Moser のツイストの定理

まるげり

2025 年 9 月 26 日

Levi-Moser[1] のノート. 面積保存ツイスト写像の母関数に解析性を課すが, ツイスト定理の証明としては一番読みやすいと思う.

1 背景: 面積保存ツイスト写像, 母関数

アニュラス $\mathbb{A} = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$ 上の面積保存ツイスト写像 $\varphi(x_1, y_1) = (x_2, y_2)$ とは, 面積保存性 $\varphi^*(dy_2 \wedge dx_2) = dy_1 \wedge dx_1$ とツイスト性 $\dfrac{\partial x_2}{\partial y_1} > 0$ を持つものである.

記号の濫用で, $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$ の普遍被覆 $\mathbb{R}^2$ 上の元もまた (x, y) のように書き, また φ の $\mathbb{R}^2$ への持ち上げも φ と書くことにすると, 面積保存ツイスト写像 φ が特に $\mathbb{A}$ 上の完全シンプレクティック写像 ($\varphi^*(ydx) - ydx$ が $\mathbb{A}$ 上の完全形式になる) とき, φ の母関数と呼ばれる, 次の性質を満たす関数 $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ が存在する:
h_1, h_2 をそれぞれ h の第 1 成分, 第 2 成分での偏微分としたときに, $h(x_1 + 1, x_2 + 1) = h(x_1, x_2), h_{12} < 0$ であり, さらに

$$\begin{cases} h_1(x_1, x_2) = -y_1 \\ h_2(x_1, x_2) = y_2 \end{cases} \iff \varphi(x_1, y_1) = (x_2, y_2)$$

となる.
(たぶん, $\mathbb{R}^2$ で考える以上はポアンカレの補題から閉形式 $\varphi^*(ydx) - ydx$ が完全形式になることが保証されるけど, アニュラス $\mathbb{A}$ 上でもなお h が意味を持つためには別で $\mathbb{A}$ 上で完全形式になることを保証しないといけない... のだと思う.)

特に φ が母関数 h を持つなら, (x_1, y_1) が与えられた下で, $\{(x_n, y_n)\}_n$ が軌道 $\{\varphi^n(x_1, y_1)\}_n$ になることと

$$h_2(x_{i-1}, x_i) + h_1(x_i, x_{i+1}) = 0, \ y_i = -h_2(x_i, x_{i+1}) \quad (\forall i \in \mathbb{Z})$$

が同値であることがわかる.

2 不変曲線と差分方程式への簡約化

面積保存ツイスト写像 φ の不変曲線 $\gamma \subset \mathbb{A}$ とは, φ の不変集合であって $\mathbb{R}^2$ 上への持ち上げを $w(\theta) = (u(\theta), v(\theta))$ としたときに $u(\theta) - \theta$ および $v(\theta)$ が周期 1 の周期関数となるものである. これは, $u(\theta + 1) - (\theta + 1) = u(\theta) - \theta$ より $u(\theta + 1) - u(\theta) = 1$ より, アニュラス $\mathbb{A}$ を x 方向に一周して戻ってくる曲線であることを意味している.

さて, ある回転数 ω についての不変曲線 γ, つまり

$$\varphi(w(\theta)) = w(\theta + \omega)$$

を見つけたい. これはラグランジュ方程式と呼ばれることもある次の 2 階差分方程式

$$E[u](\theta) = h_1(u(\theta), u(\theta + \omega)) + h_2(u(\theta - \omega), u(\theta)) \equiv 0 \tag{2.1}$$

が解ければ, $v(\theta) = -h_1(u(\theta), u(\theta+\omega))$ とおくことで不変曲線を見つけることができる. 以下, $u^+(\theta) = u(\theta+\omega), u^-(\theta) = u(\theta - \omega)$ とする.

Remark 1. ラグランジュ方程式は, 変分問題

$$\delta \int_0^1 h(u(\theta), u(\theta + \omega)) d\theta = 0$$

についてのオイラー - ラグランジュ方程式になっている. (パーシバルの変分原理).

