УНИВЕРСИТЕТ ИТМО

Теория вероятностей и математическая статистика

Практическое занятие 3.

Функция распределения случайной величины.

Числовые характеристики случайных величин

Дискретная случайная величина

Задача. В урне 8 шаров, из которых 5 белых, остальные — черные. Из нее вынимают наудачу 3 шара. Найти закон распределения числа белых шаров в выборке.

○ Возможные значения с. в. X — числа белых шаров в выборке есть $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_3 = 2$, $x_4 = 3$. Вероятности их соответственно будут $p_1 = P\{X = 0\} = \dfrac{C_5^0 \cdot C_3^3}{C_8^3} = \dfrac{1}{56}$, $p_2 = P\{X = 1\} = \dfrac{C_5^1 \cdot C_3^2}{C_8^3} = \dfrac{15}{56}$, $p_3 = \dfrac{30}{56}$, $p_4 = \dfrac{10}{56}$. Закон распределения запишем в виде таблицы

X	0	1	2	3
P	$\frac{1}{56}$	$\frac{15}{56}$	$\frac{30}{56}$	$\frac{10}{56}$

.

(Контроль: $\sum\limits_1^4 p_i = \dfrac{1}{56} + \dfrac{15}{56} + \dfrac{30}{56} + \dfrac{10}{56} = 1$.) ●

Дискретная случайная величина

Задача. В ящике 10 деталей, из которых 3 дефектных. Наугад извлекают 2 детали. Построить ряд распределения случайной величины ξ - количества дефектных деталей среди извлечённых.

Решение. Случайная величина ξ в данном случае принимает значения $x_i = i-1$, где $i = 1, 2, 3$. Вероятности $p_i = P(\xi = x_i)$ того, что среди двух взятых деталей окажется ровно x_i дефектных, вычисляются в соответствии с классическим определением вероятности по формуле $P(\xi = x_i) = \dfrac{C_3^{i-1} \cdot C_{10-3}^{3-i}}{C_{10}^2}$, откуда получаем, что ряд распределения случайной величины ξ имеет вид

x_i	0	1	2
p_i	7 / 15	7 / 15	1 / 15

Отметим, что $\sum_{i=1}^{3} p_i = 1$.

Задача. Спортсмен стреляет по мишени до первого попадания или до израсходования всех патронов. Предполагая, что вероятность поражения мишени при каждом выстреле равна 0.8 и имеется 5 патронов, построить ряд распределения случайной величины ξ - количества израсходованных патронов.

Решение. Случайная величина ξ в данном случае принимает значения $x_k = k$ $(k = 1, 2, 3, 4, 5)$. Обозначим через A_k - попадание при k-ом выстреле. Тогда, очевидно

$P(\xi=1)= P(A_1) = 0.8$,

$P(\xi=2)= P(\overline{A_1}A_2) = 0.2 \cdot 0.8$,

$P(\xi=3)= P(\overline{A_1}\,\overline{A_2}A_3) = 0.2 \cdot 0.2 \cdot 0.8$,

$P(\xi=4)= P(\overline{A_1}\,\overline{A_2}\,\overline{A_3}A_4) = 0.2 \cdot 0.2 \cdot 0.2 \cdot 0.8$,

$P(\xi=5)= P(\overline{A_1}\,\overline{A_2}\,\overline{A_3}\,\overline{A_4}) = 0.2 \cdot 0.2 \cdot 0.2 \cdot 0.2$,

т.е. для $k = 1, 2, 3, 4$, $P(\xi = x_k) = p \cdot q^{k-1}$, где $p = 0.8$, $q = 1 - p = 0.2$. Например, ровно 3 патрона будут израсходованы, если спортсмен в первых двух выстрелах промахнётся, а в третьем попадёт; вероятность такого исхода равна $P(\xi = 3) = q \cdot q \cdot p = p \cdot q^2$. Если случайная величина ξ принимает значение $x_5 = 5$, это означает, что все патроны израсходованы, т.е. в четырёх первых выстрелах были промахи, следовательно, $P(\xi = 5) = q^4$.

Проведя вычисления, получим следующий ряд распределения случайной величины ξ

x_k	1	2	3	4	5
p_k	0.8	0.16	0.032	0.0064	0.0016

Проверка : $\sum_{k=1}^{5} p_k = 1$.

