関数解析ノート

2023 年 4 月 2 日

注意: 基本的に増田久弥『関数解析』[1] のまとめ.

1　ノルム空間

1.1　n 次元ユークリッド空間

n 個の実数（または複素数）の順序づけられた組 $x = (x_1, \cdots, x_n)$ を n 次元ベクトルといい, n 次元ベクトル全体の集合を $\mathbb{R}^n$（または $\mathbb{C}^n$）で表す.
2 つの n 次元ベクトル $x = (x_1, \cdots, x_n)$ と $y = (y_1, \cdots, y_n)$ の和を

$$x + y = (x_1 + y_1, \cdots, x_n + y_n) \tag{1.1}$$

とし, 実数（または複素数）α とのスカラー積を

$$\alpha x = (\alpha x_1, \cdots, \alpha x_n) \tag{1.2}$$

とすると, $\mathbb{R}^n$（または $\mathbb{C}^n$）はベクトル空間になる.
$\mathbb{R}^n$（または $\mathbb{C}^n$）に内積

$$(x, y) = \sum_{j=1}^{n} x_j y_j \quad \text{（または } (x, y) = \sum_{j=1}^{n} x_j \overline{y_j}\text{）} \tag{1.3}$$

が定義される. これを用いてノルム $|x|$ を

$$|x| = (x, x)^{1/2} \tag{1.4}$$

と定める. このように和とスカラー倍, 内積を定めたとき, $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{C}^n$ をそれぞれ n 次元実ユークリッド空間, n 次元複素ユークリッド空間という.
関数解析の興味は, この n 次元を無限次元にしたらどうなるかということである.

1.2　ベクトル空間

以下, 係数体を K で表す. 定義は略.

例 1.2.1: 多項式

たかだか n 次の複素係数多項式

$$x(t) = a_n t^n + a_{n-1} t^{n-1} + \cdots + a_0 \quad (a_k \in \mathbb{C})$$

の全体 P_n とする.
和とスカラー積を

$$(x+y)(t) = x(t) + y(t), \quad (\alpha x)(t) = \alpha x(t)$$

つまり, $y(t) = b_n t^n + \cdots + b_0$ としたとき,

$$(x+y)(t) = (a_n + b_n)t^n + \cdots + (a_0 + b_0),$$
$$(\alpha x)(t) = (\alpha a_n)t^n + \cdots + (\alpha a_n)$$

と定めたものは n 次元ベクトル空間.

例 1.2.2: 連続関数

閉区間 $[0,1]$ で定義された複素数値連続関数の全体を $C[0,1]$ とする.
和とスカラー積を,

$$(x+y)(t) = x(t) + y(t), \quad (\alpha x)(t) = \alpha x(t)$$

と定めると, $C[0,1]$ は無限次元ベクトル空間. なぜなら, $x_k(t) = t^{k-1}(k = 1, 2, \cdots)$ の任意の n 個の組は 1 次独立だからである.

1.3 ノルム空間

線形空間上のベクトルの”長さ”を測るものとしてノルムがある.

定義 1.1: ノルム

線形空間 X の各点（ベクトル）に対し, 実数 $\|x\|$ が対応して, 次の条件を満たすように定義されているとき, X にノルムが定まっているといい, $\|x\|$ を x のノルムという:

(i) $\|x\| \geq 0$

(ii) $\|x\| = 0$ と $x = 0$ が同値.

(iii) $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\| \quad (\alpha \in K)$

(iv) $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$(三角不等式)

また, ノルムの定義されたベクトル空間をノルム空間という.

例 1.3.1: 有限次元の L^1, L^2, L^p, L^∞ ノルム

X を n 次元ベクトル空間とする. $x = x_1 + \cdots + x_n \in X$ とする. (ただし, $x_1, \cdots, x_n \in X$ は互いに独立なベクトル)

- L^1 ノルムは
$$\|x\|_1 = \sum_{k=1}^{n} |x_k| \tag{1.5}$$
で定義される.
- L^2 ノルムは
$$\|x\|_2 = \left(\sum_{k=1}^{n} x_k^2 \right)^{1/2} \tag{1.6}$$
で定義される.
- L^p ノルムは
$$\|x\|_p = \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^p \right)^{1/p} \tag{1.7}$$
で定義される.
- L^∞ ノルムは
$$\|x\|_\infty = \max\{|x_1|, |x_2|, \cdots, |x_n|\} \tag{1.8}$$
で定義される.

以上のいずれもノルムの条件を満たす.

ノルム空間 X の 2 元 x, y に対し, 距離 $d(x, y)$ を
$$d(x, y) = \|x - y\| \tag{1.9}$$
と定めると, これは距離の公理

(i) $d(x, y) \geq 0$

(ii) $d(x, y) = 0$ となるのは, $x = y$ のときのみ

(iii) $d(x, y) = d(y, x)$

(iv) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$

を満たす．つまりノルム空間ならば距離空間である．したがって位相が導入される．すなわち，ノルム空間 X の中の点列 $\{x_n\}$ が $x \in X$ に収束するとは，

$$\|x_n - x\| \to 0 \quad (n \to \infty)$$

が成立するときである．このとき，x を $\{x_n\}$ の極限といい，$x_n \to x$ と書く．

命題 1.3.1

ノルム空間において，和とスカラー積の演算は連続である．すなわち，

(i) $x_n \to x, y_n \to y$ ならば $x_n + y_n \to x + y$

(ii) $\alpha_n \to \alpha, x_n \to x$ ならば $\alpha_n x_n \to \alpha x$

証明

(i) 三角不等式から，

$$\|(x_n + y_n) - (x + y)\| \leq \|x_n - x\| + \|y_n - y\| \to 0$$

(ii) ノルムの条件から，

$$\begin{aligned}
\|\alpha_n x_n - \alpha x\| &= \|\alpha_n x_n - \alpha x_n + \alpha x_n - \alpha x\| \\
&= \|(\alpha_n - \alpha)x_n + \alpha(x_n - x)\| \\
&\leq |\alpha_n - \alpha|\|x_n\| + |\alpha|\|x_n - x\| \\
&\leq |\alpha_n - \alpha|\|x_n - x\| + |\alpha_n - \alpha|\|x\| + |\alpha|\|x_n - x\| \\
&\to 0
\end{aligned}$$

（証明おしまい）

命題 1.3.2

ノルムは，ノルム空間 X 上の連続関数である．つまり，

$$x_n \to x \text{ ならば } \|x_n\| \to \|x\|$$

証明

まず，$x, y \in X$ について $\|x\| \geq \|y\|$ ならば三角不等式から

$$\|x\| - \|y\| \leq \|x - y\|$$

が言える．$\|x\| \leq \|y\|$ の場合も同じ議論を行うことで，結局，不等式

$$|\|x\| - \|y\|| \leq \|x - y\|$$

が得られる．したがって，

$$\left|\|x_n\| - \|x\|\right| \leq \|x_n - x\| \to 0.$$

（証明おしまい）

例 1.3.2: 多項式のノルム

例 1.2.1 で定めたベクトル空間の元 $x(t) = \sum_{j=0}^{n} a_j t^j$ に対して，

$$\|x\| = \sum_{j=0}^{n} |a_j|$$

とおくと，ノルムの条件を満たす．実際，(i) から (iii) は明らかで，(iv) を満たすことは

$$\|x + y\| = \sum_{j=0}^{n} |a_j + b_j| \leq \sum_{j=0}^{n} |a_j| + \sum_{j=0}^{n} |b_j| = \|x\| + \|y\|$$

からわかる．

例 1.3.3: 連続関数のノルム

Ω を $\mathbb{R}^n$ の有界な開集合とする．$\bar{\Omega}$ 上で連続な関数全体の集合を $C(\bar{\Omega})$ と書く．
$C(\bar{\Omega})$ の元 x, y に対し，和を $(x + y)(t) = x(t) + y(t)$，スカラー積を $(\alpha x)(t) = \alpha(x(t))$ と定めると，$C(\bar{\Omega})$ は線形空間になる．さらに，$x \in C(\bar{\Omega})$ に対して，

$$\|x\| = \sup_{t \in \bar{\Omega}} |x(t)|$$

と定めると，これはノルムの条件を満たす．
(任意の $t \in \bar{\Omega}$ に対して $|x(t) + y(t)| \leq |x(t)| + |y(t)| \leq \|x\| + \|y\|$ より，$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ が成立)

ノルム空間 X の点列 $\{x_n\}$ がある X の元 x に収束すれば，$\|x_n - x_m\| \leq \|x_n - x\| + \|x_m - x\|$ より

$$\lim_{n,m \to \infty} \|x_n - x_m\| = 0 \tag{1.10}$$

を満たす．この式 (1.10) を満たす点列 $\{x_n\}$ のことをコーシー列という．

定義 1.2: バナッハ空間

すべてのコーシー列が X の中に極限をもつとき, X は完備であるという. 完備なノルム空間のことを特にバナッハ空間という.

バナッハ空間は関数解析において最も重要な概念である.

1.4 バナッハ空間の例

まず, $\mathbb{R}$ がバナッハ空間であることが基本的なので, 示しておく. 『解析入門 I』[2] を参考にする.

定理 1.4.1: ボルツァーノ・ワイエルシュトラスの定理

有界実数列 $\{x_j\}$ は常に収束する部分列を持つ.

証明

$\{x_j\}$ は有界なので, ある閉区間 $I = [b, c]$ について $x_j \in I$
いま, 有界閉区間の列 $\{I_k\}$ を次のように定める. まず

$$I_0 = I$$

とする. I_k が定義されているとき, $d_k = \frac{b_k + c_k}{2}$ とし, $[b_k, d_k]$ と $[d_k, c_k]$ のうち無限個の x_j を含む方を $I_{k+1} = [b_{k+1}, c_{k+1}]$ とする.
ここで, $I_0 \supset I_1 \supset \cdots \supset I_k \supset \cdots$ であり, $k \to \infty$ で $c_k - b_k = \frac{c-b}{2^k} \to 0$ より, はさみうちの原理からある実数 a が存在し,

$$\lim_{k\to\infty} b_k = \lim_{k\to\infty} c_k = a$$

となる.
I_k の定義の仕方から, 任意の k に対し $x_m \in I_k$ となる自然数 m は無限個存在する. $j(k)$ を $j(k-1) < m$ と $x_m \in I_k$ を満たす自然数 m のうち最小のものと定めると, $b_k \leq x_{j(k)} \leq$ より, はさみうちの原理から $\{x_{j(k)}\}$ は a に収束する.

（証明おしまい）

命題 1.4.1

コーシー列は有界である.

証明

極限の定義から, $n, m \geq n_1$ のとき

$$|x_m - x_n| < 1$$

となる自然数 n_1 が存在. これにより,

$$x_{n_1} - 1 \leq x_n \leq x_{n_1} + 1$$

となる. よって,

$$M = \max\{|x_0|, |x_1|, \cdots, |x_{n_1-1}|, |x_{n_1} - 1|, |x_{n_1} + 1|\}$$

とすれば $x_j \leq M$

（証明おしまい）

命題 1.4.2

コーシー列のある部分列が x に収束すれば, コーシー列も x に収束する.

証明

コーシー列 $\{x_j\}$ の部分列 $\{x_{j(k)}\}$ が x に収束するとする.

$$|x_n - x_m| < \epsilon/2 \quad (n, m > n_0)$$

かつ $j(k) > k$ より

$$|x_j(k) - x| < \epsilon/2 \quad (k > k_0)$$

より, $m_0 = \max\{n_0, k_0\}$ とすると, $k > m_0$ で

$$|x_k - x| \leq |x_k - x_{j(k)}| + |x_{j(k)} - x| < \epsilon$$

（証明おしまい）

定理 1.4.2: コーシーの収束条件

実数列 $\{x_j\}$ が収束するための必要十分条件は, $\{x_j\}$ がコーシー列となることである.

証明

必要性は明らか. 十分性について考える. 命題 1.4.1 から $\{x_j\}$ は有界であり, 定理 1.4.1 から収束する部分列をもつ. したがって, 命題 1.4.2 から, コーシー列の収束が言える.

（証明おしまい）

これは, $\mathbb{R}$ がバナッハ空間であることを示している.
さて, 他の代表的なバナッハ空間の例について考えて見る.

例 1.4.1: n **次元実ユークリッド空間**

$\mathbb{R}^n$ はバナッハ空間である.

証明

式 (1.4) で定めたノルムは, ノルムの条件を満たす. 実際,

(i) $|x| = (\sum_{i=1}^n x_i^2)^{1/2} \geq 0$

(ii) $x_i^2 = 0$ と $x_i = 0$ が同値なので $|x| = 0$ と $x = 0$ が同値

(iii) $|\alpha x| = (\sum_{i=1}^n \alpha^2 x_i^2)^{1/2} = |\alpha|(\sum_{i=1}^n x_i^2)^{1/2} = |\alpha||x|$

(iv) シュワルツの不等式 $\sum_{i_1}^n x_i y_i \leq |x||y|$ を用いると,

$$|x+y|^2 = \left(\sum_{i=1}^n (x_i + y_i)^2\right)$$
$$= |x|^2 + \left(\sum_{i=1}^n 2x_i y_i\right) + |y|^2$$

$\leq |x|^2 + 2|x||y| + |y|^2 = (|x| + |y|)^2$

となることから $|x+y| \leq |x| + |y|$

かくして, $\mathbb{R}^n$ はノルム空間である.
$\mathbb{R}^n$ のコーシー列 $\{x^{(k)}\}(x^{(k)} = (x^{(k)}{}_1, \cdots, x^{(k)}{}_n))$ に対して, ノルムの定義から

$$|x_j^{(k)} - x_j^{(l)}| \leq |x^{(k)} - x^{(l)}|$$

であるから, $x_j^{(k)}$ は各 j について $\mathbb{R}$ のコーシー列. $\mathbb{R}$ の完備性から, $x_j^{(k)} \to x_j$ となる実数 x_j が存在する. $x = (x_1, \cdots, x_n)$ と置くと,

$$|x^{(k)} - x| = \sum_{j=1}^n |x_j^{(k)} - x_j|^2 \to 0 \quad (k \to \infty)$$

以上から, $x^{(k)} \to x \in \mathbb{R}^n$ であり, $\mathbb{R}^n$ はバナッハ空間である.

（証明おしまい）

解答: 問 1.9(P_n)

P_n 上のノルムは

$$\|x\| = \sum_{j=0}^{n} |a_j|$$

で定められた． この空間上でのコーシー列 $\{x^{(k)}\}(x^{(k)}(t) = \sum_{j=0}^{n} a_j^{(k)} t^j)$ に対して,

$$\|x^{(k)} - x^{(l)}\| = \sum_{j=0}^{n} |a_j^{(k)} - a_j^{(l)}| \geq |a_j^{(k)} - a_j^{(l)}|$$

となるため, 各 j について $\{a_j^{(k)}\}$ は $\mathbb{C}$ のコーシー列であり, $\mathbb{C}$ はバナッハ空間なので, $a_j^{(k)} \to a_j$ となる複素数 a_j が存在.
$x(t) = \sum_{j=0}^{n} a_j t^j$ に対して,

$$\|x^{(k)} - x\| = \sum_{j=0}^{n} |a_j^{(k)} - a_j| \to 0$$

である. よって, $x^{(k)} \to x$ であり, P_n はバナッハ空間.

（おしまい）

例 1.4.2: 連続関数空間

ノルム空間 $C(\bar{\Omega})$ はバナッハ空間.

証明

$\{x^{(k)}\}$ を $C(\bar{\Omega})$ のコーシー列とする. 各 $t \in \bar{\Omega}$ に対して,

$$|x^{(k)}(t) - x^{(l)}(t)| \leq \|x^{(k)} - x^{(l)}\| \tag{1.11}$$

であるから, $\{x^{(k)}(t)\}$ は $\mathbb{R}$ のコーシー列, $\mathbb{R}$ は完備であるから, $x^{(k)}(t) \to x(t)$ となる実数 $x(t)$ が存在.
任意の $\epsilon > 0$ に対して, 自然数 N が存在して,

$$\|x^{(k)} - x^{(l)}\| < \epsilon \quad (k, l > N)$$

となる. 式 (1.11) で $l \to \infty$ とすれば

$$|x^{(k)}(t) - x(t)| \leq \epsilon \quad (k > N) \tag{1.12}$$

$k > N$ を固定すると, $x^{(k)}$ は $\bar{\Omega}$ 上連続であるから, 一様連続. よって, 正数 δ が存在して,

$$|x^{(k)}(t) - x^{(k)}(t')| < \epsilon \quad (|t - t'| < \delta)$$

この式と式 (1.12) から,

$$
\begin{aligned}
|x(t)-x(t')| &\le |x(t)-x^{(k)}(t)| + |x^{(k)}(t)-x^{(k)}(t')| + |x^{(k)}(t)-x(t')| \\
&\le 3\epsilon \quad (|t-t'|<\delta)
\end{aligned}
$$

ゆえに, $x(t)$ が $\bar{\Omega}$ 上連続である.
式 (1.12) において, t について上限を取れば,

$$
\|x^{(k)}-x\| = \sup_{t\in\bar{\Omega}} |x^{(k)}(t)-x(t)| \le \epsilon
$$

となるから, $C(\bar{\Omega})$ は完備である. すなわちバナッハ空間である.
（証明おしまい）

$p\in[1,\infty)$ とする. $\mathbb{R}^n$ の開集合 Ω 上の可測関数 u で,

$$
\|u\|_{L^p} = \left(\int_\Omega |u(y)|^p \mathrm{d}y\right)^{1/p} < \infty \tag{1.13}
$$

を満たすもの全体を $L^p(\Omega)$ と書く. ただし, $u=v(a.e.)$ となる u と v は同一視する.

定理 1.4.3: バナッハ空間 $L^p(\Omega)$

$L^p(\Omega),(1\le p<\infty)$ は, 式 (1.13) によってノルムを定めるとバナッハ空間になる.

その前にまず二つの不等式を示そう.

a) ヘルダーの不等式: $q=1-p^{-1}$ によって定まる数とすると,

$$
\left|\int_\Omega u(x)v(x)\mathrm{d}x\right| \le \|u\|_{L^p}\|v\|_{L^q} \quad (u\in L^p(\Omega), v\in L^q(\Omega)) \tag{1.14}
$$

証明

まず, 任意の $a,b\ge 0$ に対して,

$$
ab \le p^{-1}a^p + q^{-1}b^q \tag{1.15}
$$

が成立. 実際, $\phi(a)=p^{-1}a^q+q^{-1}b^q-ab$ とすると,

$$
\phi'(a)=0 \Leftrightarrow a=b^{1/(p-1)}
$$

であるから, $\phi(a)$ は $a=b^{1/(q-1)}$ で最小値を取り,
$\phi(a)\le\phi(b^{1/(q-1)})=0$ となることから式 (1.15) が成立する.
式 (1.14) を示す.

