

ビリヤード写像における面積保存性の証明

まるげり

2025 年 1 月 23 日

表題のとおりです。2 通りやります。

0 インTRODakShon: ビリヤード写像について

いま, 平面領域 $D \subset \mathbb{R}^2$ (ビリヤード台) の中を動く質点 (ボール) の運動を考える. ボールは台 D の境界にぶつかると, 入射角と反射角が等しくなるように向きを変えたとする.

このとき, 台の境界をなす閉曲線 $\gamma = \partial D$ に向きを入れて, パラメータとして弧長パラメータ s を選んでおく: すなわち, x, y 座標について, 適当なパラメータ t でパラメータ付けした閉曲線 γ の各点を $(\gamma_1(t), \gamma_2(t))$ と書いたとき,

$$s(t) = \int_0^t \sqrt{\left(\frac{d\gamma_1}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d\gamma_2}{dt}\right)^2} dt$$

で決まるパラメータ s によって, 再度パラメータ変換 $\gamma(s) = \gamma(t(s))$ により閉曲線に s でのパラメータを入れるのである. (要するに, 曲線に沿った「弧の長さ」をパラメータとして選ぶ.)

さて, 境界上の点 $\gamma(s)$ にいたボールが反射角 α で出発し, 境界上の別の点 $\gamma(s')$ にぶつかり, そのときの入射角 (反射角) が α' であったとする. このとき, (s, α) がビリヤードの運動により (s', α') に写った, と考えられる. 出発点とそのときの反射角が決まれば, 次にぶつかる点とそのときの入射角は一意に定まる. これを写像と捉えるのである.

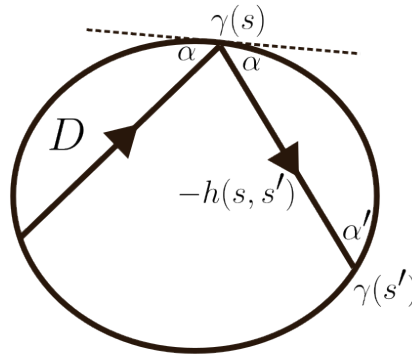


図 1: ビリヤード系

この写像 $T: (s, \alpha) \mapsto (s', \alpha')$ を**ビリヤード写像**という. なお, γ の一周の長さを L としておくと, この写像の定義域・値域 (**相空間**という) は $(\mathbb{R}/L\mathbb{Z}) \times [0, \pi]$ と書ける. (入射角 α が 0 や π の場合は, ビリヤードの運動によってその場を動かない (写像 T の不動点) と考える.)

さて, 実はこのビリヤード写像 T は, 相空間 $(\mathbb{R}/L\mathbb{Z}) \times [0, \pi]$ 上で次の 2 次微分形式 (2 - form) を保存することが知られている.

Theorem 1. ビリヤード写像 $T: (s, \alpha) \mapsto (s', \alpha')$ は面積形式 $\sin \alpha ds \wedge d\alpha$ を保存する. つまり,

$$\sin \alpha ds \wedge d\alpha = \sin \alpha' ds' \wedge d\alpha'.$$

この Theorem1 より, ビリヤード写像 T は**面積保存写像**であるという. (ここで言う「面積」は, あくまで台 D のいる平面での面積ではなく, 相空間 $(\mathbb{R}/L\mathbb{Z}) \times [0, \pi]$ における面積のことである.)

以下, この証明をやります.

1 初等幾何的方法

こちらはよく知られている方法で, Birkhoff の証明を多少現代的に書いたもの. ビリヤード写像に触れている文献には大体書いているが, たとえば Tabachnikov の”Geometry and Billiards”や日本語のものだと柴山先生の『重点解説 ハミルトン系』などに載っている.

