תוכן העניינים

1

עקומים ומשטחים ריבועיים

בפרק זה נעסוק באפיון אלגברי של צורות גיאומטריות חשובות ונפוצות ב-$\mathbb{R}^2$ ו-$\mathbb{R}^3$. המשותף לכולן, הוא שניתן לבטאן כקבוצת האפסים של פולינומים ממעלות 2 ו-3, בהתאמה.

הגדרה 1.0.1. יהיו A, B קבוצות, ופונקציה $f : A \to B$. בהנתן $b \in B$, **קבוצת הרמה** של f עבור הערך b הוא הקבוצה

$$C_b = \{a \in A | f(a) = b\}.$$

שימו לב כי הקבוצה C_b עלולה להיות קבוצה ריקה.

בקורס שלנו נעסוק בעיקר בקבוצות רמה של פונקציות מהצורה $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ או $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, ובמקרה זה נכנה את קבוצות הרמה המתאימות בשמות **קוי רמה** ו**משטחי רמה**.

1.1 עקומים ריבועיים

הגדרה 1.1.1. **פולינום ריבועי בשתי משתנים** הוא פונקציה מהצורה:

$$p(x, y) = ax^2 + by^2 + cxy + dx + ey + f$$

הגדרה 1.1.2. **עקום ריבועי** הוא קו-רמה של פולינום ריבועי. כלומר, קבוצה מהצורה:

$$C = \left\{(x, y) \middle| ax^2 + by^2 + cxy + dx + ey + f = 0\right\},$$

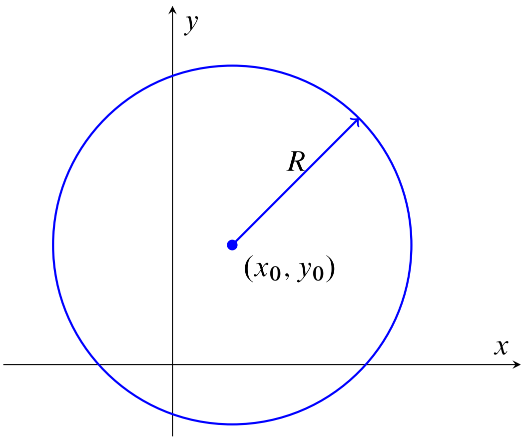
יחד עם ההנחה כי a, b, c, d, e לא כולם אפס.

לקבוצות אלו קוראים גם בשם **חתכים קוניים** שכן הם בדיוק העקומים שמתקבלים מהחיתוך של מישור וחרוט ב-$\mathbb{R}^3$ (עד כדי סיבוב/שיקוף/הזזה). נעשה רדוקציה לצורה הכללית של עקום ריבועי על ידי שימוש בכך שכל משוואה ריבועית שקולה (עד כדי הפעלה של העתקה ליניארית והזזה) לאחת משלושת המשוואות הבאות:

1. $Ax^2 + By^2 + C = 0$ כאשר A, B לא שניהם אפס,
2. $Ax^2 + By + C = 0$ כאשר A שונה מאפס,
3. $Ax + By + C = 0$ כאשר A, B לא שניהם אפס.

עתה משביצענו רדוקציה לשלוש צורות פשוטות יחסית, נוכל לזהות את הצורה של הפתרונות.

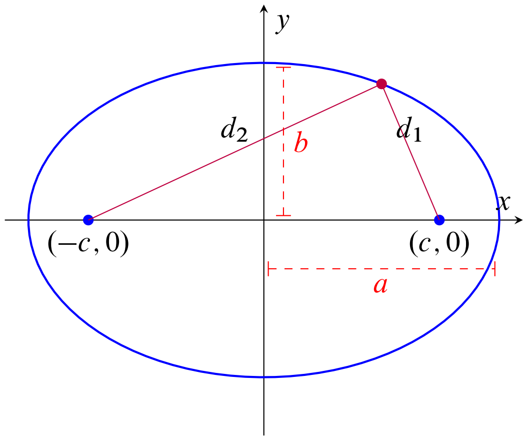
1. **מעגל.** המשוואה
$$x^2 + y^2 = R^2$$
מתארת מעגל ברדיוס R סביב ראשית הצירים. כאשר מחליפים את (x, y) ב-$(x - x_0, y - y_0)$ במשוואה, מקבלים מעגל ברדיוס R סביב הנקודה (x_0, y_0).



איור 1.1: מעגל ברדיוס R סביב הנקודה (x_0, y_0).

2. **אליפסה.** אליפסה בעלת רוחב $2a$ ומוקדים $(\pm c, 0)$ מתארת את אוסף הנקודות שסכום מרחקן משני המוקדים קבוע ושווה ל-$2a$. המשוואה שמתארת את האליפסה היא
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$
כאשר $a^2 - b^2 = c^2$, ובמקרה זה הגובה של האליפסה הוא $2b$.

3. **היפרבולה "עומדת".** היפרבולה בעלת מוקדים $\pm c$ ופרמטר $a > 0$, מתארת את אוסף הנוקדות שהפרש המרחקים שלהן (בערך מוחלט) משני המוקדים קבוע, ושווה ל-$2a$. המשוואה שמתארת את ההיפרבולה היא
$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$
כאשר $a^2 + b^2 = c^2$.



איור 1.2: אליפסה עם רוחב $2a$ ואורך $2b$ כך שמתקיים $a^2-b^2=c^2$. לכל נקודה (בסגול) מתקיים $d_1+d_2=2a$.

