Moser のツイストの定理

まるげり

2025 年 9 月 11 日

Levi-Moser[1] のノート．面積保存ツイスト写像の母関数に解析性を課すが，ツイスト定理の証明としては一番読みやすいと思う．

1　背景: 面積保存ツイスト写像, 母関数

アニュラス $\mathbb{A} = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$ 上の面積保存ツイスト写像 $\varphi(x_1, y_1) = (x_2, y_2)$ とは, 面積保存性 $\varphi^*(dy_2 \wedge dx_2) = dy_1 \wedge dx_1$ とツイスト性 $\dfrac{\partial x_2}{\partial y_1} > 0$ を持つものである．

記号の濫用で, $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$ の普遍被覆 $\mathbb{R}^2$ 上の元もまた (x, y) のように書き, また φ の $\mathbb{R}^2$ への持ち上げも φ と書くことにすると, 面積保存ツイスト写像 φ が特に $\mathbb{A}$ 上の完全シンプレクティック写像 ($\varphi^*(ydx) - ydx$ が $\mathbb{A}$ 上の完全形式になる) とき, φ の母関数と呼ばれる, 次の性質を満たす関数 $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ が存在する:
h_1, h_2 をそれぞれ h の第 1 成分, 第 2 成分での偏微分としたときに, $h(x_1 + 1, x_2 + 1) = h(x_1, x_2), h_{12} < 0$ であり, さらに

$$\begin{cases} h_1(x_1, x_2) = -y_1 \\ h_2(x_1, x_2) = y_2 \end{cases} \iff \varphi(x_1, y_1) = (x_2, y_2)$$

となる．
(たぶん, $\mathbb{R}^2$ で考える以上はポアンカレの補題から閉形式 $\varphi^*(ydx) - ydx$ が完全形式になることが保証されるけど, アニュラス $\mathbb{A}$ 上でもなお h が意味を持つためには別で $\mathbb{A}$ 上で完全形式になることを保証しないといけない... のだと思う.)

特に φ が母関数 h を持つなら, (x_1, y_1) が与えられた下で, $\{(x_n, y_n)\}_n$ が軌道 $\{\varphi^n(x_1, y_1)\}_n$ になることと

$$h_2(x_{i-1}, x_i) + h_1(x_i, x_{i+1}) = 0, \ y_i = -h_2(x_i, x_{i+1}) \quad (\forall i \in \mathbb{Z})$$

が同値であることがわかる．

2　不変曲線と差分方程式への簡約化

面積保存ツイスト写像 φ の不変曲線 $\gamma \subset \mathbb{A}$ とは, φ の不変集合であって $\mathbb{R}^2$ 上への持ち上げを $w(\theta) = (u(\theta), v(\theta))$ としたときに $u(\theta) - \theta$ および $v(\theta)$ が周期 1 の周期関数となるものである．これは, $u(\theta + 1) - (\theta + 1) = u(\theta) - \theta$ より $u(\theta + 1) - u(\theta) = 1$ より, アニュラス $\mathbb{A}$ を x 方向に一周して戻ってくる曲線であることを意味している．

さて, ある回転数 ω についての不変曲線 γ, つまり

$$\varphi(w(\theta)) = w(\theta + \omega)$$

を見つけたい．これはラグランジュ方程式と呼ばれることもある次の 2 階差分方程式

$$E[u(\theta)] = h_1(u(\theta), u(\theta + \omega)) + h_2(u(\theta), u(\theta - \omega)) \equiv 0 \tag{2.1}$$

が解ければ, $v(\theta) = -h_1(u(\theta), u(\theta + \omega))$ とおくことで不変曲線を見つけることができる．以下, $u^+(\theta) = u(\theta + \omega), u^-(\theta) = u(\theta - \omega)$ とする．

Remark 1. あとで使うので, $u_\theta E[u]$ の平均値 $\displaystyle\int_0^1 (u_\theta E[u])(\theta) d\theta = 0$ を計算しておく．

$$\frac{\partial h}{\partial \theta}(u, u^+) = u_\theta(h_1(u, u^+) + h_2(u, u^+))$$

より, $\nabla f := f(\theta+\omega) - f(\theta)$ と表記すれば,

$$\begin{aligned}\frac{\partial h}{\partial \theta}(u,u^+) - u_\theta h_2(u^-,u) &= u_\theta(h_1(u,u^+) + h_2(u,u^+) - h_2(u,u^+) + h_2(u^-,u)) \\ &= u_\theta(h_1(u,u^+) + h_2(u^-,u)) \\ &= u_\theta E[u]\end{aligned}$$