実際, $A(u) := \int_0^1 h(u(\theta), u(\theta+\omega))d\theta$ としたときに

$$\begin{aligned} \left.\frac{d}{dt}A(u+tv)\right|_{t=0} &= \int_0^1 h_1(u,u^+)v + h_2(u,u^+)v^+ d\theta \\ &= \int_0^1 h_1(u,u^+)v + h_2(u^-,u)v d\theta \\ &= \int_0^1 E[u]v d\theta \end{aligned}$$

であるから, 任意の v についてこれがゼロになるのは $E[u] \equiv 0$ のときである.

Remark 2. あとで使うので, $u_\theta E[u]$ の平均値 $\int_0^1 (u_\theta E[u])(\theta)d\theta = 0$ を計算しておく.

$$\frac{\partial h}{\partial \theta}(u,u^+) = u_\theta(h_1(u,u^+) + h_2(u,u^+))$$

より, $\nabla f := f(\theta+\omega) - f(\theta)$ と表記すれば,

$$\begin{aligned} \frac{\partial h}{\partial \theta}(u,u^+) - u_\theta h_2(u^-,u) &= u_\theta(h_1(u,u^+) + h_2(u,u^+) - h_2(u,u^+) + h_2(u^-,u)) \\ &= u_\theta(h_1(u,u^+) + h_2(u^-,u)) \\ &= u_\theta E[u] \end{aligned}$$

したがって,

$$u_\theta E[u] = \frac{\partial h}{\partial \theta}(u,u^+) - u_\theta h_2(u^-,u)$$

と表すことができる. ここで, $h(x_1+1, x_2+1) = h(x_1,x_2)$ であることと, $f(\theta)$ が周期 1 の周期関数であれば $\int_0^1 (\nabla f)(\theta)d\theta = \int_0^1 (f(\theta+\omega) - f(\theta))d\theta = 0$ であることから, 結局

$$\int_0^1 (u_\theta E[u])(\theta)d\theta = 0$$

である.

Example 1 (standard map)**.** $S(x)$ を周期関数として, $\varphi(x_1,y_1) = (x_2,y_2)$ を

$$\begin{aligned} x_2 &= x_1 + y_1 + S'(x_1), \\ y_2 &= y_1 + S'(x_1) \end{aligned}$$

で定める. 母関数 h は

$$h(x_1,x_2) = \frac{1}{2}(x_1 - x_2)^2 + S(x_1)$$

である. これに対するラグランジュ方程式 (2.1) は

$$u(\theta+\omega) - 2u(\theta) + u(\theta-\omega) = S'(u(\theta))$$

と書ける.

3 ツイスト定理

ツイスト定理は, ω がディオファントス数であるときに, $E[u_0] \approx 0$ なる $u_0(\theta)$ から始めて $E[u] \equiv 0$ となる $u(\theta)$ の存在を示す定理である.

$$W_r := \left\{ f : \mathbb{C} \to \mathbb{C} \middle| f : \text{実解析的},\ f(\theta+1) = f(\theta),\ |f|_r := \sup_{|\mathrm{Im}\theta| \le r} |f(\theta)| < \infty \right\}$$

する.

複素領域 $\mathcal{D} \subset \mathbb{C}^2$ を考え, その R-近傍を $\mathcal{D}_R := \{z \in \mathcal{D} | \sup_{y \in \mathcal{D}} |y - z|\}$ と書くことにする.

- h に関する仮定:
  $h(x_1,x_2)$ が $(x_1,x_2)\in\mathcal{D}$ で解析的, $(x_1,x_2)\in\mathcal{D}\cap\mathbb{R}^2$ で実, $h(x_1+1,x_2+1)=h(x_1,x_2)$ を満たす.
  また, ある定数 $\kappa>0, M>0$ により,

$$\min_{\mathcal{D}}|h_{12}|>\kappa, \tag{3.1}$$

$$|h|_{C^3(\mathcal{D})}<M. \tag{3.2}$$

- u_0 に関する仮定:
  ある $r\in(0,1)$ に対して, $u_0(\theta)-\theta\in W_r$ である.
  さらに, ある (十分大きな)$N_0>0$ に対し,

$$(u_0,u_0^+)\in\mathcal{D}_R \quad (|\mathrm{Im}\theta|<r), \tag{3.3}$$

$$|(u_0)_\theta|_r<N_0, \quad |(u_0)_\theta^{-1}|_r<N_0. \tag{3.4}$$

Theorem 1 (ツイスト定理)**.** ω がディオファントス数, つまり, ある $K>0,\sigma>0$ が存在して, 任意の $p,q\in\mathbb{Z}\backslash\{0\}$ について

$$|\omega-\frac{p}{q}|\geq\frac{K}{q^{2+\sigma}} \tag{3.5}$$

であるとする.