(א) **היפרבולה "שוכבת".** זהה בהגדרתה להיפרבולה ה"עומדת" אך החלפנו את תפקידי הצירים. המשוואה המתארת את היפרבולה זו היא

$$\frac{y^2}{b^2}-\frac{x^2}{a^2}=1$$

.

(ב) קיימת צורה נוספת להיפרבולה המסובבת בזווית $\frac{\pi}{4}$, ונתונה על ידי המשוואה $xy=1$. שימו לב שניתן לזהות את משוואה זו כמשוואת היפרבולה בקלות אם נכתוב אותה באופן הבא:

$$xy=\frac{(x+y)^2}{4}-\frac{(x-y)^2}{4}=1.$$

כלומר, זוהי היפרבולה שבה הצירים ה"טבעיים" הם הישרים $y=\pm x$.

4. **פרבולה.** עבור פרמטר $p\neq 0$, הפרבולה היא אוסף הנקודות שמרחקן מהמוקד $(\frac{p}{2},0)$ שווה למרחקן מהישר $x=-\frac{p}{2}$. משוואת הפרבולה היא

$$y^2=2px$$

.

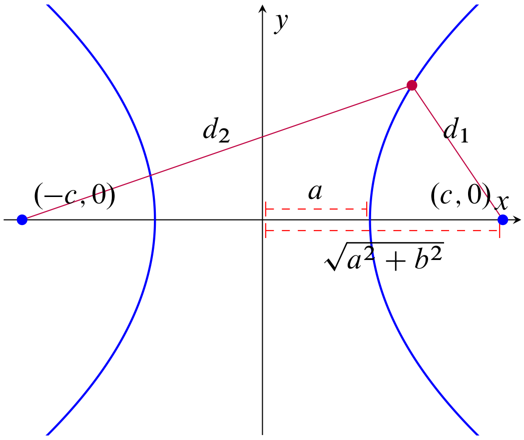
5. **קו ישר יחיד.** בהנתן כיוון (a,b) ופרמטר $d\geq 0$, הישר $ax+by+d=0$ הוא הישר שניצב לכיוון (a,b) ומרחקו d מראשית הצירים.

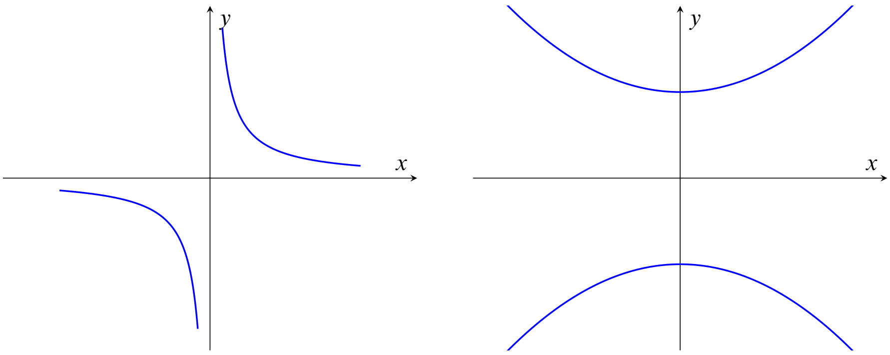
6. **זוג קווים ישרים.** ניתן לקבל זוג קווים ישרים באחד מהמקרים הבאים:

(א) $(ax+by+d)^2=c^2$ וגם $c>0$. במקרה זה מתקבלים שני הישרים המקבילים $ax+by+d=\pm c$.

(ב) $(ax+by+d)(\alpha x+\beta y+\gamma)=0$. במקרה זה מתקבלים שני ישרים נחתכים.

7. **נקודה בודדת.** מתקבלת כאשר המשוואה מהצורה $ax^2+by^2=0$ וגם a,b בעלי אותו סימן.





איור 1.3: היפרבולה "עומדת" (בגרף העליון) עם פרמטר a ופרמטר b שעבורו $a^2+b^2=c^2$. כל נקודה על ההיפרבולה (בסגול) מקיימת $|d_1-d_2|=2a$. משמאל למטה ניתן לראות היפרבולה שוכבת ומימין למטה $xy=1$.

8. **קבוצה ריקה.** מתקבלת כאשר המשוואה מהצורה $ax^2+by^2=-c^2$ כאשר a,b אי שליליים ולא שניהם אפס, וכאשר c אינו אפס.

נזכיר כי כל הצורות שתיארנו כאן מובאות בגרסתן הפשוטה ביותר. באופן כללי, כל אחת מהצורות עלולה להופיע בצורה מסובבת, מוזזת או משוקפת. כך למשל, המשוואה:

$$\frac{(\cos(\theta)x-\sin(\theta)y)^2}{4}+\frac{(\sin(\theta)x+\cos(\theta)y)^2}{9}=1$$

מתארת אליפסה בעלת רוחב 2 ואורך 3, מסובבת ב-θ עם כיוון השעון.

