Capítulo 1

Fundamentos de lógica

"Tweedledee (a Alicia): *Sé lo que estás pensando, pero no es así de todas formas.*
Tweedledum: *Al contrario, si fue así, podría ser; y si fuera así, sería; pero como no es, no es. La lógica es así*".

Lewis Carroll

En este capítulo se hace una formalización de la lógica, aquella que se utiliza todos los días para razonar, debatir, deducir, comprender e inferir. Cuando se dice, por ejemplo: "solo las personas mayores de 18 *años pueden votar" y "Héctor tiene* 17 *años", se concluye lógicamente que "Héctor no puede votar"; o cuando se dice que la expresión "el hielo es caliente" es falsa, sin duda se emite un juicio de valor o conclusión a partir del conocimiento adquirido con anterioridad o a partir de las diferentes premisas.*

Se inicia con la terminología propia de toda teoría matemática, luego con la particular de la lógica formal y simbólica: conectivas, cuantificadores, proposiciones, entre otros términos, y se clasifican estas proposiciones con base en las tablas de verdad. Luego se ven las leyes de la lógica y las reglas de inferencia, con su respectiva aplicación. Al final se definen los cuantificadores y se trabaja con proposiciones cuantificadas.

Para profundizar el tema tratado en este capítulo, es recomendable consultar las referencias bibliográficas [2], [5], [7], [12], [15], [31] *y para el tema de las paradojas, el interesante artículo* [30].

1.1 Introducción

Para algunos, la *lógica* es la teoría del pensar, la ciencia de los límites del pensar justo y razonado; para otros, se puede definir brevemente como el estudio del razonamiento. En este caso, la lógica es la teoría de la inferencia, véase [5]. Su estudio es importante porque ayuda a razonar de forma correcta y, con ello, a no incurrir en las llamadas falacias argumentativas. Las leyes de la deducción son innatas en los seres humanos, pero su uso no es obligado y pueden ser ignoradas, incluso, como es el caso de algunas normas morales, sin darse cuenta de ello. Conocer estas leyes con mayor profundidad permite su aplicación.

Algunos de los argumentos lógicos más originales corresponden al matemático y Reverendo Charles Lutwidge Dodgson (1832-1898), conocido por su seudónimo Lewis Carroll, quien además fue lógico, dibujante, fotógrafo y poeta. Catedrático de la Universidad de Cambridge, en Inglaterra, y autor prolífico, dentro de sus obras destacan *Lógica Simbólica*, *Alicia en el País de las Maravillas* y *Silvia y Bruno*. Él mismo explica en su bella obra *Lógica Simbólica* las razones del por qué es importante el estudio de este tema:

> *"La lógica simbólica dará a usted claridad de pensamiento, la habilidad para ver su camino a través de un acertijo, el hábito de arreglar sus ideas en una forma adecuada y clara, y, lo más valioso, el poder para detectar falacias y separar las piezas de los argumentos endebles e ilógicos que encontramos continuamente en libros, periódicos, discursos, y aún sermones, y que fácilmente engañan a aquellos que nunca se han tomado la molestia de dominar este fascinante arte".* (Véase [24]).

El concepto de lógica tiene sus orígenes en los estoicos, probablemente en Zenón de Elea (490-430 a.C.), discípulo de Parménides, aunque la primera lógica sistemática se debe a Aristóteles de Estagira (384-322 a.C.), quien, en uno de los escritos referentes a este tema, se ocupa de las teorías del concepto del *juicio*, de la *conclusión* y de la *prueba*, y es a partir de él que queda constituida como una disciplina propia.

La llamada *lógica inductiva* se caracteriza por el razonamiento de que, a partir de observaciones específicas, se conduce a conclusiones generales y por supuesto que con ella es posible obtener una idea correcta de lo que podría ser una buena conclusión, pero no se puede pensar que algo es verdadero solamente porque ha sido verdadero en cierto número de casos. Otro tipo de razonamiento es el método deductivo, que consiste en relacionar conocimientos que se suponen verdaderos de manera que se obtienen nuevos resultados. En este caso, se hará una separación de la lógica clásica y se utilizarán símbolos matemáticos, por lo que se hablará de la *lógica simbólica*.

En toda *teoría matemática* se requiere de una terminología propia o lenguaje asociado con la notación respectiva; a continuación se analizan los distintos elementos de esta terminología.

Para iniciar, las **definiciones** describen y caracterizan los **objetos matemáticos** por tratar, a los cuales se refieren las proposiciones: número, número primo o divisibilidad en la Teoría de los Números; punto, recta, plano o ángulo en Geometría; intervalos o conjunto compacto en el Análisis; vector o matriz en Álgebra, entre muchos otros. En diferentes teorías existen objetos matemáticos que no se pueden definir, estos reciben el nombre de términos primitivos.

El **axioma** es una proposición cuya validez se acepta sin demostración. Los axiomas son los fundamentos de todo desarrollo teórico, son la base sobre la cual se construye una teoría; por ejemplo, son conocidos los axiomas de Peano, el axioma de especificación, el axioma de elección, el axioma del extremo superior y los cinco postulados de Euclides, entre otros. En matemática se procura tener la menor cantidad posible de axiomas; usualmente se encuentran en las teorías fundamentales, como es el caso de la teoría de conjuntos. Sin embargo, muchas veces se hacen desarrollos axiomáticos de teorías que pueden prescindir de axiomas y construirse sobre otras teorías, para simplificar su presentación.

Como ejemplo considere el de la Geometría Euclideana, expuesta y desarrollada por Euclides en su monumental y trascendental obra *Los Elementos* (para más detalles, véase [31], [35] y [36]). Esta obra se fundamenta en 23 definiciones, y solo para ilustrar algunas a modo de ejemplo, el *punto* lo define como "*es lo que no tiene partes*", y una *recta* como "*es una longitud sin anchura*"; él mismo enuncia y propone cinco postulados:

P-1. Se puede trazar una recta desde un punto a otro cualquiera.

P-2. Se puede extender un segmento continuamente a una recta.

P-3. Se puede describir un círculo con cualquier centro y radio.

P-4. Que todos los ángulos rectos son iguales.

P-5. Que si una línea recta corta a otras dos rectas formando con ellas ángulos interiores del mismo lado menores que dos ángulos rectos, las dos líneas rectas, prolongadas indefinidamente, se cortan del lado por el cual los ángulos son menores que dos ángulos rectos.

En algunos textos se ha reemplazado el enunciado del quinto postulado por el equivalente *Axioma de Playfair*, cuyo enunciado es: *por un punto que no pertenece a una recta, existe una única recta paralela a la primera que contiene al punto.* Por otro lado, Euclides utiliza lo que denomina *nociones comunes* y enuncia cinco, estas últimas llamadas por Proclus, axiomas. Él sigue a Aristóteles: mientras que las nociones comunes se aplican a todas las ciencias, los **postulados** se aplican solo a la geometría. Como ejemplo, se mencionan solo dos nociones comunes:

1. El todo es mayor que cualquiera de sus partes.

2. Dos cantidades iguales a una tercera, son iguales entre sí.

Al negar el quinto postulado (P-5), se obtienen dos nuevas geometrías, llamadas *geometrías no euclideanas.* La negación de la afirmación de que existe una recta paralela se puede dar por medio de la tricotomía clásica, hay menos de una (ninguna) o hay más de una (varias). Así, manteniendo los cuatro primeros postulados, pero reemplazando el quinto en el caso de que no existan las rectas paralelas, se obtiene la *geometría esférica* (de Riemann); en el otro caso, se obtiene la *geometría hiperbólica* (de Bolyai y Lobachevski), en donde por un punto que no esté en una recta pasan varias paralelas (consulte [31] y [35]). En estas geometrías, curiosamente, el teorema que afirma que la suma de los ángulos internos de un triángulo es 180 grados resulta no ser cierto. Los resultados que se obtienen serán distintos, pues las premisas lo son.

El **teorema** es una proposición cuya validez se verifica como consecuencia lógica de los axiomas; se debe probar a partir de los axiomas y definiciones o de otros teoremas ya probados.

A los teoremas que no son relevantes en el desarrollo de una teoría, se acostumbra denominarlos simplemente **proposiciones**.

El **corolario** es un teorema que se deduce fácilmente de un teorema anterior o es un caso particular de un teorema general.

El **lema** es un teorema necesario para la demostración de un resultado posterior, pero que se sale del contexto de la teoría que se está desarrollando. Es decir, los lemas no son resultados centrales en el desarrollo de una teoría matemática; sin embargo, un lema en una teoría puede ser un teorema central en otra teoría.

El **escolio** es un resultado que se obtiene en el desarrollo de una demostración y que no tiene relación con la teoría que se está estudiando.

Una **conjetura** es una proposición de la que no se puede asegurar su validez; ejemplo interesante es la conocida conjetura de Goldbach, propuesta por Christian Goldbach a Leonhard Euler en 1742, en donde se afirma que todo número entero, par, mayor o igual que 4 se puede escribir como la suma de dos números primos. Hasta el día de hoy no se ha podido demostrar su validez, pero tampoco se ha encontrado un número par que no sea la suma de dos primos; solamente se ha podido comprobar para una gran cantidad de números, por ejemplo, observe que $4 = 2 + 2$, $10 = 7 + 3$, $50 = 43 + 7$, $100 = 89 + 11$.

Otra conjetura (véase [22]), pues todavía no se ha refutado ni demostrado su validez, es que hay un número infinito de números primos de Mersenne. La definición de estos números es sencilla: los *números de Mersenne* son de la forma $M_p = 2^p - 1$ para p primo, en caso de que M_p sea primo, se le llama primo de Mersenne. Curiosamente, sólo se han encontrado 47 de estos primos; el mayor de ellos es $M_{43112609} = 2^{43112609} - 1$, que además corresponde al mayor primo conocido y es el número 45 de esa lista, consta de 12 978 189 dígitos y fue descubierto en agosto del 2008 por Edson Smith, de la UCLA, en Estados Unidos.

En septiembre del 2008, Hans-Michael Elvenich, en Langenfeld, Alemania, encontró el primo de Mersenne número 46 dado por $M_{37156667} = 2^{37156667} - 1$, de 11 185 272 dígitos, que curiosamente, es menor que el anterior. Odd Magnar Strindmo, en Noruega, descubrió a $2^{42643801} - 1$ en abril del 2009, el primo número 47, que cuenta con 12 837 064 dígitos. Para mayores detalles, consulte [22] o [26].

Al igual que las dos anteriores, de Goldbach y de Mersenne, existen muchas otras conjeturas planteadas (véase [26]), unas de ellas seguirán esperando, a otras se les prueba su falsedad mientras que a otras su validez, como es el caso de von Lindemann quien probó, en 1882, que el número π es trascendente, o el caso más reciente de la conjetura de Poincaré, propuesta en 1904 y considerada uno de los problemas abiertos más importantes y difíciles en matemáticas, que ha sido demostrada afirmativamente por el matemático ruso Grigori Perelman.

Una **paradoja** es una proposición contradictoria en sí misma: no puede ser falsa ni verdadera. La palabra paradoja proviene del griego $\pi\alpha\rho\alpha$ (para), que significa *contra*, y $\delta o\xi\alpha$ (doxa), que significa *opinión*. Para profundizar sobre este tema, consulte [30].

Ejemplo 1. *La frase* “estoy mintiendo” *es una paradoja en sí misma, pues, si es verdadera, estoy mintiendo y por lo tanto es falsa; por otro lado, si es falsa, no estoy mintiendo y por lo tanto es verdadera. Es decir, la proposición no puede ser verdadera ni falsa, pues en cualquier caso se obtiene una contradicción.* ■

La paradoja anterior radica en la estructura misma del lenguaje, por lo que se dice que es una **paradoja semántica**; por otro lado, si la paradoja es debida a la escogencia de los axiomas, se dice que es una **paradoja lógica**.

Es importante señalar que los griegos fueron los primeros en plantear distintos tipos de paradojas, muchas de ellas relacionadas con la teoría de números. Fue precisamente Zenón de Elea quien formuló en el siglo V a.C. cuatro paradojas: la de la *Dicotomía*, la de *Aquiles*, la de la *Flecha* y la del *Estadio*, que en la actualidad son referente obligatorio en el estudio de este tema.

Ejemplo 2. *La idea de la paradoja de la Dicotomía (véase [31]) es la siguiente: un corredor debe recorrer una distancia d. Para lograrlo debe recorrer la mitad de esa distancia $\frac{d}{2}$ y también la mitad de esa mitad, que es $\frac{d}{4}$; luego la siguiente distancia $\frac{d}{8}$, $\frac{d}{16}$ y así se sigue. La conclusión es que el corredor debe recorrer un número infinito de distancias y el problema es que lo tiene que hacer en un tiempo finito. Por lo tanto, nunca podrá recorrer esa distancia; entonces, no hay movimiento. El problema es el concepto de infinito, en particular, realizar una división de manera infinita. En estos tiempos, todo se reduce a calcular la suma de la serie infinita:*

$$\frac{d}{2}+\frac{d}{4}+\frac{d}{8}+\frac{d}{16}+\cdots = d\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots\right) = d\cdot 1 = d$$

o, con un argumento geométrico, se puede pensar que $\frac{1}{2}$ representa la mitad de un cuadrado de lado 1, $\frac{1}{4}$ la cuarta parte, $\frac{1}{8}$ la octava parte y así sucesivamente, de forma que $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots$ es igual al área de todo el cuadrado que se sabe es 1. ■

A modo de ejemplo, se presenta además, la *Paradoja de Protágoras* ($480 - 410$ a.C.), una de las más antiguas conocidas y que surge de la argumentación entre el sofista y maestro de leyes llamado Protágoras y su estudiante Eualzo (véase [30]).

Ejemplo 3. *Protágoras aceptó como estudiante a Eualzo, quien, aunque pobre, era talentoso. Protágoras convino con él en impartirle enseñanza sin cobrarle, a condición de que una vez que el estudiante hubiese completado sus estudios y ganara el primer litigio en ejercicio de su profesión, le pagaría a Protágoras el costo de los estudios. El estudiante aceptó esta condición. Tras completar sus estudios, Eualzo no emprendió ningún caso legal. Transcurrido cierto tiempo, Protágoras buscó al estudiante y reclamó el pago o lo llevaría a los tribunales. He aquí los argumentos que alegaron uno y otro:*

– EUALZO*: Estimado maestro Protágoras, ¡no pagaré!, ya que en los tribunales solo pueden suceder dos cosas: gano o pierdo. Si gano, la ley no me obliga a pagarte. Si pierdo, entonces no se habrá cumplido que yo haya ganado mi primer litigio. Por lo tanto, y de acuerdo con nuestro convenio, no deberé pagarte.*

– PROTÁGORAS*: Estimado ex-discípulo Eualzo,... ¡pagarás!, ya que si vamos a los tribunales, podrán suceder solamente dos cosas: gano yo o ganas tú. Si gano yo, entonces la ley te obliga a pagarme. Si ganas tú, habrás ganado tu primer litigio. Por lo tanto, y de acuerdo con nuestro convenio, tendrás que pagarme.*

Parece que Protágoras y Eualzo tienen razón, o más bien, parece que ninguno tiene la razón. ■

Como dato curioso, Kurt Gödel planteó en 1931 que hay proposiciones que son *indecidibles*, ya que es imposible demostrar su validez o refutarla a partir de los axiomas. Aún más, en 1963, Paul Cohen demostró que la existencia de un número mayor que $\aleph_0$ (la cardinalidad del conjunto $\mathbb{N}$) y menor que $\boldsymbol{c}$ (la cantidad de elementos de $\mathbb{R}$) era indecidible con base en los axiomas de la teoría de conjuntos. Incluso se pensó, en algún momento, que la conjetura de Fermat era indecidible; sin embargo, ya fue demostrada por el británico Andrew Wiles en 1995 en definitiva (porque había sido anunciada por él mismo el 23 de junio de 1993 y todavía contenía algunos errores).

Una **demostración** de una proposición es un ensayo estructurado en donde se verifica y constata de forma irrefutable y convincente que dicha proposición es verdadera. Las palabras **demostración** y **prueba** son sinónimos, el término **verificar** se utiliza a veces en lugar de **probar**, sobre todo cuando la demostración es esencialmente un cálculo.

Para finalizar esta sección, es interesante la comparación que hace Mariano Perero en [28]:

> *"La matemática, como un sistema puramente formal, se puede comparar con el ajedrez, los elementos primitivos en ajedrez son las* 32 *piezas y el tablero; los axiomas son las descripciones de los movimientos de las piezas, no son evidentes, no son ni verdaderos ni falsos, son así y se aceptan sin discutir, las reglas del juego constituyen la lógica del sistema. Nadie se pregunta si el ajedrez es verdadero o falso, lo único importante es saber si se siguen las reglas"*.

Ejercicios (sección 1.1)

Los siguientes ejercicios pueden ser resueltos utilizando su destreza mental, ordene bien sus ideas y, en algunos, analice o deseche casos.

1. Había un hombre viendo un retrato y alguien le preguntó: ¿Quién aparece en el retrato? Él contesto: *"yo no tengo hermanos ni hermanas, pero el padre de este hombre es el hijo de mi padre."* ¿Qué retrato está viendo? Si el hombre hubiera respondido *"yo no tengo hermanos ni hermanas, pero el hijo de este hombre es el hijo de mi padre."* ¿Qué retrato está viendo?

2. La oración "*En hesta orasión hay tres errores*" tiene tres errores, ¿cuáles son?

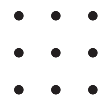
3. Al visitar una tienda, es posible hallar preciosos muebles, el más antiguo de 1825. Deduzca cuándo y dónde fue tallado cada uno y el tipo de madera, si se cuenta con los siguientes datos: la silla es un cuarto de siglo más antigua que la cama (que no es francesa); el mueble de cedro, el más antiguo, tiene un cuarto de siglo más que el de fresno; la mesa es austriaca y el mueble de roble, suizo (pero no de 1850).

4. A tres prisioneros que se hallaban en cierta cárcel, los tres por lo menos de inteligencia media, el carcelero les dijo que de un conjunto de tres sombreros blancos y dos rojos, elegiría tres de ellos y los colocaría sobre sus cabezas. Se prohibía a cada uno de ellos que viera el color del sombrero que tenía sobre su propia cabeza. Además, estaban colocados en fila, uno detrás del otro, de manera que el primero no veía ningún sombrero, el segundo veía solo el sombrero del primero y el tercero veía los sombreros de los otros dos. El carcelero ofreció la libertad al tercero, si podía decir de qué color era el sombrero que tenía sobre su propia cabeza. Éste dijo que no podría. Luego, el carcelero ofreció la libertad al segundo, a condición de que dijera cuál era el color del sombrero que tenía sobre su propia cabeza. Éste confesó que no podría decirlo. El carcelero no se molestó en hacer el ofrecimiento al primero, pero a pedido de éste, le concedió la misma oportunidad. El primer prisionero esbozó una amplia sonrisa y dijo: *No necesito ver el sombrero de ninguno de mis compañeros, pues, por lo que ellos han dicho, deduzco claramente que mi sombrero es. . . .*

5. En una fiesta hay 10 niños, se les pide que formen 5 filas de manera que se tengan 4 niños por fila y que todos ellos estén en alguna fila. ¿De qué forma deben distribuirse?

