バーコフの定理 (Katok, Hasselblatt Th.13.2.13 (p.430-433))

$f: A\to A$ が向き保存 twist homeo. ($A = S^1\times[0,\infty)$)
$U\subset NW(f)$ が f-invariant な open, relative cpt. で
$U\supset S^1\times\{0\}$ で ∂U: connected.

非遊走的 ($x\in NW(f)$ について、$\forall U\ni x, \exists N>0$ s.t. $f^N(U)\cap U\neq\emptyset$)

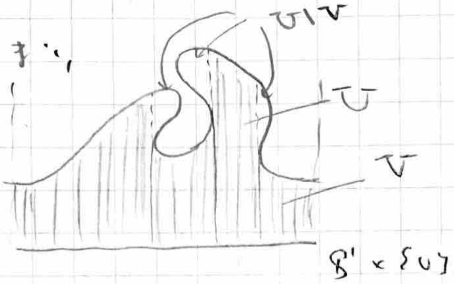
このとき、∂U は連続関数 $\psi: S^1\to(0,\infty)$ のグラフ

特に、f が C^1-diffeo なら、ψ は Lipschitz.

〈証明〉

$V := \{(x,y) \mid (x,y')\in U, \forall y'\in[0,y]\}$ とする。

つまり、



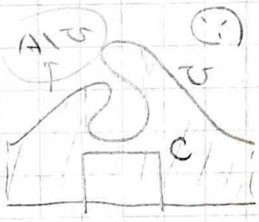
V は U の中で真下に ∂U がないようなもの

$V=U$ なら、∂U はグラフとなる。

Lem 13.2.15

$I=[x_1,x_2]\subset S^1$, $(x_1,y),(x_2,y)\in V$, $I\times\{y\}\subset U$ とする。

このとき、$I\times[0,y]\subset U$



(∵) $C=\partial(I\times[0,y])$ とすると、C は Jordan曲線で、$A\setminus U$ は C の外部に入る。
($A\setminus U$ は非有界だから)
よって、$A\setminus(I\times[0,y])\supset A\setminus U$
$\therefore\ I\times[0,y]\subset U$ //

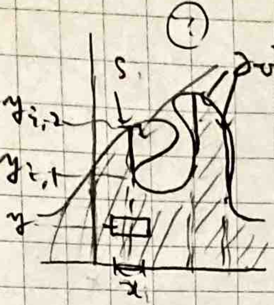
∂_U, Cl_U を、U の位相での境界および閉包とする。

Lem 13.2.16

$\partial_U V$ は $S_i=\{x_i\}\times(y_{i,1},y_{i,2})$ ($0<y_{i,1}<y_{i,2}$, $(x_i,y_{i,1}),(x_i,y_{i,2})\in\partial U$) の disjoint union

さらに、S_i は $p\in S_i$ の十分小さな近傍を 2つの open set $V'(\subset V)$ と $U'(\subset U\setminus V)$ に分割

$U \cap (\{x\} \times [0, \infty))$ で、$(x, y) \in \partial_U V$ を含むものの連結成分では、



$$S := \{x\} \times (y_{i,1}, y_{i,2}) \text{ とかけて、}$$

$0 < y_{i,1} < y_{i,2}$, $(x, y_{i,1}), (x, y_{i,2}) \in \partial U$

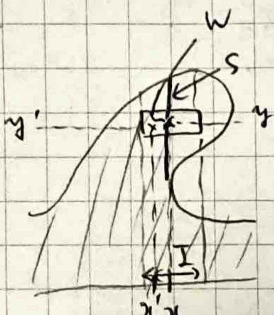
また、$V \cap S = \emptyset$.（定義から、V は境界 $\partial_U V$ を含まない）

$S \subset \partial_U V$ を示す。

十分小さな区間 $I \subset \mathbb{R}^1$（open）で $x \in I$ なるものについて、

$\exists \varepsilon > 0$ s.t.