したがって,

$$u_\theta E[u] = \frac{\partial h}{\partial \theta}(u,u^+) - u_\theta h_2(u^-,u)$$

と表すことができる. ここで, $h(x_1{+}1, x_2{+}1) = h(x_1,x_2)$ であることと, $f(\theta)$ が周期 1 の周期関数であれば $\int_0^1 (\nabla f)(\theta)d\theta = \int_0^1 (f(\theta+\omega) - f(\theta))d\theta = 0$ であることから, 結局

$$\int_0^1 (u_\theta E[u])(\theta)d\theta = 0$$

である.

Example 1 (standard map)**.** $S(x)$ を周期関数として, $\varphi(x_1,y_1) = (x_2,y_2)$ を

$$\begin{aligned}x_2 &= x_1 + y_1 + S'(x_1), \\ y_2 &= y_1 + S'(x_1)\end{aligned}$$

で定める. 母関数 h は

$$h(x_1,x_2) = \frac{1}{2}(x_1 - x_2)^2 + S(x_1)$$

である. これに対するラグランジュ方程式 (2.1) は

$$u(\theta+\omega) - 2u(\theta) + u(\theta-\omega) = S'(u(\theta))$$

と書ける.

3 ツイスト定理

ツイスト定理は, ω がディオファントス数であるときに, $E[u_0] \approx 0$ なる $u_0(\theta)$ から始めて $E[u] \equiv 0$ となる $u(\theta)$ の存在を示す定理である.

$$W_r := \left\{ f : \mathbb{C} \to \mathbb{C} \,\middle|\, f : \text{実解析的},\ f(\theta+1) = f(\theta),\ |f|_r := \sup_{|\mathrm{Im}\theta| \le r} |f(\theta)| < \infty \right\}$$

する.

複素領域 $\mathcal{D} \subset \mathbb{C}^2$ を考え, その R-近傍を $\mathcal{D}_R := \{z \in \mathcal{D} | \sup_{y\in\mathcal{D}} |y-z|\}$ と書くことにする.

- h に関する仮定:
  $h(x_1,x_2)$ が $(x_1,x_2) \in \mathcal{D}$ で解析的, $(x_1,x_2) \in \mathcal{D} \cap \mathbb{R}^2$ で実, $h(x_1+1, x_2+1) = h(x_1,x_2)$ を満たす.
  また, ある定数 $\kappa > 0, M > 0$ により,

$$\min_{\mathcal{D}} |h_{12}| > \kappa, \tag{3.1}$$

$$|h|_{C^3(\mathcal{D})} < M. \tag{3.2}$$

- u_0 に関する仮定:
  ある $r \in (0,1)$ に対して, $u_0(\theta) - \theta \in W_r$ である.
  さらに, ある (十分大きな)$N_0 > 0$ に対し,

$$(u_0, u_0^+) \in \mathcal{D}_R \quad (|\mathrm{Im}\theta| < r), \tag{3.3}$$

$$|(u_0)_\theta|_r < N_0, \quad |(u_0)_\theta^{-1}|_r < N_0. \tag{3.4}$$

Theorem 1 (ツイスト定理)**.** ω がディオファントス数, つまり, ある $K>0, \sigma>0$ が存在して, 任意の $p,q\in\mathbb{Z}\backslash\{0\}$ について

$$|\omega-\frac{p}{q}|\geq\frac{K}{q^{2+\sigma}}$$

であるとする.

h, u_0 が上の仮定を満たすとする. このとき, ある定数 $\delta=\delta(r,h,M,N_0,K,\sigma,\kappa)$ が存在し, もし $|E(u_0)|_r<\delta$ であればラグランジュ方程式 $E[u]\equiv 0$ の解 u で, u_0 に近く, $u(\theta)-\theta\in W_{r/2}$ を満たし, $u(\theta)-\theta$ の $\theta\in\mathbb{S}^1$ での平均値が 0 になるものがただ一つ存在する.

