ビリヤード写像における面積保存性の証明

まるげり

2025 年 1 月 23 日

表題のとおりです. 2 通りやります.

0　イントロダクション: ビリヤード写像について

いま, 平面領域 $D \subset \mathbb{R}^2$(ビリヤード台) の中を動く質点 (ボール) の運動を考える. ボールは台 D の境界にぶつかると, 入射角と反射角が等しくなるように向きを変えるとする.

このとき, 台の境界をなす閉曲線 $\gamma = \partial D$ に向きを入れて, パラメータとして弧長パラメータ s を選んでおく: すなわち, x, y 座標について, 適当なパラメータ t でパラメータ付けした閉曲線 γ の各点を $(\gamma_1(t), \gamma_2(t))$ と書いたとき,

$$s(t) = \int_0^t \sqrt{\left(\frac{d\gamma_1}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d\gamma_2}{dt}\right)^2} dt$$

で決まるパラメータ s によって, 再度パラメータ変換 $\gamma(s) = \gamma(t(s))$ により閉曲線に s でのパラメータを入れるのである. (要するに, 曲線に沿った「弧の長さ」をパラメータとして選ぶ.)

さて, 境界上の点 $\gamma(s)$ にいたボールが反射角 α で出発し, 境界上の別の点 $\gamma(s')$ にぶつかり, そのときの入射角（反射角）が α' であったとする. このとき, (s, α) がビリヤードの運動により (s', α') に写った, と考えられる. 出発点とそのときの反射角が決まれば, 次にぶつかる点とそのときの入射角は一意に定まる. これを写像と捉えるのである.

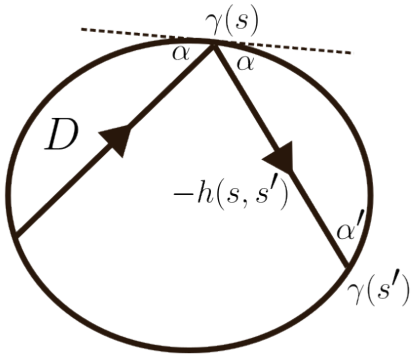

図 1: ビリヤード系

この写像 $T : (s, \alpha) \mapsto (s', \alpha')$ を**ビリヤード写像**という. なお, γ の一周の長さを L としておくと, この写像の定義域・値域 (**相空間**という) は $(\mathbb{R}/L\mathbb{Z}) \times [0, \pi]$ と書ける. (入射角 α が 0 や π の場合は, ビリヤードの運動によってその場を動かない (写像 T の不動点) と考える.)

さて, 実はこのビリヤード写像 T は, 相空間 $(\mathbb{R}/L\mathbb{Z}) \times [0, \pi]$ 上で次の 2 次微分形式 (2 - form) を保存することが知られている.

Theorem 1. ビリヤード写像 $T : (s, \alpha) \mapsto (s', \alpha')$ は面積形式 $\sin\alpha ds \wedge d\alpha$ を保存する. つまり,

$$\sin\alpha ds \wedge d\alpha = \sin\alpha' ds' \wedge d\alpha'.$$

この Theorem1 より, ビリヤード写像 T は**面積保存写像**であるという. (ここで言う「面積」は, あくまで台 D のいる平面での面積ではなく, 相空間 $(\mathbb{R}/L\mathbb{Z}) \times [0, \pi]$ における面積のことである.)

以下, この証明をやります.

1　その 1: 初等幾何的方法

こちらはよく知られている方法で, Birkhoff の証明を多少現代的に書いたもの. ビリヤード写像に触れている文献には大体書いているが, たとえば Tabachnikov の"Geometry and Billiards"や日本語のものだと柴山先生の『重点解説　ハミルトン系』などに載っています. 初等的だけど, 正準変換の母関数の大域的な存在性が自然に示せる点でかなり優れています.

