15.1) В результате эксперимента получены данные, записанные в виде статистического ряда. Требуется:

а) записать значения результатов эксперимента в виде вариационного ряда;

б) найти размах варьирования и разбить его на 9 интервалов;

в) построить полигон частот, гистограмму относительных частот и график эмпирической функции распределения;

г) найти числовые характеристики выборки: $\bar{x}$, $D_в$;

д) приняв в качестве нулевой гипотезу H_0: генеральная совокупность, из которой извлечена выборка, имеет нормальное распределение, проверить ее, пользуясь критерием Пирсона при уровне значимости $\alpha = 0{,}025$;

е) найти доверительные интервалы для математического ожидания и среднего квадратического отклонения при надежности $\gamma = 0{,}9$.

0,86	1,04	1,45	1,31	1,22	1,09	0,73	1,11	0,95	0,84
0,96	0,78	1,23	1,13	1,04	1,44	1,32	1,29	0,68	0,86
1,33	1,08	0,87	0,67	1,28	0,97	1,14	0,83	1,33	1,40
1,24	1,43	0,98	1,34	0,81	0,88	1,10	0,70	1,15	1,23
1,34	1,09	0,80	1,16	1,24	0,75	0,99	1,41	0,88	0,79
1,36	1,25	0,89	1,26	1,42	1,35	0,80	1,17	0,90	1,00
1,11	0,69	1,18	0,82	1,01	0,90	1,36	1,25	0,67	0,91
1,37	1,02	0,92	1,27	1,19	1,38	1,46	0,93	1,27	0,83
1,04	1,11	1,47	1,07	0,72	0,93	1,26	0,77	1,20	1,28
0,77	1,10	0,95	1,05	1,08	1,11	1,10	1,48	1,07	0,92

Решение: Запишем значения результатов эксперимента в виде вариационного ряда, разместив значения в порядке возрастания.

№ п/п	x_i	№ п/п	x_i	№ п/п	x_i	№ п/п	x_i	№ п/п	x_i
1	0,67	21	0,86	41	1,02	61	1,15	81	1,31
2	0,67	22	0,87	42	1,04	62	1,16	82	1,32
3	0,68	23	0,88	43	1,04	63	1,17	83	1,33
4	0,69	24	0,88	44	1,04	64	1,18	84	1,33
5	0,70	25	0,89	45	1,05	65	1,19	85	1,34
6	0,72	26	0,90	46	1,07	66	1,20	86	1,34
7	0,73	27	0,90	47	1,07	67	1,22	87	1,35
8	0,75	28	0,91	48	1,08	68	1,23	88	1,36
9	0,77	29	0,92	49	1,08	69	1,23	89	1,36
10	0,77	30	0,92	50	1,09	70	1,24	90	1,37
11	0,78	31	0,93	51	1,09	71	1,24	91	1,38
12	0,79	32	0,93	52	1,10	72	1,25	92	1,40
13	0,80	33	0,95	53	1,10	73	1,25	93	1,41
14	0,80	34	0,95	54	1,10	74	1,26	94	1,42
15	0,81	35	0,96	55	1,11	75	1,26	95	1,43
16	0,82	36	0,97	56	1,11	76	1,27	96	1,44

17	0,83	37	0,98	57	1,11	77	1,27	97	1,45
18	0,83	38	0,99	58	1,11	78	1,28	98	1,46
19	0,84	39	1,00	59	1,13	79	1,28	99	1,47
20	0,86	40	1,01	60	1,14	80	1,29	100	1,48

Найдем размах варьирования. По данным задачи: $x_{min} = 0,67$; $x_{max} = 1,48$.

$R = x_{max} - x_{min} = 1,48 – 0,67 = 0,081$.

Составим интервальный статистический ряд распределения случайной величины, разбив размах варьирования на 9 интервалов.

Величину интервала найдем по формуле $h = \frac{R}{m} = 0,081 : 9 = 0,09$.

Первый интервал будет таким: [0,67; 0,67 + 0,09] = [0,67; 0,76],
второй интервал: [0,76; 0,76+0,09] = [0,76; 0,85] и т.д.