h,u_0 が上の仮定を満たすとする. このとき, ある定数 $\delta=\delta(r,h,M,N_0,K,\sigma,\kappa)$ が存在し, もし $|E(u_0)|_r<\delta$ であればラグランジュ方程式 $E[u]\equiv0$ の解 u で, u_0 に近く, $u(\theta)-\theta\in W_{r/2}$ を満たし, $u(\theta)-\theta$ の $\theta\in\mathbb{S}^1$ での平均値が 0 になるものがただ一つ存在する.

Example 2. 摂動を受けたツイスト写像

$$x_2=x_1+y_1+\epsilon f(x_1,y_1,\epsilon)$$
$$y_2=y_1+\epsilon g(x_1,y_1,\epsilon)$$

が領域 $\mathcal{D}:=\{(x_1,x_2)\in\mathbb{C}^2|a<\mathrm{Re}(x_1-x_2)<b,\ |\mathrm{Im}x_1|<1,\ |\mathrm{Im}x_2|<1\}$ 上で定義された母関数 $h(x_1,x_2)=\frac{1}{2}(x_1-x_2)^2+\epsilon H(x_1,x_2,\epsilon)$ を持つとする. ($|H|_{C^3(\mathcal{D})}$ が有界まで要りそう.)

ディオファントス数 $\omega\in(a,b)$ と $u_0(\theta)=\theta$ を選ぶ. いま, ϵ を十分小さく取れば, $|h_{12}|=|-1+\epsilon H_{12}|>1-O(\epsilon)$ より (3.1) は ok. $|h_i|\leq|x_1-x_2|+\epsilon|H_1|<b+2+O(\epsilon), |h_{ii}|=|1+\epsilon H_{ii}|<1+O(\epsilon), |h_{ijk}|<\epsilon|H_{ijk}|<O(\epsilon)$ より (3.2) も ok. $R=\min\left\{\frac{1}{2\sqrt{2}}(b-\omega),\frac{1}{2\sqrt{2}}(\omega-a),r\right\}$ として, $(u_0,u_0^+)=(\theta,\theta+\omega)\in D_R$ ($|\mathrm{Im}\theta|<r$) より (3.3) は ok. $u_0=(u_0)^{-1}=\theta$ なので $N_0=\max\{-a,b\}+r$ とすれば (3.4) も ok.

以上から, ツイスト定理が使えて, 不変曲線の存在が証明できる.

4 homological equation

ツイスト定理の証明のカギは, 初期解 u_0 から始めて"修正ニュートン法"によって $E[u]$ の零点を探すことである. $\tilde{u}=u+v$ として, $E[\tilde{u}]$ は

$$E[u+v]=E[u]+E'[u]v+Q(v)$$

と書ける. ここで, Q は剰余項であり, $E'[u]v$ はガトー微分である. 具体的に計算すると, $h_{ij}^-=h_{ij}(u^-,u)$ として,

$$E'[u]v=(h_{11}+h_{22}^-)v+h_{12}v^++h_{12}^-v^-$$

と書き下すことができる.

ふつうのニュートン法では, v に関する方程式

$$E'[u]v=-E[u] \tag{4.1}$$

の解として v を定める.

今回は, (4.1) の代わりに, 両辺に u_θ を掛けて左辺から $v\frac{d}{d\theta}E[u]=vE'[u]u_\theta$ を引いた方程式

$$u_\theta E'[u]v-vE'[u]u_\theta=-u_\theta E[u] \tag{4.2}$$

の解として v を与える．もちろんこれは (4.1) とは等価ではない式だが, この場合の更新則 $u \mapsto u+v$ でも $E[u]$ の零点へ収束することを後に示す．(4.2) のままだと扱いにくいので, 少し変形する．左辺が

$$u_\theta E'[u]v - vE'[u]u_\theta = h_{12}(u_\theta v^+ - u_\theta^+ v) + h_{12}^-(u_\theta v^- - u_\theta^- v)$$