Дискретная случайная величина

Идёт охота на дикого зверя с помощью ловушки. Вероятность попасть в ловушку для волка-0.3, для медведя-0.5, для лисы и зайца-0.6. Найти закон распределения нормальной величины x - числа попавших в ловушку зверей.

Решение. $p_1=0,3$; $q_1=0,7$; $p_2=0,5$; $q_2=0,5$; $p_3=0,6$; $q_3=0,4$;
$p(x=0)=p_1p_2p_3=0.7*0.5*0.4=0.14$; $p(x=1)=p_1q_2q_3+q_1p_2q_3+q_1q_2p_3=0.41$;
$P(x=2)=0.36$; $P(x=3)=0.09$.

x	0	1	2	3
p	0,14	0,41	0,36	0,09

Функция распределения случайной величины

Задача. В урне 8 шаров, из которых 5 белых, остальные — черные. Из нее вынимают наудачу 3 шара. найти функцию распределения $F(x)$ и построить ее график.

Закон распределения запишем в виде таблицы.

X	0	1	2	3
P	$\frac{1}{56}$	$\frac{15}{56}$	$\frac{30}{56}$	$\frac{10}{56}$

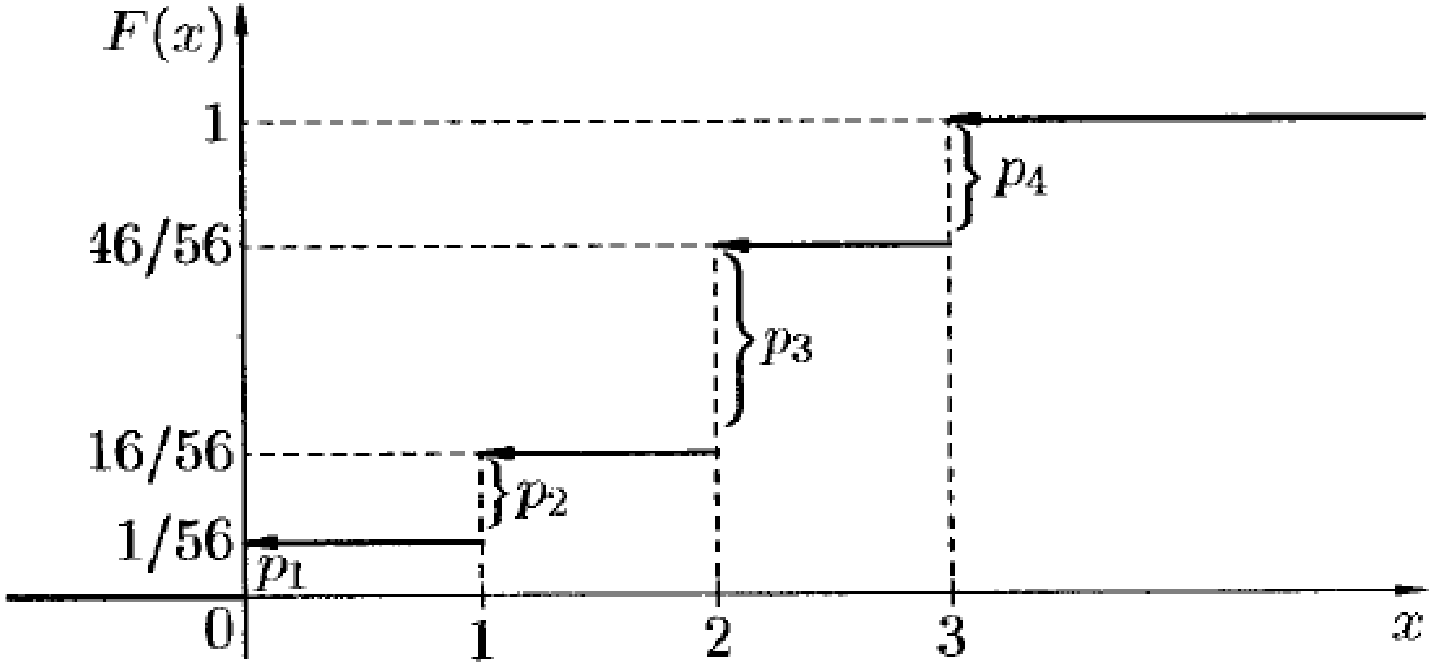
Будем задавать различные значения x и находить для них $F(x) = P\{X < x\}$:

