

*Теория вероятностей и
математическая статистика
Лекция 6. Элементы теории оценок*

Понятие оценки параметров

Пусть изучается случайная величина X с законом распределения, зависящим от одного или нескольких параметров. Например, это параметр a в распределении Пуассона $\left(P\{X = m\} = \frac{a^m \cdot e^{-a}}{m!}\right)$ или параметры a и σ для нормального закона распределения.

Требуется по выборке X_1, X_2, \dots, X_n , полученной в результате n наблюдений (опытов), оценить неизвестный параметр θ .

Напомним, что X_1, X_2, \dots, X_n — случайные величины: X_1 — результат первого наблюдения, X_2 — второго и т.д., причем с.в. X_i , $i = 1, 2, \dots, n$, имеют такое же распределение, что и с.в. X ; конкретная выборка x_1, x_2, \dots, x_n — это значения (реализация) независимых с.в. X_1, X_2, \dots, X_n .

Статистической оценкой $\tilde{\theta}_n$ (далее просто — оценкой $\tilde{\theta}$) параметра θ теоретического распределения называют его приближенное значение, зависящее от данных выбора.

Понятие оценки параметров

Очевидно, что оценка $\hat{\theta}$ есть значение некоторой функции результатов наблюдений над случайной величиной, т. е.

$$\hat{\theta} = \tilde{\theta}(X_1, X_2, \dots, X_n)$$

Функцию результатов наблюдений (т. е. функцию выборки) называют *статистикой*.

Можно сказать, что оценка $\tilde{\theta}$ параметра θ есть статистика, которая в определенном смысле близка к истинному значению θ .

Так, $F^*(x)$ есть оценка $F_X(x)$, гистограмма — плотности $f(x)$.

Оценка $\tilde{\theta}$ является случайной величиной, так как является функцией независимых с. в. X_1, X_2, \dots, X_n ; если произвести другую выборку, то функция примет, вообще говоря, другое значение.

Если число опытов (наблюдений) невелико, то замена неизвестного параметра θ его оценкой $\tilde{\theta}$, например математического ожидания средним арифметическим, приводит к ошибке. Это ошибка в среднем тем больше, чем меньше число опытов.

Свойства статистических оценок

Качество оценки определяют, проверяя, обладает ли она свойствами несмещенности, состоятельности, эффективности.

Оценка $\tilde{\theta}$ параметра θ называется *несмещенной*, если $M\tilde{\theta} = \theta$.

Если $M\tilde{\theta} \neq \theta$, то оценка $\tilde{\theta}$ называется *смещенной*.

Чтобы оценка $\tilde{\theta}$ не давала систематической ошибки (ошибки одного знака) в сторону завышения ($M\tilde{\theta} > \theta$) или занижения ($M\tilde{\theta} < \theta$), надо потребовать, чтобы «математическое ожидание оценки было равно оцениваемому параметру».

Если $M\tilde{\theta}_n \rightarrow \theta$, то оценка $\tilde{\theta}_n$ называется *асимптотически несмещенной*.

Требование несмещенности особенно важно при малом числе наблюдений (опытов).

Свойства статистических оценок

Оценка $\tilde{\theta}_n$ параметра θ называется *состоятельной*, если она сходится по вероятности к оцениваемому параметру:

$$\tilde{\theta}_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{p} \theta,$$

т. е. для любого $\varepsilon > 0$ выполнено

$$\lim_{n \rightarrow \infty} p \left\{ |\tilde{\theta}_n - \theta| < \varepsilon \right\} = 1.$$

Это означает, что с увеличением объема выборки мы все ближе приближаемся к истинному значению параметра θ , т. е. практически достоверно $\tilde{\theta}_n \approx \theta$.

Свойство состоятельности обязательно для любого правила оценивания (несостоятельные оценки не используются).

Свойства статистических оценок

Состоятельность оценки $\tilde{\theta}_n$ часто может быть установлена с помощью следующей теоремы.

Теорема Если оценка $\tilde{\theta}_n$ параметра θ является несмещенной и $D\tilde{\theta}_n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$, то $\tilde{\theta}_n$ — состоятельная оценка.

□ Запишем неравенство Чебышева для с. в. $\tilde{\theta}_n$ для любого $\varepsilon > 0$:

$$P(|\tilde{\theta}_n - \theta| < \varepsilon) \geq 1 - \frac{D\tilde{\theta}_n}{\varepsilon^2}.$$

Так как по условию $\lim_{n \rightarrow \infty} D\tilde{\theta}_n = 0$, то $\lim_{n \rightarrow \infty} P(|\tilde{\theta}_n - \theta| < \varepsilon) \geq 1$. Но вероятность любого события не превышает 1 и, следовательно,

$$P(|\tilde{\theta}_n - \theta| < \varepsilon) = 1,$$

т. е. $\tilde{\theta}_n$ — состоятельная оценка параметра θ . ■

Свойства статистических оценок

Несмещенная оценка $\tilde{\theta}_n$ параметра θ называется *эффективной*, если она имеет наименьшую дисперсию среди всех возможных несмещенных оценок параметра θ , т. е. оценка $\tilde{\theta}_n$ эффективна, если ее дисперсия минимальна.

