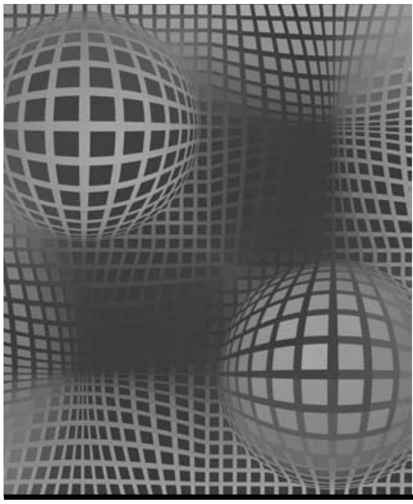


Capítulo 1

LÓGICA Y DEMOSTRACIONES

Lógica, lógica, lógica. La lógica es el principio de la sabiduría, Valeria, no el fin.

STAR TREK VI: EL PAÍS SIN DESCUBRIR

Lógica es el estudio del razonamiento; se refiere específicamente a si el razonamiento es correcto. La lógica se centra en la relación entre las afirmaciones y no en el contenido de una afirmación en particular. Considere, por ejemplo, el siguiente argumento:

Todos los matemáticos usan sandalias
Cualquiera que use sandalias es un algebrista
Por lo tanto, todos los matemáticos son algebristas

En el sentido técnico, la lógica no ayuda a determinar si alguna de estas afirmaciones es cierta; sin embargo, si las primeras dos afirmaciones son ciertas, la lógica asegura que la afirmación

WWW todos los matemáticos son algebristas

también es cierta.

Los métodos lógicos se usan en matemáticas para demostrar teoremas y, en las ciencias de la computación, para probar que los programas hacen lo que deben hacer. Suponga, por ejemplo, que se asigna a un estudiante el desarrollo de un programa para calcular las trayectorias más cortas entre ciudades. Es necesario que el programa acepte como entrada un número arbitrario de ciudades y las distancias entre las ciudades con conexión directa por carretera, y que produzca como salida las trayectorias (rutas) más cortas entre cada par distinto de ciudades. Después de escribir el programa, es fácil para el estudiante probarlo con un número reducido de ciudades. Con papel y lápiz, puede enumerar todas las trayectorias posibles entre pares de ciudades y encontrar las más cortas. Esta solución por "fuerza bruta" se compara con la salida del programa. Sin embargo, para un número grande de ciudades, la técnica de la "fuerza bruta" sería tardada. ¿Cómo puede el estudiante estar seguro de que el programa trabaja bien para muchos datos (casi seguro el tipo de entrada con la que el profesor probaría el programa)? Él tendrá que usar la *lógica* para argumentar que el programa es correcto. El argumento puede ser informal o formal usando las técnicas presentadas en este capítulo; pero se requerirá un argumento lógico.

Entender la lógica también resulta útil para aclarar la escritura común. Por ejemplo, en una ocasión, se publicó el siguiente decreto en Naperville, Illinois: "Será ilegal que una

† Esta sección se puede omitir sin pérdida de continuidad.

persona tenga más de tres perros y tres gatos en su propiedad dentro de la ciudad". Un ciudadano que tenía cinco perros y ningún gato, ¿violaba el decreto? Piense en esta pregunta ahora y analícela (vea ejercicio 54, sección 1.1) después de leer la sección 1.1.

1.1 ➜ Proposiciones

¿Cuáles oraciones de la *a)* a la *e)* son verdaderas o falsas (pero no ambas)?

a) Los únicos enteros positivos que dividen† a 7 son 1 y el mismo 7.
b) Alfred Hitchcock ganó un premio de la Academia en 1940 por la dirección de "Rebeca".
c) Para todo entero positivo n, existe un número primo‡ mayor que n.
d) La Tierra es el único planeta en el universo que tiene vida.
e) Compra dos boletos para el concierto de rock "Unhinged Universe" del viernes.

La oración *a)*, que es otra manera de decir que el 7 es primo, es verdadera.

La oración *b)* es falsa. Aunque "Rebeca" ganó el premio de la Academia por la mejor película de 1940, John Ford ganó el premio por dirigir "Las viñas de la ira". Es un hecho sorprendente que Alfred Hitchcock nunca haya ganado un premio de la Academia por mejor dirección.

La oración *c)*, que es otra forma de decir que el número de primos es infinito, es verdadera.

La oración *d)* puede ser verdadera o falsa (pero no ambas), sin embargo en este momento se ignora.

La oración *e)* no es verdadera ni falsa [esta oración es una orden].

Una oración que es verdadera o falsa, pero no ambas, se llama una **proposición.** Las oraciones *a)* a la *d)* son proposiciones, mientras que la oración *e)* no es una proposición. Es común que una proposición se exprese como una oración declarativa (y no como pregunta, orden, exclamación, etcétera). Las proposiciones son los bloques básicos de construcción de cualquier teoría de lógica.

Se usarán variables, como p, q y r, para representar las proposiciones, casi como se usan letras en álgebra para representar números. También se usará la notación

$$p\colon 1 + 1 = 3$$

para definir que p es la proposición $1 + 1 = 3$.

Al hablar y escribir de forma normal, las proposiciones se combinan usando conectores como *y* y *o*. Por ejemplo, las proposiciones "está lloviendo" y "hace frío" se pueden combinar para formar la proposición "está lloviendo y hace frío". A continuación se dan las definiciones formales de *y* y *o*.

Definición 1.1.1 ▶

Sean p y q proposiciones.

La *conjunción* de p y q, denotada por $p \wedge q$, es la proposición

$$p \quad \text{y} \quad q.$$

La *disyunción* de p y q, denotada por $p \vee q$, es la proposición

$$p \quad \text{o} \quad q.$$ ◀

Un *operador binario* sobre un conjunto* X, asigna a cada par de elementos en X un elemento de X (vea la definición 2.2.44). El operador $\wedge$ asigna a cada par de proposiciones

†"Divide" se refiere a "división exacta". De manera más formal, se dice que un entero diferente de cero *d divide* a un entero m si existe un entero q tal que $m = dq$. A q se le llama el *cociente*. Se explorarán los enteros con detalle en el capítulo 5.

‡ Un entero $n > 1$ es *primo* si los únicos enteros positivos que dividen a n son 1 y el mismo n. Por ejemplo, 2, 3 y 11 son números primos.

* Un *conjunto* es una colección de objetos. Por ejemplo, el conjunto de enteros positivos consiste en los enteros 1, 2, … Los "conjuntos" se estudian con detalle en la sección 2.1.

p y q la proposición $p \wedge q$. Entonces, $\wedge$ es un operador binario sobre las proposiciones. El operador $\vee$ también es un operador binario sobre las proposiciones.

Ejemplo 1.1.2 ▶

Si

p: Está lloviendo,
q: Hace frío,

entonces la conjunción de p y q es

$p \wedge q$: Está lloviendo y hace frío.

La disyunción de p y q es

$p \vee q$: Está lloviendo o hace frío. ◀

El valor de verdad de la conjunción $p \wedge q$ está determinado por los valores verdaderos de p y q, y la definición se basa en la interpretación usual de "y". Considere la proposición

$p \wedge q$: Está lloviendo y hace frío

del ejemplo 1.1.2. Si está lloviendo (es decir, p es verdadera) y también hace frío (es decir, q también es verdadera), entonces la proposición

$p \wedge q$: Está lloviendo y hace frío

se consideraría verdadera. Sin embargo, si no está lloviendo (esto es, p es falsa) o si no hace frío (q es falsa) o ambas, entonces la proposición

$p \wedge q$: Está lloviendo y hace frío

se consideraría falsa.

Los valores de verdad de las proposiciones, tales como conjunciones o disyunciones, se pueden describir por las **tablas de verdad**. La tabla de verdad de una proposición P, formada por las proposiciones individuales $p_1, \ldots, p_n$, enumera todas las posibles combinaciones de los valores de verdad para $p_1, \ldots, p_n$, donde V denota verdadero y F denota falso, y da la lista de valores de verdad de P para cada combinación. Se usa una tabla de verdad para dar la definición formal de los valores de verdad de $p \wedge q$.

Definición 1.1.3 ▶

Los valores de verdad de la proposición $p \wedge q$ se definen por la tabla de verdad

p	q	$p \wedge q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

◀

Observe que en la tabla de verdad de la definición 1.1.3 se dan las cuatro combinaciones posibles (cuatro alternativas posibles) de asignaciones de verdad para p y q.

La definición 1.1.3 establece que la conjunción $p \wedge q$ es verdadera siempre que p y q sean ambas verdaderas; de otra manera, $p \wedge q$ es falsa.

Ejemplo 1.1.4 ▶

Si

p: Una década tiene 10 años,
q: Un milenio tiene 100 años,

entonces p es verdadera, q es falsa (un milenio tiene 1000 años) y la conjunción

$p \wedge q$: Una década tiene 10 años y un milenio tiene 100 años

es falsa. ◀

Ejemplo 1.1.5 ▶

Casi todos los lenguajes de programación definen "y" justo como la definición 1.1.3. Por ejemplo, en el lenguaje de programación Java, el "y" (lógico) se denota por `&&`, y la expresión

```
x < 10 && y > 4
```

es verdadera precisamente cuando el valor de la variable `x` es menor que 10 (esto es, `x < 10` es cierta) y el valor de la variable `y` es mayor que 4 (es decir, `y > 4` se cumple). ◀

El valor de verdad de la disyunción $p \vee q$ también está determinado por los valores de verdad de p y q, y la definición se basa en la interpretación "inclusiva" de "o". Considere la proposición

$p \vee q$: Está lloviendo o hace frío,

del ejemplo 1.1.2. Si está lloviendo (es decir, p es verdadera) o si hace frío (es decir, q es verdadera) *o ambas*, entonces se consideraría que la proposición

$p \vee q$: Está lloviendo o hace frío

es verdadera (esto es, $p \vee q$ es verdadera). El **or-inclusivo** de las proposiciones p y q es verdadero si ambas, p y q, son verdaderas. Si no está lloviendo (o sea, p es falsa) y si no hace frío (q también es falsa), entonces se consideraría que la proposición

$p \vee q$: Está lloviendo o hace frío,

es falsa (esto es, $p \vee q$ es falsa). También existe el **or-exclusivo** (vea el ejercicio 53) que define p *exor* q como falsa si ambas, p y q, son verdaderas.

Definición 1.1.6 ▶

El valor de verdad de la proposición $p \vee q$ se define por la tabla de verdad

p	q	$p \vee q$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

◀

La definición 1.1.6 establece que la disyunción $p \vee q$ es verdadera siempre que p o q (o ambas) sean verdaderas; de otra manera, $p \vee q$ será falsa (es decir, sólo si p y q son falsas la disyunción será falsa).