1. Если $x \leqslant 0$, то, очевидно, $F(x) = P\{X < 0\} = 0$;
2. Если $0 < x \leqslant 1$, то $F(x) = P\{X < x\} = P\{X = 0\} = \frac{1}{56}$;
3. Если $1 < x \leqslant 2$, то $F(x) = P\{X = 0\} + P\{X = 1\} = \frac{1}{56} + \frac{15}{56} = \frac{16}{56}$;
4. Если $2 < x \leqslant 3$, то $F(x) = P\{X = 0\} + P\{X = 1\} + P\{X = 2\} = \frac{1}{56} + \frac{15}{56} + \frac{30}{56} = \frac{46}{56}$;
5. Если $3 < x$, то $F(x) = P\{X = 0\} + P\{X = 1\} + P\{X = 2\} + P\{X = 3\} = \frac{46}{56} + \frac{10}{56} = 1$.

Функция распределения случайной величины

$$F(x)=\begin{cases}0, & \text{если} \quad x \leqslant 0;\\ \dfrac{1}{56}, & \text{если} \quad 0 < x \leqslant 1;\\ \dfrac{16}{56}, & \text{если} \quad 1 < x \leqslant 2;\\ \dfrac{46}{56}, & \text{если} \quad 2 < x \leqslant 3;\\ 1, & \text{если} \quad 3 < x.\end{cases}$$

Строим график $F(x)$



Плотность распределения вероятностей

Плотность распределения с. в. X задана функцией $f(x) = \dfrac{a}{1+x^2}$.
Найти значение параметра a.

- Согласно свойству 4 плотности, имеем

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{a}{1+x^2}\,dx = 1, \quad \text{т. е.} \quad a \lim_{\substack{d\to+\infty\\ c\to-\infty}} \int_c^d \frac{dx}{1+x^2} = 1, \quad \text{т. е.} \quad a \cdot \lim_{\substack{d\to+\infty\\ c\to-\infty}} \operatorname{arctg} x\Big|_c^d = 1$$

или $a \cdot \left(\frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right)\right) = 1$ и, наконец, получаем $a\pi = 1$, т. е. $a = \dfrac{1}{\pi}$. ●

Математическое ожидание дискретной случайной величины

Задача В лотерее имеется 1000 билетов, из них выигрышных: 10 по 500 руб, 50 по 50 руб, 100 по 10 руб, 150 по 1 руб. Найти математическое ожидание выигрыша на один билет.

Ряд распределения с. в. X — суммы выигрыша на один билет таков:

X	500	50	10	1	0
p	0,01	0,05	0,1	0,15	0,69

(Контроль: $\sum\limits_{i=1}^{5} p_i = 1$.) Находим MX:

$MX = 500 \cdot 0{,}01 + 50 \cdot 0{,}05 + 10 \cdot 0{,}1 + 1 \cdot 0{,}15 + 0 \cdot 0{,}69 = 8{,}65$ руб.

Математическое ожидание дискретной случайной величины

Найти математическое ожидание случайной величины *X* – значения грани, выпавшей на кубике.

Построим закон распределения этой случайной величины. Все значения случайной величины равновероятны и вероятность каждого из возможных значений равна 1/6. Поэтому закон распределения задается следующей таблицей:

X	1	2	3	4	5	6
p	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6

Выполним проверку: $\sum_{k=1}^{6} p_k = 1$. ☻

$$M(X) = 1/6 + 2/6 + 3/6 + 4/6 + 5/6 + 6/6 = 21/6 = 3.5.$$

Математическое ожидание дискретной случайной величины

Найти математическое ожидание случайной величины *Z*, возникающей при подбрасывании двух монет и равной числу выпавших гербов.

Построим закон распределения этой случайной величины. Первоначально определим возможные значения случайной величины *Z*. Очевидно, что при подбрасывании двух монет герб может появиться 2 раза, один раз или вообще не появиться. Поэтому $Z = \{0, 1, 2\}$. Вероятность значения 0 определяется по теореме умножения вероятностей двух независимых событий – при каждом подбрасывании выпала решка.

$$P(Z=0)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$$

Вероятность значения 1 определяется как сумма вероятностей двух событий – на первой и второй монете один герб и одна решка:

$$P(Z=1)=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$$

Наконец, вероятность значения 2 определяется по теореме умножения вероятностей двух независимых событий – при каждом подбрасывании выпала герб:

$$P(Z=2)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$$

Математическое ожидание дискретной случайной величины

Найти математическое ожидание случайной величины *Z*, возникающей при подбрасывании двух монет и равной числу выпавших гербов.

