MATRICES

Una matriz es un arreglo rectangular de datos.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \qquad \textbf{(A.1)}$$

Si A tiene m filas y n columnas, se dice que el *tamaño* de A es m por n (escrito $m \times n$).
Con frecuencia, abreviaremos la ecuación (A.1) como $\boldsymbol{A = (a_{ij})}$. En esta ecuación, a_{ij} denota el elemento de A que aparece en el renglón i y la columna j.

La matriz

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 6 & 14 \end{pmatrix}$$

tiene dos renglones y tres columnas, de manera que su tamaño es 2×3. Si se escribe $A = (a_{ij})$, tendríamos, por ejemplo,

$$\boldsymbol{a_{11} = 2,\ a_{21} = -1, \qquad a_{13} = 0.}$$

Dos matrices A y B son *iguales* ($A = B$), si son del mismo tamaño y sus elementos correspondientes son iguales.

Determine w, x, y y z de manera que

$$\begin{pmatrix} x+y & y \\ w+z & w-z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}.$$

De acuerdo con la definición anterior, como las matrices son del mismo tamaño, serán iguales siempre que

$$\boldsymbol{x + y = 5 \qquad y = 2}$$
$$\boldsymbol{w + z = 4 \qquad w - z = 6.}$$

Al resolver estas ecuaciones se obtiene

$$\boldsymbol{w = 5,\ x = 3,\ y = 2,\ z = -1.}$$

OPERACIONES CON MATRICES

SUMA DE MATRICES

La **suma** de dos matrices se obtiene sumando los elementos correspondientes.
Sean $\boldsymbol{A = (a_{ij})}$ **y** $\boldsymbol{B = (b_{ij})}$ dos matrices de $\boldsymbol{m \times n}$. La *suma* de A y B está definida como

$$\boldsymbol{A + B = (a_{ij} + b_{ij})}$$

Ejemplo:

$$A = \begin{pmatrix} 7 & -5 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$$

$$A + B = \begin{pmatrix} 7+1 & -5+3 \\ 2+4 & 6+(-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & -2 \\ 6 & 5 \end{pmatrix}$$

En resumen:

- La adición de matrices está definida para matrices de igual orden.
- Los elementos que se encuentran en la misma posición (fila y columna) se podrán sumar para obtener la matriz suma.

Propiedades de la suma de matrices

- Asociativa: Sean A=(aij) , B=(bij) y C=(cij) con i=1...m y j=1...n entonces (A+B)+C=A+(B+C)
- Conmutativa:Sean A=(aij) , B=(bij) con i=1...m y j=1...n entonces A+B=B+A
- Elemento neutro: Sea A=(aij) con i=1...m y j=1...n, existe una matriz O (matriz nula) de orden mxn tal que A+O=O+A=A
- Opuesto: Sea A=(aij) con i=1...m y j=1...n, existe una matriz -A de orden mxn tal que A+(-A)=O

PRODUCTO ENTRE UN ESCALAR Y UNA MATRIZ

El producto escalar se obtiene multiplicando cada elemento de la matriz por un número fijo.

El *producto escalar* de un número *c* y una matriz $A = (a_{ij})$ está definido como

$$cA = (ca_{ij})$$

Ejemplo: Si tenemos las siguientes matrices

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -1 & 0 \\ 6 & -2 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 4 & 4 \\ -1 & -3 \end{pmatrix},$$

entonces

$$2A = \begin{pmatrix} 8 & 4 \\ -2 & 0 \\ 12 & -4 \end{pmatrix}, \qquad -B = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ -4 & -4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

MULTIPLICACIÓN DE MATRICES

Sea $\boldsymbol{A = (a_{ij})}$ una matriz de $\boldsymbol{m \times n}$ y sea $\boldsymbol{B = (b_{jk})}$ una matriz de $\boldsymbol{n \times l}$. **La *matriz producto*** de *A* y *B* se define como la matriz de $\boldsymbol{m \times l}$

$$AB = (c_{ik}),$$

donde

$$c_{ik} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{jk}.$$

Para multiplicar la matriz A por la matriz B, la definición requiere que el número de columnas de A sea igual al número de filas de B.

