UNIVERSIDAD NACIONAL
GUILLERMO BROWN

Relaciones y Funciones

Matemática General

Par ordenado

Llamamos **par ordenado** al par en el que queda determinado cuál es el primer componente y cuál es el segundo componente. Se escriben entre paréntesis, separados por coma

Ejemplo: (a, b)   por lo general lo conocemos como (x , y)

Segunda

componente Primera

Producto Cartesiano

Dados dos conjuntos A y B no vacíos, llamamos **producto cartesiano** al conjunto de pares ordenados, los cuales poseen como primera componente a elementos del conjunto A y como segunda componente a elementos del conjunto B.

Simbólicamente:

$$AxB = \{(x\,;\,y)/x \in A \wedge y \in b\}$$

Ejemplos

<u>Ejemplo 1</u>

A= { 1; 2; 3}

B ={4; 5}

AxB={(1,4); (1,5); (2,4); (2,5); (3,4); (3,5)}

<u>Ejemplo 2</u>

C= { 1; 2;

4}

Ejemplo 3: Batalla Naval

El juego consiste en hundir los barcos de los oponentes. En general se representa a través de un cuadro de doble entrada en la cual se utilizan letras y números.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
A										
B										
C										
D										
E										
F										
G										
H										
I										
J										

Primera componente

Segunda Componente

Las posibilidades de hundir los barcos son:

AxB={ (1,A); (1,B); (1,C)…..(2; A); (2;B)…..}

Representación del producto cartesiano

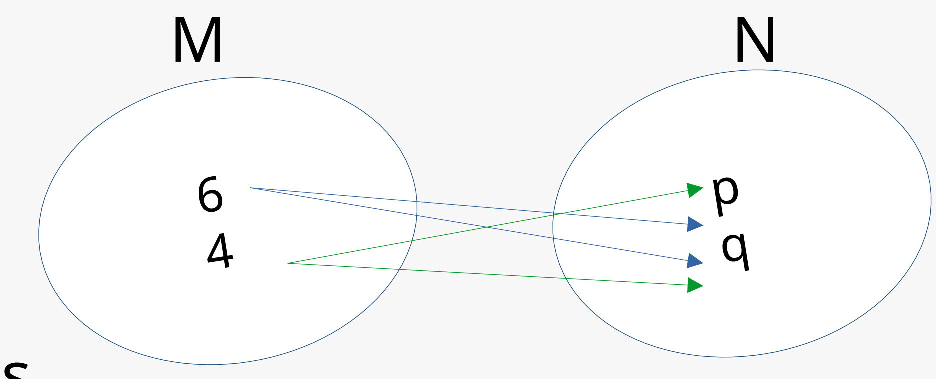
Sea: M={6; 4} y N={p; q}

Por extensión: MxN={(6,p); (6,q); (4,p); (4,q)}

Por tabla de doble entrada:

N/ M	6	4
p	(6,p)	(4,p)
q	(6,q)	(4,q)

Por diagrama de Venn:



Sistema de ejes cartesianos

Relación entre conjuntos

Se define relación entre el conjunto A y el B al conjunto formado por los pares ordenados pertenecientes a AxB que cumplen con una característica dada.

Por lo cual: $R \subseteq AxB$ o $R : A \rightarrow B$

Si un par ordenado del producto cartesiano forma parte de la relación lo representaremos como: $(x, y) \in R$ o xRy

Ejemplo 1

Sean los conjuntos:

$A=\{1, 3, 5\}$

$B=\{2, 4, 6\}$

$R=\{(x, y)/x \in A \wedge y \in B \wedge x > y\}$

$AxB=\{(1,2); (1,4); (1,6); (3,2); (3,4); (3,6); (5,2); (5,4); (5,6)\}$

Definimos R por extensión:

$R=\{(3,2), (5,2); (5,4)\}$

Ejemplo 2

Sean los conjuntos:

T={La Plata, Resistencia, Rawson, Posadas}

V={ Misiones, Buenos Aires, Chubut, Chaco}

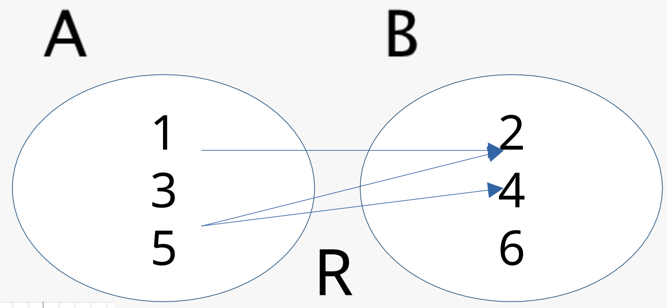
$$R = \{(x, y)/(x, y) \in TxV \wedge x \text{ es capital de } y\}$$

TxV={(La Plata, Misiones); (La Plata, Buenos Aires); (La Plata, Chubut); ………..}

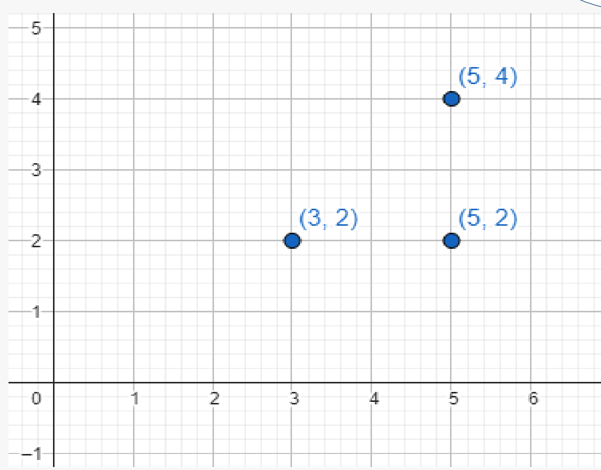
R={(La Plata, Buenos Aires); (Resistencia, Chaco); (Rawson, Chubut); (Posadas, Misiones)}

Representación de relaciones

- Por extensión: R={(3,2), (5,2); (5,4)}
- Por comprensión: $R = \{(x, y)/x \in A \wedge y \in B\ A\ x > y\}$
- Por diagrama de Venn:



- Por gráfico:



Relación inversa

Dada una relación A, llamamos relación inversa, A^{-1} , al conjunto de pares ordenados que resultan de invertir el orden de los elementos de los pares de A.

