Moser のツイストの定理

まるげり

2025 年 10 月 2 日

Levi-Moser[1] のノート. 面積保存ツイスト写像の母関数に解析性を課すが, ツイスト定理の証明としては一番読みやすいと思う.

1 背景: 面積保存ツイスト写像, 母関数

アニュラス $\mathbb{A} = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$ 上の面積保存ツイスト写像 $\varphi(x_1, y_1) = (x_2, y_2)$ とは, 面積保存性 $\varphi^*(dy_2 \wedge dx_2) = dy_1 \wedge dx_1$ とツイスト性 $\dfrac{\partial x_2}{\partial y_1} > 0$ を持つものである.

記号の濫用で, $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$ の普遍被覆 $\mathbb{R}^2$ 上の元もまた (x, y) のように書き, また φ の $\mathbb{R}^2$ への持ち上げも φ と書くことにすると, 面積保存ツイスト写像 φ が特に $\mathbb{A}$ 上の完全シンプレクティック写像 ($\varphi^*(ydx) - ydx$ が $\mathbb{A}$ 上の完全形式になる) とき, φ の母関数と呼ばれる, 次の性質を満たす関数 $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ が存在する:
h_1, h_2 をそれぞれ h の第 1 成分, 第 2 成分での偏微分としたときに, $h(x_1+1, x_2+1) = h(x_1, x_2), h_{12} < 0$ であり, さらに

$$\begin{cases} h_1(x_1, x_2) = -y_1 \\ h_2(x_1, x_2) = y_2 \end{cases} \iff \varphi(x_1, y_1) = (x_2, y_2)$$

となる.
(たぶん, $\mathbb{R}^2$ で考える以上はポアンカレの補題から閉形式 $\varphi^*(ydx) - ydx$ が完全形式になることが保証されるけど, アニュラス $\mathbb{A}$ 上でもなお h が意味を持つためには別で $\mathbb{A}$ 上で完全形式になることを保証しないといけない... のだと思う.)

特に φ が母関数 h を持つなら, (x_1, y_1) が与えられた下で, $\{(x_n, y_n)\}_n$ が軌道 $\{\varphi^n(x_1, y_1)\}_n$ になることと

$$h_2(x_{i-1}, x_i) + h_1(x_i, x_{i+1}) = 0,\ y_i = -h_2(x_i, x_{i+1}) \quad (\forall i \in \mathbb{Z})$$

が同値であることがわかる.

2 不変曲線と差分方程式への簡約化

面積保存ツイスト写像 φ の不変曲線 $\gamma \subset \mathbb{A}$ とは, φ の不変集合であって $\mathbb{R}^2$ 上への持ち上げを $w(\theta) = (u(\theta), v(\theta))$ としたときに $u(\theta) - \theta$ および $v(\theta)$ が周期 1 の周期関数となるものである. これは, $u(\theta + 1) - (\theta + 1) = u(\theta) - \theta$ より $u(\theta + 1) - u(\theta) = 1$ より, アニュラス $\mathbb{A}$ を x 方向に一周して戻ってくる曲線であることを意味している.

さて, ある回転数 ω についての不変曲線 γ, つまり

$$\varphi(w(\theta)) = w(\theta + \omega)$$

を見つけたい. これはラグランジュ方程式と呼ばれることもある次の 2 階差分方程式

$$E[u](\theta) = h_1(u(\theta), u(\theta + \omega)) + h_2(u(\theta - \omega), u(\theta)) \equiv 0 \tag{2.1}$$

が解ければ, $v(\theta) = -h_1(u(\theta), u(\theta+\omega))$ とおくことで不変曲線を見つけることができる. 以下, $u^+(\theta) = u(\theta+\omega), u^-(\theta) = u(\theta - \omega)$ とする.

Remark 1. ラグランジュ方程式は, 変分問題

$$\delta \int_0^1 h(u(\theta), u(\theta + \omega)) d\theta = 0$$

についてのオイラー - ラグランジュ方程式になっている. (パーシバルの変分原理).

実際, $A(u) := \int_0^1 h(u(\theta), u(\theta+\omega))d\theta$ としたときに

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}A(u+tv)\Big|_{t=0} &= \int_0^1 h_1(u,u^+)v + h_2(u,u^+)v^+ d\theta \\ &= \int_0^1 h_1(u,u^+)v + h_2(u^-,u)v d\theta \\ &= \int_0^1 E[u]v d\theta \end{aligned}$$

であるから, 任意の v についてこれがゼロになるのは $E[u] \equiv 0$ のときである.