Эффективную оценку в ряде случаев можно найти, используя *неравенство Рао-Крамера*:

$$D\tilde{\theta}_n \geq \frac{1}{n \cdot I},$$

где $I = I(\theta)$ — информация Фишера, определяемая в дискретном случае формулой

$$I = M \left[\frac{\partial}{\partial \theta} \ln p(X, \theta) \right]^2 = \sum_{i=1}^m \left[\frac{p'_\theta(x_i, \theta)}{p(x_i, \theta)} \right]^2 \cdot p(x_i, \theta),$$

где $p(x, \theta) = p\{X = x\}$, а в непрерывном — формулой

$$I = M \left[\frac{\partial}{\partial \theta} \ln f(X, \theta) \right]^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{f'_\theta(x, \theta)}{f(x, \theta)} \right]^2 \cdot f(x, \theta) dx,$$

где $f(x, \theta)$ — плотность распределения н. с. в. X .

Свойства статистических оценок

Эффективность оценки определяется отношением

$$\text{eff } \tilde{\theta}_n = \frac{D\tilde{\theta}_n^{\text{э}}}{D\tilde{\theta}_n},$$

где $\tilde{\theta}_n^{\text{э}}$ — эффективная оценка. Чем ближе $\text{eff } \tilde{\theta}_n$ к 1, тем эффективнее оценка $\tilde{\theta}_n$. Если $\text{eff } \tilde{\theta}_n \rightarrow 1$ при $n \rightarrow \infty$, то оценка называется *асимптотически эффективной*.

Отметим, что на практике не всегда удается удовлетворить всем перечисленным выше требованиям (несмещенность, состоятельность, эффективность), и поэтому приходится довольствоваться оценками, не обладающими сразу всеми тремя свойствами. Все же три свойства, как правило, выделяют оценку однозначно.

Точечные оценки математического ожидания и дисперсии

Пусть изучается с. в. X с математическим ожиданием $a = MX$ и дисперсией DX ; оба параметра неизвестны.

Статистика, используемая в качестве приближенного значения неизвестного параметра генеральной совокупности, называется ее *точечной оценкой*. То есть точечная оценка характеристики генеральной совокупности — это число, определяемое по выборке.

Пусть x_1, x_2, \dots, x_n — выборка, полученная в результате проведения n независимых наблюдений за с. в. X . Чтобы подчеркнуть случайный характер величин x_1, x_2, \dots, x_n , перепишем их в виде X_1, X_2, \dots, X_n , т. е. под X_i будем понимать значение с. в. X в i -м опыте. Случайные величины X_1, X_2, \dots, X_n можно рассматривать как n независимых «экземпляров» величины X . Поэтому $MX_1 = MX_2 = \dots = MX_n = MX = a$, $DX_1 = DX_2 = \dots = DX_n = DX$.

Точечные оценки математического ожидания и дисперсии

Теорема Пусть X_1, X_2, \dots, X_n — выборка из генеральной совокупности и $MX_i = MX = a$, $DX_i = DX$ ($i = \overline{1, n}$). Тогда выборочное среднее $\bar{X}_B = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$ — несмещенная и состоятельная оценка математического ожидания MX .

□ Найдем м.о. оценки \bar{X}_B :

$$M\bar{X}_B = M\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i\right) = \frac{1}{n} M\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n MX_i = \frac{1}{n} \cdot n \cdot a.$$

Отсюда по определению получаем, что \bar{X}_B — несмещенная оценка MX .

Точечные оценки математического ожидания и дисперсии

Далее, согласно теореме Чебышева, для любого $\varepsilon > 0$ имеет

место равенство

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P \left\{ \left| \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n M X_i \right| < \varepsilon \right\} = 1,$$

которое, согласно условию теоремы, можно переписать так:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P \{ |\bar{X}_n - M X| < \varepsilon \} = 1$$

или, что то же самое, $\lim_{n \rightarrow \infty} p \{ |\bar{\theta} - \theta| < \varepsilon \} = 1$. Согласно определению получаем, что \bar{X}_n — состоятельная оценка $M X$. ■

Точечные оценки математического ожидания и дисперсии

Можно показать, что при нормальном распределении с. в. X эта оценка, т. е. \bar{X}_B , будет и эффективной. На практике во всех случаях в качестве оценки математического ожидания используется среднее арифметическое, т. е. \bar{X}_B .

В статистике оценку математического ожидания принято обозначать через \bar{X} или \bar{X}_B , а не \tilde{X} .

Можно показать, что

$$MD_B = \frac{n-1}{n} DX.$$

Из равенства следует, что $MD_B \neq DX$, т. е. выборочная дисперсия является смещенной оценкой дисперсии DX . Поэтому выборочную дисперсию исправляют, умножив ее на $\frac{n}{n-1}$, получая формулу

$$S^2 = \frac{n}{n-1} D_B$$

S^2 называется исправленной выборочной дисперсией

Точечные оценки математического ожидания и дисперсии

Теорема Пусть X_1, X_2, \dots, X_n — выборка из генеральной совокупности и $MX_i = MX = a$, $DX_i = DX$ ($i = \overline{1, n}$). Тогда исправленная выборочная дисперсия $S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 = \frac{n}{n-1} \cdot D_{\text{в}}$ — несмещенная состоятельная оценка дисперсии DX .

□ Примем без доказательства состоятельность оценки S^2 . Докажем ее несмещенность.

Имеем

$$MS^2 = M \left(\frac{n}{n-1} D_{\text{в}} \right) = \frac{n}{n-1} \cdot MD_{\text{в}} = \frac{n}{n-1} \cdot \frac{n-1}{n} DX = DX,$$

т. е. $MS^2 = DX$. Отсюда по определению получаем, что S^2 — несмещенная оценка DX . ■

Точечные оценки математического ожидания и дисперсии

Отметим, что при больших значениях n разница между D_v и S^2 очень мала и они практически равны, поэтому оценку S^2 используют для оценки дисперсии при малых выборках, обычно при $n \leq 30$.