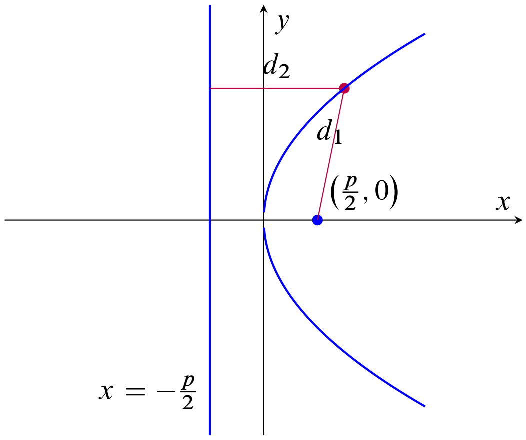
1.2 משטחים ריבועיים

הגדרה 1.2.1. פולינום ריבועי בשלושה משתנים הוא פונקציה מהצורה:

$$p(x,y,z)=Ax^2+By^2+Cz^2+Dxy+Eyz+Fzx+Gx+Hy+Iz+J.$$

הגדרה 1.2.2. משטח ריבועי הוא משטח-רמה של פולינום ריבועי בשלושה משתנים. כלומר, קבוצה מהצורה:

$$C=\{(x,y,z)|p(x,y,z)=0\}.$$



איור 1.4: פרבולה עם פרמטר p. כל נקודה על הפרבולה (בסגול) מקיימת $d_1=d_2$.

כאשר $p(x,y,z)$ פולינום ריבועי ולא קבוע.

בדומה לעקומים ריבועיים, גם את המשטחים הריבועיים ניתן להביא למספר צורות קנוניות, וגם המשטחים הריבועיים מהווים **חתך קוני**, כך שהם כולם מתקבלים על ידי חיתוך של על-מישור ב-$\mathbb{R}^4$ עם חרוט. לבסוף, עד כדי רדוקציה דומה לזו שעשינו עבור עקומים ריבועיים, נוכל לתאר את הצורות האפשריות של משטחים ריבועיים.

1. **ספירה.** המשוואה
$$x^2+y^2+z^2=R^2$$
והיא מתארת קליפה של כדור תלת ממדי ברדיוס R סביב הראשית. גם כאן, ניתן להחליף את (x,y,z) ב-$(x-x_0,y-y_0,z-z_0)$ ולקבל כדור מוזז שמרכזו בנקודה (x_0,y_0,z_0).

2. **אליפסואיד.** המשוואה
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$
מתארת אליפסואיד בעל רוחב $2a,2b,2c$ בשלושת הצירים בהתאמה.

3. **משטחים בעלי חתכי גובה אליפטיים.** הם משטחים שהחיתוך שלהם עם המישורים $z=C$ הינם אליפסות.

   (א) **חרוט אליפטי.** פתרונות המשוואה
   $$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$$
   מקיימים שלכל ערך קבוע של z, מתקבלת משוואת אליפסה, וככל ש-$|z|$ גדל, כך האליפסה גדלה (ומכאן השם חרוט אליפטי, כלומר, חרוט שחתכי הגובה שלו הן אליפסות).

   (ב) **גליל אליפטי.** בדומה לחרוט האליפטי, גם משטח זה מקיים שחתכי הגובה שלו הן אליפסות. אך הוא נתון על ידי המשוואה:
   $$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

כלומר, z אינו משחק תפקיד ויכול לקבל כל ערך שהוא רוצה. יתרה מכך, גודל האליפסות בחתכי הגובה אינו משתנה/תלוי ב-z, ולכן מתקבלת הצורה הגלילית שבאיור לעיל.

(ג) **פרבולואיד אליפטי.** בהמשך לצורות שחתכי הגובה שלהן אליפסות, גם כאן מדובר בצורה דומה, אלא שגודל האליפסות משתנה לפי שורש הגודל של z. המשוואה המתארת פרבולואיד אליפטי היא:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - z = 0.$$

4. **משטחים בעלי חתכי גובה היפרבוליים.** דומים מאוד בצורתם לאלו האליפטיים, כאשר אחד מהמקדמים בפולינום בסימן הפוך.

(א) **גליל היפרבולי.** נתון על ידי המשוואה $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1$, כך שבדומה לגליל האליפטי z אינו משחק תפקיד כלל.

(ב) **פרבולואיד היפרבולי.** נתון על ידי המשוואה $z = \frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2}$.

5. **היפרבולואיד חד-יריעתי ודו-יריעתי.** ההיפרבולואיד החד-יריעתי נתון על ידי המשוואה:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

וההיפרבולואיד הדו יריעתי נתון על ידי המשוואה:

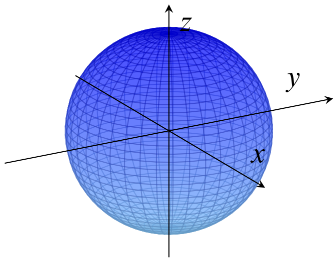
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1.$$

ההבדל ביניהם, כמתואר באיורים שלעיל, הוא בכך שההיפרבולואיד החד יריעתי מהווה משטח אחד "מחובר" (בהמשך, נקרא לזה בשם "קשיר"), וההיפרבולואיד הדו יריעתי מורכב משני משטחים נפרדים וזרים (בפרט, נאמר שהוא "אינו קשיר").

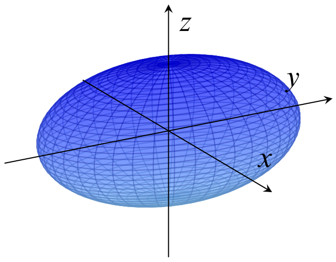
6. **גליל פרבולי.** נתון על ידי משוואה מהצורה $x^2 + 2rz = 0$ עם פרמטר $r \neq 0$.