Remark 2. あとで使うので, $u_\theta E[u]$ の平均値 $\int_0^1 (u_\theta E[u])(\theta)d\theta = 0$ を計算しておく.

$$\frac{\partial h}{\partial \theta}(u,u^+) = u_\theta(h_1(u,u^+) + h_2(u,u^+))$$

より, $\nabla f := f(\theta+\omega) - f(\theta)$ と表記すれば,

$$\begin{aligned} \frac{\partial h}{\partial \theta}(u,u^+) - u_\theta h_2(u^-,u) &= u_\theta(h_1(u,u^+) + h_2(u,u^+) - h_2(u,u^+) + h_2(u^-,u)) \\ &= u_\theta(h_1(u,u^+) + h_2(u^-,u)) \\ &= u_\theta E[u] \end{aligned}$$

したがって,

$$u_\theta E[u] = \frac{\partial h}{\partial \theta}(u,u^+) - u_\theta h_2(u^-,u)$$

と表すことができる. ここで, $h(x_1+1, x_2+1) = h(x_1,x_2)$ であることと, $f(\theta)$ が周期 1 の周期関数であれば $\int_0^1 (\nabla f)(\theta)d\theta = \int_0^1 (f(\theta+\omega) - f(\theta))d\theta = 0$ であることから, 結局

$$\int_0^1 (u_\theta E[u])(\theta)d\theta = 0$$

である.

Example 1 (standard map)**.** $S(x)$ を周期関数として, $\varphi(x_1,y_1) = (x_2,y_2)$ を

$$\begin{aligned} x_2 &= x_1 + y_1 + S'(x_1), \\ y_2 &= y_1 + S'(x_1) \end{aligned}$$

で定める. 母関数 h は

$$h(x_1,x_2) = \frac{1}{2}(x_1 - x_2)^2 + S(x_1)$$

である. これに対するラグランジュ方程式 (2.1) は

$$u(\theta+\omega) - 2u(\theta) + u(\theta-\omega) = S'(u(\theta))$$

と書ける.

3 ツイスト定理

ツイスト定理は, ω がディオファントス数であるときに, $E[u_0] \approx 0$ なる $u_0(\theta)$ から始めて $E[u] \equiv 0$ となる $u(\theta)$ の存在を示す定理である.

$$W_r := \left\{ f : \mathbb{C} \to \mathbb{C} \,\middle|\, f : \text{実解析的},\ f(\theta+1) = f(\theta),\ |f|_r := \sup_{|\mathrm{Im}\theta| \le r} |f(\theta)| < \infty \right\}$$

する.

複素領域 $\mathcal{D} \subset \mathbb{C}^2$ を考え, その縁を距離 R ぶんだけ削った領域を $\mathcal{D}_R := \{z \in \mathcal{D} | \sup_{y \in \partial\mathcal{D}} |y - z| > R\}$ と書くことにする.

- h に関する仮定:
  $h(x_1, x_2)$ が $(x_1, x_2) \in \mathcal{D}$ で解析的, $(x_1, x_2) \in \mathcal{D} \cap \mathbb{R}^2$ で実, $h(x_1+1, x_2+1) = h(x_1, x_2)$ を満たす.
  また, ある定数 $\kappa > 0, M > 0$ により,

$$\min_{\mathcal{D}} |h_{12}| > \kappa, \tag{3.1}$$

$$|h|_{C^3(\mathcal{D})} < M. \tag{3.2}$$

- u_0 に関する仮定:
  ある $r \in (0,1)$ に対して, $u_0(\theta) - \theta \in W_r$ である.
  さらに, ある (十分大きな)$N_0 > 1$ に対し,

$$(u_0, u_0^+) \in \mathcal{D}_R \quad (|\mathrm{Im}\theta| < r), \tag{3.3}$$

$$|(u_0)_\theta|_r < N_0, \quad |(u_0)_\theta^{-1}|_r < N_0. \tag{3.4}$$

Theorem 1 (ツイスト定理)**.** ω がディオファントス数, つまり, ある $K > 0, \sigma > 0$ が存在して, 任意の $p, q \in \mathbb{Z} \backslash \{0\}$ について

$$|\omega - \frac{p}{q}| \geq \frac{K}{q^{2+\sigma}} \tag{3.5}$$

であるとする.
h, u_0 が上の仮定を満たすとする. このとき, ある定数 $\delta = \delta(r, h, M, N_0, K, \sigma, \kappa)$ が存在し, もし $|E(u_0)|_r < \delta$ であればラグランジュ方程式 $E[u] \equiv 0$ の解 u で, u_0 に近く, $u(\theta) - \theta \in W_{r/2}$ を満たし, $u(\theta) - \theta$ の $\theta \in \mathbb{S}^1$ での平均値が 0 になるものがただ一つ存在する.

