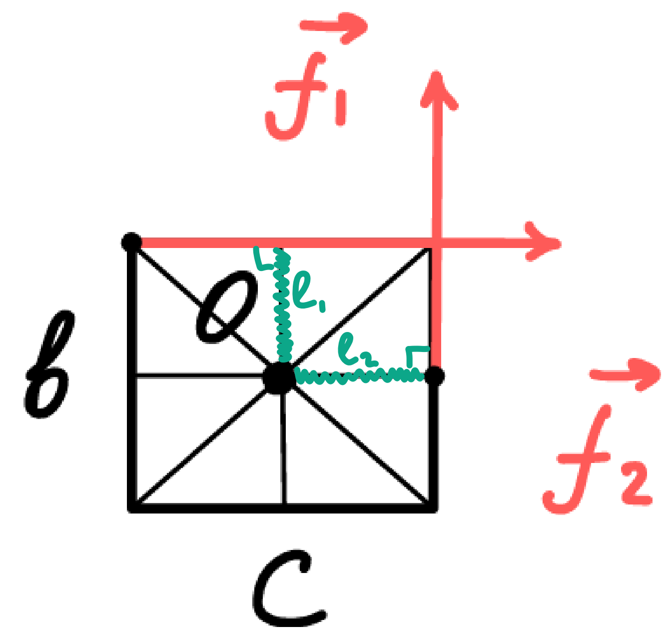
Поступательное движение

Задача №1

Поступательное движение прямоугольной пластины массы m по гладкому столу обеспечивается действием двух сил $\vec{f}_1$ и $\vec{f}_2$. Векторы $\vec{f}_1$ и $\vec{f}_2$ расположены в плоскости стола. Определите ускорение пластины a. то бишь дано: $m_{кг}$, $b_м$, $c_м$, f_1 H; Ищем a

// летс гоу!!

Рисунок тоже дан свыше



Начнем со старого-доброго II-го закона

$$m\vec{a} = \vec{F} = \vec{f}_1 + \vec{f}_2$$

при этом $\vec{f}_1 \perp \vec{f}_2$ этим цветом будут формулы, ну которые общепринятые

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2} = \sqrt{f_1^2 + f_2^2} \Longrightarrow a = \frac{\sqrt{f_1^2 + f_2^2}}{m}$$

Осталось выразить f_2 через f_1 используя сакральные знания о моментах сил

Старик Хинкалыч напоминает:

- момент силы – $M = \overset{сила}{f} \cdot l$ ← "плечо" - расстояние от точки O до линия действия силы
- $\sum_i M_i = 0$ – тело находится в равновесии (т.е. не двигается и/или не крутится)
- моменты, которые крутят против часовой берём с плюсом, против - с минусом

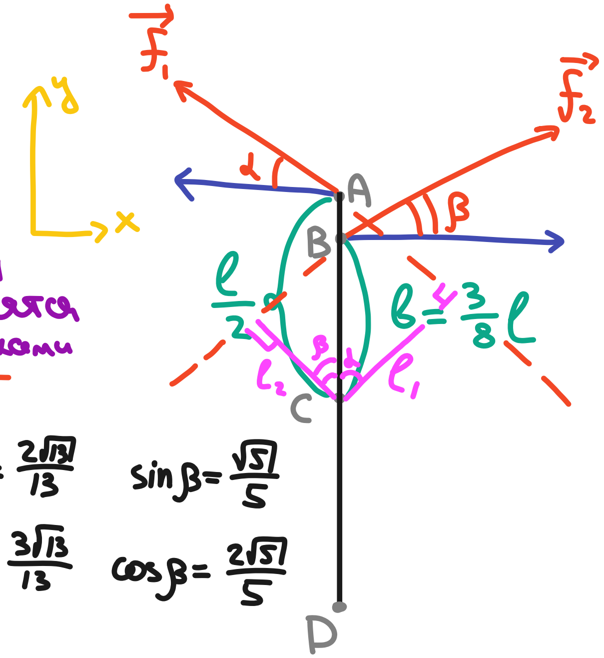
Вернемся к задаче: тело движется поступательно => не вертится =>

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{2} M_i = 0 \Rightarrow M_{f_1} - M_{f_2} = 0 \Rightarrow f_1 \cdot l_1 - f_2 \cdot l_2 = 0 \Rightarrow f_1 \cdot \frac{b}{2} = f_2 \cdot \frac{c}{2} \Rightarrow f_2 = \frac{b}{c} \cdot f_1$$

Итого: $a = \frac{\sqrt{f_1 + f_2}}{m} = \frac{\sqrt{f_1 \cdot (1 + \frac{b}{c})}}{m}$ победа!