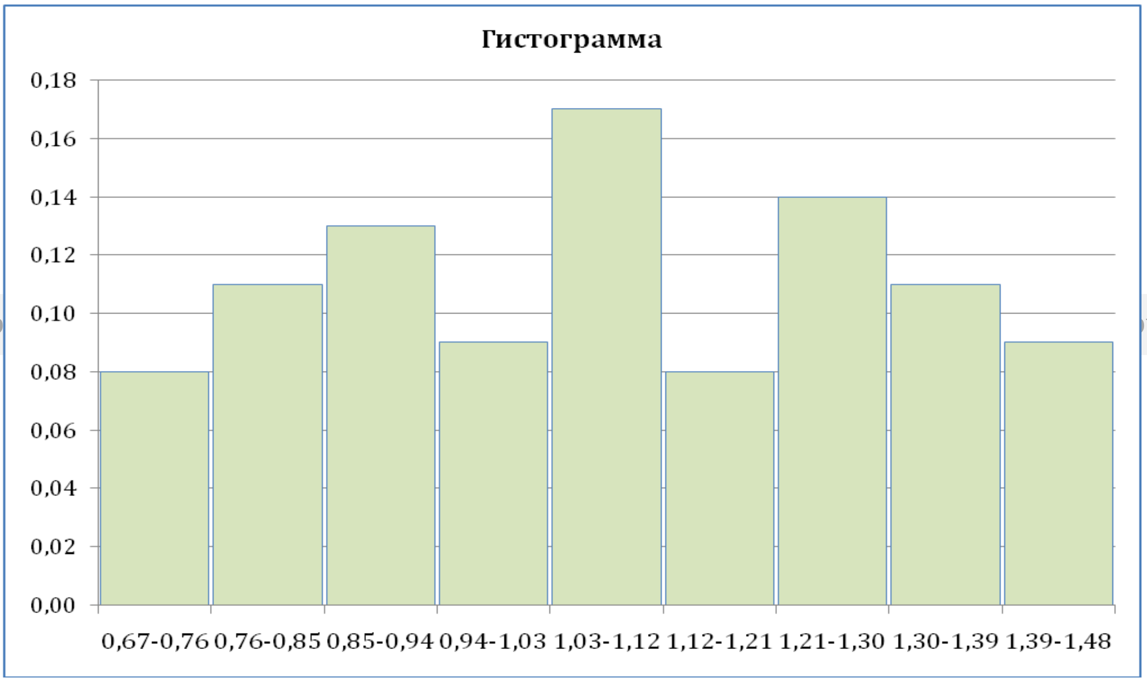
Подсчитаем количество вариантов признака в каждом интервале. Вычислим середины интервалов, сложив начало и конец интервала и разделив результат на 2. Относительные частоты найдем, разделив частоты интервалов на общую сумму частот.

Получим следующий интервальный ряд распределения случайной величины.

Интервал	0,67-0,76	0,76-0,85	0,85-0,94	0,94-1,03	1,03-1,12	1,12-1,21	1,21-1,30	1,30-1,39	1,39-1,48	Сумма
Частота в интервале, n_i	8	11	13	9	17	8	14	11	9	100
Относительная частота	0,08	0,11	0,13	0,09	0,17	0,08	0,14	0,11	0,09	
Накопленная частота	0,08	0,19	0,32	0,41	0,58	0,66	0,80	0,91	1,00	
Середина интервала, x_i	0,715	0,805	0,895	0,985	1,075	1,165	1,255	1,345	1,435	

Построим полигон частот. Для этого по горизонтальной оси отложим середины интервалов, а по вертикальной – частоты интервала.