Example 2. 摂動を受けたツイスト写像

$$x_2 = x_1 + y_1 + \epsilon f(x_1, y_1, \epsilon)$$
$$y_2 = y_1 + \epsilon g(x_1, y_1, \epsilon)$$

が領域 $\mathcal{D} := \{(x_1, x_2) \in \mathbb{C}^2 | a < \mathrm{Re}(x_1 - x_2) < b,\ |\mathrm{Im} x_1| < 1,\ |\mathrm{Im} x_2| < 1\}$ 上で定義された母関数 $h(x_1, x_2) = \frac{1}{2}(x_1 - x_2)^2 + \epsilon H(x_1, x_2, \epsilon)$ を持つとする. ($|H|_{C^3(\mathcal{D})}$ が有界まで要りそう.)
ディオファントス数 $\omega \in (a, b)$ と $u_0(\theta) = \theta$ を選ぶ. いま, ϵ を十分小さく取れば, $|h_{12}| = |-1 + \epsilon H_{12}| > 1 - O(\epsilon)$ より (3.1) は ok. $|h_i| \leq |x_1 - x_2| + \epsilon |H_1| < b + 2 + O(\epsilon), |h_{ii}| = |1 + \epsilon H_{ii}| < 1 + O(\epsilon), |h_{ijk}| < \epsilon |H_{ijk}| < O(\epsilon)$ より (3.2) も ok. $R = \min\left\{\frac{1}{2\sqrt{2}}(b - \omega), \frac{1}{2\sqrt{2}}(\omega - a), r\right\}$ として, $(u_0, u_0^+) = (\theta, \theta + \omega) \in D_R$ ($|\mathrm{Im}\theta| < r$) より (3.3) は ok. $u_0 = (u_0)^{-1} = \theta$ なので $N_0 = \max\{-a, b\} + r$ とすれば (3.4) も ok.
以上から, ツイスト定理が使えて, 不変曲線の存在が証明できる.

4 homological equation

ツイスト定理の証明のカギは, 初期解 u_0 から始めて"修正ニュートン法"によって $E[u]$ の零点を探すことである. $\tilde{u} = u + v$ として, $E[\tilde{u}]$ は

$$E[u + v] = E[u] + E'[u]v + Q(v)$$

と書ける. ここで, Q は剰余項であり, $E'[u]v$ はガトー微分である. 具体的に計算すると, $h_{ij}^- = h_{ij}(u^-, u)$ として,

$$E'[u]v = (h_{11} + h_{22}^-)v + h_{12}v^+ + h_{12}^- v^-$$

と書き下すことができる.
ふつうのニュートン法では, v に関する方程式

$$E'[u]v = -E[u] \tag{4.1}$$

の解として v を定める.
今回は, (4.1) の代わりに, 両辺に u_θ を掛けて左辺から $v \frac{d}{d\theta} E[u] = vE'[u]u_\theta$ を引いた方程式

$$u_\theta E'[u]v - vE'[u]u_\theta = -u_\theta E[u] \tag{4.2}$$

の解として v を与える. もちろんこれは (4.1) とは等価ではない式だが, この場合の更新則 $u \mapsto u+v$ でも $E[u]$ の零点へ収束することを後に示す. (4.2) のままだと扱いにくいので, 少し変形する. 左辺が

$$u_\theta E'[u]v - vE'[u]u_\theta = h_{12}(u_\theta v^+ - u_\theta^+ v) + h_{12}^-(u_\theta v^- - u_\theta^- v)$$

であることに注意して, 新変数 $w := \frac{v}{u_\theta}$ を導入すれば,

$$h_{12}(u_\theta v^+ - u_\theta^+ v) + h_{12}^-(u_\theta v^- - u_\theta^- v) = h_{12}u_\theta u_\theta^+(w^+ - w) - h_{12}^- u_\theta^- u_\theta(w - w^-) = \nabla^*(h_{12}u_\theta u_\theta^+ \nabla w)$$

となる. ただし,

$$\nabla f(\theta) := f(\theta+\omega) - f(\theta), \quad \nabla^* f(\theta) := f(\theta) - f(\theta-\omega)$$

と表記した.

