sinc 関数 $(\sin x/x)$ のフーリエ変換の導出

2021 年 9 月 14 日

1　問題の設定

sinc 関数というのは,

$$\mathrm{sinc}(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x} & (x \neq 0) \\ 1 & (x = 0) \end{cases}$$

という関数のことをいう.

ここでは, フーリエ変換を次のように定義する.

フーリエ変換

可積分関数 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ に対するフーリエ変換 $\mathcal{F}[f](\xi)$ および逆フーリエ変換 $\mathcal{F}^{-1}[f](x)$ を

$$\mathcal{F}[f](\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\xi x} \mathrm{d}x \tag{1}$$

$$\mathcal{F}^{-1}[f](x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) e^{-i\xi x} \mathrm{d}\xi \tag{2}$$

ここで, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ が可積分であるとは

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| \mathrm{d}x < \infty$$

を満たすことをいう.

さて, 次のことが成り立つ.

sinc 関数のフーリエ変換

$$\mathcal{F}[\mathrm{sinc}(x)]\,(\xi) = \pi \chi_{[-1,1]}(\xi). \tag{3}$$

ただし, 定義関数 $\chi_{[-1,1]}(x)$ は, $-1 \leq x \leq 1$ なら 1 を, それ以外なら 0 を返す関数としている.

この式の導出について考える.

調べてみたところ, 定義関数についての逆フーリエ変換 $\mathcal{F}^{-1}[\chi_{[-1,1]}(x)](\xi)$ が $\xi \neq 0$ のとき

$$\begin{aligned}\mathcal{F}^{-1}[\chi_{[-1,1]}(\xi)](x) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\chi_{[-1,1]}(\xi)e^{-i\xi x}\mathrm{d}\xi \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-1}^{1}e^{-i\xi x}\mathrm{d}\xi \\ &= \frac{1}{2\pi}\left[\frac{e^{-i\xi x}}{-i\xi}\right]_{\xi=-1}^{1} \\ &= \frac{1}{2\pi}\frac{e^{i\xi x}-e^{-i\xi x}}{i\xi} \\ &= \frac{1}{\pi}\frac{\sin\xi}{\xi} \quad (\xi \neq 0)\end{aligned}$$

となることから, フーリエ変換の反転公式 $\mathcal{F}[\mathcal{F}^{-1}[f]] = f$ より

$$\begin{aligned}\mathcal{F}[\mathrm{sinc}(x)](\xi) &= \mathcal{F}[\pi\mathcal{F}^{-1}[\chi_{[-1,1]}(\xi)](x)](\xi) \\ &= \pi\chi_{[-1,1]}(\xi) \qquad (4)\end{aligned}$$

と導いているものが多いような気がする.

しかし, この導出は $\mathrm{sinc}(x)$ が可積分性の議論が不足しており厳密性に欠ける, という問題点がある. たしかに,

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty}|\mathrm{sinc}(x)|\mathrm{d}x &= 2\int_{0}^{\infty}\left|\frac{\sin x}{x}\right|\mathrm{d}x \\ &\geq 2\sum_{n=0}^{\infty}\int_{2n\pi}^{(2n+1)\pi}\left|\frac{\sin x}{x}\right|\mathrm{d}x \\ &\geq 2\sum_{n=0}^{\infty}\left|\int_{2n\pi}^{(2n+1)\pi}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x\right| \\ &\geq 2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)\pi}\left|\int_{2n\pi}^{(2n+1)\pi}\sin x\mathrm{d}x\right| \\ &= 2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2}{(2n+1)\pi} = \infty\end{aligned}$$

となるため, $\mathrm{sinc}(x)$ は可積分ではなく, 先ほどの定義でのフーリエ変換が定まらない.

そこで, もう少しちゃんと sinc 関数のフーリエ変換を導出してみることを考える.