Имеют место следующие теоремы.

Теорема Относительная частота $\frac{n_A}{n}$ появления события A в n независимых испытаниях является несмещенной состоятельной и эффективной оценкой неизвестной вероятности $p = P(A)$ этого события (p — вероятность наступления события A в каждом испытании).

Теорема Эмпирическая функция распределения выборки $F^*(x)$ является несмещенной состоятельной оценкой функции распределения $F(x)$ случайной величины X .

Методы нахождения точечных оценок

Метод моментов

Метод моментов для нахождения точечных оценок неизвестных параметров заданного распределения состоит в приравнивании теоретических моментов распределения соответствующим эмпирическим моментам, найденных по выборке.

Так, если распределение зависит от одного параметра θ (например, задан вид плотности распределения $f(x, \theta)$), то для нахождения его оценки надо решить относительно θ одно уравнение:

$$MX = \bar{X}_n$$

$$(MX = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x, \theta) dx = \varphi(\theta) \text{ есть функция от } \theta).$$

Если распределение зависит от двух параметров (например, вид плотности распределения $f(x, \theta_1, \theta_2)$) — надо решить относительно θ_1 и θ_2 систему уравнений:

$$\begin{cases} MX = \bar{X}_n, \\ DX = D_n. \end{cases}$$

Метод моментов

И, наконец, если надо оценить n параметров $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n$ — надо решить одну из систем вида:

$$\left\{ \begin{array}{l} MX = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i, \\ MX^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^2, \\ \dots \\ MX^k = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^k; \end{array} \right. \quad \text{или} \quad \left\{ \begin{array}{l} MX = \bar{X}, \\ DX = D_B, \\ \dots \\ M(X - MX)^k = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X}_B)^k. \end{array} \right.$$

Метод моментов является наиболее простым методом оценки параметров. Он был предложен в 1894 г. Пирсоном. Оценки метода моментов обычно состоятельны, однако их эффективность часто значительно меньше единицы.

Метод моментов

Пример Найти оценки параметров нормального распределения с. в. X методом моментов.

○ Требуется по выборке x_1, x_2, \dots, x_n найти точечные оценки неизвестных параметров $a = MX = \theta_1$ и $\sigma^2 = DX = \theta_2$.

По методу моментов приравниваем их, соответственно, к выборочному среднему и выборочной дисперсии ($\alpha_1 = MX$ — начальный момент I порядка, $\mu_2 = DX$ — центральный момент II порядка). Получаем

$$\begin{cases} MX = \bar{x}_B, \\ DX = D_B, \end{cases}$$

т. е.

$$\begin{cases} a = \bar{x}_B, \\ \sigma^2 = D_B. \end{cases}$$

Итак, искомые оценки параметров нормального распределения: $\tilde{\theta}_1 = \bar{x}_B$ и $\tilde{\theta}_2 = \sqrt{D_B}$. ●

Метод максимального правдоподобия

Пусть x_1, x_2, \dots, x_n — выборка, полученная в результате проведения n независимых наблюдений за с. в. X . И пусть вид закона распределения величины X , например, вид плотности $f(x, \theta)$, известен, но неизвестен параметр θ , которым определяется этот закон. Требуется по выборке оценить параметр θ .

В основе метода максимального правдоподобия (ММП), предложенного Р. Фишером, лежит понятие функции правдоподобия.

Метод максимального правдоподобия

Функцией правдоподобия, построенной по выборке x_1, x_2, \dots, x_n , называется функция аргумента θ вида

$$L(x_1, x_2, \dots, x_n; \theta) = f(x_1, \theta) \cdot f(x_2, \theta) \cdot \dots \cdot f(x_n, \theta)$$

или

$$L(x, \theta) = \prod_{i=1}^n f(x_i, \theta),$$

где $f(x, \theta)$ — плотность распределения с. в. X в случае, если X — непрерывная. Если X — дискретная с. в., то функция правдоподобия имеет вид

$$L(x, \theta) = p(x_1, \theta) \cdot p(x_2, \theta) \cdot \dots \cdot p(x_n, \theta) = \prod_{i=1}^n p(x_i, \theta),$$

где $p(x_i, \theta) = p\{X = x_i, \theta\}$.

Метод максимального правдоподобия

Из определения следует, что чем больше значение функции $L(x, \theta)$, тем более вероятно (правдоподобнее) появление (при фиксированном θ) в результате наблюдений чисел x_1, x_2, \dots, x_n .

За точечную оценку параметра θ , согласно ММП, берут такое его значение θ , при котором функция правдоподобия достигает максимума.

Эта оценка, называемая оценкой максимального правдоподобия, является решением уравнения

$$\frac{dL(x, \theta)}{d\theta} = 0.$$

Так как функции $L(x, \theta)$ и $\ln L(x, \theta)$ достигают максимума при одном и том же значении θ , то вместо отыскания максимума функции $L(x, \theta)$ ищут (что проще) максимум функции $\ln L(x, \theta)$.

Метод максимального правдоподобия

Таким образом, для нахождения оценки максимального правдоподобия надо:

1. решить уравнение правдоподобия

$$\frac{d(\ln L(x, \theta))}{d\theta} = 0;$$

2. отобрать то решение, которое обращает функцию $\ln L(x, \theta)$ в максимум (удобно использовать вторую производную: если

$$\left. \frac{d^2 \ln L(x, \theta)}{d\theta^2} \right|_{\theta=\tilde{\theta}} < 0,$$

то $\theta = \tilde{\theta}$ — точка максимума).