Theorem 1 の証明 1. いま, $\gamma(s)$ と $\gamma(s')$ の距離 (の -1 倍) を $h(s, s')$ と置く. s は弧長パラメータなので, その微分 $\frac{\partial \gamma(s)}{\partial s}$ は点 $\gamma(s)$ における単位接ベクトルである. 内積を $\langle \cdot, \cdot \rangle$ で表すことにすれば,

$$\begin{aligned} 2h(s, s') \frac{\partial h}{\partial s'} &= \frac{\partial h^2}{\partial s'} \\ &= -\frac{\partial |\gamma(s) - \gamma(s')|^2}{\partial s'} \\ &= 2 \frac{\partial \langle \gamma(s), \gamma(s') \rangle}{\partial s'} - \frac{\partial \langle \gamma(s'), \gamma(s') \rangle}{\partial s'} \\ &= 2 \langle \gamma(s), \frac{\partial \gamma(s')}{\partial s'} \rangle - 2 \langle \gamma(s'), \frac{\partial \gamma(s')}{\partial s'} \rangle \\ &= 2 \langle \gamma(s') - \gamma(s), \frac{\partial \gamma(s')}{\partial s'} \rangle \\ &= -2h(s, s') \cos \alpha'. \\ \therefore \frac{\partial h}{\partial s'} &= -\cos \alpha'. \end{aligned}$$

となる. 同様にして, $\frac{\partial h}{\partial s} = \cos \alpha$ もわかる. 以上から, $dh = \cos \alpha ds - \cos \alpha' ds'$, つまり

$$0 = d^2 h = \sin \alpha ds \wedge d\alpha - \sin \alpha' ds' \wedge d\alpha'$$

となり, これから面積保存性 $\sin \alpha ds \wedge d\alpha = \sin \alpha' ds' \wedge d\alpha'$ がわかる. □

2 その2:

3 その3: Poincaré-Cartan の積分不変式を用いた方法

以下は, ほとんど Arnold と Avez の”Ergodic Problems of Classical Mechanics”[1] の APPENDIX 31 に載っている内容です.

大まかに説明すると, 「ビリヤード写像を自由運動を記述するハミルトン系に適当な Poincaré 断面を取ったときの Poincaré 写像とみなしたとき, Poincaré-Cartan の積分不変式から導かれる微分形式がなんと $\sin \alpha ds \wedge d\alpha$ になっている」ということです.

3.1 ハミルトン系の準備: Poincaré-Cartan の積分不変式

まず準備としてハミルトン系と Poincaré-Cartan の積分不変式について解説します. このあたりは Arnold の”Mathematical Methods of Classical Mechanics”や Arnold, Kozlov, Neishtadt の”Mathematical Aspects of Classical and Celestial Mechanics”を大いに参考にしました. とはいえ, 多少は微分幾何に慣れてないとチンプンカンプンかもしれない (僕も微分幾何に弱いですが...) になってしまっていると思います.

Poincaré-Cartan の積分不変式のもっと直接的な導出が知りたい人は, 伊藤先生の『常微分方程式と解析力学』をオススメします.

普通ハミルトン系というと, \mathbb{R}^{2n} 上の運動方程式で, ある関数 (ハミルトニアン) $H(p, q)$ に対し,

$$\dot{q}_k = \frac{\partial H}{\partial p_k}, \quad \dot{p}_k = -\frac{\partial H}{\partial q_k} \quad (k = 1, \dots, n) \quad (3.1)$$

と表されるものを指す. この解 $(p(t), q(t))$ 上で H は t に依らず一定になる. (多くの場合, H を力学的エネルギーの和 (運動エネルギー + ポテンシャル) と解釈しても大丈夫.)

ただ、今回は Poincaré-Cartan の積分不変式を導きたい + 自分の勉強も兼ねて、少し特殊なやり方でハミルトン系を定めよう。 $2n+1$ 次元多様体 M^{2n+1} に、適当な座標 $(p, q, t) = (p_1, \dots, p_n, q_1, \dots, q_n, t)$ を取る。 M^{2n+1} 上の関数 $H(p, q, t)$

に対し、次のような 1 次微分形式 (1-form)

$$\theta = pdq - Hdt \quad (3.2)$$

を考える。

この 1-form θ により、ハミルトン系は次のようなやり方で決定される。

その外微分 $\omega = d\theta$ は 2-form であるが、各点 $x \in M^{2n+1}$ について、ある接ベクトル $\xi_x \neq 0$ が存在し、

