Moserのツイストの定理

まるげり

2025年9月26日

Levi-Moser[1]のノート. 面積保存ツイスト写像の母関数に解析性を課すが, ツイスト定理の証明としては一番読みやすいと思う.

1 背景: 面積保存ツイスト写像, 母関数

アニュラス $\mathbb{A} = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$ 上の面積保存ツイスト写像 $\varphi(x_1, y_1) = (x_2, y_2)$ とは, 面積保存性 $\varphi^*(dy_2 \wedge dx_2) = dy_1 \wedge dx_1$ とツイスト性 $\dfrac{\partial x_2}{\partial y_1} > 0$ を持つものである.

記号の濫用で, $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$ の普遍被覆 $\mathbb{R}^2$ 上の元もまた (x, y) のように書き, また φ の $\mathbb{R}^2$ への持ち上げも φ と書くことにすると, 面積保存ツイスト写像 φ が特に $\mathbb{A}$ 上の完全シンプレクティック写像 ($\varphi^*(ydx) - ydx$ が $\mathbb{A}$ 上の完全形式になる) とき, φ の母関数と呼ばれる, 次の性質を満たす関数 $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ が存在する:
h_1, h_2 をそれぞれ h の第1成分, 第2成分での偏微分としたときに, $h(x_1+1, x_2+1) = h(x_1, x_2), h_{12} < 0$ であり, さらに

$$\begin{cases} h_1(x_1, x_2) = -y_1 \\ h_2(x_1, x_2) = y_2 \end{cases} \iff \varphi(x_1, y_1) = (x_2, y_2)$$

となる.
(たぶん, $\mathbb{R}^2$ で考える以上はポアンカレの補題から閉形式 $\varphi^*(ydx) - ydx$ が完全形式になることが保証されるけど, アニュラス $\mathbb{A}$ 上でもなお h が意味を持つためには別で $\mathbb{A}$ 上で完全形式になることを保証しないといけない... のだと思う.)

特に φ が母関数 h を持つなら, (x_1, y_1) が与えられた下で, $\{(x_n, y_n)\}_n$ が軌道 $\{\varphi^n(x_1, y_1)\}_n$ になることと

$$h_2(x_{i-1}, x_i) + h_1(x_i, x_{i+1}) = 0, \ y_i = -h_2(x_i, x_{i+1}) \quad (\forall i \in \mathbb{Z})$$

が同値であることがわかる.

2 不変曲線と差分方程式への簡約化

面積保存ツイスト写像 φ の不変曲線 $\gamma \subset \mathbb{A}$ とは, φ の不変集合であって $\mathbb{R}^2$ 上への持ち上げを $w(\theta) = (u(\theta), v(\theta))$ としたときに $u(\theta) - \theta$ および $v(\theta)$ が周期1の周期関数となるものである. これは, $u(\theta+1) - (\theta+1) = u(\theta) - \theta$ より $u(\theta+1) - u(\theta) = 1$ より, アニュラス $\mathbb{A}$ を x 方向に一周して戻ってくる曲線であることを意味している.

さて, ある回転数 ω についての不変曲線 γ, つまり

$$\varphi(w(\theta)) = w(\theta + \omega)$$

を見つけたい. これはラグランジュ方程式と呼ばれることもある次の2階差分方程式

$$E[u(\theta)] = h_1(u(\theta), u(\theta+\omega)) + h_2(u(\theta), u(\theta-\omega)) \equiv 0 \tag{2.1}$$

が解ければ, $v(\theta) = -h_1(u(\theta), u(\theta+\omega))$ とおくことで不変曲線を見つけることができる. 以下, $u^+(\theta) = u(\theta+\omega), u^-(\theta) = u(\theta-\omega)$ とする.

