104295

חשבון אינפיניטסימלי 3

רשימות תרגול - חורף תשפ"ד

הפקולטה למתמטיקה בטכניון

נכתב על ידי רן קירי

תוכן העניינים

1

טופולוגיה

1.1 תזכורות מההרצאה

1.1.1 מבנים על המרחב האוקלידי

הגדרה 1.1.1. **המרחב האוקלידי ה-n ממדי** הוא המרחב הוקטורי:

$$\mathbb{R}^n := \{x = (x_1, \ldots, x_n) | x_i \in \mathbb{R},\ \forall i = 1, \ldots, n\}$$

מעל השדה $\mathbb{R}$, וביחס לפעולות החיבור והכפל בסקלר,

$$x + y = (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n), \quad \alpha x = (\alpha x_1, \ldots, \alpha x_n)$$

לכל $x, y \in \mathbb{R}^n$ ו-$\alpha \in \mathbb{R}$.

במהלך הקורס, נידרש לדון בפונקציות מהצורה $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, וכהמשך טבעי לקורסי האינפי הקודמים היינו רוצים לדון במונחים כגון גבול, מרחק, רציפות, נגזרת, אינטגרל ועוד. על מנת לעשות זאת, לא די להתייחס אל המרחב האוקלידי כמרחב וקטורי, ונרצה להגדיר מעליו מבנים נוספים איתם נגדיר אורך, מרחק וזווית.

הגדרה 1.1.2. תהא X קבוצה. פונקציה $\mathrm{d} : X \times X \to \mathbb{R}$ מכונה **מטריקה** על X, אם היא מקיימת את התכונות הבאות,

1. **חיוביות.** $\mathrm{d}(x, y) \geq 0$ לכל $x, y \in X$, ושוויון אם ורק אם $x = y$.
2. **סימטריות.** $\mathrm{d}(x, y) = \mathrm{d}(y, x)$ לכל $x, y \in X$.
3. **אי-שוויון המשולש.** $\mathrm{d}(x, z) \leq \mathrm{d}(x, y) + \mathrm{d}(y, z)$ לכל $x, y, z \in X$.

פונקציית המטריקה מהווה הכללה טבעית של מונח המרחק בין נקודות של קבוצה.

דוגמה 1.1.3. מעל כל קבוצה לא ריקה X, ניתן להגדיר את **המטריקה הדיסקרטית**, הנתונה על פי הנוסחה

$$\mathrm{d}_{\mathrm{disc}}(x,y)=\begin{cases}1, & x\neq y\\ 0, & x=y\end{cases}$$

לכל $x,y\in X$. לא קשה להשתכנע כי אכן מדובר במטריקה (אם כי לא מעניינת במיוחד).

דוגמה 1.1.4. מעל המרחב האוקלידי $\mathbb{R}^n$ ניתן להגדיר משפחה גדולה של **מטריקות-p** לכל $p\geq 1$ על ידי הנוסחה

$$\mathrm{d}_p(x,y):=\left(\sum_{i=1}^{n}|x_i-y_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

ניתן להוכיח שאכן מדובר במטריקות, כאשר המפורסמות שבהן מתקבלות עבור $p=1,p=2$ ועבור $p\to\infty$.

1. עבור $p=2$ מתקבלת **המטריקה האוקלידית הסטנדרטית** והיא נתונה על ידי

$$\mathrm{d}_2(x,y):=\sqrt{(x_1-y_1)^2+\cdots+(x_n-y_n)^2}.$$

2. עבור $p=1$ מתקבלת **מטריקת מנהטן** והיא נתונה על ידי

$$\mathrm{d}_1(x,y):=|x_1-y_1|+\cdots+|x_n-y_n|.$$

3. לכל $x,y\in\mathbb{R}^n$, ניתן להראות שכאשר $p\to\infty$ מתקבלת נוסחה למטריקה נוספת הזוכה לשם **מטריקת הסופרמום/המקסימום** והיא נתונה על ידי

$$\mathrm{d}_\infty(x,y):=\max_{i=1,\ldots,n}|x_i-y_i|.$$

כאשר הקבוצה שלנו בעלת מבנה נוסף של מרחב וקטורי, ניתן להגדיר מעליה הכללה של מונח ה"אורך" של וקטור.

הגדרה 1.1.5. יהא V מרחב וקטורי מעל $\mathbb{R}$ או $\mathbb{C}$. פונקציה $\|\cdot\|:V\to\mathbb{R}$ מכונה **נורמה**, אם היא מקיימת את התכונות הבאות,

1. **חיוביות**. $\|v\|\geq 0$ לכל $v\in V$, ושוויון מתקיים אם ורק אם $v=0$.
2. **הומוגניות**. $\|\alpha v\|=|\alpha|\,\|v\|$ לכל $v\in V,\alpha\in\mathbb{R}$ (או בהתאמה, $\alpha\in\mathbb{C}$).
3. **אי-שוויון המשולש**. $\|v+u\|\leq\|v\|+\|u\|$ לכל $v,u\in V$.

