UNIVERSIDAD NACIONAL
GUILLERMO BROWN

MODULO TEORICO PRACTICO
ALGEBRA

CÓDIGO MATERIA

PROF. ARNALDO L. CANTONE

VECTORES

Hay magnitudes que quedan determinadas por un número; a esas magnitudes se las denomina ***magnitudes escalares***. Por ejemplo: la masa de un cuerpo, el tiempo transcurrido entre dos sucesos.

Para otras magnitudes no alcanza con un número para determinarlas.

Por ejemplo: para la velocidad de un punto, además de su ***intensidad***, hace falta conocer la ***dirección*** en la que se mueve y el ***sentido*** en el que lo hace.

La dirección estará dada por una recta, considerando que todas las rectas paralelas tienen la misma dirección.

El sentido tendrá dos posibilidades, uno y su opuesto.

Estas magnitudes que necesitan de intensidad (número), dirección y sentido para quedar determinadas, se llaman ***magnitudes vectoriales***. Otros ejemplos son: aceleración, cantidad de movimiento, intensidad de una corriente.

Para representar a estas magnitudes se emplean *vectores*. Segmento Orientado

Un segmento de recta posee dos puntos extremos, cuando esos extremos están dados en un cierto orden decimos que el segmento está orientado.

Vector

Se llama vector fijo a todo segmento orientado. Al primero de los puntos se lo llama origen y al segundo extremo.

La recta que lo contiene define su dirección, y la orientación sobre la recta, definida por el origen y el extremo determina su sentido.

Acordaremos en nombrar a los vectores según su origen y extremo o con una letra minúscula.

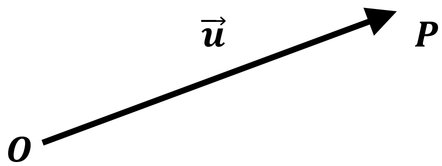


Figura 1

En la figura 1 vemos representado el vector $\vec{u}$, cuyo origen es el punto O y cuyo extremo es el punto P.

Módulo o Norma

La norma o módulo de un vector es la longitud del segmento orientado que lo define. Será siempre un número positivo. El vector de la figura 1, es el vector $\vec{u} = OP$, e indicaremos: Módulo o Norma del vector: $|\vec{u}|$ $|OP|$Para nosotros hablar de norma o hablar de módulo será equivalente.

Vectores equipolentes

Dos vectores son equipolentes si tienen el mismo módulo, la misma dirección y el mismo sentido.

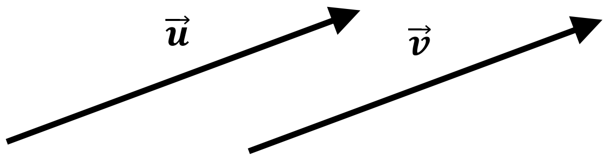


Figura 2

En la figura 2 los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son equipolentes

Se llama Vector libre, en adelante vector, a un conjunto de vectores equipolentes.

Definición:

Dos vectores (libres) son iguales si constituyen el mismo grupo de vectores equipolentes.

Vector nulo

Si un vector tiene módulo igual a cero, carecerá de dirección y sentido, y lo llamaremos vector nulo, indicándolo generalmente $\vec{0}$.

Operaciones con vectores en forma gráfica

Vector suma

Dados dos vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$, se define como vector suma $\overrightarrow{u+v}$, al vector que se determina de la siguiente manera: a partir del extremo de $\vec{u}$ colocamos el origen de $\vec{v}$, y el vector $\overrightarrow{u+v}$, será el vector con origen en el origen de $\vec{u}$ y extremo en el extremo de $\vec{v}$.

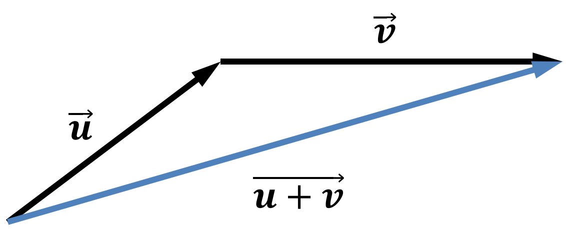


Figura 3

El vector suma $\overrightarrow{u+v}$ coincide con la diagonal del paralelogramo que tiene a los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ por lados del mismo, por tal motivo se la conoce como regla del paralelogramo.

Si tenemos los vectores $\vec{\boldsymbol{u}}$; $\vec{\boldsymbol{v}}$; $\vec{\boldsymbol{w}}$, para obtener el vector suma de los tres, podemos obtener primero el vector $\overrightarrow{\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}}$ y luego realizar la regla del paralelogramo con el vector obtenido y el vector $\vec{\boldsymbol{w}}$, o utilizar lo que denominamos regla de la poligonal

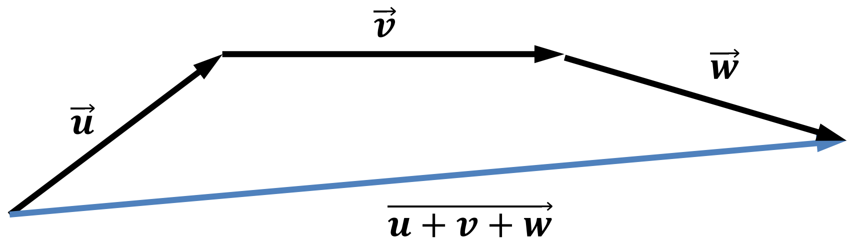


Figura 4

Propiedades

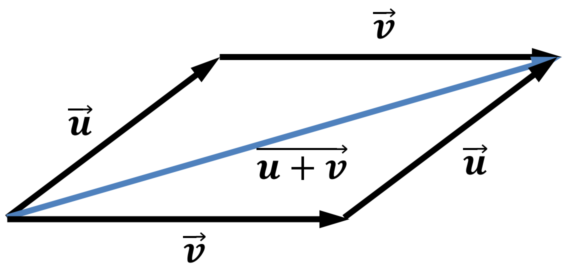


Figura 5

- $\vec{\boldsymbol{u}}+\vec{\boldsymbol{v}}=\vec{\boldsymbol{v}}+\vec{\boldsymbol{u}}$
- $\vec{\boldsymbol{u}}+\vec{\boldsymbol{0}}=\vec{\boldsymbol{0}}+\vec{\boldsymbol{u}}$
- $\vec{\boldsymbol{u}}+\vec{\boldsymbol{v}}+\vec{\boldsymbol{w}}=(\vec{\boldsymbol{u}}+\vec{\boldsymbol{v}})+\vec{\boldsymbol{w}}=\vec{\boldsymbol{u}}+(\vec{\boldsymbol{v}}+\vec{\boldsymbol{w}})$

Si $\vec{\boldsymbol{u}}$ es cualquier vector distinto del vector nulo, entonces $-\vec{\boldsymbol{u}}$ es el vector opuesto de $\vec{\boldsymbol{u}}$ y se define como el vector que tiene el mismo módulo y dirección que $\vec{\boldsymbol{u}}$, pero sentido contrario.

