ビリヤード写像における面積保存性の証明

まるげり

2025 年 1 月 23 日

表題のとおりです. 2 通りやります.

0　イントロダクション: ビリヤード写像について

いま, 平面領域 $D \subset \mathbb{R}^2$(ビリヤード台) の中を動く質点 (ボール) の運動を考える. ボールは台 D の境界にぶつかると, 入射角と反射角が等しくなるように向きを変えるとする.

このとき, 台の境界をなす閉曲線 $\gamma = \partial D$ に向きを入れて, パラメータとして弧長パラメータ s を選んでおく: すなわち, x, y 座標について, 適当なパラメータ t でパラメータ付けした閉曲線 γ の各点を $(\gamma_1(t), \gamma_2(t))$ と書いたとき,

$$s(t) = \int_0^t \sqrt{\left(\frac{d\gamma_1}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d\gamma_2}{dt}\right)^2} dt$$

で決まるパラメータ s によって, 再度パラメータ変換 $\gamma(s) = \gamma(t(s))$ により閉曲線に s でのパラメータを入れるのである. (要するに, 曲線に沿った「弧の長さ」をパラメータとして選ぶ.)

さて, 境界上の点 $\gamma(s)$ にいたボールが反射角 α で出発し, 境界上の別の点 $\gamma(s')$ にぶつかり, そのときの入射角（反射角）が α' であったとする. このとき, (s, α) がビリヤードの運動により (s', α') に写った, と考えられる. 出発点とそのときの反射角が決まれば, 次にぶつかる点とそのときの入射角は一意に定まる. これを写像と捉えるのである.

この写像 $T : (s, \alpha) \mapsto (s', \alpha')$ を**ビリヤード写像**という. なお, γ の一周の長さを L としておくと, この写像の定義域・値域 (**相空間**という) は $(\mathbb{R}/L\mathbb{Z}) \times [0, \pi]$ と書ける. (入射角 α が 0 や π の場合は, ビリヤードの運動によってその場を動かない (写像 T の不動点) と考える.)

さて, 実はこのビリヤード写像 T は, 相空間 $(\mathbb{R}/L\mathbb{Z}) \times [0, \pi]$ 上で次の 2 次微分形式 (2 - form) を保存することが知られている.

Theorem 1. ビリヤード写像 $T : (s, \alpha) \mapsto (s', \alpha')$ は面積形式 $\sin\alpha ds \wedge d\alpha$ を保存する. つまり,

$$\sin\alpha ds \wedge d\alpha = \sin\alpha' ds' \wedge d\alpha'.$$

以下, この証明をやります.

1　初等幾何的方法

2　Poincaré-Cartan の積分不変式を用いた方法

手遊びに V.I.Arnold と A.Avez の『古典力学のエルゴード問題』をペラペラめくってたときに見つけたやつ. APPENDIX 31 です.

2.1　ハミルトン系の準備: Poincaré-Cartan の積分不変式

普通**ハミルトン系**というと, $\mathbb{R}^{2n}$ 上の運動方程式で, ある関数 (**ハミルトニアン**)$H(p, q)$ に対し,

$$\dot{q}_k = \frac{\partial H}{\partial p_k},\ \dot{p}_k = \frac{\partial H}{\partial q_k} \quad (k = 1, \cdots, n) \tag{2.1}$$

と表されるものを指す．この解 $(p(t), q(t))$ 上で H は t に依らず一定になる．(多くの場合, H を力学的エネルギーの和（運動エネルギー ＋ ポテンシャル）と解釈しても大丈夫.)

ただ, 今回は Poincaré-Cartan の積分不変式を導きたい ＋ 自分の勉強も兼ねて, 少し特殊なやり方でハミルトン系を定めよう．$2n+1$ 次元多様体 M^{2n+1} に, 適当な座標 $(p,q,t) = (p_1,\cdots,p_n,q_1,\cdots,q_n,t)$ を取る．M^{2n+1} 上の関数 $H(p,q,t)$