まとめると, w に関する関数方程式

$$\nabla^*(h_{12}u_\theta u_\theta^+ \nabla w) = -u_\theta E[u] \tag{4.3}$$

の解として w を選び, 更新則

$$\tilde{u} = u + v, \quad v = u_\theta w$$

を考える. 初期解 u_0 から始めて最終的に u が $E[u]$ の零点に収束することを示す.

5 homological equation の求解

本節では, (4.3) の解の評価を目標とする.

u を既知, w を未知の関数とする. また, ω はディオファントス条件 (3.5) を満たすものとする.

Lemma 1. $u(\theta)$ が条件

$$(u, u^+) \in \mathcal{D}_R \quad \mathrm{for}(|\mathrm{Im}\theta| < r) \tag{5.1}$$

および ある $N > 1$ で

$$|u_\theta|_r < N, \quad |u_\theta^{-1}|_r < N \quad \mathrm{for}(|\mathrm{Im}\theta| < r) \tag{5.2}$$

を満たすとする.

このとき, (4.3) の解 $w \in W_\rho$ が任意の $0 < \rho < r$ に対して存在し, $[w] := \displaystyle\int_0^1 w d\theta = 0$(平均がゼロ) の下で一意である. さらに, 対応する $v := u_\theta w$ について, 以下の不等式評価が得られる:

$$|v|_\rho \le \frac{c}{(r-\rho)^{2\tau}}|E(u)|_r, \ |v_\theta|_\rho \le \frac{c}{(r-\rho)^{2\tau+1}}|E(u)|_r. \tag{5.3}$$

ただし, $c = c(M, N, K, \sigma)$ であり, $\tau = 2 + \sigma$ である.

この Lemma 1 を示すには, 次の Lemma を用いればいい.

Lemma 2. Ω がディオファントス条件 (3.5) を満たし, かつ $g \in W_r$ の平均値について $[g] = 0$ が成り立つとする.

このとき, 差分方程式

$$\nabla\psi = g \tag{5.4}$$

は任意の $0 < r' < r$ に対して解 $\psi \in W_{r'}$ を持ち, これは $[\psi] = 0$ の下で一意である. さらに, ψ について次の不等式評価が得られる:

$$|\psi|_{r'} < c(K, \sigma)\frac{|g|_r}{(r-r')^\tau}. \tag{5.5}$$

ただし, $\tau = 2 + \sigma$ である.

Proof of Lemma 2. フーリエ級数展開により, $g = \sum g_n e^{2\pi i\theta}, \psi = \sum \psi_n e^{2\pi i\theta}$ と表示する.
$(\nabla\psi)(\theta) := \psi(\theta+\omega) - \psi(\theta) = \sum \psi_n(e^{2\pi i n\omega} - 1)e^{2\pi i\theta}$ であるから, (5.4) の解は

$$\psi_n = \frac{g_n}{e^{2\pi i\omega} - 1}, \ \psi_0 = 0 \tag{5.6}$$

と書ける. (後半は $[\psi] = 0$ の帰結.)

この時点ではまだ解が (形式的に) フーリエ級数で書けると述べたまでであるから, (5.6) が定義可能であること (特に $e^{2\pi i\omega}-1\neq 0$ であること) と級数 $\sum \psi_n e^{2\pi n\theta}$ が W'_r 上で絶対収束することを示さないといけない.

ディオファントス条件 (3.5) から, 任意の $n,m\in\mathbb{Z}\backslash\{0\}$ について,

$$|n\omega-m|\geq\frac{K}{|n|^{1+\sigma}}$$

であるから, 特に $m:=\arg\min_{m\in\mathbb{Z}\backslash\{0\}}|n\omega-m|$ とすれば, $|x|\leq 1/2$ で $|\sin\pi x|\geq 2|x|$ なので,

$$|e^{2\pi i\omega}-1|=|e^{\pi i\omega}||e^{\pi i\omega}-e^{-\pi i\omega}|=2|\sin n\pi\omega|=2|\sin\pi(n\omega-m)|\geq 4|n\omega-m|>\frac{c(K)}{|n|^{1+\sigma}}$$

したがって

$$|e^{2\pi i\omega}-1|>\frac{c(K)}{|n|^{1+\sigma}} \tag{5.7}$$

であり, $e^{2\pi i\omega}-1\neq 0$ より (5.6) は定義できる.