Задача № 2

Поступательное движение стержня массы m длины l по гладкому столу обеспечивается действием двух сил $\vec{f_1}$ и $\vec{f_2}$. Векторы $\vec{f_1}$ и $\vec{f_2}$ расположены в плоскости стола. $AB = b$, $AC = CD = l/2$. Определите ускорение стержня a. ТО БИШЬ дано: $m, l, \alpha, \beta, b, f_1$; Ищем a



размеры соотносятся с клетками
⇓

$\sin\alpha = \frac{2\sqrt{13}}{13}$ $\quad \sin\beta = \frac{\sqrt{5}}{5}$

$\cos\alpha = \frac{3\sqrt{13}}{13}$ $\quad \cos\beta = \frac{2\sqrt{5}}{5}$

Камон! IIой закон: $m\vec{a} = \vec{F}$

$\vec{F} = \vec{f_1} + \vec{f_2}$ силы направлены криво

поэтому считаем F_x и F_y через проекции

$$F_x = f_2 \cdot \cos\beta - f_1 \cdot \cos\alpha$$

$$F_y = f_1 \cdot \sin\alpha + f_2 \cdot \sin\beta$$

опять выражаем f_2 через f_1 с помощью моментов:

там сложнейшая геометрия я розовым нарисовал, что влезло

$$f_2 \cdot l_2 - f_1 \cdot l_1 = 0 \Rightarrow f_2 \cdot \cos\beta \cdot \frac{3}{8}l = f_1 \cdot \cos\alpha \cdot \frac{l}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f_2 = f_1 \cdot \frac{\cos\alpha}{\cos\beta} \cdot \frac{4}{3}$$

дальше по отработанной:

$$a = \frac{F}{m} = \frac{\sqrt{F_x^2 + F_y^2}}{m} = \frac{\overbrace{\sqrt{f_2^2 \cdot \cos^2\beta - f_1^2 \cdot \cos^2\alpha + f_1^2 \cdot \sin^2\alpha + f_2^2 \cdot \sin^2\beta}}^{\text{баля}}}{m} =$$

$$= \frac{f_1}{m} \cdot \sqrt{\frac{16}{9} \cos^2\alpha - \cos^2\alpha + \sin^2\alpha + \frac{16}{9} \cdot \cos^2\alpha \cdot tg^2\beta}$$

ну типо вот хз

Моменты инерции

Задача №3

Определите момент инерции плоского тела относительно выделенной оси OO'. Тело составлено из одинаковых стержней. Масса каждого стержня m, длина l. то бишь даны m, l

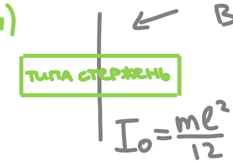
теоритическая справка от Мамы Ромы

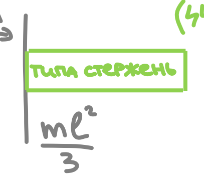
момент инерции – $I = \sum_i m_i r_i$ (масса; ← расстояние от массы до оси вращения)

на деле мы разбиваем нашу хитровыебанную фигуру на маленькие т.е. $I = \sum_i I_i$, а I_i считаем по теореме Штейнера (см. подсказку)

Подсказка от Старика Хинкалыч

по теореме Штейнера некоторые дефолтные моменты инерций известные табличные величины (и на КР их можно спросить), а в целом теорема (44) говорит, что

(4) 



$I = I_0 + md^2$, где d – расстояние до оси, а I_0 см. 4

Стартуем решение задачи:

Распишем момент фигуры на сумму моментов стержней:

$I = I_1 + \ldots + I_6$ теперь рассмотрим все I_i

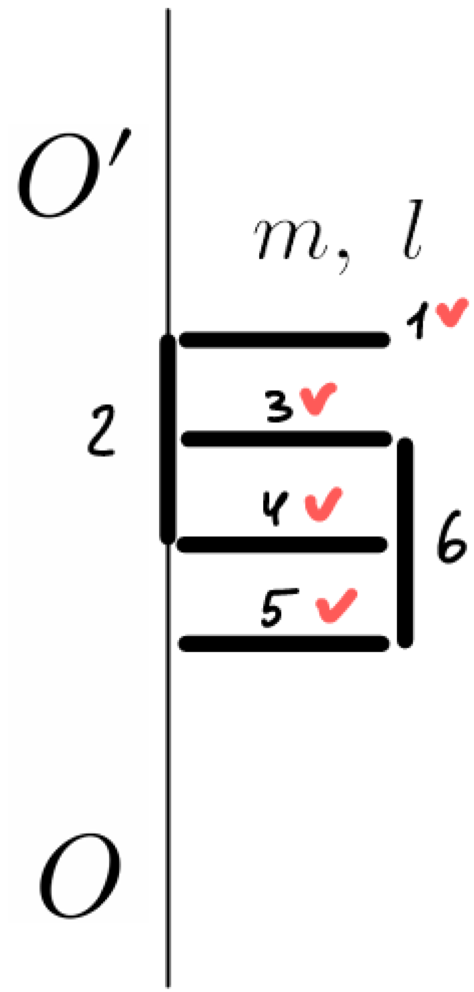
Заметим, что $I_2 = 0$ т.к. 2ой стержень лежит на оси

Далее: $I_1 = I_3 = I_4 = I_5 = \frac{ml^2}{3}$ (см. (44))

При этом: $I_6 = ml^2$ т.к. 6ой стержень паралелен OO'

$\Rightarrow$ Итого: $I = \sum_{i=1}^{6} I_i = 0 + \frac{ml^2}{3} \cdot 4 + ml^2 = \frac{7}{3} ml^2$

гоооооол!