2 準備

先ほどの問題点は, 可積分関数のフーリエ変換をのみ考えたことであった. そこで, 対象を広げて超関数（シュワルツ超関数）の意味でのフーリエ変換を

考えることにする．超関数であるとは, 大雑把に書くと「関数を入力とし, 値を出力とする」ものである．超関数 T について, 入力が関数 $\varphi(x)$ のときは, $T(\varphi)$ とか $T[\varphi]$ とか書くことがあるが, 今回は基本的に $\langle T, \varphi\rangle$ と表記することにする．

(超関数というのは, 正しくは「有界な台を持ち無限回微分可能な関数」の集合上での連続線形汎関数のことであるが, ここで考えるのは「急減少関数」の集合 $\mathcal{S}$ 上で定義されるもので, ゆるやかな超関数と呼ばれる.)

関数 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ が局所可積分であるとは, $\mathbb{R}$ 上の任意の有界閉区間 K で,

$$\int_K |f(x)|\mathrm{d}x < \infty$$

となるもののこと言う．この f に対して, 次の例のような超関数を構成することができる．

超関数の例

局所可積分な関数 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ に対して,

$$\langle T_f, \varphi\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\varphi(x)\mathrm{d}x$$

となる T_f は超関数である．この形の超関数を $\langle f, \varphi\rangle$ というふうに略記することとする．
(ただし, f によっては T_f は超関数であってもゆるやかな超関数ではないことがある.)

また, 超関数のフーリエ変換は次のように定義される．

超関数のフーリエ変換

ゆるやかな超関数 $T:\mathcal{S}\to\mathbb{R}$ に対するフーリエ変換 $\langle\mathcal{F}[T], \varphi\rangle$ および逆フーリエ変換 $\langle\mathcal{F}^{-1}[T], \varphi\rangle$ を

$$\langle\mathcal{F}[T], \varphi\rangle = \langle T, \mathcal{F}[\varphi]\rangle \tag{5}$$

$$\langle\mathcal{F}^{-1}[T], \varphi\rangle = \langle T, \mathcal{F}^{-1}[\varphi]\rangle \tag{6}$$

ここで, 集合 $\mathcal{S}$ は急減少関数の集合とし, $\varphi\in\mathcal{S}$ とする．

目的であった $f(x)=\mathrm{sinc}(x)$ を「フーリエ変換」するとは, $f(x)$ から上の例のような超関数を構成し, その超関数の意味でのフーリエ変換 $\langle\mathcal{F}[T_f], \varphi\rangle$ を求める, ということとする．これは, 最初の意味でのフーリエ変換の拡張になっている．

3 $\mathcal{F}[\mathrm{sinc}]$ の導出: 式 (4) を用いる方法

さて, では実際に $\langle \mathcal{F}[T_f], \varphi\rangle$ を求めよう. 以下では $\langle \mathcal{F}[T_f], \varphi\rangle$ は $\langle \mathcal{F}[f], \varphi\rangle$ と表記することにする (積分の順序交換が成り立てば実際にこの二つは等しいはず).

といっても, 大枠はさっきの導出の補足である. 式 (4) から

$$\mathcal{F}^{-1}[\pi\chi_{-1,1}](x) = \mathrm{sinc}(x)$$

であった. ここで, 「急減少関数ではフーリエ反転公式が成立する」という事実を用いると,

$$\begin{aligned}
\langle \mathcal{F}[\mathrm{sinc}], \varphi\rangle &= \langle \mathrm{sinc}\mathcal{F}[\varphi]\rangle \\
&= \langle \mathcal{F}^{-1}[\pi\chi_{[-1,1]}], \mathcal{F}[\varphi]\rangle \\
&= \langle \pi\chi_{[-1,1]}, \mathcal{F}^{-1}[\mathcal{F}[\varphi]]\rangle \\
&= \langle \pi\chi_{[-1,1]}, \varphi\rangle \\
\therefore \mathcal{F}[\mathrm{sinc}] &= \pi\chi_{[-1,1]}
\end{aligned}$$