$$W := I \times (y - \varepsilon, y + \varepsilon) \subset U.$$



$(x', y') \in W \cap V$ なら、

$$\{x'\} \times (y - \varepsilon, y + \varepsilon) \subset V,$$

よって、

$$V \cap W = \bigcup \{\{x'\} \times (y - \varepsilon, y + \varepsilon) \mid (x', y') \in W \cap V\},$$

$$\{x\} \times (y - \varepsilon, y + \varepsilon) \subset \partial_U (V \cap W) \subset \partial_U V.$$

$$\left(\because \{x\} \times (y - \varepsilon, y + \varepsilon) \subset S \subset U \setminus V, \quad (x, y) \in \partial_U V \right)$$

よって、$\partial_U V \cap S$ は S の中の open で、

また $S \subset U$ より、[illegible]

$S \setminus (\partial_U V \cap S) = \{(x, y) \in S \text{ かつ } (x, y) \notin \partial_U V\}$

$\forall (x, y) \in (S \setminus (\partial_U V \cap S))$ について、

$(x, y) \in S$ かつ、

$$\left(\begin{array}{l} (x, y) \in (U \text{ の open}) \subset V \\ \text{or} \\ (x, y) \in (U \text{ の open}) \subset U \setminus V \end{array} \right)$$

× $(V \cap S = \emptyset)$

ok.

このとき、$(x, y) \in (U \text{ の open}) \cap S \subset U \setminus V$

$S \subset U \setminus V$, $(U \text{ の open}) \cap S = (S \text{ の open})$ より、

$(x, y) \in (S \text{ の open}) \subset S$.

$\therefore$ $S \setminus (\partial_U V \cap S)$ は S の open,

$\partial_U V \cap S$ は S の closed.

S は連結だから

$$\partial_U V \cap S = S$$

$$\therefore S \subset \partial_U V.$$

$(x, y) \in S$ について $(x - \delta, x + \delta) \times (y - \varepsilon, y + \varepsilon)$ は V とも $U \setminus V$ とも交わる。

前の lemma より、

$$(a, y), (b, y) \in W \cap V \Rightarrow [a, b] \times (y - \varepsilon, y + \varepsilon) \subset V.$$

よって十分小さな $\varepsilon > 0$, $\delta > 0$ で、

$V' = (x - \delta, x) \times (y - \varepsilon, y + \varepsilon) \in V$

$U' = (x, x + \delta) \times (y - \varepsilon, y + \varepsilon) \in U \setminus V$ //

[illegible]

Lemma 17.2.17

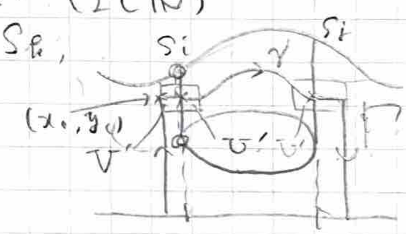
それぞれの i について、$\tilde{U} \setminus S_i$ は 2つの連結成分をもち、1つは V と disjoint で、その境界は他の S_j $(j \neq i)$ と交わらない。

∵) $\tilde{U} \setminus S_i$ の連結成分で V' を含むものを $\tilde{U}_i$ とおく。

いま、$\tilde{U}_i$ 内のパス c で、
V' からスタートしてゴールが S_j $(j \neq i)$ か V'
になるものが存在すると仮定する。

・後者のばあい、
V の構成から、V' に至るまでに必ず $\partial \tilde{U}$ V を通過するので、c が S_j $(j \neq i)$ に至るパターンに帰着。

↳ どちらのケースでも、
パス $\gamma : [0,1] \to \tilde{U}$ で $(J \subset \mathbb{N})$
$\gamma(0,1) \subset \tilde{U} \setminus \bigcup_{k \in J} S_k$,
$\gamma(0) \in \mathrm{Int}\, S_i$,
$\gamma(1) \in \mathrm{Int}\, S_j$
がとれることになる。

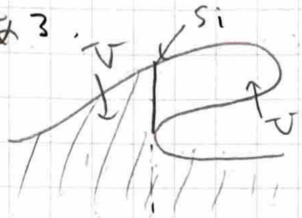


γ を $[-\varepsilon, 0)$ に水平方向に伸ばす。
このとき V', $\tilde{U}'$ のとり方から、γ は V' 内で、
終点を $(x_0, y_0) \in V'$ とする。
そして、垂直に $\{x_0\} \times [0, y_0]$ を引く（かつ S_j ∩ $\partial\tilde{U}$ V）
反対側についても、γ が V と disjoint なので、
γ を 1 をこえて V の中に延長できて、
さらに垂直に下ろせば $S^1 \times \{0\}$ と交差するようにできる。