7. **מישורים.** המשוואה $(ax + by + cz + d)^2 = r^2$ מתארת מישור יחיד אם $r = 0$, ושני מישורים מקבילים אם $r \neq 0$. קיימת גם אפשרות של מישורים נחתכים, כאשר הצורה הכללית ביותר למשוואה כזו היא

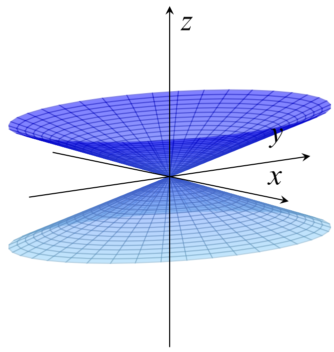
$$(ax + by + cz + d)(\alpha x + \beta y + \gamma z + \delta) = 0.$$



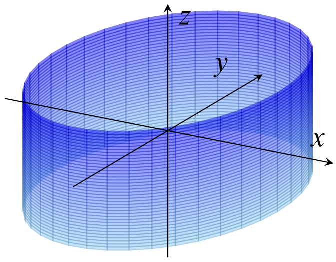
איור 1.5: ספירה.



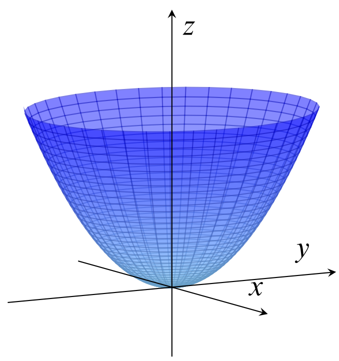
איור 1.6: אליפסואיד.



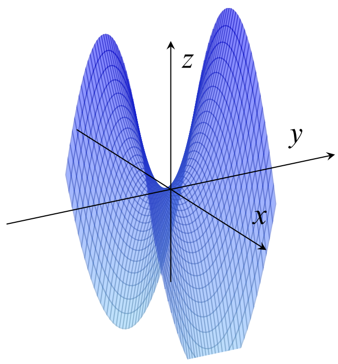
איור 1.7: חרוט אליפטי.



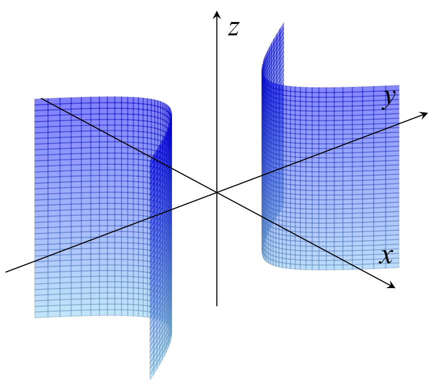
איור 1.8: גליל אליפטי.



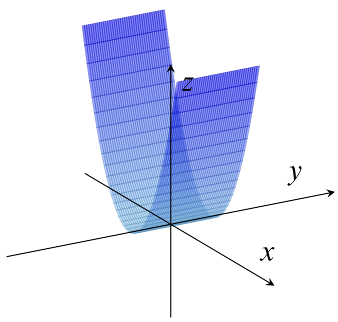
איור 1.9: פרבולואיד אליפטי.



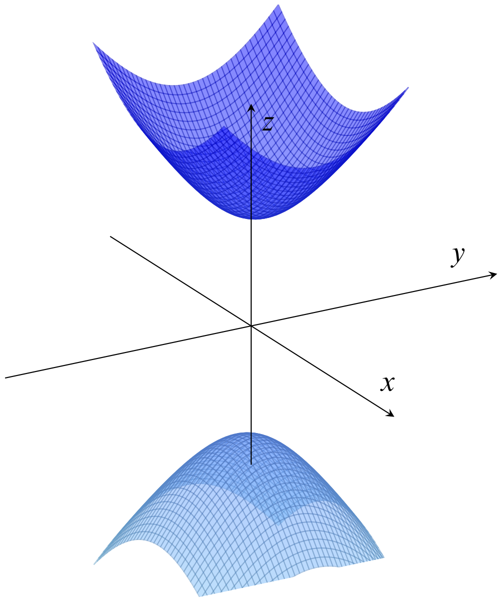
איור 1.10: פרבולואיד היפרבולי.



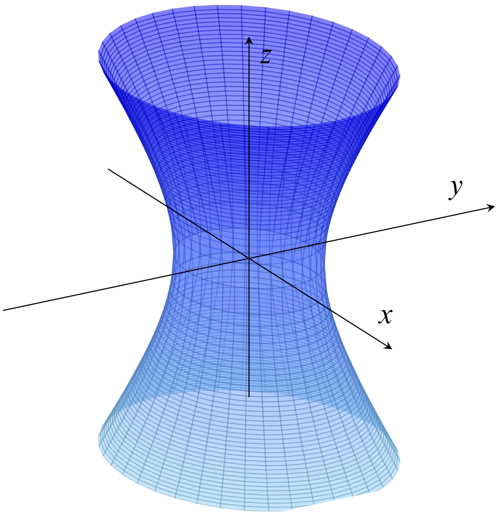
איור 1.11: גליל היפרבולי.



איור 1.12: גליל פרבולי.



איור 1.13: היפרבולואיד דו יריעתי.



איור 1.14: היפרבולואיד חד יריעתי.

1.3 תרגיל - עקומים ריבועיים

תארו וציירו את קוי הרמה של הפונקציות הבאות עבור הערכים הנתונים.

1. קו הרמה של $f(x,y)=\frac{xy}{3x+y-4}$ עבור הערך $C=-1$.
2. מיינו את קווי הרמה של $f(x,y)=\frac{x^2+y^2+2x}{x^2+2y^2+3}$.