6. ¿Cómo se pueden formar 4 triángulos iguales (equiláteros) con 6 palitos del mismo tamaño (sin cortarlos)?

7. Considere nueve puntos distribuidos de la siguiente manera



Con un trazo que contenga solamente cuatro segmentos de recta y sin levantar el lápiz, una todos los puntos.

8. Un niño y una niña están sentados en los escalones afuera de su escuela. “Yo soy un niño”, dijo quien tiene el pelo negro. “Yo soy una niña”, dijo quien tiene el pelo rojo. Si al menos uno de ellos está mintiendo, ¿quién tiene el pelo rojo?

9. Manuel fue a consultar a su biblioteca tres tomos de una colección de cuentos, colocados de la manera usual, el primer tomo a la izquierda; el segundo, al centro; el tercero, a la derecha. Cada tomo tenía 100 hojas y cuando los abrió se dio cuenta de que una polilla había atravesado desde la primera hoja del primer tomo hasta la última hoja del tercero. ¿Cuántas hojas atravesó la polilla?

10. Determine el número que hace falta en cada una de las siguientes series o arreglos de números.

    (a) $7 - 8 - X - 13 - 17$

    (b) $3 - X - 31 - 95 - 283 - 851$

    (c) $17 - 19 - 22 - 16 - X - 13 - 32$

    (d) $2 - 5 - 15 - 18 - 54 - 57 - 171 - X$

    (e) $60 - 30 - 28 - X - 12 - 6 - 4$

    (f)

1	2	3	4	5	6	7	8
2	3	6	9	36	41	246	X

11. Determine el sexto término de la siguiente serie

12. Si se asume que el 70% de los hombres son inteligentes, el 70% guapos y el 70% buenos. Como mínimo, en un grupo de 100 hombres, ¿cuántos de ellos serán a la vez inteligentes, guapos y buenos?

13. Juan necesita recoger 5 litros de agua de una laguna, pero solo dispone de dos jarras, una de 7 litros y otra de 4 litros. Describa el proceder de Juan para lograr su cometido.

14. Existe un pequeño planeta de una lejana galaxia llamado *Vacilonia*, sus habitantes, los vacilonios, están clasificados en dos categorías: los *sinceros* y los *mentirosos*[1]. Los sinceros siempre dicen la verdad y los mentirosos siempre mienten. Un terrícola llega a este planeta y se encuentra con dos vacilonios, A y B. El vacilonio A dice: "B es sincero o yo soy mentiroso". ¿Qué son A y B?

15. Suponga que el vacilonio A dice: "yo soy un mentiroso o, en caso contrario, uno más uno es igual a tres" ¿Qué se puede concluir?

16. Alguien le pregunta al vacilonio A "¿es usted sincero?" y él responde: "si yo soy sincero, entonces me comeré mi sombrero". Concluya que A debe comerse el sombrero.

17. Es conocido que a los vacilonios les gusta la pimienta. Hubo un robo de esta especia y los tres sospechosos fueron A, B y C. En el juicio A dijo que B era inocente y B dijo que C era culpable. Se sabe que solo hay un culpable y que ningún inocente mintió y ningún culpable dijo la verdad, pues como es sabido, los que roban pimienta nunca dicen la verdad. ¿Quién se robó la pimienta?

18. Tres vacilonios han llegado a la Tierra. Se le pregunta al primero si es un mentiroso. Éste responde a la pregunta. El segundo dice entonces que el primero negó ser un mentiroso. Finalmente, el

[1] Algunos de estos acertijos se deben al gran matemático, lógico, filósofo, ajedrecista y mago profesional Raymond Smullyan (consulte [33]).

tercero afirma que el primero es realmente un mentiroso. ¿Cuántos de los vacilonios eran mentirosos? ¿Qué era el segundo vacilonio?

19. Nos encontramos a tres vacilonios A, B y C que han llegado a la Tierra. Un terrícola le pregunta a A "¿eres sincero o mentiroso?"; responde A, pero el terrícola no pudo escucharlo y por eso le pregunta a B "¿qué ha dicho A?" y B le responde "A ha dicho que es un mentiroso". Pero al mismo tiempo C dice "no le crea a B, está mintiendo". ¿Qué son B y C?

20. De nuevo nos encontramos a tres vacilonios A, B y C. Pero esta vez el terrícola le pregunta a A "¿cuántos sinceros hay entre ustedes?"; de nuevo responde A, pero el terrícola no pudo escucharlo y por eso le pregunta a B "¿qué ha dicho A?" y B le responde "A ha dicho que hay un sincero entre nosotros". Pero al mismo tiempo C dice "no le crea a B, está mintiendo". ¿Qué son B y C?

21. En esta oportunidad, usted se encuentra en Vacilonia. Se sabe que en Vacilonia hay hombres y mujeres y que cada uno puede ser sincero o mentiroso. Usted va a un baile de máscaras y se encuentra con un par de vacilonios, A y B. Usted no puede determinar el sexo ni la categoría de cada uno de ellos; sin embargo, A afirma: "ambos somos mentirosos(as)" y B afirma: "ambos somos mujeres". ¿Qué son A y B?

22. A y B, aburridos de ser sinceros, decidieron cambiar por una semana. Ahora, A sería sincero solamente los lunes, martes y miércoles, y mentiroso el resto de la semana; B sería sincero solamente los jueves, viernes y sábado, mentiroso los otros días. Se encuentran un día de esa semana y A dice: "ayer no dije la verdad". B le responde: "ayer yo también mentí". ¿Qué día se encontraron los vacilonios A y B?

23. Manuel afirma que "*Solo hay tres clases de personas, los que saben contar y los que no*", ¿qué se puede concluir?

24. Se tienen cuatro mujeres: Alicia, Bárbara, Carolina y Diana. Sus ocupaciones son: abogada, bióloga, costurera y dentista. Cada una de ellas tiene un automóvil cuyas marcas son: Toyota, Fiat, Mercedes y Subarú. No se sabe quién es quién ni cuál automóvil tiene, pero se cuenta con la siguiente información: la abogada derrotó a Bárbara jugando al tenis. Carolina y la costurera van a nadar con las mujeres que tienen automóviles Mercedes y Subarú. Alicia y la dentista visitaron a la mujer del Subarú, quien no es la bióloga, pues esta última tiene un Toyota. Deduzca la ocupación y la marca del vehículo de cada mujer.

25. Encuentre el dígito asociado con cada letra utilizada en la suma

$$\begin{array}{ccccc} & \mathrm{T} & \mathrm{R} & \mathrm{E} & \mathrm{S} \\ & \mathrm{T} & \mathrm{R} & \mathrm{E} & \mathrm{S} \\ + & \mathrm{T} & \mathrm{R} & \mathrm{E} & \mathrm{S} \\ \hline \mathrm{N} & \mathrm{U} & \mathrm{E} & \mathrm{V} & \mathrm{E} \end{array}$$

de manera que esta suma sea aritméticamente correcta y a letras distintas les correspondan dígitos distintos. Como es natural en el sistema decimal, los posibles dígitos son 0, 1, 2,. . . , 8, 9.

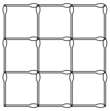
26. Análogo al ejercicio anterior, con $\begin{array}{ccccc} & \mathrm{S} & \mathrm{E} & \mathrm{N} & \mathrm{D} \\ + & \mathrm{M} & \mathrm{O} & \mathrm{R} & \mathrm{E} \\ \hline \mathrm{M} & \mathrm{O} & \mathrm{N} & \mathrm{E} & \mathrm{Y} \end{array}$

27. Un crimen es cometido por una persona y hay 4 sospechosos: Juan, Andrés, Pedro y Rafael. Al ser interrogados, cada uno declara:
    Andrés: "*Pedro es culpable*".
    Rafael: "*yo no soy culpable*".
    Pedro: "*Juan es culpable*".
    Juan: "*Pedro miente cuando dice que yo soy culpable*".
    Si se sabe que solo uno dice la verdad, ¿quién es el culpable?

28. Suponga que se tienen cuatro interruptores y solo uno de ellos enciende un bombillo que se encuentra en una habitación cerrada. Usted puede entrar a la habitación una única vez, pero puede

conectar o desconectar los interruptores las veces que quiera antes de ingresar al cuarto. ¿Podría usted encontrar la manera de deducir cuál de los cuatro interruptores enciende el bombillo?

29. La figura siguiente está formada con 24 fósforos, elimine 4 de ellos para que queden solamente 5 cuadrados.



30. Un rey ordenó a su orfebre confeccionar 800 monedas de oro de 10 gramos cada una, todas del mismo tamaño. Éste se las entregó distribuidas en 8 sacos de 100 monedas cada una. Uno de sus fieles le confirmó que todas las monedas de uno de los sacos pesaban solamente 9 gramos, pues el orfebre mezcló parte del oro con otro metal. Al enterarse de ello, el rey colocó una báscula y ofreció como recompensa uno de los sacos al que lograra descubrir cuál era el saco con las monedas adulteradas utilizando la menor cantidad de veces la báscula. Determine cuál es la menor cantidad posible de veces que se puede utilizar la báscula para descubrir el saco de las monedas falsas.

31. Este ejercicio de lógica fue tomado del libro *Harry Potter y la piedra filosofal* de la autora inglesa J. K. Rowling. Inicia cuando Hermione y Harry, en busca de la piedra filosofal, se encuentran frente a una mesa que contiene siete botellas de diferente tamaño puestas en fila, en donde la botella más pequeña está al centro.

   −¡Mira!− Hermione cogió un rollo de papel que estaba cerca de las botellas. Harry miró por encima de sus hombros para leerlo:

   El peligro yace ante ti, mientras la seguridad está detrás, dos queremos ayudarte, cualquiera que encuentres, una entre nosotras siete te dejará adelantarte, otra llevará al que lo beba para atrás, dos *contienen sólo vino de ortiga, tres son mortales, esperando escondidas en la fila. Elige, a menos que quieras quedarte para siempre; para ayudarte en tu elección, te damos cuatro claves:*

1. *Por más astucia que tenga el veneno para ocultarse siempre encontrarás alguno al lado izquierdo del vino de ortiga y no hay dos venenos consecutivos.*
2. *Son diferentes las que están en los extremos, pero si quieres moverte hacia adelante, ninguna es tu amiga.*
3. *Como claramente ves, todas tenemos tamaños diferentes: ni el enano ni el gigante guardan la muerte en su interior.*
4. *La segunda a la izquierda y la segunda a la derecha son gemelas una vez que las pruebes, aunque a primera vista sean diferentes.*

Hermione dejó escapar un gran suspiro y Harry, sorprendido, vio que sonreía, lo último que había esperado que hiciera.
−Muy bueno−dijo Hermione−. Esto no es magia... es lógica... es un acertijo. Muchos de los más grandes magos no han tenido una gota de lógica y se quedarían aquí para siempre...

Puede usted descifrar este acertijo y concluir cuál botella los hará volver y cuál les permitirá seguir adelante.

32. Dos amigos matemáticos hablan de sus familias. Uno le pregunta al otro que si tiene hijos y qué edades tienen, la respuesta simple se disfraza de acertijo y el diálogo entre la conversación fue:

    – El producto de las edades de mis tres hijos es, actualmente, 36 y la suma es justamente el número de la casa en que tú vives. ¿Aciertas las edades de ellos?
    – A decir verdad, todavía no puedo, pues me falta un dato– le responde luego de algunos minutos.
    – Tienes razón, le contestó. ¡El mayor toca piano!

    Con esta información, puede usted deducir las edades de los hijos.

33. Tengo el doble de la edad que tú tenías cuando yo tenía la edad que tú tienes, y cuando tengas la edad que tengo, nuestras edades sumarán 63. ¿Qué edad tengo?

34. Discuta y analice las siguientes paradojas:

    (a) *Paradoja de Epiménides*, el cretense, quien afirmó que todos los cretenses son mentirosos.

    (b) *Paradoja de Protágoras*. Véase ejemplo 3, página 34.

    (c) *Paradoja del barbero*, propuesta por B. Russell, que dice: El único barbero de la ciudad dice que afeitará a todos aquellos que no se afeiten a sí mismos. ¿quién afeitará al barbero?

    (d) *Paradoja de Aquiles*. Según este argumento, el más rápido de los hombres, Aquiles, no podrá alcanzar nunca al más lento de los animales, la tortuga, si se da a ésta una ventaja inicial en una carrera. Pues, mientras Aquiles recorre el camino que la tortuga llevaba por la ventaja inicial, ésta habrá recorrido otra porción, aunque más pequeña. Cuando Aquiles haya llegado a recorrer esta última porción de camino, la tortuga habrá avanzado otra porción más pequeña y así la tortuga siempre llevará la ventaja hasta en espacios infinitamente pequeños, con lo cual Aquiles nunca podrá alcanzarla.

    (e) Cervantes, en el capítulo LI de El Quijote, escribió: "*Si alguno pasare por este puente de una parte a otra, ha de jurar primero a dónde va y a qué va; y si jurare la verdad, déjenle pasar, y si dijere mentira, muera por ello ahorcado en la horca que allí se muestra, sin remisión alguna". Sabida esta ley y la rigurosa condición de ella, pasaban muchos, que luego en lo que juraban se echaba de ver que decían la verdad y los jueces los dejaban pasar libremente. Sucedió, pues, que tomando juramento a un hombre, juró y dijo que para el juramento que hacía, iba a morir en aquella horca que allí estaba y no a otra cosa.* ¿Este hombre dice verdad o mentira?

1.2 Conectivas lógicas

El lenguaje de la lógica formal está estructurado de manera que no admite paradojas semánticas. Las teorías matemáticas formulan sus axiomas de tal forma que no conducen a ninguna paradoja. En este sentido, para esta formalización son necesarias algunas definiciones y principios que permitan levantar esta teoría matemática, sin caer en paradojas análogas a las que se mencionaron anteriormente.

Se dice que una **proposición** (enunciado o cláusula) es una combinación de símbolos del lenguaje, cuya característica fundamental es que se le puede asignar un **valor de verdad**: verdadero o falso, **V** o **F** respectivamente.

Toda proposición debe cumplir con los principios:

1. **De identidad**: si una proposición es verdadera, entonces es siempre verdadera.
2. **De no-contradicción**: ninguna proposición puede ser falsa y verdadera a la vez.
3. **Del tercero excluido**: una proposición es falsa o es verdadera.

Estos tres principios establecen que toda proposición debe tener un y solo un valor de verdad. A partir de las proposiciones *simples* o llamadas *atómicas*, se obtienen las proposiciones *compuestas* o *moleculares*, mediante la aplicación de las *conectivas lógicas*: negación, conjunción, disyunción, disyunción exclusiva, implicación y equivalencia.

Seguidamente, para describir el comportamiento de estas conectivas, se utilizará la **tabla de verdad**, en donde se indica el valor de verdad de la proposición compuesta, para todos los posibles valores de verdad de las proposiciones atómicas que la componen. Ponga especial atención en el lenguaje que se utiliza y las diferentes maneras de referirse a ellas.

Si P es una proposición, la **negación** de P es la nueva proposición $\boldsymbol{\neg P}$, que se lee "no es cierto que P" o "no P"

P	$\neg P$
V	F
F	V

Ejemplo 4. *Si se considera la proposición verdadera $P : 3 > 2$, la negación es $\neg P : 3 \leq 2$, cuyo valor de verdad es F.* ■

Ejemplo 5. *Si P es la proposición "$2 + 1 = 5$", la proposición $\neg P$ es "no es cierto que $2 + 1 = 5$" o simplemente "$2 + 1 \neq 5$". Claramente, el valor de verdad de P es falso y el de $\neg P$ es verdadero.* ■

Si P y Q son dos proposiciones, la conectiva binaria **conjunción** de P y Q es la nueva proposición $\boldsymbol{P \wedge Q}$, que se lee "P y Q". Su valor de verdad está dado por la tabla

P	Q	$P \wedge Q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

Ejemplo 6. *Si se consideran las dos proposiciones $P : 3 > 2$ y $Q : 2 + 2 = 3$, donde claramente P es verdadera y Q es falsa, se tiene que la proposición compuesta $P \wedge Q$ es falsa.* ■

La conectiva **disyunción** de P y Q es la nueva proposición $\boldsymbol{P \vee Q}$, que se lee "P o Q". Su valor de verdad está dado por la tabla

P	Q	$P \vee Q$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Ejemplo 7. *Considere* $P : 2^3 = 6$ *y* $Q : 2 + 2 = 4$ *dos proposiciones donde claramente* P *es falsa y* Q *es verdadera. Se tiene que la proposición compuesta* $P \vee Q$ *es verdadera.* ■

La conectiva binaria **disyunción exclusiva** de P y Q es la nueva proposición $\boldsymbol{P \veebar Q}$, que se lee "P o Q, pero no ambas". Su valor de verdad está dado por la tabla

P	Q	$P \veebar Q$
V	V	F
V	F	V
F	V	V
F	F	F

En la lengua castellana se utiliza la misma letra "o" para las proposiciones que admiten como verdaderas ambas y para las que solo se admite una verdadera. Se debe hacer la diferencia, por ejemplo, en casos como la proposición "Mario es hombre o mujer, pero no ambos". En latín se utilizaba la palabra *aut* para la o exclusiva y la palabra *vel* para la inclusiva, es decir, para el caso en que se admiten ambos. La inicial de *vel* se tomó como el símbolo $\vee$ (véase [21]).

Si P y Q son dos proposiciones, la **implicación** de Q por P es la nueva proposición $\boldsymbol{P \rightarrow Q}$, que se lee "si P entonces Q" o "P implica Q". Su valor de verdad está dado por la tabla

P	Q	$P \rightarrow Q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Otras formas de leer esta proposición son "Q si P" o "P solo si Q" o "P es suficiente para Q" o "Q es necesario para P". A la proposición P se le llama **antecedente** y a Q, **consecuente**.

Ejemplo 8. *Considere $P : 1 + 1 = 3$ y $Q : 5$ es impar, dos proposiciones donde evidentemente P es falsa y Q es verdadera. Se tiene que la proposición compuesta $P \to Q$ es verdadera.* ■

La **doble implicación** o **bicondicional** de P y Q es la nueva proposición $\boldsymbol{P \leftrightarrow Q}$, que se lee "$P$ si y solo si Q". La proposición $P \leftrightarrow Q$ es equivalente con $(P \to Q) \wedge (Q \to P)$ y su valor de verdad está dado por la tabla

P	Q	$P \leftrightarrow Q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

Otra forma de leer esta proposición es "P es necesario y suficiente para Q".

Ejemplo 9. *Si se consideran las proposiciones $P :$ 4 es un número impar; $Q : 1 + 1 = 3$, es claro que tanto P como Q son proposiciones falsas; por lo tanto, se tiene que la proposición compuesta $P \leftrightarrow Q$ es verdadera.* ■

En la aplicación de las conectivas se puede establecer una prioridad para evitar el uso excesivo de los paréntesis, y se debe entender en el orden: $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\to$, $\leftrightarrow$. Por ejemplo, con esta convención, sería posible escribir $P \to Q \vee R$ en vez de $P \to (Q \vee R)$, o escribir

$$P \vee Q \to R \wedge S \leftrightarrow \neg T \vee V$$

en vez de

$$\big[(P \vee Q) \to (R \wedge S)\big] \leftrightarrow (\neg T \vee V)$$

Sin embargo, se tratará de ser lo más específico posible y en algunos casos se utilizarán los paréntesis, aunque no sean necesarios.

