Números Complejos

Forma Binómina: Un número complejo Z se puede representar de la forma: Z=a+bi.

Perteneciendo a y b al conjunto de los números reales. Esta forma se denomina binómica, que tiene dos partes: Parte real (a) y parte imaginaria (b).

Ejemplos: Z_1= -8+14i y Z_2= 9-13i

Forma Cartesiana:

Otra forma de representar los números complejos es la forma cartesiana: Z=(a, b).

a y b son números reales. También tiene dos partes: Parte real (a) y parte imaginaria (b).

Ejemplos: Z_1= (-8; 14) y Z_2= (9;-13)

Forma Trigonométrica:

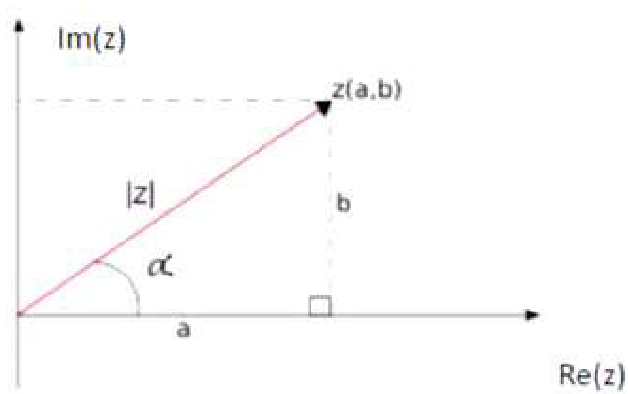
$$z=|z|.(\cos\alpha + i.\ \text{sen}\ \alpha)$$

Forma Polar:

$|Z|_\alpha$

Módulo: Es la longitud del vector asociado al Numero Complejo. La fórmula se obtiene de la aplicación del Teorema de Pitágoras.

$$|Z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$



Conjugados y Opuestos: números complejos conjugados y opuestos: "dos números complejos son conjugados si tienen **igual parte real y opuesta parte imaginaria**" y "dos números complejos son opuestos si tienen **opuesta la parte real e imaginaria**"

Ejemplo:

Z= -11 + 4i = (-11; 4) expresión binómica y expresión cartesiana

Conjugado de Z ($\bar{Z}$)= -11 - 4i

Opuesto de Z (-Z) = 11 -4i

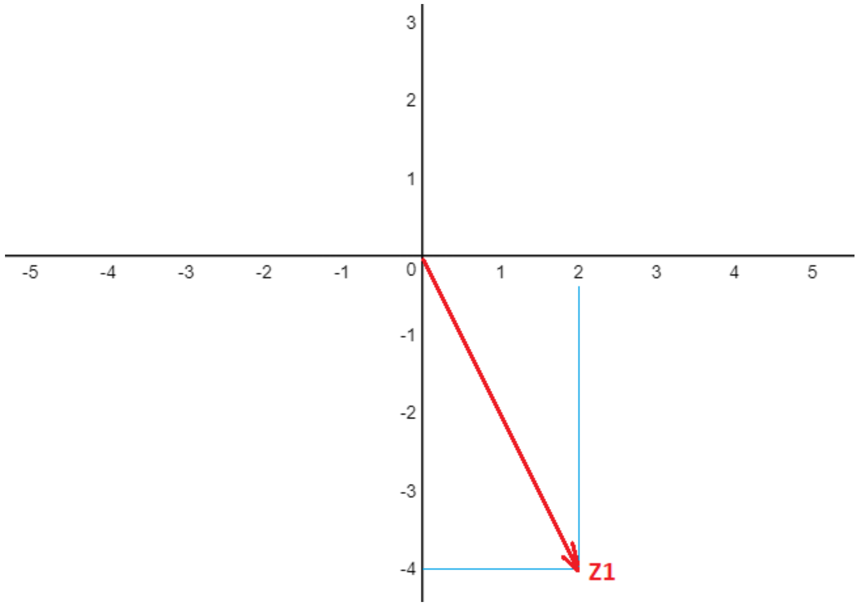
Propiedades del Conjugado de un Complejo

- z+z= a+bi + a-bi= 2a = 2 Re(z)
- z-z= a+bi - (a-bi)= 2bi = 2 Im(z)
- z.z= (a+bi). (a-bi)= a^2-abi+abi-$(bi)^2$= a^2-b^2.i^2=a^2+b^2 Є R positivos para cualquier z≠0

Representación gráfica de un número complejo: Para representar números complejos en los ejes cartesianos se representa la parte real del número complejo en el eje real (eje x) y la parte imaginaria del número complejo en el eje imaginario (eje y).