Ejemplo 1.1.7 ▶

Si

p: Un milenio tiene 100 años,

q: Un milenio tiene 1000 años,

entonces p es falsa, q es verdadera y la disyunción

$p \vee q$: Un milenio tiene 100 años o un milenio tiene 1000 años

es verdadera. ◀

Ejemplo 1.1.8 ▶

Casi todos los lenguajes de programación definen un or (inclusivo) justo como en la definición 1.1.6. Por ejemplo, en Java, el or (lógico) se denota por `||` y la expresión

```
x < 10 || y > 4
```

es verdadera precisamente cuando el valor de la variable `x` es menor que 10 (esto es, `x < 10` es cierta) o el valor de la variable y es mayor que 4 (es decir, `y > 4` se cumple) o ambas. ◀

En el lenguaje común, las proposiciones que se combinan (es decir, p y q combinadas para dar la proposición $p \vee q$) suelen estar relacionadas; pero en lógica, no se requiere que estas proposiciones hagan referencia al mismo asunto. Por ejemplo, en lógica se permiten proposiciones como

$$3 < 5 \text{ o París es la capital de Inglaterra.}$$

La lógica se ocupa de la forma de las proposiciones y de la relación de las proposiciones entre sí, no del tema. (La proposición anterior es verdadera porque $3 < 5$ es verdadera).

El operador final en una proposición p que analizamos en esta sección es la **negación** de p.

Definición 1.1.9 ▶ La *negación* de p, denotada por $\neg p$, es la proposición

$$\text{no } p.$$

El valor de verdad de esta proposición $\neg p$ se define por la tabla de verdad

p	$\neg p$
V	F
F	V

◀

Algunas veces escribimos $\neg p$ para decir "no ocurre que p". Por ejemplo, si

p: París es la capital de Inglaterra,

la negación de p se escribe como

$\neg p$: No ocurre que París es la capital de Inglaterra.

o más fácil como

$\neg p$: París no es la capital de Inglaterra.

Un *operador unario* sobre un conjunto X asigna a cada elemento de X un elemento de X (vea la definición 2.2.46). El operador $\neg$ asigna a cada proposición p la proposición $\neg p$. Entonces, $\neg$ es un operador unario sobre las proposiciones.

Ejemplo 1.1.10 ▶ Si

p: π se calculó con 1,000,000 de dígitos decimales en 1954,

la negación de p es la proposición

$\neg p$: π no se calculó con 1,000,000 de dígitos decimales en 1954.

No fue sino hasta 1973 que se calculó π con 1,000,000 de dígitos decimales; entonces p es falsa. (Desde entonces se han calculado más de 200 mil millones de dígitos decimales de π). Puesto que p es falsa, $\neg p$ es verdadera. ◀

Ejemplo 1.1.11 ▶

Casi todos los lenguajes de programación definen "no" justo como en la definición 1.1.9. Por ejemplo, en Java el "no" se denota por !, y la expresión

```
! (x < 10)
```

es verdadera precisamente cuando el valor de la variable `x` no es menor que 10 (es decir, `x` es mayor que o igual a 10). ◀

En las expresiones que incluyen algunos o todos los operadores $\neg$, $\wedge$ y $\vee$, en la ausencia de paréntesis, primero se evalúa $\neg$, después $\wedge$ y luego $\vee$. Esta convención se conoce como **precedencia del operador**. En álgebra, la precedencia del operador indica que se evalúan $\cdot$ y $/$ antes que $+$ y $-$.

Ejemplo 1.1.12 ▶

Puesto que la proposición p es falsa, la proposición q es verdadera y la proposición r es falsa, determine si la proposición

$$\neg p \vee q \wedge r$$

es falsa o verdadera.

Primero se evalúa $\neg p$, que es verdadera. Después se evalúa $q \wedge r$, que es falsa. Por último, se evalúa

$$\neg p \vee q \wedge r$$

que es verdadera. ◀

Ejemplo 1.1.13 ▶

Búsqueda en Internet

Se dispone de gran variedad de herramientas de búsqueda en Internet (como AltaVista, Google, Yahoo) que permiten al usuario introducir palabras clave que el portal de búsqueda intenta igualar con páginas Web. Por ejemplo, introducir *matemáticas* produce una lista (¡enorme!) de páginas que contienen la palabra "matemáticas". Algunos sitios de búsqueda permiten al usuario incluir operadores como *AND*, *OR* y *NOT* (*y*, *o* y *no*) junto con paréntesis para combinar las palabras clave (vea la figura 1.1.1), lo que admite búsquedas

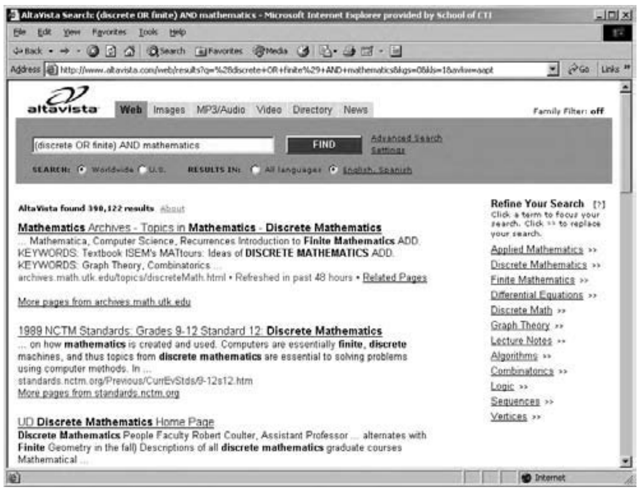


Figura 1.1.1 El portal de búsqueda AltaVista permite al usuario introducir expresiones con *AND*, *OR* y *NOT* junto con paréntesis. (En AltaVista, NOT debe ir precedido de otro operador como AND). En la figura, el usuario busca páginas que contengan "discrete mathematics" o "finite mathematics" ("matemáticas discretas" o "matemáticas finitas") escribiendo *(discrete OR finite) AND mathematics*. Como se muestra, AltaVista encontró cerca de 390,000 páginas de Internet que contienen matemáticas discretas o matemáticas finitas.

más complejas. Por ejemplo, para buscar páginas que contengan las palabras clave "discretas" *y* "matemáticas", el usuario escribiría *discretas AND matemáticas*. Para buscar páginas con las palabras clave "discretas" *y* "matemáticas" *o* las palabras clave "finitas" *y* "matemáticas", el usuario podría introducir (*discretas OR finitas) AND matemáticas*. ◀

Sugerencias para resolver problemas

Aunque tal vez haya un camino más corto para determinar los valores de verdad de una proposición P formada al combinar las proposiciones $p_1, \ldots, p_n$ usando operadores como $\neg$ y $\vee$, la tabla de verdad siempre proporcionará todos los valores de verdad posibles de P para diferentes valores de las proposiciones que la constituyen $p_1, \ldots, p_n$.

Sección de ejercicios de repaso

†*1.* ¿Qué es una proposición?

2. ¿Qué es una tabla de verdad?

3. ¿Qué es la conjunción de p y q? ¿Cómo se denota?

4. Proporcione la tabla de verdad para la conjunción de p y q.

5. ¿Qué es la disyunción de p y q? ¿Cómo se denota?

6. Proporcione la tabla de verdad para la disyunción de p y q.

7. ¿Qué es la negación de p? ¿Cómo se denota?

8. Proporcione la tabla de verdad para la negación de p.

Ejercicios

Determine si cada oración en los ejercicios 1 a 8 es una proposición. Si la oración es una proposición, escriba su negación. (No se piden los valores de verdad de las oraciones que son proposiciones).

1. $2 + 5 = 19$.

2. Mesero, ¿serviría las nueces, quiero decir, serviría las nueces a los invitados?

3. Para algún entero positivo n, $19340 = n \cdot 17$.

4. Audrey Meadows fue la "Alice" original de la serie "The Honeymooners".

5. Pélame una uva.

6. La línea "Tócala otra vez, Sam" corresponde a la película "Casablanca".

7. Todo entero par mayor que 4 es la suma de dos primos.

8. La diferencia de dos primos.

Los ejercicios 9 a 12 se refieren a una moneda que se lanza 10 veces. Escriba la negación de la proposición.

9. Salieron 10 caras.

10. Salieron algunas caras.

11. Salieron algunas caras y algunas cruces.

12. Salió al menos una cara.

Puesto que la proposición p es falsa, la proposición q es verdadera y la proposición r es falsa, determine si cada proposición en los ejercicios 13 a 18 es falsa o verdadera.

13. $p \vee q$

14. $\neg p \vee \neg q$

15. $\neg p \vee q$

16. $\neg p \vee \neg(q \wedge r)$

17. $\neg(p \vee q) \wedge (\neg p \vee r)$

18. $(p \vee \neg r) \wedge \neg((q \vee r) \vee \neg(r \vee p))$

Escriba la tabla de verdad de cada proposición en los ejercicios 19 a 26.

19. $p \wedge \neg q$

20. $(\neg p \vee \neg q) \vee p$

21. $(p \vee q) \wedge \neg p$

22. $(p \wedge q) \wedge \neg p$

23. $(p \wedge q) \vee (\neg p \vee q)$

24. $\neg(p \wedge q) \vee (r \wedge \neg p)$

25. $(p \vee q) \wedge (\neg p \vee q) \wedge (p \vee \neg q) \wedge (\neg p \vee \neg q)$

26. $\neg(p \wedge q) \vee (\neg q \vee r)$

En los ejercicios 27 a 29, represente la proposición indicada simbólicamente definiendo

$$p: 5 < 9, \quad q: 9 < 7, \quad r: 5 < 7.$$

Determine si cada proposición es verdadera o falsa.

27. $5 < 9$ y $9 < 7$.

28. No ocurre que ($5 < 9$ y $9 < 7$).

29. $5 < 9$ o no ocurre que ($9 < 7$ y $5 < 7$).

En los ejercicios 30 a 35, formule la expresión simbólica en palabras usando

p: Leo toma ciencias de la computación.

q: Leo toma matemáticas.

30. $\neg p$

31. $p \wedge q$

32. $p \vee q$

33. $p \vee \neg q$

34. $p \wedge \neg q$

35. $\neg p \wedge \neg q$

En los ejercicios 36 a 40, formule la expresión simbólica en palabras usando

p: Hoy es lunes.

q: Está lloviendo.

r: Hace calor.

