メモ

2021 年 9 月 11 日

1　確率行列

成分 $a_{ij} \leq 1$ で $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} = 1$ を満たす n 次正方行列

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

を確率行列という.

命題 1.1. 確率行列 A は 1 を固有値に持つ.

Proof. 固有値 λ について, $\boldsymbol{x} =^t (x_1, x_2, \cdots, x_n)$ に対し,

$$A\boldsymbol{x} = \lambda \boldsymbol{x}$$

である. ここで, $\boldsymbol{x} =^t (1_1, 1_2, \cdots, 1_n)$ とおくと,

$$\begin{aligned} A\boldsymbol{x} &=^t \left(\sum_{j=1}^{n} a_{1j}, \sum_{j=1}^{n} a_{2j}, \cdots, \sum_{j=1}^{n} a_{nj} \right) \\ &=^t (1, 1, \cdots, 1) \\ &= \boldsymbol{x} \end{aligned}$$

以上から, A は固有値 1 を持つ.

(証明おしまい)

命題 1.2. 確率行列 A の固有値は 1 を超えない.

Proof. 固有値 λ について, $\boldsymbol{x} =^t (x_1, x_2, \cdots, x_n)$ に対し,

$$A\boldsymbol{x} = \lambda \boldsymbol{x}$$

ここで, $\boldsymbol{x}$ の成分で絶対値最大のもの $x_m = \max_{i=1,\cdots,n}\{|x_i|\}$ とすると,

$$\begin{aligned}
|\lambda||x_m| &= |\lambda x_m| \\
&= |\sum_{j=1}^{n} a_{mj}x_j| \\
&\leq \sum_{j=1}^{n} a_{mj}|x_m| \\
&= |x_m|
\end{aligned}$$

よって,

$$|\lambda| \leq 1$$

(証明おしまい)

2　3 重対角行列

$$D_n = \begin{pmatrix} b_1 & c_1 & & & 0 \\ a_2 & b_2 & c_2 & & \\ & a_3 & b_3 & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & c_{n-1} \\ 0 & & & a_n & b_n \end{pmatrix}$$

を 3 重対角行列という.

例 2.1. 自由度 N の連成振動の運動方程式は,

$$\begin{cases} M\ddot{x}_1 & = -2kx_1 + kx_2 \\ M\ddot{x}_2 & = kx_1 - 2kx_2 + kx_3 \\ \vdots & \\ M\ddot{x}_N & = kx_{N-1} - 2kx_N \end{cases}$$

モードの解を $x_n = A_n \cos(\omega t + \phi)$ とおくと,

$$\begin{cases} -\omega^2 A_1 & = -2\frac{k}{M}A_1 + \frac{k}{M}A_2 \\ -\omega^2 A_2 & = \frac{k}{M}A_1 - 2\frac{k}{M}A_2 + \frac{k}{M}A_3 \\ \vdots & \\ -\omega^2 A_N & = \frac{k}{M}A_{N-1} - 2\frac{k}{M}A_N \end{cases}$$

よって,

$$\omega^2 \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\frac{k}{M} & -\frac{k}{M} & & & 0 \\ -\frac{k}{M} & 2\frac{k}{M} & -\frac{k}{M} & & \\ & -\frac{k}{M} & 2\frac{k}{M} & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & -\frac{k}{M} \\ 0 & & & -\frac{k}{M} & 2\frac{k}{M} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_N \end{pmatrix} \tag{1}$$

ここから, 周波数 ω を求めるには右辺の 3 重対角行列の固有値を求めればいいことがわかる.

3 重対角行列の行列式について, 次の漸化式が成立する.