Задача №4

Определите момент инерции плоского тела массы m относительно выделенной оси OO'. 6.

// отправляемся

Для начала заметим, что: $m_{квадратика} = \frac{m}{6}$

Разобьем момент на сумму моментов квадратиков: $I=\sum\limits_{i=1}^{6} I_i$

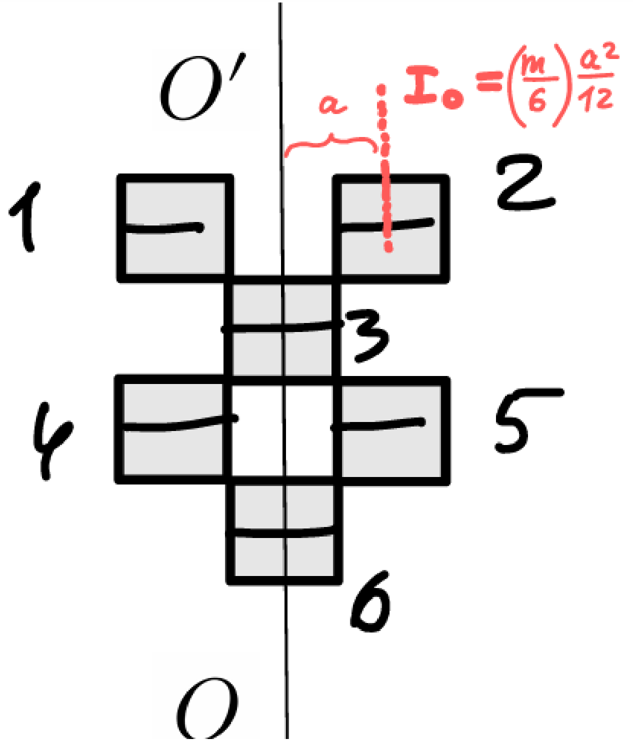
И теперь выясним кто тупой, а кто совсем дибил

- $I_3 = I_6 = \frac{\frac{m}{6}\cdot a^2}{12} = \frac{ma^2}{72}$ (эти квадратики крутятся вокруг себя) см. 4

- $I_2 = I_1 = I_4 = I_5 = \underbrace{I_0}_{\text{в нашем случае } I_3} + \left(\frac{m}{6}\right)\cdot \overbrace{a^2}^{\text{расстояние до оси}} = \left(\frac{m}{6}\right)\cdot \frac{a^2}{12} + \frac{ma^2}{6} = \frac{13}{72}ma^2$

Ну и всё, осталось просто сложить:

$I = \frac{ma^2}{72}\cdot 2 + \frac{13ma^2}{72}\cdot 4 = \frac{3}{4}ma^2$ гооол!



ХЗ, НУ ПУСТЬ БУДУТ ЦИЛИНДРЫ

Задача № 5

Сплошной однородный цилиндр массы m, радиуса R раскрутили до угловой скорости ω_0. Ось вращения цилиндра совпадает с осью его симметрии. Момент силы трения в оси цилиндра равен M.

Определите:
1) Начальную кинетическую энергию цилиндра.
2) Угловое ускорение цилиндра в процессе торможения.
3) Время вращения цилиндра.
4) Число полных оборотов цилиндра до остановки.

Дано: m, R, ω_0, M

// let's fucking go

Рядовой Табуретка телеграфировал нам несколько секретных формул

- $T = E_{к_{вращ}} = \frac{I\omega^2}{2}$ – кинетическая энергия вращающегося тела
- $I = \frac{mR^2}{2}$ – момент инерции цилиндра, вращающегося вокруг своей оси
- $M = I \cdot \varepsilon$ – момент силы, где ε угловое ускорение
- $\varphi(t) = \omega_0 t + \frac{\varepsilon t^2}{2} = \frac{\omega_{кон}^2 - \omega_0^2}{2\varepsilon}$ – пройденный угол (ну правила те же, что и для обычного пути)
- $\omega(t) = \omega_0 + \varepsilon t = \frac{\partial \varphi}{\partial t}$ – угловая скорость (вау прямо как обычная!)