36. $p \vee q$

37. $\neg p \wedge (q \vee r)$

38. $\neg(p \vee q) \wedge r$

39. $(p \wedge q) \wedge \neg(r \vee p)$

† Los números de ejercicios en cursivas indican que se da una sugerencia o la solución al final del libro, después de la sección de referencias

40. $(p \wedge (q \vee r)) \wedge (r \vee (q \vee p))$

En los ejercicios 41 a 46, represente simbólicamente la proposición definiendo

p: Hay huracán.

q: Está lloviendo.

41. No hay huracán.

42. Hay huracán y está lloviendo.

43. Hay huracán, pero no está lloviendo.

44. No hay huracán y no está lloviendo.

45. Hay huracán o está lloviendo (o ambas).

46. Hay huracán o está lloviendo, pero no hay huracán.

En los ejercicios 47 a 52, represente simbólicamente la proposición definiendo

p: Oíste el concierto de rock de "Flying Pigs".

q: Oíste el concierto de rock de "Y2K".

r: Tienes los tímpanos inflamados.

47. Oíste el concierto de rock de "Flying Pigs" y tienes los tímpanos inflamados.

48. Oíste el concierto de rock de "Flying Pigs", pero no tienes los tímpanos inflamados.

49. Oíste el concierto de rock de "Flying Pigs", oíste el concierto de rock de "Y2K" y tienes los tímpanos inflamados.

50. Oíste el concierto de rock de "Flying Pigs" o el concierto de rock de "Y2K", pero no tienes los tímpanos inflamados.

51. No oíste el concierto de rock de "Flying Pigs" y no oíste el concierto de rock de "Y2K", pero tienes los tímpanos inflamados.

52. No ocurre que: oíste el concierto de rock de "Flying Pigs" o bien oíste el concierto de rock de "Y2K" o no tienes los tímpanos inflamados.

53. Proporcione una tabla de verdad para el or-exclusivo de p y q donde p *exor* q es verdadera si p o q, pero no ambas, son verdaderas.

54. En una ocasión se publicó el siguiente decreto en Naperville, Illinois: "Será ilegal que una persona tenga más de tres [3] perros y tres [3] gatos en su propiedad dentro de la ciudad". El señor Charles Marko tenía cinco perros y ningún gato, ¿violaba el decreto? Explique.

55. Escriba las instrucciones de búsqueda en Internet para encontrar parques nacionales en Dakota del Sur o del Norte.

56. Escriba las instrucciones de búsqueda en Internet para obtener información de enfermedades pulmonares que no sean cáncer.

57. Escriba las instrucciones de búsqueda en Internet para ver equipos de béisbol de las ligas menores que estén en la Liga del Medio Oeste.

1.2 ➜ Proposiciones condicionales y equivalencia lógica

El decano de la escuela anunció que

Si el departamento de matemáticas obtiene $40,000 adicionales,
entonces contratará un nuevo académico. **(1.2.1)**

La afirmación (1.2.1) establece que con la condición de que el departamento de matemáticas obtenga $40,000 adicionales, entonces contratará un nuevo académico. Este tipo de proposición se conoce como **proposición condicional.**

Definición 1.2.1 ▶

Si p y q son proposiciones, la proposición

$$\text{si } p \text{ entonces } q \tag{1.2.2}$$

se llama *proposición condicional* y se denota por

$$p \to q$$

La proposición p se llama *hipótesis* (o *antecedente*) y la proposición q recibe el nombre de *conclusión* (o *consecuente*). ◀

Ejemplo 1.2.2 ▶

Si se define

p: El departamento de matemáticas obtiene $40,000 adicionales,

q: El departamento de matemáticas contrata un nuevo académico,

entonces la proposición (1.2.1) toma la forma (1.2.2). La hipótesis es la afirmación "el departamento de matemáticas obtiene $40,000 adicionales" y la conclusión es la afirmación "el departamento de matemáticas contrata un nuevo académico". ◀

¿Cuál es el valor de verdad para la afirmación del decano (1.2.1)? Primero, suponga que el departamento de matemáticas obtiene $40,000 adicionales. Si de hecho contrata otro académico, con seguridad la afirmación del decano es verdadera. (Usando la notación del ejemplo 1.2.2, si p y q son ambas verdaderas, entonces $p \to q$ es verdadera). Por otra parte, si el departamento de matemáticas obtiene $40,000 adicionales y *no* contrata un nuevo académico, el decano está equivocado, es decir, la oración (1.2.1) es falsa. (Si p es verdadera y q es falsa, entonces $p \to q$ es falsa). Ahora suponga que el departamento de matemáticas no obtiene $40,000 adicionales. En este caso, el departamento de matemáticas puede o no contratar otro académico. (Quizá alguien del departamento se jubila y se contrata a alguien más para reemplazarlo. Por otro lado, el departamento puede no contratar a alguien). Por supuesto, no se consideraría falsa la afirmación del decano. Así, si el departamento de matemáticas *no* obtiene los $40,000, la afirmación del decano debe ser verdadera, sin importar si el departamento contrata o no otro académico. (Si p es falsa, entonces $p \to q$ es verdadera sea q verdadera o falsa). Este análisis motiva la siguiente definición.

Definición 1.2.3 ▶

El valor verdadero de la proposición condicional $p \to q$ está definido por la siguiente tabla de verdad:

p	q	$p \to q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

◀

De manera formal, $\to$ es un operador binario sobre las proposiciones. El operador $\to$ asigna a cada par de proposiciones p y q la proposición $p \to q$.

Para quienes necesitan mayor evidencia de que $p \to q$ se debe definir como verdadera cuando p es falsa, se ofrece otra justificación. Casi todas las personas están de acuerdo en que la proposición

$$\text{Para todos los números reales } x, \text{ si } x > 0, \text{ entonces } x^2 > 0, \tag{1.2.3}$$

es verdadera. (En la sección 1.3 se hará el análisis formal y detallado de afirmaciones del tipo "para todos"). En la siguiente presentación, p denotada por $x > 0$ y q denotada por $x^2 > 0$. El hecho de que la proposición (1.2.3) sea verdadera significa que no importa con cuál número real se sustituya x, la proposición

$$\text{si } p \text{ entonces } q \tag{1.2.4}$$

resultante es verdadera. Por ejemplo, si $x = 3$, entonces p y q son ambas ciertas ($3 > 0$ y $3^2 > 0$ son ambas verdaderas) y, por la definición 1.2.3, (1.2.4) es verdadera. Ahora considere la situación donde p es falsa. Si $x = -2$, entonces p es falsa ($-2 > 0$ es falsa) y q es verdadera [$(-2)^2 > 0$ es verdadera]. Con objeto de que la proposición (1.2.4) sea verdadera en ese caso, debe definirse $p \to q$ como verdadera cuando p es falsa y q es verdadera. Esto es justo lo que ocurre en el tercer renglón de la tabla de verdad para la definición 1.2.3. Si $x = 0$, entonces p y q son ambas falsas ($0 > 0$ y $0^2 > 0$ son falsas). Para que la proposición (1.2.4) sea cierta en este caso, debe definirse $p \to q$ como verdadera cuando p y q son ambas falsas. Justo ocurre esto en el cuarto renglón de la tabla de verdad para la definición 1.2.3. En los ejercicios 52 y 53 se da una mayor motivación para definir $p \to q$ como verdadera cuando p es falsa.

Ejemplo 1.2.4 ▶

Sea

$$p\colon 1 > 2, \qquad q\colon 4 < 8.$$

Entonces p es falsa y q es verdadera. Por lo tanto,

$$p \to q \text{ es verdadera}, \qquad q \to p \text{ es falsa}.$$

◀

En las expresiones que incluyen a los operadores lógicos $\wedge$, $\vee$, $\neg$ y $\rightarrow$, el operador condicional $\rightarrow$ evalúa al final. Por ejemplo,

$$p \vee q \rightarrow \neg r$$

se interpreta como

$$(p \vee q) \rightarrow (\neg r).$$

Ejemplo 1.2.5 ▶

Suponiendo que p es verdadera, q es falsa y r es verdadera, encuentre el valor de verdad de cada proposición.

a) $p \wedge q \rightarrow r$ *b)* $p \vee q \rightarrow \neg r$ *c)* $p \wedge (q \rightarrow r)$ *d)* $p \rightarrow (q \rightarrow r)$

a) Primero se evalúa $p \wedge q$ porque $\rightarrow$ se evalúa al final. Como p es cierta y q es falsa, $p \wedge q$ es falsa. Por lo tanto, $p \wedge q \rightarrow r$ es verdadera (sin importar si r es cierta o falsa).

b) Primero se evalúa $\neg r$. Como r es verdadera, $\neg r$ es falsa. Después se evalúa $p \vee q$. Como p es verdadera y q es falsa, $p \vee q$ es verdadera. Por lo tanto, $p \vee q \rightarrow \neg r$ es falsa.

c) Como q es falsa, $q \rightarrow r$ es verdadera (sin importar si r es verdadera o falsa). Como p es verdadera, $p \wedge (q \rightarrow r)$ es verdadera.

d) Puesto que q es falsa, $q \rightarrow r$ es verdadera (sin importar si r es verdadera o falsa). Entonces, $p \rightarrow (q \rightarrow r)$ es verdadera (sin importar si p es verdadera o falsa). ◀

Una proposición condicional que es verdadera porque la hipótesis es falsa se dice que es **verdadera por omisión** o **superficialmente verdadera**. Por ejemplo, si la proposición,

Si el departamento de matemáticas obtiene \$40,000 adicionales, entonces contratará un nuevo académico,

es verdadera porque el departamento de matemáticas no obtuvo \$40,000 adicionales, se dice que la proposición es verdadera por omisión o que es superficialmente verdadera.

Algunas afirmaciones no de la forma (1.2.2) pueden rescribirse como proposiciones condicionales, como ilustra el siguiente ejemplo.

Ejemplo 1.2.6 ▶

Reescriba cada proposición en la forma (1.2.2) de una proposición condicional.

a) María será una buena estudiante si estudia mucho.

b) Juan toma cálculo sólo si está en 2º, 3º o 4º grado de universidad.

c) Cuando cantas, me duelen los oídos.

d) Una condición necesaria para que los Cachorros ganen la Serie Mundial es que contraten a un pitcher suplente diestro.

e) Una condición suficiente para que María visite Francia es ir a la Torre Eiffel.

a) La hipótesis es la cláusula que sigue a *si*; entonces una formulación equivalente es

Si María estudia mucho, entonces será una buena estudiante.

b) La afirmación significa que para que Juan tome cálculo debe estar en 2º, 3º o 4º año de universidad. En particular, si está en 1º, *no* puede tomar cálculo. Así, se concluye que si toma cálculo, entonces está en 2º, 3º o 4º año. Por lo tanto, una formulación equivalente sería

Si Juan toma cálculo, entonces está en 2º, 3º o 4º año.