Ejemplo 10. *Sean P y Q las proposiciones*

$P:$ 31 *es un número primo*

$Q:$ *el hielo es caliente*

Determine el valor de verdad de las proposiciones $P \wedge Q$, $P \vee Q$.

Solución. El valor de verdad de P es verdadero; el de Q es falso. La proposición $P \wedge Q$ es "31 es un número primo y el hielo es caliente" es F, mientras que $P \vee Q$ es V. ■

Ejemplo 11. *Si P y Q corresponden a las proposiciones*

$P:$ *hay vida en la Luna*

$Q:$ $2+1=3$

Determine el valor de verdad de P, Q, $P \vee Q$, $P \wedge Q$, $P \rightarrow Q$, $P \leftrightarrow Q$.

Solución. Claramente, el valor de verdad de P es F y el de Q es V; así, la proposición $P \vee Q$, que se lee "hay vida en la Luna o $2+1=3$", tiene como valor de verdad V. Análogamente, el valor de verdad de $P \wedge Q$ es F, de $P \rightarrow Q$ es V, de $P \leftrightarrow Q$ es F. ■

Ejemplo 12. *Considere las proposiciones P, Q y R dadas por*

$P:$ *el problema tiene solución*

$Q: a+b=1$

$R:$ *n es un número primo.*

- *La proposición "Una condición necesaria para que el problema tenga solución es que $a+b=1$ y n sea un número primo" se simboliza como $P \rightarrow (Q \wedge R)$.*

- *La proposición "Si $a+b=1$ y n es un número primo, entonces el problema tiene solución" se simboliza como $(Q \wedge R) \rightarrow P$.*

- *La proposición "$a+b=1$ y si n es un número primo entonces el problema tiene solución" se simboliza como $Q \wedge (R \rightarrow P)$.*

– *La proposición "Una condición suficiente para que el problema tenga solución es que* $a + b = 1$*" se simboliza como* $Q \to P$*.*

– *La proposición "El problema tiene solución si* n *es un número primo o si* $a + b \neq 1$*" se simboliza como* $(R \vee \neg Q) \to P$*.* ■

Ejemplo 13. *Simbolice y valide las proposiciones:*
S : *Si hay elefantes en Marte y el fuego es frío, entonces* $2 + 1 = 4$
T : *Hay elefantes en Marte, y si el fuego es frío, entonces* $2 + 1 = 4$.

Solución. Se toman las proposiciones atómicas
P : hay elefantes en Marte
Q : el fuego es frío
$R : 2 + 1 = 4$.
Claramente, estas tres proposiciones son falsas; así, la proposición S se simboliza como $(P \wedge Q) \to R$ y su valor de verdad es:

$$[(F \wedge F) \to F] \equiv [F \to F] \equiv V$$

Se utiliza el símbolo $\equiv$ para representar proposiciones equivalentes, es decir, que tienen el mismo valor de verdad. La proposición T se simboliza como $P \wedge (Q \to R)$ y su valor de verdad es

$$[F \wedge (F \to F)] \equiv [F \wedge V] \equiv F$$

es decir, T es falsa. ■

Ejemplo 14. *Construya la tabla de verdad de la proposición*

$$(\neg P \wedge Q) \to (\neg Q \vee P)$$

Solución. Para construir la tabla, se parte de las proposiciones atómicas y en cada columna se van formando las proposiciones compuestas, hasta llegar, en la última columna, a la proposición dada.

P	Q	$\neg P$	$\neg P \wedge Q$	$\neg Q$	$\neg Q \vee P$	$(\neg P \wedge Q) \rightarrow (\neg Q \vee P)$
V	V	F	F	F	V	V
V	F	F	F	V	V	V
F	V	V	V	F	F	F
F	F	V	F	V	V	V

■

Se dice que una proposición compuesta es una **tautología** si es verdadera para todos los posibles valores de verdad de las proposiciones atómicas que la componen. Para representar una tautología se utiliza el símbolo $\boldsymbol{V_0}$.

Ejemplo 15. *La proposición $P \vee \neg P$ es una tautología, pues su valor de verdad siempre es verdadero para toda proposición P. En este caso, se puede escribir $P \vee \neg P \equiv V_0$.* ■

Se dice que una proposición compuesta que es falsa para todos los posibles valores de verdad de las proposiciones atómicas que la componen es una **contradicción**. Para representarla se utiliza el símbolo $\boldsymbol{F_0}$.

Ejemplo 16. *La proposición $P \wedge \neg P$ es una contradicción, pues su valor de verdad siempre es falso para toda proposición P, independiente de si P es falsa o verdadera. En este caso, se puede escribir $P \wedge \neg P \equiv F_0$.* ■

Se dice que una proposición compuesta será una **contingencia** o **eventualidad** si no es una tautología ni una contradicción.

Ejemplo 17. *La proposición*

$$(\neg P \wedge Q) \rightarrow (\neg Q \vee P)$$

es una contingencia, pues, como se verificó en el ejemplo 14, *no es tautología ni contradicción.* ■

Sean P y Q dos proposiciones, se dice que:

- **$\boldsymbol{P}$ implica (tauto)lógicamente a $\boldsymbol{Q}$** si y solo si $P \to Q$ es una tautología. En este caso se escribe $\boldsymbol{P \Rightarrow Q}$.
- **$\boldsymbol{P}$ es (tauto)lógicamente equivalente a $\boldsymbol{Q}$** si y solo si $P \leftrightarrow Q$ es una tautología. En este caso se escribe $\boldsymbol{P \Leftrightarrow Q}$ o $\boldsymbol{P \equiv Q}$.

En matemáticas, las tautologías son conocidas como **teoremas**. Muchas de las proposiciones, resultados o teoremas son implicaciones lógicas o equivalencias lógicas. Por ejemplo, en el álgebra usual de los números reales se tiene la proposición "Si $a \neq 0$, entonces $a^0 = 1$", y en geometría, "Si un triángulo es equilátero y l es la longitud de su lado, entonces su área es $\frac{l^2\sqrt{3}}{4}$", ambas son implicaciones que siempre se cumplen, es decir, son implicaciones lógicas y, por lo tanto, son teoremas. El conocido teorema de Pitágoras afirma que "En un triángulo rectángulo se cumple que la suma del cuadrado de los catetos es igual al cuadrado de la hipotenusa", pero además afirma que "Si a, b y c son las medidas de los lados de un triángulo y se cumple que $a^2 + b^2 = c^2$, entonces el triángulo es rectángulo". Este teorema es, básicamente, una equivalencia lógica.

Ejemplo 18. *Por medio de una tabla de verdad, determine si la proposición $P \to Q$ es lógicamente equivalente a la proposición $\neg P \vee Q$.*

Solución. Es necesario determinar si $(P \to Q) \longleftrightarrow (\neg P \vee Q)$ es o no una tautología. Se construye la tabla de verdad asociada:

P	Q	$P \to Q$	$\neg P$	$\neg P \vee Q$	$(P \to Q) \longleftrightarrow (\neg P \vee Q)$
V	V	V	F	V	V
V	F	F	F	F	V
F	V	V	V	V	V
F	F	V	V	V	V

Como la última columna es verdadera en todos los casos, la proposición dada es una tautología y se cumple que $(P \to Q) \Longleftrightarrow (\neg P \vee Q)$. ■

Sean P y Q dos proposiciones:

- La **recíproca** de $P \to Q$ es la nueva proposición $Q \to P$.
- La **contrapositiva** de la proposición $P \to Q$ es $\neg Q \to \neg P$.

Ejemplo 19. *Sea T la proposición*

$$T: \textit{ si } 1+1=3, \textit{ entonces } 5 \geq 4$$

La contrapositiva de T es la proposición "si $5 < 4$, entonces $1+1 \neq 3$", mientras que la recíproca de T es la proposición "si $5 \geq 4$, entonces $1+1=3$". Es claro que T y su contrapositiva son verdaderas, en cambio, su recíproca es falsa. ■

Recuerde ahora la fórmula para a y b números reales, conocida como la *primera fórmula notable*:

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \tag{1.1}$$

Lo que esta fórmula dice es que para cualquier valor de a y de b se puede reemplazar la expresión $(a+b)^2$ por $a^2+2ab+b^2$ o viceversa, y el resultado no se altera.

El ejemplo 18 no dice que las dos proposiciones sean iguales, sino más bien equivalentes, es decir, es una especie de fórmula notable en donde se puede reemplazar la expresión $P \to Q$ por $\neg P \vee Q$ o viceversa, y el valor de verdad no cambia. Para indicar esta equivalencia tautológica, en ocasiones, como ya se mencionó, se utiliza el símbolo $\equiv$.

Como las fórmulas son válidas vía reemplazos, se tiene que

$$(x^2+3)^2 = x^4 + 6x^2 + 9$$

es verdadera al sustituir a por x^2 y sustituir b por 3 en la fórmula (1.1). De la misma forma,

$$[(P \wedge Q) \to \neg R] \equiv [\neg(P \wedge Q) \vee \neg R]$$

es verdadera, pues se obtiene de la equivalencia $(P \rightarrow Q) \Leftrightarrow (\neg P \vee Q)$, probada en el ejemplo 18 al sustituir la proposición P por la proposición $(P \wedge Q)$ y, al mismo tiempo, sustituir Q por $\neg R$.

Ejemplo 20. *Construya la tabla de verdad para la siguiente proposición y clasifíquela.*

$$[P \rightarrow (Q \vee R)] \longleftrightarrow (\neg P \wedge R)$$

Solución. Se procede como en el ejemplo anterior, pero como hay 3 proposiciones atómicas involucradas, se tienen $2^3 = 8$ posibles asignaciones de valores de verdad diferentes, que corresponden a las 8 filas. Por otro lado, para simplificar la escritura, la última columna corresponde a la proposición dada, etiquetada con $*$, que se obtiene de la doble equivalencia entre la quinta y séptima columnas.

P	Q	R	$Q \vee R$	$P \rightarrow (Q \vee R)$	$\neg P$	$\neg P \wedge R$	$*$
V	V	V	V	V	F	F	F
V	V	F	V	V	F	F	F
V	F	V	V	V	F	F	F
V	F	F	F	F	F	F	V
F	V	V	V	V	V	V	V
F	V	F	V	V	V	F	F
F	F	V	V	V	V	V	V
F	F	F	F	V	V	F	F

Con lo cual, la proposición dada es una contingencia. ■

Ejercicios (sección 1.2)

1. Si P, Q, R son verdaderas y S, T son falsas, determine el valor de verdad de las proposiciones:

   (a) $\big[P \rightarrow (R \rightarrow T)\big] \leftrightarrow \big[(\neg P \wedge S) \rightarrow (Q \rightarrow \neg T)\big]$

   (b) $\big[(\neg T \vee \neg P) \leftrightarrow [T \rightarrow (R \vee S)]\big] \leftrightarrow \big[(P \wedge Q \wedge \neg T) \rightarrow (\neg Q \rightarrow \neg S)\big]$

2. Determine, utilizando tablas de verdad, si cada proposición compuesta es tautología, contradicción o contingencia.

   (a) $\neg(P \to Q) \leftrightarrow (P \wedge \neg Q)$
   (b) $R \to \big[(\neg P \vee Q) \wedge (P \wedge \neg Q)\big]$
   (c) $(P \vee Q) \to \big[Q \to (P \wedge Q)\big]$
   (d) $\big[(P \to Q) \to R\big] \longleftrightarrow \big[(P \wedge \neg R) \to \neg Q\big]$
   (e) $\big[\neg(\neg P \wedge R) \vee Q\big] \longleftrightarrow \big[(\neg P \vee R) \wedge Q\big]$

3. Determine una asignación de valores de verdad para A, B, C, D y E que verifique que $\big[\big(A \to (B \vee C)\big) \wedge \big(C \to (D \wedge E)\big) \wedge \neg D\big]$ no implica tautológicamente a $A \to E$.

4. Determine valores de verdad para A, B, C y D, de manera que se verifique que $\big[(A \to B) \wedge (C \to D) \wedge (B \vee C)\big]$ no implica tautológicamente a $A \vee D$.

5. Utilice tablas de verdad para determinar si la proposición $(P \to Q) \vee \big[(\neg Q \to \neg P) \wedge \neg R\big]$ es tautológicamente equivalente a la proposición $\neg(P \wedge \neg Q)$.

6. Si $P \to Q$ es falsa, determine el valor de verdad de la proposición $\big[(P \vee R) \wedge \neg Q\big] \to \big[(\neg P \wedge S) \to (T \vee P)\big]$.

7. Si $(P \to Q) \wedge R$ es verdadera, determine el valor de verdad de la proposición $\big[(\neg P \vee T) \vee Q\big] \wedge \big(\neg R \to S\big)$.

8. Utilice tablas de verdad para comprobar que

   (a) $\big[(Q \to R) \wedge (\neg Q \to S)\big] \Longrightarrow (R \vee S)$
   (b) $\big[\neg P \vee (Q \to R)\big] \Longleftrightarrow \big[\neg(P \wedge Q) \vee R\big]$

9. Utilice una tabla de verdad para demostrar que $P \veebar Q$ es equivalente a $(P \wedge \neg Q) \vee (Q \wedge \neg P)$.

10. Considere las proposiciones P : Héctor estudia; Q : Felipe estudia; R : Héctor juega fútbol; S : Felipe juega fútbol; T : Héctor invita a Felipe a jugar fútbol.
    Simbolice las proposiciones:
    (a) Héctor o Felipe estudian, pero Héctor invita a Felipe a jugar fútbol.
    (b) Si Héctor invita a Felipe a jugar fútbol, entonces Felipe no estudia.
    (c) Si Héctor y Felipe juegan fútbol, entonces ni Héctor ni Felipe estudian.
    (d) Felipe estudia si y solo si no juega fútbol.
    (e) Una condición necesaria para que Felipe y Héctor estudien es que no jueguen fútbol.
    (f) No es cierto que Héctor invita a Felipe a jugar fútbol y Héctor estudie.
11. Considere las proposiciones P : se nombre presidente; Q : la mayoría vote por él; R : tenga buena salud; S : habrá una crisis de gobierno.
    Simbolice las siguientes proposiciones:
    (a) Una condición necesaria para que se nombre presidente es que la mayoría vote por él y tenga buena salud.
    (b) La mayoría votó por él y tiene buena salud. Por lo tanto, se nombró presidente.
    (c) No habrá crisis si y solo si una condición suficiente para que se nombre presidente es que la mayoría vote por él.
    (d) Si la mayoría no vota por él o no tiene buena salud, entonces no se nombra presidente y habrá una crisis de gobierno.
    (e) O la mayoría vota por él o habrá una crisis de gobierno si y solo si no se nombra presidente.

12. Escriba la contrapositiva y la recíproca de las proposiciones:
    (a) Si $1 < 4$, entonces $5 \geq 8$
    (b) Si la inundación destruye mi casa o el fuego destruye mi casa, entonces la compañía de seguros me pagará.
    (c) Si no es cierto que $2+2 = 4$ y 9 es un número primo, entonces $2 + 2 = 5$ u 11 es un número par.
    (d) Si n no es un cuadrado perfecto, entonces n es un número primo o n es un número par, pero no ambos.
13. Defina la conectiva *trazo de Sheffer*, que se denota por $\mid$, como la *anticonjunción*, es decir, la negación de la conjunción, por la tabla:

P	Q	$P \mid Q$
V	V	F
V	F	V
F	V	V
F	F	V

    Determine cuál de las conectivas estudiadas corresponde a $P \mid P$, cuál a $(P \mid Q) \mid (P \mid Q)$ y cuál a $(P \mid P) \mid (Q \mid Q)$.
14. Defina la conectiva *flecha de Pierce*, que se denota por $\downarrow$, como la *antidisyunción*, es decir, la negación de la disyunción, por la tabla:

P	Q	$P \downarrow Q$
V	V	F
V	F	F
F	V	F
F	F	V

    Determine cuál de las conectivas estudiadas corresponde a $P \downarrow P$, cuál a $(P \downarrow Q) \downarrow (P \downarrow Q)$ y cuál a $(P \downarrow P) \downarrow (Q \downarrow Q)$.
15. Si P, Q, T son verdaderas y R, S son falsas, determine el valor de verdad de $\big[(P \vee S) \downarrow (R \mid T)\big] \veebar \big[(\neg P \mid S) \downarrow (Q \rightarrow \neg T)\big]$.

1.3 Leyes de la lógica

En el mismo sentido de equivalencia explicado al final de la sección anterior, las leyes que se dan en la tabla 1.1 hablan de proposiciones que serán equivalentes. Estas leyes o equivalencias (tauto)lógicas permiten simplificar expresiones lógicas en el sentido tautológico y sirven para conjeturar nuevos resultados.

Además, permiten demostrar algunos resultados sin construir tablas de verdad, lo cual es muy tedioso en algunos casos donde la proposición compuesta involucra a cuatro o más proposiciones atómicas.

La validez de estas leyes se puede verificar mediante tablas de verdad (ver ejemplo 18) o por medio de un desarrollo lógico y la aplicación de las leyes dadas en la tabla 1.1 (ver ejemplo 25).

Para simplificar la notación y el desarrollo de los siguientes ejemplos, en algunas ocasiones se usarán las claves dadas en esta tabla, así por ejemplo, en vez de Implicación y Disyunción, se escribe ID; en vez de Doble Negación, se escribe DN y así sucesivamente.

Ejemplo 21. *Pruebe que la proposición* $P \to Q$ *es lógicamente equivalente a la proposición* $\neg Q \to \neg P$*, es decir, que* $(P \to Q) \Leftrightarrow (\neg Q \to \neg P)$.

Solución. Tome la proposición $P \to Q$ y al aplicar las leyes que se enuncian en la columna de justificación, se obtiene la proposición $\neg Q \to \neg P$, así:

$P \to Q$	**Justificación**
$\equiv \neg P \vee Q$	ID
$\equiv Q \vee \neg P$	Conmutatividad
$\equiv \neg(\neg Q) \vee \neg P$	Doble Negación
$\equiv \neg Q \to \neg P$	ID

Con lo cual, se ha probado la equivalencia lógica. ■

Implicación y disyunción (ID)	$P \to Q \equiv \neg P \vee Q$
Contrapositiva	$P \to Q \equiv \neg Q \to \neg P$
Doble negación (DN)	$\neg\neg P \equiv P$
De Morgan (DM)	$\neg(P \vee Q) \equiv \neg P \wedge \neg Q$ $\neg(P \wedge Q) \equiv \neg P \vee \neg Q$
Conmutativa (Con.)	$P \vee Q \equiv Q \vee P$ $P \wedge Q \equiv Q \wedge P$
Asociativa (Aso.)	$(P \vee Q) \vee R \equiv P \vee (Q \vee R)$ $(P \wedge Q) \wedge R \equiv P \wedge (Q \wedge R)$
Distributiva (Dis.)	$P \vee (Q \wedge R) \equiv (P \vee Q) \wedge (P \vee R)$ $P \wedge (Q \vee R) \equiv (P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$
Idempotencia (Ide.)	$P \wedge P \equiv P$ $P \vee P \equiv P$
Neutro (Ne.)	$P \vee F_0 \equiv P$ $P \wedge V_0 \equiv P$
Inversos (Inv.)	$P \vee \neg P \equiv V_0$ $P \wedge \neg P \equiv F_0$
Dominación (Dom.)	$P \wedge F_0 \equiv F_0$ $P \vee V_0 \equiv V_0$
Absorción (Abs.)	$P \vee (P \wedge Q) \equiv P$ $P \wedge (P \vee Q) \equiv P$
Exportación (Exp.)	$P \to (Q \to R) \equiv (P \wedge Q) \to R$

Tabla 1.1: Equivalencias lógicas.

