Лабораторная работа: Построение и визуализация фрактальных множеств

Понятие фрактала

Давайте для начала ответим на вопрос, а что же такое фрактал. На бытовом уровне фрактал – это множество, обладающее свойством самоподобия – множество, совпадающее с частью себя. Конечно, написанные слова нужно определить как-то более формально.

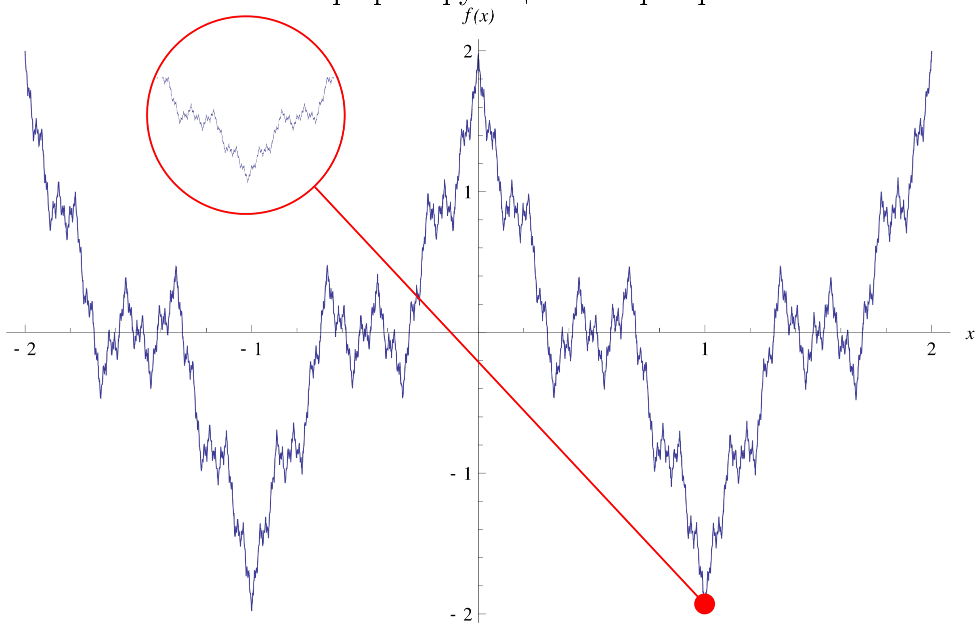
Определение 1 (Понятие фрактала) ***Фрактал*** *– это множество точек (евклидового) пространства, имеющие дробную метрическую размерность (Хаусдорфову или Минковского), или имеющие метрическую размерность, отличную от топологической.*

Многие объекты природы обладают фрактальными свойствами: это и облака, и кроны деревьев, и снежинки, и даже кочаны капусты (рисунок **??**).

Рис. 1: Капуста романеско

Оказывается, первые упоминания фракталов связаны с построением в XIX веке так называемой **функции Вейерштрасса** (и, вроде как, множества Кантора) – всюду непрерывной и нигде не дифференцируемой функции из $\mathbb{R}$ в $\mathbb{R}$ (рисунок **??**). Как видно, ее график обладает чертами самоподобия. Построение этой функции требует каких-никаких усилий, в отличие от построения непрерывной и нигде не дифференцируемой функции из $\mathbb{C}$ в $\mathbb{C}$ (например, $f(z) = \overline{z}$). В данной лабораторной работе

Рис. 2: График функции Вейерштрасса



вам предстоит визуализировать некоторые фракталы, построение которых можно осуществить средствами комплексного «анализа».