と, このようにして sinc 関数のフーリエ変換が求められた！目的達成！簡単！万歳！

↑ということに気が付いたのは, 以下の内容を書き切ってからでした...（泣）

4 $\mathcal{F}[\mathrm{sinc}]$ の導出:$\mathcal{F}[H]$ と $\mathcal{F}[1]$ を用いる方法

$f(x) = \mathrm{sinc}(x)$ とする. sinc 関数の連続性から,

$$\langle f, \varphi\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\varphi(x)\mathrm{d}x = \lim_{\epsilon\to 0}\int_{|x|>\epsilon} f(x)\varphi(x)\mathrm{d}x = \lim_{\epsilon\to 0}\int_{|x|>\epsilon} \frac{\sin x}{x}\varphi(x)\mathrm{d}x$$

と変形できるので,

$$\begin{aligned}
\langle \mathcal{F}[f], \varphi\rangle &= \langle f, \mathcal{F}[\varphi]\rangle \\
&= \lim_{\epsilon\to 0}\int_{|x|>\epsilon} \frac{1}{x}\sin x\mathcal{F}[\varphi](x)\mathrm{d}x \\
&= \lim_{\epsilon\to 0}\int_{|x|>\epsilon} \frac{1}{x}\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}\mathcal{F}[\varphi]\mathrm{d}x \\
&= \frac{\pi}{i}\frac{1}{2\pi}\lim_{\epsilon\to 0}\int_{|x|>\epsilon} \frac{\mathcal{F}[\varphi](x)e^{i\xi x}}{x}\mathrm{d}x\Bigg|_{\xi=-1}^{1} \\
&= \frac{\pi}{i}\,\mathcal{F}^{-1}\left[\left(v.p.\frac{1}{x}\right)\mathcal{F}[\varphi](x)\right]\Bigg|_{\xi=-1}^{1}
\end{aligned}$$

となる.

ただし, $v.p.\frac{1}{x}$ とは,

$$\left\langle v.p.\frac{1}{x}, \varphi \right\rangle = \lim_{\epsilon \to 0} \int_{|x|>\epsilon} \frac{\varphi(x)}{x} \mathrm{d}x$$

を満たす超関数であり, 最後の変形では,

$$\begin{aligned}
\left\langle \mathcal{F}^{-1}\left[\left(v.p.\frac{1}{x}\right)f\right], \varphi \right\rangle &= \lim_{\epsilon \to 0} \int_{|x|>\epsilon} \frac{f(x)\mathcal{F}^{-1}[\varphi](x)}{x} \mathrm{d}x \\
&= \lim_{\epsilon \to 0} \int_{|x|>\epsilon} f(x) \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\xi x}}{x} \mathrm{d}\xi \right) \mathrm{d}x \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\lim_{\epsilon \to 0} \frac{1}{2\pi} \int_{|x|>\epsilon} \frac{f(x)e^{i\xi x}}{x} \mathrm{d}x \right) \varphi(\xi) \mathrm{d}\xi \\
&= \left\langle \lim_{\epsilon \to 0} \frac{1}{2\pi} \int_{|x|>\epsilon} \frac{f(x)e^{i\xi x}}{x} \mathrm{d}x, \varphi \right\rangle \\
\therefore \mathcal{F}^{-1}\left[\left(v.p.\frac{1}{x}\right)f\right] &= \lim_{\epsilon \to 0} \frac{1}{2\pi} \int_{|x|>\epsilon} \frac{f(x)e^{i\xi x}}{x} \mathrm{d}x
\end{aligned}$$

と書けることを用いた.
(2 行目から 3 行目で積分の順序交換をやってしまっているけど, ほんまにやってええのかは知らん)

ところで, 以下の事実が成り立つ.