Observe que

Si Juan está en 2º, 3º o 4º año, entonces toma cálculo,

no es una formulación equivalente. Si Juan está en 2º, 3º o 4º año, puede o *no* tomar cálculo. (Aunque sea elegible para tomar cálculo, puede decidir no tomarlo).

La formulación "si p entonces q" hace hincapié en la hipótesis mientras que la formulación "p sólo si q" resalta la conclusión; la diferencia es nada más de estilo.

c) *Cuando* significa lo mismo que *si*; entonces una formulación equivalente es

Si cantas, me duelen los oídos.

d) Una **condición necesaria** es sólo eso: una condición que *se necesita* para lograr un resultado en particular. La condición *no* garantiza el resultado; pero si no se cumple, el resultado no se logrará. Aquí, la afirmación significa que si los Cachorros ganan la Serie Mundial, podemos estar seguros de que contrataron un pitcher suplente diestro, ya que sin ese contrato no habrían ganado. Así, una formulación equivalente de la afirmación es

Si los Cachorros ganan la Serie Mundial, entonces contrataron un pitcher suplente diestro.

La conclusión expresa una condición necesaria.
Observe que

Si los Cachorros contratan un pitcher suplente diestro, entonces ellos ganan la Serie Mundial,

no es una formulación equivalente. Contratar un pitcher suplente diestro no es garantía de que ganarán la Serie Mundial. Sin embargo, *no* contratarlo garantiza que no ganarán la Serie Mundial.

e) De manera similar, una **condición suficiente** es una condición que *basta* para garantizar un resultado en particular. Si la condición no se cumple, el resultado puede lograrse de otras formas o tal vez no se logre; pero si la condición se cumple, el resultado está garantizado. Aquí, para asegurar que María visite Francia, basta con que vaya a la Torre Eiffel. (Sin duda, hay otras maneras de asegurar que María visite Francia; por ejemplo, podría ir a Lyon). Así, una formulación equivalente a la afirmación en cuestión es

Si María va a la Torre Eiffel, entonces visita Francia.

La hipótesis expresa una condición suficiente.
Observe que

Si María visita Francia, entonces va a la Torre Eiffel,

no es una formulación equivalente. Como se observó, hay otras maneras de asegurar que María visite Francia que ir a la Torre Eiffel. ◀

El ejemplo 1.2.4 muestra que la proposición $p \to q$ puede ser verdadera mientras que la proposición $q \to p$ es falsa. La proposición $q \to p$ se llama la **recíproca** de la proposición $p \to q$. Así, una proposición condicional puede ser verdadera mientras que su recíproca es falsa.

Ejemplo 1.2.7 ▶

Escriba la proposición condicional

Si Jesús recibe una beca, entonces irá a la universidad,

y su recíproca en símbolos y en palabras. Además, suponga que Jesús no recibe la beca, pero gana la lotería y de todas formas va a la universidad, encuentre entonces el valor de verdad de la proposición original y su recíproca.

Sea

p: Jesús recibe una beca,

q: Jesús va la universidad.

La proposición se escribe en símbolos como $p \to q$. Como la hipótesis p es falsa, la proposición condicional es verdadera.

La recíproca de la proposición es

Si Jesús va a la universidad, entonces recibe una beca.

La recíproca se escribe en símbolos como $q \to p$. Puesto que la hipótesis q es verdadera y la conclusión p es falsa, la recíproca es falsa. ◀

Otra proposición útil es

$$p \text{ si y sólo si } q,$$

que se considera verdadera precisamente cuando p y q tienen el mismo valor de verdad (es decir, si p y q son ambas verdaderas o ambas falsas).

Definición 1.2.8 ▶

Si p y q son proposiciones, la proposición

$$p \text{ si y sólo si } q$$

se llama *proposición bicondicional* y se denota por

$$p \leftrightarrow q.$$

El valor de verdad de la proposición $p \leftrightarrow q$ se define por la siguiente tabla de verdad:

p	q	$p \leftrightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

◀

El operador $\leftrightarrow$ también es un operador binario sobre las proposiciones. Asigna a cada par de proposiciones p y q la proposición $p \leftrightarrow q$.

Una manera alternativa de establecer "p si y sólo si q" es "p es una condición necesaria y suficiente para q". La proposición "p si y sólo si q" algunas veces se escribe p ssi q.

Ejemplo 1.2.9 ▶

La proposición

$$1 < 5 \text{ si y sólo si } 2 < 8 \tag{1.2.5}$$

se escribe en símbolos como

$$p \leftrightarrow q$$

si se define

$$p\text{: } 1 < 5, \qquad q\text{: } 2 < 8$$

Puesto que ambas, p y q, son verdaderas, la proposición $p \leftrightarrow q$ es verdadera. ◀

Una manera alternativa de establecer (1.2.5) es: Una condición necesaria y suficiente para que $1 < 5$ es que $2 < 8$.

En algunos casos, dos proposiciones diferentes tienen los mismos valores de verdad sin importar qué valores de verdad tengan las proposiciones que las constituyen. Tales proposiciones se conocen como **equivalentes lógicos.**

Definición 1.2.10 ▶

Suponga que las proposiciones P y Q están formadas por las proposiciones $p_1, \ldots, p_n$. Se dice que P y Q son *equivalentes lógicos* y se escriben

$$P \equiv Q$$

siempre que, a partir de cualesquiera valores de verdad de $p_1, \ldots, p_n$, o bien P y Q son ambas verdaderas o P y Q son ambas falsas. ◀

Ejemplo 1.2.11 ▶

Leyes de De Morgan para lógica

Se verificará la primera de las **leyes de De Morgan**

$$\neg(p \vee q) \equiv \neg p \wedge \neg q, \quad \neg(p \wedge q) \equiv \neg p \vee \neg q,$$

WWW y se dejará la segunda como ejercicio (vea el ejercicio 54).

Si se escriben las tablas de verdad para $P = \neg(p \vee q)$ y $Q = \neg p \wedge \neg q$, se puede verificar que, a partir de cualesquiera valores de verdad para p y q, P y Q son ambas verdaderas o P y Q son ambas falsas.

p	q	$\neg(p \vee q)$	$\neg p \wedge \neg q$
V	V	F	F
V	F	F	F
F	V	F	F
F	F	V	V

Entonces, P y Q son equivalentes lógicos. ◀

Ejemplo 1.2.12 ▶

Demuestre que, en Java, las expresiones

```
x < 10  ||  x > 20
```

y

```
!(x >= 10 && x <= 20)
```

son equivalentes. (En Java, `>=` significa $\geq$ y `<=` significa $\leq$.)

Si p denota la expresión `x >= 10` y q denota la expresión `x <= 20`, la expresión `!(x >= 10 && x <= 20)` se convierte en $\neg(p \wedge q)$. Por la segunda ley de De Morgan, $\neg(p \wedge q)$ es equivalente a $\neg p \vee \neg q$. Como $\neg p$ se traduce como x $<$ 10 y $\neg q$ se traduce como `x > 20`, $\neg p \vee \neg q$ se traducen como `x < 10 || x > 20`. Por lo tanto, las expresiones `x < 10 || x > 20` y `!(x >= 10 && x <= 20)` son equivalentes. ◀

El siguiente ejemplo da una forma de equivalencia lógica para la negación de $p \to q$.

Ejemplo 1.2.13 ▶

Demuestre que la negación de $p \to q$ es equivalente lógico de $p \wedge \neg q$.

Debe demostrarse que

$$\neg\ (p \to q) \equiv p \wedge \neg q.$$

Al escribir las tablas de verdad para $P = \neg(p \to q)$ y $Q = p \wedge \neg q$, se puede verificar que, a partir de cualesquiera valores de verdad de p y q, o bien P y Q son ambas verdaderas o P y Q son ambas falsas:

p	q	$\neg(p \to q)$	$p \wedge \neg q$
V	V	F	F
V	F	V	V
F	V	F	F
F	F	F	F

Entonces P y Q son equivalentes lógicos. ◀

Ejemplo 1.2.14 ▶

Use la equivalencia lógica de $\neg(p \to q)$ y $p \wedge \neg q$ (vea el ejemplo 1.2.13) para escribir la negación de

Si Jesús recibe una beca, entonces va la universidad,

con símbolos y en palabras.

Sean

p: Jesús recibe una beca,

q: Jesús va la universidad.

La proposición se escribe con símbolos como $p \to q$. Su negación lógicamente equivalente a $p \wedge \neg q$. En palabras, esta última expresión es

Jesús recibe una beca y no va la universidad. ◀

Ahora se demostrará que, según estas definiciones, $p \leftrightarrow q$ es equivalente lógico de $p \to q$ y $q \to p$. En palabras,

p si y sólo si q

es lógicamente equivalente a

si p entonces q y si q entonces p.

Ejemplo 1.2.15 ▶ La tabla de verdad muestra que

$$p \leftrightarrow q \equiv (p \to q) \wedge (q \to p).$$

p	q	$p \leftrightarrow q$	$p \to q$	$q \to p$	$(p \to q) \wedge (q \to p)$
V	V	V	V	V	V
V	F	F	F	V	F
F	V	F	V	F	F
F	F	V	V	V	V

◀

Se concluye esta sección con la definición de la **contrapositiva** de una proposición condicional. Se verá (en el Teorema 1.2.18) que la contrapositiva es una forma alternativa, lógicamente equivalente de la proposición condicional. El ejercicio 55 da otra forma de equivalente lógico para la proposición condicional.

Definición 1.2.16 ▶ La *contrapositiva* (o *transposición*) de la proposición condicional $p \to q$ es la proposición $\neg q \to \neg p$. ◀

Observe la diferencia entre la contrapositiva y la recíproca. La recíproca de una proposición condicional simplemente invierte los papeles de p y q, mientras que la contrapositiva invierte los papeles de p y q *y* niega cada una de ellas.

Ejemplo 1.2.17 ▶ Escriba la proposición condicional,

Si se cae la red, entonces Darío no puede entrar a Internet,

con símbolos. Escriba la contrapositiva y la recíproca con símbolos y en palabras. Además, suponga que la red no se cayó y que Darío puede entrar a Internet; encuentre los valores de verdad de la proposición original, su contrapositiva y su recíproca.

Sean

p: La red se cae,

q: Darío no puede entrar a Internet.

La proposición se escribe en símbolos como $p \to q$. Como la hipótesis p es falsa, la proposición condicional es verdadera.

La contrapositiva se escribe en símbolos como $\neg q \rightarrow \neg p$ y, en palabras,

Si Darío puede entrar a Internet, entonces la red no se cayó.

Como la hipótesis $\neg q$ y la conclusión $\neg p$ son ambas verdaderas, la contrapositiva es verdadera. (El Teorema 1.2.18 mostrará que la proposición condicional y su contrapositiva son equivalentes lógicos, es decir, que siempre tienen el mismo valor de verdad).