Закон распределения задается следующей таблицей:

Z	0	1	2
p	1/4	1/2	1/4

Выполним проверку: $\sum_{k=1}^{3} p_k = 1$. ☻

$$M(Z) = 0 \cdot 1/4 + 1 \cdot 1/2 + 2 \cdot 1/4 = 1.$$

Математическое ожидание дискретной случайной величины

Производится 3 независимых выстрела по цели. Вероятности попадания при разных выстрелах одинаковы и равны $p = 0{,}9$. Найти м.о. числа попаданий. Решить задачу в случае, если вероятности попадания при разных выстрелах различны: а) $p_1 = 0{,}7$, б) $p_2 = 0{,}8$, в) $p_3 = 0{,}9$.

а) $P_3(0) = C_3^0 \cdot 0{,}9^0 \cdot 0{,}1^3 = 0{,}001$ — вероятность трех промахов;

б) $P_3(1) = C_3^1 \cdot 0{,}9^1 \cdot 0{,}1^2 = 3 \cdot 0{,}9 \cdot 0{,}01 = 0{,}027$ — вероятность одного попадания;

в) $P_3(2) = C_3^2 \cdot 0{,}9^2 \cdot 0{,}1^1 = 3 \cdot 0{,}81 \cdot 0{,}1 = 0{,}243$ — вероятность двух попаданий;

г) $P_3(3) = C_3^3 \cdot 0{,}9^3 \cdot 0{,}1^0 = 0{,}9^3 = 0{,}729$ — вероятность трех попаданий. ●

$$MX = 0 \cdot 0{,}001 + 1 \cdot 0{,}027 + 2 \cdot 0{,}243 + 3 \cdot 0{,}729 = 2{,}7$$

Математическое ожидание дискретной случайной величины

Производится 3 независимых выстрела по цели. Вероятности попадания при разных выстрелах одинаковы и равны $p = 0{,}9$. Найти м.о. числа попаданий. Решить задачу в случае, если вероятности попадания при разных выстрелах различны: а) $p_1 = 0{,}7$, б) $p_2 = 0{,}8$, в) $p_3 = 0{,}9$.

Если вероятности при разных выстрелах различны, то производящая функция имеет вид $\varphi_3(z) = (0{,}3 + 0{,}7z)(0{,}2 + 0{,}8z)(0{,}1 + 0{,}9z) = 0{,}504z^3 + 0{,}398z^2 + 0{,}092z + 0{,}006$. Откуда находим вероятность трех, двух, одного попаданий, промаха соответственно: $P_3(3) = 0{,}504$, $P_3(2) = 0{,}398$, $P_3(1) = 0{,}092$, $P_3(0) = 0{,}006$. (Контроль: $0{,}504 + 0{,}398 + 0{,}092 + 0{,}006 = 1$.)

$$MX = 0 \cdot 0{,}006 + 1 \cdot 0{,}092 + 2 \cdot 0{,}398 + 3 \cdot 0{,}504 = 2{,}4.$$

Математическое ожидание непрерывной случайной величины

Непрерывная случайная величина задана плотностью распределения

$$f_X(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x \leqslant 0 \text{ и } x > \pi, \\ \frac{1}{2}\sin x, & \text{при } 0 < x \leqslant \pi. \end{cases}$$

Найти математическое ожидание случайной величины X.

$$MX = \left[\int_{-\infty}^{\infty} xf(x)\,dx\right] = \int_{-\infty}^{0} x\cdot 0\,dx + \int_{0}^{\pi} \frac{1}{2}x\sin x\,dx + \int_{\pi}^{\infty} x\cdot 0\,dx = \frac{1}{2}\int_{0}^{\pi} x\sin x\,dx =$$

$$= \frac{\pi}{2}.$$

Свойства математического ожидания

Найти математическое ожидание суммы значений, выпавших на двух одновременно подброшенных кубиках.

Пусть случайная величина X = {значения, которые могут выпасть на верхней грани первого кубика}, случайная величина Y = {значения, которые могут выпасть на верхней грани второго кубика}. Найти $M(X + Y)$ суммы этих двух случайных величин можно двумя способами.