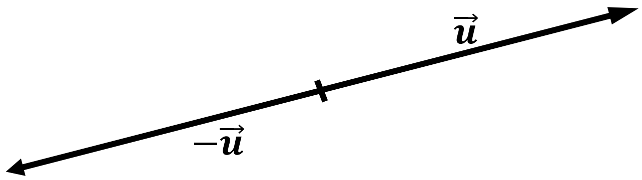


Figura 6

- $\vec{u} + (-\vec{u}) = \vec{0}$

Se define como diferencia $\vec{u} - \vec{v} = \vec{u} + (-\vec{v})$

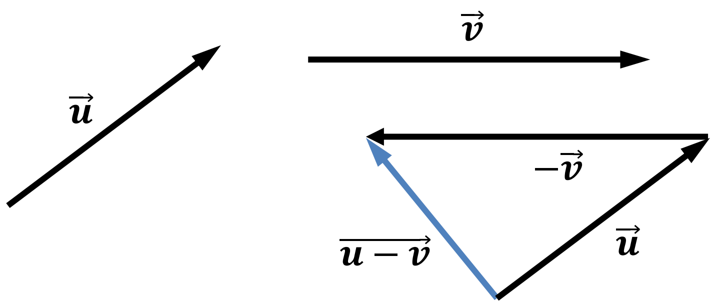


Figura 7

Multiplicación de un vector por un escalar

Dados un vector $\vec{v}$ distinto del vector nulo y un escalar λ distinto de cero, el vector $\lambda\vec{v}$ se define como el vector de módulo igual a $|\lambda|$ veces el módulo de $\vec{v}$ y cuya dirección es la misma de $\vec{v}$.

Si $\lambda > 0$ tendrá igual sentido, si $\lambda < 0$, sentido contrario. Si $\lambda = 0$ o $\vec{v} = 0$, se define $\lambda\vec{v} = 0.$

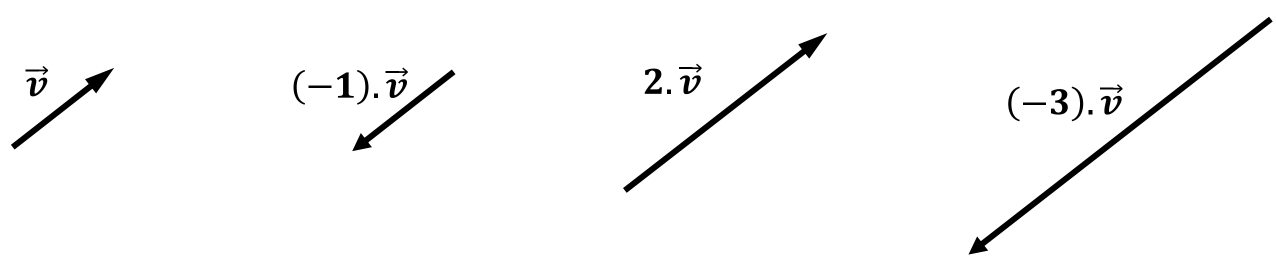


Figura 8

Propiedades

Dados los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$, y los escalares λ y μ

- $\lambda.(\vec{u} + \vec{v}) = \lambda.\vec{u} + \lambda.\vec{v}$
- $(\lambda.\mu).\vec{v} = \lambda.(\mu.\vec{v})$
- $(\lambda + \mu).\vec{v} = \lambda.\vec{v} + \mu.\vec{v}$

Vectores en un sistema de coordenadas cartesianas ortogonales

Si consideramos un sistema de coordenadas cartesianas ortogonales y tomamos un representante de $\vec{v}$ con origen en $(0;0)$. Llamamos componentes de $\vec{v}$ a las coordenadas de $P_1(v_x;v_y)$ y escribimos $\vec{v}=(v_x;v_y)$

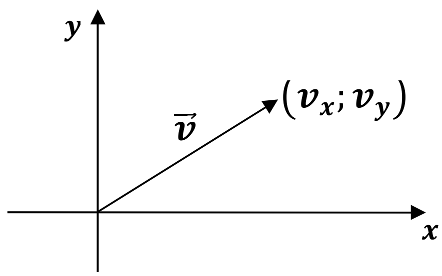


Figura 9

Sean $\vec{w}=(w_x;w_y)$ y $\vec{v}=(v_x;v_y)$ entonces: $\vec{w}+\vec{v}=(w_x;w_y)+(v_x;v_y)=(w_x+v_x;w_y+v_y)$

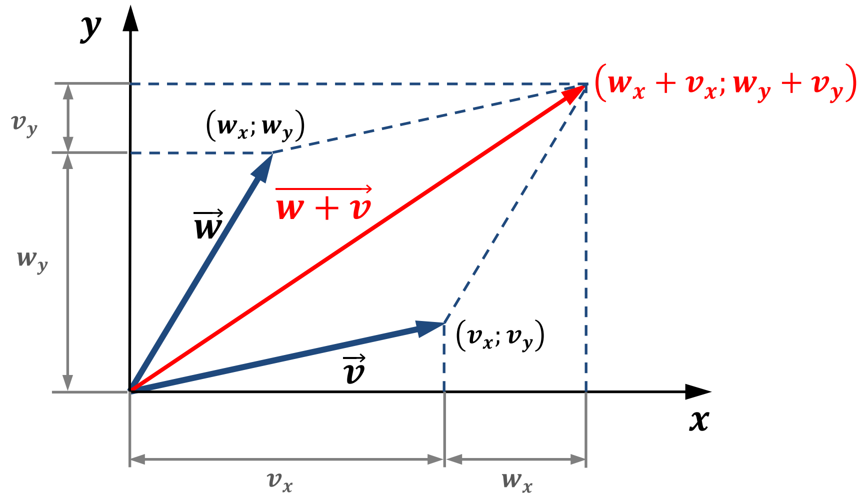


Figura 10

Sean $\vec{v} = (v_x; v_y)$ y λ es cualquier escalar, entonces $\lambda . \vec{v} = (v_x; v_y) = (\lambda v_x; \lambda v_y)$

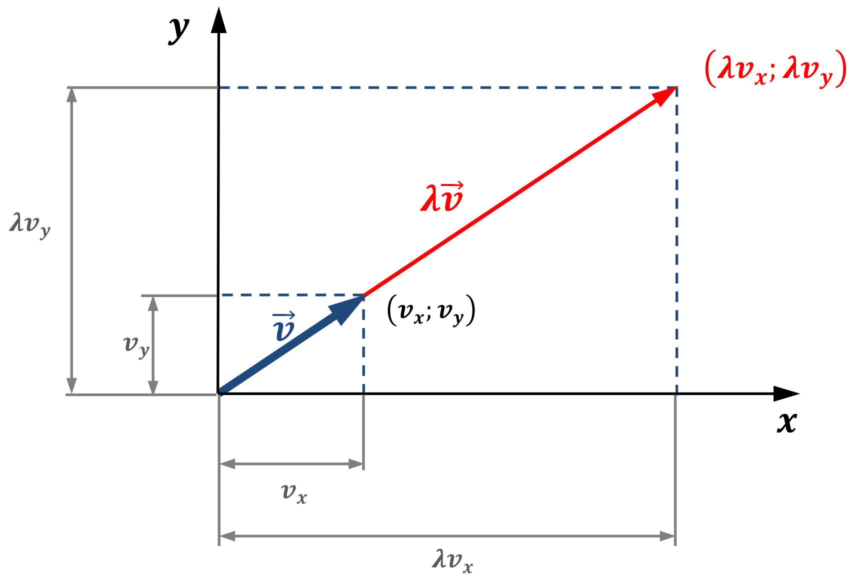


Figura 11

Trabajando en $\mathbb{R}^3$ de igual manera que en $\mathbb{R}^2$, (con la terna cartesiana x, y, z):