であることに注意して, 新変数 $w := \frac{v}{u_\theta}$ を導入すれば,

$$h_{12}(u_\theta v^+ - u_\theta^+ v) + h_{12}^-(u_\theta v^- - u_\theta^- v) = h_{12}u_\theta u_\theta^+(w^+ - w) - h_{12}^- u_\theta^- u_\theta(w - w^-) = \nabla^*(h_{12}u_\theta u_\theta^+ \nabla w)$$

となる．ただし,

$$\nabla f(\theta) := f(\theta+\omega) - f(\theta), \quad \nabla^* f(\theta) := f(\theta) - f(\theta-\omega)$$

と表記した．

まとめると, w に関する関数方程式

$$\nabla^*(h_{12}u_\theta u_\theta^+ \nabla w) = -u_\theta E[u] \tag{4.3}$$

の解として w を選び, 更新則

$$\tilde{u} = u + v, \quad v = u_\theta w$$

を考える．初期解 u_0 から始めて最終的に u が $E[u]$ の零点に収束することを示す．

5 homological equation の求解

本節では, (4.3) の解の評価を目標とする．

u を既知, w を未知の関数とする．また, ω はディオファントス条件 (3.5) を満たすものとする．

Lemma 1. $u(\theta)$ が条件

$$(u, u^+) \in \mathcal{D}_R \quad \text{for}(|\mathrm{Im}\theta| < r)$$

および

$$|u_\theta|_r < N, \quad |u_\theta^{-1}|_r < N \quad \text{for}(|\mathrm{Im}\theta| < r)$$

を満たすとする．

このとき, (4.3) の解 $w \in W_\rho$ が任意の $0 < \rho < r$ に対して存在し, $[w] := \displaystyle\int_0^1 w d\theta = 0$(平均がゼロ) の下で一意である．さらに, 対応する $v := u_\theta w$ について, 以下の不等式評価が得られる:

$$|v|_\rho \leq \frac{c}{(r-\rho)^{2\tau}}|E(u)|_r, \ |v_\theta|_\rho \leq \frac{c}{(r-\rho)^{2\tau+1}}|E(u)|_r. \tag{5.1}$$

ただし, $c = c(M, N, K, \sigma)$ であり, $\tau = 2 + \sigma$ である．

この Lemma 1 を示すには, 次の Lemma を用いればいい．

Lemma 2. Ω がディオファントス条件 (3.5) を満たし, かつ $g \in W_r$ の平均値について $[g] = 0$ が成り立つとする．

このとき, 差分方程式

$$\nabla\psi = g \tag{5.2}$$

は任意の $0 < r' < r$ に対して解 $\psi \in W_{r'}$ を持ち, これは $[\psi] = 0$ の下で一意である．さらに, ψ について次の不等式評価が得られる:

$$|\psi|_{r'} < c(K, \sigma)\frac{|g|_r}{(r-r')^\tau}. \tag{5.3}$$

ただし, $\tau = 2 + \sigma$ である．

Proof of Lemma 2. フーリエ級数展開により, $g = \sum g_n e^{2\pi i\theta}, \psi = \sum \psi_n e^{2\pi i\theta}$ と表示する．
$(\nabla\psi)(\theta) := \psi(\theta+\omega) - \psi(\theta) = \sum \psi_n(e^{2\pi in\omega} - 1)e^{2\pi i\theta}$ であるから, (5.2) の解は

$$\psi_n = \frac{g_n}{e^{2\pi i\omega} - 1}, \ \psi_0 = 0 \tag{5.4}$$

と書ける．(後半は $[\psi] = 0$ の帰結.)

この時点ではまだ解が (形式的に) フーリエ級数で書けると述べたまでであるから, (5.4) が定義可能であること (特に $e^{2\pi i\omega}-1\neq 0$ であること) と級数 $\sum \psi_n e^{2\pi n\theta}$ が W_r' 上で絶対収束することを示さないといけない.