こうして構成した Γ は単純（$\gamma \cap V = \emptyset$ より）で、
両端点が $S^1 \times \{0\}$ 上にある。
Jordan の曲線定理から、Γ は $A = S^1 \times [0, \infty)$ を2つに分割する。S_i の両端点は $\partial \tilde{U}$ 上で、
$\partial \tilde{U}$ は連結と仮定していたが、これらは Γ で別の連結成分に属しており、矛盾 //

Γ は $\partial\tilde{U}$ を分割しない
（$\Gamma \cap \partial \tilde{U} = \emptyset$ より）

いま、$Cl_U U_i = U_i \cup S_i$, $V \cap Cl_U U_i = \emptyset$
である。



(Lem. 13.2.17 より、
$U_i \cap V = \emptyset$
また、$S_i \cap V = \emptyset$)

このような U_i が存在しないことを示せば、
$V = U$ を示せる。

Lem. 13.2.18

(1) $U = V \cup (\bigcup_{i\in I} Cl_U U_i)$

(2) U_i は $U \setminus Cl_U V$ の連結成分。

(3) $Cl_U U_i$ は $U \setminus V$ の連結成分。

∵ (1) もし $p \in U$ かつ $p \notin Cl_U V$ なら、
U の弧状連結性から、
$\gamma(0) = p$, $\gamma(1) = q \in Cl_U V$,
$\gamma([0,1)) \subset U \setminus Cl_U V$
となるパス γ があって
$q \in \partial_U V$ (つまり $q \in S_i$) cf.
しかし、$U_i \cup S_i \cup V$ は q の近傍を含むので、
$p \in \gamma([0,1)) \subset U_i$.
(∵ $S_i \cup V \subset Cl_U V$, $\gamma([0,1)) \not\subset Cl_U V$)
したがって、$\forall p \in U$ は $Cl_U V$ か U_i のどちらかに入り、

$$U = Cl_U V \cup \left(\bigcup_{i\in I} U_i\right)$$
$$= V \cup \left(\bigcup_{i\in I} Cl_U U_i\right)$$

(2) U_i は open なので、
$\forall p \in U_i$, $p \in (\text{open}) \subset U_i$
$p \notin Cl_U V$ より、
$p \in (\text{open}) \cap U \setminus Cl_U V \subset U_i$
よって、U_i は $U \setminus Cl_U V$ の open.
一方、$\partial_U U_i = S_i \subset Cl_U V$ より、
$Cl_U U_i = U_i \cup \partial_U U_i = U_i \cup S_i$

$Cl_{U \setminus Cl_U V} U_i = U_i$.

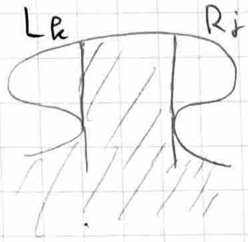
よって、U_i は $U \setminus Cl_U V$ の closed
よって、U_i は $U \setminus Cl_U V$ で連結.

$(Cl_U U_i \cap V = \emptyset.)$

(3) $Cl_U U_i$ は $U \setminus V$ の closed なので、

U の closed でもある
また、$V \cup Cl_U U_i$ は $\partial_U U_i = S_i$ の近傍を含む
(Lem. 13.2.16) ので、
$V \cup Cl_U U_i$ は open で、
したがって、$Cl_U U_i$ は $U \setminus V$ の open.
以上から、$Cl_U U_i$ は $U \setminus V$ の連結成分. //

いま、$\{R_j\}_{j \in J \subset I} := \{U_i \mid U_i$ is to the right of $S_i\}$



$\{L_k\}_{k \in K \subset I} := \{U_i \mid U_i$ is to the left of $S_i\}$

とし、$R := \bigcup_J R_j$, $L := \bigcup_K L_k$ とする

Lem. 13.2.16 より、$V \cup \left(\bigcup_J Cl_U R_j\right)$ は U の open. で、

補集合 $\bigcup_K Cl_U L_k$ は closed. $\left(\bigcup_J Cl_U R_j\right.$ も同様$\left.\right)$

よって、

$$Cl_U R = \bigcup_J Cl_U R_j, \quad Cl_U L = \bigcup_K Cl_U L_k.$$

($R_j \subset Cl_U R_j$ より、$R \subset \bigcup_J Cl_U R_j$.