$\vec{u} = (u_x; u_y; u_z)$ y $\vec{v} = (v_x; v_y; v_z)$ entonces:

- $\vec{u} + \vec{v} = (u_x + v_x; u_y + v_y; u_z + v_z)$
- $\lambda . \vec{u} = (u_x; u_y; u_z) = (\lambda . u_x; \lambda . u_y; \lambda . u_z)$

Ejemplo:

Dados los vectores $\vec{u} = (3; -2; 1)$ y $\vec{v} = (3; 2; -5)$, hallar:

1. $\vec{u} + \vec{v} =$

$(3; -2; 1) + (3; 2; -5) = (3 + 3; -2 + 2; 1 - 5) = (6; 0; -4)$

2. $\vec{u} - \vec{v} =$

$(3; -2; 1) - (3; 2; -5) = (3 - 3; -2 - 2; 1 + 5) = (0; -4; 6)$

3. $7\vec{u} =$

$7.(3; -2; 1) = (7.3; 7.(-2); 7.1) = (21; -14; 7)$

4. $3.\vec{u} - 4.\vec{v} =$

$3.(3; -2; 1) - 4.(3; 2; -5) = (9; -6; 3) + (-12; -8; 20) = (-3; -14; 23)$

Componentes de un vector conocidos su origen y su extremo

Dados los puntos $\boldsymbol{A} = (\boldsymbol{x_1}; \boldsymbol{y_1})$ *y* $\boldsymbol{B} = (\boldsymbol{x_2}; \boldsymbol{y_2})$, el vector con origen en $\boldsymbol{A}$ y extremo en $\boldsymbol{B}$, será el vector $\overrightarrow{\boldsymbol{AB}}$, que es equipolente al vector $(\boldsymbol{x_2} - \boldsymbol{x_1}; \boldsymbol{y_2} - \boldsymbol{y_1})$ y escribimos:

$$\overrightarrow{\boldsymbol{AB}} = (\boldsymbol{x_2} - \boldsymbol{x_1}; \boldsymbol{y_2} - \boldsymbol{y_1})$$

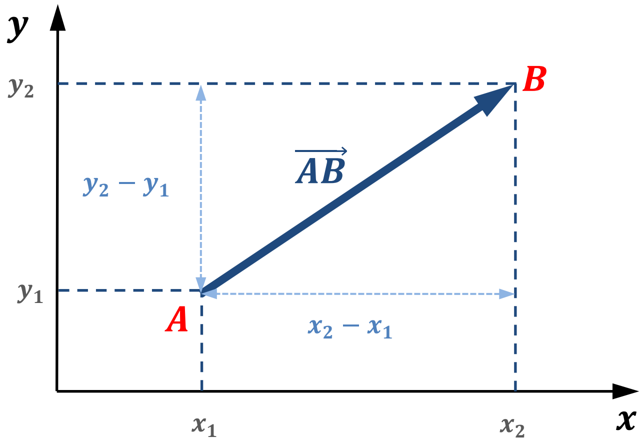


Figura 12

"Las componentes del vector son independientes del punto en que esté aplicado."

Ejemplo:

Dados los puntos $\boldsymbol{A} = (\boldsymbol{7}; -\boldsymbol{3})$ *y* $\boldsymbol{B} = (-\boldsymbol{4}; \boldsymbol{5})$, el vector con origen en $\boldsymbol{A}$ y extremo en **B** será el vector $\overrightarrow{\boldsymbol{AB}} = (-\boldsymbol{4} - \boldsymbol{7}; \boldsymbol{5} + \boldsymbol{3}) = (-\boldsymbol{11}; \boldsymbol{8})$**,** un vector equipolente al vector $\overrightarrow{\boldsymbol{AB}}$, es el vector con origen en el origen de coordenadas y extremo en el punto $(-\boldsymbol{11}; \boldsymbol{8})$

En $\mathbb{R}^{\boldsymbol{3}}$

Dados los puntos $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{2}; -\boldsymbol{4}; \boldsymbol{0})$ $\boldsymbol{y}$ $\boldsymbol{B}(-\boldsymbol{7}; \boldsymbol{1}; -\boldsymbol{5})$, el vector con origen en $\boldsymbol{A}$ y extremo en **B** es:

$$\overrightarrow{\boldsymbol{AB}} = (-\boldsymbol{7} - \boldsymbol{2}; \boldsymbol{1} + \boldsymbol{4}; -\boldsymbol{5} - \boldsymbol{0}) = (-\boldsymbol{9}; \boldsymbol{5}; -\boldsymbol{5})$$

Módulo o norma de un vector

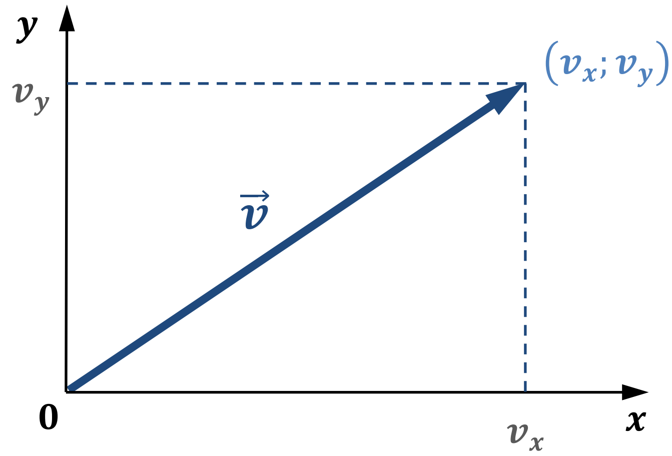


Figura 13

Utilizando el teorema de Pitágoras vemos que

$$|\vec{v}| = \sqrt{(v_x)^2 + (v_y)^2}$$

El módulo o norma de un vector es igual a la raíz cuadrada de la suma de los cuadrados de sus componentes.

En $\mathbb{R}^3$

$$|\vec{v}| = \sqrt{(v_x)^2 + (v_y)^2 + (v_z)^2}$$

Ejemplo:

Dados los puntos $A(2; -4; 0)$ y $B(-7; 1; -5)$, hallar el módulo del vector $\overrightarrow{AB}$

$$\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{(-7-2)^2 + (1+4)^2 + (-5-0)^2} = \sqrt{(-9)^2 + (5)^2 + (-5)^2}$$

$$\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{81 + 25 + 25} = \sqrt{131}$$

Vector unitario o versor

Se llama vector unitario o versor a aquel vector cuyo módulo es igual a 1 (uno).