1) $T = \frac{I_0\omega_0^2}{2} = \frac{mR^2 \cdot \omega_0^2}{4}$ (ну буквально две первые формулы из Табуретковских)

тут берем $-|M|$ типо чтоб ε отрицательное

2) $-|M| = I_0 \cdot \varepsilon \Rightarrow \varepsilon = \frac{-|M|}{I_0} = \frac{-2|M|}{mR^2}$ ($\varepsilon < 0$! т.к. торможение)

движения закончится, когда остановимся

3) $\omega = \omega_0 + \varepsilon t = \omega_0 - \frac{2|M|}{mR^2} t = 0 \Rightarrow t_\star = \frac{\omega_0 m R^2}{2|M|}$

ну число оборотов это пройденный угол на длину оборота
невероятно...
0 т.к. остановились

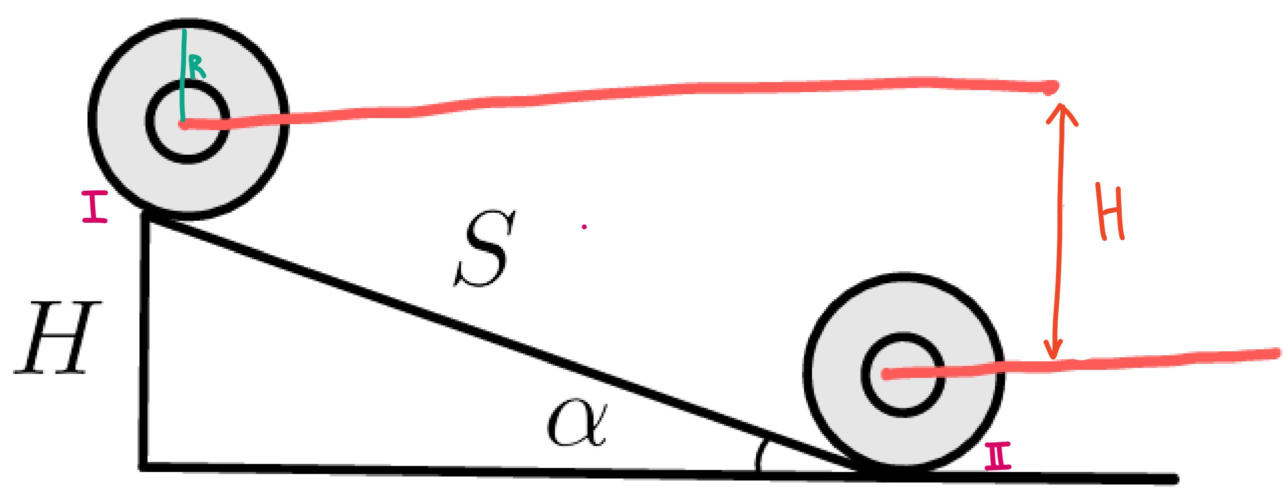
4) $N = \frac{\varphi}{2\pi} = \frac{\omega^2 - \omega_0^2}{4\pi\varepsilon} = -\frac{\omega_0^2}{4\pi\varepsilon} = \frac{m\omega_0^2 R^2}{8\pi|M|}$

// fuck, yeah!

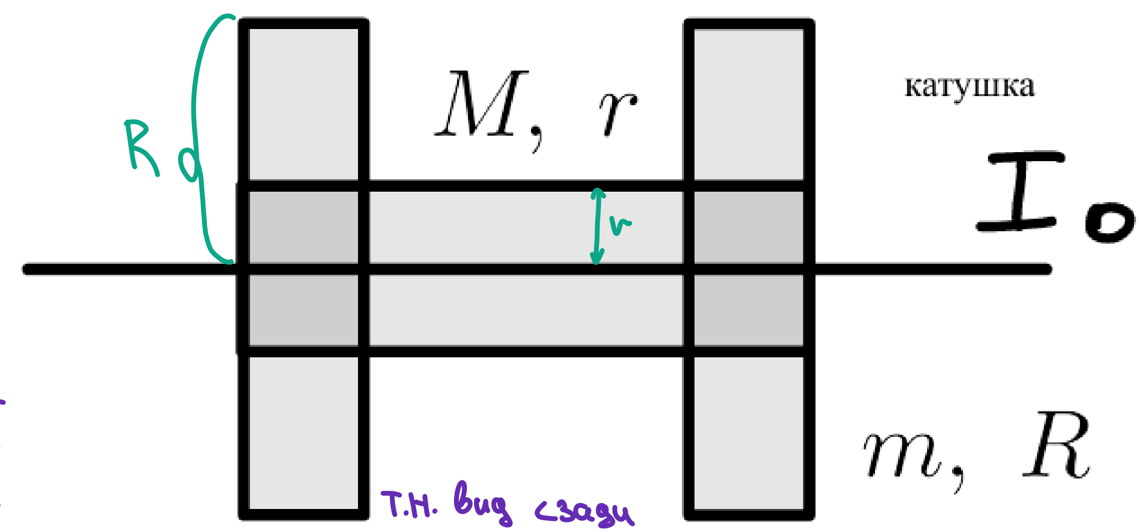
Задача № 666

Катушка составлена из двух дисков массы m, радиуса R и однородного цилиндра массы M, радиуса r. Скатывается с наклонной плоскости высоты H, длины S без начальной скорости. Определите угловую скорость вращения катушки, которую она приобрела в процессе движения по наклонной плоскости. Сила трения сцепления обеспечивает движение катушки без проскальзывания.