命題 2.2. n 次 3 重対角行列 D_n が,

$$D_n = \begin{pmatrix} b_1 & c_1 & & & 0 \\ a_2 & b_2 & c_2 & & \\ & a_3 & b_3 & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & c_{n-1} \\ 0 & & & a_n & b_n \end{pmatrix}$$

と表されるとき, その行列式 $|D_n|$ について, 次が成立.

$$|D_n| = b_n|D_{n-1}| - a_n c_{n-1}|D_{n-2}|$$

Proof. 第 n 行についての余因子展開から,

$$\begin{aligned}
|D_n| &= \begin{vmatrix} b_1 & c_1 & & & 0 \\ a_2 & b_2 & c_2 & & \\ & a_3 & b_3 & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & c_{n-1} \\ 0 & & & a_n & b_n \end{vmatrix} \\
&= b_n \begin{vmatrix} b_1 & c_1 & & & 0 \\ a_2 & b_2 & c_2 & & \\ & a_3 & b_3 & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & c_{n-2} \\ 0 & & & a_{n-1} & b_{n-1} \end{vmatrix} - a_n \begin{vmatrix} b_1 & c_1 & & & 0 \\ a_2 & b_2 & c_2 & & \\ & a_3 & b_3 & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & & & a_{n-1} & c_{n-1} \end{vmatrix} \\
&= b_n \begin{vmatrix} b_1 & c_1 & & & 0 \\ a_2 & b_2 & c_2 & & \\ & a_3 & b_3 & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & c_{n-2} \\ 0 & & & a_{n-1} & b_{n-1} \end{vmatrix} - a_n c_{n-1} \begin{vmatrix} b_1 & c_1 & & & 0 \\ a_2 & b_2 & c_2 & & \\ & a_3 & b_3 & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & \ddots & c_{n-3} \\ 0 & & & a_{n-2} & b_{n-2} \end{vmatrix} \\
&= b_n|D_{n-1}| - a_n c_{n-1}|D_{n-2}|
\end{aligned}$$

(証明おしまい)

次のような行列 T_n について考える:

$$T_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & 0 \\ 1 & 0 & 1 & & \\ & 1 & 0 & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & & & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

補題 2.3.

$$|tI_n - T_n| = \frac{2^{-n-1}}{\sqrt{t^2-4}}\left\{(t+\sqrt{t^2-4})^{n+1} - (t-\sqrt{t^2-4})^{n+1}\right\}$$

Proof. 定理 2.2 より,

$$|tI_n - T_n| = t|tI_{n-1} - T_{n-1}| - |tI_{n-2} - T_{n-2}|.$$

$|tI_1 - T_1| = t, |tI_2 - T_2| = t^2 - 1$ より, 2 項間漸化式だ, 解け.

(証明おしまい)

定理 2.4. T_n の固有値 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ は,

$$\lambda_k = 2\cos\frac{\pi k}{n+1} \qquad (k = 1, 2, \cdots, n)$$

Proof. 補題 2.3 より, T_n の固有多項式 $\varphi(t)$ は,

$$\varphi(t) = |tI_n - T_n| = \frac{2^{-n-1}}{\sqrt{t^2-4}}\left\{(t+\sqrt{t^2-4})^{n+1} - (t-\sqrt{t^2-4})^{n+1}\right\} = 0$$

一方で, $tI_n - T_n$ を三角化して,

$$tI_n - T_n \approx \begin{pmatrix} \lambda_1 & * & \cdots & \cdots & * \\ 0 & \lambda_2 & * & & \vdots \\ \vdots & 0 & \lambda_3 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & * \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$$

より, 固有多項式 $\varphi(t) = (t-\lambda_1)(t-\lambda_2)\cdots(t-\lambda_n) = 0$ はたかだか n 個の解を持つ.

$$\begin{aligned} \frac{2^{-n-1}}{\sqrt{t^2-4}}\left\{(t+\sqrt{t^2-4})^{n+1} - (t-\sqrt{t^2-4})^{n+1}\right\} &= \frac{2^{-n-1}}{\sqrt{t^2-4}}(t-\sqrt{t^2-4})^{n+1}\left\{\left(\frac{t+\sqrt{t^2-4}}{t-\sqrt{t^2-4}}\right)^{n+1} - 1\right\} \\ &= 0 \\ \therefore \frac{t+\sqrt{t^2-4}}{t-\sqrt{t^2-4}} = \frac{(t+\sqrt{t^2-4})^2}{4} &= \exp\left(\frac{2\pi k}{n+1}i\right) \\ \therefore (t+\sqrt{t^2-4}) &= 2\exp\left(\frac{\pi k}{n+1}i\right) \end{aligned}$$

