PRML 問題 2.48 の平均について

スチューデントの t 分布 $\mathrm{St}(\boldsymbol{x}|\boldsymbol{\mu},\boldsymbol{\Lambda},\nu)$ の期待値は積分の順序交換を認めれば用意に計算できるが, 定義にしたがって計算した式

$$\mathrm{St}(\boldsymbol{x}|\boldsymbol{\mu},\boldsymbol{\Lambda},\nu)=\frac{\Gamma(D/2+\nu/2)}{\Gamma(\nu/2)}\frac{|\boldsymbol{\Lambda}|^{1/2}}{(\pi\nu)^{D/2}}\left[1+\frac{\Delta^2}{\nu}\right]^{-D/2-\nu/2}$$

で期待値計算すると $0<\nu\leq 1$ のとき, なんかマズそう. この pdf では, 実は期待値の計算では $\nu>1$ でないと積分の順序交換が行えないことを示す.

簡単のため, $\mu=0$ である 1 変数についてのスチューデントの t 分布

$$\mathrm{St}(x|0,\lambda,\nu)=\int_0^\infty \mathcal{N}(x|\mu,(\eta\lambda)^{-1})\mathrm{Gam}(\eta|\nu/2,\nu/2)\,\mathrm{d}\eta$$

について考える. 多変数についても同じようにやればなんとかなると思う. 知らんけど.

まず, 積分の順序交換を保障するフビニの定理の条件を確認する. 岩田耕一郎『ルベーグ積分　理論と計算手法』(森北出版) を参照すると,

- ボレル可測関数 $f(x,y)$ が非負値のとき順序交換できる (p.137 系 7.2).
- ボレル可測関数 $f(x,y)$ がルベーグ可積分であるとき, 順序交換できる (p.158 系 7.9).
- ボレル可測関数 $f:A\times B\to\mathbb{R}\cup\{\infty,-\infty\}$ のルベーグ可積分性は,

  $$\int_A\left(\int_B|f(x,y)|\lambda(dy)\right)\lambda(dx)<+\infty$$

  と同値である. (ただし, λ はルベーグ測度) (p.156 系 7.8)

証明は省略する.

t 分布の正規化確認 (PRML 問 2.48) については, 正規分布 $\mathcal{N}(x|\mu,(\eta\lambda)^{-1})$ とガンマ分布 $\mathrm{Gam}(\eta|\nu/2,\nu/2)$ は非負値だからこれらの積も非負値であるり, フビニの定理が使える. つまり, 積分の交換が可能である.

一方, 期待値 $E[x]$ の計算における被積分関数は

$$x\mathcal{N}(x|0,(\eta\lambda)^{-1})\mathrm{Gam}(\eta|\nu/2,\nu/2)\propto x\eta^{\frac{\nu-1}{2}}\exp\left\{-\frac{1}{2}(x^2\eta+\nu\eta)\right\}\tag{1}$$

である. $x\in(-\infty,\infty)$ と $\eta\in(0,\infty)$ について積分する際には, 右辺について考えれば十分である. これは, 積分範囲で負の値を取り得るので, フビニの定理を使用するには可積分性の確認が必要である. そのためには被積分関数の絶対値を積分したとき有限の値になることを確認すればよい.

式 (1) の右辺を $f_\nu(x,\eta)$ とおく. ここで, f_ν は $\nu>1$ のとき可積分で, $0<\nu\leq 1$ のとき可積分ではない.

Proof. $|f_\nu|$ を積分する．

$|f_\nu(-x,\eta)| = |f_\nu(x,\eta)|$ であることと，$\int_0^\infty x\exp\left\{-ax^2\right\}\mathrm{d}x = 1/2a$ であることから，

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty \left(\int_{-\infty}^\infty |f_\nu|\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}\eta &= \int_0^\infty \left(\int_{-\infty}^\infty \left|x\eta^{\frac{\nu-1}{2}}\exp\left\{-\frac{1}{2}(x^2\eta+\nu\eta)\right\}\right|\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}\eta \\
&= 2\int_0^\infty \left(\int_0^\infty x\eta^{\frac{\nu-1}{2}}\exp\left\{-\frac{1}{2}(x^2\eta+\nu\eta)\right\}\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}\eta \\
&= 2\int_0^\infty \left(\int_0^\infty x\eta^{\frac{\nu-1}{2}}\exp\left(-\frac{1}{2}\nu\eta\right)\exp\left(-\frac{1}{2}x^2\eta\right)\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}\eta \\
&= 2\int_0^\infty \eta^{\frac{\nu-1}{2}}\exp\left(-\frac{1}{2}\nu\eta\right)\frac{1}{\eta}\,\mathrm{d}\eta \\
&= 2\int_0^\infty \eta^{\frac{\nu-1}{2}-1}\exp\left(-\frac{1}{2}\nu\eta\right)\mathrm{d}\eta \\
&= 2\left(\frac{2}{\nu}\right)^{\frac{\nu-1}{2}}\int_0^\infty t^{\frac{\nu-1}{2}-1}\exp(-t)\,\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

ただし，$t = \nu\eta/2$ とおいた．

ここで，ガンマ関数 $\Gamma(x)$ が $x>0$ で

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1}\exp(-t)\,\mathrm{d}t$$

と定義できたことから，$\nu > 1$ のとき，

$$\int_0^\infty \left(\int_{-\infty}^\infty |f_\nu|\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}\eta = 2\left(\frac{2}{\nu}\right)^{\frac{\nu-1}{2}}\Gamma\left(\frac{\nu-1}{2}\right) < +\infty$$

しかし，$0 < \nu \leq 1$ のとき，$0 < \frac{\nu-1}{2} \leq 1$ であるが，$\frac{\nu-1}{2} = \alpha$ とおくと，$t \in (1,\infty)$ で $t^\alpha \exp(-t)$ が非負値かつ $t \in (0,1]$ で $t^\alpha \geq t^{-1}, \exp(-t) \geq 1/e$ であることから，

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty t^\alpha \exp(-t)\,\mathrm{d}t &= \int_1^\infty t^\alpha\exp(-t)\,\mathrm{d}t + \int_0^1 t^\alpha\exp(-t)\,\mathrm{d}t \\
&> \int_0^1 t^\alpha\exp(-t)\,\mathrm{d}t \\
&\geq \int_0^1 t^{-1}\exp(-t)\,\mathrm{d}t \\
&\geq \frac{1}{e}\int_0^1 t^{-1}\,\mathrm{d}t \\
&= \lim_{a\to+0}\frac{1}{e}[\log(t)]_a^1 \\
&= \lim_{a\to+0} -\frac{1}{e}\log(a) \\
&= +\infty
\end{aligned}$$

よって, $0 < \nu \leq 1$ のとき, $\int_0^\infty \left(\int_{-\infty}^\infty |f_\nu| \, \mathrm{d}x \right) \mathrm{d}\eta$ は発散する.

以上から, $|f_\nu|$ の積分は, $\nu > 1$ で有限値に収束し, $0 < \nu < 1$ で発散する. このことから, f_ν は, $\nu > 1$ でルベーグ可積分であり, $0 < \nu < 1$ で可積分でない.

(証明おしまい)

このことから, フビニの定理を用いて積分の交換を行えるのは $\nu > 1$ のときである.

うんこ