Como se mencionó anteriormente, la proposición $\neg Q \to \neg P$ se conoce como la **contrapositiva** de $P \to Q$. Recuerde que la contrapositiva no debe confundirse, pues no es equivalente con $Q \to P$, que se conoce como la **recíproca** de $P \to Q$.

Ejemplo 22. *Simplifique la expresión* $[P \vee (Q \wedge R)] \vee (\neg Q \wedge R)$

Solución. Se toma la expresión y, al aplicar las leyes que se enuncian en la columna de justificación, se va simplificando como sigue:

$[P \vee (Q \wedge R)] \vee (\neg Q \wedge R)$	**Justificación**
$\equiv P \vee [(Q \wedge R) \vee (\neg Q \wedge R)]$	Asociatividad
$\equiv P \vee [(Q \vee \neg Q) \wedge R)]$	Distributividad
$\equiv P \vee [V_0 \wedge R]$	Inversos
$\equiv P \vee R$	Neutro

Es decir, $[P \vee (Q \wedge R)] \vee (\neg Q \wedge R)$ se simplifica como $P \vee R$. ■

Ejemplo 23. *Simplifique la expresión*

$$\neg\Big[(\neg Q \vee P) \wedge \neg[(\neg P \wedge (Q \wedge R)) \wedge (P \vee R)]\Big]$$

Solución. Como en el ejemplo anterior:

$\neg\Big[(\neg Q \vee P) \wedge \neg[(\neg P \wedge (Q \wedge R)) \wedge (P \vee R)]\Big]$	**Justificación**
$\equiv \neg(\neg Q \vee P) \vee \neg\Big[\neg[(\neg P \wedge (Q \wedge R)) \wedge (P \vee R)]\Big]$	DM
$\equiv (Q \wedge \neg P) \vee [(\neg P \wedge (Q \wedge R)) \wedge (P \vee R)]$	DM, DN
$\equiv (Q \wedge \neg P) \vee [((\neg P \wedge Q) \wedge R) \wedge (P \vee R)]$	Aso.
$\equiv (Q \wedge \neg P) \vee [(\neg P \wedge Q) \wedge (R \wedge (P \vee R))]$	Aso.
$\equiv (\neg P \wedge Q) \vee [(\neg P \wedge Q) \wedge R]$	Con. y Abs.
$\equiv \neg P \wedge Q$	Abs.

Es decir, $\neg\Big[(\neg Q \vee P) \wedge \neg[(\neg P \wedge (Q \wedge R)) \wedge (P \vee R)]\Big] \equiv \neg P \wedge Q$. ■

Ejemplo 24. *Simplifique la expresión*

$$\Big[(P \vee Q) \wedge \neg(\neg P \wedge Q)\Big] \vee \Big[\neg\big[Q \wedge (R \vee Q)\big] \wedge (P \vee \neg Q)\Big]$$

Solución. Siguiendo el mismo procedimiento de los ejemplos anteriores, la expresión se simplifica como sigue:

$$\begin{array}{ll}
\Big[(P \vee Q) \wedge \neg(\neg P \wedge Q)\Big] \vee \Big[\neg\big[Q \wedge (R \vee Q)\big] \wedge (P \vee \neg Q)\Big] & \textbf{Justificación} \\
\equiv \big[(P \vee Q) \wedge (P \vee \neg Q)\big] \vee \Big[\neg\big[Q \wedge (R \vee Q)\big] \wedge (P \vee \neg Q)\Big] & \text{DM, DN} \\
\equiv \big[(P \vee Q) \wedge (P \vee \neg Q)\big] \vee \big[\neg Q \wedge (P \vee \neg Q)\big] & \text{Abs.} \\
\equiv \big[P \vee (Q \wedge \neg Q)\big] \vee \neg Q & \text{Dis., Abs.} \\
\equiv (P \vee F_0) \vee \neg Q & \text{Inv.} \\
\equiv P \vee \neg Q & \text{Ne.}
\end{array}$$

Es decir, la expresión inicial es lógicamente equivalente a $P \vee \neg Q$. ■

Como se mencionó anteriormente, la validez de las leyes presentadas en la tabla 1.1 se puede verificar mediante tablas de verdad. En el siguiente ejemplo se presenta una prueba con base en un desarrollo lógico y la aplicación de otras leyes.

Ejemplo 25. *Pruebe la Ley de Exportación, es decir demuestre que* $[P \to (Q \to R)] \Leftrightarrow [(P \wedge Q) \to R]$.

Solución. Se debe probar que la proposición $P \to (Q \to R)$ es equivalente a $(P \wedge Q) \to R$

$$\begin{array}{ll}
P \to (Q \to R) & \textbf{Justificación} \\
\equiv \neg P \vee (Q \to R) & \text{ID} \\
\equiv \neg P \vee (\neg Q \vee R) & \text{ID} \\
\equiv (\neg P \vee \neg Q) \vee R & \text{Aso.} \\
\equiv \neg(P \wedge Q) \vee R & \text{DM} \\
\equiv (P \wedge Q) \to R & \text{ID}
\end{array}$$

Con esto se verifica la ley. ■

Ejercicios (sección 1.3)

Simplifique las siguientes expresiones:

1. $P \vee \neg(\neg R \vee P) \vee R$
2. $(P \leftrightarrow R) \wedge \neg(\neg P \vee R)$
3. $\big[P \vee \neg(\neg Q \vee \neg S)\big] \vee \neg(\neg Q \rightarrow \neg S)$
4. $[(\neg P \vee Q) \wedge P] \rightarrow Q$
5. $[(\neg P \wedge Q) \vee \neg(Q \vee P)] \wedge [(P \vee R) \wedge (P \vee \neg R)]$
6. $\neg[P \wedge \neg(T \wedge R)] \wedge (T \rightarrow \neg P)$
7. $[(\neg P \vee Q) \wedge \neg R] \rightarrow [(\neg Q \wedge R) \vee P]$
8. $(\neg P \wedge Q) \vee [\neg P \wedge \neg(Q \wedge R)] \vee \neg(R \rightarrow P)$
9. $[P \rightarrow (Q \wedge P)] \vee [\neg Q \wedge (P \vee Q)]$
10. $\neg Q \vee \neg\Big[\big[\neg[(P \wedge Q) \vee (P \wedge \neg Q)] \vee Q\big] \wedge P\Big]$
11. $[(P \vee Q) \wedge \neg(R \vee P)] \vee [(R \wedge Q) \vee P]$
12. $\neg\,[(\neg P \vee \neg Q) \wedge (\neg Q \vee P)] \wedge (\neg Q \vee R)$
13. $(\neg P \wedge Q) \vee [\neg(Q \wedge R) \wedge \neg P] \vee (P \wedge \neg R)$
14. $\neg\Big[(Q \vee P) \wedge \neg\big[(\neg P \wedge (\neg Q \wedge R)) \wedge (P \vee R)\big]\Big]$
15. $\neg\Big[\neg\big[[\neg P \vee (\neg Q \vee R)] \vee (S \wedge R)\big] \vee (Q \wedge P)\Big]$
16. $(P \rightarrow \neg Q) \wedge \Big[\big[\neg(R \vee \neg P) \wedge (Q \vee P)\big] \vee (R \wedge P)\Big]$

1.4 Inferencias lógicas

"Cuando uno ha eliminado el imposible,
lo que permanece, sin embargo improbable,
debe ser la verdad".

Sherlock Holmes

La **inferencia** es la relación entre las *premisas* y la *conclusión* de un argumento o razonamiento. Los **silogismos** son un tipo especial de razonamiento: a partir de dos premisas se obtiene una conclusión, en donde el término medio incluido en las premisas no aparece en la conclusión; por ejemplo, "*Todos los hombres son mortales; Sócrates es hombre, luego Sócrates es mortal*".

Dentro del lenguaje lógico, en ocasiones es necesario determinar si un grupo dado de proposiciones puede garantizar la validez de otra proposición. Es decir, dadas las proposiciones P_1, P_2, ..., P_n, que se llamarán **premisas**, y una **conclusión** Q, se debe decidir si la proposición

$$(P_1 \wedge P_2 \wedge \cdots \wedge P_n) \rightarrow Q$$

es una tautología, es decir, si se cumple que $(P_1 \wedge P_2 \wedge \cdots \wedge P_n) \Rightarrow Q$. Si es así, se dice que el argumento (o el razonamiento) es **válido**. De acuerdo con lo estudiado en las secciones anteriores, se sabe que el razonamiento no será válido si la condicional anterior es falsa, y esto ocurre cuando $P_1 \wedge P_2 \wedge \cdots \wedge P_n$ es verdadero y Q es falsa.

Ejemplo 26. *Simbolice el siguiente razonamiento y analice si es válido o no: Si Juan participa como jurado, entonces saldrá de viaje y deberá comprar un traje nuevo. Pero salió de viaje o compró un traje nuevo. Por lo tanto, Juan participa como jurado.*

Solución. En primer lugar, a cada proposición se le asigna una letra:

P : Juan participa como jurado
Q : Juan saldrá de viaje
R : Juan deberá comprar un traje nuevo

Con ellas, la proposición "Juan saldrá de viaje y deberá comprar un traje nuevo" se simboliza $Q \wedge R$, así "Si Juan participa como jurado, entonces saldrá de viaje y deberá comprar un traje nuevo" se simboliza $P \rightarrow (Q \wedge R)$; por otro lado, la proposición "Pero salió de viaje o compró un traje nuevo" es $Q \vee R$. De manera que se cuenta con dos premisas:

$$P_1: \quad P \rightarrow (Q \wedge R) \qquad\qquad P_2: \quad Q \vee R$$

y la conclusión es P. Luego, el argumento se simboliza como

$$\big[\big(P \rightarrow (Q \wedge R)\big) \wedge (Q \vee R)\big] \rightarrow P \tag{1.2}$$

y se construye la tabla de verdad:

P	Q	R	$Q \wedge R$	$P \rightarrow (Q \wedge R)$	$Q \vee R$	$[P \rightarrow (Q \wedge R)] \wedge (Q \vee R)$	$*$
V	V	V	V	V	V	V	V
V	V	F	F	F	V	F	V
V	F	V	F	F	V	F	V
V	F	F	F	F	F	F	V
F	V	V	V	V	V	V	F
F	V	F	F	V	V	V	F
F	F	V	F	V	V	V	F
F	F	F	F	V	F	F	V

Al observar la columna $*$, que corresponde al valor de verdad de la proposición (1.2), se concluye que la proposición no es tautología; por lo tanto, el argumento propuesto no es válido. ■

El método utilizado de determinar la validez de un argumento por medio de las tablas de verdad, por lo general, no es eficiente para más de tres proposiciones atómicas. Sin embargo, la tabla 1.2 enumera algunas reglas de inferencia, implicaciones tautológicas, que se pueden utilizar para inferir conclusiones a partir de premisas dadas.

El nombre de la regla *Modus ponens* en su forma completa en latín es *Modus ponendo ponens*, que quiere decir "el método de obtención mediante la aserción". Igualmente, *Modus tollens*, *Modus tollendo tollens*, que quiere decir "el método de negar mediante la negación" [24].

Regla de inferencia	Premisas	Conclusión
Simplificación (Simp.)	$P \wedge Q$	P Q
Adjunción (Adj.)	P Q	$P \wedge Q$
Adición (Adi.) para cualquier proposición Q	P	$P \vee Q$
Separación (Sep.) o **Modus ponens** (MP)	P $P \to Q$	Q
Contraposición o **Modus tollens** (MT)	$P \to Q$ $\neg Q$	$\neg P$
Silogismo disyuntivo (SD)	$P \vee Q$ $\neg P$	Q
Silogismo hipotético (SH)	$P \to Q$ $Q \to R$	$P \to R$
Dilema constructivo (DC)	$P \vee Q$ $P \to R$ $Q \to S$	$R \vee S$
Dilema destructivo (DD)	$\neg R \vee \neg S$ $P \to R$ $Q \to S$	$\neg P \vee \neg Q$
Ley de casos (LC)	$P \to Q$ $\neg P \to R$	$Q \vee R$

Tabla 1.2: Inferencias lógicas.

Ejemplo 27. *Demuestre la proposición* T *a partir de las proposiciones* $(P \vee Q) \to R$, $(R \vee S) \to T$, $S \vee P$, $\neg S$.

Solución. Se trabaja en forma vertical y se indica la regla utilizada

1.	$(P \vee Q) \to R$	Premisa
2.	$(R \vee S) \to T$	Premisa
3.	$S \vee P$	Premisa
4.	$\neg S$	Premisa
5.	P	Silogismo disyuntivo a 3 y 4.
6.	$P \vee Q$	Adición a 5.
7.	R	Separación a 1 y 6.
8.	$R \vee S$	Adición a 7.
9.	T	Separación a 2 y 8.

Así, la conclusión T es válida a partir de las premisas dadas. ■

Ejemplo 28. *Demuestre la proposición* $(A \wedge R) \vee (A \wedge S)$ *a partir de las proposiciones* $C \to (R \vee S)$, $A \to (B \vee C)$, $B \to \neg A$, $\neg D$, $A \vee D$.

Solución. De la misma manera que el ejemplo anterior:

1.	$C \to (R \vee S)$	Premisa
2.	$A \to (B \vee C)$	Premisa
3.	$B \to \neg A$	Premisa
4.	$\neg D$	Premisa
5.	$A \vee D$	Premisa
6.	A	SD a 4. y 5.
7.	$B \vee C$	Sep. a 2 y 6.
8.	$\neg B$	MT a 3 y 6.
9.	C	SD a 7 y 8.
10.	$R \vee S$	Sep. a 1 y 9.
11.	$A \wedge (R \vee S)$	Adj. a 6 y 10.
12.	$(A \wedge R) \vee (A \wedge S)$	Dis. a 11.

Con esto, la conclusión es válida a partir de las premisas dadas. ■

Ejemplo 29. *Considere el siguiente razonamiento y establezca su validez: Si no compro el boleto del tren o no me gusta el arte moderno, entonces me quedaré en la ciudad y le obsequiaré flores a mi esposa. Si me hubiera quedado en la ciudad, habría asistido a la recepción. Pero no asistí a la recepción. Por lo tanto, compré el boleto del tren.*

Solución. En primer lugar, es necesario convertir este razonamiento en forma simbólica, asignando a cada proposición una letra, así:

P : compro el boleto del tren
Q : me gusta el arte moderno
R : me quedaré en la ciudad
S : le obsequiaré flores a mi esposa
T : asisto a la recepción

Con lo cual el argumento se puede escribir simbólicamente como:

$$\begin{array}{l} (\neg P \vee \neg Q) \rightarrow (R \wedge S) \\ R \rightarrow T \\ \neg T \\ \hline \hfill \therefore P \end{array}$$

Se utiliza el símbolo $\therefore$ para escribir la conclusión; este se lee "por lo tanto". Para verificar la validez del argumento anterior, observe que

1.	$(\neg P \vee \neg Q) \rightarrow (R \wedge S)$	Premisa
2.	$R \rightarrow T$	Premisa
3.	$\neg T$	Premisa
4.	$\neg R$	MT a 2 y 3.
5.	$\neg R \vee \neg S$	Adi. a 4.
6.	$\neg(R \wedge S)$	DM a 5.
7.	$\neg(\neg P \vee \neg Q)$	MT a 1 y 6.
8.	$P \wedge Q$	DM y DN a 7.
9.	P	Simp. a 8.

de donde se comprueba la validez del argumento. ■

Ejemplo 30. *Considere el siguiente razonamiento y establezca su validez: No ocurre que $a+b=7$ y b sea positivo. Si b no es positivo, entonces $2a-3<0$. Si el problema tiene solución única, entonces $2a-3\geq 0$. Si el problema no tiene solución única, entonces no ocurre que $a+b=7$ o b no es positivo. Por lo tanto, se concluye que $a+b\neq 7$.*

Solución. En primer lugar, se debe convertir este razonamiento en forma simbólica, asignando a cada proposición una letra, así:

$$
\begin{aligned}
P &: \quad a+b=7 \\
Q &: \quad b \text{ es positivo} \\
R &: \quad 2a-3<0 \\
S &: \quad \text{el problema tiene solución única}
\end{aligned}
$$

Con esto, el argumento se puede escribir simbólicamente como:

$$
\begin{array}{ll}
1. & \neg(P\wedge Q) \\
2. & \neg Q \rightarrow R \\
3. & S \rightarrow \neg R \\
4. & \neg S \rightarrow \neg(P\vee\neg Q) \\
\hline
 & \hfill \therefore \neg P
\end{array}
$$

Para verificar la validez, observe que:

5.	$\neg P\vee\neg Q$	De Morgan a 1.
6.	$\neg S\vee\neg R$	ID a 3.
7.	$\neg R\rightarrow Q$	Contrapositiva a 2.
8.	$\neg(P\vee\neg Q)\vee Q$	DC a 4, 6 y 7.
9.	$(\neg P\wedge Q)\vee Q$	DM y DN a 8.
10.	Q	Absorción a 9.
11.	$\neg P$	SD a 5 y 10.

de donde se comprueba la validez del argumento. ∎

Ejemplo 31. *Este ejemplo se relaciona con el razonamiento que hace Sherlock Holmes para esclarecer un asesinato en su libro* Un estudio en escarlata [14]. *Allí se escribe:*
"Y ahora llegamos a la gran pregunta del porqué. El robo no ha sido el objeto del asesinato, puesto que nada desapareció. ¿Fue por motivos políticos o por una mujer? Ésta es la pregunta con que me enfrento. Desde el principio me he inclinado hacia esta última suposición. Los asesinos políticos se complacen demasiado en hacer solo su trabajo y huir. Este asesinato, por el contrario, había sido realizado muy deliberadamente y quien lo perpetró ha dejado huellas por toda la habitación, mostrando que estuvo ahí todo el tiempo".
Simbolice el argumento empleado y deduzca que el asesinato fue perpetrado por causa de una mujer.