Если оценке подлежат несколько параметров $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n$ распределения, то оценки $\tilde{\theta}_1, \dots, \tilde{\theta}_n$ определяются решением системы уравнений правдоподобия:

$$\begin{cases} \frac{\partial(\ln L)}{\partial \theta_1} = 0, \\ \dots, \\ \frac{\partial(\ln L)}{\partial \theta_n} = 0. \end{cases}$$

Метод моментов для нахождения точечных оценок

Задача Найти оценку параметра α распределения Пуассона методом максимального правдоподобия.

○ В данном случае $p\{X = m\} = \frac{\alpha^m \cdot e^{-\alpha}}{m!}$. Поэтому

$$p(x_i, \theta) = p\{X = x_i, \theta\} = \frac{\theta^{x_i} \cdot e^{-\theta}}{x_i!}$$

при $x_i \in \mathbb{N}$. Составляем функцию правдоподобия (для дискретной с. в. X):

$$L(x, \theta) = \frac{\theta^{x_1} \cdot e^{-\theta}}{x_1!} \cdot \frac{\theta^{x_2} \cdot e^{-\theta}}{x_2!} \cdot \dots \cdot \frac{\theta^{x_n} \cdot e^{-\theta}}{x_n!} = e^{-\theta n} \cdot \theta^{\sum_{i=1}^n x_i} \cdot \frac{1}{x_1! \cdot \dots \cdot x_n!}.$$

Тогда

$$\ln L(x, \theta) = -n \cdot \theta + \sum_{i=1}^n x_i \cdot \ln \theta - \ln(x_1! \cdot x_2! \cdot \dots \cdot x_n!)$$

и

$$\frac{d \ln L(x, \theta)}{d\theta} = -n + \frac{1}{\theta} \cdot \sum_{i=1}^n x_i.$$

Метод моментов для нахождения точечных оценок

Задача Найти оценку параметра α распределения Пуассона методом максимального правдоподобия.

Уравнение правдоподобия имеет вид:


$$\left(-n + \frac{1}{\theta} \cdot \sum_{i=1}^n x_i \right) \Big|_{\theta=\tilde{\theta}} = 0.$$

Отсюда находим

$$\tilde{\theta} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i = \bar{x}_B.$$

А так как

$$\frac{d^2 \ln L(x, \theta)}{d\theta^2} \Big|_{\theta=\tilde{\theta}} = -\frac{1}{\theta^2} \sum_{i=1}^n x_i < 0,$$

то оценка $\tilde{\theta} = \bar{x}_B$ является оценкой максимального правдоподобия.
Итак, $\tilde{\theta} = \tilde{\alpha} = \bar{x}_B$. 

Метод наименьших квадратов

Метод нахождения оценки $\tilde{\theta}$ неизвестного параметра θ , основанный на минимизации суммы квадратов отклонений выборочных данных от определяемой (искомой) оценки θ , называется *методом наименьших квадратов* (коротко: МНК).

Другими словами, в МНК требуется найти такое значение $\tilde{\theta}$, которое минимизировало бы сумму

$$F(\theta) = \sum_{i=1}^n (X_i - \theta)^2 \rightarrow \min.$$

Отметим, что МНК является наиболее простым методом нахождения оценок параметра θ .

Метод наименьших квадратов

Пример Найти оценку параметра α распределения Пуассона методом наименьших квадратов.

○ Найдем точку минимума функции $F(\theta) = \sum_{i=1}^n (X_i - \theta)^2$:

$$F'(\theta) = \left(F = \sum_{i=1}^n (X_i - \theta)^2 \right)'_{\theta} = \sum_{i=1}^n 2(X_i - \theta) \cdot (-1);$$

из уравнения $F'(\theta) = 0$ находим критическую точку: $-2 \sum_{i=1}^n (X_i - \theta) = 0$,

$$\text{т. е. } \sum_{i=1}^n X_i - \sum_{i=1}^n \theta = 0, \text{ т. е. } \sum_{i=1}^n X_i = n\theta, \theta_{\text{кр}} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i.$$

Метод наименьших квадратов

Пример Найти оценку параметра a распределения Пуассона методом наименьших квадратов.

А так как
$$F''(\theta_{кр}) = \left(-2 \sum_{i=1}^n (X_i - \theta) \right)'_{\theta} = -2 \sum_{i=1}^n (-1) = 2n > 0$$

при любом значении θ , то $\theta_{кр} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$ — точка минимума функции $F(\theta)$. Таким образом, оценкой параметра a в распределении Пуассона $P(m; a) = \frac{a^m \cdot e^{-a}}{m!}$, $m = 0, 1, 2, \dots$ согласно МНК, является

$$\tilde{\theta} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i.$$

Можно доказать, что:

$$M(\tilde{\theta}) = \theta = a, \quad D(\tilde{\theta}) = \frac{\theta}{n}.$$



Интервальное оценивание параметров

Точечные оценки неизвестного параметра θ хороши в качестве первоначальных результатов обработки наблюдений. Их недостаток в том, что неизвестно, с какой точностью они дают оцениваемый параметр.

Для выборок небольшого объема вопрос о точности оценок очень существенен, так как между θ и $\tilde{\theta}$ может быть большое расхождение в этом случае. Кроме того, при решении практических задач часто требуется определить и надежность этих оценок. Тогда и возникает задача о приближении параметра θ не одним числом, а целым интервалом $(\tilde{\theta}_1, \tilde{\theta}_2)$.

Оценка неизвестного параметра называется *интервальной*, если она определяется двумя числами — концами интервала.