$\|u\|_{L^p}=0$ または $\|v\|_{L^q}=0$ のときは $uv=0$ より明らか.
$\|u\|_{L^p}\neq 0, \|v\|_{L^q}\neq 0$ のとき, 式 (1.15) で $a=\frac{|u(y)|}{\|u\|_{L^p}}, b=\frac{|v(y)|}{\|v\|_{L^q}}$ とすると,

$$\begin{aligned}\frac{1}{\|u\|_{L^p}\|v\|_{L^q}}\left|\int_\Omega u(y)v(y)\mathrm{d}y\right| &\leq \int_\Omega \frac{|u(y)|}{\|u\|_{L^p}}\frac{|v(y)|}{\|v\|_{L^q}}\mathrm{d}y \\ &\leq \frac{1}{p}\frac{1}{\|u\|_{L^p}^p}\int_\Omega |u(y)|^p\mathrm{d}y \\ &\quad+\frac{1}{q}\frac{1}{\|v\|_{L^q}^q}\int_\Omega |v(y)|^q\mathrm{d}y \\ &=\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1\end{aligned}$$

（証明おしまい）

b) ミンコフスキーの不等式: $1\leq p<\infty$ とする. $u,v\in L^p(\Omega)$ ならば, $u+v\in L^p(\Omega)$ であって,

$$\left(\int_\Omega |u(y)+v(y)|^p\mathrm{d}y\right)^{1/p}\leq\left(\int_\Omega |u(y)|^p\mathrm{d}y\right)^{1/p}+\left(\int_\Omega |v(y)|\mathrm{d}y\right)^{1/p} \tag{1.16}$$

が成立する. これは L^p のノルムについての三角不等式である.

証明

$p=1$ のときは明らか. $p>1$ とする. x^p の凸性から導かれる不等式

$$\begin{aligned}&\left(\frac{a+b}{2}\right)^p\leq\frac{a^p}{2}+\frac{b^p}{2},\quad a\geq 0, b\geq 0\\ &\therefore (a+b)^p\leq 2^{p-1}(a^p+b^p)\end{aligned}$$

を用いれば,

$$|u(y)+v(y)|^p\leq(|u(y)|+|v(y)|)^p\leq 2^{p-1}(|u(y)|^p+|v(y)|^p)$$

であるから, $u+v\in L^p(\Omega)$.
さらに, ヘルダーの不等式の証明から

$$\int_\Omega |u(y)||v(y)|\mathrm{d}y\leq\left(\int_\Omega |u(y)|^p\mathrm{d}y\right)^{1/p}+\left(\int_\Omega |v(y)|^q\mathrm{d}y\right)^{1/q}$$

が成り立つこと, および $(|u+v|^{p-1})^q = |u+v|^p$ より,

$$
\begin{aligned}
\int_\Omega |u(y)+v(y)|^p \mathrm{d}y &\leq \int_\Omega |u(y)+v(y)|^{p-1}|u(y)|\mathrm{d}y \\
&\quad + \int_\Omega |u(y)+v(y)|^{p-1}|v(y)|\mathrm{d}y \\
&\leq \left(\int_\Omega |u(y)+v(y)|^p \mathrm{d}y\right)^{1/q} \\
&\quad \left[\left(\int_\Omega |u(y)|^p \mathrm{d}y\right)^{1/p} + \left(\int_\Omega |v(y)|^p \mathrm{d}y\right)^{1/p}\right]
\end{aligned}
$$

$\int_\Omega |u(y)+v(y)|^p \mathrm{d}y = 0$ なら自明.
$\int_\Omega |u(y)+v(y)|^p \mathrm{d}y \neq 0$ のとき, 両辺を $\left(\int_\Omega |u(y)+v(y)|^p \mathrm{d}y\right)^{1/q}$ で割ると, 式 (1.16) が導かれる.

（証明おしまい）

準備ができたので, 定理 1.4.3 を証明する.

証明

L^p がノルム空間であることは, 上の b) と式 (1.16) からわかる. したがって, 示すべきは完備性である.

A) $\{u_n\}$ をコーシー列とする. つまり,$n, m \to \infty$ で $\|u_n - u_m\| \to 0$ である. このとき, 部分列 $\{u_{n_k}\}$ を,

$$\|u_{k+1} - u_k\|_{L^p} < \frac{1}{2^k}$$

となるように構成できる. 実際, コーシー列であることから,

$$\|u_n - u_m\| < \frac{1}{2} \quad (n, m \geq n_1)$$

なる n_1 が存在する. 同様にして,

$$\|u_n - u_m\| < \frac{1}{2^2} \quad (n, m \geq n_2)$$

となる $n_2 (> n_1)$ が存在する. このようにして $n_1, n_2, \cdots$ を選ぶと, $\{u_{n_k}\}$ が求める部分列になる. $v_k = u_{n(k)}$ とかくと,

$$\sum_{k=1}^{\infty} \|v_{k+1} - v_k\| < \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} = 1 \tag{1.17}$$

B) g_n を次のように定める.

$$\begin{cases} g_1(y) = |v_1(y)| \quad (y \in \Omega) \\ g_N(y) = |v_1(y)| + \displaystyle\sum_{k=1}^{N-1} |v_{k+1}(y) - v_k(y)| \quad (N \geq 2, y \in \Omega) \end{cases}$$

このとき, 明らかに

$$\begin{cases} g_n(y)^p \geq 0 \\ g_n(y)^p \geq g_{n+1}(y)^p \\ \quad g_n(y) \geq |v_n(y)| \end{cases} \tag{1.18}$$

つぎに, ほとんど至るところの $y \in \Omega$ に対して, $g_n(y)^p$ は有限な値に収束することを示す. $g_n(y)^p$ は単調増加なので, ∞ も含めれば収束する. 一方, 三角不等式から

$$\begin{aligned} \int_\Omega g_n(y)^p \mathrm{d}y &= \|g_n\|_{L^p}^p \\ &\leq \left(\|v_1\|_{L^p} + \sum_{k=1}^{\infty} \|v_{k+1} - v_k\| \right) \\ &\leq (\|v_1\|_{L^p} + 1)^p \end{aligned}$$

ファトゥの補題

$$\int_\Omega \lim_{n\to\infty} g_n(y)^p \mathrm{d}y \leq \lim_{n\to\infty} \int_\Omega g_n(y)^p \mathrm{d}y$$

から,

$$\int_\Omega \lim_{n\to\infty} g_n(y)^p \mathrm{d}y \leq (\|v_1\|_{L^p} + 1)^p$$

よって, $g_n(y)^p$ は, Ω のほとんど至るところで有限の値に収束する. $g_n(y) \geq 0$ かつ $g_n(y)^p \leq g_{n+1}(y)^p$ なので, g_n は単調増加でありほとんど至るところで有限な値に収束する.

$$g(y) = \lim_{n\to\infty} g_n(y) \quad a.e. y \in \Omega$$

とおくと, またファトゥの補題から

$$\int_\Omega g(y)^p \mathrm{d}y \leq (\|v_1\|_{L^p} + 1)^p$$

すなわち, $g \in L^p(\Omega)$.

C) $\{v_k\}$ が収束することを示す.

$$v_m(y) - v_n(y) = (v_{n+1}(y) - v_n(y)) + \cdots + (v_m(y) - v_{m-1}(y))$$

であることから,

$$|v_m(y) - v_n(y)| \leq \sum_{j=n}^{m-1} |v_{j+1}(y) - v_j(y)| = g_m(y) - g_n(y) \quad (1.19)$$

$\{g_m(y)\}$ はほとんど至るところの点 $y \in \Omega$ で収束するから, コーシー列である. よって, (1.19) の右辺は $m, n \to \infty$ のときゼロに収束する. すなわち, $\{v_m(y)\}$ はコーシー列, よってある $u^*(y) \in \mathbb{R}$ があって,

$$\lim_{n\to\infty} v_n(y) = u^*(y) \quad a.e. y \in \Omega$$

となる. この $u^*(y) \in L^p(\Omega)$ の元である. 実際, (1.19) で $k = 1$ とおくと, 三角不等式と $g_k \geq 0$ より,

$$|v_m(y)| \leq |v_1(y)| + g_m(y)$$

$m \to \infty$ とすれば,

$$|u^*(y)| \leq |v_1(y)| + g(y).$$

$v_1, g \in L^p(\Omega)$ であるから, $u^* \in L^p(\Omega)$.

D) (1.19) より,

$$|v_k(y) - u^*(y)|^p \leq (|v_k(y)| + |u^*(y)|)^p \leq (g_k(y) + |u^*(y)|)^p \quad (1.20)$$

$$\leq (g(y) + |u^*(y)|)^p \leq 2^{p-1} g(y)^p + 2^{p-1} |u^*(y)|^p \quad (1.21)$$

$|v_k(y) - u^*(y)|^p$ は, Ω 上 k によらぬ可積分関数 $2^{p-1}(g(y)^p + |u^*(y)|^p)$ でおさえられる. また, u^* の定義より, $|v_k(y) - u^*(y)|^p \to 0 \quad a.e.y.$ ゆえに, ルベーグの収束定理が適用できて,

$$\|v_k - u^*\|_{L^p} = \left(\int_\Omega |v_k(y) - u^*(y)|^p \mathrm{d}y \right)^{1/p} \to 0 \quad (k \to \infty). \quad (1.22)$$

E) 最後に,

$$\|u_n - u^*\|_{L^p} \to 0 \quad (n \to \infty). \quad (1.23)$$

を示そう．$\{u_n\}$ はコーシー列より，任意の $\epsilon > 0$ に対して，

$$\|u_n - v_k\|_{L^p} = \|u_n - u_{n_k}\|_{L^p} < \epsilon \quad (n, n_k > N)$$

となる N が存在する．ここで，$k \to \infty, n \to \infty$ とすれば，

$$\|u_n - u^*\|_{L^p} \leq \|u_n - v_k\|_{L^p} + \|v_k - u^*\|_{L^p} \to 0$$

以上から，$L^p(\Omega)$ はバナッハ空間．

（証明おしまい）

解答: 問 1.10($L^\infty(\Omega)$)

$\mathbb{R}$ の開集合 Ω 上ルベーグ可測な関数 $x(t)$ が本質的に有界とは

$$|x(t)| \leq \alpha \quad a.e.$$

となる定数 α が存在するときをいう．そのような α の中での下限を

$$\operatorname*{ess.sup}_{t\in\Omega} |x(t)|$$

と書く．本質的に有界なルベーグ可測関数の全体を $L^\infty(\Omega)$ と書く．ただし，$x = y a.e.$ は同一視する．このとき，$L^\infty(\Omega)$ は，$\text{ess.sup}_{t\in\Omega} |x(t)|$ によってノルムを定めるとバナッハ空間になる．

（証明）まず，$L^\infty(\Omega)$ がノルム空間になることを示す．
x, y を本質的に有界なルベーグ可測関数とする．可測関数の和は可測関数であるから，$x + y$ もルベーグ可測関数．また,$|x| \leq \alpha, |y| \leq \beta$ とすると，

$$|x(t) + y(t)| \leq |x(t)| + |y(t)| \leq \alpha + \beta$$

より，$x + y$ も本質的に有界である．また，本質的に有界なルベーグ可測関数をスカラー倍しても本質的に有界なルベーグ可測関数であるのは明らか．以上から，$L^\infty(\Omega)$ はベクトル空間．さらに，

$$|x(t) + y(t)| \leq |x(t)| + |y(t)|$$

で $|x + y| = \text{ess.sup}_{t\in\Omega} |x + y|$ となる $t = t_0$ を選ぶと，

$$\begin{aligned}\operatorname*{ess.sup}_{t\in\Omega} |x + y(t)| &\leq |x(t_0)| + |y(t_0)| \\ &\leq \operatorname*{ess.sup}_{t\in\Omega} |x(t)| + \operatorname*{ess.sup}_{t\in\Omega} |y(t)|\end{aligned}$$

となることから，このノルムについて三角不等式が成立．以上から $L^\infty(\Omega)$ はノルム空間.
次に，ノルムの完備性を示す．簡単のために $\mathrm{ess.sup}_{t\in\Omega}|x(t)| = \|x\|$ と書くことにする．$\{x_n\}$ を $L^\infty(\Omega)$ のコーシー列とする．つまり，

$$|x_n(t) - x_m(t)| \le \|x_n - x_m\| \to 0 \quad n, m \to \infty$$

である．ここで，各 $t \in \mathbb{R}$ について $\{x_n(t)\}$ は $\mathbb{R}$ のコーシー列である．それゆえ，各 t について実数 $x(t)$ が存在して $x_n(t) \to x(t)$ である．可測関数列の極限が可測関数であることから，$x(t)$ は可測関数．また，任意の実数 ϵ に対して，$n > N$ で

$$|x(t) - x_n(t)| \le \epsilon \tag{1.24}$$

であることから，$\|x_n\| = \alpha_n$ とすると，$n > N$ で

$$|x(t)| \le |x(t) - x_n(t)| + |x_n(t)| \le \epsilon + \alpha$$

であり，であるから $x(t)$ は本質的に有界．以上から，$x(t) \in L^\infty.(\Omega)$
以上から，式 (1.24) で t について上限をとると，

$$\|x - x_n\| \le \epsilon$$

より，$L^\infty(\Omega)$ について，$x_n \to x$ となる．以上からノルムは完備であり，$L^\infty(\Omega)$ がバナッハ空間であることがわかる．

（おしまい）

例 1.4.3: l^p $(1 \le p < \infty)$

無限数列 $x = (\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n, \cdots)$ で，

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k|^p < \infty, \quad (1 \le p < \infty)$$

を満たすもの全体を l^p とすると，l^p は線形空間をなす．
ノルムを

$$\|x\|_{l^p} = \left(\sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k|^p \right)^{1/p}$$

と定めると，l^p はバナッハ空間となる．

証明

- (l^p が線形空間であること)

  $f(x) = |x|^p$ の凸性から, $|a+b|^p \leq 2^{p-1}(|a|^p + |b|^p)$ である. $a = \xi_k, b = \eta_k$ として k について和を取ると,

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k + \eta_k|^p \leq 2^{p-1} \left(\sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k|^p + \sum_{k=1}^{\infty} |\eta_k|^p \right) < \infty$$

  より l^p は線形空間.

- (l^p がノルム空間であること)

  $\| \ \|_{l^p}$ は三角不等式を満たす. 実際, $y = (\eta_1, \eta_2, \cdots) \in l^p$ とすると,

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k + \eta_k|^p &= \sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k + \eta_k|^{p-1} |\xi_k + \eta_k| \\ &\leq \sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k + \eta_k|^{p-1} |\xi_k| + \sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k + \eta_k|^{p-1} |\eta_k|\end{aligned}$$

  ここで, $q^{-1} = 1 - p^{-1}$, つまり $q = \frac{p}{p-1}$ とおき, ヘルダーの不等式の証明で用いた式

$$ab \leq p^{-1} a^p + q^{-1} b^q$$

  で $a = |u_k| / \|u\|_{l^p}, b = |v_k| / \|v\|_{l^q}$ とおくと,

$$\begin{aligned}\frac{1}{\|u\|_{l^p} \|v\|_{l^p}} \sum_{k=1}^{\infty} |u_k||v_k| &\leq \frac{1}{p} \frac{1}{\|u\|_{l^p}^p} \sum_{k=1}^{\infty} |u_k|^p + \frac{1}{q} \frac{1}{\|v\|_{l^q}^q} \sum_{k=1}^{\infty} |v_k|^q \\ &\leq \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1\end{aligned}$$

  であることから, 不等式

$$\sum_{k=1}^{\infty} |u_k||v_k| \leq \left(\sum_{k=1}^{\infty} |u_k|^p \right)^{1/p} \left(\sum_{k=1}^{\infty} |v_k|^q \right)^{1/q}$$

  が導かれる. この不等式について, $|u_k| = |\xi_k|, |v_k| = |\xi_k + \eta_k|^{p-1}$ とすると,

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k + \eta_k|^{p-1} |\xi_k| \leq \left(\sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k|^p \right)^{1/p} \left(\sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k + \eta_k|^p \right)^{1/q}$$

  であり, 同様に $|u_k| = |\eta_k|, |v_k| = |\xi_k + \eta_k|^{p-1}$ とすると,

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k + \eta_k|^{p-1} |\eta_k| \leq \left(\sum_{k=1}^{\infty} |\eta_k|^p \right)^{1/p} \left(\sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k + \eta_k|^p \right)^{1/q}$$

であるから,

$$\sum_{k=1}^{\infty}|\xi_k+\eta_k|^p \leq \left\{\left(\sum_{k=1}^{\infty}|\xi_k|^p\right)^{1/p}+\left(\sum_{k=1}^{\infty}|\eta_k|^p\right)^{1/p}\right\} \cdot\left(\sum_{k=1}^{\infty}|\xi_k+\eta_k|^p\right)^{1/q}$$

ここで, $\sum_{k=1}^{\infty}|\xi_k+\eta_k|^p=0$ のときは自明. $\sum_{k=1}^{\infty}|\xi_k+\eta_k|^p\neq 0$ のとき, $(\sum_{k=1}^{\infty}|\xi_k+\eta_k|^p)^{1/q}$ で両辺割れば,

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty}|\xi_k+\eta_k|^p\right)^{1/p} \leq \left(\sum_{k=1}^{\infty}|\xi_k|^p\right)^{1/p}+\left(\sum_{k=1}^{\infty}|\eta_k|^p\right)^{1/p}$$

つまり, 三角不等式 $\|x+y\|_{l^p}\leq\|x\|_{l^p}+\|y\|_{l^p}$ が成立する. これにより, ノルムの条件を満たすことが確かめられる.

- (l^p が完備であること)

  $\{x^{(n)}\}$ を l^p のコーシー列とする. ($x^{(n)}=(\xi_1^{(n)},\xi_2^{(n)},\cdots)$) 任意の $\epsilon>0$ に対して N を適当に取れば,
  $\|x^{(n)}-x^{(l)}\|_{l^p}<\epsilon \quad (n,l>N)$ となる. 任意の m に対して

$$|\xi_j^{(n)}-\xi_j^{(n)}|\leq\left(\sum_{j=1}^{m}|\xi_j^{(n)}-\xi_j^{(l)}|^p\right)^{1/p}\leq\|x^{(n)}-x^{(l)}\|_{l^p}<\epsilon \tag{1.25}$$

  であるから, 各 j に対して $\{\xi_j^{(n)}\}$ は $\mathbb{R}$ のコーシー列となる. $\mathbb{R}$ の完備性から $\xi_j^{(n)}\to\xi_j \quad (n\to\infty)$ なる実数 ξ_j が存在. 式 (1.25) において, $l\to\infty$ とすると,

$$\left(\sum_{j=1}^{m}|\xi_j^{(n)}-\xi_j|^p\right)^{1/p}<\epsilon \tag{1.26}$$

  また, 三角不等式から

$$\left(\sum_{j=1}^{m}|\xi_j|^p\right)^{1/p}\leq\left(\sum_{j=1}^{m}|\xi_j^{(n)}-\xi_j|^p\right)^{1/p}+\left(\sum_{j=1}^{m}|\xi_j^{(n)}|^p\right)^{1/p}$$

  $m\to\infty$ とすると, 右辺は有限であるから, $\sum_{j=1}^{m}|\xi_j|^p<\infty$ であり, $x=(\xi_1,\xi_2,\cdots)$ は l^p の元.