$t + \sqrt{t^2-4} = 2c$ に対し,

$$\begin{aligned} \sqrt{t^2-4} &= 2c - t \\ t^2 - 4 &= 4c^2 - 4ct + t^2 \\ t &= \frac{c^2+1}{c} = c + \frac{1}{c} \\ \therefore t &= \exp\left(\frac{\pi k}{n+1}i\right) + \exp\left(-\frac{\pi k}{n+1}i\right) \\ &= \left\{\cos\left(\frac{\pi k}{n+1}\right) + i\sin\left(\frac{\pi k}{n+1}i\right)\right\} + \left\{\cos\left(\frac{\pi k}{n+1}\right) - i\sin\left(\frac{\pi k}{n+1}i\right)\right\} \\ &= 2\cos\left(\frac{\pi k}{n+1}\right) \end{aligned}$$

したがって, 固有方程式の解は $\lambda_k = 2\cos\frac{\pi k}{n+1} \quad (k = 1, 2, \cdots, n)$

(証明おしまい)

系 2.5. 行列 T_n の固有値 λ_k についての固有ベクトル $\boldsymbol{x}^k = {}^t(x_1^k, x_2^k, \cdots, x_n^k)$ は,

$$x_i^k = \sin\frac{\pi k i}{n+1}$$

と表せる,

Proof. 実際代入すると,

$$T_n\boldsymbol{x}^k = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & 0 \\ 1 & 0 & 1 & & \\ & 1 & 0 & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & & & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1^k \\ x_2^k \\ x_3^k \\ \vdots \\ x_{n-1}^k \\ x_n^k \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} x_2^k \\ x_1^k + x_3^k \\ x_2^k + x_4^k \\ \vdots \\ x_{n-2}^k + x_n^k \\ x_{n-1}^k \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \sin\frac{2\pi k}{n+1} \\ \sin\frac{\pi k}{n+1} + \sin\frac{3\pi k i}{n+1} \\ \sin\frac{2\pi k i}{n+1} + \sin\frac{4\pi k i}{n+1} \\ \vdots \\ \sin\frac{\pi k(n-2)}{n+1} + \sin\frac{n\pi k}{n+1} \\ \sin\frac{\pi k(n-1)}{n+1} \end{pmatrix}$$

ここで,

$$\sin\frac{2\pi k}{n+1} = 2\cos\frac{\pi k}{n+1}\sin\frac{\pi k}{n+1} = \lambda_k x_1^k, \sin\frac{\pi k(l-1)}{n+1} + \sin\frac{\pi k(l+1)}{n+1} = 2\cos\frac{\pi k}{n+1}\sin\frac{\pi k l}{n+1} = \lambda_k x_l^k,$$

$$\sin\frac{\pi k(n-1)}{n+1} = -\sin\frac{2\pi k n}{n+1} = 2\cos\frac{\pi k}{n+1}\sin\frac{\pi k n}{n+1} = \lambda_k x_n^k$$

より,

$$= \lambda_k \begin{pmatrix} x_1^k \\ x_2^k \\ x_3^k \\ \vdots \\ x_{n-1}^k \\ x_n^k \end{pmatrix}$$

$$= \lambda_k \boldsymbol{x}^k$$

(証明おしまい)

命題 2.6. 対称 3 重対角テプリッツ行列 $T(a,b)$ が,

$$T(a,b) = \begin{pmatrix} a & b & & & 0 \\ b & a & b & & \\ & b & a & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & b \\ 0 & & & b & a \end{pmatrix}$$

となっているとき, この行列の固有値は T_n の固有値 λ_k によって,

$$a + b\lambda_k = a + 2b\cos\frac{\pi k}{n+1} \qquad (k = 1, 2, \cdots, n)$$

となる. また, 固有値 $a + b\lambda_k$ に対する固有ベクトルは, T_n の固有値 λ_k に対する固有ベクトル $\boldsymbol{x}^k$ に等しい.