$$\omega(\xi_x, \eta_x) = 0 \quad \forall \eta_x \in T_x M$$

が存在する。なぜなら、 ω を表現する $(2n+1)$ 次の歪対称行列を A とすれば、

$$\omega(\xi_x, \eta_x) = (A\xi_x, \eta_x)$$

である。 A は歪対称なので転置を取ると $A^T = -A$ であるが、一方で $2n+1$ 次なので、

$$\det(A) = \det(A^T) = \det(-A) = (-1)^{2n+1} \det(A) = (-1) \det(A)$$

となる。結局、 $\det(A) = 0$ となり、 A は非正則行列になるので、同次方程式 $A\xi_x = 0$ が解を持つのである。

この $A\xi_x = 0$ を満たす ξ_x 全体は線形空間をなすが、この次元が 1 しかないとき、この ξ_x (を適当に正規化したもの) を ω の渦の方向あるいは特性方向といい、渦の方向により定まるベクトル場 $\xi = \{\xi_x\}$ の積分曲線を ω の渦線あるいは特性曲線という。 M 中の閉曲線 γ_0 に対し、この曲線上の点から始めた渦線によって出来上がる曲面を ω の渦管という。

渦管の上で 2-form ω はどうなるかを確認しておこう。

パラメータ u が入った M^{2n+1} 内の閉曲線 γ_0 を考える。 ($\gamma_0(0) = \gamma_0(1)$ とする。) この曲線上の各点 $\gamma_0(u)$ から出発する渦線を $x(s, u) = x^s(\gamma_0(u))$ とすれば、閉曲線 γ_0 に対して定まる ω の渦管 Γ は $\Gamma = \{x(s, u) = x^s(\gamma_0(u)) | s \in \mathbb{R}, u \in [0, 1]\}$ と書ける。

Γ は $x : \mathbb{R} \times [0, 1] \ni (s, u) \rightarrow x^s(\gamma_0(u)) \in \Gamma$ により座標 (s, u) が入る。恒等写像 $i : \Gamma \rightarrow M^{2n+1}$ により Γ を M^{2n+1} に埋め込むと、 $x(s, u) = (p(s, u), q(s, u), t(s, u))$ と書いて、 $p_s = \nabla_s p, p_u = \nabla_u p$ などと表せば、

$$i^* dp = dp(s, u) = p_s ds + p_u du,$$

$$i^* dq = dq(s, u) = p_q ds + q_u du,$$

$$i^* dt = dt(s, u) = t_s ds + t_u du.$$

である。 M^{2n+1} 上の 2-form ω の Γ への引き戻し $i^*\omega$ を基底 ds, du で表示すれば、

$$i^*\omega = [dp(s, u) \quad dq(s, u) \quad dt(s, u)] A \begin{bmatrix} dp(s, u) \\ dq(s, u) \\ dt(s, u) \end{bmatrix} = [ds \quad du] \begin{bmatrix} p_s & q_s & t_s \\ p_u & q_u & t_u \end{bmatrix} A \begin{bmatrix} p_s & p_u \\ q_s & q_u \\ t_s & t_u \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ds \\ du \end{bmatrix}$$

一方で、 $x(s, u)$ は渦の方向 ξ の積分曲線なので、 $x_s = [p_s, q_s, t_s]^T$ は $Ax_s = 0$ を満たす。よって、

$$i^*\omega = [ds \quad du] \begin{bmatrix} x_s \\ x_u \end{bmatrix} A \begin{bmatrix} x_s & x_u \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ds \\ du \end{bmatrix} = [ds \quad du] \begin{bmatrix} x_s^T A x_s & x_s^T A x_u \\ x_u^T A x_s & x_u^T A x_u \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ds \\ du \end{bmatrix} = [ds \quad du] \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & x_u^T A x_u \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ds \\ du \end{bmatrix}$$

ここで、 A が歪対称で $x_u^T A x_u = (x_u^T A x_u)^T = -x_u^T A x_u$ であるから、 $x_u^T A x_u = 0$ である。よって、

$$i^*\omega = 0$$

となる。つまり、渦管 Γ の上では微分形式 ω は消失するのである。

さて、この渦管の上での周回積分について、次が成り立つ。

Theorem 2. $\omega = d\theta$ の渦管 Γ 上の、(渦管を一周する) 同じ向きの閉曲線 γ_0, γ_1 を考えると、渦線が γ_0 から γ_1 に向けて伸びているとすれば、

$$\int_{\gamma_0} \theta = \int_{\gamma_1} \theta.$$

この定理は、渦の方向により定まるベクトル場の運動について、

$$I(s) = \int_{x^s(\gamma_0)} \theta$$

が s に依らず不変であることを示唆している (ケルビンの渦定理の一般化).