Ejemplo:

$$\vec{w}: \left(\frac{\sqrt{2}}{2}; 0; -\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \qquad |\vec{w}| = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + 0^2 + \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{2} + 0 + \frac{1}{2}} = \sqrt{1} = 1$$

Versores fundamentales

En $\mathbb{R}^2$

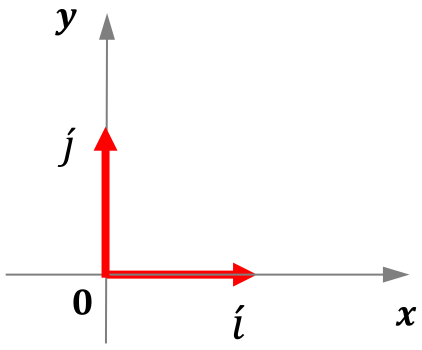


Figura 14

$$\acute{\imath}\ (1;0)$$

$$\acute{j}\ (0;1)$$

En $\mathbb{R}^3$

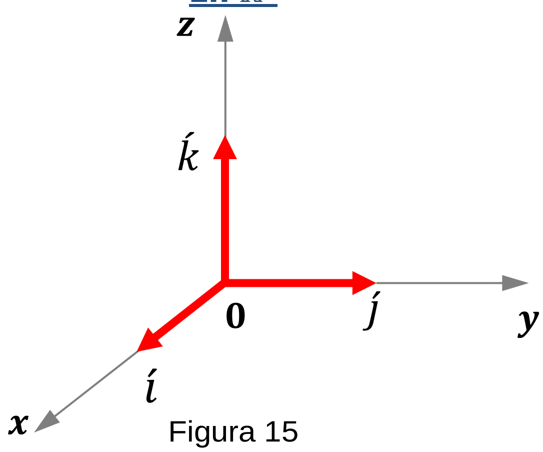


Figura 15

$$\acute{\imath}\ (1;0;0)$$

$$\acute{j}\ (0;1;0)$$

$$\acute{k}\ (0;0;1)$$

Ángulo formado por dos vectores

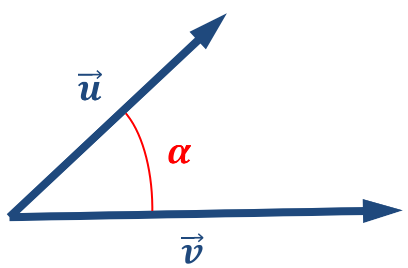


Figura 16

Si $\vec{u}$ y $\vec{v}$ tienen igual dirección y sentido, entonces $\boldsymbol{\alpha = 0°}$

Si $\vec{u}$ y $\vec{v}$ tienen igual dirección y sentido contrario, entonces $\boldsymbol{\alpha = 180°}$

Otra forma de expresar a un vector

Si $\vec{u} = (u_x; u_y; u_z)$, aplicando propiedades:

$$\vec{u} = (u_x; u_y; u_z) = (u_x; 0; 0) + (0; u_y; 0) + (0; 0; u_z)$$

$$= u_x(1;0;0) + u_y(0;1;0) + u_z(0;0;1)$$

$$\vec{u} = (u_x; u_y; u_z) = u_x \underbrace{(1;0;0)}_{\acute{\imath}} + u_y \underbrace{(0;1;0)}_{\acute{j}} + u_z \underbrace{(0;0;1)}_{\acute{k}} = u_x.\acute{\imath} + u_y.\acute{j} + u_z.\acute{k}$$

$$\vec{u} = (u_x; u_y; u_z) = u_x.\acute{\imath} + u_y.\acute{j} + u_z.\acute{k}$$

En adelante usaremos cualquiera de las dos notaciones.

Producto escalar o interior

Definición

Dados los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ pertenecientes a $\mathbb{R}^2$ o a $\mathbb{R}^3$, si α es el ángulo comprendido entre ambos, entonces el producto escalar $\vec{u} \circ \vec{v}$ se define de la siguiente manera:

$$\vec{u} \circ \vec{v} = \begin{cases} |\vec{u}||\vec{v}| \cos\alpha & si\ \vec{u} \neq 0\ \ y\ \vec{v} \neq 0 \\ 0 & si\ \vec{u} = 0\ \text{ó}\ \vec{v} = 0 \end{cases}$$

Producto escalar entre vectores conocidas las componentes de los mismos

Sean $\vec{u} = (u_x; u_y; u_z)$ y $\vec{v} = (v_x; v_y; v_z)$ dos vectores distintos del vector nulo, como vemos en la figura 17, α es el ángulo entre $\vec{u}$ y $\vec{v}$, entonces por el teorema del coseno:

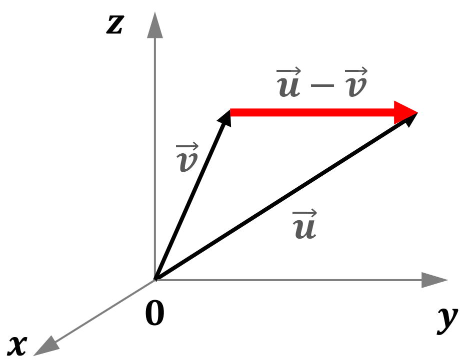


Figura 17

$$|\vec{u} - \vec{v}|^2 = |\vec{u}|^2 + |\vec{v}|^2 - 2.|\vec{u}|.|\vec{v}|.cos\alpha$$

$$|\vec{u}|.|\vec{v}|.cos\alpha = \frac{1}{2}(|\vec{u}|^2 + |\vec{v}|^2 - |\vec{u} - \vec{v}|^2)$$

Que se puede escribir de la siguiente manera:

$$\vec{u} \circ \vec{v} = |\vec{u}||\vec{v}| \cos\alpha = \frac{1}{2}(|\vec{u}|^2 + |\vec{v}|^2 - |\vec{u} - \vec{v}|^2)$$

Sustituyendo $|\vec{u}|^2 = {u_x}^2 + {u_y}^2 + {u_z}^2 \qquad |\vec{v}|^2 = {v_x}^2 + {v_y}^2 + {v_z}^2$

Y $\quad |\vec{u} - \vec{v}|^2 = (u_x - v_x)^2 + (u_y - v_y)^2 + (u_z - v_z)^2$

Obtenemos:

$$\vec{u} \circ \vec{v} = u_x.v_x + u_y.v_y + u_z.v_z$$

Ejemplo:

Calcular el producto escalar entre $\vec{u} = (3; -4; 2)$ y $\vec{v} = (2; 5; 0)$

$$\vec{u} \circ \vec{v} = 3.2 + (-4).5 + 2.0 = 6 - 20 + 0 = -14$$

Cálculo del ángulo entre dos vectores

Si *u* y *v* son vectores distintos del vector nulo, entonces

Sean $\vec{u} = (u_x; u_y; u_z)$ y $\vec{v} = (v_x; v_y; v_z)$ dos vectores distintos del vector nulo:

$$\cos\alpha = \frac{\vec{u}\circ\vec{v}}{|\vec{u}|.|\vec{v}|}\begin{cases} \alpha \text{ es agudo} & \text{si y solo si} \quad \vec{u}\circ\vec{v} > 0 \\ \alpha \text{ es obtuso} & \text{si y solo si} \quad \vec{u}\circ\vec{v} < 0 \\ \alpha = \dfrac{\pi}{2} & \text{si y solo si} \quad \vec{u}\circ\vec{v} = 0 \end{cases}$$

Ejemplo

Dados los vectores $\vec{u} = (1; 1; 2)$ y $\vec{v} = (2; -1; 1)$, determinar el ángulo que forman