La recíproca de la proposición se escribe simbólicamente como $q \rightarrow p$, y en palabras:

Si Darío no puede entrar a Internet, entonces la red se cayó.

Como la hipótesis q es falsa, la recíproca es cierta. ◀

Un hecho importante es que una proposición condicional y su contrapositiva son equivalentes lógicos.

Teorema 1.2.18

La proposición condicional $p \rightarrow q$ y su contrapositiva $\neg q \rightarrow \neg p$ son equivalentes lógicos.

Demostración La tabla de verdad

p	q	$p \rightarrow q$	$\neg q \rightarrow \neg p$
V	V	V	V
V	F	F	F
F	V	V	V
F	F	V	V

muestra que $p \rightarrow q$ y $\neg q \rightarrow \neg p$ son lógicamente equivalentes.

En lenguaje común, "si" con frecuencia se usa como "si y sólo si". Considere la afirmación

Si arreglas mi computadora, entonces te pagaré \$50.

El significado que se pretende transmitir es

Si arreglas mi computadora, entonces te pagaré \$50, y
si no la arreglas, entonces no te pagaré \$50,

que es lógicamente equivalente a (vea el Teorema 1.2.18).

Si arreglas mi computadora, entonces te pago \$50, y
si te pago \$50, entonces arreglas mi computadora,

que, a su vez, es el lógico equivalente a (vea ejemplo 1.2.15).

Arreglas mi computadora si y sólo si te pago \$50.

En un discurso ordinario, el significado que se pretende para las afirmaciones que incluyen operadores lógicos con frecuencia (¡pero no siempre!) se infiere. Sin embargo, en matemáticas y ciencias, se requiere precisión. Sólo con la definición cuidadosa del significado de los términos, como "si" y "si y sólo si", podremos obtener afirmaciones precisas y sin ambigüedad. En particular, la lógica distingue entre las proposiciones condicional, bicondicional, recíproca y contrapositiva.

Sugerencias para resolver problemas

En la lógica formal, "si" y "si y sólo si" son bastante diferentes. La proposición condicional $p \rightarrow q$ (si p entonces q) es verdadera excepto cuando p es verdadera y q es falsa. Por otro lado, la proposición bicondicional $p \leftrightarrow q$ (p si y sólo si q) es verdadera precisamente cuando p y q son ambas verdaderas o ambas falsas.

Para determinar si las proposiciones P y Q, formadas con las proposiciones $p_1, \ldots,$ p_n, son equivalentes lógicos, escriba las tablas de verdad para P y Q. Si todos los elementos son al mismo tiempo verdaderos o falsos para P y Q, entonces P y Q *son* equivalentes. Si algún elemento es verdadero para una de las dos, P o Q, y falso para la otra, entonces P y Q *no* son equivalentes.

Las leyes de De Morgan para lógica

$$\neg(p \vee q) \equiv \neg p \wedge \neg q, \qquad \neg(p \wedge q) \equiv \neg p \vee \neg q$$

dan las fórmulas para negar "o" ($\vee$) y negar "y" ($\wedge$). A grandes rasgos, negar "o" da como resultado "y", lo mismo que al negar "y" se obtiene "o".

El ejemplo 1.2.13 establece una equivalencia muy importante

$$\neg(p \to q) \equiv p \wedge \neg q,$$

que se encontrará a lo largo del libro. Esta equivalencia muestra que la negación de la proposición condicional se puede escribir usando el operador "y" ($\wedge$). Observe que no aparece el operador condicional en el lado derecho de la ecuación.

Sección de ejercicios de repaso

1. ¿Qué es una proposición condicional? y ¿cómo se denota?
2. Escriba la tabla de verdad para la proposición condicional.
3. En una proposición condicional, ¿cuál es la hipótesis?
4. En una proposición condicional, ¿cuál es la conclusión?
5. ¿Qué es una condición necesaria?
6. ¿Qué es una condición suficiente?
7. ¿Cuál es la recíproca de $p \to q$?
8. ¿Qué es una proposición bicondicional? y ¿cómo se denota?
9. Escriba la tabla de verdad para la proposición bicondicional.
10. ¿Qué significa para P ser equivalente lógico de Q?
11. Establezca las leyes de De Morgan para lógica.
12. ¿Qué es la contrapositiva de $p \to q$?

Ejercicios

En los ejercicios 1 a 7, restablezca cada proposición en la forma (1.2.2) de una proposición condicional.

1. José pasará el examen de matemáticas discretas si estudia duro.

2. Rosa se graduará si tiene créditos por 160 horas-trimestre.

3. Una condición necesaria para que Fernando compre una computadora es que obtenga $2000.

4. Una condición suficiente para que Katia tome el curso de algoritmos es que apruebe matemáticas discretas.

5. Cuando se fabriquen mejores automóviles, Buick los fabricará.

6. La audiencia se dormirá si el maestro de ceremonias da un sermón.

7. El programa es legible sólo si está bien estructurado.

8. Escriba la recíproca de cada proposición en los ejercicios 1 al 7.

9. Escriba la contrapositiva de cada proposición en los ejercicios 1 al 7.

Suponiendo que p y r son falsas y que q y s son verdaderas, encuentre el valor de verdad para cada proposición en los ejercicios 10 al 17.

10. $p \to q$

11. $\neg p \to \neg q$

12. $\neg(p \to q)$

13. $(p \to q) \wedge (q \to r)$

14. $(p \to q) \to r$

15. $p \to (q \to r)$

16 $(s \to (p \wedge \neg r)) \wedge ((p \to (r \vee q)) \wedge s)$

17. $((p \wedge \neg q) \to (q \wedge r)) \to (s \vee \neg q)$

Los ejercicios 18 al 27 se refieren a las proposiciones p, q y r; p es verdadera, q es falsa y el estado de r no se conoce por ahora. Diga si cada proposición es verdadera, falsa o tiene un estado desconocido.

18. $p \vee r$

19. $p \wedge r$

20. $p \to r$

21. $q \to r$

22. $r \to p$

23. $r \to q$

24. $(p \wedge r) \leftrightarrow r$

25. $(p \vee r) \leftrightarrow r$

26. $(q \wedge r) \leftrightarrow r$

27. $(q \vee r) \leftrightarrow r$

En los ejercicios 28 al 31, represente con símbolos la proposición cuando

$$p\text{: } 4 < 2, \quad q\text{: } 7 < 10, \quad r\text{: } 6 < 6$$

28. Si $4 < 2$, entonces $7 < 10$.

29. Si ($4 < 2$ y $6 < 6$), entonces $7 < 10$.

30. Si no ocurre que ($6 < 6$ y 7 no es menor que 10), entonces $6 < 6$.

31. $7 < 10$ si y sólo si ($4 < 2$ y 6 no es menor que 6).

En los ejercicios 32 al 37, formule la expresión simbólica en palabras usando

p: Hoy es lunes,
q: Está lloviendo,
r: Hace calor.

32. $p \to q$

33. $\neg q \to (r \wedge p)$

34. $\neg p \to (q \vee r)$

35. $\neg(p \vee q) \leftrightarrow r$

36. $(p \wedge (q \vee r)) \to (r \vee (q \vee p))$

37 $(p \vee (\neg p \wedge \neg(q \vee r))) \to (p \vee \neg(r \vee q))$

En los ejercicios 38 a 41, escriba cada proposición condicional en símbolos. Escriba la recíproca y la contrapositiva de cada proposición en símbolos y en palabras. Encuentre también el valor de verdad para cada proposición condicional, su recíproca y su contrapositiva.

38. Si $4 < 6$, entonces $9 > 12$.

39. Si $4 < 6$, entonces $9 < 12$.

40. $|1| < 3$ si $-3 < 1 < 3$.

41. $|4| < 3$ si $-3 < 4 < 3$.

Para cada par de proposiciones P y Q en los ejercicios 42 al 51, establezca si $P \equiv Q$ o no.

42. $P = p,\ Q = p \vee q$

43. $P = p \wedge q,\ Q = \neg p \vee \neg q$

44. $P = p \to q,\ Q = \neg p \vee q$

45. $P = p \wedge (\neg q \vee r),\ Q = p \vee (q \wedge \neg r)$

46. $P = p \wedge (q \vee r),\ Q = (p \vee q) \wedge (p \vee r)$

47. $P = p \to q,\ Q = \neg q \to \neg p$

48. $P = p \to q,\ Q = p \leftrightarrow q$

49. $P = (p \to q) \wedge (q \to r),\ Q = p \to r$

50. $P = (p \to q) \to r,\ Q = p \to (q \to r)$

51. $P = (s \to (p \wedge \neg r)) \wedge ((p \to (r \vee q)) \wedge s),\ Q = p \vee t$

Los ejercicios 52 y 53 proporcionan mayor motivación para definir $p \to q$ como verdadera cuando p es falsa. Se considera cambiar la tabla de verdad de $p \to q$ cuando p es falsa. Para este primer cambio, el operador resultante recibe el nombre de imp1 (ejercicio 52), y para el segundo cambio el operador resultante es imp2 (ejercicio 53). En ambos casos, se obtienen patologías.

52. Defina la tabla de verdad para *imp1* como

p	q	p *imp1* q
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

Demuestre que p *imp1* $q \equiv q$ *imp1* p.

53. Defina la tabla de verdad para *imp2* como

p	q	p *imp2* q
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	F

a) Demuestre que

$$(p \text{ imp2 } q) \wedge (q \text{ imp2 } p) \not\equiv p \leftrightarrow q. \qquad \textbf{(1.2.6)}$$

b) Demuestre que (1.2.6) permanece verdadera si se cambia el tercer renglón de la tabla de verdad de *imp2* a F V F.

54. Verifique la segunda ley de De Morgan, $\neg(p \wedge q) \equiv \neg p \vee \neg q$.

55. Demuestre que $(p \to q) \equiv (\neg p \vee q)$

1.3 ➜ Cuantificadores

La lógica en las secciones 1.1 y 1.2 referente a proposiciones es incapaz de describir la mayoría de las afirmaciones en matemáticas y en ciencias de la computación. Considere, por ejemplo, la afirmación

$$p\text{: } n \text{ es un entero impar}$$

Una proposición es una afirmación que es verdadera o falsa. La afirmación p no es una proposición, porque el hecho de que p sea verdadera o falsa depende del valor de n. Por ejemplo, p es verdadera si $n = 103$ y falsa si $n = 8$. Como casi todas las afirmaciones en matemáticas y ciencias de la computación usan variables, debe ampliarse el sistema de lógica para incluir estas afirmaciones.