Solución. Utilizando las proposiciones:

P_1 : fue un robo

P_2 : algo desapareció

P_3 : fue por motivos políticos

P_4 : fue por causa de una mujer

P_5 : el asesino huyó inmediatamente

P_6 : el asesino dejó huellas por toda la habitación

Se convierte el argumento a forma simbólica:

1.	$P_1 \to P_2$	Si fue un robo, hubiera desaparecido algo.
2.	$\neg P_2$	No desapareció nada.
3.	$\neg P_1 \to (P_3 \vee P_4)$	Si no fue un robo, fue algo político o una mujer.
4.	$P_3 \to P_5$	Si hubiera sido algo político, el asesino hubiera huido inmediatamente.
5.	$P_6 \to \neg P_5$	Si el asesino dejó huellas por toda la habitación, no pudo haber huido inmediatamente.
6.	P_6	El asesino dejó huellas por toda la habitación.

A partir de estas premisas, se obtienen las siguientes conclusiones:

7.	$\neg P_1$	MT a 1 y 2.
8.	$P_3 \vee P_4$	MP a 3 y 7.
9.	$\neg P_5$	MP a 5 y 6.
10.	$\neg P_3$	MT a 4 y 9.
11.	P_4	SD a 8 y 10.

de donde se comprueba la validez del argumento. ■

Ejemplo 32. *Demuestre la Ley de Casos, es decir, pruebe que se cumple la tautología*

$$\big[(P \to Q) \wedge (\neg P \to R)\big] \Longrightarrow (Q \vee R)$$

Solución. Es claro que se podría efectuar la demostración comprobando, por medio de una tabla de verdad, que la proposición dada es, en efecto, una implicación lógica, es decir, una tautología. Sin embargo, se hará de una forma más simple, utilizando las reglas de inferencia dadas en esta sección y demostrando la validez del argumento:

$$\begin{array}{r} P \to Q \\ \neg P \to R \\ \hline \therefore\, Q \vee R \end{array}$$

para ello:

1.	$P \to Q$	Premisa
2.	$\neg P \to Q$	Premisa
3.	$P \vee \neg P$	Ley de inversos
4.	$Q \vee R$	DC a 1, 2 y 3.

de donde se comprueba la validez del argumento. Además note que esta ley de casos es un caso particular del dilema constructivo en donde las premisas de las implicaciones son P y $\neg P$. ■

El siguiente ejemplo determina un *sistema formal* en donde se definen términos primitivos, reglas de inferencia propias de este sistema, axiomas (se asumen válidos) y teoremas (que deben probarse). Ponga especial atención en las "demostraciones" que se realizan en este ejemplo. Sobre este interesante juego, puede consultar [11], [12] y [17].

Ejemplo 33. *A partir de los símbolos primitivos* M, I, U, *se define una palabra como una combinación de ellos. Además, se definen las siguientes reglas de deducción:*

Regla 1.	*Toda palabra se puede triplicar.*
Regla 2.	*Una* U *se puede reemplazar por* II
Regla 3.	*Si aparece* IIII, *se puede eliminar.*
Regla 4.	*Después de una* M *se puede insertar una* U.
Regla 5.	*Si en una palabra aparece* IMU, *puede quitarse la* M.

Se dice que una palabra es admisible si se obtiene al aplicar una o varias de estas reglas a otra palabra admisible. Si, para empezar, se asume como admisible (axioma) la palabra MI, *pruebe que la palabra* MMI *es admisible en este sistema.*

Solución. Se debe partir de la única palabra que se sabe es admisible. Sobre la flecha se indica la regla que se utiliza:

$$\mathrm{MI} \xrightarrow{1} \mathrm{MIMIMI} \xrightarrow{4} \mathrm{MIMUIMI} \xrightarrow{5} \mathrm{MIUIMI} \xrightarrow{2} \mathrm{MIIIIMI} \xrightarrow{3} \mathrm{MMI}$$

Con lo cual, se ha demostrado que MMI es otra palabra admisible. Por supuesto, a partir de MMI es posible obtener, por ejemplo, MUMI al aplicar la regla 4. Las palabras que se probaron admisibles se pueden usar como nuevas premisas (ver ejercicio 8). ■

Ejercicios (sección 1.4)

1. En cada caso, utilice las reglas de inferencia y las leyes de la lógica para demostrar la proposición indicada a partir de las premisas dadas. Justifique cada paso.

    (a) Demuestre P a partir de $(\neg P \vee \neg Q) \to (R \wedge S)$, $R \to T$, $\neg T$.

    (b) Demuestre $P \wedge Q$ a partir de $Q \to \neg R$, $P \vee R$, Q.

    (c) Demuestre D a partir de $A \to (B \vee C)$, $B \to C$, $A \vee D$, $\neg C$.

    (d) Demuestre U a partir de $P \to Q$, $Q \to (R \wedge S)$, $\neg R \vee \neg T \vee U$, $P \wedge T$.

    (e) Demuestre $R \wedge (P \vee Q)$ a partir de $P \vee Q$, $Q \to R$, $P \to T$, $\neg T$.

    (f) Demuestre $\neg(L \wedge D)$ a partir de $V \to (R \vee P)$, $R \to \neg V$, $L \to \neg P$, V.

    (g) Demuestre $Q \vee T$ a partir de $P \to Q$, $\neg R \to (S \to T)$, $R \vee P \vee S$, $\neg R$

    (h) Demuestre T a partir de $(P \vee Q) \to (R \wedge S)$, $\neg(\neg P \vee \neg R)$, $\neg T \to \neg(P \wedge S)$.

    (i) Demuestre $\neg U$ a partir de $(Q \wedge R) \to \neg P$, $\neg Q \to S$, $R \vee T$, P, $U \to (\neg S \wedge \neg T)$.

    (j) Demuestre P a partir de $(\neg P \vee Q) \to R$, $R \to (S \vee T)$, $\neg S \wedge \neg U$, $\neg U \to \neg T$.

    (k) Demuestre $\neg(T \wedge \neg U)$ a partir de $(R \vee Q) \to \neg T$, $\neg Q \vee R$, $P \vee Q$, $P \to (R \wedge S)$.

    (l) Demuestre una F_0 a partir de $(S \vee T) \vee (T \wedge K)$, $\neg(T \wedge K)$, $\neg T$, $(R \vee S) \to (T \wedge K)$.

    (m) Demuestre $\neg R \to \neg T$ a partir de $P \to (Q \to R)$, $P \vee S$, $T \to Q$, $\neg S$.

(n) Demuestre $\neg(T \to A)$, a partir de E, $\neg P \vee Q$, $E \to (B \wedge \neg Q)$, $A \to (P \wedge C)$, T.

(o) Demuestre $S \vee \neg T$, a partir de $P \wedge \neg R$, $(R \to S) \to (P \to Q)$, $(Q \vee T) \to (S \vee R)$.

(p) Demuestre $x = 5$ a partir de $z > x \to x < 7$, $\big(x < 6 \vee x = 3\big) \to z > x$, $x < 6 \wedge z = 8$, $x \geq 7 \vee x = 5$

(q) Demuestre $T \to A$ a partir de $Q \to S$, $\neg P \to Q$, $P \to (R \wedge S)$, $A \vee \neg S$.

2. En cada caso, utilice las reglas de inferencia y las leyes de la lógica para demostrar las siguientes proposiciones. Justifique cada paso.

   (a) $\Big[\big(P \to Q\big) \wedge \big(P \vee (T \wedge S)\big) \wedge \big(Q \to R\big) \wedge \big(\neg R\big)\Big] \Longrightarrow S$

   (b) $\Big[\big(P \vee Q\big) \wedge \big(\neg R \vee \neg P\big) \wedge \big(S \to R\big) \wedge \big(T \vee S\big) \wedge \big(R \to \neg Q\big)\Big] \Longrightarrow T$

3. En cada uno de los siguientes casos, simbolice las proposiciones involucradas y demuestre la validez de la conclusión.

   (a) Si S campeoniza, entonces C gana o H gana. Si C gana, entonces S no campeoniza. Si H gana, entonces A no gana. De hecho, S campeoniza. Por lo tanto, A no gana o L gana.

   (b) Si estudio matemática discreta o asisto al dentista, entonces no podré matricular el curso de danza. Si no matriculo el curso de danza, entonces no participaré en el festival. Participaré en el festival y me opondré a la explotación petrolera. Por lo tanto, no ocurre que asista al dentista o no me pueda matricular en el curso de danza.

   (c) Si José gana la carrera, entonces Pedro fue el segundo o Ramón fue el segundo. Si Pedro fue el segundo, entonces José no ganó la carrera. Si Carlos fue el segundo, entonces Ramón no fue el segundo. José ganó la carrera. Por lo tanto, Carlos no fue el segundo.

(d) Si estudio computación, entonces debo matricular un curso de matemática. No estudio mucho o no tengo tiempo para leer o necesito vacaciones. Estudio computación y tengo tiempo para leer. Si matriculo un curso de matemática, entonces debo estudiar mucho y no puedo ir al estadio. Por lo tanto, necesito vacaciones.

(e) Si Luis va al partido de fútbol, entonces Laura se irá a nadar. Si Manuel ve televisión toda la noche, entonces Carolina se irá a nadar. Si Laura va a nadar o Carolina va a nadar, Jorge las acompañará. De hecho, Jorge no las acompañará. En consecuencia, no ocurre que Luis fue al partido de fútbol o Manuel ve televisión toda la noche.

(f) O los precios son altos o los salarios son bajos. Si los precios son altos, entonces hay control de precios. Si los salarios son bajos, entonces hay control de precios. Si no hay inflación o la cosecha de café es buena, entonces no hay control de precios. Por lo tanto, hay inflación.

(g) Si no matriculo el curso Matemática discreta, entonces gano los otros cuatro cursos matriculados. Gano los otros cuatro cursos matriculados o cambio de carrera. Si matriculo Matemática discreta y cambio de carrera, entonces no me he decidido. No es cierto que gano los otros cuatro cursos matriculados y no quiero estudiar computación. No quiero estudiar computación. Por lo tanto, no me he decidido.

(h) Si hay secuestros, entonces no hay paz en mi país. Hay secuestros o la prensa informa de manera insensible, o tengo lástima por los delincuentes. Si la prensa informa de manera insensible, entonces no hay paz en mi país. No tengo lástima por los delincuentes. Por lo tanto, no hay paz en mi país.

(i) Si Bill es declarado culpable, entonces su perro no se deprime o Mónica se alegra. Si su perro no se deprime, entonces Bill no es declarado culpable. El precio del petróleo no baja o Mónica no se alegra. De hecho, Bill es declarado culpable. Por lo tanto, su perro se deprime y el precio del petróleo no baja.

(j) Si Leo es un muchacho, entonces Leo es más joven que Juan. Si Leo tiene 13 años, entonces Leo es una muchacha. Si Leo no tiene 13 años, entonces Leo tiene, al menos, la edad de Juan. ¿Leo es un muchacho o una muchacha?

(k) Si le pago al sastre, no me quedará dinero. Puedo llevar a mi novia al baile solo si tengo dinero. Si no la llevo al baile, ella se enojará conmigo. Pero si no le pago al sastre, no me entregará el traje. Sin el traje no puedo llevar a mi novia al baile. Luego, mi novia se enojará conmigo.

4. Verifique que el siguiente argumento no es válido.

$$\begin{array}{l} P \\ P \vee Q \\ Q \to (R \to S) \\ T \to R \\ \hline \quad \therefore \neg S \to \neg T \end{array}$$

5. A partir de las tres premisas:
   – Los niños son ilógicos.
   – Nadie es despreciado cuando puede domar un cocodrilo.
   – Las personas ilógicas son despreciadas.

   Obtenga como conclusión válida la proposición: *Los niños no pueden domar cocodrilos.*

6. Considere el siguiente razonamiento y demuestre que no es válido: *Una condición necesaria para que se nombre presidente es que la mayoría vote por él y no tenga mala salud. La mayoría votó por él. Tiene buena salud. Por lo tanto, se nombró presidente.*

7. En *Vacilonia* (véase página 38), un día un vacilonio mentiroso afirmó lo siguiente: "*Si en Vacilonia no llueve y las vacas vuelan, entonces los vacilonios no son altos o tienen tres ojos*". Además, un vacilonio sincero afirmó que "*todos los vacilonios tienen tres ojos o tienen cinco ojos*". Con la información anterior, determine si en Vacilonia llueve, si las vacas vuelan, si sus habitantes son altos y cuántos ojos tienen.

8. De acuerdo con el sistema definido en el ejemplo 33, demuestre que son admisibles las palabras MIM, MUIM, MIIIMII, MIU, MUMI, MMIII, MIIIM, MIMUU, MUUIUIMIII. Además, demuestre que no es posible deducir MU.

9. Sean a y b dos números reales. Demuestre que si $a \geq b$ y $a \leq b$, entonces se concluye que $a = b$.

10. Este ejercicio de lógica fue propuesto por Lewis Carroll (véase [8]). En él se sugiere una conclusión a partir de cinco premisas, trate de justificar la conclusión propuesta. Más adelante, cuando tenga un mayor conocimiento de la lógica proposicional, usted encontrará una forma de obtener la conclusión de una manera precisa (ejemplo 46 de la sección 1.6).

    Ningún gato que gusta del pescado es indomesticable.
    Ningún gato sin cola jugará con un gorila.
    Gatos con bigotes siempre gustan del pescado.
    Ningún gato tiene cola a menos que tenga bigotes.
    Ningún gato domesticable tiene ojos grises.

    Conclusión: Los gatos de ojos grises no jugarán con un gorila.

11. Compruebe que si Juan no cumple la promesa: "*el domingo, o no te regalo un libro o te invito a comer*", entonces cumple la promesa "*el domingo te regalo un libro y no te invito a comer*".

12. Lea, disfrute y analice el siguiente texto, tomado de [8]:
    ¿Podrías decirme, por favor, cuál camino debo seguir para salir de

aquí? –preguntó Alicia al Minino de Cheshire–.
–Esto depende en gran parte del sitio al que quieras llegar –dijo el Gato.
–No me importa mucho el sitio... –dijo Alicia.
–Entonces tampoco importa mucho el camino que tomes –dijo el Gato.
– ...siempre que llegue a alguna parte –añadió Alicia.
–¡Oh, siempre llegarás a alguna parte –aseguró el Gato–, si caminas lo suficiente!

A Alicia le pareció que esto no tenía vuelta de hoja y decidió hacer otra pregunta: ¿Qué clase de gente vive por aquí?
–En esta dirección –dijo el Gato, haciendo un gesto con la pata derecha– vive un Sombrerero. Y en esta dirección –e hizo un gesto con la otra pata– vive una Liebre de Marzo. Visita al que quieras: los dos están locos.
–Pero es que a mí no me gusta tratar a gente loca –protestó Alicia.
–Oh, eso no lo puedes evitar –repuso el Gato–. Aquí todos estamos locos. Yo estoy loco. Tú estás loca.
–¿Cómo sabes que yo estoy loca? –preguntó Alicia.
–Tienes que estarlo –afirmó el Gato– o no habrías venido aquí.
Alicia pensó que esto no demostraba nada. Sin embargo, continuó con sus preguntas: –¿Y cómo sabes que tú estás loco?
–Para empezar –repuso el Gato–, los perros no están locos. ¿De acuerdo?
–Supongo que sí –concedió Alicia.
–Muy bien. Pues en tal caso –siguió su razonamiento el Gato–, ya sabes que los perros gruñen cuando están enfadados y mueven la cola cuando están contentos. Pues bien, yo gruño cuando estoy contento y muevo la cola cuando estoy enfadado. Por lo tanto, estoy loco.
–A eso yo le llamo ronronear, no gruñir –dijo Alicia.

1.5 Formas normales

En esta sección se definen las formas normales y se exponen, con base en ejemplos, la manera de determinar la forma normal de una proposición, primero por medio de las leyes, luego mediante las tablas de verdad.

Se dice que una proposición está en su **forma normal disyuntiva** (FND) si está escrita como disyunciones de conjunciones; por ejemplo:

$$\underbrace{\underbrace{(P \wedge Q)}_{\text{conjunción}} \vee \underbrace{(\neg P \wedge R)}_{\text{conjunción}}}_{\text{disyunción}} \tag{1.3}$$

Además, se dice que una proposición está en su **forma normal conjuntiva** (FNC) si está escrita como conjunciones de disyunciones; por ejemplo, note cómo al aplicar la distributividad en (1.3) se obtiene:

$$\underbrace{\underbrace{(P \vee \neg P)}_{\text{disyunción}} \wedge \underbrace{(P \vee R)}_{\text{disyunción}} \wedge \underbrace{(Q \vee \neg P)}_{\text{disyunción}} \wedge \underbrace{(Q \vee R)}_{\text{disyunción}}}_{\text{conjunción}} \tag{1.4}$$

Al estar formada por conjunciones de disyunciones, hace que la expresión (1.4) sea la FNC de (1.3).

Ejemplo 34. *Utilice las leyes de la lógica y determine la forma normal conjuntiva (FNC) de* $\neg\big[(\neg P \wedge \neg Q) \wedge (\neg Q \rightarrow R)\big] \wedge (\neg R \rightarrow P)$

Solución. Se debe escribir la expresión dada como una conjunción de disyunciones:

$$\begin{array}{lll}
 & \neg\big[(\neg P \wedge \neg Q) \wedge (\neg Q \rightarrow R)\big] \wedge (\neg R \rightarrow P) & \textbf{Justificación} \\
\equiv & \neg\big[(\neg P \wedge \neg Q) \wedge (Q \vee R)\big] \wedge (R \vee P) & \text{ID} \\
\equiv & \big[\neg(\neg P \wedge \neg Q) \vee \neg(Q \vee R)\big] \wedge (R \vee P) & \text{Morgan} \\
\equiv & \big[(P \vee Q) \vee (\neg Q \wedge \neg R)\big] \wedge (R \vee P) & \text{Morgan} \\
\equiv & \big[(P \vee Q \vee \neg Q) \wedge (P \vee Q \vee \neg R)\big] \wedge (R \vee P) & \text{Distributividad}
\end{array}$$

Es decir, la proposición dada se logró reescribir como la conjunción de $P \vee Q \vee \neg Q$, $P \vee Q \vee \neg R$, y de $R \vee P$, donde cada una de estas tres es una disyunción. De esta forma, la proposición

$$(P \vee Q \vee \neg Q) \wedge (P \vee Q \vee \neg R) \wedge (R \vee P)$$

es la FNC de la proposición dada. ■

La manera de obtener la forma normal completa de una proposición por medio de una tabla de verdad es sencilla; para ello debe tener en cuenta que para la FND, es necesario considerar los casos donde el valor de verdad resultante sea verdadero y hacer verdaderas las proposiciones atómicas que la provocan.

Ejemplo 35. *Determine la FND de la proposición* $(\neg P \wedge Q) \rightarrow (Q \rightarrow P)$.

Solución. La tabla de verdad es:

P	Q	$\neg P$	$\neg P \wedge Q$	$\neg Q$	$\neg Q \vee P$	$(\neg P \wedge Q) \rightarrow (Q \rightarrow P)$
V	***V***	F	F	F	V	***V***
V	***F***	F	F	V	V	***V***
F	V	V	V	F	F	F
F	***F***	V	F	V	V	***V***

Se tienen tres casos donde el valor de verdad es V, así:

$$FND : (P \wedge Q) \vee (P \wedge \neg Q) \vee (\neg P \wedge \neg Q)$$

es la forma normal disyuntiva asociada a la expresión dada. ■

Por otro lado, la manera de obtener la FNC por medio de una tabla de verdad también es sencilla; se deben considerar los casos donde el valor de verdad resultante es falso y se hacen falsas las proposiciones atómicas que la provocan.