Theorem 1 の証明その 1. いま, $\gamma(s)$ と $\gamma(s')$ の距離（の -1 倍）を $h(s,s')$ と置く. s は弧長パラメータなので, その微分 $\frac{\partial \gamma(s)}{\partial s}$ は点 $\gamma(s)$ における単位接ベクトルである. 内積を $\langle\cdot,\cdot\rangle$ で表すことにすれば,

$$\begin{aligned}
2h(s,s')\frac{\partial h}{\partial s'} &= \frac{\partial h^2}{\partial s'} \\
&= -\frac{\partial |\gamma(s)-\gamma(s')|^2}{\partial s'} \\
&= 2\frac{\partial\langle\gamma(s),\gamma(s')\rangle}{\partial s'} - \frac{\partial\langle\gamma(s'),\gamma(s')\rangle}{\partial s'} \\
&= 2\langle\gamma(s),\frac{\partial\gamma(s')}{\partial s'}\rangle - 2\langle\gamma(s'),\frac{\partial\gamma(s')}{\partial s'}\rangle \\
&= 2\langle\gamma(s')-\gamma(x),\frac{\partial\gamma(s')}{\partial s'}\rangle \\
&= -2h(s,s')\cos\alpha'. \\
\therefore \frac{\partial h}{\partial s'} &= -\cos\alpha'.
\end{aligned}$$

となる. 同様にして, $\frac{\partial h}{\partial s} = \cos\alpha$ もわかる. 以上から, $\mathrm{d}h = \cos\alpha \mathrm{d}s - \cos\alpha' \mathrm{d}s'$, つまり

$$0 = \mathrm{d}^2 h = \sin\alpha \mathrm{d}s\wedge\mathrm{d}\alpha - \sin\alpha'\mathrm{d}s'\wedge\mathrm{d}\alpha'$$

となり, これから面積保存性 $\sin\alpha\mathrm{d}s\wedge\mathrm{d}\alpha = \sin\alpha'\mathrm{d}s'\wedge\mathrm{d}\alpha'$ がわかる. □

2　その 2: Poincaré 写像を用いた方法

Katok と Hasselblatt の"Introduction to Dynamical Systems"に載っている方法.

まず, Riemann 多様体 M 上のベクトル場 X に対し, その発散 $\mathrm{div}V$ を定義する. これは, M の体積要素 Ω に対し, その Lie 微分を L_X と書けば, 次で与えられれえる.

$$L_X\Omega = \mathrm{div}X\cdot\Omega.$$

この定義は, 次の意味でベクトル解析に出てくる発散 div と同じである:

Proposition 1. $M = \mathbb{R}^n, \Omega = dx_1\wedge\cdots\wedge dx_n$ に対し, ベクトル場 X を (ベクトル解析の意味の) ベクトル場 $X = (X_1,\cdots,X_n):\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ と同一視すれば,

$$L_X\Omega = \sum_{k=1}^n \frac{\partial X_k}{\partial x_k}\Omega.$$

Proof. Cartan の公式から, $L_X\Omega = d(\iota(X)\Omega) + \iota(X)(d\Omega)$. Ω は n 次微分形式なので, $d\Omega = 0$.
したがって, 記号 $\hat{dx_i}$ を「dx_i を除く」の意味で用いれば,

$$\begin{aligned}
L_X\Omega &= d(\iota(X)\Omega) \\
&= d(\sum X_k dx_1\wedge\cdots\wedge \hat{dx_k}\wedge\cdots\wedge dx_n) \\
&= \sum\frac{\partial X_k}{\partial x_k} dx_1\wedge\cdots\wedge dx_k\wedge\cdots\wedge dx_n \\
&= \sum\frac{\partial X_k}{\partial x_k}\Omega.
\end{aligned}$$

□

ベクトル場 X が定めるフロー $x^t : M \to M$ とは,

$$\frac{d}{dt}x^t(x_0)\Big|_t = X_{x^t(x_0)}$$

となる写像のことである. (要するに. $x^t(x_0) = x(t, x_0)$ がベクトル場 X の定める常微分方程式の初期点 x_0 での解になるということ.) フロー x^t が体積を保存する $(x^t)^*\Omega = \Omega$ というのは, この t での微分を考えれば,

$$L_X\Omega = \frac{d}{dt}(x^t)^*\Omega = 0$$

と同じことであるから, $\mathrm{div}X = 0$ と同値である.

