Sucesiones y series

Una sucesión es un conjunto ordenado de números que puede ser finito o infinito. Cada número de la sucesión se llama término: a_1 es el primer término; a_2 es el segundo, etcétera.

Hay varias formas de dar a conocer una sucesión

1 Nombrando alguna característica de sus términos.

2 Por recurrencia, es decir, mediante una fórmula que permita obtener un término a partir de términos anteriores.

3 Con una fórmula que permita calcular cualquier término según la posición que ocupen en la sucesión.

En los 2 últimos casos, la fórmula o término general se designa con a (n indica el lugar que ocupa cada número en la sucesión).

1 La sucesión de los números naturales terminados en 4: 4, 14, 24, 34,...

2 La sucesión en la que cada término es el producto de los 2 anteriores: $a_{+2} = a \,.\, a_{+1}$.

En este caso hay que indicar los 2 primeros y a partir de ellos se calculan los restantes:

$a_1 = 0{,}6$

$a_2 = 0{,}5$

$a_3 = 0{,}6 \,.\, 0{,}5 = 0{,}3$

$a_4 = 0{,}5 \,.\, 0{,}3 = 0{,}15$

$a_5 = 0{,}3 \,.\, 0{,}15 = 0{,}045\ldots$

3 Si el término general de la sucesión es $a = (-1)^n$, entonces

$a_1 = (-1)^1 = -1$; $a_2 = (-1)^2 = 1$; $a_3 = (-1)^3 = -1\ldots$

Si en una sucesión cada término es menor que el anterior, la sucesión es decreciente, y si cada término es mayor que el anterior, entonces es creciente.

En algunas ocasiones podemos encontrarla clasificada como oscilante

La sucesión del ejemplo 1 es creciente. Mientras que era del 2 es decreciente.En cambio, la sucesión 3:1, −1, 1, − 1, 1, − 1 no es creciente ni decreciente.

<u>**Sucesiones aritméticas**</u>

Una sucesión es aritmética cuando cada término se obtiene del anterior, sumando siempre el mismo número (r).

En consecuencia, la diferencia entre dos términos consecutivos es constante:

$$\boxed{a_{+1} - a = r}$$

El término general de cualquier sucesión aritmética tiene la forma.

$$\boxed{\mathbf{a = a_1 + (n - 1) . r}}$$

En la sucesión, 5, 11, 17, 23 …la diferencia entre cada término y el anterior es siempre 6.

Su fórmula general es: $a = 5 + (n - 1) . 6$

Para conocer el término que ocupa el lugar 15 en la sucesión, se calcula. $a_{15} = 5 + (n - 1) . 6 = 89$

Para sumar los n primeros términos de una sucesión aritmética, se puede usar la fórmula.

$$\boxed{S = \frac{(a_1 + a) . n}{2}}$$

La suma de los primeros 15 términos de la sucesión del ejemplo anterior.

$$S_{15} = \frac{(5+89).15}{2} = 705$$

<u>Sucesiones geométricas</u>

Una sucesión geométrica cuando cada término se obtiene a partir del anterior, multiplicando siempre por un mismo número (q).

En consecuencia, la razón entre cada término y el anterior es constante.

$$\boxed{\frac{a_{n+1}}{a_n} = q}$$

En la sucesión 3, 12, 48, 192, …la razón es siempre 4:

12 : 3 = 4, 48 : 12 = 4, 192 : 48 = 4

El término general de una sucesión geométrica a_n puede expresarse como $a_n = a_1 . q^{n-1}$, donde n representa la posición de cada término y q la razón entre un término y el anterior.

En la sucesión 6, 3, $\frac{3}{2}$, $\frac{3}{4}$, …la razón es $q = \frac{1}{2}$. Entonces, $\mathbf{a_n = 6 . \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}}$

Para conocer el término que ocupa el lugar donde en la sucesión anterior se hace.