  式 (1.26) で $m\to\infty$ とすれば, $n\to\infty$ のとき $\|x^{(n)}-x\|\to 0$ であることがわかる. よって l^p は完備であり, したがってバナッハ空間である.

（証明おしまい）

例 1.4.4: l^∞

無限数列 $x = (\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n, \cdots)$ で,

$$\sup_k |\xi_k| < \infty$$

を満たすもの全体を l^∞ とすると, l^∞ は線形空間をなす.
ノルムを

$$\|x\|_{l^\infty} = \sup_k |\xi_k|$$

と定めると, l^∞ はバナッハ空間となる.

証明

l^∞ が線形空間なのは明らか.
$\| \ \|_{l^\infty}$ はノルムの条件を満たす.
実際, $x = (\xi_1, \xi_2, \cdots), y = (\eta_1, \eta_2, \cdots) \in l^\infty$ について, 任意の k で

$$|\xi_k + \eta_k| \leq |\xi_k| + |\eta_k| \leq \sup_i |\xi_i| + \sup_j |\eta_j|$$

より, 三角不等式 $\|x + y\|_{l^\infty} \leq \|x\|_{l^\infty} + \|y\|_{l^\infty}$ が成立.
完備性を示す. コーシー列 $\{x^{(n)}\}$ とする.

$$|\xi_j^{(n)} - \xi_j^{(l)}| \leq \|x^{(n)} - x^{(l)}\|_{l^\infty} \to 0$$

より, 各 j について $\{\xi_j^{(n)}\}$ は $\mathbb{R}$ のコーシー列. よって極限 ξ_j をもつ.
任意の $\epsilon > 0$ に対して適当に N を取れば,

$$|\xi_j^{(n)} - \xi_j^{(l)}| \leq \|x^{(n)} - x^{(l)}\|_{l^\infty} < \epsilon$$

$l \to \infty$ とすれば,

$$\begin{aligned} & |\xi_j^{(n)} - \xi_j| \leq \epsilon \\ \therefore \quad & |\xi_j| \leq |\xi_j^{(n)} - \xi_j| + |\xi_j^{(n)}| < \infty \end{aligned}$$

j についての上限を取れば, $x = (\xi_1, \xi_2, \cdots) \in l^\infty$ がわかる. さらに,

$$\|x^{(n)} - x\|_{l^\infty} = \sup_j |\xi_j^{(n)} - \xi_j| < \infty$$

である. これは $n \to \infty$ のとき $x^{(n)} \to \infty$ を示している. l^∞ は完備となりバナッハ空間である.

（証明おしまい）

1.5 可分と同値なノルム

定義 1.3: 稠密性・可分性

X はバナッハ空間とする．バナッハ空間の部分集合 L が X で稠密であるとは，

$$\bar{L} = X \quad (\bar{L} \text{ は } L \text{ の閉包})$$

をみたすことを言う．X が可分であるとは，X において稠密な部分集合が存在するときをいう．

例 1.5.1: $\mathbb{R}^n$ の可分性

$\mathbb{R}^n$ は可分なバナッハ空間である．
実際，$L = \{(x_1, \cdots, x_n) | x_j \in \mathbb{Q}\}$ は可算集合であり，L の閉包は $\mathbb{R}^n$ である．

例 1.5.2: $C(\bar{\Omega})$ の可分性

Ω を $\mathbb{R}^n$ の有界閉集合とする．$C(\bar{\Omega})$ は可分である．

この例の証明には，ワイエルシュトラスの多項式近似を用いる．

定理 1.5.1: ワイエルシュトラスの多項式近似

$f(t)$ を有界区間 $[a, b]$ で連続な任意の関数とするとき，区間 $[a, b]$ 上に一様に $f(x)$ に収束するような多項式の列 $\{P_n(t)\}$ が存在する．

証明

変換 $t' = (t-a)/(b-a)$ により，区間 $[a, b]$ を $[0, 1]$ に直すことができる．このとき，t の多項式は t' の多項式になること，またその逆も成り立つことを考慮すれば，区間 $[a, b]$ の代わりに区間 $[0, 1]$ の関数のみを考えても問題がないことがわかる．以下，$[a, b] = [0, 1]$ とする．
まず，二項定理から，

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k} = (x+y)^n \tag{1.27}$$

である．式 (1.27) を x で微分し，x をかけると，

$$\sum_{k=0}^{n} k \binom{n}{k} x^k y^{n-k} = nx(x+y)^{n-1} \tag{1.28}$$

同じ操作を式 (1.28) に行うと,

$$\sum_{k=0}^{n} k^2 \binom{n}{k} x^k y^{n-k} = nx(nx+y)(x+y)^{n-2} \tag{1.29}$$

式 (1.27) で $x = t, y = 1 - t$ とすると,

$$1 = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} t^k (1-t)^{n-k} \tag{1.30}$$

$(1.27) \times n^2 t^2 + (1.28) \times (-2nt) + (1.29)$ とすれば,

$$\sum_{k=0}^{n} (k-nt)^2 \binom{n}{k} t^k (1-t)^{n-k} = nt(1-t) \leq \frac{n}{4} \tag{1.31}$$

さて, 多項式

$$P_n(t) = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \binom{n}{k} t^k (1-t)^{n-k} \tag{1.32}$$

が $[0,1]$ 上一様に $f(t)$ に収束することを示す. (1.30) より,

$$f(t) - P_n(t) = \sum_{k=0}^{n} \left[f(t) - f\left(\frac{k}{n}\right) \right] \binom{n}{k} t^k (1-t)^{n-k}$$

$f(t)$ は閉区間 $[0,1]$ 上で連続なので, 一様連続. よって, 任意の $\epsilon > 0$ に対して, $|t - t'| < \delta$ ならば $|f(t) - f(t')| < \epsilon$ となる $\delta > 0$ が存在する. t を固定したとき, $|t - \frac{k}{n}| < \delta$ となる k についての和を Σ_{I}, $|t - \frac{k}{n}| \geq \delta$ となる k についての和を Σ_{II} とすると,

$$\begin{aligned} |f(t) - P_n(t)| &\leq \sum_{k=0}^{n} \left| f(t) - f\left(\frac{k}{n}\right) \right| \binom{n}{k} t^k (1-t)^{n-k} \\ &= \Sigma_{\mathrm{I}} + \Sigma_{\mathrm{II}} \end{aligned}$$

明らかに,

$$\Sigma_{\mathrm{I}} \leq \epsilon \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} t^k (1-t)^{n-k} = \epsilon$$

また, $M = \max_{t \in [0,1]} |f(t)|$ とすると, $|f(t) - f(k/n)| \leq 2M$ および, $1 \leq |nt - k|/n\delta$ であるから, (1.31) を用いると,

$$\Sigma_{\mathrm{II}} \leq \frac{2M}{n^2\delta^2} \sum_{k=0}^{n} (k-nt)^2 \binom{n}{k} t^k (1-t)^{n-k} \leq \frac{M}{2n\delta^2}$$

であるから, n を十分大きく取れば $\Sigma_{\mathrm{II}} < \epsilon$ とできる.

（証明おしまい）

例 1.5.2 の証明を行う.

証明

$n = 1, \Omega = (0,1)$ の場合の証明をする. L を有理数を係数にもつ多項式の全体

$$L = \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} a_k t^k \,\middle|\, a_k \in \mathbb{Q} \right\}$$

とすれば, L は可算集合である. $\bar{L} = C[0,1]$ を示せばよい.
例 1.3.3 で, $C[0,1]$ のノルム $\| \ \|_c$ は

$$\|x\|_c = \sup_{t\in[0,1]} |x(t)|$$

と定めたことを思い出す. 適当な $u \in C[0,1]$ について, ワイエルシュトラスの多項式近似 (定理 1.5.1) から, 任意の $\epsilon > 0$ に対し,

$$\|u - P\|_c < \epsilon$$

となる多項式 $P(t) = a_N t^N + \cdots + a_0$ が存在する.
$\mathbb{Q}$ が $\mathbb{R}$ で稠密であることから, 各 $a_j \in \mathbb{R}$ にいくらでも近い有理数が存在するため,

$$\|P - Q\|_c < \epsilon, \quad Q(t) = b_N t^N + \cdots + b_0$$

と有理数 b_j を適当に取ることができる. つまり, 任意の $u \in C[0,1]$ について, 各 $\epsilon > 0$ に対し $Q \in L$ が存在して,

$$\|u - Q\|_c \le \|u - P\|_c + \|P - Q\|_c < 2\epsilon$$

とできる. したがって, $\bar{L} = C[0,1]$ となる.

(証明おしまい)

ノルム $\| \ \|$ が定まったバナッハ空間について, かわりに $2\| \ \|$ をノルムにしたものもバナッハ空間となる. この二つのバナッハ空間の構造は同じである.
これを一般化し, ノルムの同値性を次により定める.

定義 1.4: ノルムの同値性

同じ線形空間 X に 2 つのノルム $\| \ \|_1, \| \ \|_2$ が定義されているとする.
正数 c, c' が存在し,

$$c\|x\|_2 \le \|x\|_1 \le c'\|x\|_2$$

となるとき, ノルム $\| \ \|_1$ と $\| \ \|_2$ は同値であるという.
このとき, 2 つのバナッハ空間の構造は同じである.

解答: 問 1.11（同値なノルムの完備性）

ノルム $\| \ \|_1$ において線形空間 X が完備ならば, $\| \ \|_1$ に同値なノルム $\| \ \|_2$ においても完備である.

(証明) $\| \ \|_1$ についてのコーシー列 $\{x_n\}$ を考えると, 同値性から

$$c\|x_n - x_m\|_2 \leq \|x_n - x_m\|_1 < \epsilon$$

なので, $\{x_n\}$ は $\| \ \|_2$ についてもコーシー列である．$\| \ \|_1$ で $x_n \to x$ となる x が存在するから,

$$\|x_n - x\|_2 \leq \frac{1}{c}\|x_n - x\|_1 < \frac{\epsilon}{c}$$

よって, $\| \ \|_2$ でも $x_n \to x$ となる.

（おしまい）

解答: 問 1.12(有限次元空間のノルムの同値性)

X が有限次元空間ならば, X 上の任意の 2 つのノルムは互いに同値である.

（証明） X を n 次元空間とする．基底 $\{x_1, \cdots, x_n\}$ を用いて $x = \alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_n x_n$ と書くとする.

$$\|x\|_\alpha = \max_k\{|\alpha_k|\}$$

はノルムの条件を満たす.

ノルム $\| \ \|_\alpha$ に関して, X の任意のノルムに対し

$$c\|x\| \leq \|x\|_\alpha \leq c'\|x\| \quad (\exists c, c' > 0, \forall x \in X)$$

が成立することを示せば十分である．なぜなら,

$$\begin{cases} c_1\|x\|_1 \leq \|x\|_\alpha \leq c_1'\|x\|_1 \\ c_2\|x\|_2 \leq \|x\|_\alpha \leq c_2'\|x\|_2 \end{cases}$$

が成立が言えれば,

$$\frac{c_2}{c_1'}\|x\|_2 \leq \|x\|_1 \leq \frac{c_2'}{c_1}\|x\|_2$$

となり, $\| \ \|_1$ と $\| \ \|_2$ の同値性が導けるからである.

まず $c\|x\| \leq \|x\|_\alpha$ を示す．三角不等式から，

$$\|x\| \leq \sum_{k=1}^{n} |\alpha_k| \|x_k\| \leq (\max_k \{|\alpha_k|\}) \sum_{k=1}^{n} \|x_k\| = \left(\sum_{k=1}^{n} \|x_k\| \right) \|x\|_\alpha \tag{1.33}$$

ここで，$c = 1/\sum_{k=1}^{n} \|x_k\|$ とすれば $c\|x\| \leq \|x\|_\alpha$ がわかる．

次に，$\|x\|_\alpha \leq c'\|x\|$ を示す．$1/c' = C$ とする．$\|x\|_\alpha = 0$ のとき，$x = 0$ なので不等式の成立は自明．よって $\|x\|_\alpha > 0$ とし，

$$0 < C \leq \frac{\|x\|}{\|x\|_\alpha}$$

を示すことにする．$y(x) = x/\|x\|_\alpha$ と定めると，$\|y\| = \|x\|/\|x\|_\alpha$ かつ $\|y\|_\alpha = 1$ なので，結局，示すべき式は，

$$0 < C \leq \|y\| \quad (y \in Y = \{x \in X | \|x\|_\alpha = 1\}) \tag{1.34}$$

である．
いま，$\| \ \|_\alpha$ について，$y^{(k)} \to y$ となれば，

$$\|y^{(k)} - y\| \leq \frac{1}{c} \|y^{(k)} - y\|_\alpha \to 0$$

より，$\| \ \|$ についても $y^{(k)} \to y$. ノルムはノルム空間上の連続関数であるため，$f(y) = \|y\|$ は連続関数．最大値・最小値の原理から，Y のコンパクト性が言えればノルムが最小値を持つことが言える．さらに言えば，有限次元ベクトル空間がコンパクトであることはそれが有界閉集合であることと同値なので，Y が有界閉集合であることを言えればよい．
写像 $g : X \to K^n : g(x) = (\alpha_1, \cdots, \alpha_n)$ について，$x^{(k)} \to x$ ならば $(\alpha_1^{(k)}, \cdots, \alpha_n^{(k)}) \to (\alpha_1, \cdots, \alpha_n)$ であるから g は同相写像である．$V = \{(\alpha_1, \cdots, \alpha_n) | \sup_k |\alpha_k| = 1\} \subset K^n$ は明らかに有界閉集合であるから，$Y = g^{-1}(V)$ も有界閉集合である．
以上から，$f(y)$ が Y で最小値をもつことがわかる．つまり，

$$\exists y_0 \in Y s.t. \forall y \in Y, f(y) \geq f(y_0)$$

である．$f(y_0) = \|y_0\| = 0$ だとすると $y_0 = 0 \notin Y$ となり矛盾するので，$f(y_0) > 0$. よって，$C = f(y_0)$ とすれば (1.34) の成立が言える．これにより，有限次元ベクトル空間のノルムの同値性が言える．

（おしまい）

注意 1.5.1

X, Y を 2 つの任意の集合とし, 各 $x \in X$ に $y \in Y$ を一意的に対応させるとき, X 上で定義され Y に値を持つ作用素 $y = f(x)$ が与えられている, または X から Y への写像 f が与えられたという. 特に, Y が実数または複素数のとき, 作用素を汎関数という.
X, Y をノルム空間とする. X から Y への全単射でかつ X での x のノルムの値と Y での $f(x)$ のノルムの値が等しいような写像 f が存在するとき, X と Y は等長であるという.

1.6 完備化

ノルム空間における作用素について考えるとき, 極限操作が必要になるが, 空間が完備でないと扱いが難しい. そのため, 有理数体 $\mathbb{Q}$(完備ではない) から実数体 $\mathbb{R}$(完備である) を作るのと同じ考え方で, 完備でないノルム空間からバナッハ空間を作り, もとのノルム空間がこのバナッハ空間の稠密な部分集合であるようにする.

完備でないノルム空間 X が与えられたとき, X のコーシー列全体 $\{x_n\}$ を考える. もし 2 つのコーシー列 $\{x_n\}, \{x'_n\}$ が

$$\lim_{n \to 0} \|x_n \to x'_n\| = 0$$

をみたすならば, $\{x_n\} \sim \{x'_n\}$ と書くことにすると, $\sim$ は同値律

(i) $\{x_n\} \sim \{x_n\}$

(ii) $\{x_n\} \sim \{x'_n\}$ ならば $\{x'_n\} \sim \{x_n\}$

(iii) $\{x_n\} \sim \{x'_n\}$ かつ $\{x'_n\} \sim \{x''_n\}$ ならば $\{x_n\} \sim \{x''_n\}$

をみたす. (実際, (iii) は

$$\|x_n - x''_n\| \leq \|x_n - x'_n\| + \|x'_n - x''_n\|$$

よりわかる.) コーシー列全体を, この同値関係によって分類できる.

$\{x_n\}$ に同値なものを, 1 つのクラス $\tilde{x}$ にまとめ, これらのクラスを元とする新しい空間 $\tilde{X}$ を考えることができる. (つまり, $\tilde{X}$ は X の $\sim$ による同値類である.) $\{x_n\}$ は, クラス $\tilde{x}$ の代表の 1 つである.

和を定義する. $\tilde{x}, \tilde{y} \in \tilde{X}$ の代表元をそれぞれ $\{x_n\}, \{y_n\}$ としたとき, 不等式

$$\|(x_n + y_n) - (x_m + y_m)\| \leq \|x_n - x_m\| + \|y_n - y_m\|$$

から $\{x_n+y_n\}$ はコーシー列となる．しかも, $\{x_n\}\sim\{x'_n\},\{y_n\}\sim\{y'_n\}$ ならば,

$$\|(x'_n+y'_n)-(x_n+y_n)\|\leq\|x'_n-x_n\|+\|y'_n-y_n\|$$

であるから $\{x_n+y_n\}\sim\{x'_n+y'_n\}$ である．よって, $\tilde{X}$ での和 $\tilde{x}+\tilde{y}$ は well-defined である．同様にして, スカラー α により $\tilde{X}$ でのスカラー積 $\alpha\tilde{x}$ が $\{\alpha x_n\}$ のクラスとして定まる．これにより, $\tilde{X}$ はベクトル空間になる.

さらに, クラス $\tilde{x}$ から代表元 $\{x_n\}$ をとると,

$$|\|x_n\|-\|x_m\||\leq\|x_n-x_m\|$$

より $\{\|x_n\|\}$ は $\mathbb{R}$ のコーシー列であり, $\mathbb{R}$ の完備性から $\{\|x_n\|\}$ は収束する．$\{x_n\}\sim\{x'_n\}$ では

$$\|x_n\|\leq\|x_n-x'_n\|+\|x'_n\| \text{ かつ } \|x'_n\|\leq\|x_n-x'_n\|+\|x_n\|$$

から

$$\lim_{n\to\infty}\|x_n\|=\lim_{n\to\infty}\|x'_n\|$$

であるから, $\beta=\lim_{n\to\infty}\|x_n\|$ とおくと, β は $\tilde{x}$ の代表元の取り方によらず定まる．この β を $\|\tilde{x}\|$ とする.

$\tilde{X}$ は $\|\tilde{x}\|$ によりノルム空間になる. 実際,

(i)

$$\|\tilde{x}\|=\lim_{n\to\infty}\|x_n\|\geq 0$$

(ii) $\|\tilde{x}\|=0$ のとき,

$$\|\tilde{x}\|=\lim_{n\to\infty}\|x_n\|=\lim_{n\to\infty}\|x_n-0\|=0$$

より, $\tilde{x}$ の任意の代表元 $\{x_n\}$ について, $\{x_n\}\sim 0$ であり, $\tilde{x}=0$.