いま, フローと横断的に交わる断面 σ を考え, ω を断面 σ 上の体積要素で $\omega = \iota(X)\Omega$ であるものと定義する. 断面 σ 上にとった初期点 x_0 から出発したフロー $x^t(x_0)$ が, 適当な時刻で断面 σ に帰ってくるとしたとき, フローの連続性から x_0 の (σ の相対位相でにおける) 近傍 $\sigma_0 \subset \sigma$ で, フローで動かした像が σ に帰ってくるようなものが取れる. (再帰時刻が同じとは限らないことに注意!) この写像 $\tilde{x} : \sigma_0 \to \sigma$ を **Poincaré 写像**という.

フローが体積保存である場合, 次のことが言える.

Proposition 2. 上記の設定の下で, ベクトル場 X のフロー $x^t : M \to M$ が体積保存 $(x^t)^*\Omega = \Omega$ であるとき, その Poincaré 写像 $\tilde{x} : \sigma_0 \to \sigma$ もまた体積保存である:

$$\tilde{x}^*\omega = \omega$$

Proof. 点 $p \in \sigma$ 上における接ベクトル空間 $T_p\sigma$ の枠 (標構ともいう) として, $(v_2, \cdots, v_n)$ を取ると, X は σ に対し横断的なので, $(X, v_2, \cdots, v_n)$ は T_pM を張る基底になる. $(v_2, \cdots, v_n)$ を Poincaré 写像 $\tilde{x}$ の接写像で写した像を $(w_2, \cdots, w_n)$ とし, $(X, v_2, \cdots, v_n)$ をフロー x^t の接写像で写した像を $(X, w'_2, \cdots, w'_n)$ とすれば, $k = 2, \cdots, n$ に対し $w'_k - w_k = c_kX$ (c_k はスカラー) という関係が成り立つ. フローは体積 Ω を保存するので,

$$\omega(v_2, \cdots, v_n) = \Omega(X, v_2, \cdots, v_n) = (x^t)^*\Omega(X, v_2, \cdots, v_n) = \Omega((x^t)_*X, (x^t)_*v_2, \cdots, (x^t)_*v_n) = \Omega(X, w'_2, \cdots, w'_n).$$

一方で

$$(\tilde{x}^*\omega)(v_2, \cdots, v_n) = \omega(w_2, \cdots, w_n) = \Omega(X, w_2, \cdots, w_n) = \Omega(X, w'_2, \cdots, w'_n).$$

以上から,

$$\tilde{x}^*\omega = \omega.$$

□

以上の話をビリヤードに応用しよう.

Theorem 1 の証明その 2. 平面内の自由運動 (等速直線運動) を考える. 質点の位置と速度をまとめて $(x, v) = (x_1, x_2, v_1, v_2)$ と置くと, 運動方程式は

$$\dot{x}_i = v_i,\ \dot{v}_i = 0 \quad (i = 1, 2)$$

である. いま, 速さを $|v| = 1$ と固定し, $v_1 = \cos\theta, v_2 = \sin\theta$ とすれば, 運動方程式は

$$\dot{x}_1 = \cos\theta,\ \dot{x}_2 = \sin\theta,\ \dot{\theta} = 0$$

となる. この系のベクトル場 $X = (\cos\theta, \sin\theta, 0)$ について, $\mathrm{div}X = 0$ であるから, $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{S}$ 上の体積要素 $\Omega = dx_1 \wedge dx_2 \wedge d\theta$ はフロー x^t により保存される.

断面 σ にビリヤード台の境界 γ を選ぶ. 初期点を γ 上にとり, 入射角を α とすると, 弧長パラメータ s を入れると, 平面上の点は $x = \gamma(s) + tv = (\gamma_1(s) + t\cos\theta, \gamma_2(s) + t\sin\theta)$ とかけて, $dx_1 = \gamma'_1(s)ds + \cos\theta dt, dx_2 = \gamma'_2(s)ds + \sin\theta dt$ となり, $\gamma(s)$ の法線ベクトルを $\vec{n}(s)$ とかけば,

$$\begin{aligned}
\Omega &= dx_1 \wedge dx_2 \wedge d\theta \\
&= (\gamma'_1(s)\sin\theta - \gamma'_2(s)\cos\theta)ds \wedge dt \wedge d\theta \\
&= -v \cdot \vec{n}(s)dt \wedge ds \wedge d\theta \\
&= dt \wedge (\sin\alpha ds \wedge d\alpha)
\end{aligned}$$

