合 $\{K = 1\}$ の上でのフローと一致する. 単位ベクトル e に対して, $(e, y) \mapsto (x(e, p), y) = (2(|x|^2 + 1)^{-1}, y)$ が $\mathbb{S}^{n-1} \times \mathbb{R}^n$ から $\{K = 1\}$ への微分同相写像を定めるので, $\{K = 1\}$, ひいては $\{H = -1/2\}$ はコンパクトでない.

ここで, Moser の正則化変換と呼ばれる変換を導入する. $\bar{q} = (q_0, q), \bar{p} = (p_0, p) \in \mathbb{R}^{n+1}$ として, $\langle \bar{p}, \bar{q} \rangle = p_0 q_0 + p \cdot q$ とする. $\|\bar{q}\| = \langle q, p \rangle^{1/2}$ として

$$T^+\mathbb{S}^n = \{(\bar{q}, \bar{p}) \in \mathbb{R}^{2(n+1)} \mid \|\bar{q}\| = 1, \langle \bar{p}, \bar{q} \rangle = 0, \bar{p} \neq 0\}$$

として $\mathbb{R}^{2(n+1)}$ の部分多様体を定める. これは $T\mathbb{S}^n$ からゼロ切断を除いたものである. $\lambda_1 = \bar{p} d\bar{q}$ とすると, $d\lambda_1|_{T^+\mathbb{S}^n}$ は非退化になる. 実際, たとえば $q_0 \neq 0$ の範囲で, $q_0 = \sqrt{1 - |q|^2}$, $p_0 = -q_0^{-1}(p \cdot q) = \frac{-p \cdot q}{\sqrt{1 - |q|^2}}$ であるから,

$$\begin{aligned} d\lambda_1|_{T^+\mathbb{S}^n} &= dp_0 \wedge dq_0 + \sum dp_i \wedge dq_i \\ &= d \left(\frac{-p \cdot q}{\sqrt{1 - |q|^2}} \right) \wedge d(\sqrt{1 - |q|^2}) + \sum dp_i \wedge dq_i \\ &= \sum \left(1 + \frac{q_i^2}{1 - |q|^2} \right) dp_i \wedge dq_i \\ &= \sum \left(\frac{1 - |q|^2 + q_i^2}{1 - |q|^2} \right) dp_i \wedge dq_i \end{aligned}$$

である. もしすべての $i = 1, \dots, n$ について $1 - |q|^2 + q_i^2 = 0$ となるなら, $1 = |q|^2 - q_i^2 \leq |q|^2 \leq 1$ より $|q|^2 = 1$ となるが, このとき $q_i^2 = -1 + |q|^2 = 0$ となってしまい $|q| = 0$ に矛盾. したがって, ある i があって $1 - |q|^2 + q_i^2 \neq 0$ となるので, $q_0 \neq 0$ の下で $d\lambda_1|_{T^+\mathbb{S}^n} \neq 0$ となる. 他の $q_k \neq 0$ の下でも同様の議論で非退化性が導かれる.

$\mathbb{R}_*^{2(n+1)} := \{(\bar{q}, \bar{p}) \in \mathbb{R}^{2(n+1)} | p_0 + \|\bar{p}\| \neq 0\}$ として, 写像 $\bar{\mu} : \mathbb{R}_*^{2(n+1)} \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$ を

$$(x, y) = \bar{\mu}(\bar{q}, \bar{p}) = ((\|\bar{p}\| + p_0)q - q_0p, (\|\bar{p}\| + p_0)^{-1}p)$$

であるとする. $(T^+\mathbb{S}^n)' := T^+\mathbb{S}^n \cap \mathbb{R}_*^{2(n+1)}$ として, Moser 写像 $\mu : (T^+\mathbb{S}^n)' \rightarrow (\mathbb{R}^n \setminus \{0\}) \times \mathbb{R}^n$ を $\bar{\mu}$ の $T^+\mathbb{S}^n$ への制限として定める.

Proposition 2. Moser 写像 $\mu : (T^+\mathbb{S}^n)' \rightarrow (\mathbb{R}^n \setminus \{0\}) \times \mathbb{R}^n$ は次の (i)-(iii) を満たす:

- (i) μ は微分同相写像,
- (ii) $K_1 = K_0 \circ \mu = \|\bar{p}\|$,
- (iii) $\mu^*d\lambda_0 = d\lambda_1|_{(T^+\mathbb{S}^n)'}$, ただし $\lambda_0 = ydx$, $\lambda_1 = \bar{p}d\bar{q}$.

Proof.