Remark 1. あとで使うので, $u_\theta E[u]$ の平均値 $\displaystyle\int_0^1 (u_\theta E[u])(\theta) d\theta = 0$ を計算しておく.

$$\frac{\partial h}{\partial \theta}(u, u^+) = u_\theta(h_1(u, u^+) + h_2(u, u^+))$$

より, $\nabla f := f(\theta+\omega) - f(\theta)$ と表記すれば,

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial h}{\partial \theta}(u, u^+) - u_\theta h_2(u^-, u) &= u_\theta(h_1(u, u^+) + h_2(u, u^+) - h_2(u, u^+) + h_2(u^-, u)) \\
&= u_\theta(h_1(u, u^+) + h_2(u^-, u)) \\
&= u_\theta E[u]
\end{aligned}
$$

したがって,

$$
u_\theta E[u] = \frac{\partial h}{\partial \theta}(u, u^+) - u_\theta h_2(u^-, u)
$$

と表すことができる. ここで, $h(x_1+1, x_2+1) = h(x_1, x_2)$ であることと, $f(\theta)$ が周期 1 の周期関数であれば $\int_0^1 (\nabla f)(\theta) d\theta = \int_0^1 (f(\theta+\omega) - f(\theta)) d\theta = 0$ であることから, 結局

$$
\int_0^1 (u_\theta E[u])(\theta) d\theta = 0
$$

である.

Example 1 (standard map)**.** $S(x)$ を周期関数として, $\varphi(x_1, y_1) = (x_2, y_2)$ を

$$
\begin{aligned}
x_2 &= x_1 + y_1 + S'(x_1), \\
y_2 &= y_1 + S'(x_1)
\end{aligned}
$$

で定める. 母関数 h は

$$
h(x_1, x_2) = \frac{1}{2}(x_1 - x_2)^2 + S(x_1)
$$

である. これに対するラグランジュ方程式 (2.1) は

$$
u(\theta+\omega) - 2u(\theta) + u(\theta-\omega) = S'(u(\theta))
$$

と書ける.

3 ツイスト定理

ツイスト定理は, ω がディオファントス数であるときに, $E[u_0] \approx 0$ なる $u_0(\theta)$ から始めて $E[u] \equiv 0$ となる $u(\theta)$ の存在を示す定理である.

$$
W_r := \left\{ f : \mathbb{C} \to \mathbb{C} \,\middle|\, f : \text{実解析的},\ f(\theta+1) = f(\theta),\ |f|_r := \sup_{|\mathrm{Im}\theta| \le r} |f(\theta)| < \infty \right\}
$$

する.

複素領域 $\mathcal{D} \subset \mathbb{C}^2$ を考え, その R-近傍を $\mathcal{D}_R := \{z \in \mathcal{D} | \sup_{y \in \mathcal{D}} |y - z|\}$ と書くことにする.

- h に関する仮定:
  $h(x_1, x_2)$ が $(x_1, x_2) \in \mathcal{D}$ で解析的, $(x_1, x_2) \in \mathcal{D} \cap \mathbb{R}^2$ で実, $h(x_1+1, x_2+1) = h(x_1, x_2)$ を満たす.
  また, ある定数 $\kappa > 0, M > 0$ により,

$$
\min_{\mathcal{D}} |h_{12}| > \kappa, \tag{3.1}
$$

$$
|h|_{C^3(\mathcal{D})} < M. \tag{3.2}
$$

- u_0 に関する仮定:
  ある $r \in (0,1)$ に対して, $u_0(\theta) - \theta \in W_r$ である.
  さらに, ある (十分大きな)$N_0 > 0$ に対し,

$$
(u_0, u_0^+) \in \mathcal{D}_R \quad (|\mathrm{Im}\theta| < r), \tag{3.3}
$$

$$
|(u_0)_\theta|_r < N_0, \quad |(u_0)_\theta^{-1}|_r < N_0. \tag{3.4}
$$

Theorem 1 (ツイスト定理)**.** ω がディオファントス数, つまり, ある $K>0, \sigma>0$ が存在して, 任意の $p,q \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$ について

$$|\omega - \frac{p}{q}| \geq \frac{K}{q^{2+\sigma}} \tag{3.5}$$

であるとする.