Ejemplo 36. *Determine la FNC de la proposición* $(\neg P \vee Q) \rightarrow (\neg Q \wedge P)$.

Solución. Al construir la tabla, se obtiene:

P	Q	$\neg P$	$\neg P \vee Q$	$\neg Q$	$\neg Q \wedge P$	$(\neg P \vee Q) \rightarrow (\neg Q \wedge P)$
V	***V***	F	V	F	F	***F***
V	F	F	F	V	V	V
F	***V***	V	V	F	F	***F***
F	***F***	V	V	V	F	***F***

Se tienen tres casos donde el valor de verdad es F; estos se utilizan para escribir que $FNC : (\neg P \vee \neg Q) \wedge (P \vee \neg Q) \wedge (P \vee Q)$. ■

Ejemplo 37. *Determine las formas normales, conjuntiva y disyuntiva, de la proposición* $[P \rightarrow (Q \vee R)] \leftrightarrow (\neg P \wedge R)$.

Solución. Al construir la tabla, se obtiene:

P	Q	R	$Q \vee R$	$P \rightarrow (Q \vee R)$	$\neg P$	$\neg P \wedge R$	$*$
V	V	V	V	V	F	F	F
V	V	F	V	V	F	F	F
V	F	V	V	V	F	F	F
V	F	F	F	F	F	F	V
F	V	V	V	V	V	V	V
F	V	F	V	V	V	F	F
F	F	V	V	V	V	V	V
F	F	F	F	V	V	F	F

Se tienen tres casos donde el valor de verdad es verdadero, estos se utilizan para escribir que la FND es:

$$(P \wedge \neg Q \wedge \neg R) \vee (\neg P \wedge Q \wedge R) \vee (\neg P \wedge \neg Q \wedge R)$$

Además, se tienen cinco casos donde el valor de verdad es falso, los cuales se utilizan para escribir la FNC, que es:

$$(\neg P \vee \neg Q \vee \neg R) \wedge (\neg P \vee \neg Q \vee R) \wedge (\neg P \vee Q \vee \neg R) \wedge (P \vee \neg Q \vee R) \wedge (P \vee Q \vee R)$$

■

Ejercicios (sección 1.5)

1. Use las leyes de la lógica y determine la forma normal que se indica:

   (a) FNC de $[(P \wedge Q) \vee (\neg P \vee R)] \vee (Q \wedge R)$

   (b) FND de $(P \to Q) \wedge R$

   (c) FND de $\neg\big[\neg(\neg P \wedge \neg Q) \vee \neg(Q \to R)\big] \wedge \neg(R \to P)$

   (d) FND de $\neg(P \vee \neg Q) \wedge (S \to T)$

   (e) FNC de $(P \wedge Q) \vee [R \wedge (S \vee T)]$

2. Use tablas de verdad y determine la forma normal que se indica:

   (a) FND y FNC de $(P \to Q) \wedge R$

   (b) FND de $\big[P \vee \neg(\neg Q \vee \neg S)\big] \vee \neg(\neg Q \to \neg S)$

   (c) FND y FNC de $\big[\neg(Q \wedge R) \vee P\big] \leftrightarrow \big[(P \to Q) \to R\big]$

   (d) FND y FNC de $(P \wedge \neg Q \wedge R) \vee [(P \to \neg Q) \leftrightarrow (Q \leftrightarrow R)]$

1.6 Cuantificadores

Una **proposición abierta** o **predicado** será una proposición que depende de una o más variables; por ejemplo, se utiliza la expresión $P(n)$ para indicar que la proposición P depende de la variable n, donde n es un elemento arbitrario o **individuo**. A $P(n)$ se le asigna un valor de verdad para cada escogencia de los valores posibles de la variable n.

El conjunto de individuos (personas, ideas, símbolos y otros) que afectan al argumento que se está considerando se llama **universo de discurso** o **dominio**.

Ejemplo 38. *Considere la proposición abierta definida para n, con n un número natural:*

$$P(n): \ 2n+1 \quad \textit{es un número impar}$$

Para $n = 2$ se tiene que $P(2)$ es verdadera, ya que "5 es un número impar" es verdadera; como 7 es un número impar, se tiene que $P(3)$ es verdadero; como 21 es impar, $P(10)$ también es verdadera. Un análisis más cuidadoso indica que para cualquier n que se tome en el conjunto de los números naturales, el residuo al dividir $2n+1$ por 2 siempre será 1, con lo cual siempre será impar, es decir, la proposición será verdadera siempre. ■

Ejemplo 39. *Considere la proposición abierta*

$$P(n): \ n^2-1 \quad \textit{es un número par}$$

definida para un número natural n. Para $n = 2$ se tiene que $P(2)$ es falsa, ya que "2^2-1 es un número par" es falsa, pues se sabe que 3 es un número impar; como $3^2-1 = 8$ es un número par, se tiene que $P(3)$ es verdadero; como $6^2-1 = 35$ no es par, $P(6)$ es falso; $P(7)$ es verdadero. Con base en estos valores de verdad, sería posible conjeturar que la proposición será verdadera si n es un número impar y será falsa si n es par. ■

Ejemplo 40. *Considere la proposición abierta*

$$P(a,b,c):\ a^2+b^2=c^2$$

donde a*,* b*,* c *son números naturales. Se tiene, por ejemplo, que* $P(3,4,5)$ *es verdadera, ya que "*$3^2+4^2=5^2$*" es una identidad, mientras que* $P(5,6,12)$ *es falsa, ya que* $5^2+6^2=25+36=61\neq 144=12^2$*.* ■

Las frases "para algún x", "no todos cumplen", "algún n cumple $P(n)$", "ningún x cumple $Q(x)$", de alguna manera cuantifican la cantidad de elementos que satisfacen o no una proposición abierta. Para ello, se definen dos tipos de **cuantificadores**:

- **Cuantificador existencial**, que se lee "para algún x" o "existe al menos un x" o "existe un x tal que". El símbolo del cuantificador existencial es $\exists$; así, la frase "existe un x tal que $P(x)$" se simboliza $\boldsymbol{\exists x P(x)}$.
- **Cuantificador universal**, que se lee "para todo x" o "para cada x". El símbolo del cuantificador universal es $\forall$; así, la frase "todo x cumple $P(x)$" se simboliza $\boldsymbol{\forall x P(x)}$.

La proposición cuantificada $\exists x P(x)$ será verdadera si, para algún a en el universo, $P(a)$ es verdadera. La proposición cuantificada $\forall x P(x)$ será verdadera si $P(a)$ es verdadera para todos los posibles valores de a en el universo. Por otro lado, es usual utilizar el símbolo $\nexists$ para denotar a $\neg\exists$, que en ambos caso se lee "no existe".

En el caso particular de que $\mathcal{U}=\{a_1,a_2,\ldots,a_n\}$, es decir, de un *universo discreto finito*, es posible escribir:

$$\begin{aligned}\exists x P(x) &\equiv P(a_1)\vee P(a_2)\vee\cdots\vee P(a_n)\\ \forall x P(x) &\equiv P(a_1)\wedge P(a_2)\wedge\cdots\wedge P(a_n)\end{aligned}$$

Teorema 1. *Se satisfacen las siguientes equivalencias:*

$$\begin{aligned}
\nexists x\, P(x) &\equiv \forall x\, [\neg P(x)] && (1.5)\\
\neg\big[\forall x\, P(x)\big] &\equiv \exists x\, [\neg P(x)] && (1.6)\\
\forall x\, \big[P(x) \wedge Q(x)\big] &\equiv \forall x\, P(x) \wedge \forall x\, Q(x) && (1.7)\\
\exists x\, \big[P(x) \vee Q(x)\big] &\equiv \exists x\, P(x) \vee \exists x\, Q(x) && (1.8)
\end{aligned}$$

Demostración. Se probará la identidad (1.5), las otras cinco se dejan como ejercicio. Para obtener la negación de $\exists x P(x)$, observe que:

$$\begin{aligned}
\nexists x P(x) &\equiv \neg\big[\exists x P(x)\big]\\
&\equiv \neg[P(a_1) \vee P(a_2) \vee \cdots \vee P(a_n)]\\
&\equiv \neg P(a_1) \wedge \neg P(a_2) \wedge \cdots \wedge \neg P(a_n)\\
&\equiv \forall x[\neg P(x)]
\end{aligned}$$

Es decir, se ha probado la identidad (1.5). □

Corolario 1. *Se satisfacen las siguientes equivalencias:*

$$\begin{aligned}
\exists x\, P(x) &\equiv \neg\forall x\, [\neg P(x)] && (1.9)\\
\forall x\, P(x) &\equiv \nexists x\, [\neg P(x)] && (1.10)
\end{aligned}$$

Demostración. Basta negar las equivalencias (1.5) y (1.6). □

Ejemplo 41. *Aplicando la equivalencia* (1.10)*, afirmar que "Todos los hombres son mortales" es quivalente a decir que "No existen hombres no mortales". Por otro lado, al aplicar la equivalencia* (1.5)*, afirmar que "No existe una persona que mida* 20 *metros" es quivalente a decir que "Todas las personas no miden* 20 *metros". Por último, es claro que decir que "Todos los perros ladran y tienen cola" es equivalente a afirmar que "Todos los perros ladran y todos los perros tienen cola", como asevera la equivalencia* (1.7)*.* ■

Ejemplo 42. *Si n es un número natural y "$P(n) : n^2 - 1$ es un número par" es una proposición abierta, se tiene que $\exists x P(x)$ es verdadera, pues $P(3)$ es verdadera; $\forall x P(x)$ es falsa, pues $P(2)$ es falsa.* ■

En el caso de que el universo $\mathcal{U}$ sea un conjunto finito, es decir, $\mathcal{U} = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ y se tenga P_1, P_2,. . . , P_m proposiciones abiertas, es posible elaborar la **tabla de asignación de predicados**, en la cual la entrada i-j denota el valor de verdad de $P_j(a_i)$:

	P_1	P_2	$\ldots$	P_j	$\ldots$	P_m
a_1						
a_2						
$\vdots$						
a_i				$P_j(a_i)$		
$\vdots$						
a_n						

Ejemplo 43. *Suponga que se tiene un universo de discurso formado por tres personas: Ana, Bárbara y Carmen, representadas por A, B y C respectivamente. La asignación de los predicados $P(x)$, $Q(x)$, $R(x)$ y $S(x)$ está dada en la siguiente tabla.*

	$P(x)$	$Q(x)$	$R(x)$	$S(x)$
A	V	V	F	F
B	V	F	V	F
C	V	V	F	V

Determine el valor de verdad de las cuatro proposiciones: $\forall x\ [P(x)]$, $\forall x\ \big[R(x) \vee S(x)\big]$, $\exists x\ \big[\neg S(x) \to R(x)\big]$, $\exists x\ \big[(Q(x) \wedge S(x)) \leftrightarrow P(x)\big]$.

Solución. A partir de la tabla dada, se tiene:

- $\forall x\ [P(x)] \equiv P(A)\ \wedge\ P(B)\ \wedge\ P(C) \equiv V \wedge V \wedge V \equiv V$.

- $\forall x\ \big[R(x) \lor S(x)\big] \equiv \big[R(A) \lor S(A)\big] \land \big[R(B) \lor S(B)\big] \land \big[R(C) \lor S(C)\big] \equiv [F \land V \land V] \equiv F$.
- $\exists x\ \big[\neg S(x) \to R(x)\big]$ es una proposición verdadera, pues basta ver que $\big[\neg S(C) \to R(C)\big] \equiv [F \to F] \equiv V$, es decir, Carmen satisface la proposición.
- $\exists x\ \big[(Q(x)\ \land\ S(x))\ \leftrightarrow\ P(x)\big]$ es verdadera, pues basta ver que $\big[(Q(C)\ \land\ S(C)) \leftrightarrow P(C)\big] \equiv [(V \land V) \leftrightarrow V] \equiv V$. Es decir, Carmen cumple la proposición. ■

Ejemplo 44. *Suponga que se tiene un universo de discurso formado por cinco gatos: Mini, Black, Soko, Balín y Terrón. Solo los tres primeros son de pura raza; Mini y Soko comen solo atún, mientras que Black y Balín solo comen pollo. Terrón come pollo y atún, pero no toma leche y los otros sí. Excepto Black, ninguno tiene collar.*

1. *Por medio de una tabla, presente la asignación de los predicados $R(x)$: x es de raza, $CA(x)$: x come atún, $CP(x)$: x come pollo, $TL(x)$: x toma leche, $TC(x)$: x tiene collar.*
2. *Valide las proposiciones $\exists g\ \big[CA(g) \land TC(g)\big]$, $\forall x\ \big[CP(x) \lor TL(x)\big]$, $\forall x\ \big[CP(x)\big] \lor \forall x\ \big[TL(x)\big]$, $\forall x\ \big[CA(x) \to R(x)\big]$.*
3. *Simbolice y valide la proposición: "No todos los gatos comen pollo o, si son de raza, tienen collar".*

Solución. En primer lugar, la tabla:

	$R(x)$	$CA(x)$	$CP(x)$	$TL(x)$	$TC(x)$
Mini	V	V	F	V	F
Black	V	F	V	V	V
Soko	V	V	F	V	F
Balín	F	F	V	V	F
Terrón	F	V	V	F	F

muestra la asignación de predicados y a partir de ella se tiene que:

- $\exists g \left[CA(g) \wedge TC(g)\right]$ es falsa, pues no existe ningún gato que coma atún y tenga collar simultáneamente.
- $\forall x \left[CP(x) \vee TL(x)\right]$ es verdadera, pues cada uno de los gatos come pollo o toma leche.
- $\forall x \left[CP(x)\right] \vee \forall x \left[TL(x)\right]$ es falsa, pues la expresión $\forall x\ CP(x)$ es falsa, ya que Mini no come pollo; la expresión $\forall x\ TL(x)$ es falsa, ya que Terrón no toma leche. Así, $\forall x\ CP(x) \vee \forall x\ TL(x) \equiv F \vee F \equiv F$.
- $\forall x \left[CA(x) \to R(x)\right]$ es falsa, pues, como involucra el $\forall$, para que sea verdadera se debe cumplir para todo; sin embargo, para Terrón se tiene que $\left[CA(\text{Terrón}) \to R(\text{Terrón})\right] \equiv [V \to F] \equiv F$.

Por último, "No todos los gatos comen pollo o, si son de raza, tienen collar" se simboliza y reescribe como:

$$\begin{aligned} & \neg \forall x \left[CP(x) \vee (R(x) \to TC(x))\right] \\ \equiv\ & \exists x\, \neg\left[CP(x) \vee \neg R(x) \vee TC(x))\right] \\ \equiv\ & \exists x \left[\neg CP(x) \wedge R(x) \wedge \neg TC(x))\right] \end{aligned}$$

que claramente satisfacen Mini o Soko, con lo cual es verdadera. ■

Ejemplo 45. *Considere la proposición "Ningún ser humano que sea inteligente luchará contra un elefante" y para x un ser humano, considere las proposiciones abiertas:*

$P(x):\quad x$ *es inteligente*

$Q(x):\quad x$ *luchará contra un elefante*

Así, esta proposición se simboliza como $\neg\exists x \left[P(x) \wedge Q(x)\right]$, y utilizando la identidad (1.5) *se tiene que:*

$$\begin{aligned} \neg\exists x \left[P(x) \wedge Q(x)\right] &\equiv \forall x\, \neg\left[P(x) \wedge Q(x)\right] \\ &\equiv \forall x \left[\neg P(x) \vee \neg Q(x)\right] \\ &\equiv \forall x \left[P(x) \to \neg Q(x)\right] \end{aligned}$$

De esta manera, la proposición dada inicialmente se puede enunciar también como "Todo ser humano que sea inteligente no luchará contra un elefante" o en un lenguaje más cotidiano, "Si un ser humano es inteligente, no luchará contra un elefante". Equivalentemente, utilizando la contrapositiva

$$\forall x \big[Q(x) \to \neg P(x)\big]$$

que se puede leer como "Si un ser humano lucha contra un elefante, no es inteligente". ■

Ejemplo 46. *Simbolice el argumento planteado en el ejercicio* 10 *de la sección* 1.4.

Solución. Se debe trabajar con cada una de las proposiciones que se dan. En primer lugar, se hará con la proposición "*Ningún gato que gusta del pescado es indomesticable*", para ello considere las proposiciones abiertas:

$P(x)$: x gusta del pescado
$Q(x)$: x es domesticable

Así, esta primera premisa se simboliza como:

$$\neg \exists x \ \big[P(x) \wedge \neg Q(x)\big]$$

y utilizando la identidad (1.5) se tiene que:

$$\begin{aligned} \forall x \ \big[\neg P(x) \vee Q(x)\big] &\equiv \forall x \big[P(x) \to Q(x)\big] \\ &\equiv \forall x \ \big[\neg Q(x) \to \neg P(x)\big] \end{aligned}$$

Es decir, la primera premisa "*Ningún gato que gusta del pescado es indomesticable*" se puede reescribir como "*Los gatos que no pueden ser domesticados no gustan del pescado*". De la misma manera, la segunda proposición "*Ningún gato sin cola jugará con un gorila*" se puede reescribir como "*Los gatos que no tienen cola no jugarán con un gorila*". Repitiendo este análisis para las otras tres premisas y reordenando las cinco en forma análoga a los silogismos, donde la conclusión de una sea la premisa de la siguiente, se tiene:

Los gatos con ojos grises no pueden ser domesticados.
Los gatos que no pueden ser domesticados no gustan del pescado.
Los gatos que no gustan del pescado no tienen bigotes.
Los gatos que no tienen bigotes no tienen cola.
Los gatos que no tienen cola no jugarán con un gorila.

De donde se obtiene, aplicando el Silogismo hipotético, la conclusión: los gatos de ojos grises no jugarán con un gorila. ■

En el caso de una proposición abierta de dos variables $P(x, y)$, se tienen cuatro tipos de proposiciones cuantificadas:

1. $\boldsymbol{\forall x\, \forall y\, P(x, y)}$ significa que cualquier par de elementos del universo satisface la proposición.
2. $\boldsymbol{\exists x\, \forall y\, P(x, y)}$ significa que existe un elemento x tal que para todos los elementos del universo se satisface la proposición. El x que existe debe servir para todos los y.
3. $\boldsymbol{\forall x\, \exists y\, P(x, y)}$ significa que para cada elemento x existe un elemento y tal que se satisface la proposición. Conforme se cambia el x, se puede cambiar y.
4. $\boldsymbol{\exists x\, \exists y\, P(x, y)}$ significa que existe al menos una pareja de elementos que satisface la proposición. Esto no excluye que $x = y$.