Proof. Stokes の定理から、

$$\int_{\Gamma} \omega = \int_{\Gamma} d\theta = \int_{\gamma_0} \theta - \int_{\gamma_1} \theta$$

であるが、渦管の上で ω は消失するので、左辺は 0 である. よって、

$$\int_{\gamma_0} \theta - \int_{\gamma_1} \theta = 0$$

となり、題意が示される. □

ところで、1-form θ は式 (3.2) で具体的に与えていた. このときの $\omega = d\theta$ に対する積分曲線 (渦線) はなんだろうか?

具体的に ω の表現行列 A を計算しよう. $p = (p_1, \dots, p_n), q = (q_1, \dots, q_n)$ として, $H_p = \nabla_p H(p, q, t), H_q = \nabla_q H(p, q, t)$ で表せば、

$$A = \begin{bmatrix} O_n & E_n & -H_p \\ -E_n & O_n & -H_q \\ H_p^T & H_q^T & 0 \end{bmatrix}$$

となる. ただし, E_n は n 次の単位行列, O_n は n 次の零行列である.

この表現行列 A の右上の $2n$ 次正方行列は正則であるため、同次方程式 $AX = 0$ の解空間は 1 次元であり、上の話が適用できる. 解空間の元 $X \in TM$ は

$$X = \sum_k X_k \frac{\partial}{\partial p_k} + X_{k+n} \frac{\partial}{\partial q_k} + X_t \frac{\partial}{\partial t}$$

と書けるが、特に $X_t \neq 0$ である.

(なぜなら, $AX = 0$ より

$$AX = \begin{bmatrix} X_{k+n} - H_p X_t \\ -X_k - H_q X_t \\ H_p X_k + H_q X_{k+n} \end{bmatrix} = 0$$

であるので、もし $X_t = 0$ なら $X_k = X_{k+n} = X_t = 0$ となり、 $X = 0$ になってしまう.)

そのため、特に $X_t = 1$ となるものを渦の方向として定めても良い. このとき、 $AX = 0$ から他の成分は

$$X_k = -H_{q_k}, X_{k+n} = H_{p_k} \quad (k = 1, \dots, n)$$

と決定する. したがって、渦の方向の定めるベクトル場 X は

$$X = \sum_k -H_{q_k} \frac{\partial}{\partial p_k} + H_{p_k} \frac{\partial}{\partial q_k} + \frac{\partial}{\partial t}$$

であり、この積分曲線 $x(s, x_0) = (p(s, x_0), q(s, x_0), t(s, x_0))$ の満たすべき方程式は拡張したハミルトン系

$$\dot{q}_k = \frac{\partial H}{\partial p_k}, \dot{p}_k = -\frac{\partial H}{\partial q_k}, \dot{t} = 1 \quad (k = 1, \dots, n) \quad (3.3)$$

にほかならない. Theorem2 から、拡張したハミルトン系 (3.3) のフロー x^s に沿って、積分

$$\int_{x^s(\gamma_0)} pdq - Hdt \quad (3.4)$$

の値は不変である.

Theorem 3. 拡張したハミルトン系 (3.3) について、相空間内の閉曲線 γ_0 と、フロー x^s により描かれる管 $\gamma_1 = x^1(\gamma_0)$ について、

$$\int_{\gamma_0} pdq - Hdt = \int_{\gamma_1} pdq - Hdt.$$

ハミルトン系 (3.1) は (3.3) の解を (p, q) 平面に射影したものに過ぎないが, 上の定理をハミルトンフロー ϕ^t により $\gamma_1 = \phi^t(\gamma_0)$ にすれば, γ_0, γ_1 上で t は定数であり $dt = 0$ となるので, 次が成立する;

Theorem 4. ハミルトン系 (3.1) について, 相空間内の閉曲線 γ_0 と, ハミルトンフロー ϕ^t により描かれる管 $\phi^t(\gamma_0)$ について,

$$\int_{\gamma_0} pdq = \int_{\gamma_1} pdq.$$

以上から, ハミルトン系 (3.1) は式 (3.2) で決まる 1-form θ から導出できる. また, その拡張したハミルトン系 (3.3) には, 積分で書ける不変量 (3.4) を持つ. この不変量 (3.4) を **Poincaré-Cartan の積分不変式** という.