Simbólicamente: $(y, x) \in A^{-1} \Longleftrightarrow (x, y) \in A$

De aquí que si $R : A \rightarrow B$, entonces: $R^{-1}: B \rightarrow A$.

Ejemplos

Sean los conjuntos:

$A = \{x \,/\, x \in N,\ 1 < x <$

$6\}$ $B = \{y \,/\, y \in N,\ 5 < x$

$< 9\}$

Y sea la relación: $R= \{(x, y) \,/\, x \in A,\ y \in B,$ “x es divisor de y”$\}$

$R = \{(2, 6); (2, 8); (3, 6); (4, 8)\}$

La relación inversa por extensión

será: $R^{-1} = \{(6, 2); (8, 2); (6, 3); (8, 4)\}$

Propiedades de las relaciones

<u>Reflexiva o idéntica</u>: Todo elemento está relacionado con sí mismo.

$$R \text{ es reflexiva} \Leftrightarrow \forall\ x \in A , (x , x) \in R$$

Ejemplo:

$$R = \{ (x , y) / (x , y) \in NxN \wedge\ x | y \}$$

R es reflexiva ya que $\forall\ x \in N : x|x$

<u>Simétrica o recíproca</u>: Si un elemento está relacionado con otro entonces este último está relacionado con el primero.

$$R \text{ es simétrica} \Leftrightarrow \forall \ x, y \in A : \{(x, y) \in R \longrightarrow (y, x) \in R\}$$

Ejemplo:

$A = \{x / x \text{ es recta de un plano}\}$

$$R = \{(x, y) / (x, y) \in AxA \wedge x \parallel y\}$$

R es simétrica ya que $\forall \ x \in A, \forall \ y \in A : x \parallel y \longrightarrow y \parallel x$

Antisimétrica: Si un elemento está relacionado con otro entonces este último está relacionado con el primero sólo cuando ambos elementos sean iguales.

$$\text{R es antisimétrica} \Leftrightarrow \forall \; x , y \in A : \{(x , y) \in R \; \mathrm{A} \; (y , x) \in R \longrightarrow x = y\}$$

Ejemplo:

$$R = \{(x , y) / (x , y) \in NxN \; \mathrm{A} \; x | y\}$$

R es antisimétrica ya que $\forall \; x \in N , \forall \; y \in N : x \neq y \; \mathrm{A} \; x|y \longrightarrow y \nmid x$

<u>Transitiva:</u> Si un elemento está relacionado con otro y éste último está relacionado con un tercero, entonces el primero estará relacionado con el tercero.

$$R \text{ es transitiva} \Leftrightarrow \forall \quad x, y, z \in A : \{(x, y) \in R \wedge (y, z) \in R \longrightarrow (x, z) \in R\}$$

Ejemplo:

$$R = \{(x, y) / (x, y) \in N x N \wedge x \in y\}$$

R es transitiva ya que $\forall \; x \in N, \forall \; y \in N, \forall \; z \in N : x \in y \wedge y \in z \longrightarrow x \in z$

Dominio e imagen de una relación

Llamaremos **dominio** al conjunto formado por las primeras componentes de los pares ordenados pertenecientes a una relación.

Simbólicamente: $\mathrm{Dom}\,R = \{x \in A \,/\, \exists\, y \in B \wedge (x, y) \in R\}$

La **imagen** será el conjunto formado por las segundas componentes de los pares ordenados pertenecientes a una relación.

Simbólicamente: $\mathrm{Img}\,R = \{y \in B \,/ E\; x \in A \wedge (x, y) \in R\}$

Función

Una **función** de A en B es una relación en la cual a cada elemento de A (conjunto de salida) le corresponde un único elemento de B (conjunto de llegada).

$$f : A \rightarrow B$$

Clasificación de las funciones:

Inyectiva: cuando no hay dos elementos del dominio que tengan la misma imagen. Formalmente: $\forall\ a,b \in Domf$, si $f(a)=f(b) \rightarrow a=b$

Sobreyectiva o suryectiva: cuando el codominio y la imagen coinciden. Formalmente: $\forall\ y \in Codf, \exists x \in Domf\ / f(x)=y$

Biyectiva: cuando es inyectiva y sobreyectiva a la vez.

1)A cada elemento del conjunto A le corresponde un elemento del conjunto B.

2) Cada elemento del conjunto B es imagen de algún elemento de A.

Entonces $f: A \rightarrow B$ es biyectiva

¿La relación es función?

Ejemplo 1:
A={1, 3, 5}
B={2, 4, 6}

$$R = \{(x, y)/x \in A \wedge y \in B \wedge x > y\}$$

No es función ya que hay elementos de A que no se relacionan con elementos de B y porque un elemento de A se relaciona 2 veces.

Ejemplo 2:
T={La Plata, Resistencia, Rawson, Posadas}
V={ Misiones, Buenos Aires, Chubut, Chaco}

$$R = \{(x, y)/(x, y) \in TxV \text{ A } x \text{ es capital de } y\}$$

Es función porque cada elemento de T se relaciona con uno y sólo un elemento de V.