Задачу интервального оценивания можно сформулировать так: по данным выборки построить числовой интервал $(\tilde{\theta}_1, \tilde{\theta}_2)$, относительно которого с заранее выбранной вероятностью γ можно сказать, что внутри этого интервала находится точное значение оцениваемого параметра

Интервальное оценивание параметров



Интервал $(\tilde{\theta}_1, \tilde{\theta}_2)$, накрывающий с вероятностью γ истинное значение параметра θ , называется *доверительным интервалом*, а вероятность γ — *надежностью оценки* или *доверительной вероятностью*.

Очень часто (но не всегда) доверительный интервал выбирается симметричным относительно несмещенной точечной оценки $\tilde{\theta}$, т. е. выбирается интервал вида $(\tilde{\theta} - \epsilon, \tilde{\theta} + \epsilon)$ такой, что

$$p \left\{ \theta \in (\tilde{\theta} - \epsilon, \tilde{\theta} + \epsilon) \right\} = p \left\{ |\theta - \tilde{\theta}| < \epsilon \right\} = \gamma.$$

Число $\epsilon > 0$ характеризует точность оценки: чем меньше разность $|\theta - \tilde{\theta}|$, тем точнее оценка.

Интервальное оценивание параметров

Величина γ выбирается заранее, ее выбор зависит от конкретно решаемой задачи. Так, степень доверия авиапассажира к надежности самолета, очевидно, должна быть выше степени доверия покупателя к надежности телевизора, лампочки, игрушки. . . Надежность γ принято выбирать равной 0,9; 0,95; 0,99 или 0,999. Тогда практически достоверно нахождение параметра θ в доверительном интервале $(\tilde{\theta} - \varepsilon, \tilde{\theta} + \varepsilon)$.

Доверительные интервалы для параметров нормального распределения

Построим доверительные интервалы для параметров нормального распределения, т. е. когда выборка производится из генеральной совокупности, имеющей нормальное распределение с параметрами μ и σ^2 .

Доверительный интервал для математического ожидания при известной дисперсии

Пусть с. в. $X \sim N(a, \sigma)$; σ — известна, доверительная вероятность (надежность) γ — задана.

Пусть x_1, x_2, \dots, x_n — выборка, полученная в результате проведения n независимых наблюдений за с. в. X . Чтобы подчеркнуть случайный характер величин x_1, x_2, \dots, x_n , перепишем их в виде X_1, X_2, \dots, X_n , т. е. под X_i будем понимать значение с. в. X в i -м опыте. Случайные величины X_1, X_2, \dots, X_n — независимы, закон распределения любой из них совпадает с законом распределения с. в. X (т. е. $X_i \sim N(a, \sigma)$). А это значит, что $MX_1 = MX_2 = \dots = MX_n = MX = a$, $DX_1 = DX_2 = \dots = DX_n = DX$.

Выборочное среднее

$$\overline{X}_в = \overline{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$$

также будет распределено по нормальному закону (примем без доказательства)

Доверительный интервал для математического ожидания при известной дисперсии

Параметры распределения \bar{X} таковы: $M(\bar{X}) = a$, $D(\bar{X}) = \frac{\sigma^2}{n}$. Действительно,

$$M(\bar{X}) = M\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i\right) = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n M X_i = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n M X = M X = a,$$

$$D(\bar{X}) = D\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i\right) = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n D X_i = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n D X = \frac{1}{n} \cdot D X = \frac{\sigma^2}{n}.$$

Таким образом, $\bar{X} \sim N\left(a, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$.

Доверительный интервал для математического ожидания при известной дисперсии

Следовательно, пользуясь формулой

$$p\{|X - a| < l\} = 2\Phi_0\left(\frac{l}{\sigma}\right) = 2\Phi\left(\frac{l}{\sigma}\right) - 1 \quad \text{можно записать}$$

$$\gamma = p\{|\bar{X} - a| < \varepsilon\} = 2\Phi_0\left(\frac{\varepsilon \cdot \sqrt{n}}{\sigma}\right) = 2\Phi_0(t),$$

где $t = \frac{\varepsilon \cdot \sqrt{n}}{\sigma}$. Из последнего равенства находим

$$\varepsilon = \frac{t \cdot \sigma}{\sqrt{n}},$$

поэтому $\gamma = p\left\{|\bar{X} - a| < \frac{t \cdot \sigma}{\sqrt{n}}\right\} = 2\Phi_0(t)$ или

$$p\left\{\bar{X} - t \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < a < \bar{X} + t \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right\} = 2\Phi_0(t) = \gamma.$$

Доверительный интервал для математического ожидания при известной дисперсии

В соответствии с определением доверительного интервала получаем, что доверительный интервал для $a = MX$ есть

$$\left(\bar{X} - t \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{X} + t \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right),$$

где t определяется из уравнения

$$\Phi_0(t) = \frac{\gamma}{2}$$

(или $\Phi(t) = \frac{1+\gamma}{2}$); при заданном γ по таблице функции Лапласа находим аргумент t .

Распределение функций нормальных случайных величин

Если каждому возможному значению с. в. X по определенному правилу соответствует одно возможное значение с. в. Y , то Y называют *функцией случайного аргумента* X , записывают $Y = \varphi(X)$.

Если каждой паре возможных значений с. в. X и Y по определенному правилу соответствует одно возможное значение с. в. Z , то Z называют *функцией двух случайных аргументов* X и Y , записывают $Z = \varphi(X, Y)$.

Рассмотрим распределение некоторых с. в., представляющих функции нормальных величин, используемые в математической статистике.