である. (θ は α に定数だけ足したものなので, 代わりに変数として α を用いてもよい.) いま, 断面 $\sigma = \gamma$ に対する Poincaré 写像がビリヤード写像 T だったので, T は面積形式

$$\omega = \iota(X)\Omega = \sin\alpha ds \wedge d\alpha$$

を保存する. □

3 その3: Poincaré-Cartan の積分不変式を用いた方法

以下は, ほとんど Arnold と Avez の"Ergodic Problems of Classical Mechanics"[1] の APPENDIX 31 に載っている内容です.

方法その2と本質的には同じですが, こちらはハミルトン系からの出発します. 大まかに説明すると,「ビリヤード写像を自由運動を記述するハミルトン系に適当な Poincaré 断面を取ったときの Poincaré 写像とみなしたとき, Poincaré-Cartan の積分不変式から導かれる微分形式がなんと $\sin\alpha ds \wedge d\alpha$ になっている」ということです.

3.1 ハミルトン系の準備: Poincaré-Cartan の積分不変式

まず準備としてハミルトン系と Poincaré-Cartan の積分不変式について解説します. このあたりは Arnold の"Mathematical Methods of Classical Mechanics"や Arnold, Kozlov, Neishtadt の"Mathematical Aspects of Classical and Celestial Mechanics"を大いに参考にしました. とはいえ, 多少は微分幾何に慣れてないとチンプンカンプンかもしれない（僕も微分幾何に弱いですが...）になってしまっていると思います.

Poincaré-Cartan の積分不変式のもっと直接的な導出が知りたい人は, 伊藤先生の『常微分方程式と解析力学』をオススメします.

普通**ハミルトン系**というと, $\mathbb{R}^{2n}$ 上の運動方程式で, ある関数 (**ハミルトニアン**)$H(p,q)$ に対し,

$$\dot{q}_k = \frac{\partial H}{\partial p_k},\ \dot{p}_k = \frac{\partial H}{\partial q_k} \quad (k = 1, \cdots, n) \tag{3.1}$$

と表されるものを指す. この解 $(p(t), q(t))$ 上で H は t に依らず一定になる. (多くの場合, H を力学的エネルギーの和（運動エネルギー + ポテンシャル）と解釈しても大丈夫.)

ただ, 今回は Poincaré-Cartan の積分不変式を導きたい + 自分の勉強も兼ねて, 少し特殊なやり方でハミルトン系を定めよう. $2n+1$ 次元多様体 M^{2n+1} に, 適当な座標 $(p,q,t) = (p_1, \cdots, p_n, q_1, \cdots, q_n, t)$ を取る. M^{2n+1} 上の関数 $H(p,q,t)$

に対し, 次のような 1 次微分形式 (1-form)

$$\theta = pdq - Hdt \tag{3.2}$$

を考える.

この 1-form θ により, ハミルトン系は次のようなやり方で決定される.

その外微分 $\omega = d\theta$ は 2-form であるが, 各点 $x \in M^{2n+1}$ について, ある接ベクトル $\xi_x \neq 0$ が存在し,

$$\omega(\xi_x, \eta_x) = 0 \quad \forall \eta_x \in T_x M$$

が存在する. なぜなら, ω を表現する $(2n+1)$ 次の歪対称行列を A とすれば,

$$\omega(\xi_x, \eta_x) = (A\xi_x, \eta_x)$$

である. A は歪対称なので転置を取ると $A^{\mathsf{T}} = -A$ であるが, 一方で $2n+1$ 次なので,

$$\det(A) = \det\left(A^{\mathsf{T}}\right) = \det(-A) = (-1)^{2n+1}\det(A) = (-1)\det(A)$$

となる. 結局, $\det(A) = 0$ となり, A は非正則行列になるので, 同次方程式 $A\xi_x = 0$ が解を持つのである.

この $A\xi_x = 0$ を満たす ξ_x 全体は線形空間をなすが, この次元が 1 しかないとき, この ξ_x(を適当に正規化したもの) を ω の**渦の方向**あるいは**特性方向**といい, 渦の方向により定まるベクトル場 $\xi = \{\xi_x\}$ の積分曲線を ω の**渦線**あるいは**特性曲線**という. M の中の閉曲線 γ_0 に対し, この曲線上の点から始めた渦線によって出来上がる曲面を ω の**渦管**という.