ディオファントス条件 (3.5) から, 任意の $n, m\in\mathbb{Z}\backslash\{0\}$ について,

$$|n\omega - m| \geq \frac{K}{|n|^{1+\sigma}}$$

であるから, 特に $m := \arg\min_{m\in\mathbb{Z}\backslash\{0\}} |n\omega - m|$ とすれば, $|x|\leq 1/2$ で $|\sin\pi x|\geq 2|x|$ なので,

$$|e^{2\pi i\omega}-1| = |e^{\pi i\omega}||e^{\pi i\omega}-e^{-\pi i\omega}| = 2|\sin n\pi\omega| = 2|\sin\pi(n\omega - m)| \geq 4|n\omega - m| > \frac{c(K)}{|n|^{1+\sigma}}$$

したがって

$$|e^{2\pi i\omega}-1| > \frac{c(K)}{|n|^{1+\sigma}} \tag{5.5}$$

であり, $e^{2\pi i\omega}-1\neq 0$ より (5.4) は定義できる.

また, $g\in W_r$ であることと $|g_n||W_r| = \left|\int_{W_r} g\cdot e^{-2\pi i n\theta}d\theta\right| \leq |W_r||g|_r e^{-2\pi n|r|}$ から,

$$|g_n| \leq |g|_r e^{-2\pi|n|r} \tag{5.6}$$

が成り立つ. (5.5), (5.6) を用いて (5.4) を評価すれば, $0<r'<\forall s<r$ に対して,

$$|\psi_n| \leq |g|_r c(K)^{-1} e^{-2\pi|n|r}|n|^{1+\sigma} = |g|_r c(K)^{-1} e^{-2\pi|n|s} e^{-2\pi|n|(r-s)}|n|^{1+\sigma}.$$

ここで, $x>0$ に対して $xe^{-x}\leq e^{-1}$ であるが, $x=\frac{a|n|}{b}$ とすれば $e^{-a|n|}|n|^b \leq e^{-b}(b/a)^b$ であるので, $a=2\pi(r-s), b=1+\sigma$ として, $c_1(K,\sigma) := c(K)^{-1}e^{-(1+\sigma)}((1+\sigma)/(2\pi))^{1+\sigma}$ とすれば,

$$|\psi_n| \leq c_1(K,\sigma)|g|_r \frac{1}{(r-s)^{1+\sigma}} e^{-2\pi|n|s}.$$

したがって,

$$\sum |\psi_n| e^{2\pi|n|r'} \leq c_1(K,\sigma)|g|_r \frac{1}{(r-s)^{1+\sigma}} \sum e^{-2\pi|n|(s-r')} = \frac{2c_1(K,\sigma)|g|_r}{(r-s)^{1+\sigma}}(1-e^{-2\pi(s-r')})^{-1}.$$

であり, フーリエ級数 $\sum\psi_n e^{2\pi i\theta}$ は $W_{r'}$ の上で絶対収束し, 以上をもって (5.2) の解の存在が保証される. また, $0<q<1/2$ で $(1-e^{-2\pi q})^{-1}<q^{-1}$ となることを用いると, $(s-r')<1/2$ のときに

$$|\psi|_{r'} \leq \sum |\psi_n| e^{2\pi|n|r'} \leq \frac{2c_1(K,\sigma)|g|_r}{(r-s)^{1+\sigma}(s-r')}$$

となり, 特に $s=(r+r')/2$ とすれば (これは, $r<1$ から $s-r'=(r-r')/2<1/2$ であるため許容される), 不等式評価 (5.3) を得る. $\square$

Proof of Lemma 1. $p=(h_{12}u_\theta u_\theta^+)^{-1}$ とし, $g=-u_\theta E(u)$ とする. μ を適当な定数として, (4.3) を書き直せば,

$$\begin{aligned} \nabla^*\psi &= g \\ p^{-1}\nabla w &= \psi + \mu \end{aligned} \tag{5.7}$$

と書ける.($\nabla^*\mu = 0$ に注意.)

$[u_\theta E(u)] = 0$ を思い出せば, (5.7) の上の式に Lemma 2 を適用できて, 平均がゼロの唯一解 ψ で任意の $0<r'<r$ で

$$|\psi|_{r'} \leq \frac{c(K,\sigma)}{(r-r')^\tau}|g|_r \tag{5.8}$$

となるものが存在する.