Распределение χ^2 (хи-квадрат или Пирсона)

Распределением χ_n^2 с n степенями свободы называется распределение суммы квадратов n независимых стандартных случайных величин, т. е.

$$\chi_n^2 = \sum_{i=1}^n X_i^2, \quad \text{где } X_i \sim N(0, 1), \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Плотность вероятности с. в. χ^2 зависит только от числа n , т. е. числа слагаемых. Если $n = 1$, то $\chi^2 = X^2$, где $X \sim N(0, 1)$,

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

Плотность распределения с. в. $Y = X^2$ равна

$$g(y) = \frac{1}{2\sqrt{2\pi y}} e^{-\frac{y}{2}}, \quad y > 0.$$

Распределение χ^2 (хи-квадрат или Пирсона)

Плотность распределения χ_n^2 имеет вид

$$f_{\chi_n^2}(x) = \begin{cases} \frac{1}{2^{\frac{n}{2}} \Gamma(\frac{n}{2})} x^{\frac{n}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}}, & \text{при } x > 0, \\ 0, & \text{при } x \leq 0, \end{cases}$$

где $\Gamma(p) = \int_0^{\infty} t^{p-1} e^{-t} dt$ — гамма-функция Эйлера ($\Gamma(p) = (p-1)!$ для

целых положительных p). С возрастанием числа степеней свободы n распределение χ^2 приближается к нормальному закону распределения (при $n > 30$ распределение χ^2 практически не отличается от нормального);

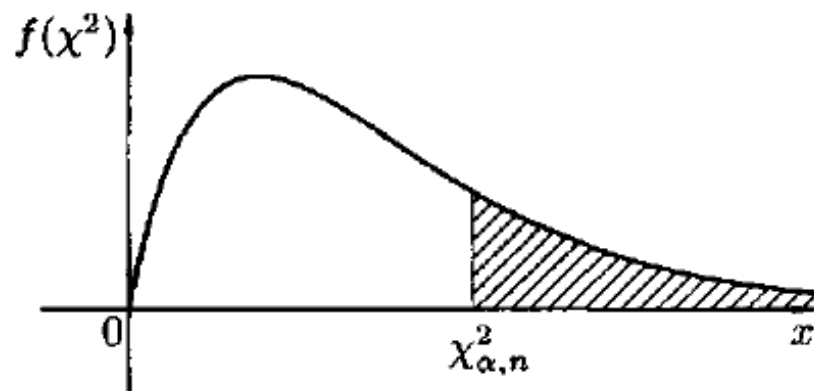
$$M\chi_n^2 = n, \quad D\chi_n^2 = 2n.$$

На практике, как правило, используют не плотность вероятности, а квантили распределения χ_n^2 .

Распределение χ^2 (хи-квадрат или Пирсона)

Квантилью распределения χ_n^2 , отвечающей уровню значимости α , называется такое значение $\chi_n^2 = \chi_{\alpha,n}^2$, при котором

$$P\{\chi_n^2 > \chi_{\alpha,n}^2\} = \int_{\chi_{\alpha,n}^2}^{\infty} f_{\chi_n^2}(x) dx = \alpha.$$



С геометрической точки зрения нахождение квантили $\chi_{\alpha,n}^2$ заключается в выборе такого значения $\chi_n^2 = \chi_{\alpha,n}^2$, чтобы площадь заштрихованной на рис. фигуры была равна α .

Значения квантилей приводятся в специальных таблицах-приложениях.

Для стандартного нормального распределения квантили уровня α обозначаются через $\pm u_\alpha$, причем u_α является решением уравнения $\Phi(u_\alpha) = \frac{1-\alpha}{2}$.

Распределение Стьюдента

Распределением Стьюдента (или t -распределением) с n степенями свободы называется распределение с. в.

$$T_n = \frac{Z}{\sqrt{\frac{1}{n}\chi_n^2}},$$

где $Z \sim N(0, 1)$ — стандартная нормальная величина, независимая от χ_n^2 -распределения.

Плотность вероятности распределения Стьюдента имеет вид

$$f_{T_n}(t) = \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\sqrt{\pi n}} \left(1 + \frac{t^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}}; \quad t \in (-\infty; \infty).$$

При $n \rightarrow \infty$ распределение Стьюдента приближается (уже при $n > 30$ почти совпадает) к нормальному;

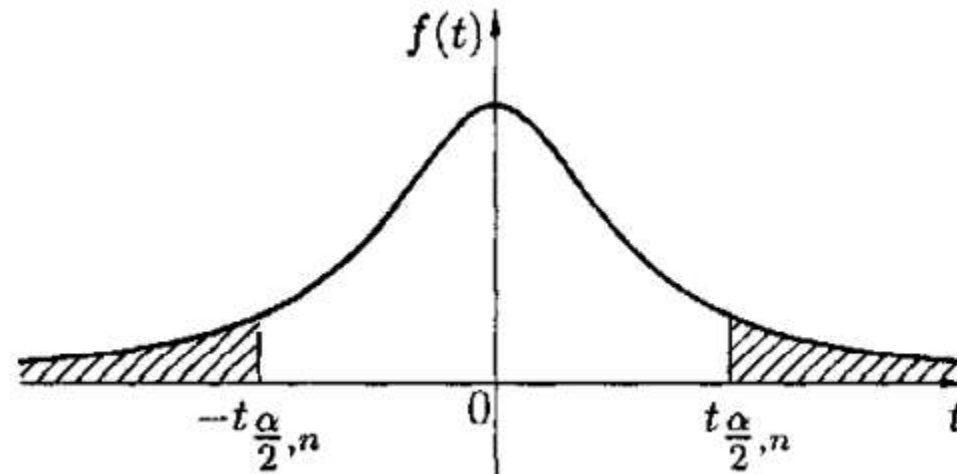
$$MT_n = 0, \quad DT_n = \frac{n}{n-2}, \quad n > 2.$$

Распределение Стьюдента

На практике используют квантили t -распределения: такое значение $t = t_{\frac{\alpha}{2}, n}$, что

$$P\{|t| > t_{\frac{\alpha}{2}, n}\} = 2 \int_{t_{\frac{\alpha}{2}, n}}^{\infty} f(t) dt = \alpha.$$

С геометрической точки зрения нахождение квантилей заключается в выборе такого значения $t = t_{\frac{\alpha}{2}, n}$, чтобы площадь заштрихованной на рис. фигуры была равна α .