$a_{11} = 6 . \left(\frac{1}{2}\right)^{11-1} = 6 . \frac{1}{1024} = \frac{3}{512}$

Para sumar los n términos de una sucesión geométrica, se puede usar la fórmula.

$$\boxed{S_n = \frac{a_1 . (q^n - 1)}{q - 1}}$$

Para sumar los 10 primeros términos de la sucesión a = -2 . 3^{n-1}. Se hace:

$S_{10} = \frac{-2\,.\,(3_{10}-1)}{3-1}$ = -59048

<u>Comportamiento de las sucesiones</u>

Si, a medida que los valores de n aumentan, los términos de a se acercan cada vez más a un valor A, se dice que la sucesión a tiende a ese número A o que A es el límite de una sucesión.

Cuando n toma valores muy grandes, a $= \frac{2}{n} + 5$ toma valores cada vez más próximos a 5 (tiende a 5) porque a medida que aumenta el valor de n, el cociente $\frac{2}{n}$ se acerca a 0.

Sí, a medida que los valores de n aumentan el valor absoluto de los términos de a escada vez más grande, se dice que la sucesión a tiende a infinito.

La sucesión a = $(n - 1)^2$ tiende a infinito (toma valores cada vez más grandes) porque a medida que aumenta el valor de n, también se incrementa el (n - 1) y al elevarlo al cuadrado seguirá tomando valores cada vez más grandes.

La sucesión b = -3 . n^2 también tiende a infinito.

En resumen:

- Una sucesión es una lista ordenada de números.
- Se representa como {*an*} donde *an* es el término *n*-ésimo de la sucesión.
- Puede ser finita o infinita.
- Se puede definir de forma explícita (dando una fórmula para encontrar cualquier término) o de forma recursiva (dando una regla para encontrar un término basada en los términos anteriores).

Series

En matemáticas, una serie es la suma de los términos de una sucesión infinita. Se representa de la siguiente manera:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \boldsymbol{a_n}$$

Donde a_n es el n-ésimo término de la sucesión. Una serie puede ser finita o infinita.

Cuando se trata de una serie finita, significa que se suman un número finito de términos. Por ejemplo, la serie

1+2+3+4+5

1+2+3+4+5 es una serie finita.

En cambio, cuando se trata de una serie infinita, implica que la cantidad de términos que se están sumando es infinita. Por ejemplo, la serie

$1+\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}$ +... es una serie infinita.

El estudio de las series es fundamental en el cálculo y en otros campos de las matemáticas. Las series pueden converger a un valor finito (en cuyo caso se dice que la serie converge) o diverger (en cuyo caso se dice que la serie diverge).

Las series se utilizan en una variedad de contextos, como en el análisis de funciones, la teoría de números, la física y la ingeniería, entre otros campos, para modelar fenómenos y resolver problemas matemáticos y aplicados

En resumen:

- Una serie es la suma de los términos de una sucesión.
- Se representa como $\sum_{n=1}^{\infty}$ *an,* donde an es el término n-ésimo de la sucesión.
- puede ser finita o infinita.

- Se pueden clasificar en series convergentes (cuya suma converge a un valor finito) y series divergentes (cuya suma no converge a un valor finito).

Para practicar:

1. Calcula los 4 primeros términos de cada serie

1.2. $a_n = (-1)^n \cdot \frac{n}{n^2-2} \Rightarrow \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots$

1.3. $a_n = \frac{2^n}{n\,3^n} \Rightarrow \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots$

1.4. $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \Rightarrow \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots$

1.5. $a_n = \frac{n^2}{2^n-1} \Rightarrow \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots$

2. En una sucesión aritmética, sabemos que el sexto término es 28 y que la diferencia es 5. Calcular el término general y los 5 primeros términos.
3. En una progresión geométrica, sabemos que el primer término es 6 y el cuarto es 48. Calcular el término general y la suma de los 5 primeros términos.
4. Encontrar el término general de la sucesión

1, -2, 4, -8, 16,...

¿Es aritmética o geométrica?

5. Calcula los términos que se indican en la tabla y analiza a qué valor se aproximarán a medida que n toma valores cada vez más grandes. Completar la tabla

a_n	a_{100}	a_{500}	a_{1000}	a_{10000}	a_{100000}	a_n se aproxima a...
$\frac{5}{n}$						
$\frac{5}{n}+4$						
$4n + 6$						
$\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$						
$(n+3)^2$						