(i) 逆関数 $\mu^{-1} : (x, y) \mapsto (\bar{q}, \bar{p})$ は

$$\begin{aligned} q_0 &= -2(x \cdot y)[|x|(1 + |y|^2)]^{-1}, \quad q = [|x|(1 + |y|^2)]^{-1}((1 + |y|^2)x - 2(x \cdot y)y), \\ p_0 &= \frac{1}{2}|x|(1 - |y|^2), \quad p = |x|y \end{aligned}$$

で与えられる. 確かに,

$$\begin{aligned} \|\bar{q}\|^2 &= [|x|(1 + |y|^2)]^{-2}(4(x \cdot y)^2 + \sum((1 + |y|^2)x_i - 2(x \cdot y)y_i)^2) \\ &= [|x|(1 + |y|^2)]^{-2}(4(x \cdot y)^2 + |x|^2(1 + |y|^2)^2 - 4(x \cdot y)^2(1 + |y|^2) + 4(x \cdot y)^2|y|^2) \\ &= 1, \\ \langle \bar{p}, \bar{q} \rangle &= \left(\frac{1}{2}|x|(1 - |y|^2)\right)(-2(x \cdot y)[|x|(1 + |y|^2)]^{-1}) + (x \cdot y) - 2(x \cdot y)|y|^2(1 + |y|^2)^{-1} \\ &= -(x \cdot y)(1 - |y|^2)(1 + |y|^2)^{-1} + (x \cdot y)(1 - 2|y|^2(1 + |y|^2)^{-1}) \\ &= (x \cdot y)(1 + |y|^2)^{-1}(-(1 - |y|^2) + 1 + |y|^2 - 2|y|^2) \\ &= 0, \\ p_0 + \|p\| &= \frac{1}{2}|x|\sqrt{(1 - |y|^2)^2 + 4|y|^2}^{1/2} + \frac{1}{2}|x|(1 - |y|^2) \\ &= \frac{1}{2}|x|(1 + |y|^2) + \frac{1}{2}|x|(1 - |y|^2) \\ &= |x| \neq 0 \end{aligned}$$

であるから, $\mu^{-1}(x, y) \in (T^+\mathbb{S}^n)'$ であり,

$$\begin{aligned} (\|\bar{p}\| + p_0)q - q_0p &= |x|([|x|(1 + |y|^2)]^{-1}((1 + |y|^2)x - 2(x \cdot y)y)) + 2(x \cdot y)[|x|(1 + |y|^2)]^{-1}|x|y \\ &= x - 2(x \cdot y)(1 + |y|^2)^{-1}y + 2(x \cdot y)(1 + |y|^2)^{-1}y \\ &= x \\ (\|\bar{p}\| + p_0)^{-1}p &= \left(\frac{1}{2}|x|\sqrt{(1 - |y|^2)^2 + 4|y|^2}^{1/2} + \frac{1}{2}|x|(1 - |y|^2)\right)^{-1}|x|y \\ &= y \end{aligned}$$

となる. μ, μ^{-1} の可微分性は明らか.

(ii) $|x| = \|\bar{p}\| + p_0, |y| = (\|\bar{p}\| + p_0)^{-1}|p|$ より,

$$\begin{aligned} K(x(\bar{q}, \bar{p}), y(\bar{q}, \bar{p})) &= \frac{|x|}{2}(|y|^2 + 1) \\ &= \frac{\|\bar{p}\| + p_0}{2} \left(\frac{|p|^2}{(\|\bar{p}\| + p_0)^2} + 1 \right) \\ &= \frac{\|\bar{p}\| + p_0}{2} \frac{|p|^2 + \|\bar{p}\|^2 + p_0^2 + 2p_0\|\bar{p}\|}{(\|\bar{p}\| + p_0)^2} \\ &= \frac{\|\bar{p}\| + p_0}{2} \frac{2(\|\bar{p}\|^2 + p_0)\|\bar{p}\|}{(\|\bar{p}\| + p_0)^2} \\ &= \|\bar{p}\|. \end{aligned}$$

(iii) $|p|^2 = \|\bar{p}\|^2 - p_0^2$ より $\sum p_i dp_i = \|\bar{p}\| d\|\bar{p}\| - p_0 dp_0$, $\langle \bar{p}, \bar{q} \rangle = 0$ より $\langle p, q \rangle = -p_0 q_0$ である.