$\vec{u}\circ\vec{v} = 1.2 + 1.(-1) + 2.1 = 3 \qquad |\vec{u}| = \sqrt{1^2+1^2+2^2} = \sqrt{6} \qquad |\vec{v}| = \sqrt{2^2+(-1)^2+1^2} = \sqrt{6}$

$$\cos\alpha = \frac{\vec{u}\circ\vec{v}}{|\vec{u}|.|\vec{v}|} = \frac{3}{\sqrt{6}.\sqrt{6}} = \frac{1}{2} \qquad \cos\alpha = \frac{1}{2}$$

$$\alpha = \text{arc}\cos\left(\frac{1}{2}\right) \quad \therefore \quad \alpha = \frac{\pi}{3}$$

Ángulos directores y cosenos directores

Llamaremos ángulos directores de un vector a los ángulos que forma el vector con cada uno de los ejes coordenados, es decir el ángulo que forma con los Versores fundamentales (***i*** ; ***j*** ; ***k***)
Y llamaremos cosenos directores de dicho vector a los cosenos de dichos ángulos.

En $\mathbb{R}^2$

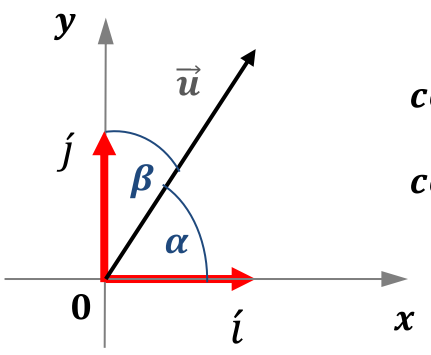


Figura 18

$$\cos\alpha = \frac{u_x}{|\vec{u}|} \qquad \cos\beta = \frac{u_y}{|\vec{u}|}$$

En $\mathbb{R}^3$

$$\cos\alpha = \frac{u_x}{|\vec{u}|} \qquad \cos\beta = \frac{u_y}{|\vec{u}|} \qquad \cos\gamma = \frac{u_z}{|\vec{u}|}$$

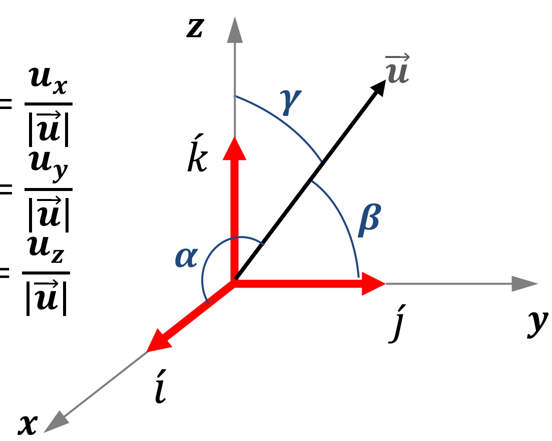


Figura 19

Ejemplo:

Dado el vector $\vec{u} = (\sqrt{2}; 1; -1)$, hallar sus ángulos directores

$$|\vec{u}| = \sqrt{\sqrt{2}^2 + 1^2 + (-1)^2} = 2$$

Ángulo que forma con el eje x $\cos\alpha = \dfrac{\vec{u} \circ \acute{\imath}}{|\vec{u}|.|\vec{v}|} = \dfrac{(\sqrt{2}; 1; -1).(1; 0; 0)}{2.1} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ $\alpha = 45° = \dfrac{\pi}{4}$

Ángulo que forma con el eje y $\cos\beta = \dfrac{\vec{u} \circ \acute{\jmath}}{|\vec{u}|.|\vec{v}|} = \dfrac{(\sqrt{2}; 1; -1).(0; 1; 0)}{2.1} = \dfrac{1}{2}$ $\beta = 60° = \dfrac{\pi}{3}$

Ángulo que forma con el eje z $\cos\gamma = \dfrac{\vec{u} \circ \acute{k}}{|\vec{u}|.|\vec{v}|} = \dfrac{(\sqrt{2}; 1; -1).(0; 0; 1)}{2.1} = -\dfrac{1}{2}$ $\gamma = 120° = \dfrac{2}{3}\pi$

Propiedades

Dados los vectores $\vec{u};\ \vec{v};\ \vec{w}$ pertenecientes a $\mathbb{R}^2$ o a $\mathbb{R}^3$, $k \in \mathbb{R}$

- $\vec{u} \circ \vec{v} = \vec{v} \circ \vec{u}$
- $\vec{u} \circ (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \circ \vec{v} + \vec{u} \circ \vec{w}$
- $k(\vec{u} \circ \vec{v}) = (k\vec{u}) \circ \vec{v} = \vec{u} \circ (k\vec{v})$
- $\vec{u} \circ \vec{u} > 0 \quad si\ \vec{u} \neq 0$
- $\vec{u} \circ \vec{u} = 0 \quad si\ \vec{u} = 0$
- $\vec{u} \circ \vec{u} = |\vec{u}|^2$, es decir, $|\vec{u}| = \sqrt{\vec{u} \circ \vec{u}}$

Producto vectorial

Definimos como producto vectorial a la operación que asocia a cada par de vectores $\vec{\boldsymbol{u}};\ \vec{\boldsymbol{v}}$ pertenecientes a $\mathbb{R}^{\mathbf{3}}$, el vector $\vec{\boldsymbol{u}} \times \vec{\boldsymbol{v}}$, unívocamente determinado por las condiciones:

* ***Si*** $\vec{\boldsymbol{u}};\ \vec{\boldsymbol{v}}$ ***, son ambos no nulos y no colineales:***

1) $\vec{\boldsymbol{u}} \times \vec{\boldsymbol{v}}$ es ortogonal a $\vec{\boldsymbol{u}}$ y a $\vec{\boldsymbol{v}}$
2) la terna $\{\vec{\boldsymbol{u}}; \vec{\boldsymbol{v}};\ \vec{\boldsymbol{u}} \times \vec{\boldsymbol{v}}\}$es una terna directa igualmente orientada que la terna$\left(\acute{\imath};\ \acute{\jmath};\ \acute{k}\right)$

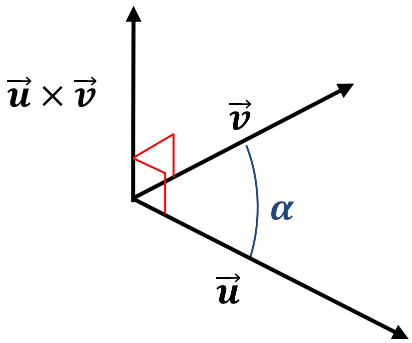


Figura 20

3) $|\vec{\boldsymbol{u}} \times \vec{\boldsymbol{v}}| = |\vec{\boldsymbol{u}}|.\,|\vec{\boldsymbol{v}}|.\,\mathbf{sin}\,\boldsymbol{\alpha}$

- Si $\vec{\boldsymbol{u}}$ y $\vec{\boldsymbol{v}}$ son colineales, es decir $\vec{\boldsymbol{u}} = \boldsymbol{\lambda}.\vec{\boldsymbol{v}}$, entonces $\vec{\boldsymbol{u}} \times \vec{\boldsymbol{v}} = \vec{\mathbf{0}}$