פתרון.

1. על פי הגדרה, קו הגובה מורכב מאוסף כל הנקודות (x,y) המקיימות $f(x,y)=-1$. כלומר:

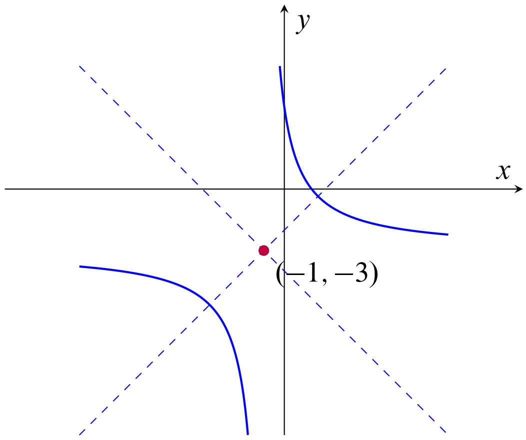
$$\frac{xy}{3x+y-4}=-1 \Longrightarrow xy=4-3x-y \Longrightarrow xy+3x+y-4=0.$$

כדי לפשט את הביטוי נזהה כי $xy+3x+y+3=(x+1)(y+3)$, ולכן:

$$xy+3x+y-4=(x+1)\,(y+3)-7=0 \Longrightarrow (x+1)(y+3)=7.$$

כלומר, מדובר בהיפרבולה המוזזת כך שראשית הצירים עבורה היא הנקודה $(-1,-3)$, ומסובבת ב-$\frac{\pi}{4}$ רדיאנים נגד כיוון השעון. דרך טובה לצייר אותה היא לחשוב עליה בתוך הגרף של הפונקציה

$$y=-3+\frac{7}{x+1}.$$



איור 1.15: איור של ההיפרבולה $(x+1)(y+3)=7$, ראשית הצירים המוזזת ב-$(-1,-3)$ והישרים $y=x-2,-x-4$.

2. על פי הגדרה, עלינו לפתור את המשוואה

$$\frac{x^2+y^2+2x}{x^2+2y^2+3}=C$$

עבור כל הערכים האפשריים של C. לאחר סידור המשוואה מקבלים

$$(1-C)\,x^2+2x+(1-2C)\,y^2=3C,$$

תחילה, נפתור עבור המקרה שבו $C=1$, ובמקרה זה נקבל את המשוואה $-y^2=3$, וקו הרמה המתאים יהיה **קבוצה ריקה**. אחרת, ניתן לבצע השלמה לריבוע באופן הבא:

$$(1-C)\left(x+\frac{1}{1-C}\right)^2+(1-2C)\,y^2=\frac{3C-3C^2+1}{1-C}.$$

עתה, הצורה שתתקבל תקבע על פי הסימנים השונים של המקדמים ולכן נזהה את ערכי C שבהם סימני המקדמים מתחלפים, ואלו הם

$$C=1, C=\frac{1}{2}, C=\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{7}{12}}\approx 1.26, C=\frac{1}{2}-\sqrt{\frac{7}{12}}\approx -0.26.$$

(א) כאשר $C>\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{7}{12}}$, המקדמים באגף השמאלי שליליים והמקדם באגף הימני חיובי. במקרה זה, קו הרמה תהיה **קבוצה ריקה**.

(ב) כאשר $C=\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{7}{12}}$, המקדמים באגף השמאלי שווי סימן (שליליים) ובאגף הימני מקבלים אפס. במקרה זה, קו הרמה יהיה **נקודה בודדת**, והיא הנקודה $\left(-\frac{1}{\frac{1}{2}-\sqrt{\frac{7}{12}}},0\right)$.

(ג) כאשר $1<C<\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{7}{12}}$, כל מקדמי המשוואה בעלי סימן זהה אך המקדמים באגף השמאלי שונים אחד מהשני. הצורה שתתקבל היא **אליפסה**.

(ד) כאשר $1 > C > \frac{1}{2}$ מקבלים כי המקדם של $\left(x+\frac{1}{1-C}\right)^2$ חיובי אך יתר המקדמים שליליים, ולכן מדובר ב**היפרבולה שוכבת**.

(ה) כאשר $C=\frac{1}{2}$ מקבלים את המשוואה

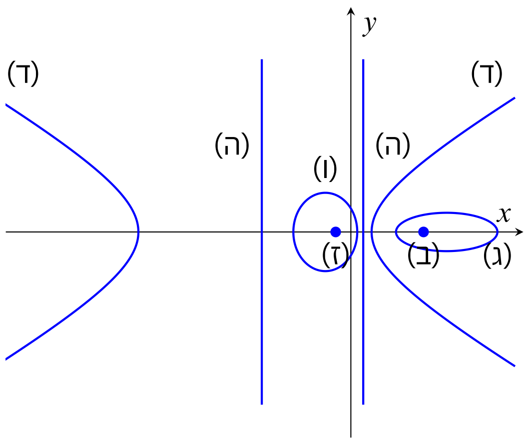
$$\frac{1}{2}(x+2)^2=\frac{7}{2}\Longrightarrow x=-2\pm\sqrt{7}.$$

לכן, קו הרמה יהיה **שני ישרים מקבילים**.

(ו) כאשר $\frac{1}{2} > C > \frac{1}{2}-\sqrt{\frac{7}{12}}$ כל המקדמים של המשוואה חיוביים ולכן מתקבלת **אליפסה** למעט במקרה שבו $C=0$ ואז מתקבל **מעגל**.