Sea

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 4 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 4 & 7 & 0 \end{pmatrix}.$$

La matriz producto *AB* está definida ya que el número de columnas de *A* es el mismo que el número de filas de *B*; ambos son iguales a 2. El elemento c_{ik} en el producto de *AB* se obtiene usando el renglón *i* de *A* y la columna *k* de *B*. Por ejemplo, el elemento c_{31} se calcula usando el tercer renglón

$$(3 \quad 1)$$

de *A* y la primera columna

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

de *B*. Después se multiplica, consecutivamente, cada elemento en el tercer renglón de *A* por cada elemento de la primera columna de *B* y después sumamos para obtener

$3 \cdot 1 + 1 \cdot 4 = 7.$

Como el número de columnas de *A* es el mismo que el número de renglones de *B*, los elementos se aparean correctamente. Procediendo de la misma manera, se obtiene el producto

$$AB = \begin{pmatrix} 25 & 44 & -1 \\ 12 & 22 & -4 \\ 7 & 13 & -3 \end{pmatrix}.$$

Observaciones:

- La multiplicación de matrices está definida si el número de columnas de A es igual al número de filas de B. Por lo cual el producto de matrices no siempre está definido.
- En el ejemplo anterior realizamos AxB pero si quisiéramos multiplicar BxA no sería posible ya que no coinciden el número de columnas de B con el número de filas de A. Por lo cual se deduce que **la multiplicación entre matrices no es conmutativa**.

Propiedades del producto de matrices

- Asociativa: Sean A=(aij) , B=(bij) y C=(cij) con i=1...m y j=1...n entonces (AxB)xC=Ax(BxC)
- Distributiva: Sean A=(aij) , B=(bij) y C=(cij) con i=1...m y j=1...n entonces (A+B).C= A.C+ B.C (distributiva a la izquierda) y A.(B+C)= A.B+A.C (distributiva a la derecha)
- Elemento neutro para matrices cuadradas: Sean A=(aij) con i=1...m y j=1...n existe **I**=(rij) con i=1...m y j=1...n donde rij=0 si y rij=1 si i=j (matriz identidad) tal que: Ax**I**=**I**xA=A
- Sea A=(aij) con i=1...m y j=1...n y O la matriz nula entonces A.O=O y O.A=O
- Si el producto de dos matrices da por resultado la matriz nula, esto no implica que alguna de ellas sea nula

MATRIZ IDENTIDAD

Una matriz identidad o unidad de orden n es una matriz cuadrada donde todos sus elementos son ceros (0) menos los elementos de la diagonal principal que son unos (1).

Ejemplos de matrices identidad

$$I_{2x2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$I_{3x3} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$I_{nxm} = \begin{pmatrix} 1_{11} & \cdots & 0_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0_{n1} & \cdots & 1_{nm} \end{pmatrix}$$

Transpuesta de una matriz

La transpuesta de una matriz **es una operación que convierte las filas en columnas y viceversa**. Se representa colocando un símbolo de "T" en la matriz original. La transpuesta de una matriz resulta útil en diversas aplicaciones matemáticas, como el cálculo de la matriz adjunta y la resolución de sistemas de ecuaciones lineales.

Consideremos la matriz C:

$$C = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 7 \\ 4 & 2 & 9 \\ 6 & 5 & 8 \end{bmatrix}$$

La matriz transpuesta C^T **se obtiene intercambiando las filas por columnas:**

$$C^T = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 6 \\ 1 & 2 & 5 \\ 7 & 9 & 8 \end{bmatrix}$$

Propiedades de la trasposición de matrices

- $(A^t)^t=A$
- Sea A=(aij) con i=1...m y j=1...n y k un escalar entonces $(k.A^t)= k.A^t$
- Sean A=(aij) , B=(bij) con i=1...m y j=1...n entonces $(A+B)^t = A^t + B^t$
- Sean A=(aij) , B=(bij) con i=1...m y j=1...n entonces $(AxB)^t = B^t \times A^t$

MATRIZ TRIANGULAR

Matriz triangular superior: Los elementos situados debajo de la diagonal principal son 0.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Ejemplo:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Matriz triangular inferior: Los elementos situados arriba de la diagonal principal son 0.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Ejemplo:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 10 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Como la definición depende de la diagonal principal, la matriz deberá ser cuadrada.