דוגמה 1.1.6. עבור $p = 1, 2$ ועבור $p \to \infty$, מגדירים את הנורמות:

$$\|x\|_2 := \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2},$$
$$\|x\|_1 := |x_1| + \cdots + |x_n|,$$
$$\|x\|_\infty := \max_{i=1,\ldots,n} |x_i|.$$

יתרה מכך, ראינו בהרצאה כי הנורמות הללו שקולות.

שימו לב שכל נורמה מגדירה באופן מידי מטריקה המושרית ממנה על פי $\mathrm{d}(x, y) = \|x - y\|$. הכיוון ההפוך אינו בהכרח נכון, וקיימות מטריקות שאינן מושרות מאף מטריקה (אך לא נדון בכך בקורס). בהרצאה הוכחנו מספר מקרים פרטיים של הטענה הבאה, שכדאי להכיר.

טענה 1.1.7. יהיו $\|\cdot\|_\alpha$, $\|\cdot\|_\beta$ נורמות מעל $\mathbb{R}^n$. אזי, קיימים קבועים $c_{\alpha,\beta}, C_{\alpha,\beta}$ חיוביים, שעבורם לכל $x \in \mathbb{R}^n$:

$$c_{\alpha,\beta} \|x\|_\alpha \le \|x\|_\beta \le C_{\alpha,\beta} \|x\|_\alpha .$$

תוצאה זו מבטיחה שבהמשך, כל התכונות הקשורות בגבולות ונגזרות יהיו בלתי תלויות בנורמה שבה נבחר, מה שמאפשר עקביות וגמישות בעבודה מעל המרחבים הללו.

מעבר למרחקים, אנחנו נוהגים לדון ב"כיוונים" במרחב האוקלידי. ב-$\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3$ אף נהוג לדבר על זוויות, אנכים ועוד. בכך יטפל המבנה הבא.

הגדרה 1.1.8. יהא V מרחב וקטורי מעל $\mathbb{R}$. **מכפלה פנימית** על V היא פונקציה $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \to \mathbb{R}$ המקיימת את התכונות הבאות,

1. **חיוביות.** $\langle v, v \rangle \ge 0$ לכל $v \in V$, ושוויון מתקיים אם ורק אם $v = 0$.
2. **סימטריות.** $\langle v, u \rangle = \langle u, v \rangle$ לכל $u, v \in V$.
3. **ליניאריות ברכיב הראשון.** $\langle \alpha v_1 + v_2, u \rangle = \alpha \langle v_1, u \rangle + \langle v_2, u \rangle$ לכל $v_1, v_2 \in V$ ו-$\alpha \in \mathbb{R}$.

ראשית, כדאי לזהות שליניאריות ברכיב הראשון וסימטריות גוררת ליניאריות גם ברכיב השני (אך נהוג לציין זאת בנפרד, היות וקיימת גם מכפלה חצי ליניארית מעל המרוכבים). כל מכפלה פנימית משרה מבנה של נורמה על המרחב הוקטורי על ידי $\|\cdot\| := \sqrt{\langle v, v \rangle}$ והעובדה שאכן מתקבלת נורמה מנוסחה זו נובעת מהטענה החשובה הבאה.

טענה 1.1.9 (אי שוויון קושי-שוורץ)**.** יהא V מרחב מכפלה פנימית ותהא $\langle \cdot, \cdot \rangle$ מכפלה פנימית ונסמן ב-$\|\cdot\|$ את הנורמה המושרית. אזי, לכל $v, u \in V$, מתקיים:

$$|\langle u, v \rangle| \le \|u\| \|v\| .$$

תוצאה זו גם מראה לנו שלכל $v, u \in V$, הגודל $\frac{\langle v,u \rangle}{\|u\| \|v\|}$ הוא מספר השייך לקטע $[-1, 1]$. עובדה זו מאפשרת לנו להגדיר **זווית** בין וקטורים.

הגדרה 1.1.10. יהא V מרחב מכפלה פנימית ויהיו $v, u \in V$. **הזווית** (החדה) בין הוקטורים מוגדרת להיות הזווית $\theta \in [0, \pi]$ (היחידה) שעבורה:

$$\langle v, u\rangle = \cos(\theta)\|v\|\|u\|.$$

בפרט, אם $\langle v, u\rangle = 0$, אומרים כי הוקטורים **מאונכים** ומסמנים $v \perp u$.