(5.7) の下の式から, w は $\nabla w = p(\psi+\mu)$ の解である. この式に Lemma2 を適用するためには右辺の平均がゼロであるように μ を選ぶ必要があるが,

$$\mu := -\frac{\int p\psi d\theta}{\int p d\theta} \tag{5.9}$$

とすれば

$$\int p(\psi+\mu)d\theta = \int p\psi d\theta + \mu \int p d\theta = 0$$

が満たされる．仮定から $\min|h_{12}| > \kappa, |h|_{C^2} < M, |u_\theta| < N, |u_\theta^{-1}| < N$ であるから, $M^{-1}N^{-2} < |p| = |h_{12}|^{-1}|u_\theta|^{-1}|u_\theta^+|^{-1} < \kappa^{-1}N^2$ および (5.8) から,

$$|\mu| = \left|\int p\psi d\theta\right| \cdot \left|\int p d\theta\right|^{-1} < \kappa^{-1}MN^4 \frac{c(K,\sigma)}{(r-r')^\tau}|g|_r$$

であるから (5.9) は定義可能である．以上から, $\nabla w = p(\psi+\mu)$ に Lemma2 を適用することで, 平均がゼロになる唯一解 w が存在することがわかり, この解は任意の $0 < \rho < r'$ に対し,

$$|w|_\rho \le c_1 \frac{|p(\psi+\mu)|_{r'}}{(r'-\rho)^\tau} \le \frac{c_2}{(r-r')^\tau(r'-\rho)^\tau}|g|_r$$

となる．(2 つ目の不等式では $|p|, |\mu|, |\psi|$ の評価を用いた.)

特に, $\rho = 2r' - r$ と選べば (実際, $r' - \rho = r - r' > 0$ より可能), $r' = (r+\rho)/2$ および $|g| = |u_\theta||E(u)| < N|E(u)|$ より,

$$|w|_\rho \le \frac{c_3(M,N,K,\kappa,\sigma)}{(r-\rho)^{2\tau}}|E(u)|_r \tag{5.10}$$

となる．$v := u_\theta w$ なので, $|u_\theta| < N$ より (5.1) の第一式が成立.

第二式は, コーシーの積分定理 (あるいは, グルサの定理) を用いて導出する．任意の $\rho' \in (\rho, r)$ について, 上の議論を再度繰り返すことで, $w \in W_{\rho'}$, つまり $v = u_\theta w \in W_{\rho'}$ としてもよい．(Lemma 2 における解の一意性と一致の定理から, これは $w \in W_\rho$ からの解析接続である.)

$|\mathrm{Im}\theta| < \rho'$ に関するコーシーの積分定理 (あるいは, グルサの定理) から, $|\mathrm{Im}\theta| < \rho$ となる θ について, θ を囲む任意の閉曲線 $C' \in \{|\mathrm{Im}\theta| < \rho'\}$ で

$$|v_\theta(\theta)| \le \frac{1}{2\pi}\int_{C'} \frac{|v(\varphi)|}{|\varphi-\theta|^2}d\varphi \le \frac{|v|_{\rho'}}{2\pi}\int_{C'}\frac{1}{|\varphi-\theta|^2}d\varphi$$

となる．(左辺の θ の属する複素領域 (幅 2ρ の帯) より右辺で考える複素領域 (幅 $2\rho'$ の帯) を広くするのがポイント！)

特に, C' を中心 θ, 半径 R の円とすれば,

$$|v_\theta(\theta)| \le \frac{|v|_{\rho'}}{2\pi} \cdot 2\pi R \cdot R^{-2} = \frac{|v|_{\rho'}}{R}$$

である．最も評価が良くなるのは, R を $\{|\mathrm{Im}\theta| < \rho'\}$ の中でできるだけ大きく取った時, つまり $R = \rho' - s$ のときであるが, $s < \rho$ だったので,

$$|v_\theta(\theta)| \le \frac{|v|_{\rho'}}{\rho' - s} \le \frac{|v|_{\rho'}}{\rho' - \rho}.$$

したがって, $|v_\theta|_\rho \le \dfrac{|v|_{\rho'}}{\rho'-\rho}$ である．

一方, (5.1) の第一式から,

$$|v_\theta|_\rho \le \frac{c'}{(r-\rho')^{2\tau}(\rho'-\rho)}|E(u)|_r$$

であるが, 特に $\rho' = (r+\rho)/2$ と選べば,

$$|v_\theta|_\rho \le \frac{2^{2\tau+1}c'}{(r-\rho)^{2\tau+1}}|E(u)|_r$$

となる．したがって, あらためて $c = 2^{2\tau+1}c'$ とすれば, (5.1) の第二式が導ける． □

6　$E(u)$ の 2 次収束性

Lemma 1 によって得られる $v = u_\theta w$ を使って, 更新則 $\tilde{u} = u + v$ で暫定解を更新する.