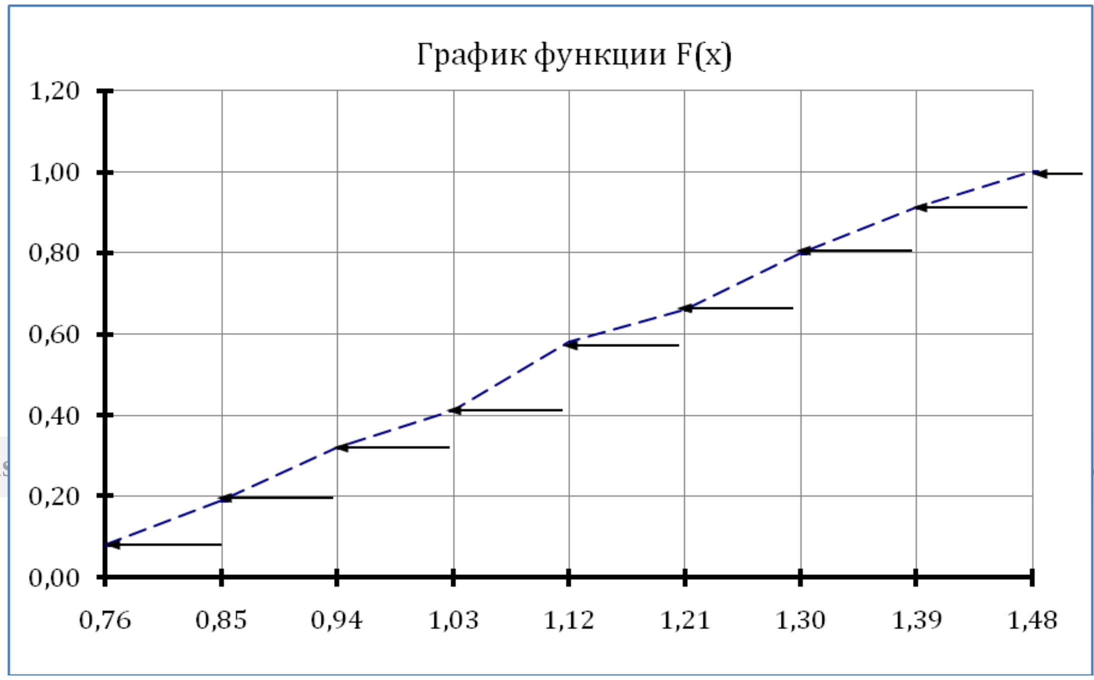
Построим гистограмму относительных частот. Для этого по горизонтальной оси отложим интервалы изменения признака, а по вертикальной – относительные частоты интервала.



Запишем эмпирическую функцию распределения и построим ее график.

$$F^*(x)=\begin{cases}0, \text{если } x<0{,}67;\\ 0{,}08, \text{если } 0{,}67\le x<0{,}76;\\ 0{,}19, \text{если } 0{,}76\le x<0{,}85;\\ 0{,}32, \text{если } 0{,}85\le x<0{,}94;\\ 0{,}41, \text{если } 0{,}94\le x<1{,}03;\\ 0{,}58, \text{если } 1{,}03\le x<1{,}12;\\ 0{,}66, \text{если } 1{,}12\le x<1{,}21;\\ 0{,}80, \text{если } 1{,}21\le x<1{,}30;\\ 0{,}91, \text{если } 1{,}30\le x<1{,}39;\\ 1, \quad \text{если } x\ge 1{,}39.\end{cases}$$

Получим следующий график.



Найдем выборочную среднюю, выборочную дисперсию и выборочное среднее квадратическое отклонение. Выборочную среднюю найдем по формуле:

$\bar{x} = \dfrac{\sum_{i=1}^{m} y_i \cdot n_i}{n}$, где n - объем выборки, m - количество интервалов, y_i - середина интервала.

Выборочную дисперсию найдем по формуле: $D_в = \dfrac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{m}(y_i - \bar{x})^2 \cdot n_i$

Составим расчетную таблицу:

Интервал	0,67-0,76	0,76-0,85	0,85-0,94	0,94-1,03	1,03-1,12	1,12-1,21	1,21-1,30	1,30-1,39	1,39-1,48	Сумма
Середина интервала, y_i	0,715	0,805	0,895	0,985	1,075	1,165	1,255	1,345	1,435	
$y_i \cdot n_i$	5,720	8,855	11,635	8,865	18,275	9,320	17,570	14,795	12,915	107,950
$(y_i - \bar{x})^2 \cdot n_i$	1,0658	0,8319	0,4449	0,0812	0,0004	0,0578	0,4287	0,7725	1,1342	4,8174

Получаем: $\bar{x}$ = 107,95 : 100 ≈ 1,08; $D_в$ = 4,8174 : (100 − 1) = 0,0487.