(iii) 任意のスカラー量 $\alpha\in K$ に対し,

$$\|\alpha\tilde{x}\|=\lim_{n\to\infty}\|\alpha x_n\|=|\alpha|\lim_{n\to\infty}\|x_n\|=|\alpha|\|\tilde{x}\|$$

(iv) $\tilde{x},\tilde{y},\tilde{z}$ の代表元 $\{x_n\},\{y_n\},\{z_n\}$ について, 任意の n について

$$\|x_n+z_n\|\leq\|x_n+y_n\|+\|y_n+z_n\|$$

であるから, $n\to\infty$ として

$$\|\tilde{x}+\tilde{z}\|\leq\|\tilde{x}+\tilde{y}\|+\|\tilde{y}+\tilde{z}\|$$

がなりたつ.

と, $\|\tilde{x}\|$ はノルムの条件を満たす.

$\tilde{X}$ は完備である.

証明

$\tilde{X}$ のコーシー列 $\{\tilde{x}_n\}$ について考える．つまり, $\lim_{n,m\to\infty}\|\tilde{x}_n-\tilde{x}_m\|=0$ である．各 $\tilde{x}_n$ について, 代表元 $\{x_1^{(n)},x_2^{(n)},\cdots,x_k^{(n)},\cdots\}$ を選んでおく．これはコーシー列だから, 適当な k_n が存在し,

$$\|x_m^{(n)}-x_{k_n}^{(n)}\|\leq n^{-1}\quad(m>k_n)\tag{1.35}$$

とできる．このとき, 点列 $\{x_{k_n}^{(n)}\}=\{x_{k_1}^{(1)},x_{k_2}^{(2)},\cdots,x_{k_n}^{(n)},\cdots\}$ を含むクラスが $\{x_n\}$ の収束点であることを示そう.

まず, $\{x_{k_n}^{(n)}\}$ がコーシー列となることを示す．$x\in X$ に対し, 自明なコーシー列 $\{x,x,\cdots,x,\cdots\}$ と同値なコーシー列の同値類を $\tilde{x}_*\in\tilde{X}$ とする．写像 $J:X\to\tilde{X}$ を $Jx=\tilde{x}_*$ と定める．この写像が単射でかつ $\|x\|=\|Jx\|$(左辺は X についてのノルム, 右辺は $\tilde{X}$ についてのノルム) を満たすことは容易にわかる．いま, (1.35) より,

$$\|\tilde{x}_n-Jx_{k_n}^{(n)}\|=\lim_{m\to\infty}\|x_m^{(n)}-x_{k_n}^{(n)}\|\leq n^{-1}$$

よって,

$$\begin{aligned}\|x_{k_n}^{(n)}-x_{k_m}^{(m)}\|&=\|Jx_{k_n}^{(n)}-Jx_{k_m}^{(m)}\|\\&\leq\|Jx_{k_n}^{(n)}-\tilde{x}_n\|+\|\tilde{x}_n-\tilde{x}_m\|+\|Jx_{k_m}^{(m)}-\tilde{x}_m\|\\&\leq n^{-1}+\|\tilde{x}_n-\tilde{x}_m\|+m^{-1}\end{aligned}$$

であり, $\{\tilde{x}_n\}$ がコーシー列なので $n,m\to\infty$ で右辺は 0 に収束する．これより, $\{x_{k_n}^{(n)}\}$ はコーシー列である．これを含むクラスを $\tilde{x}\in\tilde{X}$ とすると, (1.35) より,

$$\|\tilde{x}-\tilde{x}_n\|\leq\|\tilde{x}-Jx_{k_n}^{(n)}\|+\|Jx_{k_n}^{(n)}-\tilde{x}_n\|\leq\|\tilde{x}-Jx_{k_n}^{(n)}\|+n^{-1}$$

右辺第一項について, $\|x_{k_n}^{(n)}-x_{k_m}^{(m)}\|\leq n^{-1}+\|\tilde{x}_n-\tilde{x}_m\|+m^{-1}$ より,

$$\|\tilde{x}-Jx_{k_n}^{(n)}\|=\lim_{m\to\infty}\|x_{k_m}^{(m)}-x_{k_n}^{(n)}\|\leq\lim_{m\to\infty}(n^{-1}+\|\tilde{x}_n-\tilde{x}_m\|+m^{-1})$$

以上から,

$$\lim_{n\to\infty}\|\tilde{x}-\tilde{x}_n\|\leq\lim_{n,m\to\infty}\|\tilde{x}_n-\tilde{x}_m\|=0$$

かくして, $\tilde{x}_n$ は $\tilde{x}\in\tilde{X}$ に収束するので, $\tilde{X}$ は完備である.

（証明おしまい）

さらに, X の J による像 $\{Jx|x\in X\}$ は $\tilde{X}$ の中稠密である.

証明

任意の $\tilde{x} \in \tilde{X}$ をとり, これの代表元 $\{x_n\}$ について, $\{x_n\}$ はコーシー列であるから, 任意の $\epsilon > 0$ に対して適当な N をとれば任意の $n, m > N$ に対し $\|x_n - x_m\| < \epsilon$ とすることができる. このような n に対して

$$\|\tilde{x} - Jx_n\| = \lim_{m\to\infty} \|x_m - x_n\| \leq \epsilon$$

となる. これから, $\tilde{x}$ のいくらでも近くに $\{Jx\}$ の元が存在する. よって, $\tilde{X}$ の中稠密である.

（証明おしまい）

上をまとめると,

定理 1.6.1: ノルム空間の完備化

X をノルム空間とする. このとき, 次の性質をもつ写像 $J : X \to \tilde{X}$ が存在する:

1. J は全単射写像.
2. $\|Jx\| = \|x\|$
3. X の J による像は $\tilde{X}$ の中稠密である.

この $\tilde{X}$ のことを完備化という. ただし, $\tilde{X}$ のノルムも $\|\ \ \|$ で書くことにする.

例 1.6.1: ソボレフ空間

$\mathbb{R}^n$ の有界な開集合 Ω 上 k 回連続的微分可能な関数の全体を $\widehat{C}^k(\Omega)$ と表し, $\widehat{C}^k(\Omega)$ に属する関数の中で

$$\left(\sum_{|\alpha|\leq k} \int_\Omega |\partial_x^\alpha u(x)| \mathrm{d}x\right)^{1/p} \qquad (\equiv \|u\|_{k,p}) \tag{1.36}$$

が有限な関数全体を $C^{k,p}(\Omega)$ で表す. ここで, $1 \leq p < \infty$ であり, また,

$$\partial_j = \partial / \partial x_j$$

とおき, $\alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_n)$ に対して,

$$\partial_x^\alpha = \partial_1^{\alpha_1} \cdots \partial_n^{\alpha_n}$$
$$|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n$$

と定める. すなわち, (1.36) はすべての k 階以下の微分についての有界性である.

このとき,$C^{k,p}(\Omega)$ は (1.36) で定められるノルムについてノルム空間になる.
このノルム空間の完備化空間を $H^{k,p}(\Omega)$ と書き, ソボレフ空間という.
$\{u_k\}$ が $C^{k,p}(\Omega)$ のコーシー列となるための必要十分条件は, $0 \leq |\alpha| < k$ なる任意の α について,

$$\int_\Omega |\partial_x^\alpha u_i - \partial_x^\alpha u_j|^p \mathrm{d}x \to 0 \quad (i, j \to \infty)$$

である. $L^p(\Omega)$ は完備であるから, 各 α に対してある $u^\alpha \in L^p(\Omega)$ が存在して,

$$\int_\Omega |\partial_x^\alpha u_j - u^\alpha|^p \mathrm{d}x \to 0 \quad (j \to \infty)$$

となる. どんな 2 つのコーシー列も同じ u^α を定めるから, $H^{k,p}$ の元とベクトル $\{u^\alpha||\alpha| \leq k\}$ と同一視できる. $u^\alpha = \partial_x^\alpha u^0$ が強い意味で成り立つ.

2 ヒルベルト空間

2.1 プレ・ヒルベルト空間

定義 2.1: 内積

複素数体 $\mathbb{C}$ 上の線形空間 X の 2 点 x, y に対し, 複素数 (x, y) が対応して次の (i)-(iii) が満たされているとき, (x, y) を内積という.

(i) (正値性) $(x, x) \geq 0$, $(x, x) = 0$ となるのは $x = 0$ のときのみ.

(ii) (共役対称性)

$$(y, x) = \overline{(x, y)}$$

(iii) (準双線形性)

$$(x_1 + x_2, y) = (x_1, y) + (x_2, y)$$
$$(\alpha x, y) = \alpha(x, y)$$

定義 2.2: プレ・ヒルベルト空間

線形空間 X に内積が定義されているとき, X をプレ・ヒルベルト空間という.

解答 2.1

$$
\begin{aligned}
(x, y_1 + y_2) &= \overline{(y_1, x)} + \overline{(y_2, x)} = (x, y_1) + (x, y_2) \\
(x, \alpha y) &= \overline{(\alpha y, x)} = \overline{\alpha}(x, y)
\end{aligned}
$$

（おしまい）

解答 2.2

$$
\begin{aligned}
\left(\sum_j^n \alpha_j x_j, \sum_k^n \beta_k y_k\right) &= \sum_j^n \alpha_j \left(x_j, \sum_k^n \beta_k y_k\right) \\
&= \sum_j^n \sum_k^n \alpha_j \overline{\beta_k} (x_j, y_k)
\end{aligned}
$$

（おしまい）

定理 2.1.1: 内積により定まるノルム

プレ・ヒルベルト空間 X の各元について,

$$
\|x\| = (x, x)^{1/2}
$$

はノルムの条件を満たし, X はノルム空間になる.

証明

三角不等式を示す. 補題 2.1.1 を用いる.

$$
\begin{aligned}
\|x + y\|^2 &= (x + y, x + y) \\
&= \|x\|^2 + (x, y) + (y, x) + \|y\|^2 \\
&\leq \|x\|^2 + 2\|x\|\|y\| + \|y\|^2 = (\|x\| + \|y\|)^2
\end{aligned}
$$

（証明おしまい）

補題 2.1.1: シュワルツの不等式

$$
|(x, y)| \leq \|x\|\|y\| \tag{2.1}
$$

証明

$(x,y)=0$ は自明に成立.
$(x,y)\neq 0$ のとき, $\alpha=-(x,y)/\|y\|^2$ とおくと,

$$\begin{aligned}0 &\leq (x+\alpha y, x+\alpha y)\\ &= \|x\|^2+\overline{\alpha}(x,y)+\alpha(y,x)+|\alpha|^2\|y\|^2\\ &= \|x\|^2-|(x,y)|^2/\|y\|^2\end{aligned}$$

$$\therefore \|x\|\|y\| \geq |(x,y)|$$

（証明おしまい）

例 2.1.1: l^2 の内積

$x,y\in l^2$ の内積を,

$$(x,y)=\sum_{k=1}^{\infty}\xi_k\overline{\eta_k} \quad (x=(\xi_1,\xi_2,\cdots),y=(\eta_1,\eta_2,\cdots))$$

とすると, l^2 はプレ・ヒルベルト空間.

例 2.1.2: $L^2(\Omega)$ の内積

$\Omega\subset\mathbb{R}^n$ として, $x,y\in L^2(\Omega)$ の内積を,

$$(x,y)=\int_\Omega x(t)\overline{y(t)}\mathrm{d}t$$

とすると, $L^2(\Omega)$ はプレ・ヒルベルト空間.

例 2.1.3

関数 f が, 複素平面 $\mathbb{C}$ 上の有界閉集合 Ω で正則で,

$$\int_\Omega |f(z)|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y<\infty \quad (z=x+iy)$$

を満たすとする. このような関数 f の全体を $A^2(\Omega)$ とする.
$A^2(\Omega)$ には内積

$$(f,g)=\int_\Omega f(z)\overline{g(z)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y \quad (z=x+iy)$$

が定義されて, プレ・ヒルベルト空間となる.

内積から定まるノルム $\|x\| = \sqrt{(x,x)}$ について, 中線定理が成立:

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2) \tag{2.2}$$

証明

$$\begin{aligned}\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 &= (x+y, x+y) + (x-y, x-y) \\ &= (x,x) + (y,x) + (x,y) + (y,y) \\ &\quad + (x,x) - (y,x) - (x,y) + (y,y) \\ &= 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2\end{aligned}$$

（証明おしまい）

また, ノルムが中線定理を満たすとき, 以下で内積を定めることができる.

$$(x,y) = \frac{1}{4}(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 + i\|x+iy\|^2 - i\|x-iy\|)$$

証明

(i) (正値性)

$$\begin{aligned}(x,x) &= \frac{1}{4}(\|x+x\|^2 - \|x-x\|^2 + i\|x+ix\|^2 - i\|x-ix\|) \\ &= \frac{1}{4}(4\|x\|^2 + 2i\|x\|^2 - 2i\|x\|) \\ &= \|x\| \geq 0.\end{aligned}$$

(ii) (共役対称性)

$$\begin{aligned}(y,x) &= \frac{1}{4}(\|y+x\|^2 - \|y-x\|^2 + i\|y+ix\|^2 - i\|y-ix\|) \\ &= \frac{1}{4}(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 + i\|x-iy\|^2 - i\|x+iy\|) \\ &= \overline{(y,x)}.\end{aligned}$$

(iii) (準双線形性)

$$\begin{aligned}(x_1,y)+(x_2,y) &= \frac{1}{4}(\|x_1+y\|^2-\|x_1-y\|^2+i\|x_1+iy\|^2-i\|x_1-iy\|) \\ &+\frac{1}{4}(\|x_2+y\|^2-\|x_2-y\|^2+i\|x_2+iy\|^2-i\|x_2-iy\|) \\ &= \frac{1}{4}(2\|x_1\|^2+2\|y\|^2-2\|x_1-y\|^2+2i\|x_1\|^2+2i\|y\|^2-2i\|x_1-iy\|) \\ &+\frac{1}{4}(2\|x_2+y\|^2-2\|x_2\|^2-2\|y\|^2+2i\|x_2+iy\|^2-2i\|x_2\|^2-2i\|y\|^2) \\ &= \frac{1}{4}(\|x_1+x_2+y\|^2-\|x_1+x_2-y\|^2+i\|x_1+x_2+iy\|^2-i\|x_1+x_2-iy\|) \\ &= (x_1+x_2,y)\end{aligned}$$

ただし, 途中で中線定理

$$2(\|x_1\|^2+\|x_2+y\|^2)=\|x_1+x_2+y\|^2+\|x_1-x_2-y\|^2$$

等を用いた.

（証明おしまい）

命題 2.1.1

内積 (x,y) は x,y の連続関数.

証明

$x_n\to x, y_n\to y$ とする.

$$(x_n,y_n)-(x,y)=(x_n-x,y_n-y)+(x_n-x,y)+(x,y_n-y)$$

である. 第一項について, シュワルツの不等式より

$$|(x_n-x,y_n-y)|\leq\|x_n-x\|\|y_n-y\|$$

より $(x_n-x,y_n-y)\to 0$. 右辺の他の項も同様.
したがって, $(x_n,y_n)-(x,y)\to 0$.

（証明おしまい）

2.2　ヒルベルト空間

定義 2.3: ヒルベルト空間

プレ・ヒルベルト空間 X が, 内積から定まるノルムに関して完備なとき, X はヒルベルト空間という.

たとえば, $\mathbb{R}^n, \mathbb{C}^n$ はそれぞれ自然な内積によってヒルベルト空間になる.

また, l^2 はヒルベルト空間になる. なぜなら, 例 2.1.1 での内積によって定まるノルムが一般のノルムと同様であり, これは完備であったからである. 同じ理由で, $L^2(\Omega)$ もヒルベルト空間になる.(c.f. 例 2.1.2).

例 2.2.1: ベルグマン空間 $A^2(\Omega)$

例 2.1.3 に出てくる $A^2(\Omega)$ はヒルベルト空間である. これをベルグマン空間という.

証明

$A^2(\Omega)$ の完備性を示す.

$\{f_n\}$ を $A^2(\Omega)$ のコーシー列とする. $z = x + iy$ と (x, y) を同一視することで, $\{f_n\}$ は $L^2(\Omega)$ のコーシー列であり, $L^2(\Omega)$ の完備性から L^2 ノルムで $f_n \to f$ となる $f \in L^2(\Omega)$ が存在する. この f が $\Omega \subset \mathbb{C}$ で正則であることを言えばよい.

$\forall z \in \Omega$ を固定. f_n は Ω で正則なので, コーシーの積分公式から, 半径 ϵ の閉円板が Ω にすっぽり含まれるような十分小さい $\epsilon > 0$ について

$$f_n(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{|z-\zeta|=r} \frac{f_n(\zeta)}{\zeta - z} \mathrm{d}\zeta \quad (0 < r \leq \epsilon)$$

特に, 右辺を極座標においてやると, $\zeta = re^{i\theta} + z, \mathrm{d}\zeta = ire^{i\theta}\mathrm{d}\theta$ より, $f_n(\zeta) = f_n(\xi, \eta)$ と書くことにすると,

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{|z-\zeta|=r} \frac{f_n(\zeta)}{\zeta - z} \mathrm{d}\zeta = \frac{1}{2\pi}\int_{\theta=0}^{2\pi} f_n(r, \theta)\mathrm{d}\theta$$

両辺に r をかけて, r について 0 から ϵ で積分する. $\zeta = \xi + i\eta = re^{i\theta} + z$ とおくと, 座標変換の式から $\mathrm{d}\xi \wedge \mathrm{d}\eta = r\mathrm{d}r \wedge \mathrm{d}\theta$ なので,

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\epsilon^2 f_n(z) &= \frac{1}{2\pi}\int_{r=0}^{\epsilon}\int_{\theta=0}^{2\pi} f_n(r, \theta) r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{|z-\zeta|\leq\epsilon} f_n(\xi, \eta)\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta\end{aligned}$$

$\{f_n\}$ は $L^2(\Omega)$ でのコーシー列だったので,

$$\|f_n - f\|_{L^2(\Omega)} \to 0$$

であり, Ω に含まれる任意の有界閉集合 (同じ事だが, コンパクト集合)K についって, ヘルダーの不等式から適当な定数によって $\|f\|_{L^1(K)} \leq C\|f\|_{L^2(K)}$ が言えるため,

$$\|f_n - f\|_{L^1(K)} = \int_K |f_n(\xi,\eta) - f(\xi,\eta)| \mathrm{d}\xi \mathrm{d}\eta \to 0$$

これから, 任意の有界閉集合 K を取ったときに, 十分大きな n が存在して,

$$\begin{aligned}\left|\int_K f_n(\xi,\eta) - f(\xi,\eta) \mathrm{d}\xi \mathrm{d}\eta\right| &\leq \int_K |f_n(\xi,\eta) - f(\xi,\eta)| \mathrm{d}\xi \mathrm{d}\eta \\ &< \delta \quad (\forall \delta > 0)\end{aligned}$$

がとなる. これから, 関数

$$z \mapsto \frac{1}{2\pi} \int_{|z-\zeta|\leq\epsilon} f_n(\xi,\eta) \mathrm{d}\xi \mathrm{d}\eta$$

が z について Ω で広義一様収束していることがわかる.
右辺が z について Ω で広義一様収束するので, 左辺 $\frac{1}{2}\epsilon^2 f_n(z)$ も z について Ω で広義一様収束する. この収束先を $f^*(z)$ とする. つまり, $f^*(z)$ は

$$\frac{1}{2}\epsilon^2 f^*(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{|z-\zeta|\leq\epsilon} f(\xi,\eta) \mathrm{d}\xi \mathrm{d}\eta$$

を満たす複素関数とする. 正則な複素関数列が広義一様収束するとき, 収束先も正則だから, $f^*(z)$ は正則.
$\{f_n\}$ は Ω の任意のコンパクト部分集合 K に対して, $L^2(K)$ の位相で f に収束するから, $f^* = f$ がわかる. よって f も Ω で正則であり, $f \in A^2(\Omega)$ となる. これで, $A^2(\Omega)$ が完備であることが示された.