Ejemplo: representar Z_1= 2-4i

La parte real del número complejo es 2, luego desde el punto 2 del eje real, trazamos una línea vertical. La parte imaginaria es -4, por lo que desde el punto -4 del eje imaginario trazamos una línea horizontal. El punto donde se corten ambas líneas, será el extremo del número complejo, llamado afijo:



Operaciones con Números Complejos:

Suma y resta de Números Complejos: Para sumar y restar Números Complejos en su forma binómica se debe sumar (o restar) por separado la parte real de la imaginaria. Es decir:

Por ejemplo: (-3 + 9i) - (4 - 3i)= **(-3-4) + (9i – (-3i))= -7 +12i**

(-2 -7i) - (-5 + 6i)= **(-2-(-5)) + (-7i – 6i)= 3 - 13i**

En forma general, podemos decir que para sumar y restar hay que seguir estas fórmulas:

SUMA: (a + bi) + (c+di)= (a+c) + (b+d)i

RESTA: (a + bi) - (c+di)= (a-c) + (b-d)i

Para sumar o restar números complejos en la expresión cartesiana se debe, al igual que en la forma binómica, sumar (o restar) por separado la parte real de la imaginaria. Es decir:

(**a**; **b**)+(**c**; **d**)=(**a**+**c**; **b+d**)

Por ejemplo:

(**-3**; **5**) + (**-8**; **-9**)= (**-3+(-8)**; **5+ (-9)**)= (**-11**; **-4**)

POTENCIAS DE i

Sabemos que:
$i^2 = -1$
$i^3 = i^2 . i^1 = -1.i= -i$
$i^4 = i^2 . i^2 = -1. (-1)= 1$
$i^5 = i^4 .i^1 = 1.i= i$

Para saber los resultados de las potencias de la unidad imaginaria (i) debemos dividir el exponente por 4 y dependiendo del resto de la división vamos a saber su resultado.

- **Si el resto cero, el resultado de la potencia es 1**
- **Si es resto es 1, el resultado de la potencia es i**
- **Si es resto es 2, el resultado de la potencia es -1**
- **Si el resto es 3, el resultado de la potencia es -i**

Ejemplo:

$\mathbf{I^{86}}$ 86:4= 21 y resto=2.

Entonces el resultado de $\mathbf{I^{86}}$es -1.

MULTIPLICACIÓN DE NÚMEROS COMPLEJOS

Para multiplicar Números Complejos en su expresión binómica se debe aplicar la propiedad distributiva. Es decir:

$$(a+bi)(c+di) = ac + adi + bci + bdi^2$$

(5+3i).(-2+7i)= 5.(-2) + 5.7i +3i.(-2) +3i.7i

-10 + 35i – 6i +21i^2

-10+35i – 6i + 21.(-1)

-10 -21 + 35i – 6i

-31 +29i

La fórmula general de la multiplicación de Números Complejos es la siguiente

(a+bi).(c+di)= (a.c - b.d) + (a.d +b.c).i

Ejemplo:
(5+3i).(-2+7i)=(5.(-2) - 3.7) +(5.7 + 3.(-2)).i (aplicando la fórmula)
=(-10-21) + (35+(-6))i
= -31 +29i

*Recuerden que pueden usar cualquiera de los dos métodos: aplicando distributiva o la fórmula.

Multiplicación de conjugados: **(a +bi).(a - bi)= a^2 - (b.i)^2 = a^2 + b^2**

Ejemplo: (-7 +3i).(-7 - 3i)= (-7)^2 + 3^2= 49 + 9= 58

Binomio al cuadrado: (a +bi)^2 = a^2 +2.a.bi +(b.i)^2

Ejemplo: (3 -5i)^2 = 3^2 +2.3.(-5)i +(-5.i)^2

9 +(-30)i +25.i^2

9 +(-30)i +25.(-1)

9 - 25 +(-30)i

-16 – 30i

DIVISIÓN:

Para dividir dos complejos, se multiplica el numerador y denominador por el conjugado del denominador, así el divisor pasará a ser un número real (ya que como vimos la multiplicación de dos conjugados da un número real).