Propiedades

Dados los vectores $\vec{\boldsymbol{u}};\ \vec{\boldsymbol{v}};\ \vec{\boldsymbol{w}}$ pertenecientes a $\mathbb{R}^{\mathbf{2}}$ o a $\mathbb{R}^{\mathbf{3}}$, $\boldsymbol{k} \in \mathbb{R}$

- $\vec{\boldsymbol{u}} \times \vec{\boldsymbol{v}} = -(\vec{\boldsymbol{v}} \times \vec{\boldsymbol{u}})$
- $\boldsymbol{k}.\vec{\boldsymbol{u}} \times \vec{\boldsymbol{v}} = \vec{\boldsymbol{u}} \times \boldsymbol{k}.\vec{\boldsymbol{v}} = \boldsymbol{k}.\,(\vec{\boldsymbol{u}} \times \vec{\boldsymbol{v}})$
- $\vec{\boldsymbol{u}} \times (\vec{\boldsymbol{v}} + \vec{\boldsymbol{w}}) = \vec{\boldsymbol{u}} \times \vec{\boldsymbol{v}} + \vec{\boldsymbol{u}} \times \vec{\boldsymbol{w}}$
- $(\vec{\boldsymbol{v}} + \vec{\boldsymbol{w}}) \times \vec{\boldsymbol{u}} = \vec{\boldsymbol{v}} \times \vec{\boldsymbol{u}} + \vec{\boldsymbol{w}} \times \vec{\boldsymbol{u}}$

Producto vectorial entre vectores conocidas las componentes de los mismos

Productos vectoriales entre versores fundamentales

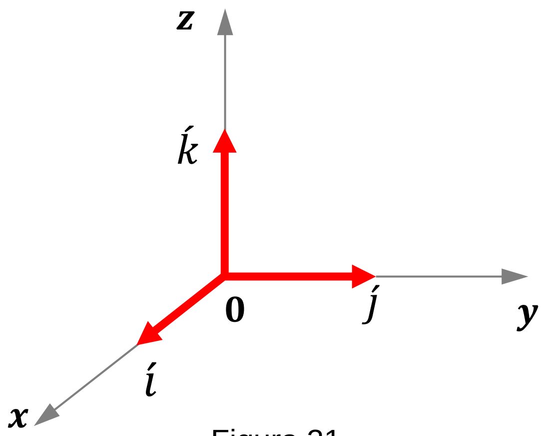


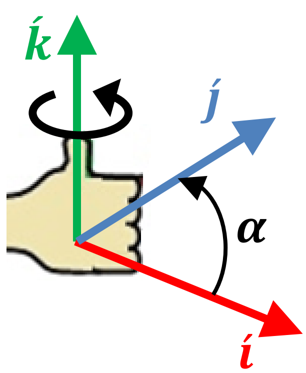
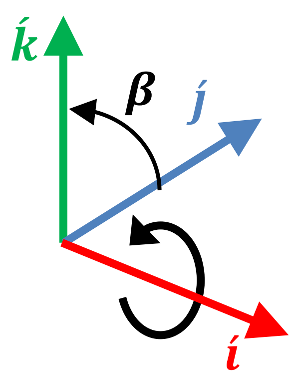
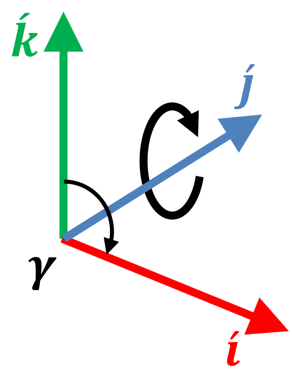
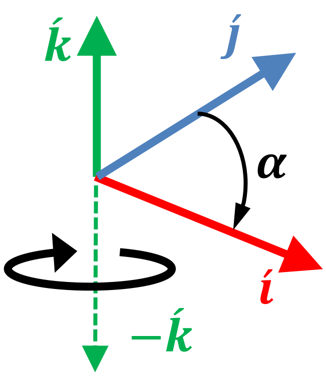
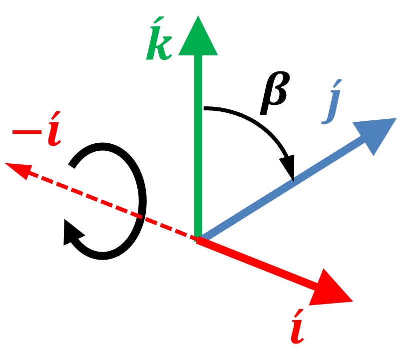
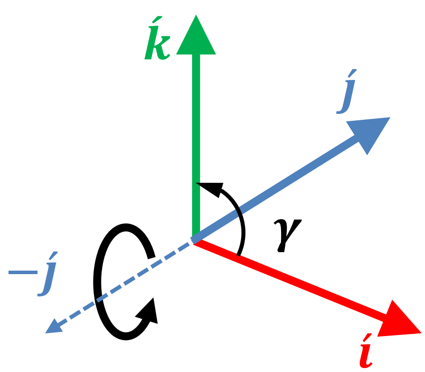
Figura 21

$$\acute{\imath} \times \acute{\jmath} = \acute{k} \qquad \acute{\jmath} \times \acute{\imath} = -\acute{k}$$

$$\acute{\jmath} \times \acute{k} = \acute{\imath} \qquad \acute{k} \times \acute{\jmath} = -\acute{\imath}$$

$$\acute{k} \times \acute{\imath} = \acute{\jmath} \qquad \acute{\imath} \times \acute{k} = -\acute{\jmath}$$

$$\acute{\imath} \times \acute{\imath} = \vec{0} \qquad \acute{\jmath} \times \acute{\jmath} = \vec{0} \qquad \acute{k} \times \acute{k} = \vec{0}$$

$\acute{\imath} \times \acute{\jmath} = \acute{k}$ 	$\acute{\jmath} \times \acute{k} = \acute{\imath}$ 	$\acute{k} \times \acute{\imath} = \acute{\jmath}$ 
$\acute{\jmath} \times \acute{\imath} = -\acute{k}$ 	$\acute{k} \times \acute{\jmath} = -\acute{\imath}$ 	$\acute{\imath} \times \acute{k} = -\acute{\jmath}$ 