渦管の上で 2-formω はどうなるかを確認しておこう.

パラメータ u が入った M^{2n+1} 内の閉曲線 γ_0 を考える. ($\gamma_0(0) = \gamma_0(1)$ とする.) この曲線上の各点 $\gamma_0(u)$ から出発する渦線を $x(s,u) = x^s(\gamma_0(u))$ とすれば, 閉曲線 γ_0 に対して定まる ω の渦管 Γ は $\Gamma = \{x(s,u) = x^s(\gamma_0(u)) | s \in \mathbb{R}, u \in [0,1]\}$ と書ける.

Γ は $x : \mathbb{R} \times [0,1] \ni (s,u) \to x^s(\gamma_0(u)) \in \Gamma$ により座標 (s,u) が入る．恒等写像 $i : \Gamma \to M^{2n+1}$ により Γ を M^{2n+1} に埋め込むと, $x(s,u) = (p(s,u)q(s,u)t(s,u))$ と書いて, $p_s = \nabla_s p, p_u = \nabla_u p$ などと表せば,

$$
\begin{aligned}
i^* dp &= dp(s,u) = p_s ds + p_u du, \\
i^* dq &= dq(s,u) = p_q ds + q_u du, \\
i^* dt &= dt(s,u) = t_s ds + t_u du.
\end{aligned}
$$

である．M^{2n+1} 上の 2-form ω の Γ への引き戻し $i^*\omega$ を基底 ds, du で表示すれば,

$$
i^*\omega = [dp(s,u)\ dq(s,u)\ dt(s,u)] A \begin{bmatrix} dp(s,u) \\ dq(s,u) \\ dt(s,u) \end{bmatrix} = [ds\ du] \begin{bmatrix} p_s & q_s & t_s \\ p_u & q_u & t_u \end{bmatrix} A \begin{bmatrix} p_s & p_u \\ q_s & q_u \\ t_s & t_u \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ds \\ du \end{bmatrix}
$$

一方で, $x(s,u)$ は渦の方向 ξ の積分曲線なので, $x_s = [p_s, q_s, t_s]^\top$ は $Ax_s = 0$ を満たす．よって,

$$
i^*\omega = [ds\ du] \begin{bmatrix} x_s \\ x_u \end{bmatrix} A \begin{bmatrix} x_s & x_u \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ds \\ du \end{bmatrix} = [ds\ du] \begin{bmatrix} x_s^\top A x_s & x_s^\top A x_u \\ x_u^\top A x_s & x_u^\top A x_u \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ds \\ du \end{bmatrix} = [ds\ du] \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & x_u^\top A x_u \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ds \\ du \end{bmatrix}
$$

ここで, A が歪対称で $x_u^\top A x_u = (x_u^\top A x_u)^\top = -x_u^\top A x_u$ であるから, $x_u^\top A x_u = 0$ である．よって,

$$
i^*\omega = 0
$$

となる．つまり, 渦管 Γ の上では微分形式 ω は消失するのである．

さて, この渦管の上での周回積分について, 次が成り立つ．

Theorem 2. $\omega = d\theta$ の渦管 Γ 上の,（渦管を一周する）同じ向きの閉曲線 γ_0, γ_1 を考えると, 渦線が γ_0 から γ_1 に向けて伸びているとすれば,

$$
\int_{\gamma_0} \theta = \int_{\gamma_1} \theta.
$$

この定理は, 渦の方向により定まるベクトル場の運動について,

$$
I(s) = \int_{x^s(\gamma_0)} \theta
$$

が s に依らず不変であることを示唆している (**ケルビンの渦定理**の一般化).

Proof. Stokes の定理から,

$$
\int_\Gamma \omega = \int_\Gamma d\theta = \int_{\gamma_0} \theta - \int_{\gamma_1} \theta
$$

であるが, 渦管の上で ω は消失するので, 左辺は 0 である．よって,

$$
\int_{\gamma_0} \theta - \int_{\gamma_1} \theta = 0
$$

となり, 題意が示される．

□

ところで, 1-form θ は式 (3.2) で具体的に与えていた．このときの $\omega = d\theta$ に対する積分曲線（渦線）はなんであろうか?