Дано: m, R, M, r, H, S



ммм, картинки



// На старт... внимание... фарш!

Когда тело катится то там есть и то, и это

В положении I у катушки есть только потенциальная энергия, а в II – только кинетическая, причем $E_к = E_{вращ} + E_{пост}$

формула $E_{пот}$ из школы

энергию никуда не проебывали => она не менялась => $E_{пот} = m_к g H = E_к = E_{вращ} + E_{пост} = \frac{m_к v^2}{2} + \frac{I_o \omega^2}{2}$ (тут $m_к = M + 2\cdot m$)

Вычислять момент мы уже профи: $I_o = 2\cdot I_{диск} + I_{цил} = 2\cdot\frac{mR^2}{2} + \frac{Mr^2}{2}$

Перед финалом вспомним формулку: $v = \omega\cdot R$; теперь распидарасим уравнение энергий

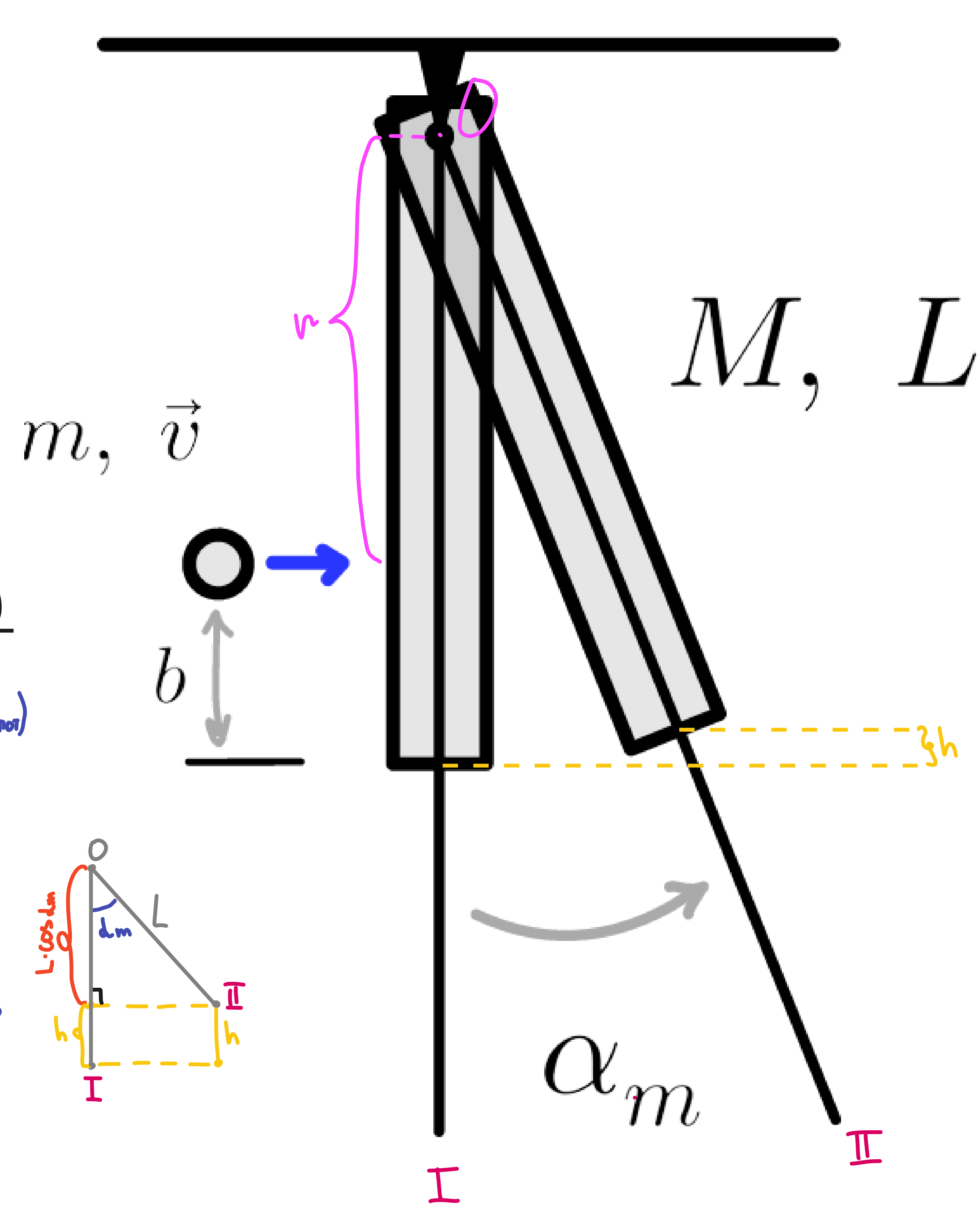
yummy!