$\therefore Cl_U R \subset \bigcup_J Cl_U R_j$.

一方、$R_j \subset R$ より、

$Cl_U R_j \subset Cl_U R$

$\therefore \bigcup_J Cl_U R_j \subset Cl_U R$ $\quad \therefore Cl_U R = \bigcup_J Cl_U R_j$)

特に、$U = V \cup \left(\bigcup_{i \in I} Cl_U U_i\right)$ (Lem. 13.2.18)

$= V \cup \left(\bigcup_J Cl_U R_j\right) \cup \left(\bigcup_K Cl_U L_k\right)$

$= V \cup Cl_U R \cup Cl_U L$

Lem. 13.2.19

(1) $f(\mathcal{V}) \cap \mathrm{Cl}_{\mathcal{V}} L_k = \emptyset$

(2) $f^{-1}(\mathcal{V}) \cap \mathrm{Cl}_{\mathcal{V}} R_j = \emptyset$

(3) $f^{-1}(\mathrm{Cl}_{\mathcal{V}} L) \subset \mathrm{Cl}_{\mathcal{V}} R \cup \mathrm{Cl}_{\mathcal{V}} L$

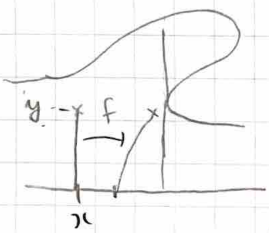
(4) $f^{-1}(\mathrm{Cl}_{\mathcal{V}} L) \cap \mathrm{Cl}_{\mathcal{V}} R = \emptyset$.

(5) $f^{-1}(\mathrm{Cl}_{\mathcal{V}} R) \cap \mathrm{Cl}_{\mathcal{V}} L = \emptyset$.

(6) $f^{-1}(\mathrm{Cl}_{\mathcal{V}} L) \subset L$.

(7) $f(\mathrm{Cl}_{\mathcal{V}} R) \subset R$.

∵ (1) $(x, y) \in \mathcal{V}$ のとき、



曲線 $\gamma(s) = f(x, s)$ $(s \in [0, y])$
は $\mathcal{V}$ に含まれる。($\mathcal{V}$ は f-inv.)

twist condition から、$\gamma(s)$ は右に傾く

もしこれが L_k に入るなら S_k を右から左に横断するはずなので $f(\mathcal{V}) \cap L_k = \emptyset$.

$f(\mathcal{V})$ は $\mathcal{V}$ の open なので、

$$f(\mathcal{V}) \cap \mathrm{Cl}_{\mathcal{V}} L_k = \emptyset.$$

(2) (1)と同様

(3) (1)より $f^{-1}(f(\mathcal{V}) \cap \mathrm{Cl}_{\mathcal{V}} L_k) = \emptyset$.

$$\mathcal{V} \cap f^{-1}(\mathrm{Cl}_{\mathcal{V}} L_k) = \emptyset.$$

$\bar{\mathcal{U}} = \mathcal{V} \sqcup (\mathrm{Cl}_{\mathcal{V}} R) \cup (\mathrm{Cl}_{\mathcal{V}} L)$ より

$$f^{-1}(\mathrm{Cl}_{\mathcal{V}} L) \subset (\mathrm{Cl}_{\mathcal{V}} R) \cup (\mathrm{Cl}_{\mathcal{V}} L)$$

(4) もし $f^{-1}(\mathrm{Cl}_{\mathcal{V}} L_k) \cap \mathrm{Cl}_{\mathcal{V}} R_j \neq \emptyset$ なら、