(ז) כאשר $C=\frac{1}{2}-\sqrt{\frac{7}{12}}$ מקבלים כי המקדמים באגף השמאלי חיוביים והמקדם באגף הימני מתאפס, ולכן קו הרמה יהיה **נקודה בודדת**, והיא הנקודה $\left(-\frac{1}{\sqrt{\frac{7}{12}}-\frac{1}{2}},0\right)$.

(ח) כאשר $C<\frac{1}{2}-\sqrt{\frac{7}{12}}$ המקדמים באגף השמאלי חיוביים בעוד המקדם באגף הימני שלילי, ולכן קו הרמה יהיה **קבוצה ריקה**.



איור 1.16: תיאור קווי הרמה (שאינם קבוצות ריקות) של הפונקציה $f(x,y)=\frac{x^2+y^2+2x}{x^2+2y^2+3}$.

1.4 תרגיל - הצגות פרמטריות

1. נסמן ב-S את החרוט $x^2+y^2-z^2=0$. הראו כי לכל נקודה $(x_0,y_0,z_0)\in S$ ניתן למצוא ישר העובר בנקודה זו ומוכל כולו ב-S.

2. מצאו שני משטחים ריבועיים המכילים את כל הנקודות מהצורה

$$\left(\cos^2(\theta),\sin(\theta)\cos(\theta),\sin(\theta)\right)$$

כאשר $\theta\in[0,2\pi]$.

פתרון.

1. כדי להתחיל להתמודד עם השאלה, נזכיר כי ישר ב-$\mathbb{R}^3$ מאופיין באופן יחיד על פי נקודה שהוא עובר דרכה והכיוון שלו שמתואר על ידי וקטור כלשהו (a, b, c). כלומר, ניתן להציג כל ישר העובר דרך הנקודה הנתונה בצורה הפרמטרית

$$(x(t), y(t), z(t)) = (x_0 + at, y_0 + bt, z_0 + ct) = (x_0, y_0, z_0) + t(a, b, c), \quad t \in \mathbb{R}.$$

דרגות החופש של הבעיה יהיו הפרמטרים (a, b, c) שיקבעו על פי התנאי הנוסף שדרשו מאיתנו בשאלה - לוודא כי הישר מוכל כולו במשטח. כדי לעשות זאת אין לנו הרבה ברירה, אלא להציב את נקודות הישר במשוואה שמגדירה את המשטח S ולוודא שהמשוואה מתקיימת לכל t, כלומר

$$(x_0 + at)^2 + (y_0 + bt)^2 - (z_0 + ct)^2 = 0.$$

לאחר פתיחת סוגריים וסידור מחדש של המשוואה, מקבלים כי הישר יהיה מוכל במשטח אם ורק אם

$$\left(x_0^2 + y_0^2 - z_0^2\right) + 2\left(ax_0 + by_0 - cz_0\right)t + \left(a^2 + b^2 - c^2\right)t^2 = 0, \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

שימו לב כי הביטוי שקיבלנו הוא פולינום ממעלה 2 (ב-t) שמתאפס לכל ערך של t, ולכן חייב להיות פולינום האפס, כלומר כל מקדמי הפולינום מתאפסים, ומכאן מערכת המשוואות:

$$\begin{cases} x_0^2 + y_0^2 - z_0^2 = 0 \\ ax_0 + by_0 - cz_0 = 0 \\ a^2 + b^2 - c^2 = 0 \end{cases}.$$

עתה, נוכל להשתמש בנתון כי $(x_0, y_0, z_0) \in S$ כדי להסיק שהמשוואה הראשונה מתקיימת בכל מקרה, ועלינו למצוא (a, b, c) המקיימים את זוג המשוואות האחרונות. במקרה זה, ניתן לפתור את המשוואות בצורה ריגורוזית על ידי בידוד משתנים והצבה, אך למעשה התבוננות קצרה תראה שהבחירה

$$(a, b, c) = (x_0, y_0, z_0)$$

מקיימת את הדרוש[1]. יתרה מכך, כל כפולה בסקלר של וקטור פרמטרים זה תהווה תשובה נכונה (חשבו מדוע!).

2. כפי שראינו, משטחים ריבועיים רבים מערבים את x^2, y^2, z^2 בקומבינציות שונות. לכן, דרך טובה לחפש את המשטחים המבוקשים תהיה לחשב את שלושת הביטויים הללו ולנסות למצוא קומבינציות שלהם שיתנו את הערך אפס לכל θ. במקרה שלנו:

$$x^2(\theta) = \cos^4(\theta), \quad y^2(\theta) = \sin^2(\theta)\cos^2(\theta), \quad z^2(\theta) = \sin^2(\theta)$$

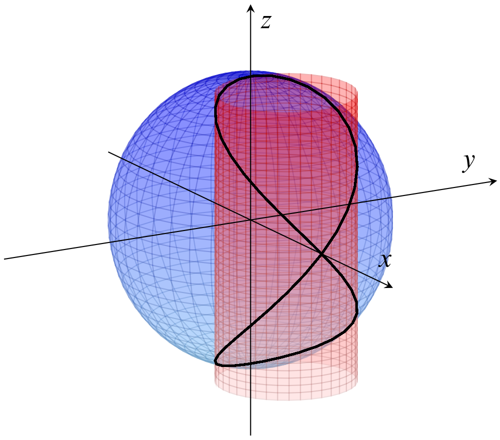
עתה, שימוש פשוט בזהויות טריגונומטריות יראה לנו כי:

$$x^2(\theta) + y^2(\theta) = \cos^2(\theta)\left(\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta)\right) = \cos^2(\theta) = x(\theta).$$

כלומר, כל הנקודות הנתונות נמצאות על הגליל $x^2 + y^2 = x$, והוספה של $z^2(\theta)$ למשוואה תראה כי כל הנקודות נמצאות גם על ספירת היחידה $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

[1] יחד עם זאת, בהחלט מומלץ לנסות ולפתור את המשוואות בצורה יסודית לשם תרגול נוסף ולראות שאכן מתקבלת אותה התשובה.