に対し, 次のような 1 次微分形式 (1-form)

$$\theta = pdq - Hdt \tag{2.2}$$

を考える．

この 1-form θ により, ハミルトン系は次のようなやり方で決定される．

その外微分 $\omega = d\theta$ は 2-form であるが, 各点 $x \in M^{2n+1}$ について, ある接ベクトル $\xi_x \neq 0$ が存在し,

$$\omega(\xi_x, \eta_x) = 0 \quad \forall \eta_x \in T_x M$$

が存在する．なぜなら, ω を表現する $(2n+1)$ 次の歪対称行列を A とすれば,

$$\omega(\xi_x, \eta_x) = (A\xi_x, \eta_x)$$

である．A は歪対称なので転置を取ると $A^{\mathsf{T}} = -A$ であるが, 一方で $2n+1$ 次なので,

$$\det(A) = \det\left(A^{\mathsf{T}}\right) = \det(-A) = (-1)^{2n+1}\det(A) = (-1)\det(A)$$

となる．結局, $\det(A) = 0$ となり, A は非正則行列になるので, 同次方程式 $A\xi_x = 0$ が解を持つのである．

この $A\xi_x = 0$ を満たす ξ_x 全体は線形空間をなすが, この次元が 1 しかないとき, この ξ_x(を適当に正規化したもの) を ω の**渦の方向**あるいは**特性方向**といい, 渦の方向により定まるベクトル場 $\xi = \{\xi_x\}$ の積分曲線を ω の**渦線**あるいは**特性曲線**という．M の中の閉曲線 γ_0 に対し, この曲線上の点から始めた渦線によって出来上がる曲面を ω の**渦管**という．

渦管の上で 2-formω はどうなるかを確認しておこう．

パラメータ u が入った M^{2n+1} 内の閉曲線 γ_0 を考える．($\gamma_0(0) = \gamma_0(1)$ とする.) この曲線上の各点 $\gamma_0(u)$ から出発する渦線を $x(s,u) = x^s(\gamma_0(u))$ とすれば, 閉曲線 γ_0 に対して定まる ω の渦管 Γ は $\Gamma = \{x(s,u) = x^s(\gamma_0(u)) | s \in \mathbb{R}, u \in [0,1]\}$ と書ける．

Γ は $x : \mathbb{R} \times [0,1] \ni (s,u) \to x^s(\gamma_0(u)) \in \Gamma$ により座標 (s,u) が入る．恒等写像 $i : \Gamma \to M^{2n+1}$ により Γ を M^{2n+1} に埋め込むと, $x(s,u) = (p(s,u)q(s,u)t(s,u))$ と書いて, $p_s = \nabla_s p, p_u = \nabla_u p$ などと表せば,

$$\begin{aligned} i^*dp &= dp(s,u) = p_s ds + p_u du, \\ i^*dq &= dq(s,u) = p_q ds + q_u du, \\ i^*dt &= dt(s,u) = t_s ds + t_u du. \end{aligned}$$

である．M^{2n+1} 上の 2-form ω の Γ への引き戻し $i^*\omega$ を基底 ds, du で表示すれば,

$$i^*\omega = [dp(s,u)\ dq(s,u)\ dt(s,u)]A\begin{bmatrix} dp(s,u) \\ dq(s,u) \\ dt(s,u) \end{bmatrix} = [ds\ du]\begin{bmatrix} p_s & q_s & t_s \\ p_u & q_u & t_u \end{bmatrix} A \begin{bmatrix} p_s & p_u \\ q_s & q_u \\ t_s & t_u \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ds \\ du \end{bmatrix}$$

一方で, $x(s,u)$ は渦の方向 ξ の積分曲線なので, $x_s = [p_s, q_s, t_s]^{\mathsf{T}}$ は $Ax_s = 0$ を満たす．よって,

$$i^*\omega = [ds\ du]\begin{bmatrix} x_s \\ x_u \end{bmatrix} A \begin{bmatrix} x_s & x_u \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ds \\ du \end{bmatrix} = [ds\ du]\begin{bmatrix} x_s^{\mathsf{T}}Ax_s & x_s^{\mathsf{T}}Ax_u \\ x_u^{\mathsf{T}}Ax_s & x_u^{\mathsf{T}}Ax_u \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ds \\ du \end{bmatrix} = [ds\ du]\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & x_u^{\mathsf{T}}Ax_u \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ds \\ du \end{bmatrix}$$