また, $g\in W_r$ であることと $|g_n||W_r|=\left|\int_{W_r}g\cdot e^{-2\pi in\theta}d\theta\right|\leq|W_r||g|_r e^{-2\pi n|r|}$ から,

$$|g_n|\leq|g|_r e^{-2\pi|n|r} \tag{5.8}$$

が成り立つ. (5.7), (5.8) を用いて (5.6) を評価すれば, $0<r'<\forall s<r$ に対して,

$$|\psi_n|\leq|g|_r c(K)^{-1}e^{-2\pi|n|r}|n|^{1+\sigma}=|g|_r c(K)^{-1}e^{-2\pi|n|s}e^{-2\pi|n|(r-s)}|n|^{1+\sigma}.$$

ここで, $x>0$ に対して $xe^{-x}\leq e^{-1}$ であるが, $x=\frac{a|n|}{b}$ とすれば $e^{-a|n|}|n|^b\leq e^{-b}(b/a)^b$ であるので, $a=2\pi(r-s), b=1+\sigma$ として, $c_1(K,\sigma):=c(K)^{-1}e^{-(1+\sigma)}((1+\sigma)/(2\pi))^{1+\sigma}$ とすれば,

$$|\psi_n|\leq c_1(K,\sigma)|g|_r\frac{1}{(r-s)^{1+\sigma}}e^{-2\pi|n|s}.$$

したがって,

$$\sum|\psi_n|e^{2\pi|n|r'}\leq c_1(K,\sigma)|g|_r\frac{1}{(r-s)^{1+\sigma}}\sum e^{-2\pi|n|(s-r')}=\frac{2c_1(K,\sigma)|g|_r}{(r-s)^{1+\sigma}}(1-e^{-2\pi(s-r')})^{-1}.$$

であり, フーリエ級数 $\sum\psi_n e^{2\pi i\theta}$ は $W_{r'}$ の上で絶対収束し, 以上をもって (5.4) の解の存在が保証される. また, $0<q<1/2$ で $(1-e^{-2\pi q})^{-1}<q^{-1}$ となることを用いると, $(s-r')<1/2$ のときに

$$|\psi|_{r'}\leq\sum|\psi_n|e^{2\pi|n|r'}\leq\frac{2c_1(K,\sigma)|g|_r}{(r-s)^{1+\sigma}(s-r')}$$

となり, 特に $s=(r+r')/2$ とすれば (これは, $r<1$ から $s-r'=(r-r')/2<1/2$ であるため許容される), 不等式評価 (5.5) を得る. □

Proof of Lemma 1. $p=(h_{12}u_\theta u_\theta^+)^{-1}$ とし, $g=-u_\theta E(u)$ とする. μ を適当な定数として, (4.3) を書き直せば,

$$\begin{aligned}\nabla^*\psi&=g\\ p^{-1}\nabla w&=\psi+\mu\end{aligned} \tag{5.9}$$

と書ける.($\nabla^*\mu=0$ に注意.)

$[u_\theta E(u)]=0$ を思い出せば, (5.9) の上の式に Lemma 2 を適用できて, 平均がゼロの唯一解 ψ で任意の $0<r'<r$ で

$$|\psi|_{r'}\leq\frac{c(K,\sigma)}{(r-r')^\tau}|g|_r \tag{5.10}$$

となるものが存在する.

(5.9) の下の式から, w は $\nabla w=p(\psi+\mu)$ の解である. この式に Lemma2 を適用するためには右辺の平均がゼロであるように μ を選ぶ必要があるが,

$$\mu:=-\frac{\int p\psi d\theta}{\int pd\theta} \tag{5.11}$$

とすれば

$$\int p(\psi+\mu)d\theta = \int p\psi d\theta + \mu \int p d\theta = 0$$

が満たされる．仮定から $\min|h_{12}| > \kappa, |h|_{C^2} < M, |u_\theta| < N, |u_\theta^{-1}| < N$ であるから，$M^{-1}N^{-2} < |p| = |h_{12}|^{-1}|u_\theta|^{-1}|u_\theta^+|^{-1} < \kappa^{-1}N^2$ および (5.10) から，

$$|\mu| = \left|\int p\psi d\theta\right| \cdot \left|\int p d\theta\right|^{-1} < \kappa^{-1}MN^4 \frac{c(K,\sigma)}{(r-r')^\tau}|g|_r$$