h, u_0 が上の仮定を満たすとする. このとき, ある定数 $\delta = \delta(r,h,M,N_0,K,\sigma,\kappa)$ が存在し, もし $|E(u_0)|_r < \delta$ であればラグランジュ方程式 $E[u] \equiv 0$ の解 u で, u_0 に近く, $u(\theta)-\theta \in W_{r/2}$ を満たし, $u(\theta)-\theta$ の $\theta \in \mathbb{S}^1$ での平均値が 0 になるものがただ一つ存在する.

Example 2. 摂動を受けたツイスト写像

$$x_2 = x_1 + y_1 + \epsilon f(x_1, y_1, \epsilon)$$
$$y_2 = y_1 + \epsilon g(x_1, y_1, \epsilon)$$

が領域 $\mathcal{D} := \{(x_1,x_2) \in \mathbb{C}^2 | a < \mathrm{Re}(x_1 - x_2) < b,\ |\mathrm{Im} x_1| < 1,\ |\mathrm{Im} x_2| < 1\}$ 上で定義された母関数 $h(x_1,x_2) = \frac{1}{2}(x_1-x_2)^2 + \epsilon H(x_1,x_2,\epsilon)$ を持つとする. ($|H|_{C^3(\mathcal{D})}$ が有界まで要りそう.)

ディオファントス数 $\omega \in (a,b)$ と $u_0(\theta) = \theta$ を選ぶ. いま, ϵ を十分小さく取れば, $|h_{12}| = |-1+\epsilon H_{12}| > 1 - O(\epsilon)$ より (3.1) は ok. $|h_i| \leq |x_1 - x_2| + \epsilon |H_1| < b + 2 + O(\epsilon), |h_{ii}| = |1 + \epsilon H_{ii}| < 1 + O(\epsilon), |h_{ijk}| < \epsilon |H_{ijk}| < O(\epsilon)$ より (3.2) も ok. $R = \min\left\{\frac{1}{2\sqrt{2}}(b-\omega), \frac{1}{2\sqrt{2}}(\omega - a), r\right\}$ として, $(u_0, u_0^+) = (\theta, \theta+\omega) \in D_R$ ($|\mathrm{Im}\theta| < r$) より (3.3) は ok. $u_0 = (u_0)^{-1} = \theta$ なので $N_0 = \max\{-a, b\} + r$ とすれば (3.4) も ok.

以上から, ツイスト定理が使えて, 不変曲線の存在が証明できる.

4 homological equation

ツイスト定理の証明のカギは, 初期解 u_0 から始めて"修正ニュートン法"によって $E[u]$ の零点を探すことである. $\tilde{u} = u+v$ として, $E[\tilde{u}]$ は

$$E[u+v] = E[u] + E'[u]v + Q(v)$$

と書ける. ここで, Q は剰余項であり, $E'[u]v$ はガトー微分である. 具体的に計算すると, $h_{ij}^- = h_{ij}(u^-, u)$ として,

$$E'[u]v = (h_{11} + h_{22}^-)v + h_{12}v^+ + h_{12}^- v^-$$

と書き下すことができる.

ふつうのニュートン法では, v に関する方程式

$$E'[u]v = -E[u] \tag{4.1}$$

の解として v を定める.

今回は, (4.1) の代わりに, 両辺に u_θ を掛けて左辺から $v\frac{d}{d\theta}E[u] = vE'[u]u_\theta$ を引いた方程式

$$u_\theta E'[u]v - vE'[u]u_\theta = -u_\theta E[u] \tag{4.2}$$

の解として v を与える. もちろんこれは (4.1) とは等価ではない式だが, この場合の更新則 $u \mapsto u+v$ でも $E[u]$ の零点へ収束することを後に示す. (4.2) のままだと扱いにくいので, 少し変形する. 左辺が

$$u_\theta E'[u]v - vE'[u]u_\theta = h_{12}(u_\theta v^+ - u_\theta^+ v) + h_{12}^-(u_\theta v^- - u_\theta^- v)$$