Es importante resaltar el hecho de que

$$\forall x\ \exists y\ P(x, y) \not\equiv \exists y \forall x\ P(x, y)$$

es decir, ambas proposiciones no son lógicamente equivalentes. Para comprobar esto, observe los siguientes ejemplos.

Ejemplo 47. *Para x, y números reales. La proposición*

$$\forall x\ \exists y\ [x < y]$$

es verdadera, pues para cada x siempre es posible encontrar un valor de y de manera que $x < y$, es decir, para todo número siempre hay otro mayor que él. Por otro lado, la proposición

$$\exists y\ \forall x\ [x < y]$$

es falsa, pues sugiere que existe un número y que es mayor que todos los números reales, y se sabe que esta afirmación es falsa. ■

Ejemplo 48. *Recuerde que, para el caso de los números reales, el elemento neutro en la multiplicación es el elemento 1, con lo cual*

$$\exists y\ \forall x\ [x \cdot y = x]$$

es una proposición verdadera. Por otro lado, el inverso multiplicativo de cualquier número real diferente de 0 también existe, de esta forma

$$\forall x\ \exists y\ [x \cdot y = 1]$$

es una proposiciónes verdadera si $x \neq 0$. ■

Es decir, el elemento neutro para la multiplicación en los números reales existe, se conoce como *uno*, se denota por 1 y funciona para todos, de manera que al multiplicarlo por cualquier número real no lo altera; mientras que el elemento inverso cambia para cada elemento; por ejemplo, el inverso multiplicativo de $\frac{3}{4}$ es $\frac{4}{3}$ y se simboliza como $\left(\frac{3}{4}\right)^{-1} = \frac{4}{3}$.

Ejemplo 49. *De nuevo, para el caso de los números reales, el número 0 es el elemento absorbente de la multiplicación, ya que $0 \cdot x = 0$ para todo x en $\mathbb{R}$. Con lo cual, la proposición*

$$\exists y\ \forall x\ [y \cdot x = y]$$

es verdadera. Además, la adición no tiene elemento absorbente, ya que no existe un elemento único y que cumpla $y + x = y$ para todo x en $\mathbb{R}$, con lo cual, la proposición

$$\exists y\ \forall x\ [y + x = y]$$

es falsa. ■

Ejemplo 50. *Si se considera el conjunto de los números reales como universo, la proposición*

$$\forall x\ \exists y\ [2x + 3y = 1]$$

es verdadera, pues al fijar un valor de x, basta tomar $y = \frac{1-2x}{3}$ para calcular

$$2x + 3y = 2x + 3\left(\frac{1-2x}{3}\right) = 2x + 1 - 2x = 1$$

con lo cual es claro que se satisface la condición. ■

Debe observarse que el universo escogido es vital para la validez o invalidez de una proposición; para esto, observe que en el ejemplo anterior, con solo tomar como universo el conjunto $\mathbb{Z}$, la proposición $\forall x\ \exists y\ [2x + 3y = 1]$ sería falsa, pues $y = \frac{1-2x}{3}$ no necesariamente pertenece a $\mathbb{Z}$.

Ejemplo 51. *Demuestre, por contradicción, la validez de la proposición*

$$\forall x \in \mathbb{N}\big[7x + 4 < 40\ \vee\ \forall\, y \in \mathbb{N}(x + y \neq 5)\big]$$

Solución. Asuma, razonando por contradicción, que la negación de esta proposición es verdadera, es decir, se asume la validez de:

$$\neg\forall x \in \mathbb{N}\big[7x + 4 < 40\ \vee\ \forall\, y \in \mathbb{N}(x + y \neq 5)\big]$$

Al aplicar el teorema 1, se obtiene:

$$\begin{aligned} & \exists x \in \mathbb{N} \neg \big[7x + 4 < 40 \ \lor \ \forall\, y \in \mathbb{N}(x + y \neq 5) \big] \\ \equiv \quad & \exists x \in \mathbb{N} \big[7x + 4 \geq 40 \ \land \ \exists\, y \in \mathbb{N}(x + y = 5) \big] \end{aligned}$$

Es decir, se ha asumido que existe un número natural x que cumple con las proposiciones $7x + 4 \geq 40$ y $\exists\, y \in \mathbb{N}(x + y = 5)$. De la primera se obtiene que $x \geq \frac{36}{7}$, y como x es natural, se debe tener que $x \geq 6$. Como y también es natural, se concluye que $x + y \geq 6$, es decir, se ha demostrado que $5 = x + y \geq 6$, con lo cual $5 \geq 6$, que claramente es una contradicción. Por lo tanto, lo que se asumió es falso; entonces, se ha probado que la proposición dada es verdadera. ■

Ejercicios (sección 1.6)

1. Simbolice completamente las siguientes proposiciones, utilizando predicados, términos, conectivas y cuantificadores:

   (a) Para todo a y b números reales positivos existe un número entero n tal que na es mayor o igual que b.

   (b) Existe un número natural mayor que 5, de manera que su triple o su cuadrado sea menor que 30 y mayor que 20.

   (c) Existen tres números reales de manera que la suma de los dos primeros es igual a la suma del tercero más 4.

   (d) Para todo número real positivo x existe al menos un número natural n diferente de cero, tal que el inverso multiplicativo de n es menor que x.

   (e) Para todo número natural a y para todo número natural b, a y b son primos relativos si y sólo si el máximo común divisor de a y b es igual a uno.

   (f) Todo número natural n es divisible por 3 si existe un número natural k, de manera que el producto de 3 y k sea n.

(g) No existe un número real que sea mayor que todos los reales.

(h) Si el entero n es divisible por 2 y el entero m es divisible por 3, entonces el producto de m y n es divisible por 6.

(i) Existe un número real que al elevarlo al cuadrado dé -1.

(j) No existe un número racional tal que su cuadrado sea 2.

(k) Entre dos números racionales existe un número irracional.

2. Suponga que se tiene un universo de discurso formado por cinco personas: Juan, Raquel, Pedro, Rosa y Francis. Solamente las tres primeras son casadas. Pedro y Raquel tienen casa propia, mientras que Juan, Rosa y Francis alquilan casa. Solo Pedro y Rosa tienen automóvil propio. Todos, excepto Pedro, estudian en la universidad.

   (a) Presente la tabla de asignación de los predicados $C(x)$: x es casado, $CP(x)$: x tiene casa propia, $AC(x)$: x alquila casa, $AP(x)$: x tiene automóvil propio, $E(x)$: x estudia en la universidad.

   (b) Valide las proposiciones

      i. $\exists x\big[C(x) \land CP(x) \land AP(x)\big]$

      ii. $\forall x\big[CP(x) \lor E(x)\big]$

      iii. $\forall x\big[CP(x)\big] \lor \forall x\big[E(x)\big]$

      iv. $\forall x\big[C(x) \to \big(CP(x) \lor AC(x)\big)\big]$

3. Escriba y simplifique la negación de las siguientes proposiciones:

   (a) $(\forall n \in \mathbb{N})\big[n^2 - 2n + 5 \geq 4\big]$

   (b) $(\exists x \in \mathbb{R})\big[x > 2 \to x^2 \leq 5\big]$

   (c) $(\forall x \in \mathbb{R})(\exists n \in \mathbb{N})\big[n > x \ \lor \ nx \leq 0\big]$

4. Simbolice, escriba y simplifique la negación de las proposiciones siguientes:

(a) Todos los estudiantes de la universidad estudian medicina y no practican deporte.

(b) Todos los miembros del club tienen más de 30 años.

(c) Algunos de los personajes de la novela saben inglés o francés.

5. Para x entero, considere las siguientes proposiciones abiertas:
   $P(x):\ 2 < x \leq 10$
   $Q(x):\ x$ es número impar
   $R(x):\ x$ es número primo
   $S(x):\ 4x - 1$ es divisible por 3
   $T(x):\ x$ se puede escribir como la suma de dos primos
   Determine el valor de verdad de las siguientes proposiciones:

   (a) $(\exists x \in \mathbb{N})\ \big[P(x) \wedge Q(x) \wedge \neg R(x)\big]$

   (b) $(\exists x \in \mathbb{N})\ \big[P(x) \wedge R(x) \wedge S(x)\big]$

   (c) $(\forall x \in \mathbb{N})\ \big[P(x) \to \big(Q(x) \vee \neg R(x)\big)\big]$

   (d) $(\forall x \in \mathbb{N})\ \big[(P(x) \wedge Q(x) \wedge R(x)) \to \neg S(x)\big]$

   (e) $(\forall x \in \mathbb{N})\ \big[(P(x) \wedge \neg Q(x)) \to T(x+2)\big]$

6. Determine el valor de verdad de las siguientes proposiciones:

   (a) $(\exists y \in \mathbb{Z})(\forall x \in \mathbb{Z})\ \big[x = y + 1\big]$

   (b) $(\forall x \in \mathbb{Z})(\exists y \in \mathbb{Z})\ \big[x = y + 1\big]$

   (c) $(\exists y \in \mathbb{R})(\forall x \in \mathbb{R})\ \big[2x + 3y = 1\big]$

   (d) $(\forall x \in \mathbb{R})(\exists y \in \mathbb{R})\ \big[2x + 3y = 1\big]$

   (e) $(\forall x \in \mathbb{Z})(\exists y \in \mathbb{Z})\ \big[2x + 3y = 1\big]$

   (f) $(\exists x \in \mathbb{R})(\forall y \in \mathbb{R})\ \big[xy = 0\big]$

   (g) $\big(\forall x \in]0, +\infty[\big)(\exists y \in \mathbb{R})\ \big[0 < y < x\big]$

7. Considere $A = \{2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ y las proposiciones abiertas

$$\begin{aligned} P(x) &: \ x+1 \text{ es un número primo} \\ Q(x) &: \ x^2 + x \text{ es un número impar} \end{aligned}$$

Determine el valor de verdad de las proposiciones:

(a) $\forall x \in \mathbb{N}\left[x \in A \rightarrow x < 9\right] \wedge \exists x \in \mathbb{N}\left[x \notin A \wedge P(2x)\right]$

(b) $\exists x \in A\left[P(2x-1) \leftrightarrow Q(x+1)\right]$

(c) $(\forall x \in \mathbb{N})(\exists y \in \mathbb{N})\left[x \in A \rightarrow (Q(x) \vee P(x+y))\right]$

8. Simbolice la proposición "Ningún conejo que gusta de la poesía es indomesticable"; además, encuentre una equivalencia donde se utilice el cuantificador $\forall$.

9. Demuestre la validez de las siguientes proposiciones:

   (a) $\forall x \in \mathbb{N}\ \left[x < 7 \ \vee\ x^2 \geq 40\right]$

   (b) $\forall x \in \mathbb{N}\ \left[4x < 27 \rightarrow x^2 + 1 \leq 38\right]$

10. Para n un número entero, considere las siguientes definiciones:
    $D1$: n es par si y solo si $\exists k \in \mathbb{Z}$ tal que $n = 2k$.
    $D2$: n es impar si y solo si $\exists k \in \mathbb{Z}$ tal que $n = 2k+1$.
    Demuestre las siguientes proposiciones:

    (a) n^2 es par si y solo si n es par.

    (b) n^2 es impar si y solo si n es impar.

    (c) Si n es impar, entonces $3n^2 + 7n + 5$ es impar.

    (d) $n^2 + 3n + 2$ es par.

    (e) Si $n + m$ es par, entonces $n^2 + m^2$ también es par.

11. Es claro que la afirmación "Todo ejemplo es un contraejemplo" es falsa. ¿Cuál sería un contraejemplo de esta afirmación?

12. Hay una "regla" que dice: *toda regla tiene su excepción*. Si esta regla fuera verdadera, ella misma tendría una excepción, ¿cuál sería esta excepción?, ¿qué se puede concluir?

13. Obtenga la negación y simplifique la siguiente proposición:

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists \delta > 0)\big[x < \delta \rightarrow f(x) < \epsilon\big]$$

14. Demuestre, por contradicción, el siguiente teorema:

$$(\forall x \in \mathbb{R})(\forall y \in \mathbb{R})\Big[6x + 9y = 101 \rightarrow x \notin \mathbb{Z} \vee y \notin \mathbb{Z}\Big]$$

15. Si p es un número primo, con $p > 2$, pruebe que $2^p + p^2$ es impar.

16. Suponga que se tiene una cantidad de puntos y de rectas que satisfacen los axiomas:

    $A1$: cada par de rectas tiene un punto en común.

    $A2$: todo punto está exactamente sobre dos rectas.

    $A3$: hay exactamente cuatro rectas en el sistema.

    Obtenga una representación geométrica de este sistema de puntos y rectas.

17. Demuestre la validez de la proposición:

$$\big[(\forall\, a, b \in \mathbb{R})\ ax + by = 0\big] \rightarrow (x = 0\ \wedge\ y = 0)$$

18. Determine el valor de verdad de la proposición:

$$(\forall\, a, b \in \mathbb{R})\ \big[ax + by = 0 \rightarrow (x = 0\ \wedge\ y = 0)\big]$$

    y compare con el ejercicio anterior.

19. Si $f(x) = 3x - 2$, demuestre la validez de la proposición:

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists \delta > 0)\big[|x - 2| < \delta \rightarrow |f(x) - 4| < \epsilon\big]$$

1.7 Inferencias cuantificadas

Para verificar la validez de argumentos con proposiciones cuantificadas, a continuación se presentan tres argumentos básicos cuya demostración se omite. Sin embargo, se puede realizar como ejercicio. El primero es:

$$\forall x\left[P(x)\to Q(x)\right]\wedge\forall x\left[Q(x)\to R(x)\right]\Longrightarrow\forall x\left[P(x)\to R(x)\right]\quad(1.11)$$

Por claridad, en ocasiones se recomienda utilizar la notación vertical, que en el caso del argumento (1.11) se reescribe como:

$$\begin{array}{rl}1. & \forall x\left[P(x)\to Q(x)\right]\\ 2. & \forall x\left[Q(x)\to R(x)\right]\\ \hline & \therefore\forall x\left[P(x)\to R(x)\right]\end{array}$$

Como segundo argumento válido se tiene:

$$\exists x\left[P(x)\to Q(x)\right]\wedge\forall x\left[Q(x)\to R(x)\right]\Longrightarrow\exists x\left[P(x)\to R(x)\right]\quad(1.12)$$

es decir,

$$\begin{array}{rl}1. & \exists x\left[P(x)\to Q(x)\right]\\ 2. & \forall x\left[Q(x)\to R(x)\right]\\ \hline & \therefore\exists x\left[P(x)\to R(x)\right]\end{array}$$

Como tercer argumento válido se tiene:

$$\forall x\left[P(x)\to Q(x)\right]\wedge\exists x\left[Q(x)\to R(x)\right]\Longrightarrow\exists x\left[P(x)\to R(x)\right]\quad(1.13)$$

que, de la misma forma, se reescribe como:

$$\begin{array}{rl}1. & \forall x\left[P(x)\to Q(x)\right]\\ 2. & \exists x\left[Q(x)\to R(x)\right]\\ \hline & \therefore\exists x\left[P(x)\to R(x)\right]\end{array}$$

En este momento, es importante aclarar que la proposición

$$\exists x\ \big[P(x) \to Q(x)\big] \land \exists x\ \big[Q(x) \to R(x)\big] \longrightarrow \exists x\ \big[P(x) \to R(x)\big]$$

no es una tautología, pues el individuo del universo que satisface la primer proposición no necesariamente satisface la segunda, por lo que no se puede garantizar la existencia de un individuo que satisfaga ambas y así aplicar *modus ponens* para obtener la conclusión. Por lo anterior, al no ser verdadera, no se puede utilizar como un teorema.

Ejemplo 52. *Demuestre la validez del siguiente argumento:*

$$\begin{array}{rl} 1. & \exists x\ \big[P(x) \to Q(x)\big] \\ 2. & \nexists x\ \big[R(x) \land S(x)\big] \\ 3. & \forall x\ \big[Q(x) \to S(x)\big] \\ \hline & \therefore \exists x\ \big[P(x) \to \neg R(x)\big] \end{array}$$

Solución. Utilizando los teoremas y las reglas de inferencia ya estudiadas, se tiene:

$$\begin{array}{rll} 1. & \exists x\ \big[P(x) \to Q(x)\big] & \text{Premisa} \\ 2. & \nexists x\ \big[R(x) \land S(x)\big] & \text{Premisa} \\ 3. & \forall x\ \big[Q(x) \to S(x)\big] & \text{Premisa} \\ 4. & \forall x\ \big[\neg(R(x) \land S(x))\big] & \text{Teorema 1(pág. 83) a 2.} \\ 5. & \forall x\ \big[\neg R(x) \lor \neg S(x)\big] & \text{De Morgan a 4.} \\ 6. & \forall x\ \big[S(x) \to \neg R(x)\big] & \text{ID a 5.} \\ 7. & \exists x\ \big[P(x) \to S(x)\big] & \text{(1.12) a 1. y 3.} \\ 8. & \exists x\ \big[P(x) \to \neg R(x)\big] & \text{(1.13) a 6. y 7.} \end{array}$$

como se quería probar. ■

Ejercicios (sección 1.7)

1. Demuestre la validez de los siguientes argumentos:

(a)
$$\begin{array}{ll} 1. & \nexists x \left[R(x) \wedge \neg S(x)\right] \\ 2. & \forall x \left[P(x) \rightarrow Q(x)\right] \\ 3. & \forall x \left[Q(x) \rightarrow \neg S(x)\right] \\ \hline & \therefore\ \forall x \left[P(x) \rightarrow \neg R(x)\right] \end{array}$$

(b)
$$\begin{array}{ll} 1. & \forall x \left[\neg Q(x) \rightarrow \neg P(x)\right] \\ 2. & \forall x \left[Q(x) \rightarrow (R(x) \wedge S(x))\right] \\ 3. & \nexists x \left[\neg P(x) \vee \neg T(x)\right] \\ \hline & \therefore\ \forall x\ S(x) \end{array}$$

(c)
$$\begin{array}{ll} 1. & \nexists x \left[P(x) \wedge R(x)\right] \\ 2. & \nexists x \left[Q(x) \wedge \neg R(x)\right] \\ 3. & \forall x \left[S(x) \rightarrow P(x)\right] \\ \hline & \therefore\ \forall x \left[S(x) \rightarrow \neg Q(x)\right] \end{array}$$

(d)
$$\begin{array}{ll} 1. & \exists x \left[P(x) \wedge Q(x)\right] \\ 2. & \nexists x \left[R(x) \wedge Q(x)\right] \\ 3. & \forall x \left[\big(P(x) \wedge \neg R(x)\big) \rightarrow T(x)\right] \\ \hline & \therefore\ \exists x\ T(x) \end{array}$$

2. Para x, y, z variables reales, F, G proposiciones abiertas en una variable y H, I proposiciones abiertas en dos variables, compruebe la validez de las siguientes equivalencias:

   (a) $\neg\exists x\ \forall y \left[x \geq y\ \vee\ x - y = 2\right] \equiv \forall x\ \exists y \left[x < y\ \wedge\ x - y \neq 2\right]$

   (b) $\exists x\ H(x,2) \rightarrow \big(G(8) \rightarrow F(3)\big) \equiv \neg G(8) \vee F(3) \vee \forall x\left[\neg H(x,2)\right]$

   (c) $\forall x\left[\exists y\ H(x,y) \rightarrow \forall z\ I(x,z)\right] \equiv \forall x\left[\exists z \neg I(x,z) \rightarrow \forall y \neg H(x,y)\right]$

1.8 Métodos de demostración

"Si no cambias de dirección,
llegarás exactamente donde querías llegar".