Множество Мандельброта

Рассмотрим последовательность комплексных чисел, заданную следующим образом:

$$z_{n+1} = z_n^2 + c, \quad z_0 = 0$$

Определение 2 (Понятие множества Мандельброта) *Множество всех $c \in \mathbb{C}$, при которых последовательность z_n остается ограниченной, называется* ***множеством Мандельброта****.*

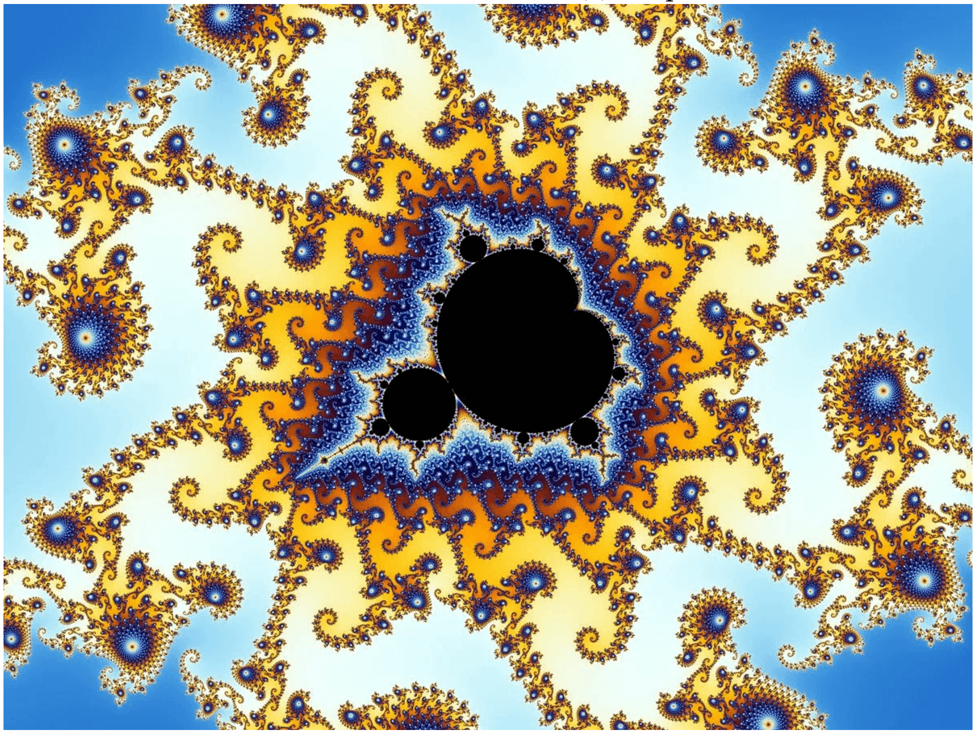
История данного множества (рисунок **??**) начинается с работ начала XX века французского математика Пьера Фату (1878 - 1929). В 1905 году Фату исследовал рекуррентные процессы и обнаружил, что написанная выше последовательность, в зависимости от начального условия, ведет себя достаточно хитро. Однако, в то время не существовало вычислительных средств, которые помогли бы визуализировать это поведение.

В 1975 году Бенуа Мандельброт, используя возможности компьютеров, смог создать первые графические изображения множества. В своей книге «Les Objets Fractals: Forme, Hasard et Dimension» он, описывая математические объекты с самоподобной структурой, ввёл термин «фрактал». Множество Мандельброта стало популярным в середине 1980-х годов благодаря компьютерной графике и стало чем-то вроде общепризнанного символа фрактальной геометрии.

Прежде чем перейти к алгоритму построению множества Мандельброта, рассмотрим несколько (его) свойств:

1. Множество Мандельброта переходит само в себя при сопряжении. Иными словами, оно симметрично относительно вещественной оси;

Рис. 3: Множество Мандельброта



2. Если $|c| > 2$, то c не принадлежит множеству Мандельброта;

Опишем алгоритм построения множества Мандельброта:

1. Берется ограниченная часть комплексной плоскости, разбивается равномерной сеткой. Узлы сетки будут отвечать пикселям визуализируемого изображения. Каждый узел сетки будет отвечать некоторой (своей) точке c.

2. Итеративным путём строится последовательность z_n. Понятно, что итерировать до бесконечности не получится. Введем ограничение на число итераций M, а также условие «убегания» точки: модуль z_n не должен превосходить 2 (следствие свойства 2).

3. В случае, если за M итераций не произошло «убегания», считаем, что c и $\bar{c}$ (свойство 1) принадлежат множеству Мандельброта, а соответствующие пиксели закрашиваем.