Распределение Фишера-Снедекора

Распределением Фишера-Снедекора (или F -распределением) с m и n степенями свободы называется распределение с. в.

$$F = \frac{\frac{1}{m}\chi_m^2}{\frac{1}{n}\chi_n^2},$$

где χ_m^2 и χ_n^2 — независимые с. в., имеющие χ^2 -распределение соответственно с m и n степенями свободы.

При $n \rightarrow \infty$ F -распределение стремится к нормальному закону.

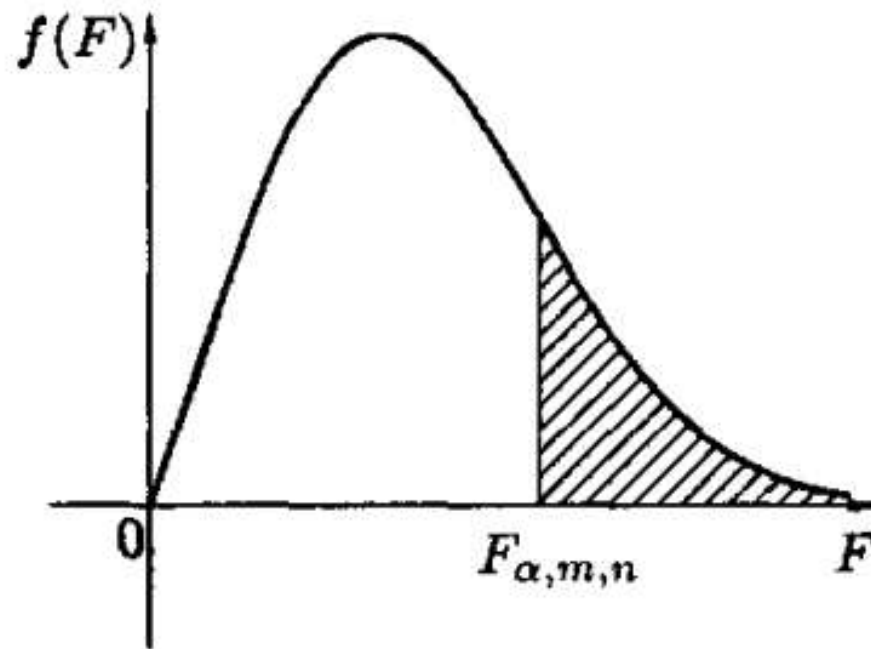
$$MF = \frac{n}{n-2}, \quad n > 2, \quad DF = \frac{2n^2(m+n-2)}{m(n-2)^2(n-4)}, \quad n > 4.$$

На практике обычно используют квантили распределения: такое значение $F = F_{\alpha, m, n}$, что

$$P\{F > F_{\alpha, m, n}\} = \int_{F_{\alpha, m, n}}^{\infty} f(F) dF = \alpha.$$

Распределение Фишера-Снедекора

С геометрической точки зрения нахождение квантили заключается в выборе такого значения $F = F_{\alpha, m, n}$, чтобы площадь заштрихованной на рис. фигуры была равна α .



Доверительный интервал для математического ожидания при неизвестной дисперсии

Пусть с. в. $X \sim N(a, \sigma)$, σ — неизвестна, γ — задана. Найдем такое число ε , чтобы выполнялось соотношение $p\{\bar{X} - \varepsilon < a < \bar{X} + \varepsilon\} = \gamma$ или

$$p\{|\bar{X} - a| < \varepsilon\} = \gamma. \quad (*)$$

Введем случайную величину

$$T = \frac{\bar{X} - a}{\frac{S}{\sqrt{n}}},$$

где S — исправленное среднее квадратическое отклонение с. в. X , вычисленное по выборке:

$$S = \sqrt{\frac{1}{n-1} \cdot \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}.$$

Доверительный интервал для математического ожидания при неизвестной дисперсии

Доказывается, что с.в. T имеет распределение Стьюдента с $n - 1$ степенью свободы. Плотность этого распределения имеет вид:

$$f_T(t, n - 1) = \frac{\Gamma(\frac{n}{2})}{\sqrt{\pi(n - 1)} \cdot \Gamma(\frac{n - 1}{2})} \cdot \left(1 + \frac{t^2}{n - 1}\right)^{-\frac{n}{2}},$$

где $\Gamma(p) = \int_0^{\infty} u^{p-1} \cdot e^{-u} du$ — гамма-функция; $f_T(t, n - 1)$ — четная функция.