$\frac{-2+9i}{-5-4i}$ = El conjugado del denominador es -5 +4i. Entonces multiplicamos el numerador y denominador por -5 +4i.

$$\frac{-2+9i}{-5-4i} \cdot \frac{-5+4i}{-5+4i} = \frac{(-2+9i).\ (-5+4i)}{(-5-4i).(-5+4i)}$$

Como indicamos anteriormente en el denominador nos queda un número real y para saber qué nos queda en el numerador, aplicamos la propiedad distributiva.

$$\frac{(-2+9i).\ (-5+4i)}{(-5-4i).(-5+4i)} = \frac{-2.(-5)+(-2).4i+9i.(-5)+9.4(i)^2}{(-5)^2+(-4)^2}$$

Resolvemos todo lo que se pueda.

$$\frac{10-8i-45i+36.(-1)}{25+16} =$$

Sumamos parte real por un lado y parte imaginaria por el otro

$$\frac{(10-36)+(-8i-45i)}{41} = \frac{-26-53i}{41} = -\frac{26}{41} - \frac{53}{41}i$$

ACTIVIDADES

1.a) Resolver en R (conjunto de los números reales) las siguientes ecuaciones:

I. $x^2 -4 = 0$
II. $x^2 -2 = 0$
III. $2.x^2-5.x+1=0$
IV. $x^2 +1 = 0$
V. $x^2 -2.x+1 = 0$
VI. $5.x^2+10=0$

b) ¿Cuáles de ellas no tienen solución en R?

c) ¿Qué sucede con el discriminante de la ecuación cuando decimos que no tiene solución real?

d) ¿Qué operación no se puede resolver con los números reales R?

2) Tomando como ejemplo la primera resolución, resolver las siguientes raíces

Raíz a resolver	Factores del radicando	Propiedad distributiva	Resultado
$\sqrt{-9}$	$\sqrt{9.(-1)}$	$\sqrt{9}.\sqrt{-1}$	3.i

$\sqrt{-25}$			
$\sqrt{-49}$			
$\sqrt{-100}$			

3) Resolver las siguientes ecuaciones cuadráticas y expresar las soluciones como Números Complejos.

a) $x^2 + 2x + 5 = 0$ b) $0,5x^2 + x + 5 = 0$ c) $5x^2 + 6x + 5 = 0$ d) $x^2 - 6x + 13 = 0$

4) Expresar los números complejos de la actividad 3 en forma trigonométrica y polar.

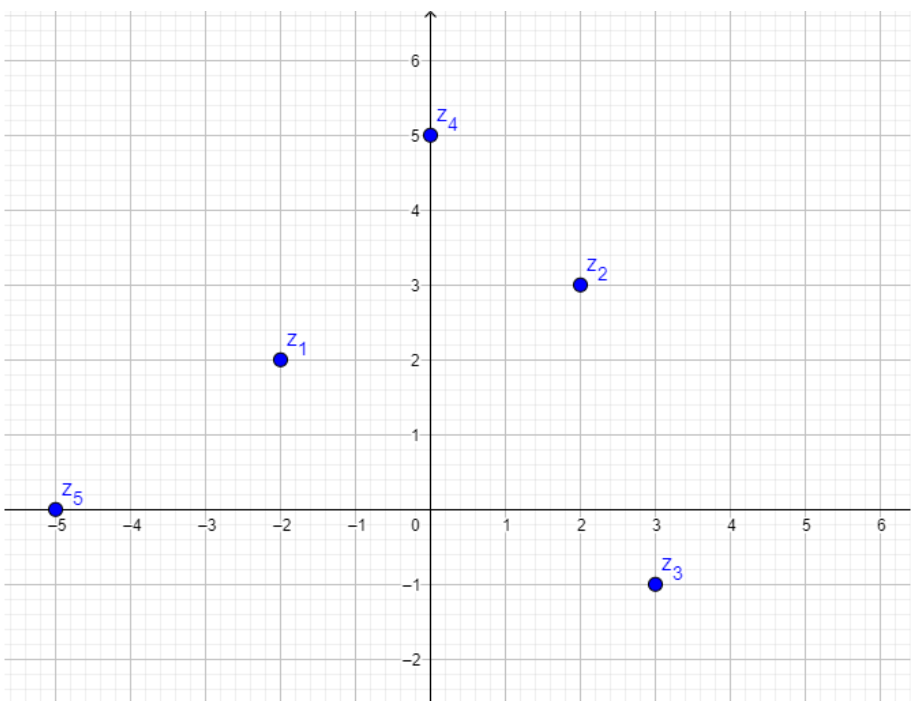
5) Expresar el módulo, conjugado **($\overline{Z}$)** y opuesto **(-Z)** de los siguientes números complejos:

a) Z= -5 – 7i b) Z= 4 + 9i c) Z= 3i – 2 d) Z= 8 – 11i

6) Resuelvan:

a) Representar los siguientes números complejos: $Z_1 = (1;2)$, $Z_2 = (-3;1)$ y $Z_3 = (2;-3)$.

b) Escriban la expresión binómica de cada número complejo representado:



7) Realizar las siguientes sumas y restas:

a) (2+5i) +(2+5i) b) (-4-3i) +(3-2i) c) (2+2i) – (2+5i) d) (-3-4i) – (-1-1i)

8) Realizar las siguientes sumas y restas:

a) (4; -2) +(-2; 6) b) (-1; 3) +(-2; -1) c) (10; 5) – (11; -1) d) (4; -2) – (4; -2)

9) Representar gráficamente los números complejos que dieron como resultados en las actividades 8 y 9.

10) Analizar la siguiente resolución:

1° Sabemos que todo número elevado a la cero da 1, entonces $\mathbf{i^0 = 1}$

2° Sabemos que todo número elevado a la 1 da ese mismo número, entonces $\mathbf{i^1 = i}$

3° Sabemos que $\mathbf{i = \sqrt{-1}}$, entonces si elevamos al cuadrado ambos lados de la igualdad nos queda: $\mathbf{i^2 = -1}$.

Es decir, hasta ahora sabemos los resultados de las siguientes potencias de i:

$\mathbf{i^0 = 1}$

$\mathbf{i^1 = i}$

$\mathbf{i^2 = -1}$

Ahora bien, ¿Cuál sería el resultado de $\mathbf{i^3}$ y de $\mathbf{i^4}$? Para saber eso podemos "jugar" con las propiedades de las potencias. Por ejemplo:

$\mathbf{i^3 = i^2 . i^1}$ (cuando tenemos potencias de igual base que se están multiplicando los exponentes se suman, entonces 2+1 da 3)

Como ya sabemos los resultados de $\mathbf{i^2}$ y de $\mathbf{i^1}$, nos queda que: $\mathbf{i^3 = i^2 . i^1 = -1.i}$

El mismo procedimiento realizamos para calcular $\mathbf{i^4}$:

$\mathbf{i^4 = i^2 . i^2}$ (cuando tenemos potencias de igual base que se están multiplicando los exponentes se suman, entonces 2+2 da 4)

Como ya sabemos el resultado de $\mathbf{i^2}$, nos queda que: $\mathbf{i^4 = i^2 . i^2 = -1 . (-1) = 1}$

a) Siguiendo la misma idea, encontrar los resultados de $\mathbf{i^5}$**,** $\mathbf{i^6}$**,** $\mathbf{i^7}$ y de $\mathbf{i^8}$**.**

11) Resolver las siguientes potencias de i:

a) i^{14} b) i^{20} c) i^{29} d) i^{31}

e) i^{122} f) i^{116} g) i^{218} h) i^{523}

12) Resolver las siguientes potencias y multiplicaciones:

a) $(4-5i)\cdot(7-9i)=$ b) $(4+7i)^{\mathbf{2}}$ c) $(2+8i)\cdot(2-8i)=$ d) $(6i^{\mathbf{12}}+4i)\cdot(7i^{\mathbf{16}}-8i^{\mathbf{13}})=$

13) Teniendo en cuenta los siguientes números complejos, resolver las siguientes operaciones:

$Z_1 = -3 + 4i$ $Z_2 = 5 - 2i$ $Z_3 = 4$ $Z_4 = (0; 5)$

a) $\frac{z_1}{z_2}$ b) $\frac{z_2}{z_4}$ c) $\frac{z_1}{2.z_3+z_4}$ d) $\frac{z_3 - z_4}{z_1}$