Proof. $T_n\boldsymbol{x}^k = \lambda_k\boldsymbol{x}^k$ とすると,

$$\begin{aligned} T(a,b)\boldsymbol{x}^k &= (T(a,0) + T(0,b))\boldsymbol{x}^k \\ &= (aT(1,0) + bT(0,1))\boldsymbol{x}^k \\ &= aI_n\boldsymbol{x}^k + bT_n\boldsymbol{x}^k \\ &= (a + b\lambda_k)\boldsymbol{x}^k \end{aligned}$$

(証明おしまい)

例 2.7. 例 2.1 の式 1 より, 係数行列 U を,

$$U = \begin{pmatrix} 2\frac{k}{M} & -\frac{k}{M} & & & 0 \\ -\frac{k}{M} & 2\frac{k}{M} & -\frac{k}{M} & & \\ & -\frac{k}{M} & 2\frac{k}{M} & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & -\frac{k}{M} \\ 0 & & & -\frac{k}{M} & 2\frac{k}{M} \end{pmatrix}$$

とすると, $U = T(2\frac{k}{M}, -\frac{k}{M})$ より, 定理 2.4 と命題 2.6 より, 振動数 ω については,

$$\begin{aligned} \omega^2 &= 2\frac{k}{M} - 2\frac{k}{M}\lambda_m \\ &= 2\frac{k}{M} - 2\frac{k}{M}\cos\frac{\pi n}{N+1} \\ &= \frac{2k}{M}(1 - \cos\frac{\pi m}{N+1}) \\ &= \frac{4k}{M}\sin^2\frac{\pi m}{2(N+1)} \\ \therefore \omega &= \sqrt{\frac{4k}{M}}\sin\frac{\pi m}{2(N+1)} \qquad (m = 1, 2, \cdots, N) \end{aligned}$$

$p_m = \frac{\pi m}{N+1}$ とおくと, $\omega_m = \sqrt{\frac{4k}{M}}\sin\frac{p_m}{2}$ である. (p_m を波数という.)

また, 系 2.5 より, 振動数 $\omega_m = \sqrt{\frac{4k}{M}} \sin \frac{p_m}{2}$ に対する n 番目のおもりの振幅 A_m は,

$$A_m = A \sin p_m n$$

と書ける.

以上から, 連成振動の m 番目のモードの解は,

$$x_n = A \sin p_m n \cos(\omega_m t + \phi_m)$$

である.

次に, 一般の 3 重対角行列 D_n のことを考える. 何か n 次正則行列 P があって,

$$P^{-1} D_n P = \begin{pmatrix} x_1 & y_1 & & & 0 \\ y_1 & x_2 & y_2 & & \\ & y_2 & x_3 & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & y_{n-1} \\ 0 & & & y_{n-1} & x_n \end{pmatrix} \tag{2}$$

とできないだろうか.

え, どうすりゃいいの??????????

P が対角行列 $diag(d_1, d_2, \cdots, d_n)$ であるとき, $P^{-1} = diag(\bar{d_1}, \bar{d_2}, \cdots, \bar{d_n})$(ただし, $\bar{d_i} = 1/d_i$) であり,

$$\begin{aligned} P^{-1} D_n P &= \begin{pmatrix} \bar{d_1} & 0 & & & 0 \\ 0 & \bar{d_2} & 0 & & \\ & 0 & \bar{d_3} & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & & & 0 & \bar{d_n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 & c_1 & & & 0 \\ a_2 & b_2 & c_2 & & \\ & a_3 & b_3 & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & c_{n-1} \\ 0 & & & a_n & b_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_1 & 0 & & & 0 \\ 0 & d_2 & 0 & & \\ & 0 & d_3 & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & & & 0 & d_n \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} b_1 & \bar{d_1} d_2 c_1 & & & 0 \\ d_1 \bar{d_2} a_2 & b_2 & \bar{d_2} d_3 c_2 & & \\ & d_2 \bar{d_3} a_3 & b_3 & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & \bar{d_{n-1}} d_n c_{n-1} \\ 0 & & & d_{n-1} \bar{d_n} a_n & b_n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