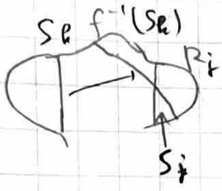
各 $\mathrm{Cl}_{\mathcal{V}} U_i$ は disjoint かつ連結で

(3) より $\underbrace{f^{-1}(\mathrm{Cl}_{\mathcal{V}} L_k)}_{連結} \subset (\bigcup_j \mathrm{Cl}_{\mathcal{V}} R_j) \cup (\bigcup_k \mathrm{Cl}_{\mathcal{V}} L_k)$

であるから、

$$f^{-1}(\mathrm{Cl}_{\mathcal{V}} L_k) \subset \mathrm{Cl}_{\mathcal{V}} R_j$$

一方, $f^{-1}(S_\ell)$ は垂直方向と横断的で,



S_j は垂直だから, $f^{-1}(S_\ell) \cap R_j \neq \emptyset$ で,

$f^{-1}(V) \cap R_j \neq \emptyset$.

しかし, これは (2) に矛盾. よって, $f^{-1}(Cl_V L) \cap Cl_V R = \emptyset$.

(5) (4) と同様.

(6) (3) と (4) から, $f^{-1}(Cl_V L) \subset Cl_V L$.

一方, $f^{-1}(\partial_V L)$ は $\partial_V L$ と横断するので,

$f^{-1}(Cl_V L) \subset L$ となる.

← $f^{-1}(Cl_V L_j) \subset Cl_V L$ に矛盾

← こうなるしかない

(7) (6) と同じ //

($U = V$)

もし $R \neq \emptyset$ なら, (7) より $f(Cl_V R) \subset R$

一方, f は同相写像で, $Cl_V R$ と R は同相でないから

$$f(Cl_V R) \subsetneq R.$$

しかし, $f^{-1}(R \setminus f(Cl_V R))$ は遊走的な点により成る V の部分集合

$p \in f^{-1}(R \setminus f(Cl_V R))$ について,

$f(p) \in R \setminus f(Cl_V R)$, $f(p) \in R$ かつ $f(p) \notin f(R)$

もし $f(p) \in f^{-1}(R \setminus f(Cl_V R))$ なら,

$f^2(p) \in R \setminus f(Cl_V R)$ ∴ $f^2(p) \notin f(Cl_V R)$

これは, $f(p) \in R$ に矛盾

よって, $f(p) \notin f^{-1}(R \setminus f(Cl_V R))$

また, $f(Cl_V R) \subset R$ より, $f(p) \in R$ なら,

$f^N(p) \in R$ $(\forall N)$

もし $f^N(p) \in f^{-1}(R \setminus f(Cl_V R))$ なら,

$f^{N+1}(p) \in R \setminus f(Cl_V R)$

$f^{N+1}(p) \notin f(Cl_V R)$

これは $f^N(p) \in R$ に矛盾

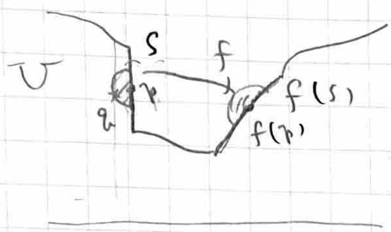
したがって, $R = \emptyset$ ($L = \emptyset$ も同様)

・あとは、$\partial\mho$ から S^1 への射影の単射性を示せばよく、

$R=\emptyset, L=\emptyset$ より、$\mho=V$ なので、

$\partial\mho$ が垂直なセグメントを持たないことを示せばよい。

もし、$\partial\mho$ に垂直なセグメント S があれば、



・S の左側が $\mho$ なら、
$p\in\mathrm{Int}\,S$ の近くの q は
twist condition から f で写すと
$f(S)\subset\partial\mho$ の上に乗って、
この $f(q)$ は $\mho$ に含まれない。

・S の右側が $\mho$ なら、
f^{-1} で写せば同様。

↳ このとき、p の近傍の q はすべて $\mho$ に含まれなくなるが、
これは境界の定義から、$p\in\partial\mho$ に反してしまい、矛盾。

以上から、$\partial\mho$ は垂直な部分を持たず、
S^1 上のグラフになる //