$$m_к g H = \frac{m_к v^2}{2} + \frac{I_o\omega^2}{2} \Rightarrow m_к g H = \frac{m_к\cdot\omega^2\cdot R^2}{2} + \frac{I_o\cdot\omega^2}{2} \Rightarrow \omega^2 = \frac{2m_к g H}{m_к R^2 + I_o} \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{2m_к g H}{m_к R^2 + mR^2 + \frac{1}{2}\cdot Mr^2}}$$

ЕБУЧИЕ МАЯТНИКИ

Задача № 777

Стержень массы M, длины L подвешен за один из концов так, что он может свободно вращаться вокруг горизонтальной оси. На расстоянии b от нижнего конца стержня в него упруго ударяется шарик массы m. Определите угловую амплитуду α_m колебаний стержня, которые возникли в результате удара. то бишь дано: M, L, b, m ну и вроде $\vec{v}$



теоритическая вставка от Эмы с Дуолинго:

- $\vec{L} = I\cdot\vec{\omega}$ – момент импульса для вращающегося ся (чтоб не было конфликта: L - длина, L - момент импульса)
- $\vec{L} = \vec{p}\cdot r$ – момент импульса для материальной точки

// русские вперёд

По традиции импульсы для I и II равны => $L_I = L_{II}$ (*)

$L_I = mv(\overbrace{L-b}^{r})$ шарик летит

$L_{II} = -mv(L-b) + I\omega$ шарик отскакивает + стержень хуеет

а также по т. Штейнера $I = \frac{ML^2}{3}$ (см. 44)

(*) => $2mv(L-b) = I\omega$ => $\omega = \frac{2mv(L-b)}{I} = \frac{6mv(L-b)}{ML^2}$

Вновь энерго щуб: в I есть только T (она же $E_к$), в II только U (т.н. $E_{пот}$)

т.е. $T_I + \overset{=0}{U_I} = \overset{=0}{T_{II}} + U_{II}$ => $T_I = U_{II}$ =>

=> $\frac{I\omega^2}{2} = mgh$ => $h = \frac{I\omega^2}{2Mg}$

также h можно получить из геометрических изображений:

$L = L\cdot\cos\alpha_m + h$ => $h = L(1-\cos\alpha_m)$ => $\cos\alpha_m = 1 - \frac{2h}{L}$ =>

=> $\cos\alpha_m = 1 - \frac{I\omega^2}{MgL} = 1 - \frac{\frac{ML^2}{3}\cdot\frac{36\cdot m^2v^2(L-b)^2}{M^2L^4}}{MgL}$ =>

=> $\alpha_m = \arccos\left(1 - \frac{12(mv(L-b))^2}{gL}\right)$ //охуенно... во-во-воу

Задача № 88

Определите период колебаний физического маятника - гантели, которая состоит из стержня массы M, длины l и двух точечных шариков массы m. Точка A подвеса маятника отстоит от центра масс гантели (точки C) на расстоянии a. т.е. дано: M, l, m, a

// ну-с, будем

обозначим массу гантели: $m_0 = M + 2m$

у нас тут 0

Внезапный Вкид от Папаши Беппе: $I \cdot \varepsilon = M_{тяж} + M_{сопр}$ – основное уравнение динамики

точка, относительно которой флексим

при малых φ $\sin\varphi \approx \varphi$

ОФОРМЛЯЕМ Вкид: $I_A \cdot \frac{d^2\varphi}{dt^2} = -m_0 g a \varphi \Rightarrow \frac{d^2\varphi}{dt^2} + \underbrace{\frac{m_0 g a}{I_A}}_{=\omega_0^2} \cdot \varphi = 0$ почему? не ебу, но у Горбенко так