Первый способ (сложный) –построить закон распределения случайной величины $Z = X + Y$, а затем вычислить искомое математическое ожидание.

Второй способ (простой) – используя свойство 3.

Мы вычислили математическое ожидание случайной величины X – значения грани, выпавшей на кубике.

$$M(X) = M(Y) = 3.5.$$

Тогда $M(X + Y) = 3.5 + 3.5 = 7.$

Свойства математического ожидания

Дана случайная величина $Z = 3 + 2 \times X$, где X – случайная величина с $M(X) = 5$. Вычислить математическое ожидание величины Z.

Используя свойства 1 и 2 математического ожидания, имеем:

$$M(Z) = M(3 + 2 \cdot X) = M(3) + M(2 \cdot X) =$$

$$= 3 + 2 \cdot M(X) = 3 + 2 \cdot 5 = 13.$$

Дисперсия случайной величины

Найдем дисперсию случайной величины *X* – значения грани, выпавшей на кубике.

Используя построенный ранее закон распределения этой случайной величины

X	1	2	3	4	5	6
p	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6

и вычисленное ее математическое ожидание

$$M(X) = 1/6 + 2/6 + 3/6 + 4/6 + 5/6 + 6/6 = 21/6 = 3.5.$$

получаем:

$$D(X) = 1/6 + 4/6 + 9/6 + 16/6 + 25/6 + 36/6 - 3.5^2 =$$

$$= 91/6 - 12.25 \cong 15.17 - 12.25 = 2.92.$$ ☻

Дисперсия случайной величины

Найти дисперсию случайной величины *Z*, возникающей при подбрасывании двух монет и равной числу выпавших гербов.

Используя построенный ранее закон распределения этой случайной величины

Z	0	1	2
p	1/4	1/2	1/4

и вычисленное ее математическое ожидание

$$M(Z) = 0 \cdot 1/4 + 1 \cdot 1/2 + 2 \cdot 1/4 = 1.$$

получаем:

$$D(Z) = 0 \cdot 1/4 + 1 \cdot 1/2 + 4 \cdot 1/4 - 1^2 = 1/2.$$

Дисперсия случайной величины

Задача Дискретная случайная величина ξ имеет только два возможных значения x_1 и x_2, которые она принимает с вероятностями $p_1 = 0.6$ и $p_2 = 0.4$ соответственно.

Найти ряд распределения величины ξ, если $M\xi = 1.4$ и $D\xi = 0.24$.

Решение. Учитывая формулы для математического ожидания и дисперсии, составим систему уравнений

$$\begin{cases} 0.6x_1 + 0.4x_2 = 1.4 \\ 0.6x_1^2 + 0.4x_2^2 - (1.4)^2 = 0.24 \end{cases}.$$

Система имеет два решения: $x_1 = 1$, $x_2 = 2$ и $x_1 = 1.8$, $x_2 = 0.8$.

Тогда ряд распределения имеет вид

x_i	1	2
p_i	0.6	0.4

или

x_i	0.8	1.8
p_i	0.4	0.6

Свойства дисперсии

Найти дисперсию суммы значений, выпавших на двух одновременно подброшенных кубиках.

Пусть случайная величина *X* = {значения верхней грани первого кубика}, случайная величина *Y* = {значения верхней грани второго кубика}. Дисперсии этих случайных величин одинаковы и равны 2.92. Так как эти величины независимы, то на основании свойства 4

$$D(X + Y) = 2.92 + 2.92 = 5.84.$$

Свойства дисперсии

Случайные величины X и Y независимы и имеют следующие числовые характеристики: $M(X) = 1$, $D(X) = 3$, $M(Y) = 2$, $D(Y) = 4$. Вычислить математическое ожидание и дисперсию случайной величины

$U = 3 \times X - 2 \times Y$.

Сначала вычислим математическое ожидание $M(U)$, используя известные свойства математического ожидания

$$M(U) = M(3 \cdot X - 2 \cdot Y) = 3 \cdot M(X) - 2 \cdot M(Y) = 3 \cdot 1 - 2 \cdot 2 = -1.$$

Затем вычислим дисперсию $D(U)$, используя известные свойства дисперсии:

$$D(U) = D(3 \cdot X - 2 \cdot Y) = 3^2 \cdot D(X) + (-2)^2 \cdot D(Y) =$$

$$= 9 \cdot 3 + 4 \cdot 4 = 43.$$

Среднее квадратическое отклонение

Д. с. в. X задана рядом распределения.