Proverbio chino

A lo largo del texto se utilizan varios tipos de demostraciones formales y en esta sección se describen los principales métodos de demostración que, en general, servirán para verificar si una proposición lógica es verdadera y, con ello, determinar la validez de un argumento. Estos métodos no se inscriben solamente dentro de los temas aquí tratados; por el contrario, son de gran utilidad en campos como la geometría, el análisis y la probabilidad, entre otros. Además de esta breve descripción, se profundiza sobre algunos aspectos didácticos acerca de la enseñanza de la demostración y sobre la demostración de implicaciones, con especial interés en tres de los métodos. Para el desarrollo de esta sección, se contó con la valiosa colaboración del M.Sc. Geovanny Sanabria Brenes[2].

Las demostraciones, consideradas problemas de conclusión conocida, engendran en el estudiante una nueva concepción de matemática muy distinta a la presente en secundaria. En ésta se introducen conceptos desconocidos en su mayoría: axiomas, teoremas, definiciones...; además, se introduce la práctica de habilidades: conjeturar, realizar un contraejemplo, inducir, deducir, justificar y generalizar.

Durante el primer año de estudio en carreras afines a la de matemática, usualmente se estudia la enseñanza de la demostración, en donde se quiere ver a la matemática, en su esencia y estructura, como una disciplina que se encarga de formular, estructurar y sintetizar modelos generales con los cuales se pueden simular, representar y luego resolver diversos problemas. El éxito que tenga el estudiante es, sin duda, proporcional al aprendizaje y desarrollo de estas habilidades. Por lo

[2]Profesor de la Escuela de Matemática del Instituto Tecnológico de Costa Rica. Correo electrónico: gsanabria@itcr.ac.cr

tanto, es importante educar a los estudiantes en la forma de articular sus pensamientos para resolver un problema de conclusión conocida, y una forma de lograrlo es mediante una comprensión adecuada de los métodos de demostración.

1. **Demostración por tablas de verdad**
   Se obtiene una tabla de verdad para todos los casos posibles de asignación de valores de verdad para las proposiciones atómicas involucradas. La proposición compuesta dada será verdadera si en la tabla se observa que es una tautología, es decir, a la proposición se le asigna un valor verdadero en todos los casos.

2. **Demostración de proposiciones $\neg P$**
   Se debe probar que P es falsa.

3. **Demostración de proposiciones $P \vee Q$**
   Se puede hacer demostrando que una de las dos proposiciones P o Q es verdadera.

4. **Demostración de proposiciones $P \wedge Q$**
   Se debe probar, en forma independiente, que tanto P como Q son verdaderas. Es básicamente la regla de inferencia conocida como *adjunción* (véase página 64).

5. **Demostración de proposiciones $H \Rightarrow C$**
   Esto equivale a probar, como ya se ha mencionado, que $H \rightarrow C$ es una tautología. La mayoría de los teoremas en las distintas teorías matemáticas es de este tipo; por ejemplo, en el álgebra usual de los números reales se tiene que “si $a \neq 0$, entonces $a^0 = 1$”, y en geometría, “si un triángulo es equilátero y l es la longitud de su lado, entonces su área es $\frac{l^2\sqrt{3}}{4}$” son resultados que siempre se cumplen y, por lo tanto, son teoremas. Usualmente, los métodos de demostración de implicaciones se estudian por medio de la enseñanza de teoría de conjuntos con proposiciones como “Si $A \subseteq B$, entonces

$A \cap B = A$", o de la teoría de números con teoremas como "Si p es primo, entonces $2^{p-1}(2^p - 1)$ es un número perfecto". Aunque los dos resultados anteriores son del tipo condicional, es importante aclarar que algunas, como la igualdad $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$, es verdadera si a y b son números reales, pero será falsa si, por ejemplo, a y b son matrices. Así, la proposición anterior será verdadera para algunos objetos matemáticos, y sobre ellos se tienen axiomas, definiciones y otros resultados que pasarán a formar parte de las hipótesis aunque no se escriban explícitamente. Se denomina a H como la **hipótesis** (proposición cuyo valor de verdad se asume) y a C la **conclusión** (proposición cuyo valor de verdad se desea averiguar). En un proceso de demostración de $H \Rightarrow C$ se utilizan, además de H, otras "hipótesis" que no son mencionadas, éstas pueden ser axiomas o teoremas, incluso fórmulas válidas o nociones comunes (véase página 30). Se tienen los siguientes métodos de demostración de implicaciones:

(a) **Prueba directa**
En este método se parte de que H es verdadera, y por medio de las reglas de inferencias, leyes de la lógica, axiomas, definiciones, y probablemente otros resultados o teoremas ya probados, se deduce que C es verdadero. Un modelo para éste es:

Hipótesis: H
Hay que mostrar (hqm): C
Se supone H verdadero

1)	H es verdadero	(hipótesis)
2)	$\Rightarrow C_1$ es verdadero	(Justificación)
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
n)	$\Rightarrow C_n$ es verdadero	(Justificación)
$n+1$)	$\Rightarrow C$ es verdadero	(Justificación)

Es conveniente justificar cada deducción, indicando entre paréntesis, las reglas, axiomas o teoremas en que se basó.

(b) **Prueba indirecta**
Se prueba la contrapositiva (véase página 58), es decir, se prueba la proposición $\neg C \Rightarrow \neg H$ que, como se sabe, es lógicamente equivalente a $H \Rightarrow C$.

(c) **Prueba por contradicción**
Si se quiere probar la proposición C, se asume que es falsa (o equivalentemente $\neg C$ es verdadera) y si se logra probar que se contradice con alguna de las premisas, leyes u otros teoremas ya probados, se concluye que C no puede ser falsa y, por el principio del Tercero Excluido (véase página 44), C debe ser verdadera. Este método sigue el modelo:

Hipótesis: H (se asume verdadera pero no se usa)
Hay que mostrar (hqm) : C
Suponga por contradicción $\neg C$ es verdadero
Utilizando axiomas, definiciones o teoremas, se obtienen las siguientes deducciones:

$$\begin{aligned} &\neg C \text{ es verdadero}\\ \Rightarrow\ &I_1 \text{ es verdadero}\\ &\vdots\\ \Rightarrow\ &I_n \text{ es verdadero}\\ \Rightarrow\ &\neg H \text{ es verdadero}\end{aligned}$$

Pero H se asume verdadero, por lo que se llega a una contradicción ($\Rightarrow\Leftarrow$). Por lo tanto, lo supuesto $(\neg C)$ es falso, es decir, C es verdadero.

(d) **Prueba por reducción al absurdo**
En éste se usa la hipótesis y la negación de la conclusión para obtener un absurdo, es decir, una proposición que es falsa. Cuando se realiza una prueba utilizando reducción al absurdo, se suele seguir el siguiente modelo:

Hipótesis: H (se asume verdadera y se usa)
Hay que mostrar (hqm): C
Suponga por contradicción $\neg C$ es verdadero
Entonces $\neg C \wedge H$ es verdadero (adjunción de la hipótesis)
Utilizando axiomas, definiciones o teoremas, se obtienen las siguientes deducciones:

$$\begin{aligned} & \neg C \wedge H \text{ es verdadero} \\ \Rightarrow\ & I_1 \text{ es verdadero} \\ \Rightarrow\ & I_2 \text{ es verdadero} \\ & \vdots \\ \Rightarrow\ & I_n \text{ es verdadero} \\ \Rightarrow\ & F_0 \text{ es verdadero} \quad (\text{pero } F_0 \text{ es falsa}) \\ & (\Rightarrow\Leftarrow). \end{aligned}$$

Note que el supuesto $\neg C$ lleva a un absurdo
Por lo tanto, lo supuesto $\neg C$ es falso, así: C es verdadero.

Este método se suele confundir con el de contradicción. La diferencia es que en éste último se utilizan la hipótesis y la negación de la conclusión para llegar a un absurdo.

(e) **Prueba vacía**
Se prueba estableciendo que el valor de verdad de H siempre es falso.

(f) **Prueba trivial**
Se prueba estableciendo que el valor de verdad de C siempre es verdadero.

6. **Demostración de proposiciones $P \Rightarrow (Q \Rightarrow R)$**
Se puede utilizar la Ley de Exportación (véase página 58), y se puede probar que la proposición $(P \wedge Q) \Rightarrow R$ es verdadera, es decir, a partir de las premisas P y Q se prueba la validez de R.

7. **Demostración de proposiciones $P \Leftrightarrow Q$**
Esto equivale a probar, como ya se ha mencionado, que $P \leftrightarrow Q$ es una tautología. En este caso se debe probar $P \Rightarrow Q$, y además

se debe probar $Q \Rightarrow P$. Muchos de los resultados en matemáticas son de este tipo; por ejemplo, el conocido Teorema de Pitágoras afirma que "En un triángulo rectángulo se cumple que la suma del cuadrado de los catetos es igual al cuadrado de la hipotenusa", pero además afirma que "si a, b y c son las medidas de los lados de un triángulo y se cumple que $a^2 + b^2 = c^2$, entonces el triángulo es rectángulo".

8. **Demostración de proposiciones $\exists x\ [P(x)]$**
   Basta determinar un valor o elemento x del universo relativo para el cual $P(x)$ es cierta.

9. **Demostración de proposiciones $\forall x\ [P(x)]$**
   Se debe tomar un x arbitrario en el universo, sin asignarle un valor específico, y probar que este satisface la proposición $P(x)$.

10. **Demostración de proposiciones $\forall n \in \mathbb{N}\ [P(n)]$**
    En este caso, se puede recurrir al método de Inducción matemática dado en la sección 5.2.

11. **Contraejemplos**. Un ejemplo donde se muestra que la proposición no es verdadera, es decir, que es falsa, se conoce como un contraejemplo de la proposición.

Ahora se presentan algunos ejemplos en donde se utilizan tres de los métodos expuestos para la demostración de implicaciones lógicas.

Ejemplo 53. *Sea A un conjunto de números reales que cumple las siguientes proposiciones (axiomas):*

$$\begin{aligned} &\textit{Axioma } 1. \quad 3 \in A \\ &\textit{Axioma } 2. \quad x \in A \Rightarrow 3x + 1 \in A \\ &\textit{Axioma } 3. \quad x \in A\ \wedge\ y \in A \Rightarrow (x + y) \in A \end{aligned}$$

Demuestre los siguientes teoremas utilizando el método directo.

Teorema 1. *Si* $7 \in A$*, entonces* $25 \in A$*.*

Demostración. **Hipótesis:** $7 \in A$

hqm: $25 \in A$

1. $7 \in A$ (Premisa)
2. $\Rightarrow 3 \cdot 7 + 1 = 22 \in A$ (Axioma 2)
3. $\Rightarrow 22 \in A \wedge 3 \in A$ (Adjunción de axioma 1)
4. $\Rightarrow 25 \in A$ (Axioma 3) □

Teorema 2. *Si* $2 \in A$*, entonces* $27 \in A$*.*

Demostración. **Hipótesis:** $2 \in A$

hqm: $27 \in A$

1. $2 \in A$ (Premisa)
2. $\Rightarrow 3 \cdot 2 + 1 = 7 \in A$ (Axioma 2)
3. $\Rightarrow 25 \in A$ (Teorema 1)
4. $\Rightarrow 25 \in A \wedge 2 \in A$ (Adjunción de 1.)
5. $\Rightarrow 27 \in A$ (Axioma 3) □

Con ello se han probado los dos teoremas propuestos. Note cómo para la demostración del teorema 2 *se utilizó el teorema* 1*.* ■

Ejemplo 54. *Sea* A *un conjunto de números reales que cumple las siguientes proposiciones (axiomas):*

Axioma 1. $5 \in A$

Axioma 2. $x \in A \wedge y \in A \Rightarrow (x + y) \in A$

Utilice el método de contradicción para demostrar las proposiciones:

Teorema 1. *Si* $13 \notin A$*, entonces* $4 \notin A$*.*

Demostración. **Hipótesis:** $13 \notin A$

hqm: $4 \notin A$

1. $4 \in A$
2. $\Rightarrow 4 \in A \wedge 4 \in A$ (Idempotencia)

3. $\quad 4+4=8 \in A \qquad$ (Axioma 2)
4. $\Rightarrow 8 \in A \ \wedge \ 5 \in A \qquad$ (Adjunción del axioma 1)
5. $\Rightarrow 13 \in A \qquad$ (Axioma 2)

$(\Rightarrow\Leftarrow)$ Contradice la hipótesis

Por lo tanto, lo supuesto es falso, es decir:

$\therefore \ 4 \notin A$ $\square$

Teorema 2. *Si* $(3x-6) \notin A$, *entonces* $(x \notin A \ \vee \ -11 \notin A)$.
Demostración. **Hipótesis:** $(3x-6) \notin A$

hqm: $(x \notin A \ \vee \ -11 \notin A)$

Suponga por contradicción que: $x \in A \ \wedge \ -11 \in A$

1. $\quad x \in A \ \wedge \ -11 \in A$
2. $\Rightarrow 2x \in A \ \wedge \ -11 \in A \qquad$ (Axioma 2)
3. $\Rightarrow 3x \in A \ \wedge \ -11 \in A \qquad$ (Axioma 2 : a 1 y 2)
4. $\Rightarrow (3x-11) \in A \qquad$ (Axioma 2)
5. $\Rightarrow (3x-11) \in A \ \wedge \ 5 \in A \qquad$ (Adjunción del axioma 1)
6. $\Rightarrow (3x-6) \in A \qquad$ (Axioma 2)

$(\Rightarrow\Leftarrow)$ Contradice la hipótesis

Por lo tanto, lo supuesto es falso, es decir:

$\therefore \ x \notin A \ \vee \ -11 \notin A$ $\square$

Así, se probaron los dos teoremas, que son independientes entre sí, pues para la prueba de cada uno no se utiliza el resultado del otro. $\blacksquare$

En el siguiente ejemplo se darán algunos axiomas y con el método de reducción al absurdo se demostrarán dos teoremas que, de nuevo, serán independientes entre sí.

Ejemplo 55. *Sea* B *un conjunto de números reales que cumple las siguientes proposiciones (axiomas):*

Axioma 1. $\quad 3 \in B$

Axioma 2. $\quad x \in B \ \wedge \ y \in B \Rightarrow xy \in B$

Axioma 3. $\quad 6 \notin B$

Pruebe los siguientes dos teoremas utilizando la reducción al absurdo.

Teorema 1. *Si* $\frac{5}{2} \in B$*, entonces* $\frac{4}{5} \notin B$*.*

Demostración. **Hipótesis:** $\frac{5}{2} \in B$
hqm: $\frac{4}{5} \notin B$
Suponga por contradicción que: $\frac{4}{5} \in B$

1. $\frac{4}{5} \in B$
2. $\Rightarrow \frac{4}{5} \in B \ \wedge\ \frac{5}{2} \in B$ (Adjunción de la hipótesis)
3. $\Rightarrow \frac{4}{5} \cdot \frac{5}{2} \in B$ (Axioma 2)
4. $\Rightarrow 2 \in B$ (Simplificación en 3)
5. $\Rightarrow 2 \in B \ \wedge\ 3 \in B$ (Adjunción del axioma 1)
6. $\Rightarrow 6 \in B$ (Axioma 2)

($\Rightarrow\Leftarrow$) (Absurdo: contradice el axioma 3)

Por lo tanto, lo supuesto es falso, es decir, $\frac{4}{5} \notin B$. □

Teorema 2. *Si* $\frac{1}{x} \in B$*, entonces* $\sqrt{2}\,x \notin B$*.*

Demostración. **Hipótesis:** $\frac{1}{x} \in B$
hqm: $\sqrt{2}\,x \notin B$
Suponga por contradicción que: $\sqrt{2}\,x \in B$

1. $\sqrt{2}\,x \in B$
2. $\Rightarrow \sqrt{2}\,x \in B \ \wedge\ \frac{1}{x} \in B$ (Adjunción de la hipótesis)
3. $\Rightarrow \sqrt{2}\,x \cdot \frac{1}{x} \in B$ (Axioma 2)
4. $\Rightarrow \sqrt{2} \in B$ (Simplificación en 3)
5. $\Rightarrow \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} \in B$ (Axioma 2)
6. $\Rightarrow 2 \in B$ (propiedad de radicales a 5)
7. $\Rightarrow 2 \in B \ \wedge\ 3 \in B$ (Adjunción del axioma 1)
8. $\Rightarrow 6 \in B$ (Axioma 2)

($\Rightarrow\Leftarrow$) (Absurdo: contradice el axioma 3)

Por lo tanto, lo supuesto es falso, es decir, $\sqrt{2}\,x \notin B$. □

Con ello se han probado los dos teoremas con el método de reducción al absurdo. Note cómo ellos son independientes entre sí. ■

Ejercicios (sección 1.8)

Sea A un conjunto de números reales que cumple las proposiciones:

$$\begin{aligned} \text{Axioma I}: &\quad 5 \in A \\ \text{Axioma II}: &\quad x \in A \Rightarrow 3x + 2 \in A \\ \text{Axioma III}: &\quad x \in A \ \wedge \ y \in A \Rightarrow (x + y) \in A \\ \text{Axioma IV}: &\quad 7 \notin A \end{aligned}$$

Demuestre los siguientes teoremas utilizando el método indicado.

1. $3 \in A \Rightarrow 16 \in A$. (Directo)
2. $4 \in A \Rightarrow 23 \in A$. (Directo)
3. $11 \in A \Rightarrow (28 \in A \ \vee \ 31 \notin A)$. (Directo)
4. $3 \in A \ \wedge \ 11 \in A \Rightarrow 51 \in A$. (Directo)
5. $x \in A \ \wedge \ y \in A \Rightarrow (3x + 2y + 17) \in A$. (Directo)
6. $x \in A \ \wedge \ y \in A \Rightarrow (7x + 3y + 16) \in A$. (Directo)
7. $11 \notin A \Rightarrow 3 \notin A$. (Contradicción)
8. $24 \notin A \Rightarrow (4 \notin A \ \vee \ 12 \in A)$. (Contradicción)
9. $(3y + z + 7) \notin A \Rightarrow \left(y \notin A \ \vee \ \dfrac{z}{2} \notin A\right)$. (Contradicción)
10. $(3y \notin A \ \wedge \ (z + 10) \notin A) \Rightarrow (y \notin A \ \wedge \ z \notin A)$. (Contradicción)
11. $3 \in A \Rightarrow 1 \notin A$. (Reducción al absurdo)
12. $21 \in A \Rightarrow -31 \notin A$. (Reducción al absurdo)
13. $x \in A \ \wedge \ y \in A \Rightarrow (-3 - 3x - y) \notin A$. (Reducción al absurdo)
14. $2 \notin A$
15. $(\exists x \in A)\left(x^2 - 17x + 70 = 0\right)$