ヘヴィサイド関数のフーリエ変換

ヘヴィサイド関数 $H(x)$ は,

$$H(x) = \begin{cases} 1 & (x \geq 0) \\ 0 & (x < 0) \end{cases}$$

を満たし,

$$\langle H, \varphi \rangle = \begin{cases} \varphi(x) & (x \geq 0) \\ 0 & (x < 0) \end{cases}$$

となる超関数である. この超関数について,

$$\mathcal{F}[H(\xi)](x) = \pi\delta(x) - iv.p.\frac{1}{x} \tag{7}$$

1のフーリエ変換

$f(x)=1$ を超関数の意味でフーリエ変換すると,

$$\mathcal{F}[1](x)=2\pi\delta(x) \tag{8}$$

である. ただし, デルタ関数 $\delta(x)$ は,

$$\delta(x)=\begin{cases}\infty & (x=0)\\ 0 & (x\neq 0)\end{cases}$$

を満たし,

$$\langle\delta,\varphi\rangle=\begin{cases}\varphi(0) & (x=0)\\ 0 & (x\neq 0)\end{cases}$$

となる超関数である.

これらから,

$$v.p.\frac{1}{x}=i\left(\mathcal{F}[H(\xi)](x)-\frac{1}{2}\mathcal{F}[1](x)\right) \tag{9}$$

したがって, フーリエ変換の公式 $\mathcal{F}[f](x)\mathcal{F}[g](x)=\mathcal{F}[f*g](x)$($*$ はたたみこみ積) を用いると,

$$\begin{aligned}\frac{\pi}{i}\ \mathcal{F}^{-1}\left[\left(v.p.\frac{1}{x}\right)\mathcal{F}[\varphi(\xi)](x)\right]\Bigg|_{\xi=-1}^{1} &=\pi\ \mathcal{F}^{-1}\left[\left(\mathcal{F}[H(\xi)](x)-\frac{1}{2}\mathcal{F}[1](x)\right)\mathcal{F}[\varphi(\xi)](x)\right]\Bigg|_{\xi=-1}^{1}\\ &=\pi\ \mathcal{F}^{-1}\left[\mathcal{F}[(H*\varphi)(\xi)](x)-\frac{1}{2}\mathcal{F}[(1*\varphi)(\xi)](x)\right]\Bigg|_{\xi=-1}^{1}\\ &=\pi\ \left((H*\varphi)(\xi)-\frac{1}{2}(1*\varphi)(\xi)\right)\Bigg|_{\xi=-1}^{1}\end{aligned}$$

ここで, たたみこみ積の定義から

$$\begin{aligned}(H*\varphi)(\xi)&=\int_{-\infty}^{\infty}H(\xi-y)\varphi(y)\mathrm{d}y=\int_{\xi\geq y}\varphi(y)\mathrm{d}y\\ (1*\varphi)(\xi)&=\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(y)\mathrm{d}y\end{aligned}$$

であるから,

$$\begin{aligned}\pi\ \left((H*\varphi)(\xi)-\frac{1}{2}(1*\varphi)(\xi)\right)\Bigg|_{\xi=-1}^{1} &=\pi\left(\int_{1\geq y}\varphi(y)\mathrm{d}y-\int_{-1\geq y}\varphi(y)\mathrm{d}y\right)\\ &=\pi\int_{-1\leq y\leq 1}\varphi(y)\mathrm{d}y\\ &=\langle\pi\chi_{[-1,1]},\varphi\rangle\end{aligned}$$

結局,

$$\langle \mathcal{F}[f], \varphi \rangle = \langle \pi\chi_{[-1,1]}, \varphi \rangle \quad \therefore \mathcal{F}[f] = \pi\chi_{[-1,1]}$$

がわかる.

あと, たぶん $\frac{\sin x}{x}$ を $\sin x$ と $v.p.\frac{1}{x}$ の積と見て積のフーリエ変換についての公式を使っても出る. どうせヘヴィサイド関数 $H(x)$ とデルタ関数 $\delta(x)$ のたたみこみとかになるんでしょ（適当）