Вычислим среднее квадратическое отклонение $\sigma_в = \sqrt{D_в} = \sqrt{0{,}0487} = 0{,}2207$

Примем в качестве нулевой гипотезу H_0: генеральная совокупность, из которой извлечена выборка, имеет *нормальное распределение*

Проверим ее, пользуясь критерием Пирсона при уровне значимости α = 0,025.

Теоретические частоты нормального закона распределения найдем по формуле: $n' = \dfrac{n \cdot h}{\sigma} \cdot \phi(u_i)$. Значения функции φ($x$) будем находить по таблицам стандартной нормальной функции распределения.

Проверим гипотезу о нормальном распределении исследуемой случайной величины с помощью критерия Пирсона.

$\chi^2 = \sum_{i=1}^{n} \frac{(n_i - n_i')^2}{n_i'}$, где n_i – эмпирические частоты, n_i' - теоретические частоты нормального закона распределения, которые будем находить по формуле:

Все расчеты представим в таблице:

n_i	y_i	$u_i = \frac{y_i - \bar{x}}{\sigma}$	$\phi(u_i)$	n_i'	$\frac{(n_i - n_i')^2}{n_i'}$
8	0,715	-1,6538	0,1016	4	4,000
11	0,805	-1,2460	0,1836	7	2,286
13	0,895	-0,8382	0,2808	11	0,364
9	0,985	-0,4304	0,3637	15	2,400
17	1,075	-0,0227	0,3988	16	0,063
8	1,165	0,3851	0,3704	15	3,267
14	1,255	0,7929	0,2913	12	0,333
11	1,345	1,2007	0,1940	8	1,125
9	1,435	1,6085	0,1094	4	6,250
100				92	20,088

Итак, $\chi^2_{набл}$ = 20,088. Найдем число степеней свободы: 9 – 1 – 2 = 6.

По таблице критических точек распределения χ^2 по уровню значимости, равному 0,025 и числу степеней свободы, равному 6 найдем $\chi^2_{крит}$ = 14,449.

Поскольку наблюдаемое значение критерия больше критического значения, то степень расхождения теоретических и эмпирических частот значима и гипотезу о нормальном распределении случайной величины *следует отвергнуть*.

Найдем доверительный интервал для математического ожидания для нормального распределения и неизвестной дисперсии. Воспользуемся формулой:

$\bar{x}_в - \frac{1}{\sqrt{n}} \cdot t_{\gamma;n} \cdot s < M(X) < \bar{x}_в + \frac{1}{\sqrt{n}} \cdot t_{\gamma;n} \cdot s$, где $\bar{x}$ = 1,08, n = 100, s = 0,2207.

Значение $t(\alpha;k)$ найдем по таблицам t–распределения Стьюдента.

$\alpha = 1 - \gamma$ = 1 – 0,9 = 0,1 и k = 100 – 1 = 99.

Получим: $t_{\frac{\alpha}{2};\nu} = t_{0,05;99}$ = 1,984.

$\Delta x = \frac{1}{\sqrt{100}} \cdot 1,984 \cdot 0,2207 \approx 0,04.$

Получим: 1,08 – 0,04 < $M(x)$ < 1,08 + 0,04 или 1,04 < $M(x)$ < 1,12.

Построим доверительный интервал для среднего квадратического отклонения.

Применим формулу: $\frac{n-1}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2};\nu}} \cdot s < \sigma < \frac{n-1}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2};\nu}} \cdot s$, где $\nu = n$ – 1 = 100 – 1 = 99.

$$\frac{100-1}{\chi^2_{\frac{0,1}{2};99}}\cdot 0,2207<\sigma<\frac{100-1}{\chi^2_{1-\frac{0,1}{2};99}}\cdot 0,2207\Rightarrow\frac{99}{123,23}\cdot 0,2207<\sigma<\frac{99}{77,05}\cdot 0,2207$$

Получим: $0,1978\le\sigma\le 0,2502$.