Definición 1.3.1 ▶

Sea $P(x)$ una oración que incluye la variable x y sea D un conjunto. P se llama *función proposicional* o *predicado* (respecto a D) si para cada x en D, $P(x)$ es una proposición. D es el *dominio de discurso* (también llamado dominio de referencia) de P. ◀

Ejemplo 1.3.2 ▶

Sea $P(n)$ la afirmación

$$n \text{ es un entero impar,}$$

y sea D el conjunto de enteros positivos. Entonces P es una función proposicional con dominio de discurso D ya que para cada n en D, $P(n)$ es una proposición [es decir, para cada n en D, $P(n)$ es verdadera o falsa pero no ambas]. Por ejemplo, si $n = 1$, se obtiene la proposición

$$P(1)\text{: 1 es un entero impar}$$

(que es verdadera). Si $n = 2$, se obtiene la proposición

$$P(2)\text{: 2 es un entero impar}$$

(que es falsa). ◀

Una proposición P, por sí misma, no es falsa ni verdadera. Sin embargo, para cada x en su dominio de discurso, $P(x)$ es una proposición y es, por lo tanto, verdadera o falsa. Se puede pensar que una función proposicional define una clase de proposiciones, una para cada elemento de su dominio de discurso. Por ejemplo, si P es una función proposicional con dominio de discurso igual al conjunto de enteros positivos, se obtiene una clase de proposiciones

$$P(1), P(2), \ldots .$$

Cada una de las $P(1)$, $P(2)$, . . . es verdadera o falsa.

Ejemplo 1.3.3 ▶

Las siguientes son funciones proposicionales.

a) $n^2 + 2n$ es un entero impar (dominio de discurso = conjunto de enteros positivos).

b) $x^2 - x - 6 = 0$ (dominio de discurso = conjunto de números reales).

c) El beisbolista bateó más de .300 en 2003 (dominio de discurso = conjunto de beisbolistas).

d) El restaurante tiene más de dos estrellas en la revista *Chicago* (dominio de discurso = restaurantes clasificados en la revista *Chicago*).

En la afirmación *a)*, para cada entero positivo n, se obtiene una proposición; por lo tanto la afirmación *a)* es una función proposicional.

De manera similar, en la afirmación *b)*, para cada número real x, se obtiene una proposición; por lo tanto, la afirmación *b)* es una función proposicional.

Se puede ver a la variable en la afirmación *c)* como "beisbolista". Siempre que se sustituya un beisbolista específico en lugar de la variable, la afirmación es una proposición. Por ejemplo, si se sustituye "Barry Bonds" en lugar de "beisbolista", la afirmación *c)* es

Barry Bonds bateó más de .300 en 2003,

que es verdadera. Si se sustituye "Alex Rodríguez" en lugar de "beisbolista", la afirmación *c)* es

Alex Rodríguez bateó más de .300 en 2003,

que es falsa. Así, la afirmación *c)* es una función proposicional.

La afirmación *d)* es similar en la forma a *c)*; aquí la variable es "restaurante". Al sustituir la variable por un restaurante clasificado en la revista *Chicago*, la afirmación es una proposición. Por ejemplo, si se sustituye "Yugo Inn" la afirmación *d)* es

Yugo Inn tiene más de dos estrellas en la revista *Chicago*,

que es falsa. Si se sustituye "Le Français" en lugar de "restaurante", la afirmación *d)* es

Le Français tiene más de dos estrellas en la revista *Chicago*,

que es verdadera. Así, la afirmación *d)* es una función proposicional. ◀

Casi todas las afirmaciones en matemáticas y ciencias de la computación usan términos como "para todo" y "para alguno". Por ejemplo, en matemáticas se tiene el siguiente teorema:

Para todo triángulo T, la suma de los ángulos de T es igual a 180°.

En ciencias de la computación, se tiene el siguiente teorema:

Para algún programa P, la salida de P es P mismo.

Ahora se extenderá el sistema lógico de las secciones 1.1 y 1.2 de manera que las afirmaciones que incluyen "para todo" y "para alguno" sean manejables.

Definición 1.3.4 ▶ Sea P una función proposicional con dominio de discurso D. Se dice que la afirmación

$$\text{para toda } x, P(x)$$

es una *afirmación cuantificada universalmente*. El símbolo ∀ significa "para toda", "Para cada", "Para cualquier". Entonces, la afirmación

$$\text{para toda } x, P(x)$$

se escribe

$$\forall x\, P(x).$$

El símbolo ∀ se llama *cuantificador universal*.

La afirmación

$$\forall x\, P(x)$$

es verdadera si $P(x)$ es verdadera para toda x en D. La afirmación

$$\forall x\, P(x)$$

es falsa si $P(x)$ es falsa para al menos una x en D. ◀

Ejemplo 1.3.5 ▶ Considere la afirmación cuantificada universalmente

$$\forall x\, (x^2 \geq 0)$$

con el conjunto de números reales como dominio de discurso. La afirmación es verdadera porque, *para todo* número real x, es cierto que el cuadrado de x es positivo o cero. ◀

De acuerdo con la definición 1.3.4, la afirmación cuantificada universalmente

$$\forall x\, P(x)$$

es falsa si *para al menos una* x en el dominio de discurso, la proposición $P(x)$ es falsa. Un valor x en el dominio de discurso que hace que $P(x)$ sea falsa se llama **contraejemplo** de la afirmación

$$\forall x\, P(x).$$

Ejemplo 1.3.6 ▶ Considere la afirmación cuantificada universalmente

$$\forall x\, (x^2 - 1 > 0)$$

con el conjunto de los números reales como dominio de discurso. La afirmación es falsa, ya que si $x = 1$, la proposición

$$1^2 - 1 > 0$$

es falsa. El valor 1 es un contraejemplo de la afirmación

$$\forall x\, (x^2 - 1 > 0).$$

Aunque existen valores de x que hacen que la función proposicional sea verdadera, el contraejemplo muestra que la afirmación cuantificada universalmente es falsa. ◀

Ejemplo 1.3.7 ▶

Suponga que P es una función proposicional cuyo dominio de discurso consiste en los elementos $d_1, \ldots, d_n$. El siguiente seudocódigo† determina si

$$\forall x\, P(x)$$

es verdadera o falsa:

```
for i = 1 to n
   if (¬P(d_i))
      return falsa
return verdadera
```

El ciclo "for" examina los miembros d_i del dominio de discurso uno por uno. Si encuentra un valor d_i para el que $P(d_i)$ es falsa, la condición $\neg P(d_i)$ en el estatuto "if" es verdadera; así, el código regresa a falsa [para indicar que $\forall x\, P(x)$ es falsa] y termina. En este caso, d_i es un contraejemplo. Si $P(d_i)$ es verdadera para toda d_i, la condición $\neg P(d_i)$ en el estatuto "if" es siempre falsa. En este caso, el ciclo "for" corre hasta completarse, después de lo cual el código regresa a verdadera [para indicar que $\forall x\, P(x)$ es verdadera] y termina.

Observe que si $\forall x\, P(x)$ es verdadera, el ciclo "for" necesariamente corre hasta el final, de manera que *cada* miembro del dominio se verifica para asegurar que $P(x)$ es verdadera para toda x. Si $\forall x\, P(x)$ es falsa, el ciclo "for" termina en cuanto se encuentra *un* elemento x del dominio de discurso para el que $P(x)$ es falsa. ◀

La variable x en la función proposicional $P(x)$ se llama *variable libre*. (La idea es que x es "libre" de recorrer el dominio de discurso). La variable x en la afirmación cuantificada universalmente

$$\forall x\, P(x) \tag{1.3.1}$$

se llama *variable acotada*. (La idea es que x está "acotada" por el cuantificador $\forall$).

Se señaló ya que una función proposicional no tiene valor de verdad. Por otro lado, la definición 1.3.4 asigna un valor de verdad a la afirmación cuantificada universalmente (1.3.1). En suma, una afirmación con variables libres (no cuantificadas) no es una proposición, y una afirmación sin variables libres (sin variables no cuantificadas) es una proposición.

Otras maneras de escribir

$$\forall x\, P(x)$$

son

$$\text{para toda } x,\ P(x)$$

y

$$\text{para cualquier } x,\ P(x).$$

El símbolo $\forall$ se lee "para toda", "para todos" o "para cualquier".

Para demostrar que

$$\forall x\, P(x)$$

es *verdadera* debemos, de hecho, examinar *todos* los valores de x en el dominio de discurso y demostrar que para toda x, $P(x)$ es cierta. Una técnica para probar que

$$\forall x\, P(x)$$

es verdadera consiste en hacer que x denote un elemento *arbitrario* del dominio de discurso D. El argumento procede usando el símbolo x. Cualquier cosa que se asegure acerca de

† El seudocódigo usado en este libro se explica en el apéndice C.

x debe ser cierto *sin importar qué valor* pueda tener x en D. El argumento debe concluir con la prueba de que $P(x)$ es verdadera.

Algunas veces, para especificar el dominio de discurso D, se escribe la afirmación cuantificada universalmente como

$$\text{para toda } x \text{ en } D,\ P(x).$$

Ejemplo 1.3.8 ▶ La afirmación cuantificada universalmente

$$\text{para todo número real } x, \text{ si } x > 1, \text{ entonces } x + 1 > 1$$

es verdadera. Esta vez se debe verificar que la afirmación

$$\text{si } x > 1, \text{ entonces } x + 1 > 1$$

es verdadera *para todo* número real x.

Sea x cualquier número real. Es cierto que para cualquier número real x, o bien $x \leq 1$ o $x > 1$. Si $x \leq 1$, la proposición condicional

$$\text{si } x > 1, \text{ entonces } x + 1 > 1$$

es trivialmente cierta. (La proposición es cierta porque la hipótesis $x > 1$ es falsa. Recuerde que cuando la hipótesis es falsa, la proposición condicional es verdadera sin importar si la conclusión es falsa o verdadera). En la mayoría de los argumentos, el caso trivial se omite.

Ahora suponga que $x > 1$. Sea cual fuere el valor específico de x, $x + 1 > x$. Como

$$x + 1 > x \quad \text{y} \quad x > 1,$$

se concluye que $x + 1 > 1$, de manera que la conclusión es verdadera. Si $x > 1$, la hipótesis y la conclusión son ambas verdaderas; así, la proposición condicional

$$\text{si } x > 1, \text{ entonces } x + 1 > 1$$

es verdadera.