Si $\vec{u} = (u_x; u_y; u_z)$ y $\vec{v} = (v_x; v_y; v_z)$ entonces $\vec{u} \times \vec{v}$

$$\vec{u} = u_x.\acute{\imath} + u_y.\acute{\jmath} + u_z.\acute{k} \qquad \vec{v} = v_x.\acute{\imath} + v_y.\acute{\jmath} + v_z.\acute{k}$$

$$\vec{u} \times \vec{v} = (u_x.\acute{\imath} + u_y.\acute{\jmath} + u_z.\acute{k}) \times (v_x.\acute{\imath} + v_y.\acute{\jmath} + v_z.\acute{k})$$

$$\vec{u} \times \vec{v} = \underbrace{u_x.\acute{\imath} \times (v_x.\acute{\imath} + v_y.\acute{\jmath} + v_z.\acute{k})}_{A} + \underbrace{u_y.\acute{\jmath} \times (v_x.\acute{\imath} + v_y.\acute{\jmath} + v_z.\acute{k})}_{B} + \underbrace{u_z.\acute{k} \times (v_x.\acute{\imath} + v_y.\acute{\jmath} + v_z.\acute{k})}_{C}$$

$$A = u_x.v_x.\underbrace{\acute{\imath} \times \acute{\imath}}_{0} + u_x.v_y.\underbrace{\acute{\imath} \times \acute{\jmath}}_{\acute{k}} + u_x.v_z.\underbrace{\acute{\imath} \times \acute{k}}_{-\acute{\jmath}} = u_x.v_y.\acute{k} - u_x.v_z.\acute{\jmath}$$

$$B = u_y.v_x.\underbrace{\acute{\jmath} \times \acute{\imath}}_{-\acute{k}} + u_y.v_y.\underbrace{\acute{\jmath} \times \acute{\jmath}}_{o} + u_y.v_z.\underbrace{\acute{\jmath} \times \acute{k}}_{\acute{\imath}} = -u_y.v_x.\acute{k} + u_y.v_z.\acute{\imath}$$

$$C = u_z.v_x.\underbrace{\acute{k} \times \acute{\imath}}_{\acute{\jmath}} + u_z.v_y.\underbrace{\acute{k} \times \acute{\jmath}}_{-\acute{\imath}} + u_z.v_z.\underbrace{\acute{k} \times \acute{k}}_{0} = u_z.v_x.\acute{\jmath} - u_z.v_y.\acute{\imath}$$

$$\vec{u} \times \vec{v} = u_x.v_y.\acute{k} - u_x.v_z.\acute{\jmath} - u_y.v_x.\acute{k} + u_y.v_z.\acute{\imath} + u_z.v_x.\acute{\jmath} - u_z.v_y.\acute{\imath}$$

$$\vec{u} \times \vec{v} = -u_y.v_z.\acute{\imath} - u_z.v_y.\acute{\imath} + u_z.v_x.\acute{\jmath} - u_x.v_z.\acute{\jmath} + u_x.v_y.\acute{k} - u_y.v_x.\acute{k}$$

$$\vec{u} \times \vec{v} = (-u_z.v_y + u_y.v_z)\acute{\imath} + (u_z.v_x - u_x.v_z)\acute{\jmath} + (u_x.v_y - u_y.v_x)\acute{k}$$

$$\vec{u} \times \vec{v} = (u_y.v_z - u_z.v_y)\acute{\imath} + (u_z.v_x - u_x.v_z)\acute{\jmath} + (u_x.v_y - u_y.v_x)\acute{k}$$

Existe una forma memotécnica de obtener el producto vectorial.

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} u_x & u_y & u_z \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix} = \left(\begin{vmatrix} u_y & u_z \\ v_y & v_z \end{vmatrix} \; ; -\begin{vmatrix} u_x & u_z \\ v_x & v_z \end{vmatrix} \; ; \begin{vmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{vmatrix} \right)$$

Cada una de las componentes del vector $\vec{u} \times \vec{v}$ se obtendrá como resultado del determinante de 2×2 planteado

Ejemplo:

Dados los vectores $\vec{u} = (1; 1; 2)$ y $\vec{v} = (2; -1; 1)$, determinar $\vec{u} \times \vec{v}$

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \left(\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} \; ; -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \; ; \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} \right)$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 1.1 - (-1).2$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 3$$

$$-\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -(1.1 - 2.2)$$

$$-\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 3$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 1.(-1) - 2.1$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -3$$

$$\vec{u} \times \vec{v} = (3; 3; -3)$$

Interpretación geométrica del módulo del producto vectorial

Recordando que $|\vec{u} \times \vec{v}| = |\vec{u}|.|\vec{v}|.\sin\alpha$

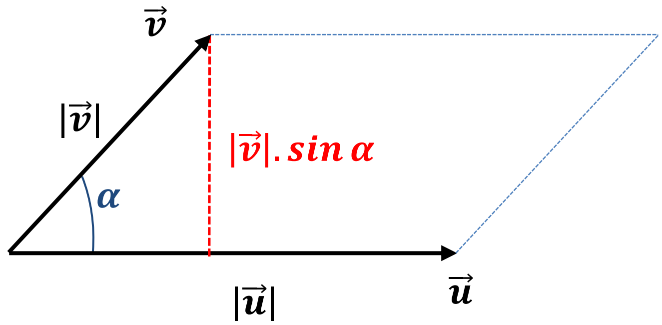


Figura 22

Vemos en la Figura 22, que $|\vec{v}|.\sin\alpha$ es la altura del paralelogramo dos de cuyos lados adyacentes son $\vec{u}$ y $\vec{v}$

Por lo tanto el área del paralelogramo está dada por

$$A = base \times altura = |\vec{u}|.|\vec{v}|.\sin\alpha = |\vec{u} \times \vec{v}|$$

Producto mixto

Dados $\vec{u} = (u_x; u_y; u_z)$; $\vec{v} = (v_x; v_y; v_z)$ *y* $\vec{w} = (w_x; w_y; w_z)$

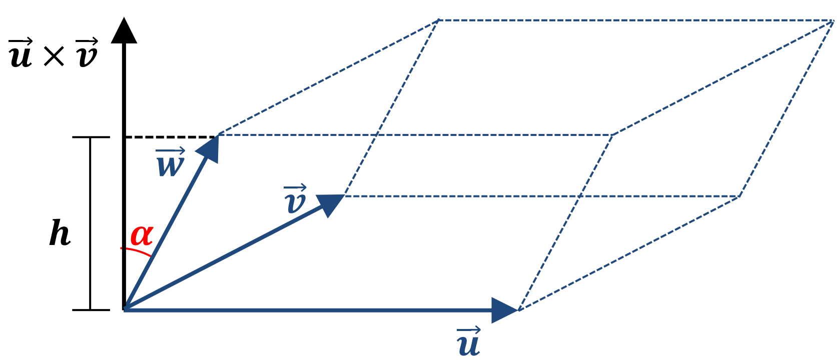
Entonces $\vec{u} \circ (\vec{v} \times \vec{w})$ se lo denomina *producto mixto de* $\vec{u}$; $\vec{v}$ *y* $\vec{w}$.

$$\vec{w} \circ (\vec{u} \times \vec{v}) = \vec{w} \circ \left(\begin{vmatrix} u_y & u_z \\ v_y & v_z \end{vmatrix} \acute{\imath} - \begin{vmatrix} u_x & u_z \\ v_x & v_z \end{vmatrix} \acute{\jmath} + \begin{vmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{vmatrix} \acute{k} \right)$$

$$\vec{w} \circ (\vec{u} \times \vec{v}) = \begin{vmatrix} u_y & u_z \\ v_y & v_z \end{vmatrix} . w_x - \begin{vmatrix} u_x & u_z \\ v_x & v_z \end{vmatrix} . w_y + \begin{vmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{vmatrix} . w_z = \begin{vmatrix} u_x & u_y & u_z \\ v_x & v_y & v_z \\ w_x & w_y & w_z \end{vmatrix}$$