כמובן שלא מדובר בשני המשטחים היחידה שמכילים את הנקודות, ומומלץ לנסות למצוא משטחים נוספים כתרגיל. באיור 2 ניתן לראות את שני המשטחים ואת אוסף הנקודות (המהוות בדיוק את החיתוך בין שני המשטחים). חיתוך זה הינו עקום מפורסם הידוע בשם "החלון של ויויאני"[2]. לעקום זה מספר תכונות גיאומטריות מעניינות, וביניהן העובדה שהצל שהוא מטיל בכיוון ציר ה-x יוצר צורת 8 הידועה בשם "הלמניסקטה".



איור 1.17: תיאור ספירת היחידה, הגליל ואוסף הנקודות הנתון בשאלה.

[2] וינצ'נזו ויויאני היה מתמטיקאי ומדען איטלקי, ותלמידו של גלילאו. ויויאני היה הראשון שניסה לערוך ולפרסם את אוסף עבודותיו של גלילאו, ומאמציו נעצרו עקב התנגדות הכנסיה הקתולית.

2

טופולוגיה

2.1 תזכורות מההרצאה

2.1.1 מבנים על המרחב האוקלידי

הגדרה 2.1.1. המרחב האוקלידי ה-n ממדי הוא המרחב הוקטורי:

$$\mathbb{R}^n := \{x = (x_1, \ldots, x_n) | x_i \in \mathbb{R},\ \forall i = 1, \ldots, n\}$$

מעל השדה $\mathbb{R}$, וביחס לפעולות החיבור והכפל בסקלר,

$$x + y = (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n)\,, \quad \alpha x = (\alpha x_1, \ldots, \alpha x_n)$$

לכל $x, y \in \mathbb{R}^n$ ו-$\alpha \in \mathbb{R}$.

במהלך הקורס, נידרש לדון בפונקציות מהצורה $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, וכהמשך טבעי לקורסי האינפי הקודמים היינו רוצים לדון במונחים כגון גבול, מרחק, רציפות, נגזרת, אינטגרל ועוד. על מנת לעשות זאת, לא די להתייחס אל המרחב האוקלידי כמרחב וקטורי, ונרצה להגדיר מעליו מבנים נוספים איתם נגדיר אורך, מרחק וזווית.

הגדרה 2.1.2. תהא X קבוצה. פונקציה $\mathrm{d} : X \times X \to \mathbb{R}$ מכונה **מטריקה** על X, אם היא מקיימת את התכונות הבאות,

1. **חיוביות.** $\mathrm{d}(x, y) \geq 0$ לכל $x, y \in X$, ושוויון אם ורק אם $x = y$.
2. **סימטריות.** $\mathrm{d}(x, y) = \mathrm{d}(y, x)$ לכל $x, y \in X$.
3. **אי-שוויון המשולש.** $\mathrm{d}(x, z) \leq \mathrm{d}(x, y) + \mathrm{d}(y, z)$ לכל $x, y, z \in X$.

פונקציית המטריקה מהווה הכללה טבעית של מונח המרחק בין נקודות של קבוצה.

דוגמה 2.1.3. מעל כל קבוצה לא ריקה X, ניתן להגדיר את **המטריקה הדיסקרטית**, הנתונה על פי הנוסחה

$$\mathrm{d_{disc}}(x,y)=\begin{cases}1, & x\neq y\\ 0, & x=y\end{cases}$$

לכל $x,y\in X$. לא קשה להשתכנע כי אכן מדובר במטריקה (אם כי לא מעניינת במיוחד).

דוגמה 2.1.4. מעל המרחב האוקלידי $\mathbb{R}^n$ ניתן להגדיר משפחה גדולה של **מטריקות-p** לכל $p\geq 1$ על ידי הנוסחה

$$\mathrm{d}_p(x,y):=\left(\sum_{i=1}^{n}|x_i-y_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

ניתן להוכיח שאכן מדובר במטריקות, כאשר המפורסמות שבהן מתקבלות עבור $p=2$, $p=1$ ועבור $p\to\infty$.

1. עבור $p=2$ מתקבלת **המטריקה האוקלידית הסטנדרטית** והיא נתונה על ידי
$$\mathrm{d}_2(x,y):=\sqrt{(x_1-y_1)^2+\cdots+(x_n-y_n)^2}.$$
2. עבור $p=1$ מתקבלת **מטריקת מנהטן** והיא נתונה על ידי
$$\mathrm{d}_1(x,y):=|x_1-y_1|+\cdots+|x_n-y_n|.$$
3. לכל $x,y\in\mathbb{R}^n$, ניתן להראות שכאשר $p\to\infty$ מתקבלת נוסחה למטריקה נוספת הזוכה לשם **מטריקת הסופרמום/המקסימום** והיא נתונה על ידי
$$\mathrm{d}_\infty(x,y):=\max_{i=1,\dots,n}|x_i-y_i|.$$

כאשר הקבוצה שלנו בעלת מבנה נוסף של מרחב וקטורי, ניתן להגדיר מעליה הכללה של מונח ה"אורך" של וקטור.