ここで, A が歪対称で $x_u^{\mathsf{T}}Ax_u = (x_u^{\mathsf{T}}Ax_u)^{\mathsf{T}} = -x_u^{\mathsf{T}}Ax_u$ であるから, $x_u^{\mathsf{T}}Ax_u = 0$ である．よって,

$$i^*\omega = 0$$

となる．つまり, 渦管 Γ の上では微分形式 ω は消失するのである．

さて, この渦管の上での周回積分について, 次が成り立つ．

Theorem 2. $\omega = d\theta$ の渦管 Γ 上の,（渦管を一周する）同じ向きの閉曲線 γ_0, γ_1 を考えると, 渦線が γ_0 から γ_1 に向けて伸びているとすれば,

$$\int_{\gamma_0} \theta = \int_{\gamma_1} \theta.$$

この定理は, 渦の方向により定まるベクトル場の運動について,

$$I(s)=\int_{x^s(\gamma_0)}\theta$$

が s に依らず不変であることを示唆している (**ケルビンの渦定理**の一般化).

Proof. Stokes の定理から,

$$\int_\Gamma \omega=\int_\Gamma d\theta=\int_{\gamma_0}\theta-\int_{\gamma_1}\theta$$

であるが, 渦管の上で ω は消失するので, 左辺は 0 である. よって,

$$\int_{\gamma_0}\theta-\int_{\gamma_1}\theta=0$$

となり, 題意が示される.

□

ところで, 1-form θ は式 (2.2) で具体的に与えていた. このときの $\omega=d\theta$ に対する積分曲線（渦線）はなんであろうか?

具体的に ω の表現行列 A を計算しよう. $p=(p_1,\cdots,p_n), q=(q_1,\cdots,q_n)$ として, $H_p=\nabla_p H(p,q,t), H_q=\nabla_Q H(p,q,t)$ で表せば,

$$A=\begin{bmatrix} O_n & E_n & -H_p \\ -E_n & O_n & -H_q \\ H_p^\intercal & H_q^\intercal & 0 \end{bmatrix}$$

となる. ただし, E_n は n 次の単位行列, O_n は n 次の零行列である.

この表現行列 A の右上の $2n$ 次正方行列は正則であるため, 同次方程式 $AX=0$ の解空間は 1 次元であり, 上の話が適用できる. 解空間の元 $X\in TM$ は

$$X=\sum_k X_k\frac{\partial}{\partial p_k}+X_{k+n}\frac{\partial}{\partial q_k}+X_t\frac{\partial}{\partial t}$$

と書けるが, 特に $X_t\neq 0$ である.
(なぜなら, $AX=0$ より

$$AX=\begin{bmatrix} X_{k+n}-H_pX_t \\ -X_k-H_qX_t \\ H_pX_k+H_qX_{k+n} \end{bmatrix}=0$$

であるので, もし $X_t=0$ なら $X_k=X_{k+n}=X_t=0$ となり, $X=0$ になってしまう.)

そのため, 特に $X_t=1$ となるものを渦の方向として定めても良い. このとき, $AX=0$ から他の成分は

$$X_k=-H_{q_k},\ X_{k+n}=H_{p_k}\quad (k=1,\cdots n)$$

と決定する. したがって, 渦の方向の定めるベクトル場 X は

$$X=\sum_k -H_{q_k}\frac{\partial}{\partial p_k}+H_{p_k}\frac{\partial}{\partial q_k}+\frac{\partial}{\partial t}$$

であり, この積分曲線 $x(s,x_0)=(p(s,x_0),q(s,x_0)t(s,x_0))$ の満たすべき方程式は拡張したハミルトン系

$$\dot q_k=\frac{\partial H}{\partial p_k},\ \dot p_k=-\frac{\partial H}{\partial q_k},\ \dot t=1\quad (k=1,\cdots,n) \tag{2.3}$$

にほかならない. 定理 2 から, 拡張したハミルトン系 (2.3) のフロー x^s に沿って, 積分

$$\int_{x^s(\gamma_0)} pdq-Hdt \tag{2.4}$$

の値は不変である.