（証明おしまい）

2.3 直交, 射影定理

ヒルベルト空間 X の部分集合 A, B が直交するとは,

$$(x, y) = 0 \quad (x \in A, y \in B)$$

となること. このとき, $A \perp B$ とかく. A が一点 $\{x\}$ であるときは $x \perp B$ とかく. $(x,y) = 0$ のことも $x \perp y$ とかく.

解答: 問 2.5($x \perp X$ ならば $x = 0$)

（証明）$x \in X$ より, $(x, x) = 0$. 正値性から $x = 0$

（おしまい）

X の部分集合 L について, L と直交するベクトル全体を $L^{\perp}$ とかく. これを L の直交補空間という.

解答: 問 2.6($L^{\perp}$ は X の閉部分空間)

$L^{\perp}$ は X の閉部分空間である.

（証明）X はヒルベルト空間だから, ノルム $\|x\| = \sqrt{(x, x)}$ について完備である. よって, $L^{\perp}$ の任意のコーシー列 $\{x'_k\}$ は極限値 $x' \in X$ を持つ.
$y \in L$ とする. 内積の連続性から, 任意の $\epsilon > 0$ に対して, 十分大きな k で,

$$|(x'_k, y) - (x', y)| < \epsilon$$

となる. $x'_k \in L^{\perp}$ より任意の k で $(x'_k, y) = 0$ なので,

$$|(x', y)| < \epsilon$$

ϵ は任意なので, $(x', y) = 0$ となる. よって, $x' \in L^{\perp}$ であり, $L^{\perp}$ は閉集合である.
また, $x, x' \in L^{\perp}$ について,

$$(ax + bx', y) = a(x, y) + b(x', y) = 0$$

より, $L^{\perp}$ が部分空間である.

（おしまい）

解答: 問 2.7(三平方の定理)

$x \perp y$ ならば, 三平方の定理

$$\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$$

が成立する.

（証明）

$$\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + (y, x) + (x, y) + \|y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$$

（おしまい）

直交性に関して，ヒルベルト空間 X の中に閉部分空間 L が与えられたとき，X は L と $L^{\perp}$ に分解することができる，というのが次の定理．

定理 2.3.1: 射影定理

L を X の閉部分空間．
このとき，任意の $x \in X$ は

$$x = y + z \quad (y \in L, z \in L^{\perp})$$

と一意に分解される．
y を x の正射影（直交射影，射影）といい，$x \in X$ に $y \in L$ を対応させる対応を正射影作用素（射影作用素）P_L とかく：

$$y = P_L x.$$

証明

まずは，x が分解できたとして，その一意性を示す．
$x = y + z = y' + z'$ とすると，$y - y' = z' - z$．ここで，$z' - z \in L^{\perp}$ より，$(y - y', y - y') = (y, z' - z) - (y', z' - z) = 0$．よって，$y = y'$ であり，$z = z'$．よって，分解ができればそれは一意的．
次に，分解の可能性を示す．

$$\delta = \inf_{\xi \in L} \|x - \xi\|$$

とおくと，L 内の点列 $\{\xi_n\}$ で $\|x - \xi_n\| \to \delta$ となるものが存在する．
任意の $n, m > 0$ について，中線定理から，

$$\begin{aligned} 4\left\|x - \frac{\xi_n + \xi_m}{2}\right\|^2 + \|\xi_n - \xi_m\|^2 &= \|(x - \xi_n) + (x - \xi_m)\|^2 + \|(x - \xi_n) - (x - \xi_m)\|^2 \\ &= 2\|x - \xi_n\|^2 + 2\|x - \xi_m\|^2 \end{aligned}$$

L は部分空間だから，$\frac{1}{2}(\xi_n + \xi_m) \in L$ であり，δ の定義から，

$$\delta^2 \leq \left\|x - \frac{\xi_n + \xi_m}{2}\right\|^2$$

よって，

$$0 \leq \|\xi_n - \xi_m\|^2 \leq 2\|x - \xi_n\|^2 + 2\|x - \xi_m\|^2 - 4\delta^2$$

$n, m \to \infty$ とすると, 最右辺は 0 に収束する. したがって $\{\xi_n\}$ は L 内のコーシー列で, L は閉集合だったから ξ_n は $n \to \infty$ である y に収束する. このとき, $\delta = \|x - y\|$.
$z = x - y$ とおく. $\xi \in L$ に対して, $\gamma = (z, \xi)$ とし, $\varphi(t) = \|z - \gamma t\xi\|^2$ とおく. このとき, $\varphi(t) = \|x - (y + \gamma t\xi)\|^2$ であって, かつ $y + \gamma t\xi \in L$ より, $\delta^2 = \varphi(0) \leq \varphi(t)$. ここで,

$$\varphi(t) = \|z\|^2 - 2|\gamma|^2 t + |\gamma|^2 t^2 \|\xi\|^2 = \|z\|^2 + |\gamma|^2 t(-2 + t\|\xi\|^2)$$

$\gamma \neq 0$ とすると, $0 < t < \frac{2}{\|\xi\|^2}$ で $\varphi(t) < \varphi(0) = \delta^2$ となり, 矛盾する.
よって, 各 $\xi \in L$ について $\gamma = (z, \xi) = 0$ であり, $z = x - y \in L^\perp$.

（証明おしまい）

一般に, ヒルベルト空間が二つの閉部分集合 L_1, L_2 に分解されるとき, $X = L_1 \oplus L_2$. 射影定理では, $X = L \oplus L^\perp$.

解答: 問 2.8

L: ヒルベルト空間 X の閉部分集合. このとき, $L = (L^\perp)^\perp$.

（証明）L についての射影定理から, X は $X = L \oplus L^\perp$ と一意に分解される. 一方, $L^\perp$ は X の閉部分空間だったので, こちらにも射影定理が使えて, $X = L^\perp \oplus (L^\perp)^\perp$. したがって, 分解の一意性から $(L^\perp)^\perp = L$.

（おしまい）

例 2.3.1

1. $L = \{(\xi_1, \cdots, \xi_n, 0, \cdots)\}$ は l^2 空間の閉部分集合. このとき, $L^\perp = \{(0, \ldots, 0, \xi_{n+1}, \cdots)\}$ であり, $l^2 = L \oplus L^\perp$. 射影作用素は
$$P_L \xi = (\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n, 0, \cdots).$$
2. $L = \left\{u(t) \in L^2(\Omega) \middle| \int_\Omega u(t)\mathrm{d}t = 0\right\}$ は $L^2(\Omega)$ の閉部分空間. 射影作用素は
$$(P_L u)(t) = u(t) - \frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega u(s)\mathrm{d}s$$
3. $L = \{u \in L^2(-1,1) | u(t) = u(-t)\}$ は $L^2(-1,1)$ の閉部分空間. このとき. $L^\perp = \{u \in L^2(-1,1) | u(t) = -u(-t)\}$ であり, 射影作用素は
$$(P_L u)(t) = \frac{1}{2}(u(t) + u(-t))$$

2.4　正規直交系

ヒルベルト空間 X の正規直交系とは, 要素が有限個または可算個の X の部分集合 $\{x_k\}$ で,

$$(x_j, x_k) = \delta_{j,k}$$

を満たすもの.

例 2.4.1

1. $L^2(0,1)$ において, $\{\sqrt{2}\sin\pi jt\}_{j=1}^{\infty}$ は正規直交系.
2. $L^2(0,1)$ において, $\{\exp(2\pi ikt)\}_{k=0}^{\infty}$ は正規直交系.

証明

1. 和積の公式から $\sin\pi jt\sin\pi kt = \frac{1}{2}(\cos\pi(j-k)t - \cos\pi(j+k)t)$ より, $j \neq k$ のとき,

$$\begin{aligned}(\sqrt{2}\sin\pi jt, \sqrt{2}\sin\pi kt) &= \int_0^1 \cos\pi(j-k)t - \cos\pi(j+k)t\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{\pi}\left[-\frac{1}{j-k}\sin\pi(j-k)t + \frac{1}{j+k}\sin\pi(j+k)t\right]_0^1 \\ &= 0\end{aligned}$$

また, $j = k$ のときは,

$$\begin{aligned}(\sqrt{2}\sin\pi jt, \sqrt{2}\sin\pi jt) &= \int_0^1 1 - \cos 2\pi jt\mathrm{d}t \\ &= \left[t + \frac{1}{2\pi j}\sin 2\pi jt\right]_0^1 \\ &= 1\end{aligned}$$

よって, $\{\sqrt{2}\sin\pi jt\}_{j=1}^{\infty}$ は正規直交系.

2. $\overline{\exp(2\pi ikt)} = \exp(-2\pi ikt)$ に注意すると,

$$\begin{aligned}(\exp(2\pi ijt), \exp(2\pi ikt)) &= \int_0^1 \exp(2\pi ijt)\overline{\exp(2\pi ikt)}\mathrm{d}t \\ &= \int_0^1 \exp(2\pi ijt)\exp(-2\pi ikt)\mathrm{d}t \\ &= \int_0^1 \exp(2\pi i(j-k)t)\mathrm{d}t \\ &= \begin{cases} 0 & (j \neq k) \\ 1 & (j = k)\end{cases}\end{aligned}$$

よって, $\{\exp(2\pi ikt)\}_{k=0}^{\infty}$ は正規直交系.

（証明おしまい）

問 2.2 の解答から, 特に正規直交系 $\{x_k\}$ について

$$\left(\sum_{j=1}^{n} \alpha_j x_j, \sum_{k=1}^{n} \beta_k x_k\right) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \overline{\beta_k} \tag{2.3}$$

が言える.

命題 2.4.1: ベッセルの不等式

X の正規直交系を $\{x_k\}$ とすると, 任意の $x \in X$ に対して, ベッセルの不等式:

$$\sum_{k=1}^{\infty} |(x, x_k)|^2 \leq \|x\|^2 \tag{2.4}$$

が成立.

証明

$\alpha_k = (x, x_k)$ とおくと, 任意の n に対して,

$$\begin{aligned}
0 &\leq \|x - \sum_{k=1}^{n} \alpha_k x_k\|^2 \\
&= \|x\|^2 - \sum_{k=1}^{n} \overline{\alpha_k}\,\underline{(x, x_k)} - \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \underline{(x_k, x)} + \sum_{j,k=1}^{n} \alpha_j \overline{\alpha_k}\,\underline{(x_j, x_k)} \\
&= \|x\|^2 - \sum_{k=1}^{n} |\alpha_k|^2
\end{aligned}$$

ただし, 2 行目から 3 行目の変形で $(x, x_k) = \alpha_k, (x_k, x) = \overline{\alpha_k}, (x_j, x_k) = \delta_{j,k}$ を用いた.
したがって, 任意の n について,

$$\sum_{k=1}^{n} |\alpha_k|^2 \leq \|x\|^2$$

が成り立つ.
$|\alpha_k|^2 > 0$ より, $\{\sum_{k=1}^{n} |\alpha_k|^2\}$ は n についての単調増加列である. $\mathbb{R}$ 内での上に有界な単調増加列は収束するので, 級数 $\sum_{k=1}^{\infty} |(x, x_k)|^2$ は存在し, 特に

$$\sum_{k=1}^{\infty} |(x, x_k)|^2 \leq \|x\|^2$$

である.

（証明おしまい）

$\{x_k\}$ をヒルベルト空間 X の正規直交系とし, $\{x_k\}$ により生成される閉部分空間を L とする.

$$L_0 = \left\{ \sum_{k=1}^{n} \alpha_k x_k | \alpha_k \in K, n \in \mathbb{N} \right\}$$

とし, $L = \overline{L_0}$ とする. この L は部分空間である.

解答: 問 2.9(線形部分空間の閉包は線形部分空間)

ヒルベルト空間の部分空間 L（上のものではない）の閉包 $\overline{L}$ は部分空間である.

（証明）$x \in \overline{L}$ である必要十分条件は, 任意の x の開近傍 O について $O \cap L \neq \varnothing$ であることである. x の開近傍全体の集合族の部分集合族として, 開近傍の減少列 $O_1 \supset O_2 \supset \cdots$ を構成することができる.（距離空間は T3 空間だから）したがって, $x_k \in O_k \cap L$ を選んでいくことで, $x \in \overline{L}$ に収束する L 内の点列 $\{x_k\}$ を構成出来る. （選択公理を認める必要があるかも）.
さて, $x, y \in \overline{L}$ について, $x_k \to x, y_k \to y$ となる L 内の点列 $\{x_k\}, \{y_k\}$ を取れる. $x_k + y_k \to x + y, \alpha x_k \to \alpha x$ かつ $x_k + y_k, \alpha x_k \in L$. 点列が収束する部分列をもつとき, その極限は集積点になるので, $x + y, \alpha x \in \overline{L}$. よって, $\overline{L}$ は部分空間.

（おしまい）

先ほど定めた L は閉部分空間だから, 射影定理から,

$$X = L \oplus L^{\perp}$$

が成り立つ. すなわち, $x \in X$ は $x = y + z (y \in L, z \in L^{\perp})$ とかけて, $P_L x = y$ である.

命題 2.4.2

任意の $x \in X$ について, L への射影は

$$P_L x = \sum_{k=1}^{\infty} (x, x_k) x_k \quad (\text{絶対収束}) \tag{2.5}$$

とかける. さらに, 任意の $x, x' \in X$ に対して,

$$(P_L x, P_L x') = \sum_{k=1}^{\infty} (x, x_k) \overline{(x', x_k)} \tag{2.6}$$

である.

証明

$\alpha_j=(x,x_j)$ とおく．$m>n$ として，

$$\left\|\sum_{j=1}^{n}\alpha_j x_j-\sum_{j=1}^{m}\alpha_j x_j\right\|^2=\left\|\sum_{j=n+1}^{m}\alpha_j x_j\right\|^2=\sum_{j=n+1}^{m}|\alpha_j|^2=\sum_{j=1}^{m}|\alpha_j|^2-\sum_{j=1}^{n}|\alpha_j|^2$$

となる． 2 つめの等式では式 (2.3) を用いた． 命題 2.4.1 の証明から,$\sum_{j=1}^{m}|\alpha_j|^2,\sum_{j=1}^{n}|\alpha_j|^2$ は収束し，極限値は一致するから，$m,n\to\infty$ で最右辺は $\to 0$．X はヒルベルト空間，特にバナッハ空間なので，コーシー列は収束列．よって L の元 $\sum_{j=1}^{n}\alpha_j x_j$ は収束し，その極限を $y=\sum_{j=1}^{\infty}\alpha_j x_j$ とおくと，L は閉集合なので $y\in L$ で，さらに k を固定した下で

$$(x-y,x_k)=(x,x_k)-\left(\sum_{j=1}^{\infty}\alpha_j x_j,x_k\right)=\alpha_k-\sum_{j=1}^{\infty}\alpha_j(x_j,x_k)$$

$(x_j,x_k)=\delta_{j,k}$ より，結局最右辺 $=0$．したがって，$x-y\perp L_0$ であり，任意の L の元 ξ に対し収束する L_0 の点列が存在するので，再度内積の連続性から

$$(x-y,\xi)=0$$

これより，$z=x-y\in L^{\perp}$ であり，$P_L x=y=\sum_{j=1}^{\infty}\alpha_j x_j$．
また，$\alpha_j=(x,x_j),\alpha'_j=(x',x_j)$ とおくと，シュワルツの不等式とベッセルの不等式から，

$$\sum_{j=1}^{n}|\alpha_j\overline{\alpha'_j}|=\sum_{j=1}^{n}|\alpha_j||\alpha'_j|\le\left(\sum_{j=1}^{n}|\alpha_j|^2\right)^{1/2}\left(\sum_{j=1}^{n}|\alpha'_j|^2\right)^{1/2}\le\|x\|\|x'\|.$$

やはり $\{\sum_{j=1}^{n}|\alpha_j\overline{\alpha'_j}|\}$ は有界な単調増加列なので収束し，$\sum_{j=1}^{\infty}\alpha_j\overline{\alpha'_j}$ は絶対収束する．したがって，

$$(P_L x,P_L x')=\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{j=1}^{n}\alpha_j x_j,\sum_{k=1}^{n}\alpha'_k x_k\right)=\sum_{k=1}^{\infty}\alpha_k\overline{\alpha'_k}.$$

（証明おしまい）

X の正規直交系 $\{x_k\}$ が完全であるとは，$\{x_k\}$ で生成される閉部分空間 L が $L=X$ となることを言う．このような積直交系を X の完全正規直交系という．

正規直交系が完全であることと同値な条件を述べる．

定理 2.4.1: 正規直交系の完全性

以下は同値.

(i) $L = X$.

(ii) $\forall x \in X, x = \sum_{k=1}^{\infty}(x, x_k)x_k$.

(iii) パーセヴァルの等式:$\forall x \in X, \|x\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty}|(x, x_k)|^2$.

(iv) $\forall x, x' \in X, (x, x') = \sum_{k=1}^{\infty}(x, x_k)\overline{(x', x_k)}$.

(v) 任意の k について $(x, x_k) = 0$ ならば $x = 0$.

証明

- (i) ならば (ii): $L = X$ ならば $P_L x = x$ なので, 式 (2.5) より (ii) が成立.
- (ii) ならば (i): $x = \sum_{k=1}^{\infty}(x, x_k)x_k$ について, $\{\sum_{k=1}^{n}(x, x_k)x_k\}$ は L_0 内の点列で x に収束するので, $x \in L$. つまり, $L = X$.
- (i) ならば (iv): $P_L x = x$ なので, 式 (2.6) より (iv) が成立.
- (iv) ならば (iii): $x' = x$ とすればよい.
- (iii) ならば (v): ノルムの性質から自明.
- (v) ならば (i): もし $x \in L^{\perp}$ なら, 任意の k について $(x, x_k) = 0$ なので, (v) の仮定から $x = 0$. すなわち $L^{\perp} = \{0\}$ であり, 射影定理から $X = L$.

(証明おしまい)

2.5 完全正規直交系の例 (フーリエ級数)

任意の $x(t) \in L^2(-\pi, \pi)$ についてフーリエ展開

$$x(t) = \frac{1}{2}\alpha_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(\alpha_n \cos nt + \beta_n \sin nt)$$

ができることを示す. ここで, $\alpha_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x(t) \cos kt\mathrm{d}t, \beta_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x(t) \cos kt\mathrm{d}t$ であり, 級数の収束は $L^2(-\pi, \pi)$ のノルムでの収束である.