具体的に ω の表現行列 A を計算しよう． $p = (p_1, \cdots, p_n), q = (q_1, \cdots, q_n)$ として, $H_p = \nabla_p H(p,q,t), H_q = \nabla_Q H(p,q,t)$ で表せば,

$$
A = \begin{bmatrix} O_n & E_n & -H_p \\ -E_n & O_n & -H_q \\ H_p^\top & H_q^\top & 0 \end{bmatrix}
$$

となる．ただし, E_n は n 次の単位行列, O_n は n 次の零行列である．

この表現行列 A の右上の $2n$ 次正方行列は正則であるため, 同次方程式 $AX = 0$ の解空間は 1 次元であり, 上の話が適用できる．解空間の元 $X \in TM$ は

$$
X = \sum_k X_k \frac{\partial}{\partial p_k} + X_{k+n} \frac{\partial}{\partial q_k} + X_t \frac{\partial}{\partial t}
$$

と書けるが, 特に $X_t \neq 0$ である.
(なぜなら, $AX = 0$ より

$$AX = \begin{bmatrix} X_{k+n} - H_p X_t \\ -X_k - H_q X_t \\ H_p X_k + H_q X_{k+n} \end{bmatrix} = 0$$

であるので, もし $X_t = 0$ なら $X_k = X_{k+n} = X_t = 0$ となり, $X = 0$ になってしまう.)

そのため, 特に $X_t = 1$ となるものを渦の方向として定めても良い. このとき, $AX = 0$ から他の成分は

$$X_k = -H_{q_k},\ X_{k+n} = H_{p_k} \quad (k = 1, \cdots n)$$

と決定する. したがって, 渦の方向の定めるベクトル場 X は

$$X = \sum_k -H_{q_k} \frac{\partial}{\partial p_k} + H_{p_k} \frac{\partial}{\partial q_k} + \frac{\partial}{\partial t}$$

であり, この積分曲線 $x(s, x_0) = (p(s, x_0), q(s, x_0) t(s, x_0))$ の満たすべき方程式は拡張したハミルトン系

$$\dot{q}_k = \frac{\partial H}{\partial p_k},\ \dot{p}_k = -\frac{\partial H}{\partial q_k},\ \dot{t} = 1 \quad (k = 1, \cdots, n) \tag{3.3}$$

にほかならない. Theorem2 から, 拡張したハミルトン系 (3.3) のフロー x^s に沿って, 積分

$$\int_{x^s(\gamma_0)} pdq - Hdt \tag{3.4}$$

の値は不変である.

Theorem 3. 拡張したハミルトン系 (3.3) について, 相空間内の閉曲線 γ_0 と, フロー x^s により描かれる管 $\gamma_1 = x^1(\gamma_0)$ について,

$$\int_{\gamma_0} pdq - Hdt = \int_{\gamma_1} pdq - Hdt.$$

ハミルトン系 (3.1) は (3.3) の解を (p, q) 平面に射影したものに過ぎないが, 上の定理をハミルトンフロー ϕ^t により $\gamma_1 = \phi^t(\gamma_0)$ にすれば, γ_0, γ_1 上で t は定数であり $dt = 0$ となるので, 次が成立する;

Theorem 4. ハミルトン系 (3.1) について, 相空間内の閉曲線 γ_0 と, ハミルトンフロー ϕ^t により描かれる管 $\phi^t(\gamma_0)$ について,

$$\int_{\gamma_0} pdq = \int_{\gamma_1} pdq.$$

以上から, ハミルトン系 (3.1) は式 (3.2) で決まる 1-formθ から導出できる. また, その拡張したハミルトン系 (3.3) には, 積分で書ける不変量 (3.4) を持つ. この不変量 (3.4) を **Poincaré-Cartan の積分不変式**という.

3.2 ハミルトン系の Poincaré 写像

n 自由度ハミルトン系 (3.1) に話を戻す. この系の相空間は $2n$ 次元の多様体になるが, その断面 Σ を $H = h, q_1 = 0$ で与えると, Σ は等エネルギー $H = h$ を持つ $2n - 2$ 次元部分多様体をなす.