הגדרה 2.1.5. יהא V מרחב וקטורי מעל $\mathbb{R}$ או $\mathbb{C}$. פונקציה $\|\cdot\|:V\to\mathbb{R}$ מכונה **נורמה**, אם היא מקיימת את התכונות הבאות,

1. **חיוביות.** $\|v\|\geq 0$ לכל $v\in V$, ושוויון מתקיים אם ורק אם $v=0$.
2. **הומוגניות.** $\|\alpha v\|=|\alpha|\,\|v\|$ לכל $v\in V,\alpha\in\mathbb{R}$ (או בהתאמה, $\alpha\in\mathbb{C}$).
3. **אי-שוויון המשולש.** $\|v+u\|\leq\|v\|+\|u\|$ לכל $v,u\in V$.

דוגמה 2.1.6. עבור $p=1,2$ ועבור $p\to\infty$, מגדירים את הנורמות:

$$\|x\|_2:=\sqrt{x_1^2+\cdots+x_n^2},$$
$$\|x\|_1:=|x_1|+\cdots+|x_n|,$$
$$\|x\|_\infty:=\max_{i=1,\dots,n}|x_i|.$$

יתרה מכך, ראינו בהרצאה כי הנורמות הללו שקולות.

שימו לב שכל נורמה מגדירה באופן מידי מטריקה המושרית ממנה על פי $\mathrm{d}(x,y)=\|x-y\|$. הכיוון ההפוך אינו בהכרח נכון, וקיימות מטריקות שאינן מושרות מאף מטריקה (אך לא נדון בכך בקורס). בהרצאה הוכחנו מספר מקרים פרטיים של הטענה הבאה, שכדאי להכיר.

טענה 2.1.7. יהיו $\|\cdot\|_\alpha, \|\cdot\|_\beta$ נורמות מעל $\mathbb{R}^n$. אזי, קיימים קבועים $c_{\alpha,\beta}, C_{\alpha,\beta}$ חיוביים, שעבורם לכל $x \in \mathbb{R}^n$:

$$c_{\alpha,\beta}\left\|x\right\|_\alpha \le \left\|x\right\|_\beta \le C_{\alpha,\beta}\left\|x\right\|_\alpha .$$

תוצאה זו מבטיחה שבהמשך, כל התכונות הקשורות בגבולות ונגזרות יהיו בלתי תלויות בנורמה שבה נבחר, מה שמאפשר עקביות וגמישות בעבודה מעל המרחבים הללו.
מעבר למרחקים, אנחנו נוהגים לדון ב"כיוונים" במרחב האוקלידי. ב-$\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3$ אף נהוג לדבר על זוויות, אנכים ועוד. בכך יטפל המבנה הבא.

הגדרה 2.1.8. יהא V מרחב וקטורי מעל $\mathbb{R}$. **מכפלה פנימית** על V היא פונקציה $\langle\cdot,\cdot\rangle : V \times V \to \mathbb{R}$ המקיימת את התכונות הבאות,

1. **חיוביות**. $\langle v, v\rangle \ge 0$ לכל $v \in V$, ושוויון מתקיים אם ורק אם $v = 0$.
2. **סימטריות**. $\langle v, u\rangle = \langle u, v\rangle$ לכל $u, v \in V$.
3. **ליניאריות ברכיב הראשון**. $\langle \alpha v_1 + v_2, u\rangle = \alpha\langle v_1, u\rangle + \langle v_2, u\rangle$ לכל $v_1, v_2 \in V$ ו-$\alpha \in \mathbb{R}$.

ראשית, כדאי לזהות שליניאריות ברכיב הראשון וסימטריות גוררת ליניאריות גם ברכיב השני (אך נהוג לציין זאת בנפרד, היות וקיימת גם מכפלה חצי ליניארית מעל המרוכבים). כל מכפלה פנימית משרה מבנה של נורמה על המרחב הוקטורי על ידי $\|\cdot\| := \sqrt{\langle v, v\rangle}$ והעובדה שאכן מתקבלת נורמה מנוסחה זו נובעת מהטענה החשובה הבאה.

טענה 2.1.9 (אי שוויון קושי-שוורץ)**.** יהא V מרחב מכפלה פנימית ותהא $\langle\cdot,\cdot\rangle$ מכפלה פנימית ונסמן ב-$\|\cdot\|$ את הנורמה המושרית. אזי, לכל $v, u \in V$, מתקיים:

$$|\langle u, v\rangle| \le \|u\|\,\|v\| .$$

תוצאה זו גם מראה לנו שלכל $v, u \in V$, הגודל $\frac{\langle v,u\rangle}{\|u\|\|v\|}$ הוא מספר השייך לקטע $[-1, 1]$. עובדה זו מאפשרת לנו להגדיר **זווית** בין וקטורים.

הגדרה 2.1.10. יהא V מרחב מכפלה פנימית ויהיו $v, u \in V$. **הזווית** (החדה) בין הוקטורים מוגדרת להיות הזווית $\theta \in [0, \pi]$ (היחידה) שעבורה:

$$\langle v, u\rangle = \cos(\theta)\,\|v\|\,\|u\| .$$

בפרט, אם $\langle v, u\rangle = 0$, אומרים כי הוקטורים **מאונכים** ומסמנים $v \perp u$.