ここで, 式 2 のような形になったとすれば, もし $a_{i+1} c_i > 0$ であれば,

$$\frac{d_i}{d_{i+1}} a_{i+1} = \frac{d_{i+1}}{d_i} c_i \quad \therefore d_{i+1} = d_i \sqrt{\frac{a_{i+1}}{c_i}}$$

をみたす. 逆に, $a_{i+1} c_i < 0$ だとすると, 少なくとも P:対角行列では式 2 とはできない.

$$\begin{aligned} d_{i+1} &= d_i \sqrt{\frac{a_{i+1}}{c_i}} \\ d_1 &= 1 \\ d_i &= \sqrt{\frac{a_i a_{i-1} \cdots a_2}{c_{i-1} c_i \cdots c_1}} \quad (i > 2) \end{aligned}$$

であり, そのときの $P^{-1}D_nP$ について,

$$x_i = b_i, y_i = \sqrt{a_{i+1}c_i}$$

となる.

まとめると,

定理 2.8. 3 重対角行列 D_n が $a_{i+1}c_i > 0$ を満たすとき, 対角行列 $P = diag(d_1, d_2, \cdots, d_n)$ で,

$$\begin{cases} d_1 & = 1 \\ d_i & = \sqrt{\frac{a_i a_{i-1} \cdots a_2}{c_{i-1} c_i \cdots c_1}} \quad (i > 2) \end{cases}$$

を満たすものによって,

$$P^{-1}D_nP = \begin{pmatrix} b_1 & \sqrt{a_2c_1} & & & 0 \\ \sqrt{a_2c_1} & b_2 & \sqrt{a_3c_2} & & \\ & \sqrt{a_3c_2} & b_3 & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & \sqrt{a_nc_{n-1}} \\ 0 & & & \sqrt{a_nc_{n-1}} & b_n \end{pmatrix}$$

と対称 3 重対角行列に変換できる.

系 2.9. 特に, D_n がテプリッツ行列 (Toeplitz matrix) であるとき, つまり

$$D_n = \begin{pmatrix} b & c & & & 0 \\ a & b & c & & \\ & a & b & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & c \\ 0 & & & a & b \end{pmatrix}$$

であるとき, $ac > 0$ を満たすのであれば, D_n の固有値は

$$b + 2\sqrt{ac}\cos\frac{\pi k}{n+1} \qquad (k = 1, 2, \cdots, n)$$

である.

Proof. 定理 2.8 から, 対角行列

$$P = diag\left(1, \left(\frac{a}{c}\right)^{\frac{1}{2}}, \frac{a}{c}, \cdots, \left(\frac{a}{c}\right)^{\frac{n-1}{2}}\right)$$

によって,

$$P^{-1}D_nP = \begin{pmatrix} b & \sqrt{ac} & & & 0 \\ \sqrt{ac} & b & \sqrt{ac} & & \\ & \sqrt{ac} & b & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & \sqrt{ac} \\ 0 & & & \sqrt{ac} & b \end{pmatrix}$$

とできる. これは, 命題 2.6 から, 固有値は

$$b + 2\sqrt{ac}\cos\frac{\pi k}{n+1} \qquad (k = 1, 2, \cdots, n)$$

(証明おしまい)

実は, 任意の行列は 3 重対角行列に変換できる.

参考文献

[1] 寺田文行 『線形代数 増訂版』 (サイエンス社, 2017)

[2] 高校数学の美しい物語 「三重対角行列の特殊形の固有値は綺麗」
(`https://manabitimes.jp/math/1398`　たぶん 2020 年 9 月に見た)

[3] Wikipedia "Tridiagonal matrix"
(`https://en.wikipedia.org/wiki/Tridiagonal_matrix` たぶん 2020 年 9 月に見た)