3.2 ハミルトン系の Poincaré 写像

n 自由度ハミルトン系 (3.1) に話を戻す. この系の相空間は $2n$ 次元の多様体になるが, その断面 Σ を $H = h, q_1 = 0$ で与えると, Σ は等エネルギー $H = h$ を持つ $2n - 2$ 次元部分多様体をなす.

ある領域 $\Sigma_0 \subset \Sigma$ で局所座標 $(P, Q) = (p_2, \dots, p_n, q_2, \dots, q_n)$ が取れたとし, かつこの領域で上の方程式について $\dot{q}_1 \neq 0$ が成り立っているとき, 断面 Σ を surface of section とか Poincaré section とか言う. (日本だと多分「Poincaré 断面」と呼ぶケースが多いと思う.)

いま, 点 $x \in \Sigma_0$ であって, 初期点 x についてのハミルトン系の解がしばらくして Σ_0 に戻って来るようなものを考える. このとき, $\dot{q}_1 \neq 0$ より, x に十分近い点 $x' \in \Sigma_0$ を通過する解はまたいずれ Σ_0 に戻って来て, Σ_0 を横断する. この x' の定義できるような x の近傍 $\Sigma_1 \subset \Sigma_0 \subset \Sigma$ について, Σ_0 内の再帰した点を Ax' とすれば, 写像 $A: \Sigma_1 \rightarrow \Sigma_0$ が定義できる. (このような写像を **Poincaré 写像** という.)

Theorem 5. 上で定めたハミルトン系の Poincaré 写像 $A: \Sigma_1 \rightarrow \Sigma_0$ は正準的である. すなわち, Σ_1 内の任意の閉曲線 γ について,

$$\int_{\gamma} PdQ = \int_{A\gamma} PdQ. \quad (3.5)$$

である. ただし, $PdQ = \sum_{k=2}^n p_k dq_k$.

Proof. 拡張したハミルトン系 (3.3) の下で考え, 拡張した相空間 $\{(p, q, t)\}$ 上での閉曲線をそれぞれ $\gamma', A\gamma'$ とする. (γ' は $t = 0$ の面の上での γ_0 にほかならないが, 再帰時間は点ごとに異なるため $A\gamma'$ の各点での t 座標は一致しない)

Poincaré-Cartan の積分不変式 (Theorem3) より

$$\int_{\gamma'} pdq - Hdt = \int_{A\gamma'} pdq - Hdt.$$

となる. ここで, γ および $A\gamma$ は等エネルギー面 (つまり, $H = \text{定数}$ である面) の上にあるので,

$$\int_{\gamma'} Hdt = \int_{A\gamma'} Hdt.$$

また, γ' 上は $t = 0$ で一定なので, $dt = 0$ であり,

$$\int_{\gamma'} Hdt = 0.$$

したがって,

$$\int_{\gamma'} pdq = \int_{\gamma} pdq, \quad \int_{A\gamma'} pdq = \int_{A\gamma} pdq$$

q_1 は $\Sigma_1 \subset \Sigma$ 上で一定なので, $\gamma', A\gamma'$ 上で $dq = 0$ であり,

$$\int_{\gamma'} p_1 dq_1 = \int_{A\gamma'} p_1 dq_1 = 0.$$

したがって,

$$\int_{\gamma} PdQ = \int_{\gamma'} pdq - Hdt = \int_{A\gamma'} pdq - Hdt = \int_{A\gamma} PdQ.$$

となり, (3.5) が示された.

□

3.3 ビリヤード系への応用

Theorem1 の証明その 3. いま, 台 $D \subset \mathbb{R}^2$ 内を自由運動 (等速直線運動) するボールを考える. この質点の位置と速度をまとめて $(x, v) = (x_1, x_2, v_1, v_2)$ と置くと, 運動方程式は

$$\dot{x}_i = v_i, \quad \dot{v}_i = 0 \quad (i = 1, 2)$$

である. この運動のハミルトニアン $H(x, v)$ は運動エネルギーだけ, つまり

$$H(x, v) = \frac{1}{2}(v_1^2 + v_2^2).$$

となる.

ここで, 原点 O が台の境界 $\gamma = \partial D$ の上になるようにし, (q_1, q_2) を, q_1 をボールの位置 M から最も近い境界上の点 N までの距離, q_2 を原点 O から点 N までの弧の長さで定める. $q = (q_1, q_2)$ は D 全体では定義できないが, $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2)$ の近傍に限って言えば正しく定まる.