Theorem 3. 拡張したハミルトン系 (2.3) について, 相空間内の閉曲線 γ_0 と, フロー x^s により描かれる管 $\gamma_1=x^1(\gamma_0)$ について,

$$\int_{\gamma_0} pdq-Hdt=\int_{\gamma_1} pdq-Hdt.$$

ハミルトン系 (2.1) は (2.3) の解を (p, q) 平面に射影したものに過ぎないが, 上の定理をハミルトンフロー ϕ^t により $\gamma_1 = \phi^t(\gamma_0)$ にすれば, γ_0, γ_1 上で t は定数であり $dt = 0$ となるので, 次が成立する;

Theorem 4. ハミルトン系 (2.1) について, 相空間内の閉曲線 γ_0 と, ハミルトンフロー ϕ^t により描かれる管 $\phi^t(\gamma_0)$ について,

$$\int_{\gamma_0} pdq = \int_{\gamma_1} pdq.$$

以上から, ハミルトン系 (2.1) は式 (2.2) で決まる 1-formθ から導出できる．また, その拡張したハミルトン系 (2.3) には, 積分で書ける不変量 (2.4) を持つ．この不変量 (2.4) を **Poincaré-Cartan の積分不変式**という.

2.2 ハミルトン系の Poincaré 写像

n 自由度ハミルトン系 (2.1) に話を戻す．この系の相空間は $2n$ 次元の多様体になるが, その断面 Σ を $H = h, q_1 = 0$ で与えると, Σ は等エネルギー $H = h$ を持つ $2n-2$ 次元部分多様体をなす.

ある領域 $\Sigma_0 \subset \Sigma$ で局所座標 $(P, Q) = (p_2, \cdots, p_n, q_2, \cdots, q_n)$ が取れたとし, かつこの領域で上の方程式について $\dot{q}_1 \neq 0$ が成り立っているとき, 断面 Σ を surface of section とか Poincaré section とか言う．(日本だと多分「Poincaré 断面」と呼ぶケースが多いと思う.)

いま, 点 $x \in \Sigma_0$ であって, 初期点 x についてのハミルトン系の解がしばらくして Σ_0 に戻って来るようなものを考える．このとき, $\dot{q}_1 \neq 0$ より, x に十分近い点 $x' \in \Sigma_0$ を通過する解はまたいずれ Σ_0 に戻って来て, Σ_0 を横断する．この x' の定義できるような x の近傍 $\Sigma_1 \subset \Sigma_0 \subset \Sigma$ について, Σ_0 内の再帰した点を Ax' とすれば, 写像 $A : \Sigma_1 \to \Sigma_0$ が定義できる．（このような写像を **Poincaré 写像**という.）

Theorem 5. 上で定めたハミルトン系の Poincaré 写像 $A : \Sigma_1 \to \Sigma_0$ は正準的である．すなわち, Σ_1 内の任意の閉曲線 γ について,

$$\int_{\gamma} PdQ = \int_{A\gamma} PdQ. \tag{2.5}$$

である．ただし, $PdQ = \sum_{k=2}^{n} p_k dq_k$.

Proof. 拡張したハミルトン系 (2.3) の下で考え, 拡張した相空間 $\{(p, q, t)\}$ 上での閉曲線をそれぞれ $\gamma', A\gamma'$ とする．(γ' は $t = 0$ の面の上での γ_0 にほかならないが, 再帰時間は点ごとに異なるため $A\gamma'$ の各点での t 座標は一致しない)

Poincaré-Cartan の積分不変式 3 より

$$\int_{\gamma'} pdq - Hdt = \int_{A\gamma'} pdq - Hdt.$$

となる．ここで, γ および $A\gamma$ は等エネルギー面 (つまり, $H =$ 定数である面) の上にあるので,

$$\int_{\gamma'} Hdt = \int_{A\gamma'} Hdt.$$

また, γ' 上は $t = 0$ で一定なので,$dt = 0$ であり,

$$\int_{\gamma'} Hdt = 0.$$

したがって,

$$\int_{\gamma'} pdq = \int_{\gamma} pdq, \ \int_{A\gamma'} pdq = \int_{A\gamma} pdq$$

q_1 は $\Sigma_1 \subset \Sigma$ 上で一定なので, $\gamma', A\gamma'$ 上で $dq = 0$ であり,

$$\int_{\gamma'} p_1 dq_1 = \int_{A\gamma'} pdq = 0.$$

したがって,

$$\int_{\gamma} PdQ = \int_{\gamma'} pdq - Hdt = \int_{A\gamma'} pdq - Hdt = \int_{A\gamma} PdQ.$$

となり,(2.5) が示された.

□

2.3 ビリヤード系への応用

参考文献

[1] V.I.Arnold, A.Avez. Ergodic Problems of Classical Mechanics, Benjamin, (1968)