Se ha demostrado que para todo número real x, la proposición

$$\text{si } x > 1, \text{ entonces } x + 1 > 1$$

es verdadera. Por lo tanto, la afirmación cuantificada universalmente

$$\text{para todo número real } x, \text{ si } x > 1, \text{ entonces } x + 1 > 1$$

es verdadera. ◀

El método para desaprobar la afirmación

$$\forall x\, P(x)$$

es bastante diferente del método usado para probar que la afirmación es verdadera. Para demostrar que la afirmación cuantificada universalmente

$$\forall x\, P(x)$$

es *falsa*, es suficiente encontrar *un* valor de x en el dominio de discurso para el que la proposición $P(x)$ sea falsa. Tal valor, como se recordará, se llama contraejemplo de la afirmación cuantificada universalmente.

Ahora se analizarán las afirmaciones cuantificadas existencialmente.

Definición 1.3.9 ▶ Sea P una función proposicional con dominio de discurso D. Se dice que la afirmación

$$\text{existe } x,\ P(x)$$

es una *afirmación cuantificada existencialmente*. El símbolo $\exists$ significa “existe”. Así, la afirmación

$$\text{existe } x,\ P(x)$$

se escribe

$$\exists x\, P(x)$$

El símbolo $\exists$ se llama *cuantificador existencial*.

La afirmación

$$\exists x\, P(x)$$

es verdadera si $P(x)$ es verdadera para al menos una x en D. La afirmación

$$\exists x\, P(x)$$

es falsa si $P(x)$ es falsa para toda x en D. ◀

Ejemplo 1.3.10 ▶ Considere la afirmación cuantificada existencialmente

$$\exists x \left(\frac{x}{x^2+1} = \frac{2}{5} \right)$$

con el conjunto de números reales como dominio de discurso. La afirmación es verdadera porque es posible encontrar *al menos un* número real x para el que la proposición

$$\frac{x}{x^2+1} = \frac{2}{5}$$

es verdadera. Por ejemplo, si $x = 2$, se obtiene la proposición verdadera

$$\frac{2}{2^2+1} = \frac{2}{5}.$$

No ocurre que *todo* valor de x dé una proposición verdadera. Por ejemplo, si $x = 1$, la proposición

$$\frac{1}{1^2+1} = \frac{2}{5}$$

es falsa. ◀

Según la definición 1.3.9, la afirmación cuantificada existencialmente

$$\exists x\, P(x)$$

es falsa si para toda x en el dominio de discurso, la proposición $P(x)$ es falsa.

Ejemplo 1.3.11 ▶ Para verificar que la afirmación cuantificada existencialmente

$$\exists x \left(\frac{1}{x^2+1} > 1 \right)$$

es falsa, debe demostrarse que

$$\frac{1}{x^2+1} > 1$$

es falsa para todo número real x. Ahora

$$\frac{1}{x^2+1} > 1$$

es falsa precisamente cuando

$$\frac{1}{x^2+1} \leq 1$$

es cierta. Así, debe demostrarse que

$$\frac{1}{x^2+1} \leq 1$$

es verdadera para todo número real x. Con este fin, sea x cualquier número real. Como $0 \leq x^2$, se puede sumar 1 en ambos lados de la desigualdad para obtener $1 \leq x^2 + 1$. Si se dividen ambos lados de esta desigualdad por $x^2 + 1$, se obtiene

$$\frac{1}{x^2+1} \leq 1.$$

Por lo tanto, la afirmación

$$\frac{1}{x^2+1} \leq 1$$

es verdadera para todo número real x. Entonces la afirmación

$$\frac{1}{x^2+1} > 1$$

es falsa para todo número real x. Se ha demostrado que la afirmación cuantificada existencialmente

$$\exists x \left(\frac{1}{x^2+1} > 1 \right)$$

es falsa. ◀

Ejemplo 1.3.12 ▶

Suponga que P es una función proposicional cuyo dominio de discurso consiste en los elementos $d_1, \ldots, d_n$. El siguiente seudocódigo determina si

$$\exists x\, P(x)$$

es verdadera o falsa:

```
for i = 1 to n
    if (P(d_i))
        return verdadera
return falsa
```

El ciclo "for" examina los miembros d_i del dominio de discurso uno por uno. Si encuentra un valor d_i para el que $P(d_i)$ es verdadera, la condición $P(d_i)$ en el estatuto "if" es verdadera; así, el código regresa a verdadera [para indicar que $\exists x\, P(x)$ es verdadera] y termina. En este caso, el código encuentra un valor en el dominio de discurso, a saber d_i, para el que $P(d_i)$ es verdadera. Si $P(d_i)$ es falsa para toda d_i, la condición $P(d_i)$ en el estatuto "if" es siempre falsa. En este caso, el ciclo "for" corre hasta completarse, después de lo cual, regresa a falsa [para indicar que $\exists x\, P(x)$ es verdadera] y termina.

Observe que si $\exists x\, P(x)$ es verdadera, el ciclo "for" termina en cuanto se encuentra un elemento x del dominio de discurso para el que $P(x)$ es verdadera. Si $\exists x\, P(x)$ es falsa, el ciclo "for" corre hasta completarse, de manera que se verifique *todo* miembro del dominio de discurso para asegurarse de que $P(x)$ es falsa para toda x. ◀

Otras formas de escribir

$$\exists x\, P(x)$$

son

existe x tal que, $P(x)$

y

$$\text{para alguna } x,\ P(x)$$

y

$$\text{para al menos una } x,\ P(x).$$

El símbolo $\exists$ se lee como "existe", "para alguna" o "para al menos una".

Ejemplo 1.3.13 ▶ Considere la afirmación cuantificada existencialmente

para alguna n, si n es primo, entonces $n + 1$, $n + 2$, $n + 3$ y $n + 4$ no son primos

con el conjunto de enteros positivos como dominio de discurso. Esta afirmación es verdadera porque podemos encontrar *al menos un* entero positivo n para el que la proposición condicional

si n es primo, entonces $n + 1$, $n + 2$, $n + 3$ y $n + 4$ no son primos

es verdadera. Por ejemplo, si $n = 23$, se obtienen las proposiciones

si 23 es primo, 24, 25, 26 y 27 no son primos.

(Esta proposición condicional es verdadera porque tanto la hipótesis "23 es primo" como la conclusión "24, 25, 26 y 27 no son primos" son verdaderas). Algunos valores de n hacen que la proposición condicional sea verdadera (por ejemplo, $n = 23$, $n = 4$, $n = 47$), mientras que para otros es falsa (como $n = 2$, $n = 101$). El hecho es que se encontró *un* valor que hace que la proposición condicional

si n es primo, entonces $n + 1$, $n + 2$, $n + 3$ y $n + 4$ no son primos

sea verdadera. Por esta razón, la afirmación cuantificada existencialmente

si n es primo, entonces $n + 1$, $n + 2$, $n + 3$ y $n + 4$ no son primos

es verdadera. ◀

En el ejemplo 1.3.11, se demostró que una afirmación cuantificada existencialmente era falsa probando que la afirmación cuantificada universalmente relacionada era verdadera. El siguiente teorema hace precisa esa relación. El teorema generaliza las leyes de De Morgan de lógica (ejemplo 1.2.11).

Teorema 1.3.14

Leyes generalizadas de De Morgan para lógica

Si P es una función proposicional, cada par de proposiciones en a) y b) tiene el mismo valor de verdad (es decir, ambas son verdaderas o ambas son falsas).

a) $\neg(\forall x\, P(x))$; $\exists x \neg P(x)$

b) $\neg(\exists x\, P(x))$; $\forall x \neg P(x)$

Demostración Se prueba sólo el inciso *a)* y se deja la demostración del inciso *b)* al lector (ejercicio 51).

Suponga que la proposición $\neg(\forall x\, P(x))$ es verdadera. Entonces la proposición $\forall x\, P(x)$ es falsa. Por la definición 1.3.4, la proposición $\forall x\, P(x)$ es falsa precisamente cuando $P(x)$ es falsa para al menos una x en el dominio de discurso. Pero si $P(x)$ es falsa para al menos una x en el dominio de discurso, $\neg P(x)$ es verdadera para al menos una x en el dominio de discurso. Por la definición 1.3.9, cuando $\neg P(x)$ es verdadera para al menos una

x en el dominio de discurso, la proposición $\exists x \neg P(x)$ es verdadera. Entonces, si la proposición $\neg(\forall x\, P(x))$ es verdadera, la proposición $\exists x \neg P(x)$ es verdadera. De manera similar, si la proposición $\neg(\forall x\, P(x))$ es falsa, la proposición $\exists x \neg P(x)$ es falsa.

Por lo tanto, el par de proposiciones del inciso *a)* siempre tienen los mismos valores de verdad.

Ejemplo 1.3.15 ▶

Sea $P(x)$ la afirmación

$$\frac{1}{x^2+1} > 1.$$

En el ejemplo 1.3.11 se demostró que

$$\exists x\, P(x)$$

es falsa verificando que

$$\forall x \neg P(x) \tag{1.3.2}$$

es verdadera.

La técnica se justifica recurriendo al Teorema 1.3.14. Después de probar que la proposición (1.3.2) es verdadera, se puede negar (1.3.2) y concluir que

$$\neg(\forall x \neg\ P(x))$$

es falsa. Por el Teorema 1.3.14, inciso *a)*,

$$\exists x \neg \neg P(x)$$

o de manera equivalente,

$$\exists x\, P(x)$$

también es falsa. ◀

Ejemplo 1.3.16 ▶

Escriba la afirmación

Todo amante del rock ama a U2,

de manera simbólica. Escriba su negación en símbolos y en palabras.

Sea $P(x)$ la función proposicional "x ama U2". La afirmación se escribe simbólicamente como

$$\forall x\, P(x).$$

El dominio de discurso es el conjunto de amantes del rock.

Por el Teorema 1.3.14, inciso *a)*, la negación de la proposición anterior $\neg(\forall x\, P(x))$ es equivalente a

$$\exists x \neg P(x).$$

En palabras, esta última proposición se enuncia como: Existe un amante del rock que no ama a U2. ◀

Ejemplo 1.3.17 ▶

Escriba la afirmación

Algunas aves no pueden volar,

simbólicamente. Escriba la negación en símbolos y en palabras.

Sea $P(x)$ la función proposicional "x vuela". La afirmación se escribe en símbolos como

$$\exists x \neg P(x)$$

[La afirmación también pudo escribirse $\exists x\, Q(x)$, donde $Q(x)$ es la función proposicional "x no puede volar". Al igual que en álgebra, existen muchas maneras de representar simbólicamente el texto.] El dominio de discurso es el conjunto de aves.

