Relaciones:

Relaciones entre conjuntos:

¿Qué es una relación? Una relación es cualquier correspondencia entre los elementos de dos conjuntos, en la que se asocia cada elemento de un conjunto con uno o más elementos del otro conjunto. Se representan comúnmente como pares ordenados $(a,b)(a,b)(a,b)$, donde a pertenece al primer conjunto y b al segundo.

Dominio y imagen:

¿Que es el dominio y la imagen?

- **Dominio:** Conjunto de todos los valores de entrada posibles en la relación.
- **Imagen:** Conjunto de todos los valores de salida obtenidos en la relación.

Ejemplo:

Si tenemos la relación: $\{(1,2),(3,4),(5,6)\}$, el dominio es $\{1,3,5\}$ y la imagen es $\{2,4,6\}$

Definición formal:
Si A y B son dos conjuntos, entonces una relación R de A a B es un subconjunto de $A*B$, es decir:

$$R \subseteq A*B$$

Esto significa que la relación se forma al seleccionar ciertos pares de $A*B$. Es importante señalar que una relación puede incluir uno o más pares ordenados.

Par ordenado:

¿Que es un par ordenado? Llamamos par ordenado al par en ele que queda determinado cual es el primer componente y cual es el segundo componente. Se escriben entre paréntesis, separados por coma.

Ejemplo:

(a,b) por lo general lo conocemos como (x,y)

Relación inversa:

Dada una relación A, llamamos relación inversa. A^-1, al conjunto de pares ordenados que resultan de invertir el orden de los elementos de los pares de A.

Simbólicamente: $(y,x) \in A^{-1} \leftrightarrow (x.y) \in A$

De aquí que si $R: A \rightarrow B$, entonces $R^{-1}: B \rightarrow A$.

Ejemplo:

Si tenemos la relación: $R=\{(1,2),(3,4),(5,6)\}$, su inversa sera $R^{-1}=\{(2,1),(4,3),(6,5)\}$

Propiedades de las relaciones:

- Reflexiva o idéntica: Todo elemento está relacionado con si mismo.

  Ejemplo: $R=\{(1,1),(2,2),(3,3)\}$

- Simétrica o recíproca: Si un elemento está relacionado con otro entonces este último está relacionado con el primero

  Ejemplo: $R=\{(1,2),(2,1),(3,3)\}$

- Asimétrica: Si un elemento está relacionado con otro entonces este último esta relacionado con el primero sólo cuando ambos elementos sean iguales.

  Ejemplo: $R=\{(1,2),(2,3),(3,4),(4,5)\}$

- Transitiva: Si un elemento está relacionado con otro y éste último está relacionado con un tercero, entonces el primero estará relacionado con el tercero.

Ejemplo: $R=\{(a,b),(b,c),(a,c),(c,d),(a,d),(b,d)\}$

Propiedad	Condición Matemática	Ejemplo
Reflexiva	$\forall(x)\in A,\ (x,x)\in R$	$R=\{(1,1),(2,2)\}$
Simétrica	$\forall(x,y)\in A,\ (a,b)\in R\rightarrow(b,a)\in R$	$R=\{(1,2),(2,1)\}$
Asimétrica	$\forall(x,y)\in A,\ (a,b)\in R\rightarrow(b,a)\notin R$	$R=\{(1,2),(2,3)\}$
Transitiva	$\forall(x,y,z)\in A,\ (a,b)\in R\wedge(b,c)\in R\rightarrow(a,c)\in R$	$R=\{(1,2),(2,3),(1,3)\}$

Funciones:

¿Qué es una función? Una función es una relación especial entre dos conjuntos donde a cada elemento del conjunto de partida (dominio) le corresponde exactamente un elemento del conjunto de llegada (codominio). Esto significa que una función no puede asignar dos valores diferentes a un mismo elemento del dominio.
Una función se puede representar con una formula, con una tabla, con un gráfico o con palabras.