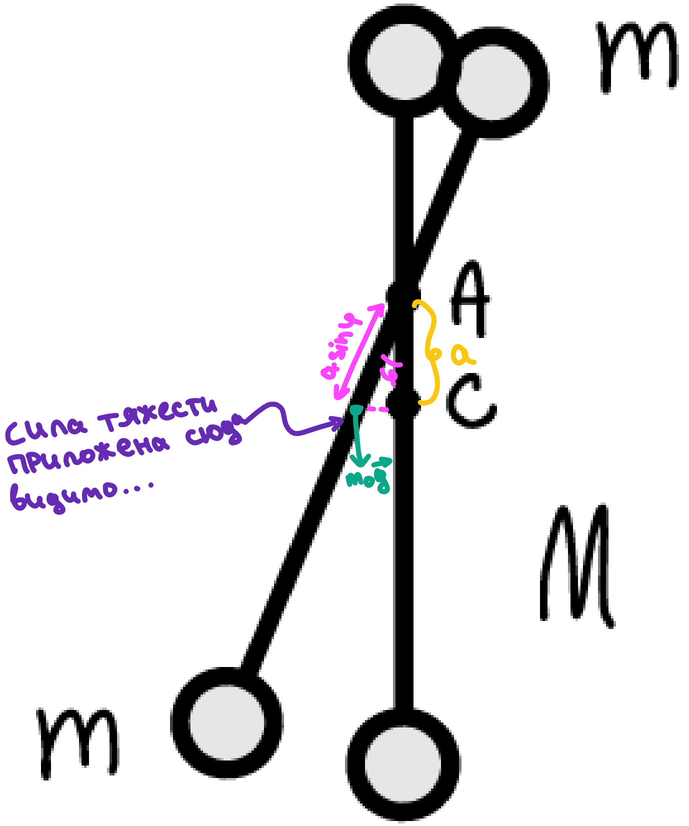
палка + шарик $= I_c$

ЗАМЕТИМ, ЧТО $I_A = I_c + m_0 a^2 = \frac{Ml^2}{12} + m\left(\frac{l}{2}\right)^2 \cdot 2 + (M+2m)a^2 \Rightarrow$

Ну это путь деленный на время просто под новым соусом

$$\Rightarrow \omega_0^2 = \frac{m_0 g a}{I_A} = m_0 g a \cdot \left(\frac{1}{12}Ml^2 + \frac{1}{2}ml^2 + (M+2m)a^2\right)^{-1}$$ при этом $T = \frac{2\pi}{\omega_0} \Rightarrow$

$$\Rightarrow T = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{1}{12}Ml^2 + \frac{1}{2}ml^2 + (M+2m)a^2} \cdot \left(\sqrt{m_0 g a}\right)^{-1}$$ //одна пиздаче другой //я в ахуи



Задача №9

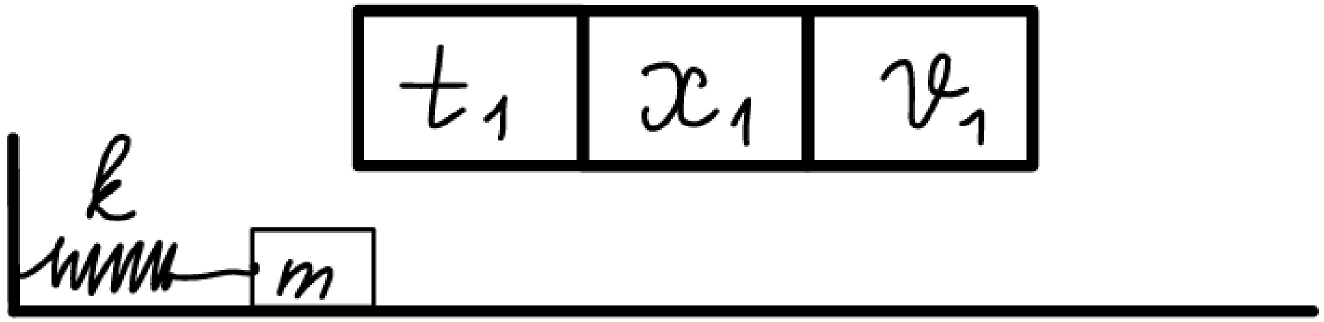
В момент времени t_1 отклонение свободного пружинного маятника было равно x_1, скорость v_1, а в момент времени t_2 - x_2, v_2. Определите: дано: $t_1, x_1, v_1, t_2, x_2, v_2$

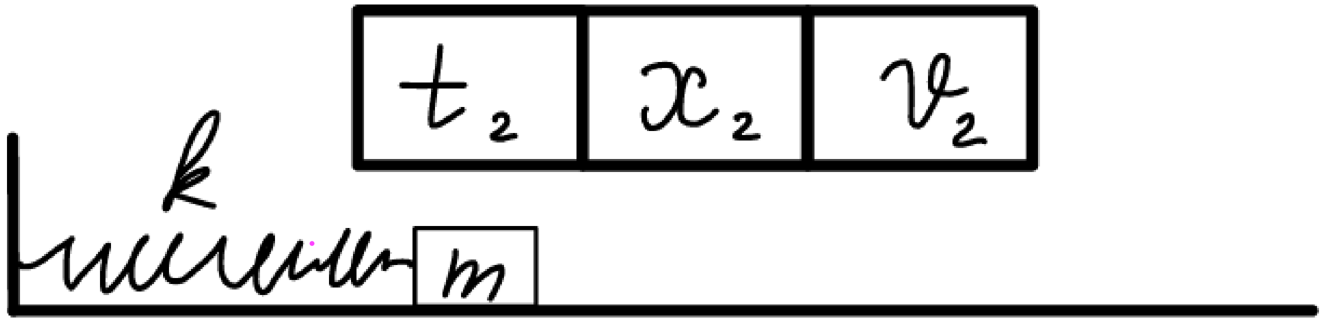
1) амплитуду маятника в процессе свободных незатухающих гармонических колебаний;