Matriz inversa

¿Qué es la inversa de una matriz?

Sea A una matriz cuadrada. La **matriz inversa** de A se escribe A^{-1}, y es aquella matriz que cumple:

$$A \cdot A^{-1} = I$$

$$A^{-1} \cdot A = I$$

Donde I es la matriz Identidad.

¿Cuándo se puede invertir una matriz y cuándo no?

La manera más fácil de determinar la invertibilidad de una matriz es mediante su determinante:

- Si el determinante de la matriz en cuestión es diferente de 0, significa que la matriz es invertible. En este caso decimos que se trata de una matriz regular.

- En cambio, si el determinante de la matriz es igual a 0, no se puede invertir la matriz. Y, en tal caso, se dice que es una matriz singular.

<u>Determinante de una matriz</u>

El determinante de una matriz es un número real que se le asigna a las matrices cuadradas. Es muy importante recordar que el determinante se calcula sólo para matrices cuadradas, es decir que si una matriz no es cuadrada entonces **NO** tiene determinante.
La forma de calcular el determinante de una matriz depende de la dimensión de la misma. A continuación veremos tres formas de calcular determinantes:
● Cálculo de determinantes de matrices de 2x2

DETERMINANTE DE MATRICES DE 2X2:

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} = \underline{2 \cdot 4} - \underline{1 \cdot (-2)} = 8 + 2 = 10$$

RESTA

● Cálculo de determinantes por el método de Sarrus (sólo para matrices de 3x3)
Este es un método útil para encontrar determinantes de matrices de 3x3, pero sólo sirve para matrices de dicha dimensión. Ejemplo:
Dada la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 4 & -5 & 1 \end{pmatrix}$$

para calcular su determinante debemos repetir debajo de la misma las primeras dos filas, luego se realiza un procedimiento análogo al realizado para el determinante de matrices de 2x2, es decir se suman los productos de las diagonales que tienen sentido de la diagonal principal (de color azul) y se restan los productos de las diagonales de sentido contrario (color anaranjado):

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 4 & -5 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \\ 4 & -5 & 1 \end{vmatrix} = \underline{1 \cdot 0 \cdot 1 + 2 \cdot (-5) \cdot (-1) + 4 \cdot 3 \cdot 1} - \underline{\left[-1 \cdot 0 \cdot 4 + 1 \cdot (-5) \cdot 1 + 1 \cdot 3 \cdot 4\right]} =$$

$$= 0 + 10 + 12 - [0 - 5 + 12] = 24 - 7 = 17$$

● Cálculo de determinantes por fila o por columna (sirve para matrices de cualquier dimensión)

Ejercicios

1. Calcule la suma

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 6 & 9 & 3 \\ 1 & -1 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}.$$

En los ejercicios 2 al 8, defina

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 6 & 9 \\ 0 & 4 & -2 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -2 \\ -7 & 6 & 1 \end{pmatrix}$$

y calcule cada expresión.

2. $A + B$

3. $B + A$

4. $-A$

5. $3A$

6. $-2B$

7. $2B + A$

8. $B - 6A$

En los ejercicios 9 al 13, calcule los productos.

9. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 8 \\ -1 & 1 \\ 6 & 0 \end{pmatrix}$

10. $\begin{pmatrix} 1 & 6 \\ -8 & 2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 7 & -6 \end{pmatrix}$

11. A^2, donde $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 6 & 2 \end{pmatrix}$

12. $\begin{pmatrix} 2 & -4 & 6 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix}$

13. $\begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 6 & 9 & 3 \\ 1 & -1 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \\ e & f \end{pmatrix}$