Example 2. 摂動を受けたツイスト写像

$$x_2=x_1+y_1+\epsilon f(x_1,y_1,\epsilon)$$
$$y_2=y_1+\epsilon g(x_1,y_1,\epsilon)$$

が領域 $\mathcal{D}:=\{(x_1,x_2)\in\mathbb{C}^2|a<\mathrm{Re}(x_1-x_2)<b,\ |\mathrm{Im}x_1|<1,\ |\mathrm{Im}x_2|<1\}$ 上で定義された母関数 $h(x_1,x_2)=\frac{1}{2}(x_1-x_2)^2+\epsilon H(x_1,x_2,\epsilon)$ を持つとする. ($|H|_{C^3(\mathcal{D})}$ が有界まで要りそう.)

ディオファントス数 $\omega\in(a,b)$ と $u_0(\theta)=\theta$ を選ぶ. いま, ϵ を十分小さく取れば, $|h_{12}|=|-1+\epsilon H_{12}|>1-O(\epsilon)$ より (3.1) は ok. $|h_i|\leq|x_1-x_2|+\epsilon|H_1|<b+2+O(\epsilon), |h_{ii}|=|1+\epsilon H_{ii}|<1+O(\epsilon), |h_{ijk}|<\epsilon|H_{ijk}|<O(\epsilon)$ より (3.2) も ok. $R=\min\left\{\frac{1}{2\sqrt{2}}(b-\omega),\frac{1}{2\sqrt{2}}(\omega-a),r\right\}$ として, $(u_0,u_0^+)=(\theta,\theta+\omega)\in D_R$ ($|\mathrm{Im}\theta|<r$) より (3.3) は ok. $u_0=(u_0)^{-1}=\theta$ なので $N_0=\max\{-a,b\}+r$ とすれば (3.4) も ok.

以上から, ツイスト定理が使えて, 不変曲線の存在が証明できる.

4 homological equation

ツイスト定理の証明のカギは, 初期解 u_0 から始めて"修正ニュートン法"によって $E[u]$ の零点を探すことである. $\tilde{u}=u+v$ として, $E[\tilde{u}]$ は

$$E[u+v]=E[u]+E'[u]v+Q(v)$$

と書ける. ここで, Q は剰余項であり, $E'[u]v$ はガトー微分である. 具体的に計算すると, $h_{ij}^-=h_{ij}(u^-,u)$ として,

$$E'[u]v=(h_{11}+h_{22}^-)v+h_{12}v^++h_{12}^-v^-$$

と書き下すことができる.

ふつうのニュートン法では, v に関する方程式

$$E'[u]v=-E[u] \tag{4.1}$$

の解として v を定める.

今回は, (4.1) の代わりに, 両辺に u_θ を掛けて左辺から $v\frac{d}{d\theta}E[u]=vE'[u]u_\theta$ を引いた方程式

$$u_\theta E'[u]v-vE'[u]u_\theta=-u_\theta E[u] \tag{4.2}$$

の解として v を与える. もちろんこれは (4.1) とは等価ではない式だが, この場合の更新則 $u\mapsto u+v$ でも $E[u]$ の零点へ収束することを後に示す. (4.2) のままだと扱いにくいので, 少し変形する. 左辺が

$$u_\theta E'[u]v-vE'[u]u_\theta=h_{12}(u_\theta v^+-u_\theta^+v)+h_{12}^-(u_\theta v^--u_\theta^-v)$$

であることに注意して, 新変数 $w:=\frac{v}{u_\theta}$ を導入すれば,

$$h_{12}(u_\theta v^+-u_\theta^+v)+h_{12}^-(u_\theta v^--u_\theta^-v)=h_{12}u_\theta u_\theta^+(w^+-w)-h_{12}^-u_\theta^-u_\theta(w-w^-)=\nabla^*(h_{12}u_\theta u_\theta^+\nabla w)$$

となる. ただし,

$$\nabla f(\theta):=f(\theta+\omega)-f(\theta),\quad \nabla^*f(\theta):=f(\theta)-f(\theta-\omega)$$

と表記した.

まとめると, w に関する関数方程式

$$\nabla^*(h_{12}u_\theta u_\theta^+\nabla w)=-u_\theta E[u]$$

の解として w を選び, 更新則

$$\tilde{u}=u+v,\quad v=u_\theta w$$

を考える. 初期解 u_0 から始めて最終的に u が $E[u]$ の零点に収束することを示す.

5 homological equation の求解

u を既知, w を未知の関数とする.

TO DO: ツイスト定理の証明をまとめる

参考文献

[1] M. Levi and J. Moser, A Lagrangian proof of the invariant curve theorem for twist mappings, Smooth ergodic theory and its applications (Seattle, WA, 1999), Proc. Sympos. Pure Math. **69**, 733-746, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2001