$$\begin{aligned} \sum y_i dx_i &= \sum (\|\bar{p}\| + p_0)^{-1} p_i d((\|\bar{p}\| + p_0)q_i - q_0 p_i) \\ &= \sum_i (\|\bar{p}\| + p_0)^{-1} p_i \left[(\|\bar{p}\| + p_0) dq_i + \frac{\|\bar{p}\| + p_0}{\|\bar{p}\|} q_i dp_0 + \sum_j \frac{q_i}{\|\bar{p}\|} p_j dp_j - q_0 dp_i - p_i dq_0 \right] \\ &= \sum_i p_i dq_i + \textcolor{red}{p_0 dq_0} + \left(\sum_i p_i q_i \right) \frac{1}{\|\bar{p}\|} dp_0 + \sum_i \frac{p_i q_i}{\|\bar{p}\|(\|\bar{p}\| + p_0)} \left(\sum_j p_j dp_j \right) \\ &\quad - \textcolor{red}{p_0 dq_0} - \frac{q_0}{\|\bar{p}\| + p_0} \left(\sum_i p_i dp_i \right) - \sum_i \frac{p_i^2}{\|\bar{p}\| + p_0} dq_0 \\ &= \bar{p} d\bar{q} - \frac{p_0 q_0}{\|\bar{p}\|} dp_0 - \frac{p_0 q_0}{\|\bar{p}\|(\|\bar{p}\| + p_0)} (\|\bar{p}\| d\|\bar{p}\| - p_0 dp_0) \\ &\quad - p_0 dq_0 - \frac{q_0}{\|\bar{p}\| + p_0} (\|\bar{p}\| d\|\bar{p}\| - p_0 dp_0) - \sum_i \frac{p_i^2}{\|\bar{p}\| + p_0} dq_0 \\ &= \bar{p} d\bar{q} - \frac{\|\bar{p}\| + p_0}{\|\bar{p}\| + p_0} q_0 d\|\bar{p}\| + \frac{-p_0(\|\bar{p}\| + p_0) + p_0^2 + p_0\|\bar{p}\|}{\|\bar{p}\|(\|\bar{p}\| + p_0)} q_0 dp_0 - \frac{p_0(\|\bar{p}\| + p_0) + (\sum_i p_i^2)}{\|\bar{p}\| + p_0} dq_0 \\ &= \bar{p} d\bar{q} - q_0 d\|\bar{p}\| - \|\bar{p}\| dq_0 \\ &= \bar{p} d\bar{q} - d(q_0 \|\bar{p}\|) \end{aligned}$$

したがって,

$$\mu^* d\lambda_0 = d \left(\sum y_i dx_i \right) = d(\bar{p} d\bar{q} - d(q_0 \|\bar{p}\|)) = d\bar{p} \wedge d\bar{q} = d\lambda_1.$$

□

Prop.2 より $\mu^{-1}(\{K = 1\}) = (T^1\mathbb{S}^n)' = T^1\mathbb{S}^n \cap \mathbb{R}_*^{2(n+1)}$ となる. ただし, $T^1\mathbb{S}^n$ は \mathbb{S}^n の単位接ベクトルのなすバンドルである. $(T^1\mathbb{S}^n)'$ に含まれない $T^1\mathbb{S}^n$ の元は $(\bar{q}, \bar{p}) = (q_0, q, p_0, p) = (0, q, -1, 0)$ であるが, 元のケプラー問題の特異点 $x = 0$ に対応する. これより, $(T^1\mathbb{S}^n)'$ の代わりに $T^1\mathbb{S}^n$ を考えてよい.

ハミルトン系 $(T^+\mathbb{S}^n, \omega_1 = d\lambda_1|_{T^+\mathbb{S}^n}, K_1 = \|p\|_{T^+\mathbb{S}^n})$ を考えれば, その等位集合 $\{K_1 = 1\}$ 上のフローは時間変換後の $\{K_0 = 1\}$ 上のフローと Moser 写像 μ により写り変わる. このフローを考えるために, より一般に $\mathbb{R}^{2(n+1)}$ 上のハミルトニアン f に対し, それを $T^+\mathbb{S}^n$ に制限した \hat{f} がつくる $T^+\mathbb{S}^n$ 上のフローがどうなるか確認しておく. ハミルトンベクトル場は

$$\iota_{X_f} \omega_1 = \textcolor{red}{\text{ベクトル場の導出を書く.}}$$

したがって, ハミルトンベクトル場 $X_{\hat{f}}$ は次の $\mathbb{R}^{2(n+1)}$ 上のベクトル場の $T^+\mathbb{S}^n$ への制限である:

$$\tilde{X}_f = \langle \nabla_p f, \left(\frac{\partial}{\partial q} \right) \rangle - \langle \nabla_q f, \left(\frac{\partial}{\partial p} \right) \rangle + \langle \nabla_p f, \Gamma \left(\frac{\partial}{\partial p} \right) \rangle.$$

ただし, ∇ は共変微分, Γ は回転の生成子である.

参考文献

- [1] 伊藤 秀一. 常微分方程式と解析力学, 共立出版 (1998).
- [2] V. Arnol'd, V. Kozlov, A. Neishtadt, Mathematical Aspects of Classical and Celestial Mechanics, Springer-Verlag Berlin Heidelberg (2006).
- [3] M. Kummer, On the Regularization of the Kepler Problem, Commun. Math. Phys, **84**, 133-152 (1982)