Перейдем в левой части равенства (*) от с.в. \bar{X} к с.в. T :

$$p \left\{ \frac{|\bar{X} - a|}{\frac{S}{\sqrt{n}}} < \frac{\varepsilon}{\frac{S}{\sqrt{n}}} \right\} = \gamma$$

$$\text{или } p \left\{ |T| < \frac{\varepsilon \sqrt{n}}{S} \right\} = \gamma \text{ или } p\{|T| < t_\gamma\} = \gamma, \text{ где } t_\gamma = \frac{\varepsilon \cdot \sqrt{n}}{S}. \quad (**)$$

Доверительный интервал для математического ожидания при неизвестной дисперсии

Величина t_γ находится из условия

$$p\{|T| < t_\gamma\} = \int_{-t_\gamma}^{t_\gamma} f_T(t, n-1) dt = 2 \cdot \int_0^{t_\gamma} f_T(t, n-1) dt = \gamma,$$

т. е. из равенства

$$2 \cdot \int_0^{t_\gamma} f_T(t, n-1) dt = \gamma.$$

Пользуясь таблицей квантилей распределения Стьюдента находим значение t_γ в зависимости от доверительной вероятности γ и числа степеней свободы $n-1$ (t_γ — квантиль уровня $1-\gamma$).

Определив значение t_γ из равенства (**), находим значение ε :

$$\varepsilon = t_\gamma \cdot \frac{S}{\sqrt{n}}.$$

Следовательно, равенство (*) принимает вид

$$p\left\{\bar{X} - t_\gamma \cdot \frac{S}{\sqrt{n}} < a < \bar{X} + t_\gamma \cdot \frac{S}{\sqrt{n}}\right\} = \gamma.$$

Доверительный интервал для математического ожидания при неизвестной дисперсии

А это значит, что интервал

$$\left(\bar{X} - t_{\gamma} \cdot \frac{S}{\sqrt{n}}, \bar{X} + t_{\gamma} \cdot \frac{S}{\sqrt{n}} \right)$$

покрывает $a = MX$ с вероятностью γ , т.е. является доверительным интервалом для неизвестного математического ожидания с.в. X .

Доверительный интервал для среднего квадратического отклонения нормального распределения

Пусть с. в. $X \sim N(a, \sigma)$, σ — неизвестно, γ — задано. Можно показать, что если $MX = a$ известно, то доверительный интервал для среднего квадратического отклонения σ имеет вид:

$$\left(\frac{\sqrt{n} \cdot S_0}{\chi_2}, \frac{\sqrt{n} \cdot S_0}{\chi_1} \right),$$

где n — объем выборки, $S_0^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - a)^2$, а

$$\chi_1^2 = \chi_{\frac{1+\gamma}{2}, n}^2; \quad \chi_2^2 = \chi_{\frac{1-\gamma}{2}, n}^2$$

являются квантилями χ^2 -распределения с n степенями свободы (см. п. 4.3), определяемые по таблице квантилей $\chi_{\alpha, n}^2$ распределения χ_n^2 (см. приложение 3)

Приложение 3. Квантили $\chi^2_{\alpha,k}$ распределения χ^2_k
 (k — число степеней свободы)

k	Уровень значимости α					
	0,01	0,025	0,05	0,95	0,975	0,99
1	6,6	5,0	3,8	0,0039	0,00098	0,00016
2	9,2	7,4	6,0	0,103	0,051	0,020
3	11,3	9,4	7,8	0,352	0,216	0,115
4	13,3	11,1	9,5	0,711	0,484	0,297
5	15,1	12,8	11,1	1,15	0,831	0,554
6	16,8	14,4	12,6	1,64	1,24	0,872
7	18,5	16,0	14,1	2,17	1,69	1,24
8	20,1	17,5	15,5	2,73	2,18	1,65
9	21,7	19,0	16,9	3,33	2,70	2,09
10	23,2	20,5	18,3	3,94	3,25	2,56
11	24,7	21,9	19,7	4,57	3,82	3,05
12	26,2	23,3	21,0	5,23	4,40	3,57
13	27,7	24,7	22,4	5,89	5,01	4,11
14	29,1	26,1	23,7	6,57	5,63	4,66
15	30,6	27,5	25,0	7,26	6,26	5,23
16	32,0	28,8	26,3	7,96	6,91	5,81
17	33,4	30,2	27,6	8,67	7,56	6,41
18	34,8	31,5	28,9	9,39	8,23	7,01
19	36,2	32,9	30,1	10,1	8,91	7,63
20	37,6	34,2	31,4	10,9	9,59	8,26
21	38,9	35,5	32,7	11,6	10,3	8,26
22	40,3	36,8	33,9	12,3	11,0	9,54
23	41,6	38,1	35,2	13,1	11,7	10,2
24	43,0	39,4	36,4	13,8	12,4	10,9
25	44,3	40,6	37,7	14,6	13,1	11,5
26	45,6	41,9	38,9	15,4	13,8	12,2
27	47,0	43,3	40,1	16,2	14,6	12,9
28	48,3	44,5	41,3	16,9	15,3	13,6
29	49,6	45,7	42,6	17,7	16,0	14,3
30	50,9	47,0	43,8	18,5	16,8	15,0

Доверительный интервал для среднего квадратического отклонения нормального распределения

Если $\sigma = MX$ неизвестно, то доверительный интервал для неизвестного σ имеет вид:

$$\left(\frac{\sqrt{n-1} \cdot S}{\chi_2}, \frac{\sqrt{n-1} \cdot S}{\chi_1} \right),$$

где n — объем выборки, $S^2 = \frac{1}{n-1} \cdot \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$ — исправленное среднее квадратическое отклонение, квантили

$$\chi_1^2 = \chi_{\frac{1+\gamma}{2}; n-1}^2, \quad \chi_2^2 = \chi_{\frac{1-\gamma}{2}; n-1}^2$$

определяются по таблице $\chi_{\alpha, k}^2$ при $k = n - 1$ и $\alpha = \frac{1+\gamma}{2}$ и $\alpha = \frac{1-\gamma}{2}$ соответственно.