X	-1	0	1	2
p	$0,2$	$0,1$	$0,3$	$0,4$

Найти MX, DX, σ_X.

❍ Используем формулы (2.9), (2.13), (2.18): $MX = -1 \cdot 0,2 + 0 \cdot 0,1 + 1 \cdot 0,3 + 2 \cdot 0,4 = 0,9$; $DX = (-1-0,9)^2 \cdot 0,2 + (0-0,9)^2 \cdot 0,1 + (1-0,9)^2 \cdot 0,3 + (2-0,9)^2 \cdot 0,4 = 1,29$ (или, используя формулу (2.16), $DX = (-1)^2 \cdot 0,2 + 0^2 \cdot 0,1 + 1^2 \cdot 0,3 + 2^2 \cdot 0,4 - (0,9)^2 = 1,29$); $\sigma_X = \sqrt{1,29} \approx 1,14$. ●

Дисперсия случайной величины

Непрерывная случайная величина задана плотностью распределения

$$f_X(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x \leqslant 0 \text{ и } x > \pi, \\ \frac{1}{2}\sin x, & \text{при } 0 < x \leqslant \pi. \end{cases}$$

найти DX и σ_X

$$MX = \left[\int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\,dx\right] = \int_{-\infty}^{0} x\cdot 0\,dx + \int_{0}^{\pi} \frac{1}{2} x\sin x\,dx + \int_{\pi}^{\infty} x\cdot 0\,dx = \frac{1}{2}\int_{0}^{\pi} x\sin x\,dx = \frac{\pi}{2}.$$

$$DX = \left[\int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)\,dx - (MX)^2\right] = \int_{-\infty}^{0} x^2\cdot 0\,dx + \int_{0}^{\pi} x^2\cdot\frac{1}{2}\sin x\,dx + \int_{\pi}^{\infty} x^2\cdot 0\,dx -$$

$$-\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}\int_{0}^{\pi} x^2\sin x\,dx - \frac{\pi^2}{4} = \frac{1}{2}\left(-x^2\cos x\Big|_0^\pi + 2\left(x\sin x\Big|_0^\pi + \cos x\Big|_0^\pi\right)\right) -$$

$$-\frac{\pi^2}{4} = \frac{\pi^2}{2} - 2 - \frac{\pi^2}{4} = \frac{\pi^2}{4} - 2 \approx 0{,}467; \; \sigma_X = \sqrt{0{,}467} \approx 0{,}68.$$

Производящая функция

Производится 3 независимых выстрела по цели. Вероятности попадания при разных выстрелах одинаковы и равны $p = 0{,}9$. Найти м.о. числа попаданий. Решить задачу в случае, если вероятности попадания при разных выстрелах различны: а) $p_1 = 0{,}7$, б) $p_2 = 0{,}8$, в) $p_3 = 0{,}9$.

Найти дисперсию с. в. X — числа попаданий

Найдем DX, используя формулу (2.22). Производящая функция $\varphi(z) = 0{,}01 + 0{,}027z + 0{,}243z^2 + 0{,}729z^3$. Тогда $\varphi'(z) = 0{,}027 + 0{,}486z + 2{,}187z^2$. Полагая $z = 1$, находим $\varphi'(1) = 2{,}7 = MX$ (упражнение 1 из п. 2.5). $\varphi''(z) = 0{,}486 + 4{,}374z$. Поэтому $\varphi''(1) = 4{,}46$ и $DX = 4{,}86 + 2{,}7 - (2{,}7)^2 = 0{,}27$ (формула (2.22)).

Аналогично решаем во втором случае, когда вероятности при разных выстрелах различны (п. 1.20, пример 1.31). $\varphi(z) = 0{,}006 + 0{,}092z + 0{,}398z^2 + 0{,}504z^3$. $\varphi'(z) = 0{,}092 + 0{,}796z + 1{,}512z^2$, $\varphi'(1) = 2{,}4 = MX$. $\varphi''(z) = 0{,}796 + 3{,}024z$, $\varphi''(1) = 3{,}82$. Поэтому $DX = 3{,}82 + 2{,}4 - (2{,}4)^2 = 0{,}46$. ●