であることに注意して, 新変数 $w := \frac{v}{u_\theta}$ を導入すれば,

$$h_{12}(u_\theta v^+ - u_\theta^+ v) + h_{12}^-(u_\theta v^- - u_\theta^- v) = h_{12}u_\theta u_\theta^+(w^+ - w) - h_{12}^- u_\theta^- u_\theta (w - w^-) = \nabla^*(h_{12}u_\theta u_\theta^+ \nabla w)$$

となる. ただし,

$$\nabla f(\theta) := f(\theta+\omega) - f(\theta), \quad \nabla^* f(\theta) := f(\theta) - f(\theta - \omega)$$

と表記した.

まとめると, w に関する関数方程式

$$\nabla^*(h_{12}u_\theta u_\theta^+ \nabla w) = -u_\theta E[u] \tag{4.3}$$

の解として w を選び, 更新則

$$\tilde{u} = u + v, \quad v = u_\theta w$$

を考える. 初期解 u_0 から始めて最終的に u が $E[u]$ の零点に収束することを示す.

5　homological equation の求解

本節では, (4.3) の解の評価を目標とする.

u を既知, w を未知の関数とする. また, ω はディオファントス条件 (3.5) を満たすものとする.

Lemma 1. $u(\theta)$ が条件

$$(u, u^+) \in \mathcal{D}_R \quad \mathrm{for}(|\mathrm{Im}\theta| < r)$$

および

$$|u_\theta|_r < N, \quad |u_\theta^{-1}|_r < N \quad \mathrm{for}(|\mathrm{Im}\theta| < r)$$

を満たすとする.

このとき, (4.3) の解 $w \in W_\rho$ が任意の $0 < \rho < r$ に対して存在し, $[w] := \int_0^1 w d\theta = 0$(平均がゼロ) の下で一意である. さらに, 対応する $v := u_\theta w$ について, 以下の不等式評価が得られる:

$$|v|_\rho \le \frac{c}{(r-\rho)^{2\tau}}|E(u)|_r,\ |v_\theta|_\rho \le \frac{c}{(r-\rho)^{2\tau+1}}|E(u)|_r.$$

ただし, $c = c(M, N, K, \sigma)$ であり, $\tau = 2 + \sigma$ である.

この Lemma 1 を示すには, 次の Lemma を用いればいい.

Lemma 2. Ω がディオファントス条件 (3.5) を満たし, かつ $g \in W_r$ の平均値について $[g] = 0$ が成り立つとする.

このとき, 差分方程式

$$\nabla\psi = g \tag{5.1}$$

は任意の $0 < r' < r$ に対して解 $\psi \in W_{r'}$ を持ち, これは $[\psi] = 0$ の下で一意である. さらに, ψ について次の不等式評価が得られる:

$$|\psi|_{r'} < c(K, \sigma)\frac{|g|_r}{(r-r')^\tau}. \tag{5.2}$$

ただし, $\tau = 2 + \sigma$ である.

Proof of Lemma 2. フーリエ級数展開により, $g = \sum g_n e^{2\pi i\theta}, \psi = \sum \psi_n e^{2\pi i\theta}$ と表示する.
$(\nabla\psi)(\theta) := \psi(\theta+\omega) - \psi(\theta) = \sum \psi_n(e^{2\pi i n\omega} - 1)e^{2\pi i\theta}$ であるから, (5.1) の解は

$$\psi_n = \frac{g_n}{e^{2\pi i\omega} - 1},\ \psi_0 = 0 \tag{5.3}$$

と書ける. (後半は $[\psi] = 0$ の帰結.)

この時点ではまだ解が (形式的に) フーリエ級数で書けると述べたまでであるから, (5.3) が定義可能であること (特に $e^{2\pi i\omega} - 1 \neq 0$ であること) と級数 $\sum \psi_n e^{2\pi n\theta}$ が W_r' 上で絶対収束することを示さないといけない.