2) максимальную скорость маятника;

Виктор Баринов напоминает:

- $x(t) = A\cdot\cos(\omega t + \varphi_0)$ – уравнение гармонических колебаний
- $v(t) = x'(t) = -A\cdot\omega\cdot\sin(\omega t+\varphi_0)$ – скорость маятника
- коэффициент жесткости, смещение
- $E_{полн} = E_к + E_{пот} = \frac{mv^2}{2} + \frac{kx^2}{2}$ – полная энергия маятника
- $\frac{mv_{max}^2}{2} = \frac{kA^2}{2}$ – ну типичный энерго мув, когда $E_{пот}=0$ скорость максимальна, а при $E_к = 0$ $x = A$





// начинаем нашу кулинарную передачу

1) Запишем уравнения

$$x(t) = x_m\cdot\cos(\omega t+\varphi_0)$$

$$v(t) = -x_m\cdot\omega\cdot\sin(\omega t+\varphi_0)$$

можно не писать они не пригодятся

Теперь поговорим об энергии

$$\frac{mv_1^2}{2} + \frac{kx_1^2}{2} = \frac{mv_2^2}{2} + \frac{kx_2^2}{2} = \frac{kx_m^2}{2} = \frac{mv_m^2}{2} \quad \Big|: \frac{k}{2}$$

$$\frac{m}{k}v_1^2 + x_1^2 = \frac{m}{k}v_2^2 + x_2^2 = x_m^2 = \frac{m}{k}v_m^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{m}{k} = \frac{x_2^2 - x_1^2}{v_1^2 - v_2^2} \Rightarrow x_m^2 = \frac{m}{k}v_1^2 + x_1^2 \Rightarrow x_m^2 = \frac{x_2^2-x_1^2}{v_1^2-v_2^2}v_1^2 + x_1^2 = \frac{x_2^2v_1^2 - x_1^2v_1^2 + x_1^2v_1^2 - x_1^2v_2^2}{v_1^2-v_2^2} = \frac{x_2^2v_1^2 - x_1^2v_2^2}{v_1^2-v_2^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_m = \sqrt{\frac{x_2^2v_1^2 - x_1^2v_2^2}{v_1^2 - v_2^2}}$$

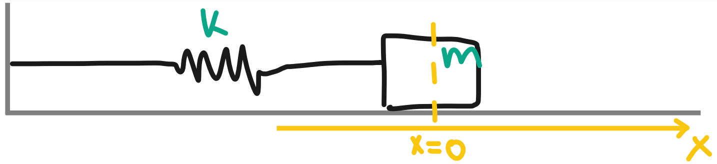
// ну было и было

это кстати как не странно формула ω

2) Уже известно $\frac{kx_m^2}{2} = \frac{mv_m^2}{2} \Rightarrow x_m^2 = \frac{m}{k}v_m^2 \Rightarrow v_m = \sqrt{\frac{k}{m}}\cdot x_m = \sqrt{\frac{v_1^2-v_2^2}{x_2^2-x_1^2}}\cdot\sqrt{\frac{x_2^2v_1^2 - x_1^2v_2^2}{v_1^2-v_2^2}} = \sqrt{\frac{x_2^2v_1^2 - x_1^2v_2^2}{x_2^2-x_1^2}}$

Задача №10/10

Колебания горизонтально расположенного пружинного маятника массы m на пружине жесткости k затухают под действием сухого трения. Известно, что за n колебаний амплитуда уменьшилась на $x_m(N) - x_m(N+n) = \Delta x$. Определите коэффициент трения μ. дано: $m, k, n, \Delta x$



// давай-давай, нападай

см. картинку

Амплитуда за каждый период уменьшается на ΔA,

а за n — уменьшилась на Δx $\Rightarrow$ $\Delta x = n \cdot \Delta A$

По формуле с картинки $\Delta A = 4\frac{F_{тр}}{m\omega_0^2} \Rightarrow \Delta x = 4n \cdot \frac{F_{тр}}{m\omega_0^2}$

При этом $F_{тр} = \mu m g \Rightarrow \Delta x = 4n \cdot \frac{\mu m g}{m\omega_0^2} = \frac{4\mu n g}{\omega_0^2}$

Но $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ (есть такая формула) $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \Delta x = 4\mu n g \cdot \frac{m}{k} \Rightarrow \mu = \frac{\Delta x \cdot k}{4 m \cdot n \cdot g}$$

// кто куда, а я по съёбам