Interpretación geométrica del valor absoluto del producto mixto

El valor absoluto del producto mixto representa el volumen del paralelepípedo, que tiene a los vectores $\vec{u}$; $\vec{v}$ *y* $\vec{w}$ como aristas concurrentes. (Suponemos que los vectores $\vec{u}$; $\vec{v}$ *y* $\vec{w}$ no son coplanares).



$$|\vec{w} \circ (\vec{u} \times \vec{v})| = |\vec{w}|.|\vec{u} \times \vec{v}|.\cos\alpha$$

Figura 23

EJERCICIO N° 1: completar el siguiente cuadro, conociendo los siguientes datos

	$Origen$ $\vec{A}$	$Extremo$ $\vec{B}$	$\overrightarrow{AB}$		$Origen$ $\vec{A}$	$Extremo$ $\vec{B}$	$\overrightarrow{AB}$
1)	$4\acute{i} - 7\acute{j} - 2\acute{k}$	$-3\acute{i} + \acute{j} - 2\acute{k}$		5)	$9\acute{i} + \acute{j} - 2\acute{k}$		$18\acute{i} - 2\acute{j} + 4\acute{k}$
2)	$2\acute{i} - \acute{k}$	$-\acute{i} - 2\acute{j} + 3\acute{k}$		6)		$2\acute{i} - 4\acute{j} + \acute{k}$	$-\acute{i} - 7\acute{j} - 2\acute{k}$
3)	$-3\acute{i} + 4\acute{j} + \acute{k}$	$\acute{i} - 4\acute{j} + 5\acute{k}$		7)	$5\acute{i} - 3\acute{j} - \acute{k}$		$-\acute{i} + 3\acute{j} + \acute{k}$
4)	$-\acute{j} + \acute{k}$	$6\acute{i} - 4\acute{j} + 9\acute{k}$		8)		$7\acute{i} - 8\acute{j} - 2\acute{k}$	$-4\acute{i} - 4\acute{j} - 4\acute{k}$

EJERCICIO N° 2: Hallar el módulo de los siguientes vectores

$$\vec{a} = 2\acute{i} - 4\acute{j} + \acute{k} \qquad \vec{d} = \frac{\sqrt{2}}{2}\acute{i} - \frac{\sqrt{2}}{2}\acute{j} + \frac{1}{2}\acute{k} \qquad \vec{g} = \frac{\sqrt{3}}{2}\acute{i} + \frac{\sqrt{5}}{2}\acute{j} + \sqrt{2}\acute{k}$$

$$\vec{b} = \frac{1}{3}\acute{i} + \frac{2}{5}\acute{k} \qquad \vec{e} = \sqrt{7}\acute{i} + \sqrt{7}\acute{j} + \sqrt{7}\acute{k} \qquad \vec{h} = -\frac{2}{5}\acute{i} + 2\acute{j} - \frac{1}{5}\acute{k}$$

$$\vec{c} = -3\acute{i} - \acute{j} + 2\acute{k} \qquad \vec{f} = -\acute{i} - \acute{j} + \acute{k} \qquad \vec{m} = -3\acute{i} - 2\acute{j} + \acute{k}$$

EJERCICIO N° 3: Hallar los versores canónicos de los vectores del ejercicio N° 2

EJERCICIO N° 4: Resolver las siguientes operaciones con los vectores del ejercicio N° 2

1) $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} =$

2) $\vec{a} - 2\vec{e} + \vec{f} =$

3) $\dfrac{\vec{e} + \vec{f}}{2} - 3(\vec{h} + \vec{m}) =$

4) $\dfrac{\vec{d}}{3} - \dfrac{\vec{f}}{2} + 5.\vec{m} =$

5) $|\vec{d}| + 3|\vec{e}| - 2|\vec{g}| =$

6) $\dfrac{-2(\vec{c} - \vec{e}) - 3(\vec{f} + \vec{g})}{4} =$

7) $(\vec{a} - \vec{d}).5 - \dfrac{\vec{f} - \vec{g}}{3} =$

8) $\dfrac{|-\vec{a} - \vec{f} + \vec{g}|}{2} + |\vec{h}| =$

EJERCICIO N° 4: Hallar los siguientes productos escalares, vectoriales y mixtos. Con los vectores del ejercicio N° 2

1) $\vec{a} \circ \vec{b} =$

2) $\vec{e} \circ \vec{f} + \vec{g} \circ \vec{c} =$

3) $-5(\vec{f} \circ \vec{m}) - \vec{d} \circ \vec{e} =$

4) $-\dfrac{\vec{f}}{5} \circ \dfrac{\vec{h}}{4} + 5.\vec{m} \circ \vec{b} =$

5) $\vec{f} \times \vec{c} =$

6) $\vec{a} \times \vec{b} + \vec{b} \times \vec{c} =$

7) $\vec{f} \circ (\vec{h} \times \vec{c})$

8) $\vec{d} \circ (\vec{b} \times \vec{a}) + \vec{d} \circ (\vec{f} \times \vec{f}) =$

EJERCICIO N° 5: Hallar los ángulos y los cosenos directores de los vectores del ejercicio N° 2

EJERCICIO N° 6: Hallar los ángulos entre los siguientes vectores del ejercicio N° 2

1) $\vec{a}\ y\ \vec{c}$

2) $\vec{d}\ y\ \vec{g}$

3) $\vec{e}\ y\ \vec{b}$

4) $\vec{f}\ y\ \vec{m}$

5) $\vec{m}\ y\ \vec{h}$

6) $\vec{a}\ y\ \vec{d}$

7) $\vec{e}\ y\ \vec{b}$

8) $\vec{g}\ y\ \vec{b}$

EJERCICIO N° 7: Hallar el volumen del paralelepípedo, que tiene a los vectores $\vec{u}$; $\vec{v}$ y $\vec{w}$ como aristas concurrentes

1) $\begin{cases} \vec{u} = 2\acute{\imath} - 4\acute{\jmath} + \acute{k} \\ \vec{v} = -4\acute{\imath} + 5\acute{\jmath} + 2\acute{k} \\ \vec{w} = \dfrac{3}{2}\acute{\imath} + \dfrac{5}{2}\acute{\jmath} - 3\acute{k} \end{cases}$

2) $\begin{cases} \vec{u} = \dfrac{1}{3}\acute{\imath} + \dfrac{2}{5}\acute{k} \\ \vec{v} = -\acute{\imath} - \acute{\jmath} + \acute{k} \\ \vec{w} = -3\acute{\imath} - \acute{\jmath} + 2\acute{k} \end{cases}$

3) $\begin{cases} \vec{u} = 5\acute{\imath} - 4\acute{\jmath} + \acute{k} \\ \vec{v} = -7\acute{\imath} + 5\acute{\jmath} + 3\acute{k} \\ \vec{w} = \sqrt{5}\acute{\imath} - \dfrac{\sqrt{5}}{3}\acute{\jmath} + \sqrt{2}\acute{k} \end{cases}$

4) $\begin{cases} \vec{u} = -\dfrac{2}{5}\acute{\imath} + 2\acute{\jmath} - \dfrac{1}{5}\acute{k} \\ \vec{v} = 3\acute{\imath} - 2\acute{\jmath} + \acute{k} \\ \vec{w} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}\acute{\imath} - \dfrac{\sqrt{2}}{2}\acute{\jmath} + \dfrac{1}{2}\acute{k} \end{cases}$