定理 2.5.1: フーリエ展開

ヒルベルト空間 $L^2(-\pi,\pi)$ において $\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin nt, \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cos nt\}_{n=1}^{\infty}$ は完全正規直交系.

証明

簡単のため,

$$\varphi_0(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \varphi_{2k}(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos kt, \varphi_{2k-1}(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin nt$$

とおく. 定理 2.4.1 の条件 (v), つまり

$$\int_{-\pi}^{\pi} x(t)\varphi_k(t)\mathrm{d}t = 0 \quad (\forall k \in \mathbb{N}) \tag{2.7}$$

を満たすならば $x(t) \equiv 0$ であることを示そう.

$x(t) \not\equiv 0$ と仮定する. 実部か虚部は恒等的に 0 ではないが, 実部が 0 でないとしてよい（虚部が非ゼロでも同じ議論）. 実部だけみても式 (2.7) は成立する.

(I) $x(t)$ が連続関数の場合.

$x(t)$ は閉区間 $[-\pi,\pi]$ で連続なので, ある点 t_0 で最大値 $x(t_0)$ をとる. $x(t_0) > 0$ と仮定してよい. (そうでない場合は $-x(t)$ について考える.)

このとき, $\epsilon > 0, \delta > 0$ を適当に取れば, 区間 $I = [t_0-\delta, t_0+\delta]$ において $x(t) \geq \epsilon$. さらに, $h(t) = 1 + \cos(t-t_0) - \cos\delta$ とおくと, $t \in I$ で $h(t) \geq 1$, それ以外で $|h(t)| < 1$. ここで, $h^n(t)$ は φ_j の 1 次結合で表せるので, 式 (2.7) から

$$\int_{-\pi}^{\pi} x(t)h^n(t)\mathrm{d}t = 0 \tag{2.8}$$

である. 積分区間を I と $I' = [-\pi,\pi]\backslash I$ に分解する. $h(t) \leq 1 (t \in I')$ より,

$$\left|\int_{I'} x(t)h^n(t)\mathrm{d}t\right| \leq \int_{I'} |x(t)|\mathrm{d}t$$

であるから, $x(t) \in L^2(-\pi,\pi)$ より $\int_{I'} x(t)h^n(t)\mathrm{d}t$ は $n \to \infty$ は有界.

他方, $I'' = [t_0-\delta', t_0+\delta'](0 < \delta' < \delta)$ とおくと,

$$h(t) \geq 1 + \eta \quad (t \in I'')$$

となる $\eta > 0$ が存在する．よって，$I'' \subset I$ 上で $x(t) \geq \epsilon$ であったことから，

$$x(t)h^n(t) \geq \epsilon(1+\eta)^n \quad (t \in I'')$$

であり，さらに I 上で $x(t)h^n(t) > 0$ なので，

$$\int_I x(t)h^n(t)\mathrm{d}t \geq \int_{I''} x(t)h^n(t)\mathrm{d}t \geq 2\delta'\epsilon(1+\eta)^n.$$

よって，$n \to \infty$ で $\int_I x(t)h^n(t)\mathrm{d}t \to \infty$ となる．ところが，式 (2.8) より

$$\int_I x(t)h^n(t)\mathrm{d}t = -\int_{I'} x(t)h^n(t)\mathrm{d}t$$

であり，右辺は有界だったため，矛盾．

(II) 一般の場合．

$$y(t) = \int_{-\pi}^{t} x(s)\mathrm{d}s$$

とおくと，$y(t)$ は $[-\pi, \pi]$ 上で連続で，仮定から $x \perp \varphi_0$ より，$y(-\pi) = y(\pi) = 0$. $y(t)$ は最大値，最小値を持つので，$L^2(-\pi, \pi)$ に属する．

他方，部分積分によって

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi} y(t)\cos kt\mathrm{d}t &= \frac{1}{k}[y(t)\sin kt]_{t=-\pi}^{\pi} - \frac{1}{k}\int_{-\pi}^{\pi} y'(t)\sin kt\mathrm{d}t \\ &= -\frac{1}{k}\int_{-\pi}^{\pi} x(t)\sin kt\mathrm{d}t \\ &= 0\end{aligned}$$

である．同様にして

$$\int_{-\pi}^{\pi} y(t)\sin kt\mathrm{d}t = 0.$$

ゆえに，定数が $\cos kt, \sin kt$ に直交することに注意すると，$z(t) = y(t) - \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} y(s)\mathrm{d}s$ は $\{\varphi_k\}$ に直交．$z(t)$ は $L^2(-\pi, \pi)$ に属する連続な関数なので，(I) より $z(t) \equiv 0$. $z'(t) = x(t)$ a.e. より，$x(t) \equiv 0$ a.e. $L^2(-\pi, \pi)$ の元としては，$u \equiv v$ a.e. ならば $u = v$ だったので，$x \equiv 0$.

(I), (II) から，$\{\varphi_k\}$ は定理 2.4.1 の条件 (v) を満たす．よって $\{\varphi_k\}$ は完全正規直交系．

（証明おしまい）

以下は上の定理から明らか．

系 2.5.1

$\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{ikt}\}_{k=-\infty}^{\infty}$ は $L^2(-\pi,\pi)$ の完全正規直交系.

2.6 シュミットの直交化

プレ・ヒルベルト空間 X の有限個または可算個の 1 次独立な元 $\{y_k\}$ をとる. このとき, 以下の方法で正規直交系 $\{x_k\}$ を構成する (シュミットの直交化法)

$$
\begin{aligned}
x_1 &= \frac{y_1}{\|y_1\|} \\
x_2 &= \frac{y_2-(y_2,x_1)x_1}{\|y_2-(y_2,x_1)x_1\|} \\
x_3 &= \frac{y_3-(y_3,x_1)x_1-(y_3,x_2)x_2}{\|y_3-(y_3,x_1)x_1-(y_3,x_2)x_2\|} \\
&\ \vdots \\
x_n &= \frac{y_n-\sum_{j=1}^{n-1}(y_n,x_j)x_j}{\left\|y_n-\sum_{j=1}^{n-1}(y_n,x_j)x_j\right\|}
\end{aligned}
$$

このとき, 各 x_k は $y_1,y_2,\cdots,y_k$ の 1 次結合で表せて, なおかつ各 y_k は $x_1,x_2,\cdots,x_k$ の 1 次結合で表せる. またこのような $\{x_k\}$ は絶対値 1 の複素数倍を除いて一意的に $\{y_k\}$ により定まる.

定理 2.6.1

可分な無限次元ヒルベルト空間 X には, 可算個の元からなる完全正規直交系が存在する.

証明

X で稠密な可算部分集合を $\{z_j\}$ とする. これから 1 次独立な系 $\{y_j\}$ を構成する: もし $z_1=0$ ならば除き, $z_1\neq 0$ なら除かない. z_2 が z_1 のスカラー倍ならば除き, そうでなければ除かない. z_3 が z_1,z_2 の 1 次結合で表されるなら除き, そうでなければ除かない. このようにしてできる新しい系を $\{y_j\}$ とする.
構成法から, $y_1,\cdots,y_n$ が 1 次独立なのはすぐわかる. よって, シュミットの直交化法から正規直交系 $\{x_k\}$ が存在する. この系が完全であることを示す.
$x\in X$ を, 任意の k で $(x,x_k)=0$ が成立する元と仮定する. このとき,

x_k は $y_1, \cdots, y_k$ の 1 次結合で表せたので, 任意の k で $(x, y_k) = 0$ が成立. 任意の z_k は $y_1, \cdots, y_k$ の 1 次結合でかけるから,$(x, z_k) = 0.\{z_k\}$ は X の中で稠密であるから, 部分列 $\{z_{k_n}\}$ で $z_{k_n} \to x$ となるものが存在する. 内積の連続性から, この部分列について極限をとれば $(x, x) = 0$. よって $x = 0$ となり, 定理 2.4.1 の条件 (v) を満たすので, 完全.

（証明おしまい）

例 2.6.1: ルジャンドルの多項式

$L^2(-1, 1)$ において $\{1, t, t^2, \cdots, t^n, \cdots\}$ を正規直交化した系 $\{x_n\}$ は, これはルジャンドルの多項式

$$P_n(t) = \frac{1}{2^n n!} \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n} \left(t^2 - 1\right)^n$$

としたときに $x_{n+1}(t) = (n+1)^{1/2} P_n(t)$ と表される.

例 2.6.2: エルミート多項式

$L^2(-\infty, \infty)$ において $\{e^{-t^2/2}, te^{-t^2/2}, t^2 e^{-t^2/2}, \cdots\}$ を正規直交化した系 $\{x_n\}$ は,

$$\varphi_k(t) = (-1)^k e^{t^2/2} \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right)^k e^{-t^2} \equiv H_k(t) e^{-t^2/2} \quad (k = 0, 1, 2, \cdots)$$

と定められるエルミート関数列 $\{\varphi_n\}$ を用いて,

$$x_k(t) = (2^k k! \sqrt{\pi})^{-1/2} \varphi_k(t)$$

と表せる. なお, H_k をエルミート多項式という. $\{x_n\}$ は完全正規直交系である.

証明

$\varphi_0, \cdots, \varphi_k$ の 1 次結合で $t^k e^{-t^2/2}$ がかけること, および $e^{-t^2/2}, \cdots, t^k e^{-t^2/2}$ の 1 次結合で $\varphi_k(t)$ がかけることは自明.

$\{\varphi_k\}$ が直交系であることを示す.

$$\varphi_k''(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left((-1)^k t e^{t^2/2}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right)^k e^{-t^2} + (-1)^k e^{t^2/2}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right)^{k+1} e^{-t^2}\right)$$
$$= (-1)^k e^{t^2/2}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right)^k e^{-t^2} + (-1)^k t^2 e^{t^2/2}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right)^k e^{-t^2} + (-1)^k t e^{t^2/2}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right)^{k+1} e^{-t^2}$$
$$+ (-1)^k t e^{t^2/2}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right)^{k+1} e^{-t^2} + (-1)^k e^{t^2/2}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right)^{k+2} e^{-t^2}$$

ここで, $t\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}f(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}tf(t) - f(t)$ より,

$$t\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right)^{k+1} e^{-t^2} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}t\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right)^k e^{-t^2} - \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right)^k e^{-t^2} = \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right)^{k+1} t e^{-t^2} - (k+1)\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right)^k e^{-t^2}$$

また, $\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right)^{k+2} e^{-t^2} = -2\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right)^{k+1} t e^{-t^2}$ なので, 結局,

$$\varphi_k''(t) - t^2\varphi_k(t) = -(2k+1)\varphi_k(t).$$

この両辺に $\varphi_m(t)$ をかけて積分することで, 最終的に

$$(\varphi_k, \varphi_m) = \delta_{k,m}(2^k k!\sqrt{\pi})^{1/2}$$

が得られ, $\{x_n\}$ が正規直交系であることがわかる.
完全性は, 台が有界な連続関数の全体 $C_0(-\infty,\infty)$ が $L^2(-\infty,\infty)$ で稠密であることを用いて, 任意の $f \in L^2(-\infty,\infty)$ に十分近い $\tilde{f} \in C_0(-\infty,\infty)$ を選び出し, $g(t) = \tilde{f}e^{t^2/2}$ を多項式近似することで証明される.

（証明おしまい）

2.7 プレ・ヒルベルト空間の完備化

定理 2.7.1: プレ・ヒルベルト空間の完備化

プレ・ヒルベルト空間 X をノルム空間として完備化したものはヒルベルト空間になる.

証明

$\tilde{x}, \tilde{y}$ を X の完備化 $\tilde{X}$ の元とする. 内積 $(\tilde{x}, \tilde{y})$ を定める. $\{x_n\}, \{y_n\}$ を $\tilde{x}, \tilde{y}$ の代表元とする.

$$(x_n, y_n) - (x_m, y_m) = (x_n - x_m, y_n) + (x_m, y_n - y_m)$$

であり, またシュワルツの不等式から

$$|(x_n - x_m, y_n)| \leq \|x_n - x_m\| \|y_n\|, \quad |(x_m, y_n - y_m)| \leq \|x_m\| \|y_n - y_m\|$$

である. $\{x_n\}, \{y_n\}$ はコーシー列だから $\|x_m\|, \|y_n\|$ は有界なので, $n, m \to \infty$ で $(x_n - x_m, y_n), (x_m, y_n - y_m) \to 0$ である. よって, $\{(x_n, y_n)\}$ はコーシー列である.

$$\beta = \lim_{n\to\infty} (x_n, y_n)$$

とすると, β は代表元の取り方によらない. 実際, 別の代表元 $\{x'_n\}, \{y'_n\}$ を取ると, $x_n - x'_n, y_n - y'_n$ は 0 に収束し, また

$$(x_n, y_n) - (x'_n, y'_n) = (x_n - x'_n, y_n) + (x_n, y_n - y'_n)$$

であり, シュワルツの不等式から先ほどと同様にして

$$\lim_{n\to\infty} (x_n, y_n) = \lim_{n\to\infty} (x'_n, y'_n)$$

がわかる. この β は, 明らかに内積の公理を満たす.

（証明おしまい）

例 2.7.1

- 区間 $[0, 1]$ 上連続関数の全体 X に内積

  $$(x, y) = \int_0^1 x(t)\overline{y(t)}\mathrm{d}t$$

  を入れる. X は完備ではない ($x_n(t)$ を, $[0, a-1/n]$ と $[b+1/n, 1]$ で 0,$[a, b]$ 上で 1 とし, 隙間を直線でつないだような関数とすると, $\{x_n\}$ はコーシー列であるが, 収束先は定義関数のようになり連続でない.)

  X の完備化は $L^2(0, 1)$ と等長である.

- 区間 $[-1, 1]$ 上連続微分可能な実数値関数全体に内積

  $$(x, y) = \int_{-1}^1 (x(t)y(t) + x'(t)y'(t))\mathrm{d}t$$

  を導入すると, プレ・ヒルベルト空間になる. この空間の完備化を $H^1(-1, 1)$ で表す.

  特に, 区間 $[-1, 1]$ 上連続微分可能な実数値関数でさらに $t = \pm 1$ で 0 になるようなもの全体に同じ内積を入れたものもプレ・ヒルベルト空間になり, その完備化を $H_0^1(-1, 1)$ で表す.

- Ω を $\mathbb{R}^n$ の滑らかな境界を持つ有界開集合とする. $\overline{\Omega}$ 上連続微分可能な実数値関数全体は, 内積

$$(x,y)=\int_\Omega\left(x(\xi)y(\xi)+\sum_{j=1}^n\frac{\partial x(\xi)}{\partial\xi_j}\frac{\partial y(\xi)}{\partial\xi_j}\right)\mathrm{d}\xi$$

によってプレ·ヒルベルト空間となる. この空間の完備化を $H^1(\Omega)$ で表す.

3 線形作用素

3.1 線形作用素

定義 3.1: 線形作用素

バナッハ空間 X の部分空間 D の各元 x に別のバナッハ空間 Y の元 $y=Tx$ を対応させる写像 $T:D\to Y$ が線形であるとは, $T(ax_1+bx_2)=aTx_1+bTx_2$ を満たすことを言う. 関数解析では, T のことを線形作用素という. D を線形作用素 T の定義域といい $D(T)$ と書く. D の T による像 $\{y\in Y|y=Tx,x\in D\}$ を値域といい $R(T)$ とかく. 和を $(T+S)(x)=Tx+Sx$, スカラー倍を $(aT)(x)=a(Tx)$ で定める. $Ix=x,Ox=0$ となる作用素 I,O をそれぞれ恒等作用素, ゼロ作用素という.

定義 3.2: 連続

$D(T)\subset X$. 線形作用素 $T:D(T)\to Y$ が連続であるとは, $x_n\to x$ なら $Tx_n\to Tx$ になるとき.

定理 3.1.1: 線形作用素では連続性と有界性が同値

形作用素 T が連続となる必要十分条件は,

$$\exists M:\text{定数 s.t.}\forall x\in D(T),\|Tx\|\leq M\|x\| \tag{3.1}$$

証明

まず, $T0=T(x-x)=Tx-Tx=0$ であることに注意する.
対偶を示すことで必要性を示す. 任意の M についてある $x\in D(T)$ で式 (3.1) が成り立たないものが存在すると仮定する. $M=n$ とし, 式 (3.1)

が成り立たない x を x_n とする．$\|Tx_n\| > n\|x_n\|$. $y_n = x_n/(\sqrt{n}\|x_n\|)$ とおくと, $\|y_n\| = 1/\sqrt{n}$ より $y_n \to 0$. 一方で,

$$\|Ty_n\| = \frac{1}{\sqrt{n}\|x_n\|}\|Tx_n\| \geq \sqrt{n}$$

であり, $\|Ty_n\| \to \infty$. よって連続ではない．
十分性を示す．$x_n \to x$ とする．式 (3.1) から

$$\|Tx_n - Tx\| = \|T(x_n - x)\| \leq M\|x_n - x\|$$

よって, $Tx_n \to Tx$ であり, T は連続.

（証明おしまい）

式 (3.1) を満たす線形作用素 $T : X \to Y$ を有界作用素という.

さて, $D(T) = X$ である有界な線形作用素 $T : X \to Y$ の全体を $\mathscr{L}(X, Y)$ とかく．特に $Y = X$ のときは $\mathscr{L}(X)$ とかく．さらに, $Y = K$ のとき, 線形連続作用素を線形連続汎関数といい, $X^* = \mathscr{L}(X, K)$ を共役空間という.

$\mathscr{L}(X, Y)$ は明らかに線形空間. $T \in \mathscr{L}(X, Y)$ のノルムを

$$\|T\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Tx\|}{\|x\|}$$

で定義する．これにより, $\mathscr{L}(X, Y)$ はノルム空間．このノルムでの収束を作用素ノルムでの収束という.

解答: 問 3.1

$\|T\| = \sup\limits_{\|x\|=1} \|Tx\|$ を示せ.

(証明) 任意の $\|x\| = 1$ に対して, $\|Tx\| \leq \|T\|$ より, $\sup_{\|x\|=1} \|Tx\| \leq \|T\|$. 一方, sup の定義から, 任意の $\epsilon > 0$ に対して, $\|Tx\|/\|x\| \leq \|T\|$ かつ $\|T\| - \epsilon < \|Tx\|/\|x\|$ を満たす $x \in X$ が存在する．$y = x/\|x\|$ とすると, $y \in X$ かつ $\|Ty\| = \|Tx\|/\|x\|$ より, $\|T\| - \epsilon < \|Ty\| \leq \|T\|$. よって, $\|T\| = \sup_{\|y\|=1} \|Ty\|$.

（おしまい）

定理 3.1.2

$\mathscr{L}(X, Y)$ はバナッハ空間.

証明

完備性を示せばよい.