ある領域 $\Sigma_0 \subset \Sigma$ で局所座標 $(P, Q) = (p_2, \cdots, p_n, q_2, \cdots, q_n)$ が取れたとし, かつこの領域で上の方程式について $\dot{q}_1 \neq 0$ が成り立っているとき, 断面 Σ を surface of section とか Poincaré section とか言う. (日本だと多分「Poincaré 断面」と呼ぶケースが多いと思う.)

いま, 点 $x \in \Sigma_0$ であって, 初期点 x についてのハミルトン系の解がしばらくして Σ_0 に戻って来るようなものを考える. このとき, $\dot{q}_1 \neq 0$ より, x に十分近い点 $x' \in \Sigma_0$ を通過する解はまたいずれ Σ_0 に戻って来て, Σ_0 を横断する. この x' の定義できるような x の近傍 $\Sigma_1 \subset \Sigma_0 \subset \Sigma$ について, Σ_0 内の再帰した点を Ax' とすれば, 写像 $A : \Sigma_1 \to \Sigma_0$ が定義できる. (このような写像を **Poincaré 写像**という.)

Theorem 5. 上で定めたハミルトン系の Poincaré 写像 $A : \Sigma_1 \to \Sigma_0$ は正準的である. すなわち, Σ_1 内の任意の閉曲線 γ について,

$$\int_{\gamma} PdQ = \int_{A\gamma} PdQ. \tag{3.5}$$

である. ただし, $PdQ = \sum_{k=2}^{n} p_k dq_k$.

Proof. 拡張したハミルトン系 (3.3) の下で考え, 拡張した相空間 $\{(p,q,t)\}$ 上での閉曲線をそれぞれ $\gamma', A\gamma'$ とする. (γ' は $t=0$ の面の上での γ_0 にほかならないが, 再帰時間は点ごとに異なるため $A\gamma'$ の各点での t 座標は一致しない)

Poincaré-Cartan の積分不変式（Theorem3）より

$$\int_{\gamma'} pdq - Hdt = \int_{A\gamma'} pdq - Hdt.$$

となる. ここで, γ および $A\gamma$ は等エネルギー面 (つまり, $H=$ 定数である面) の上にあるので,

$$\int_{\gamma'} Hdt = \int_{A\gamma'} Hdt.$$

また, γ' 上は $t=0$ で一定なので,$dt=0$ であり,

$$\int_{\gamma'} Hdt = 0.$$

したがって,

$$\int_{\gamma'} pdq = \int_{\gamma} pdq, \ \int_{A\gamma'} pdq = \int_{A\gamma} pdq$$

q_1 は $\Sigma_1 \subset \Sigma$ 上で一定なので, $\gamma', A\gamma'$ 上で $dq=0$ であり,

$$\int_{\gamma'} p_1 dq_1 = \int_{A\gamma'} pdq = 0.$$

したがって,

$$\int_{\gamma} PdQ = \int_{\gamma'} pdq - Hdt = \int_{A\gamma'} pdq - Hdt = \int_{A\gamma} PdQ.$$

となり,(3.5) が示された.

□

3.3 ビリヤード系への応用

Theorem1 の証明その 3. いま, 台 $D \subset \mathbb{R}^2$ 内を自由運動 (等速直線運動) するボールを考える. この質点の位置と速度をまとめて $(x,v)=(x_1,x_2,v_1,v_2)$ と置くと, 運動方程式は

$$\dot{x}_i = v_i, \ \dot{v}_i = 0 \quad (i=1,2)$$

である. この運動のハミルトニアン $H(x,v)$ は運動エネルギーだけ, つまり

$$H(x,v) = \frac{1}{2}(v_1^2 + v_2^2).$$

となる.

ここで, 原点 O が台の境界 $\gamma = \partial D$ の上になるようにし, (q_1,q_2) を, q_1 をボールの位置 M から最も近い境界上の点 N までの距離, q_2 を原点 O から点 N までの弧の長さと定める. $q=(q_1,q_2)$ は D 全体では定義できないが, $\gamma=(\gamma_1,\gamma_2)$ の近傍に限って言えば正しく定まる.