4. Для получения красочных картинок, можно окрашивать пиксели в какой-нибудь из цветов выбранного вами градиента в зависимости от того, на какой итерации произошла остановка.

Множество Жюлиа

Рассмотрим некоторое отображение $f : \mathbb{C}P^1 \to \mathbb{C}P^1$ из сферы Римана в неё же, представимое в виде отношения двух комплексных полиномов p и q (короче – рациональную функцию). Сначала введем понятие итерации.

Определение 3 (Понятие итерации) *n-ой итерацией функции f назовем*

$$f^n(z) = \underbrace{(f \circ f \circ \dots \circ f)}_{n \text{ раз}}(z).$$

Введем теперь понятие устойчивости (по Ляпунову) для итерации.

Определение 4 (Понятие устойчивости итерации) *Говорят, что итерации f устойчивы в z_0, если*

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta : \; \forall z : |z - z_0| < \delta \quad |f^n(z) - f^n(z_0)| < \varepsilon \; \forall n \in \mathbb{N}.$$

Теперь мы готовы ввести понятие множества Жюлиа.

Определение 5 (Понятие множества Жюлиа) ***Множеством Жюлиа*** *называют множество точек, в которых итерации рациональной функции f* ***неустойчивы****, и обозначают $J(f)$.*

Итак, множество Жюлиа – это те точки, небольшое отступление от которых сильно меняет поведение итерации. Как и множество Мандельброта, множество Жюлиа имеет фрактальную структуру, содержит все свои предельные точки, а также может быть «растянуто» из любой окрестности точки на все множество.

В случае, когда f является полиномом (знаменатель константа), вводят определение заполненного множества Жюлиа $K(f)$ точек, «не убегающих на бесконечность» (рисунок **??**):

$$K(f) = \{z \in \mathbb{C} : \; \exists R : \; \forall n \in \mathbb{N} \;\; |f^n(z)| \leqslant R < +\infty\}$$

Заполненное множество Жюлиа примечательно тем, что обычное множество Жюлиа является его границей ($\partial K(f) = J(f)$)

В нашей работе мы рассмотрим семейство частных примеров, для которых можно вернуться от сферы Римана обратно к комплексной плоскости:

$$f(z) = z^2 + c.$$

В этом случае, для непустоты $K(f)$, можно сделать оценку на R: достаточно, чтобы $R^2 - R \geqslant |c|$.

Опишем алгоритм построения заполненного множества Жюлиа:

1. Исходя из $\mathbb{R}$, берется ограниченная часть комплексной плоскости, разбивается равномерной сеткой.

2. Для каждого узла сетки z начнем итеративный процесс $f^n(z)$. Введем ограничение на число итераций, а так же условия «убегания» аналогично тому, как это было при построении множества Мандельброта.

3. Неубежавшие точки добавим в наше множество и раскрасим. Для получения красочных картинок, можно окрасить убежавшие точки в зависимости от номера итерации, на которой были нарушены ограничения.

Рис. 4: Множество Жюлиа

Задание

Итак, ваше задание.

1. Докажите свойства 1 и 2 для множества Мандельброта.

2. Напишите программу, которая будет строить визуализацию множества Мандельброта. Выберите разумные ограничения, поварьируйте максимальное количество итераций. Попробуйте приблизить отдельные части множества, чтобы увидеть фрактальную структуру.

3. Напишите программу, которая по заданному c строит заполненное множество Жюлиа. Поварьируйте максимальное количество итераций, попробуйте понаблюдать фрактальную структуру, рассмотрите множество при разных c. (Например, красиво получается при $c = -0.5251993 + i0.5251993$).

4. Найдите какой-нибудь неразобранный фрактал (например, бассейны Ньютона). Опишите его структуру, построение. Нарисуйте визуализации. Будьте готовы выступить с докладом перед своими одногруппниками.

Отчет

Отчет должен состоять из:

1. Доказательства свойств для множества Мандельброта.
2. Кода программ для построения множеств Мандельброта и Жюлиа.
3. Набора изображений, построенных при разном числе итераций и приближении.
4. Текста-описания структуры и построения ранее неразобранного фрактала. Его визуализации.