Notación:

Se denota como $f: A\rightarrow B$, donde:

- A es el dominio (Conjunto de partida)
- B es el codominio (Conjunto de llegada)

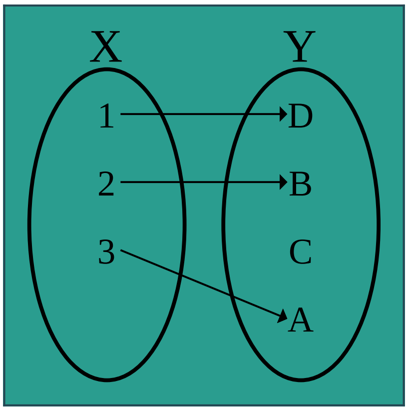
Ejemplo:

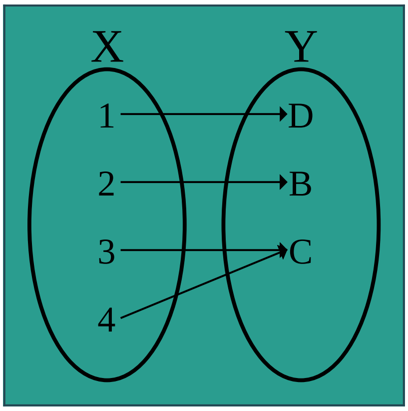
La función $f(x)=2x$ asigna a cada numero real x su doble. Si $x=3$, entonces $f(x)=6$

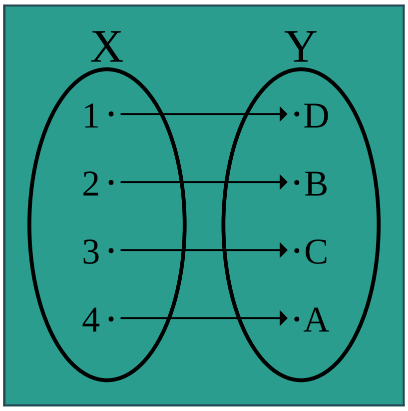
$$dom\,f(x)=\mathbb{R}=\{-\infty,+\infty\}$$

<u>Clasificación de las funciones:</u>

- Inyectiva: Una función es inyectiva si a cada elemento del codominio le corresponde como máximo un elemento del dominio. Es decir, no hay dos elementos diferentes del dominio que tengan la misma imagen en el codominio. Ejemplo N1.
- Sobreyectiva: Una función es sobreyectiva si su imagen es igual al codominio. Esto significa que cada elemento del codominio tiene al menos un elemento del dominio que le corresponde. Ejemplo N2.
- Biyectiva: Una función es biyectiva si es tanto inyectiva como sobreyectiva. Es decir, cada elemento del dominio tiene una única imagen en el codominio, y cada elemento del codominio tiene una única preimagen en el dominio. Ejemplo N3.







Dominio y rango de una función:

Como vimos ya antes, el dominio de una función es el conjunto de todos los valores de entrada posibles en la relación.

Una función es una relación binaria en la que cada elemento del dominio está asociado con exactamente un elemento del codominio.

La imagen es el conjunto de todos los valores de salida obtenidos en la relación.

Ejemplo:

$$f(x)=\sqrt{x}$$
$$dom\, f(x)=(x\geq 0)=[0,+\infty)$$
$$img\, f(x)=[0,+\infty)$$

Ejemplo:

$$f(x)=\frac{1}{x}$$
$$dom\, f(x)=(x\neq 0)=(-\infty,0)\cup(0,+\infty)=\mathbb{R}-\{0\}$$
$$img\, f(x)=\mathbb{R}-\{0\}$$

Ejemplo:

$$f(x)=x^2$$
$$dom\, f(x)=(-\infty,+\infty)=\mathbb{R}$$
$$img\, f(x)=[0,+\infty)$$

Raíces o ceros:

¿Que son las raíces o ceros en una función? Las raíces o ceros de una función $f(x)$ son los valores de x para los cuales la función se anula, es decir, los valores de x que satisfacen la ecuación:

$$f(x)=0$$

Ejemplo:

$$f(x)=2x+x-6$$

Asíntotas:

¿Que es una asíntota? Una asíntota es una linea recta a la función que se aproxima cuando tiende a infinito.

Hay asíntotas verticales, horizontales y oblicuas:

- **Asíntotas verticales**: rectas perpendiculares al eje de las abscisas, de ecuación $x=c$
- **Asíntotas horizontales**: rectas perpendiculares al eje de las ordenadas, de ecuación
- **Asíntotas oblicuas**: si no son paralelas o perpendiculares a los ejes, de ecuación $y=m*x+b$

Aquí muestro un ejemplo con un gráfico.