であるから (5.11) は定義可能である．以上から，$\nabla w = p(\psi+\mu)$ に Lemma2 を適用することで，平均がゼロになる唯一解 w が存在することがわかり，この解は任意の $0<\rho<r'$ に対し，

$$|w|_\rho \le c_1 \frac{|p(\psi+\mu)|_{r'}}{(r'-\rho)^\tau} \le \frac{c_2}{(r-r')^\tau(r'-\rho)^\tau}|g|_r$$

となる．(2 つ目の不等式では $|p|, |\mu|, |\psi|$ の評価を用いた.)

特に，$\rho = 2r'-r$ と選べば (実際，$r'-\rho = r-r' > 0$ より可能)，$r' = (r+\rho)/2$ および $|g| = |u_\theta||E(u)| < N|E(u)|$ より，

$$|w|_\rho \le \frac{c_3(M,N,K,\kappa,\sigma)}{(r-\rho)^{2\tau}}|E(u)|_r \tag{5.12}$$

となる．$v := u_\theta w$ なので，$|u_\theta| < N$ より (5.3) の第一式が成立.

第二式は，コーシーの積分定理 (あるいは，グルサの定理) を用いて導出する．任意の $\rho' \in (\rho, r)$ について，上の議論を再度繰り返すことで，$w \in W_{\rho'}$，つまり $v = u_\theta w \in W_{\rho'}$ としてもよい．(Lemma 2 における解の一意性と一致の定理から，これは $w \in W_\rho$ からの解析接続である.)

$|\mathrm{Im}\theta| < \rho'$ に関するコーシーの積分定理 (あるいは，グルサの定理) から，$|\mathrm{Im}\theta| < \rho$ となる θ について，θ を囲む任意の閉曲線 $C' \in \{|\mathrm{Im}\theta| < \rho'\}$ で

$$|v_\theta(\theta)| \le \frac{1}{2\pi}\int_{C'} \frac{|v(\varphi)|}{|\varphi-\theta|^2}d\varphi \le \frac{|v|_{\rho'}}{2\pi}\int_{C'} \frac{1}{|\varphi-\theta|^2}d\varphi$$

となる．(左辺の θ の属する複素領域 (幅 2ρ の帯) より右辺で考える複素領域 (幅 $2\rho'$ の帯) を広くするのがポイント！)

特に，C' を中心 θ，半径 R の円とすれば，

$$|v_\theta(\theta)| \le \frac{|v|_{\rho'}}{2\pi} \cdot 2\pi R \cdot R^{-2} = \frac{|v|_{\rho'}}{R}$$

である．最も評価が良くなるのは，R を $\{|\mathrm{Im}\theta| < \rho'\}$ の中でできるだけ大きく取った時，つまり $R = \rho' - s$ のときであるが，$s < \rho$ だったので，

$$|v_\theta(\theta)| \le \frac{|v|_{\rho'}}{\rho'-s} \le \frac{|v|_{\rho'}}{\rho'-\rho}.$$

したがって，$|v_\theta|_\rho \le \dfrac{|v|_{\rho'}}{\rho'-\rho}$ である．

一方，(5.3) の第一式から，

$$|v_\theta|_\rho \le \frac{c'}{(r-\rho')^{2\tau}(\rho'-\rho)}|E(u)|_r$$

であるが，特に $\rho' = (r+\rho)/2$ と選べば，

$$|v_\theta|_\rho \le \frac{2^{2\tau+1}c'}{(r-\rho)^{2\tau+1}}|E(u)|_r$$

となる．したがって，あらためて $c = 2^{2\tau+1}c'$ とすれば，(5.3) の第二式が導ける． □

6 $E(u)$ の 2 次収束性

Lemma 1 によって得られる $v = u_\theta w$ を使って，更新則 $\tilde{u} = u + v$ で暫定解を更新する．

Lemma 3. u を Lemma 1 を満たすものとし，$\tilde{u} = u + v$ がある $\rho \in (0, r)$ について条件

$$(\tilde{u}, \tilde{u}^+) \in \mathcal{D}_R \quad \mathrm{for}(|\mathrm{Im}\theta| < \rho)$$

を満たすとする．このとき，

$$|E(\tilde{u})|_\rho \le \frac{c_6}{(r-\rho)^{4\tau}}|E(u)|_r^2 \tag{6.1}$$

が成り立つ．ただし，$c_6 = c_6(M,N,K,\kappa,\sigma)$.