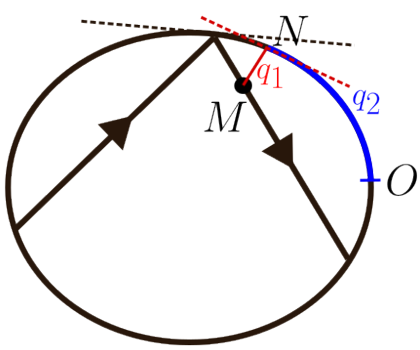

図 2: ハミルトン系（自由運動）としてのビリヤード

境界上の各点 $\gamma(s)$ における接ベクトルを $\vec{t}(s)$, 法ベクトルを $\vec{n}(s)$ と書けば, $\vec{t}(s)$ は $\gamma(s)$ の弧長パラメータでの微分であり, $\vec{n}(s)$ は $\vec{t}(s)$ を $\pi/2$ だけ反時計回りに回転させたものなので,

$$\vec{t}(s) = (\gamma_1'(s), \gamma_2'(s)),\ \vec{n}(s) = (-\gamma_2'(s), \gamma_1'(s))$$

となる. $\vec{ON} = (\gamma_1(q_2), \gamma_2(q_2))$ であり, $\vec{NM} = q_1\vec{n}(q_2)$ なので, $x = (x_1, x_2)$ から $q = (q_1, q_2)$ の点変換は

$$x_1 = \gamma_1(q_2) - q_1\gamma_2'(q_2),\ x_2 = \gamma_2(q_2) + q_1\gamma_1'(q_2)$$

と書ける. (ここのプライムは s での微分.)

γ の近傍（とその上での定まる速度ベクトル全体）のなす相空間内の開集合に対し, 点変換 $q \mapsto x = x(q_1, q_2)$ から定まる (x, v) から $(q, p) =$ への正準変換を考えることができる. 具体的には, 正準変換の母関数 $S(v, q)$ を

$$S(v, q) = v_1x_1(q_1, q_2) + v_2x_2(q_1, q_2) = v_1(\gamma_1(q_2) - q_1\gamma_2'(q_2)) + v_2(\gamma_2(q_2) + q_1\gamma_1'(q_2))$$

とすれば, 点変換に対応する正準変換が定まり, このとき曲率を κ で書けば, 運動量 $p = (p_1, p_2)$ は

$$\begin{aligned} p_1 &= \frac{\partial S}{\partial q_1} = -v_1\gamma_2'(q_2) + v_2\gamma_1'(q_2) \\ &= v \cdot \vec{n}(q_2), \\ p_2 &= \frac{\partial S}{\partial q_2} = v_1(\gamma_1'(q_2) - q_1\gamma_2''(q_2)) + v_2(\gamma_2'(q_2) - q_1\gamma_1''(q_2)), \\ &= v \cdot \vec{t}(q_2) + q_1\kappa(q_2)v \cdot \vec{n}(q_2). \end{aligned}$$

で表示できる.

さて, このハミルトン系に対し, $H = 1/2, q_1 = 0$ での Poincaré 断面 Σ を取る. これは, $|v| = 1$ かつボールが γ 上（つまり, 壁にぶつかる瞬間）という条件にほかならず, ビリヤード写像 T はこの Poincaré 断面 Σ についての Poincaré 写像とみることができる. すなわち, Theorem5 から T は Σ_1 上で 2-form $dp_2 \wedge dq_2$ を保存する.

運動量 p の式に $|v| = 1, q_1 = 0$ を入れてみると, 入射角 α に対して

$$\begin{aligned} p_1 &= v \cdot \vec{n}(q_2) = \sin\alpha, \\ p_2 &= v \cdot \vec{t}(q_2) = \cos\alpha \end{aligned}$$

であるから, Σ_0 上で $dp_2 \wedge dq_2 = d(\cos\alpha) \wedge dq_2 = \sin\alpha dq_2 \wedge d\alpha$. q_2 は γ の弧長パラメータだったから, これは $\sin\alpha ds \wedge d\alpha$ にほかならない. □

参考文献

[1] V.I.Arnold, A.Avez. Ergodic Problems of Classical Mechanics, Benjamin, (1968)