T_n を $\mathscr{L}(X,Y)$ のコーシー列とする. すなわち, 任意の $\epsilon > 0$ に対して N を適当にとれば,

$$\|T_n - T_m\| = \sup_{\|x\|\neq 0} \frac{\|T_n x - T_m x\|}{\|x\|} < \epsilon \quad (n, m > N)$$

となる. 各 $x \in X$ に対して, 十分大きい n, m で $\|T_n x - T_m x\|/\|x\| \leq \|T_n - T_m\|$ より $\|T_n x - T_m x\| \leq \|T_n - T_m\|\|x\| < \epsilon\|x\|$ であるから, $\{T_n x\}$ は Y のコーシー列. Y はバナッハ空間だから, $T_n x \to y$ となる元 $y \in Y$ が存在する. これは各 x に対して定まるから, x に対し y を定める対応を T とする. 明らかに T は線形. $m \to \infty$ として,

$$\|T_n x - Tx\| \leq \epsilon\|x\| \quad (n > N)$$

これより, $\|Tx\| \leq (\epsilon + \|T_n\|)\|x\|$ となり, $T_n \in \mathscr{L}(X,Y)$ より T は有界作用素である. 特に $\|x\| = 1$ とすると, $\|Tx - T_n x\| \leq \epsilon$. よって, $\|T - T_n\| =\leq \epsilon(n > N)$. これより, $\|T - T_n\| \to 0$. よって $\mathscr{L}(X,Y)$ は完備.

（証明おしまい）

解答: 問 3.2

$T, S \in \mathscr{L}(X)$ とする. このとき,

1. $\|TS\| \leq \|T\|\|S\|$
2. $\|T^n\| \leq \|T\|^n$

を示せ.

(証明)

1. 任意の $x \in X$ について,

$$\frac{\|T(Sx)\|}{\|x\|} = \frac{\|T(Sx)\|}{\|Sx\|}\frac{\|Sx\|}{\|x\|} \leq \|T\|\|S\|$$

   よって, $\|TS\| \leq \|T\|\|S\|$.

2. $S = T^{n-1}$ とすれば, $\|T^n\| \leq \|T\|\left\|T^{n-1}\right\|$. あとは帰納的に言える.

（おしまい）

3.2 有界作用素の例

例 3.2.1

$k(t) \in L^\infty(\Omega)$ とする．$x \in L^p(\Omega) \quad (1 < p < \infty)$ にたいして，

$$(Tx)(t) = k(t)x(t) \quad (t \in \Omega)$$

とすると, T は有界作用素で $\|T\| = \|k\|_{L^\infty}$

証明

$\|k\|_{L^\infty} = \sup_t |k(t)|$ であったことに注意すると，

$$\|Tx\|_{L^p}^p = \int_\Omega |k(t)|^p |x(t)|^p \mathrm{d}t \leq \alpha^p \|x\|_{L^p} \quad (\alpha = \|k\|_{L^\infty})$$

よって, $\|T\| \leq \alpha$ であり, T は有界作用素.

次に $\geq$ を示す．任意の $\epsilon > 0$ に対して正の測度 $|\Omega_0|$ をもち, $|k(t)| \geq \alpha - \epsilon \ (t \in \Omega_0)$ となる可測集合 $\Omega_0 \subset \Omega$ が存在. この Ω_0 に対し

$$x(t) = \begin{cases} |\Omega_0|^{-1/p} & (t \in \Omega_0) \\ 0 & (t \in \Omega \backslash \Omega_0) \end{cases}$$

となる x を定めると，

$$\|Tx\|_{L^p}^p = \frac{1}{|\Omega_0|} \int_{\Omega_0} |k(t)|^p \mathrm{d}t, \quad \|x\|_{L^p} = 1$$

なので，

$$\alpha - \epsilon \leq \|Tx\|_{L^p} \leq \|T\| \|x\|_{L^p} = \|T\|$$

ϵ は任意だから, $\alpha \leq \|T\|$. よって, $\|T\| = \alpha$.

（証明おしまい）

例 3.2.2: ヒルベルト・シュミット型積分作用素

$\Omega \times \Omega$ 上に 2 乗可積分な関数 $k = k(t, s)$ が与えられているとする:

$$\int_\Omega \int_\Omega |k(t, s)|^2 \mathrm{d}s\mathrm{d}t < \infty.$$

このとき, 任意の $x \in L^2(\Omega)$ に対して, 作用素 T を

$$(Tx)(t) = \int_\Omega k(t, s)x(s)\mathrm{d}s$$

と定めると, T は $L^2(\Omega)$ の中の線形有界作用素であって, 次の評価が

成立.

$$\|T\| \leq \left(\int_{\Omega\times\Omega} |k(t,s)|^2 \right)^{1/2} \mathrm{d}s\mathrm{d}t \tag{3.2}$$

この k をヒルベルト・シュミット型の核, T をヒルベルト・シュミットという.

証明

シュワルツの不等式より,

$$\begin{aligned} |(Tx)(t)| &\leq \int_\Omega |k(t,s)||x(s)|\mathrm{d}s \\ &\leq \left(\int_\Omega |k(t,s)|\mathrm{d}s \right)^{1/2} \left(\int_\Omega |x(s)|\mathrm{d}s \right)^{1/2} \end{aligned}$$

よって,

$$|(Tx)(t)|^2 \leq \left(\int_\Omega |k(t,s)|\mathrm{d}s \right) \|x\|_{L^2}^2$$

これを t について Ω 上で積分すれば,

$$\|Tx\|_{L^2} \leq \left(\int_\Omega \int_\Omega |k(t,s)|^2 \mathrm{d}s\mathrm{d}t \right)^{1/2} \|x\|_{L^2}$$

これから, T は有界作用素であり, 式 (3.2) の成立がわかる.

（証明おしまい）

例 3.2.3: たたみこみ作用素

$\rho \in L^1(\mathbb{R}^n)$ に対して,

$$(Tx)(t) = \int_{\mathbb{R}^n} \rho(t-s)x(s)\mathrm{d}s$$

と定めると, T は $L^p(\mathbb{R}^n)$ $(1 \leq p \leq \infty)$ の中の有界作用素であって,

$$\|Tx\|_{L^p} \leq \|\rho\|_{L^1} \|x\|_{L^p}$$

が成立. この T をたたみこみ作用素といい, $Tx = \rho * x$ とかく.

3.3 逆作用素

有界作用素 $T \in \mathscr{L}(X,Y)$ に対して, $T(Sy) = y, S(Tx) = x$ となる有界作用素 $S \in \mathscr{L}(Y,X)$ を T の逆作用素といい, T^{-1} とかく.

命題 3.3.1

T, S の有界な逆作用素 T^{-1}, S^{-1} が存在すれば, TS も有界な逆作用素 $(TS)^{-1}$ をもち,

$$(TS)^{-1} = S^{-1}T^{-1}$$

証明

$TS(S^{-1}T^{-1}) = I, (S^{-1}T^{-1})TS = I$ より

（証明おしまい）

任意の $y \in X$ に対して

$$x - Tx = y$$

となる $x \in X$ は存在するかどうか確かめるために, $I - T$ の逆作用素の存在性が重要となる.

定理 3.3.1

$T \in \mathscr{L}(X)$ とする. もし $\|T\| < 1$ ならば, $I - T$ の値域は X であって, $(I - T)^{-1}$ は存在し, $(I - T)^{-1} \in \mathscr{L}(X)$ かつ

$$(I - T)^{-1} = I + T + T^2 + \cdots \tag{3.3}$$

そのうえ,

$$\left\|(I - T)^{-1}\right\| \leq \frac{1}{1 - \|T\|} \tag{3.4}$$

が成り立つ.

証明

仮定より, $\|T\| < 1$ であるから, 級数 $\sum \|T\|^n$ は収束する. 問 3.2 から $\|T^n\| \leq \|T\|^n$ であるから,

$$\left\|\sum_{k=0}^{m} T^k - \sum_{k=0}^{n} T^k\right\| = \left\|\sum_{k=n+1}^{m} T^k\right\| \leq \sum_{k=n+1}^{m} \left\|T^k\right\| \leq \sum_{k=n+1}^{m} \|T\|^k$$

よって, $\sum_{k=0}^{m} T^k$ は $\mathscr{L}(X)$ のコーシー列. $\mathscr{L}(X)$ は完備だから,

$$S = \sum_{k=0}^{\infty} T^k$$

とすれば, $S \in \mathscr{L}(X)$ であって,

$$TS = ST = \sum_{k=1}^{\infty} T^k = \sum_{k=0}^{\infty} T^k - I = S - I$$

よって, $(I - T)S = S(I - T) = I$ であり, $(I - T)^{-1} = S$.

また,

$$\left\|(I-T)^{-1}\right\| \leq \sum_{k=0}^{\infty}\left\|T^k\right\| \leq \sum_{k=0}^{\infty}\|T\|^k = \frac{1}{1-\|T\|}$$

（証明おしまい）

系 3.3.1

上の命題の仮定は $\|T\| < 1$ の代わりに $\sum \left\|T^k\right\| < \infty$ としてもよい.

定理 3.3.2: 逆作用素の存在性

$T \in \mathscr{L}(X)$ の値域が X 全体で, T の逆 T^{-1} が存在する有界作用素とする. もし作用素 $S \in \mathscr{L}(X)$ が

$$\|T-S\| < \frac{1}{\|T^{-1}\|}$$

を満たせば, S の値域は X であって S^{-1} が存在し, 有界作用素である. さらに,

$$\|S\| \leq \frac{\left\|T^{-1}\right\|}{1-\|T^{-1}\|\|T-S\|}$$

$$\left\|S^{-1}-T^{-1}\right\| \leq \frac{\left\|T^{-1}\right\|^2\|T-S\|}{1-\|T^{-1}\|\|T-S\|}$$

証明

$S = T-(T-S) = T\{I-T^{-1}(T-S)\}$. 仮定から, $\left\|T^{-1}(T-S)\right\| \leq \left\|T^{-1}\right\|\|T-S\| < 1$. よって, $\{I-T^{-1}(T-S)\}^{-1}$ は存在し,

$$\{I-T^{-1}(T-S)\}^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty}\{T^{-1}(T-S)\}^n$$

それゆえ, $S^{-1} = \{I-T^{-1}(T-S)\}^{-1}T^{-1}$.

また,

$$\begin{aligned}\|S^{-1}\| &\le \sum_{n=0}^{\infty} \left\|T^{-1}(T-S)\right\|^n \left\|T^{-1}\right\| \\ &\le \sum_{n=0}^{\infty} \|T-S\|^n \left\|T^{-1}\right\|^n \left\|T^{-1}\right\| \\ &= \frac{\left\|T^{-1}\right\|}{1-\|T^{-1}\|\|T-S\|} \\ \left\|S^{-1}-T^{-1}\right\| &\le \sum_{n=1}^{\infty} \left\|T^{-1}(T-S)\right\|^n \left\|T^{-1}\right\| \\ &= \frac{\left\|T^{-1}\right\|^2 \|T-S\|}{1-\|T^{-1}\|\|T-S\|}\end{aligned}$$

（証明おしまい）

例 3.3.1: フレドホルム型積分作用素

$y(t)$ を $[a,b]$ 上の連続関数とする.

$$y(t) = x(t) - \int_a^b k(t,s)x(s)\mathrm{d}s \tag{3.5}$$

となる $[a,b]$ 上連続関数 $x(t)$ を求めたい. ここで,

(i) $k(t,s)$ は $[a,b]\times[a,b]$ 上連続.

(ii) $M = \max_{s,t}|k(t,s)|$ とおくと, $M(b-a)<1$

の条件を満たすことを仮定する. このような k を核に持つ積分作用素をフレドホルム型積分作用素という.
$X = C[a,b]$ とし, $x \in X$ に対して, 作用素 K を

$$(Kx)(t) = \int_a^b k(t,s)x(s)\mathrm{d}s$$

とする. K は線形有界作用素であり, $\|x\| = \sup_t |x(t)|$ として

$$|(Kx)(t)| \le \int_a^b |k(t,s)||x(s)|\mathrm{d}s \le M\|x\|(b-a).$$

よって, $\|Kx\| \le M\|x\|(b-a), \|K\| \le M(b-a)$ であり, 式 (3.6) は

$$y = (I-K)x$$

と書ける. 条件 (ii) より $(I-K)^{-1}$ が存在して,

$$x = (I-K)^{-1}y = y + Ky + K^2y + \cdots$$

である．
$k_1(t,s)=k(t,s), \int_a^b k_1(t,s)k_{n-1}(t,s)\mathrm{d}s$ とすると，

$$\begin{aligned}
Ky &= \int_a^b k_1(t,s)y(s)\mathrm{d}s \\
K^2y &= \int_a^b k(t,s)\left(\int_a^b k(s,r)y(r)\mathrm{d}r\right)\mathrm{d}s \\
&= \int_a^b \left(\int_a^b k(t,s)k(s,r)\mathrm{d}s\right)y(r)\mathrm{d}r \\
&= \int_a^b k_2(t,r)y(r)\mathrm{d}r \\
&\vdots \\
K^ny &= \int_a^b k_n(t,r)y(r)\mathrm{d}r
\end{aligned}$$

したがって，

$$x(t)=y(t)+\sum_{n=1}^{\infty}\int_a^b k_n(t,s)y(s)\mathrm{d}s$$

帰納的に $|k_s(t,s)|\leq M^n(b-a)^{n-1}$ が示される．$M(b-a)<1$ より $h(t,s)=\sum_{n=1}^{\infty}k_n(s,t)$ は $[a,b]\times[a,b]$ 上で一様収束で，t,s について連続．そして，

$$x(t)=y(t)+\int_a^b h(t,s)y(s)\mathrm{d}s$$

と書ける．この $h(t,s)$ を核に持つ積分作用素を H とする．つまり，

$$(Hz)(t)=\int_a^b h(t,s)z(s)\mathrm{d}s.$$

この H は線形有界作用素であり，$x=y+Hy$. かくして，$(I-K)^{-1}=I+H$ となる．

例 3.3.2: ヴォルテラ型積分作用素

$y(t)$ を $[a,b]$ 上の連続関数とする．

$$y(t)=x(t)-\int_a^t k(t,s)x(s)\mathrm{d}s \tag{3.6}$$

となる $[a,b]$ 上連続関数 $x(t)$ を求めたい．ここで，$k(t,s)$ は s,t に関して連続であるとする．

$X = C[a,b]$ とし, $x \in X$ に対して, 作用素 K を

$$(Kx)(t) = \int_a^t k(t,s)x(s)\mathrm{d}s$$

とする. K は線形有界作用素である. この K をヴォルテラ型積分という.

$k_1(t,s) = k(t,s), \int_s^t k_1(t,r)k_{n-1}(r,s)\mathrm{d}r$ とすると, 先ほどの例と同様にして

$$(K^n z)(t) = \int_a^t k_n(t,r)z(s)\mathrm{d}s$$

がわかる.

$M = \max|k(t,s)|$ として, 帰納的に $|k_n(t,s)| \leq M^n \frac{(t-s)^{n-1}}{(n-1)!}$ がわかる. 実際,

$$\begin{aligned}
|k_1(t,s)| &\leq M \\
|k_2(t,s)| &\leq \int_s^t |k_1(t,r)||k_1(r,s)|\mathrm{d}r \\
&\leq M^2(t-s) \\
&\vdots \\
|k_n(t,s)| &\leq \int_s^t |k_1(t,r)||k_{n-1}(r,s)|\mathrm{d}r \\
&\leq \int_s^t M \cdot M^{n-1}\frac{(r-s)^{n-2}}{(n-2)!}\mathrm{d}r \\
&= M^n \int_s^t \frac{(r-s)^{n-2}}{(n-2)!}\mathrm{d}r \\
&= M^n \frac{(t-s)^{n-1}}{(n-1)!}
\end{aligned}$$

これより $|k(t,s)| \leq M^n \frac{(b-a)^{n-1}}{(n-1)!}$ であり, $h(t,s) = \sum_{n=1}^{\infty} k_n(s,t)$ は $[a,b] \times [a,b]$ 上で一様収束で, t, s について連続. そして,

$$\|K^n z\| \leq M^n(b-a)\frac{(b-a)^{n-1}}{(n-1)!}\|z\|$$

であるから, $\|K^n\| \leq M^n \frac{(b-a)^n}{(n-1)!}$ であり,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|K^n\| \leq M^n \frac{(b-a)^n}{(n-1)!} < \infty.$$

よって, $(I-K)^{-1}$ は存在し, $x = (I-K)^{-1}y = \sum_{n=0}^{\infty} K^n y$. つまり,

$$x(t) = y(t) + \int_a^t h(t,s)y(s)\mathrm{d}s$$

(ここで, 一様収束なら級数と積分が交換できることを用いた.)

積分作用素の応用例として, 常微分方程式について見ておこう.

例 3.3.3: 常微分方程式の初期値問題

$[a,b]$ 上で, 常微分方程式の初期値問題

$$\begin{cases} x''(t) + a_1(t)x'(t) + a_2(t)x(t) = y(t) \\ x(a) = \alpha_0, \quad x'(a) = \alpha_1 \end{cases}$$

の解の存在性を考えよう.
$x''(t) = z(t)$ とおくと,

$$\int_a^t z(s)\mathrm{d}s = x'(t) - \alpha_1,$$
$$\int_a^t \mathrm{d}r\left(\int_a^r z(s)\mathrm{d}s\right) = x(t) - \alpha_0 - \alpha_1(t-a)$$

を得る. 積分の順序を変えると,

$$\int_a^t \mathrm{d}r\left(\int_a^r z(s)\mathrm{d}s\right) = \int_a^t z(s)\mathrm{d}s\left(\int_s^t \mathrm{d}r\right) = \int_a^t (t-s)z(s)\mathrm{d}s$$

よって, 常微分方程式は,

$$z(t) + a_1(t) + \left\{\alpha_1 + \int_a^t z(s)\mathrm{d}s\right\}$$
$$+ a_2(t)\left\{\alpha_0 + \alpha_1(t-a) + \int_a^t (t-s)z(s)\mathrm{d}s\right\} = y(t)$$

という積分方程式になる. もし x が常微分方程式の解ならば, z は積分方程式の解になる. 逆を示そう.

$$k(t,s) = -a_1(t) - a_2(t)(t-s)$$
$$w(t) = y(t) - \alpha_0 a_2(t) - \alpha_1\{a_1(t) + a_2(t)(t-a)\}$$

と置くと, 積分方程式は

$$z(t) - \int_a^t k(t,s)z(s)\mathrm{d}s = w(t)$$

と書き換えられる. これは, ヴォルテラ型の積分作用素 K を用いれば $(I-K)z = w$ と書けるので, ただ一つの解を X の中に持つ. この z を用いて $x = \alpha_0 + \alpha_1(t-a) + \int_a^t (t-s)z(s)\mathrm{d}s$ と定めると, この x は常微分方程式の初期値問題の解である. z の一意性から, x の一意性もただちにわかる.

例 3.3.4: 常微分方程式の境界値問題

$[a,b]$ 上で, 常微分方程式の境界値問題

$$\begin{cases} x''(t)+a_2(t)x(t)=y(t) \\ x(a)=\alpha, \quad x(b)=\beta \end{cases}$$

を考える. もし

$$(b-a)^2 \max_t |a_2(t)| < 4$$

ならば, 境界値問題はただ一つの解をもつ.