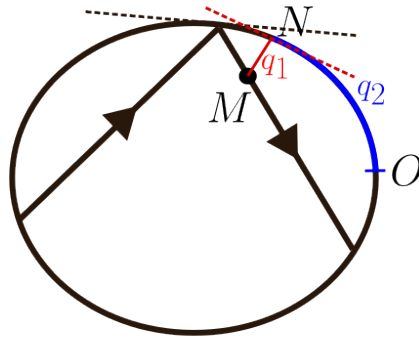


図 2: ハミルトン系 (自由運動) としてのビリヤード

境界上の各点 $\gamma(s)$ における接ベクトルを $\vec{t}(s)$, 法ベクトルを $\vec{n}(s)$ と書けば, $\vec{t}(s)$ は $\gamma(s)$ の弧長パラメータでの微分であり, $\vec{n}(s)$ は $\vec{t}(s)$ を $\pi/2$ だけ反時計回りに回転させたものなので,

$$\vec{t}(s) = (\gamma'_1(s), \gamma'_2(s)), \quad \vec{n}(s) = (-\gamma'_2(s), \gamma'_1(s))$$

となる. $O\vec{N} = (\gamma_1(q_2), \gamma_2(q_2))$ であり, $N\vec{M} = q_1\vec{n}(q_2)$ なので, $x = (x_1, x_2)$ から $q = (q_1, q_2)$ の点変換は

$$x_1 = \gamma_1(q_2) - q_1\gamma'_2(q_2), \quad x_2 = \gamma_2(q_2) + q_1\gamma'_1(q_2)$$

と書ける. (このプライムは s での微分.)

γ の近傍 (とその上での定まる速度ベクトル全体) のなす相空間内の開集合に対し, 点変換 $q \mapsto x = x(q_1, q_2)$ から定まる (x, v) から $(q, p) =$ への正準変換を考えることができる. 具体的には, 正準変換の母関数 $S(v, q)$ を

$$S(v, q) = v_1x_1(q_1, q_2) + v_2x_2(q_1, q_2) = v_1(\gamma_1(q_2) - q_1\gamma'_2(q_2)) + v_2(\gamma_2(q_2) + q_1\gamma'_1(q_2))$$

とすれば, 点変換に対応する正準変換が定まり, このとき曲率を κ で書けば, 運動量 $p = (p_1, p_2)$ は

$$\begin{aligned} p_1 &= \frac{\partial S}{\partial q_1} = -v_1\gamma'_2(q_2) + v_2\gamma'_1(q_2) \\ &= v \cdot \vec{n}(q_2), \\ p_2 &= \frac{\partial S}{\partial q_2} = v_1(\gamma'_1(q_2) - q_1\gamma''_2(q_2)) + v_2(\gamma'_2(q_2) - q_1\gamma''_1(q_2)), \\ &= v \cdot \vec{t}(q_2) + q_1\kappa(q_2)v \cdot \vec{n}(q_2). \end{aligned}$$

で表示できる.

さて, このハミルトン系に対し, $H = 1/2, q_1 = 0$ での Poincaré 断面 Σ を取る. これは, $|v| = 1$ かつボールが γ 上 (つまり, 壁にぶつかる瞬間) という条件にほかならず, ビリヤード写像 T はこの Poincaré 断面 Σ についての Poincaré 写像とみることができる. すなわち, Theorem5 から T は Σ_1 上で 2-form $dp_2 \wedge dq_2$ を保存する.

運動量 p の式に $|v| = 1, q_1 = 0$ を入れてみると, 入射角 α に対して

$$p_1 = v \cdot \vec{n}(q_2) = \sin \alpha,$$

$$p_2 = v \cdot \vec{t}(q_2) = \cos \alpha$$

であるから, Σ_0 上で $dp_2 \wedge dq_2 = d(\cos \alpha) \wedge dq_2 = \sin \alpha dq_2 \wedge d\alpha$. q_2 は γ の弧長パラメータだったから, これは $\sin \alpha ds \wedge d\alpha$ にほかならない. □

参考文献

- [1] V.I.Arnold, A.Avez. Ergodic Problems of Classical Mechanics, Benjamin, (1968)