Proof. 関数空間 W_ρ におけるテイラーの定理から, 剰余項を Q とおけば,

$$|E(\tilde{u})|_\rho = |E(u+v)|_\rho = |E(u) + E'(u)v + Q|_\rho$$

だった. (4.2) から, $u_\theta E(u) + u_\theta E'(u)v = vE'(u)u_\theta$ であるから, 両辺を u_θ で割れば ($|u_\theta^{-1}| < N$ より $u_\theta \neq 0$),

$$E(u) + E'(u)v = E'(u)u_\theta = w\frac{d}{d\theta}E(u).$$

$E(u) \in W_r$ なので, コーシーの積分定理から $\left|\frac{d}{d\theta}E(u)\right|_\rho \leq c\frac{|E(u)|_r}{r-\rho}$ であるから, (5.12) と合わせて,

$$|E(u) + E'(u)v|_\rho \leq c_4\frac{|E(u)|_r^2}{(r-\rho)^{2\tau+1}} < c_4\frac{|E(u)|_r^2}{(r-\rho)^{4\tau}}.$$

一方で, Q はある $t' \in (0,1)$ について

$$Q = \frac{1}{2}\frac{d^2}{dt^2}E(u+t'v)$$

だが, $E(u) = h_1(u, u^+) + h_2(u^-, u)$ に入れて実際計算すると,

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}E(u+tv) &= (h_{11}(u+tv, u^+ + tv^+) + h_{22}(u^- + tv^-, u+tv))v \\
&\quad + h_{12}(u+tv, u^+ + tv^+)v^+ + h_{12}(u^- + tv^-, u+tv)v^-, \\
\frac{d^2}{dt^2}E(u+tv) &= (h_{111}(u+tv, u^+ + tv^+) + h_{222}(u^- + tv^-, u+tv))v^2 \\
&\quad + 2h_{112}(u+tv, u^+ + tv^+)vv^+ + 2h_{122}(u^- + tv^-, u+tv)v^-v \\
&\quad + h_{122}(u+tv, u^+ + tv^+)(v^+)^2 + h_{112}(u^- + tv^-, u+tv)(v^-)^2
\end{aligned}$$

であるから, (5.3) から

$$|Q|_\rho \leq c_5|v|_\rho^2 \leq c'\frac{|E(u)|_r^2}{(r-\rho)^{4\tau}}.$$

三角不等式から, (6.1) が導ける. □

7　反復過程とその極限

$n \to \infty$ で $r_n \to r_\infty > 0$ となる単調減少列 $\{r_n\}$ を, $r_0 = r, r_n = r_\infty + 2^{-n}(r_0 - r_\infty)$ で与え, また $\{u_n\}$ を (4.3) の $u = u_{n-1}$ での解 $w_{n-1} \in W_{r_n}$ を用いて $u_n = u_{n-1} + (u_{n-1})_\theta w_{n-1}$ で定める. (つまり, $v_n = u_{n+1} - u_n$ である.)

まず, Theorem 1 のもとで, Lemma 1, Lemma 3 を繰り返し適用できると仮定したときに, 収束先が存在して $E(u) \equiv 0$ となることを示したい.

Lemma 1 の (5.3) を $u = u_n, r = r_n, N = 2N_0$ として適用すれば, $\epsilon_n := |E(u_n)|_{r_n}$ として,

$$|v_n|_{r_{n+1}} \leq \frac{c_1}{(r_n - r_{n-1})^{2\tau}}\epsilon_n \tag{7.1}$$

であり,

$$|(v_n)_\theta|_{r_{n+1}} \leq \frac{c_1}{(r_n - r_{n-1})^{2\tau+1}}\epsilon_n \tag{7.2}$$

である. また, $r_n - r_{n-1} = 2^{-(n+1)}(r_0 - r_\infty)$ であるので, $a := 2^{4\tau}, c_7 := c_6\dfrac{2^{4\tau}}{r_0 - r_\infty}$ とすれば, Lemma 3 から,

$$\epsilon_{n+1} \leq \frac{c_6\epsilon_n^2}{(r_n - r_{n-1})^{2\tau+1}}\epsilon_n = c_7 a^n \epsilon_n^2. \tag{7.3}$$