Lemma 3. u を Lemma 1 を満たすものとし, $\tilde{u} = u + v$ がある $\rho \in (0, r)$ について条件

$$(\tilde{u}, \tilde{u}^+) \in \mathcal{D}_R \quad \mathrm{for}(|\mathrm{Im}\theta| < \rho)$$

を満たすとする．このとき,

$$|E(\tilde{u})|_\rho \le \frac{c_6}{(r-\rho)^{4\tau}}|E(u)|_r^2 \tag{6.1}$$

が成り立つ．ただし, $c_6 = c_6(M,N,K,\kappa,\sigma)$.

Proof. 関数空間 W_ρ におけるテイラーの定理から, 剰余項を Q とおけば,

$$|E(\tilde{u})|_\rho = |E(u+v)|_\rho = |E(u) + E'(u)v + Q|_\rho$$

だった. (4.2) から, $u_\theta E(u) + u_\theta E'(u)v = vE'(u)u_\theta$ であるから, 両辺を u_θ で割れば ($|u_\theta^{-1}| < N$ より $u_\theta \neq 0$),

$$E(u) + E'(u)v = E'(u)u_\theta = w\frac{d}{d\theta}E(u).$$

$E(u) \in W_r$ なので, コーシーの積分定理から $\left|\frac{d}{d\theta}E(u)\right|_\rho \leq c\frac{|E(u)|_r}{r-\rho}$ であるから, (5.10) と合わせて,

$$|E(u) + E'(u)v|_\rho \leq c_4\frac{|E(u)|_r^2}{(r-\rho)^{2\tau+1}} < c_4\frac{|E(u)|_r^2}{(r-\rho)^{4\tau}}.$$

一方で, Q はある $t' \in (0,1)$ について

$$Q = \frac{1}{2}\frac{d^2}{dt^2}E(u+t'v)$$

だが, $E(u) = h_1(u, u^+) + h_2(u^-, u)$ に入れて実際計算すると,

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}E(u+tv) &= (h_{11}(u+tv, u^+ + tv^+) + h_{22}(u^- + tv^-, u+tv))v \\
&\quad + h_{12}(u+tv, u^+ + tv^+)v^+ + h_{12}(u^- + tv^-, u+tv)v^-, \\
\frac{d^2}{dt^2}E(u+tv) &= (h_{111}(u+tv, u^+ + tv^+) + h_{222}(u^- + tv^-, u+tv))v^2 \\
&\quad + 2h_{112}(u+tv, u^+ + tv^+)vv^+ + 2h_{122}(u^- + tv^-, u+tv)v^-v \\
&\quad + h_{122}(u+tv, u^+ + tv^+)(v^+)^2 + h_{112}(u^- + tv^-, u+tv)(v^-)^2
\end{aligned}$$

であるから, (5.1) から

$$|Q|_\rho \leq c_5|v|_\rho^2 \leq c'\frac{|E(u)|_r^2}{(r-\rho)^{4\tau}}.$$

三角不等式から, (6.1) が導ける. □

7　反復過程とその極限

$n \to \infty$ で $r_n \to r_\infty > 0$ となる単調減少列 $\{r_n\}$ を, $r_0 = r, r_n = r_\infty + 2^{-n}(r_0 - r_\infty)$ で与え, また $\{u_n\}$ を (4.3) の $u = u_{n-1}$ での解 $w_{n-1} \in W_{r_n}$ を用いて $u_n = u_{n-1} + (u_{n-1})_\theta w_{n-1}$ で定める.

TO DO: ツイスト定理の証明をまとめる

参考文献

[1] M. Levi and J. Moser, A Lagrangian proof of the invariant curve theorem for twist mappings, Smooth ergodic theory and its applications (Seattle, WA, 1999), Proc. Sympos. Pure Math. **69**, 733-746, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2001