ディオファントス条件 (3.5) から, 任意の $n, m \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$ について,

$$|n\omega - m| \ge \frac{K}{|n|^{1+\sigma}}$$

であるから, 特に $m := \arg\min_{m\in\mathbb{Z}\backslash\{0\}} |n\omega - m|$ とすれば, $|x| \le 1/2$ で $|\sin\pi x| \ge 2|x|$ なので,

$$|e^{2\pi i\omega} - 1| = |e^{\pi i\omega}||e^{\pi i\omega} - e^{-\pi i\omega}| = 2|\sin n\pi\omega| = 2|\sin\pi(n\omega - m)| \ge 4|n\omega - m| > \frac{c(K)}{|n|^{1+\sigma}}$$

したがって

$$|e^{2\pi i\omega} - 1| > \frac{c(K)}{|n|^{1+\sigma}} \tag{5.4}$$

であり, $e^{2\pi i\omega} - 1 \neq 0$ より (5.3) は定義できる.

また, $g \in W_r$ であることと $|g_n||W_r| = \left|\int_{W_r} g\cdot e^{-2\pi i n\theta}d\theta\right| \le |W_r||g|_r e^{-2\pi n|r|}$ から,

$$|g_n| \le |g|_r e^{-2\pi|n|r} \tag{5.5}$$

が成り立つ. (5.4), (5.5) を用いて (5.3) を評価すれば, $0 < r' < \forall s < r$ に対して,

$$|\psi_n| \le |g|_r c(K)^{-1} e^{-2\pi|n|r}|n|^{1+\sigma} = |g|_r c(K)^{-1} e^{-2\pi|n|s} e^{-2\pi|n|(r-s)}|n|^{1+\sigma}.$$

ここで, $x>0$ に対して $xe^{-x}\le e^{-1}$ であるが, $x=\frac{a|n|}{b}$ とすれば $e^{-a|n|}|n|^b\le e^{-b}(b/a)^b$ であるので, $a=2\pi(r-s), b=1+\sigma$ として, $c_1(K,\sigma):=c(K)^{-1}e^{-(1+\sigma)}((1+\sigma)/(2\pi))^{1+\sigma}$ とすれば,

$$|\psi_n|\le c_1(K,\sigma)|g|_r\frac{1}{(r-s)^{1+\sigma}}e^{-2\pi|n|s}.$$

したがって,

$$\sum|\psi_n|e^{2\pi|n|r'}\le c_1(K,\sigma)|g|_r\frac{1}{(r-s)^{1+\sigma}}\sum e^{-2\pi|n|(s-r')}=\frac{2c_1(K,\sigma)|g|_r}{(r-s)^{1+\sigma}}(1-e^{-2\pi(s-r')})^{-1}.$$

であり, フーリエ級数 $\sum\psi_n e^{2\pi i\theta}$ は $W_{r'}$ の上で絶対収束し, 以上をもって (5.1) の解の存在が保証される. また, $0<q<1/2$ で $(1-e^{-2\pi q})^{-1}<q^{-1}$ となることを用いると, $(s-r')<1/2$ のときに

$$|\psi|_{r'}\le\sum|\psi_n|e^{2\pi|n|r'}\le\frac{2c_1(K,\sigma)|g|_r}{(r-s)^{1+\sigma}(s-r')}$$

となり, 特に $s=(r+r')/2$ とすれば (これは, $r<1$ から $s-r'=(r-r')/2<1/2$ であるため許容される), 不等式評価 (5.2) を得る. □

Proof of Lemma 1.
TO DO: ツイスト定理の証明をまとめる □

参考文献

[1] M. Levi and J. Moser, A Lagrangian proof of the invariant curve theorem for twist mappings, Smooth ergodic theory and its applications (Seattle, WA, 1999), Proc. Sympos. Pure Math. **69**, 733-746, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2001