問題は. n を大きくしたときに a^n の発散するのと ϵ_n^2 が 0 に近づくのはどちらが早いかということである. これを調べるには $\{\eta_n\}$ を

$$\eta_n := a^{n+1}c_7\epsilon_n$$

で定めればよく, 実際 (7.3) から

$$\eta_{n+1} = a^{n+2}c_7\epsilon_{n+1} \leq a^{2n+2}c_7^2\epsilon_n^2 = \eta_n^2$$

であるから, $\eta_0 = ac_7\epsilon_0 < 1$ の下で $\eta_n \leq \eta_0^{2^n} \to 0$, つまり $\epsilon_n \leq \eta_n \to 0$ がわかる．(7.1) から $|v_n|_{r_\infty} \leq |v_n|_{r_{n+1}} \to 0$ であるが, 特にこれは指数関数より早く収束するので, 無限和 $u_0 + \sum_{k=0}^{\infty} v_k$ は絶対収束し, $u_\infty \in W_{r_\infty}$ となる．これにより, $E(u_\infty) = \lim_{n\to\infty} E(u_n) = 0$ がわかる．

次に, $u = u_n, r = r_n, N = 2N_0$ としたときに Lemma 1, Lemma 3 の仮定 (5.1) (5.2) を満たすことを示す.
これは,

$$|u_n - u_0|_{r_n} < \frac{R}{2} \tag{7.4}$$

および

$$|(u_n - u_0)_\theta|_{r_n} < \frac{1}{2N_0} \tag{7.5}$$

を示せば十分である．実際, (7.4) および (3.3) から (5.1) で R を $R/2$ に置き換えたものが満たされ, (5.11) および (3.4) から,

$$|(u_n)_\theta|_{r_n} \leq |(u_n - u_0)_\theta|_{r_n} + |(u_0)_\theta|_{r_n} < \frac{1+2N_0^2}{2N_0} < 2N_0$$

であるから, (5.2) で $N = 2N_0$ としたものが満たされる.

さて, (7.4), (7.5) を示す．$\lambda \leq 4\tau, \eta_0 < 1/2$ としたとき, $2^\lambda \leq a, \eta_n < \eta_0^{n+1}$ であり, ゆえに $\sum_{n=0}^{\infty} \eta_n \leq \sum_{n=0}^{\infty} \eta_0^{n+1} = \frac{\eta_0}{1-\eta_0} \leq 2\eta_0$ であるので, 評価式

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\epsilon_n}{(r_n - r_{n+1})^\lambda} \leq c_7^{-1}(r_0 - r_\infty)^{-\lambda} \sum_{n=0}^{\infty} \eta_n \leq \frac{2\eta_0}{c_7(r_0 - r_\infty)^\lambda} = \frac{2a\epsilon_0}{(r_0 - r_\infty)^\lambda} \tag{7.6}$$

が得られる．この和は ϵ_0 の選び方次第で小さくすることができる.
$\nu < n$ となるすべての自然数 ν で (7.4), (7.5) が成り立っているとすると, (7.1) および (7.6) から,

$$|u_n - u_0|_{r_n} < \sum_{\nu=0}^{n-1} |v_\nu|_{r_\nu} \leq \sum_{\nu=0}^{n-1} \frac{c_1\epsilon_\nu}{(r_\nu - r_{\nu+1})^{2\tau}} < c_1 2a \frac{\epsilon_0}{(r_0 - r_\infty)^{2\tau}}.$$

同様に, (7.2), (7.6) から

$$|(u_n - u_0)_\theta|_{r_n} < \sum_{\nu=0}^{n-1} |(v_\nu)_\theta|_{r_\nu} \leq \sum_{\nu=0}^{n-1} \frac{c_1\epsilon_\nu}{(r_\nu - r_{\nu+1})^{2\tau+1}} < c_1 2a \frac{\epsilon_0}{(r_0 - r_\infty)^{2\tau+1}}.$$

どちらの評価式も右辺は n によらないので, 必要に応じて $\epsilon_0 =: \delta$ を適当に取り直せば, n でも (7.4), (7.5) が満たされることがわかる.
以上をもって, Theorem 1 が示された.

参考文献

[1] M. Levi and J. Moser, A Lagrangian proof of the invariant curve theorem for twist mappings, Smooth ergodic theory and its applications (Seattle, WA, 1999), Proc. Sympos. Pure Math. **69**, 733-746, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2001