Operaciones entre funciones:

Las operaciones entre funciones permiten combinar dos funciones mediante operaciones aritméticas básicas. Supongamos que $f(x)=2x+4$ y $g(x)=x^2-2$

- Suma:

$$(f+g)(x)=f(x)+g(x)$$
$$f+g(x)=(2x+4)+(x^2-2)=(x^2+2x+2)$$

- Resta:

$$(f-g)(x)=f(x)-g(x)$$

$$f-g(x)=(2x+4)-(x^2-2)=(-x^2+2x+6)$$

- Multiplicación

$$(f\cdot g)(x)=f(x)\cdot g(x)$$

$$f\cdot g(x)=(2x+4)\cdot(x^2-2)=(2x^3-4x+4x^2-8)$$

- División:

$$(\frac{f}{g})(x)=\frac{f(x)}{g(x)},g(x)\neq 0$$

$$(\frac{f}{g})(x)=(\frac{2x+4}{x^2-2}),donde\, x^2-2\neq 0$$

Función compuesta:

Una función compuesta es una función que se obtiene a partir de dos funciones. Por ejemplo, de dos funciones, $F(x)$ y $G(x)$, la función compuesta se denota como $(F\,o\,G)(x)$ y se define de la siguiente manera:

$$(F\,o\,G)(x)=f(g(x))$$

Como se ve, primero aplicaremos la función $g(x)$ y luego se aplica la función $f(x)$ al resultado de $g(x)$.

Ejemplo:

$$f(x)=2x+3 \text{ y } g(x)=x^2$$

$$(F\,o\,G)(x)=f(g(x))=f(x^2)=2(x^2)+3=2x^2+3$$

Por lo tanto, la función compuesta $(F\,o\,G)(x)$es $2x^2+3$

Ejemplo:

$$f(x)=\sqrt{(2x+3)} \text{ y } g(x)=\frac{2x}{x-4}$$

$$(F\,o\,G)(x)=f(g(x))=f(\frac{2x}{x-4})=\sqrt{2(\frac{2x}{x-4})+3}$$

Por lo tanto, la función compuesta $(F\,o\,G)(x)$es $\sqrt{2(\frac{2x}{x-4})+3}$

$$(G\,o\,F)(x)=g(f(x))=f(\sqrt{2x+3})=\frac{2\sqrt{2x+3}}{\sqrt{2x+3}-4}$$

Y en el caso de $(G\,o\,F)(x)$es $\frac{2\sqrt{2x+3}}{\sqrt{2x+3}-4}$

Función inversa:

Suponiendo que tenemos una función definida como $f(x)$. sabemos que una función transforma $x$en y, la función inversa representada como $f^{-1}(x)$ transformara y en x. Para tener una función inversa su función original siempre debe ser biyectiva.

Ejemplo:

Obtener $f^{-1}(x)$ sabiendo que $f(x)=5x-2$

Viendo que $f(x)$ es una función lineal ya sabemos que esta función es biyectiva entonces tiene una función inversa.

Cambiamos $f(x)$ por y: $y=5x-2 \rightarrow y+2=5x \rightarrow \frac{(y+2)}{5}=x$

La de color azul es $f(x)$ y la de color rojo es $f^{-1}(x)$:

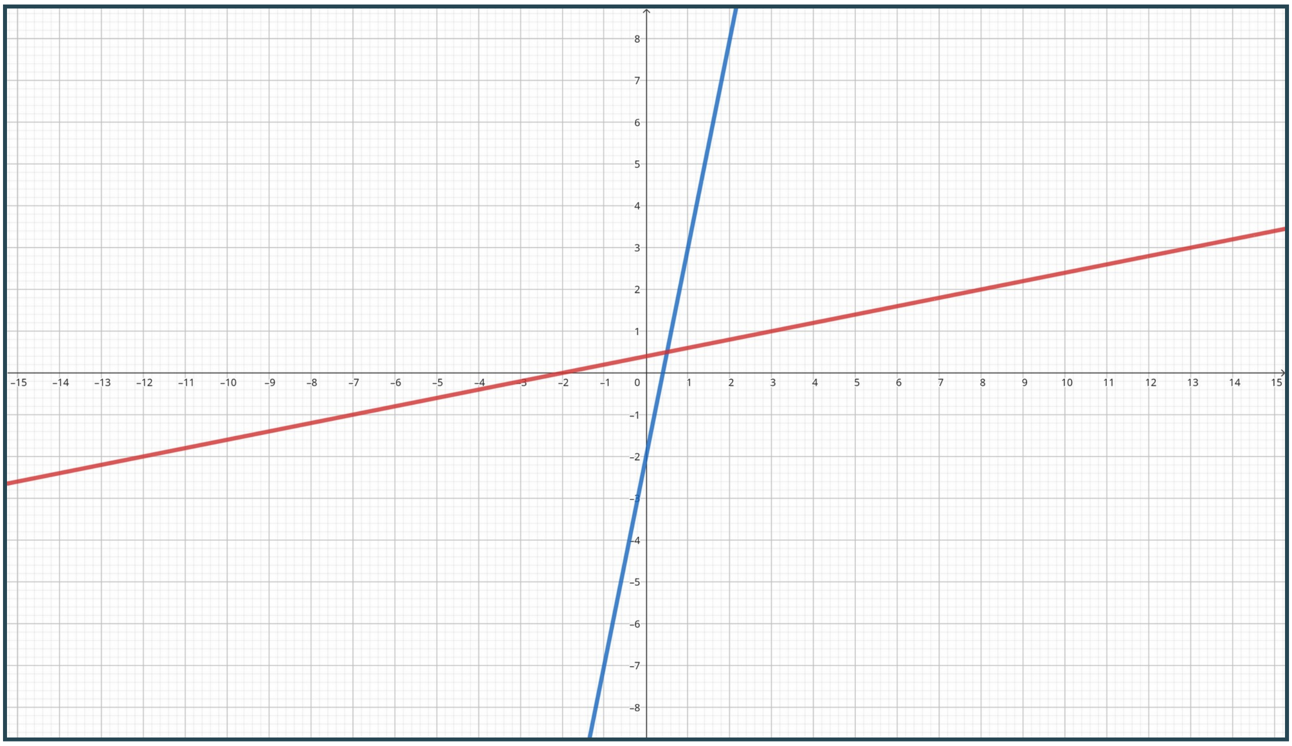
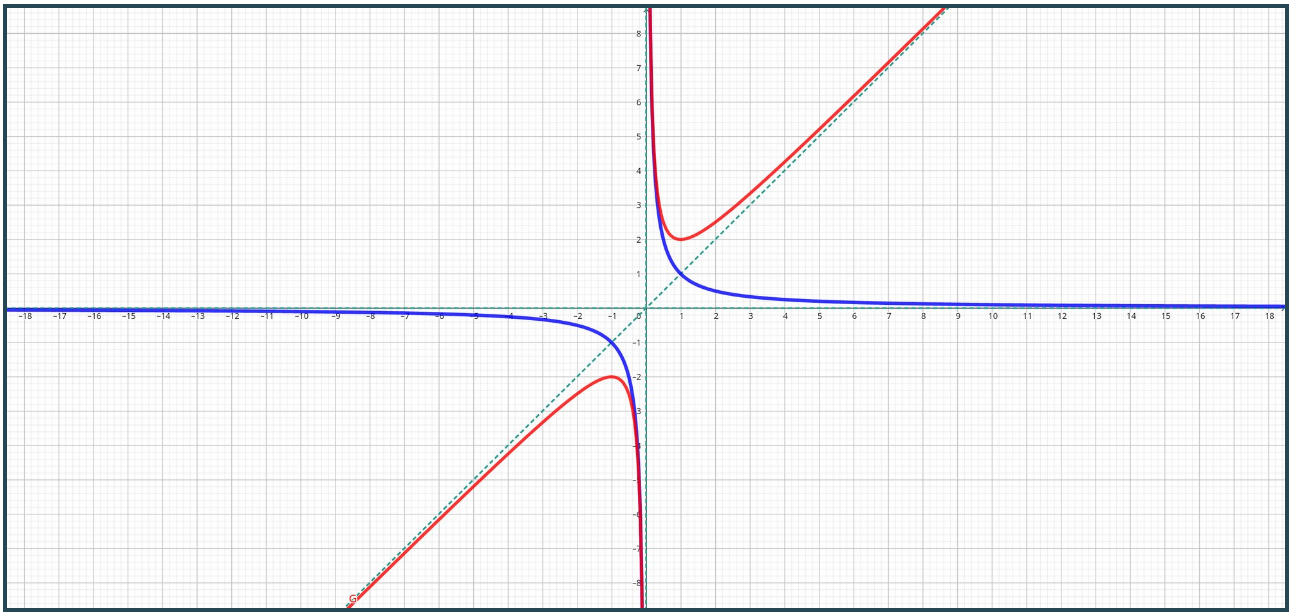


Gráfico de ejemplos de asíntotas:



La de color azul es $f(x)=\frac{1}{x}$ y tiene asíntota vertical en $x=0$ y un asíntota vertical en $y=0$, están marcadas con color verde esmeralda suave. Luego, la de color rojo es $g(x)=x+\frac{1}{x}$ y tiene una asíntota vertical en $x=0$ y una asíntota oblicua en $y=x$.