(証明)

$$g(t,s)=\begin{cases} \dfrac{(b-t)(s-a)}{b-a} & (a \le s \le t) \\ \dfrac{(t-a)(b-s)}{b-a} & (t \le s \le b) \end{cases}$$

とおくと, 関数

$$\begin{aligned} z(t) &= -\int_a^b g(t,s)y(s)\mathrm{d}s \\ &= -\int_a^t \frac{(b-t)(s-a)}{b-a}y(s)\mathrm{d}s + \int_b^t \frac{(t-a)(b-s)}{b-a}y(s)\mathrm{d}s \end{aligned}$$

は $z''(t)=y(t), z(a)=z(b)=0$ を満たす.
($\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_a^t f(t,s)\mathrm{d}s = f(t,t)+\int_a^t f'(t,s)\mathrm{d}s$ に注意すると,

$$\begin{aligned} z'(t) &= -\frac{(b-t)(t-a)}{b-a}y(t)+\frac{(b-t)(t-a)}{b-a}y(t) \\ &\quad + \int_a^t \frac{s-a}{b-a}y(s)\mathrm{d}s + \int_b^t \frac{b-s}{b-a}y(s)\mathrm{d}s \\ &= \int_a^t \frac{s-a}{b-a}y(s)\mathrm{d}s + \int_b^t \frac{b-s}{b-a}y(s)\mathrm{d}s \\ z''(t) &= \frac{t-a}{b-a}y(t)+\frac{b-t}{b-a}y(t)=y(t) \end{aligned}$$

であることからわかる)
したがって, 関数

$$x(t)=\alpha\frac{b-t}{b-a}+\beta\frac{t-a}{b-a}-\int_a^b g(t,s)y(s)\mathrm{d}s$$

は, $x''(t)=y(t), x(a)=\alpha, x(b)=\beta$ を満たす.
この y を $y(s)-a_2(t)x(s)$ で置き換えると,

$$x(t)=\alpha\frac{b-t}{b-a}+\beta\frac{t-a}{b-a}-\int_a^b g(t,s)(y(s)-a_2(t)x(s))\mathrm{d}s$$

となる．

$$k(t,s)=g(t,s)a_2(t),\quad z(t)=\alpha\frac{b-t}{b-a}+\beta\frac{t-a}{b-a}-\int_a^b g(t,s)y(s)\mathrm{d}s$$

とおくと，

$$x(t)-\int_a^b k(t,s)x(s)\mathrm{d}s=z(t)$$

と書くことができる．z は既知の関数のみからなるので，これはフレドホルム型の積分方程式になる．

もしこの積分方程式の解を X の中でみつければ，$x(a)=\alpha, x(b)=\beta$．さらに，$z''(t)=y(t)$ および

$$\left(\int_a^b k(t,s)x(s)\mathrm{d}s\right)''=-a_2(t)x(t)$$

となることに注意すれば，x が二階微分可能であることがわかる．したがって，境界値問題を解くことは積分方程式を解くことに帰着する．

作用素 K を

$$(Ky)(t)=\int_a^b k(t,s)y(s)\mathrm{d}s$$

と定めると，K は有界線形作用素で，積分方程式は

$$(I-K)x=z$$

と書ける．$\|Ky\|\leq\max|k(t,s)|(b-a)\|y\|$ より $\|K\|\leq\max|k(t,s)|(b-a)$．他方，$|k(t,s)|=|g(t,s)||a_2(s)|\leq\max|a_2(t)|\frac{1}{4}(b-a)$ である．仮定から，

$$\|K\|\leq\max|a_2(t)|\frac{1}{4}(b-a)^2<1$$

よって，$(I-K)^{-1}$ が存在し，境界値問題はただ一つの解をもつ．

もっと一般の境界値問題

$$\begin{cases}x''(t)+a_1(t)x'(t)+a_2(t)x(t)=y(t)\\x(a)=\alpha,\quad x(b)=\beta\end{cases}$$

を考える．このとき，

$$p(t)=\exp\left(-\frac{1}{2}\int_a^t a_1(s)\mathrm{d}s\right),\quad x(t)=u(t)p(t)$$

とおくと, この u は境界値問題

$$\begin{cases} u''(t) + \left(a_2(t) - \dfrac{1}{2}a_1'(t) - \dfrac{1}{4}a_1^2(t)\right)u(t) = \dfrac{y(t)}{p(t)} \\ u(a) = \dfrac{\alpha}{p(a)}, \quad u(b) = \dfrac{\beta}{p(b)} \end{cases}$$

に帰着され, 元の問題と同様に解の一意存在性が確認される.

3.4 閉作用素

バナッハ空間 X, Y の線形作用素 T の定義域を X 全体としていたが, これでは制限がつよすぎる.

定義 3.3: 閉作用素

X から Y への線形作用素 T の定義域 $D(T)$ にノルム

$$\|x\| = \|x\|_X + \|Tx\|_Y$$

を導入したとき, $D(T)$ が完備であれば, T を閉作用素という.

有界作用素は閉作用素. なぜなら, $D(T) = X$ の中のコーシー列について,

$$\|x_n - x_m\| = \|x_n - x_m\|_X + \|Tx_n - Tx_m\|_Y \leq (1+M)\|x_n - x_m\|_X$$

であり, $D(T)$ のノルムと X のノルムが同値になるためである.

例 3.4.1: 微分作用素

$X = C[0,1], D(T) = C^1[0,1]$ であって,

$$(Tx)(t) = x'(t)$$

と定めると, $D(T)$ は X より真に小さく, T は有界作用素でない.
しかし, $D(T)$ は閉作用素である.

(証明) $\|x\| = \|x\|_X + \|x'\|_X$ とすると, $D(T)$ 内のコーシー列 $\{x_n\}$ について, $\|x_n - x_m\| \to 0$ のとき $\|x_n - x_m\|_X \to 0$ かつ $\|x'_n - x'_m\| \to 0$ より, X の完備性から X の元として $x_n \to x$ かつ $x'_n \to y$. 一方,

$$x_n(t) - x_n(0) = \int_0^t x'(s)\mathrm{d}s$$

において, $n \to 0$ で

$$x(t) - x(0) = \int_0^t y(s)\mathrm{d}s$$

これより, x は微分可能であって $x' = y$. よって, $D(T)$ は完備であり, T は閉作用素.

一方, $x_n = \frac{1}{\sqrt{n}} t^n$ とおくと, $x_n \to 0$ であるが, $Tx_n = x_n' = \sqrt{n}t^{n-1}$ となり, $Tx \to \infty$ となる. よって, T は有界作用素ではない.

次の定理は重要であるが, 証明は次の章に回す.

定理 3.4.1: 閉グラフ定理

$T : X \to Y$ を閉作用素とする. もし $D(T) = X$ ならば, T は有界作用素である.

閉作用素かどうかの判定には, 次の定理が便利である.

定理 3.4.2

$T : X \to Y$ が閉作用素であるための必要十分条件は,

$$x_n \in D(T), x_n \to x \in X, Tx_n \to y \in Y \text{ ならば}, x \in D(T) \text{ かつ } Tx = y \tag{3.7}$$

証明

まず, 必要性を示す. T が閉作用素であると仮定する. $\{x_n\}, \{Tx_n\}$ は X, Y それぞれのコーシー列であるから, $D(T)$ の完備性から, ある $x^* \in D(T)$ が存在して

$$\|x_n - x^*\|_X + \|Tx_n - Tx^*\|_Y \to 0.$$

極限の一意性から, $x^* = x, Tx^* = y$. したがって, 条件 (3.7) は成立.

次に, 十分性を示す. $\{x_n\}$ を $D(T)$ のコーシー列とすると,

$$\|x_n - x_m\| = \|x_n - x_m\|_X + \|Tx_n - Tx_m\|_Y \to 0$$

より, $\{x_n\}, \{Tx_n\}$ はそれぞれ X, Y のコーシー列である. X, Y の完備性から, $x_n \to x \in X, Tx_n \to y \in Y$ が存在する. 条件 (3.7) から, $x \in D(T)$ かつ $y = Tx$. よって, $D(T)$ は完備で, T は閉作用素.

（証明おしまい）

例 3.4.2

$X = L^2(0,1)$. 作用素 X を, $D(T) = \{x \in X | x(t)$: 絶対連続$, x(0) = x(1), x' \in X\}$ で, $Tx = x'$ と定める. このとき, T は閉作用素.

（証明）$x \in D(T)$ のとき, $x' \in L^2(0,1)$ であって,

$$x(t) = \alpha + \int_0^t x'(s)\mathrm{d}s$$

と表される. （これは, F の $[0,1]$ 上の絶対連続性と $F(t) - F(0) = \int_0^x f(t)\mathrm{d}t$ となる $f \in L^1(0,1)$ が存在することが同値であることから導ける.）$x(0) = x(1)$ より, $\int_0^1 x'(s)\mathrm{d}s = 0$ である.
さて, $x_n \in D(T), x_n \to x \in X, Tx_n \to y \in Y$ と仮定する. $x_n \in D(T)$ より,

$$x_n(t) = x_n(0) + \int_0^t x_n'(s)\mathrm{d}s \tag{3.8}$$

シュワルツの不等式から,

$$\begin{aligned}\left|\int_0^t x_n'(s)\mathrm{d}s - \int_0^t y(s)\mathrm{d}s\right| &\le \int_0^1 |x_n'(s) - y(s)|\mathrm{d}s \\ &\le \|x_n' - y\|_{L^2}\end{aligned}$$

($\int_0^1 |f(t)|\mathrm{d}t = |(|f|, 1)| \le \||f|\|_{L^2} = (\int_0^1 |f(t)|^2\mathrm{d}t)^{1/2} = \|f\|_{L^2}$ を用いた.)
よって, $\int_0^t x_n'(s)\mathrm{d}s$ は $\int_0^t y(s)\mathrm{d}s$ に一様収束. 特に, $\int_0^1 x'(s)\mathrm{d}s = 0$ であるから, $\int_0^1 y(s)\mathrm{d}s = 0$.
また, $x_n(0) - x_m(0) = x_n(t) - x_m(t) - \int_0^t [x_n'(s) - x_m'(s)]\mathrm{d}s$ であるから,

$$\begin{aligned}|x_n(0) - x_m(0)| &\le |x_n(t) - x_m(t)| + \int_0^t |x_n'(s) - x_m'(s)|\mathrm{d}s \\ &\le |x_n(t) - x_m(t)| + \int_0^1 |x_n'(s) - x_m'(s)|\mathrm{d}s \\ &\le |x_n(t) - x_m(t)| + \|x_n' - x_m'\|_{L^2}\end{aligned}$$

t について $[0,1]$ 上積分し, シュワルツの不等式を用いると,

$$\begin{aligned}|x_n(0) - x_m(0)| &\le \int_0^1 |x_n(t) - x_m(t)|\mathrm{d}t + \|x_n' - x_m'\|_{L^2} \\ &\le \|x_n - x_m\|_{L^2} + \|x_n' - x_m'\|_{L^2}\end{aligned}$$

$\{x_n'\} = \{Tx_n\}$ は収束列なのでコーシー列であり, したがって $\{x_n(0)\}$ はコーシー列で, ある α で $x_n(0) \to \alpha$. 式 (3.8) において, 右辺は一様

収束するので, 左辺も一様収束し, $x_n \to z$. よって,

$$z(t) = \alpha + \int_0^t y(t)\mathrm{d}s$$

よって, $z \in D(T)$ であって, $z' = y$ a.e. また,

$$\int_0^1 |x_n(t) - z(t)|^2 \mathrm{d}t \to 0.$$

仮定から $L^2(0,1)$ の位相で $x_n \to x$ であったが, 極限の一意性から, $x = z$. よって, $x \in D(T)$ かつ $x' = y$ a.e. すなわち, T は閉作用素.

閉作用素の性質をまとめる.

命題 3.4.1

$T \in \mathscr{L}(X,Y)$ ならば, T は閉作用素.

証明

T は有界作用素なので自明.

（証明おしまい）

命題 3.4.2

T が閉作用素で 1 対 1 ならば, T^{-1} も閉作用素.

証明

$y_n \in D(T^{-1}), y_n \to y, T^{-1}y_n \to z$ とする. $z_n = T^{-1}y_n$ とおくと, $Tz_n = y_n \to y, z_n \to z$. T は閉作用素なので, $z \in D(T)$ かつ $y = Tz$. よって, $y \in D(T^{-1})$ かつ $T^{-1}y = z$. 定理 3.4.2 より, T^{-1} は閉作用素.

（証明おしまい）

命題 3.4.3

T が閉作用素で, $S \in \mathscr{L}(X,Y)$ とする. $T+S$ も閉作用素.

証明

まず, $D(T) = D(T+S)$ に注意する. $x_n \in D(T), x_n \to x, (T+S)x_n \to y$ とする. S は有界作用素なので連続. よって, $Sx_n \to Sx$. $Tx_n \to y - Sx$ である. T は閉作用素であるから, $x \in D(T)$ であって, $Tx = y - Sx$. よって, $(T+S)x = y$. 定理 3.4.2 から, $T+S$ は閉作用素.

（証明おしまい）

さて，例 3.4.2 について，$L^2(0,1)$ の中の作用素 T_0 を，$D(T_0) = \{x \in C^1[0,1] | x(0) = x(1)\}, T_0x = x'$ とする．このとき, T_0 は閉作用素ではない.

証明

$x_n \in D(T_0), x_n \to x \in X, T_0x_n \to y \in X$ と仮定する．x_n を三角波の第 n 項までの和とすると, $x \notin D(T_0)$ より T は閉作用素ではない.

（証明おしまい）

定義 3.4: 前閉作用素

作用素 S の拡張になっているような閉作用素 T が存在するとき, つまり $D(S) \subset D(T), Sx = Tx \quad (x \in D(S))$ となるような閉作用素 T が存在するとき, S は閉包を許す, あるいは前閉作用素という．また, T を閉拡張という.

定理 3.4.3

T が前閉作用素となるための必要十分条件は,

$$x_n \in D(T), x_n \to 0, Tx_n \to y \text{ ならば } y = 0$$

証明

まず, 必要性を示す．T が前閉作用素ならば, T の閉拡大 T_1 が存在. $x_n \in D(T), x_n \to 0, Tx_n \to y$ とすると, $T_1x_n = Tx_n$ より, $T_1x_n \to y$. T_1 は閉作用素なので, $y = T0 = 0$.
次に, 十分性を示す．$x_n \in D(T), x_n \to x$ かつ $\{Tx_n\}$ がコーシー列であるような $\{x_n\}$ が存在するような $x \in X$ の全体を D とする．(言うなれば, $D(T)$ の"完備化"を D とする.)
$\{Tx_n\}$ はコーシー列だから, $Tx_n \to y \in Y$ となるような y が存在する．$\{x_n\}$ のほかに, $x'_n \to x$ かつ $\{Tx'_n\}$ がコーシー列とする．このとき, $Tx'_x \to y' \in Y$ となる y' が存在する．このとき, $x_n - x'_n \in D(T), x_n - x'_n \to 0$ かつ $T(x_n - x'_n) \to y - y'$. 仮定より, $y = y' = 0$. したがって, $y = y'$. これは, y は x のみで決まり, 収束のしかたにはよらないことを示している．よって, $x \in D$ に対して, $\tilde{T}x = y$ を決めることができる．ただし, $D = D(\tilde{T}).\tilde{T}$ は明らかに線形作用素であり, T の拡張になっている．すなわち, $D(T) \subset D, Tx = \tilde{T}x$.
$\tilde{T}$ が閉作用素であることを示す． 点列 $\{x_n\}$ を，$x_n \in D, x_n \to x, \tilde{T}x_n \to y$ としよう．このとき，D の定め方から，各 x_n に対して

$z_m^n \in D(T), z_m^n \to x_n$ かつ $\{Tz_m^n\}$ がコーシー列になるような $\{z_m^n\}$ が存在する. $\tilde{T}$ の決め方から, $Tz_m^n \to \tilde{T}x_n$. よって, 任意の $\epsilon > 0$ に対してある m_0 が存在し, 任意の $m > m_0$ について

$$\|x_n - z_m^n\| < \epsilon かつ \left\|\tilde{T}x_n - Tz_n\right\|$$

となる. 特に, 各 n について $\epsilon = 1/n$ とすれば

$$\|x_n - z_n\| < \frac{1}{n}, \quad \left\|\tilde{T}x_n - Tz_n\right\| < \frac{1}{n}$$

となる $z_n \in D(T)$ が存在することがわかる.

$$\|z_n - x\| \leq \|z_n - x_n\| + \|x_n - x\| \leq \frac{1}{n} + \|x_n - x\|$$

であるから, $\lim_{n\to\infty} \|z_n - x\| = 0$. つまり, $z_n \to x$.

$$\|Tz_n - y\| \leq \left\|Tz_n - \tilde{T}x_n\right\| + \left\|\tilde{T}x_n - x\right\| \leq \frac{1}{n} + \left\|\tilde{T}x_n - y\right\|$$

より, $Tz_n \to y$. したがって, $x \in D$ より, $\tilde{T}x = y$. よって, $\tilde{T}$ は閉作用素なので, T は前閉作用素.

（証明おしまい）

例 3.4.3

$L^2(0,1)$ の中の作用素 T_0 を, $D(T_0) = \{x \in C^1[0,1] | x(0) = x(1)\}, T_0x = x'$ とする. このとき, T_0 は前閉作用素である.

証明

$x_n \in D(T_0), x_n \to 0, T_0x_n = x_n' \to y$ とする. $x \in C^1[0,1]$ なら恒等式

$$x_n(0) = x_n(t) - \int_0^t x_n'(s)\mathrm{d}s$$

が成り立つ. この恒等式において, t について積分することを考える. 例 3.4.2 と同様にして, $x_n(0) \to \alpha$ および $x_n(t) \to x(t)$(一様収束) がわかる. 特に, 任意の $\epsilon > 0$ について,

$$\int_0^1 |x_n(s) - x(s)|^2\mathrm{d}s \leq \sup_t |x_n(t) - x|^2 \leq \epsilon^2$$

よって, $L^2(0,1)$ の位相でも $x_n \to x$. 一方で, 仮定から $L^2(0,1)$ の位相で $x_n \to 0$ だったから, 極限の一意性から $x = 0$. 特に, 任意の t で

$$\alpha = -\int_0^t x_n'(s)\mathrm{d}s$$

なので, $t=0$ から $\alpha=0$ がわかる. これより, $\int_0^t x_n'(s)\mathrm{d}s=0$ で,

$$\begin{aligned}\left|\int_0^t y(s)\mathrm{d}s\right| &= \left|\int_0^t y(s)-x_n'(s)\mathrm{d}s\right| \\ &\leq \int_0^t |y(s)-x_n'(s)|\mathrm{d}s \\ &\leq \int_0^1 |y(s)-x_n'(s)|\mathrm{d}s \\ &\leq \|y-x_n'\|_{L^2(0,1)} \leq \epsilon\end{aligned}$$

よって, $n\to\infty$ として,

$$\int_0^t y(s)\mathrm{d}s=0.$$

t について積分すれば, $y(t)=0$. したがって, T_0 は前閉作用素.

（証明おしまい）

参考文献

[1] 増田久弥, 『数学シリーズ 関数解析』, 裳華房

[2] 杉浦光夫, 『解析入門 I』, 東京大学出版会