Por el Teorema 1.3.14, inciso *b)*, la negación de la proposición anterior $\neg(\exists x\, \neg P(x))$ es equivalente a

$$\forall x \neg \neg P(x)$$

o lo que es lo mismo,

$$\forall x\, P(x).$$

En palabras, esta última proposición se enuncia como: Toda ave puede volar. ◀

Una proposición cuantificada universalmente generaliza la proposición

$$P_1 \wedge P_2 \wedge \ldots \wedge P_n \tag{1.3.3}$$

en el sentido de que las proposiciones individuales $P_1, P_2, \ldots, P_n$ se sustituyen por una familia arbitraria $P(x)$, donde x es un miembro del dominio de discurso, y (1.3.3) se sustituye por

$$\forall x\, P(x). \tag{1.3.4}$$

La proposición (1.3.3) es verdadera si y sólo si P_i es verdadera para toda $i = 1, \ldots, n$. El valor de verdad de la proposición (1.3.4) se define de manera similar: (1.3.4) es verdadera si y sólo si $P(x)$ es verdadera para toda x en el dominio de discurso.

De manera similar, una proposición cuantificada existencialmente generaliza la proposición

$$P_1 \vee P_2 \vee \ldots \vee P_n \tag{1.3.5}$$

en el sentido de que las proposiciones individuales $P_1, P_2, \ldots, P_n$ se sustituyen por una familia arbitraria $P(x)$, donde x es un miembro del dominio de discurso, y (1.3.5) se sustituye por

$$\exists x\, P(x).$$

Las observaciones anteriores explican cómo el Teorema 1.3.14 generaliza las leyes de De Morgan para lógica (ejemplo 1.2.11). Recuerde que la primera ley de De Morgan para lógica establece que las proposiciones

$$\neg(P_1 \vee P_2 \vee \ldots \vee P_n) \quad \text{y} \quad \neg P_1 \wedge \neg P_2 \wedge \ldots \wedge \neg P_n$$

tienen los mismos valores de verdad. En el teorema 1.3.14, inciso *b)*,

$$\neg P_1 \wedge \neg P_2 \wedge \ldots \wedge \neg P_n$$

se sustituye por

$$\forall x \neg P(x)$$

y

$$\neg(P_1 \vee P_2 \vee \ldots \vee P_n)$$

se sustituye por

$$\neg(\exists x\, P(x)).$$

Ejemplo 1.3.18 ▶

Las afirmaciones en palabras con frecuencia tienen más de una interpretación posible. Considere la bien conocida cita de *El mercader de Venecia* de Shakespeare:

No todo lo que brilla es oro.

Una interpretación posible de esta cita es: Todo objeto que brilla no es oro. Sin embargo, seguro que esto no es lo que Shakespeare quiso decir. La interpretación correcta es: Algún objeto que brilla no es oro.

Si $P(x)$ es la función proposicional "x brilla" y $Q(x)$ es la función proposicional "x es oro", la primera interpretación se convierte en

$$\forall x(P(x) \rightarrow \neg Q(x)), \tag{1.3.6}$$

y la segunda interpretación se convierte en

$$\exists x(P(x) \wedge \neg Q(x)).$$

Usando el resultado del ejemplo 1.2.13, se ve que los valores de verdad de

$$\exists x(P(x) \wedge \neg Q(x))$$

y

$$\exists x \neg(P(x) \rightarrow Q(x))$$

son los mismos. Por el Teorema 1.3.14, los valores de verdad de

$$\exists x \neg(P(x) \rightarrow Q(x))$$

y

$$\neg(\forall x\, P(x) \rightarrow Q(x))$$

son los mismos. Así, una manera equivalente de representar la segunda interpretación es

$$\neg(\forall x\, P(x) \rightarrow Q(x)). \tag{1.3.7}$$

Al comparar (1.3.6) y (1.3.7), vemos la ambigüedad que resulta para establecer si la negación se aplica a $Q(x)$ (la primera interpretación) o a toda la afirmación

$$\forall x\, (P(x) \rightarrow Q(x))$$

(la segunda interpretación). La interpretación correcta de la afirmación

Todo lo que brilla no es oro

se obtiene al negar toda la afirmación.

En afirmaciones positivas, "cualquiera", "cada" y "todo" tienen el mismo significado. En afirmaciones negativas, la situación cambia:

No todas las x satisfacen $P(x)$.
No cada x satisface $P(x)$.
No cualquier x satisface $P(x)$.

se considera que tienen el mismo significado que

Para alguna x, $\neg P(x)$;

mientras que

Ni una x satisface $P(x)$

Ninguna x satisface $P(x)$

significan

Para toda x, $\neg P(x)$.

Vea otros ejemplos en los ejercicios 41 al 49. ◀

Sugerencias para resolver problemas

Para probar que la afirmación cuantificada universalmente

$$\forall x\, P(x)$$

es verdadera, demuestre que para *toda* x en el dominio de discurso, la proposición $P(x)$ es verdadera. Demostrar que $P(x)$ es verdadera para un valor *particular* de x *no* prueba que

$$\forall x\, P(x)$$

sea cierta.

Para probar que la afirmación cuantificada existencialmente

$$\exists x\, P(x)$$

es verdadera, encuentre *un* valor de x en el dominio de discurso para el que la proposición $P(x)$ es verdadera. *Un* valor es suficiente.

Para probar que la afirmación cuantificada universalmente

$$\forall x\, P(x)$$

es falsa, encuentre *un* valor de x (un contraejemplo) en el dominio de discurso para el que la proposición $P(x)$ es falsa.

Para probar que la afirmación cuantificada existencialmente

$$\exists x\, P(x)$$

es falsa, demuestre que para *toda* x en el dominio de discurso, la proposición $P(x)$ es falsa. Demostrar que $P(x)$ es falsa para un valor *particular* x *no* prueba que

$$\exists x\, P(x)$$

sea falsa.

Sección de ejercicios de repaso

1. ¿Qué es una función proposicional?

2. ¿Qué es un dominio de discurso?

3. ¿Qué es una afirmación cuantificada universalmente?

4. ¿Qué es un contraejemplo?

5. ¿Qué es una afirmación cuantificada existencialmente?

6. Establezca las leyes generalizadas de De Morgan para lógica.

7. Explique cómo probar que una afirmación cuantificada universalmente es verdadera.

8. Explique cómo probar que una afirmación cuantificada existencialmente es verdadera.

9. Explique cómo probar que una afirmación cuantificada universalmente es falsa.

10. Explique cómo probar que una afirmación cuantificada existencialmente es falsa.

Ejercicios

En los ejercicios 1 al 6, diga si la afirmación es una función proposicional. Para cada afirmación que sea una función proposicional, dé un dominio de discurso.

1. $(2n + 1)^2$ es un entero impar.

2. Seleccione un entero entre 1 y 10.

3. Sea x un número real.

4. La película ganó el premio de la Academia como mejor película en 1955.

5. $1 + 3 = 4$.

6. Existe x tal que $x < y$ (x, y números reales).

Sea P(n) la función proposicional "n divide a 77". Escriba cada proposición en los ejercicios 7 al 11 en palabras y diga si es verdadera o falsa. El dominio de discurso es el conjunto de enteros positivos.

7. $P(11)$

8. $P(1)$

9. $P(3)$

10. $\forall n\, P(n)$

11. $\exists n\, P(n)$

Sea P(x) la afirmación "x está en un curso de matemáticas". El dominio de discurso es el conjunto de todos los estudiantes. Escriba cada proposición en los ejercicios 12 al 17 en palabras.

12. $\forall x\, P(x)$

13. $\exists x\, P(x)$

14. $\forall x \neg P(x)$

15. $\exists x \neg P(x)$

16. $\neg(\forall x\ P(x))$

17. $\neg(\exists x\ P(x))$

18. Escriba la negación de cada proposición en los ejercicios 12 al 17 en símbolos y en palabras.

Sea P(x) la afirmación "x es un atleta profesional" y sea Q(x) la afirmación "x juega fútbol". El dominio de discurso es el conjunto de todas las personas. Escriba cada proposición en los ejercicios 19 al 26 en palabras. Determine el valor de verdad de cada afirmación.

19. $\forall x\,(P(x) \rightarrow Q(x))$

20 $\exists x\,(P(x) \rightarrow Q(x))$

21. $\forall x\,(Q(x) \rightarrow P(x))$

22. $\exists x\,(Q(x) \rightarrow P(x))$

23. $\forall x\,(P(x) \vee Q(x))$

24. $\exists x\,(P(x) \vee Q(x))$

25. $\forall x\,(P(x) \wedge Q(x))$

26. $\exists x\,(P(x) \wedge Q(x))$

27. Escriba la negación de cada proposición en los ejercicios 19 al 26 en símbolos y en palabras.

Sea P(x)la afirmación "x es un contador" y sea Q(x) la afirmación "x tiene un Porsche". Escriba en símbolos y en palabras cada afirmación en los ejercicios 28 al 31.

28. Todos los contadores tienen un Porsche.

29. Algunos contadores tienen un Porsche.

30. Todos los dueños de Porsches son contadores.

31. Alguien que tiene un Porsche es contador.

32. Escriba la negación de cada proposición en los ejercicios 28 al 31 en símbolos y en palabras.

Determine el valor de verdad de cada afirmación en los ejercicios 33 al 38. El dominio de discurso es el conjunto de números reales. Justifique sus respuestas.

33. $\forall x(x^2 > x)$

34. $\exists x(x^2 > x)$

35. $\forall x(x > 1 \rightarrow x^2 > x)$

36. $\exists x(x > 1 \rightarrow x^2 > x)$

37. $\forall x(x > 1 \rightarrow x/(x^2 + 1) < 1/3)$

38. $\exists x(x > 1 \rightarrow x/(x^2 + 1) < 1/3)$

39. Escriba la negación de cada proposición en los ejercicios 33 al 38 en símbolos y en palabras.

40. ¿El seudocódigo del ejemplo 1.3.7 podría escribirse como sigue?

```
for i = 1 to n
    if(¬P(d_i))
        return falsa
else
        return verdadera
```

¿Cuál es el significado literal de cada afirmación en los ejercicios 41 al 49? ¿Cuál es el significado deseado? Aclare cada afirmación expresándola con otras palabras y en símbolos.

41. De *Querida Abby*: Todos los hombres no engañan a sus esposas.

42. De *San Antonio Express News:* Todas la cosas viejas no envidian a las cosas de veinte.

43. Todos los 74 hospitales no entregan su reporte cada mes.

44. El economista Robert J. Samuelson: Todo problema ambiental no es una tragedia.

45. Comentario del consejal de Door County: Esto todavía es Door County y todos nosotros no tenemos un título.

46. Título de una columna de Martha Stewart: Todas las pantallas de las lámparas no se pueden limpiar.

47. Titular en el *New York Times:* Un mundo donde no todo es dulzura y luz.

48. Encabezado de una historia de subsidio a la vivienda: Todos no pueden pagar una casa.

49. De *Newsweek:* Las investigaciones formales son una buena práctica en las circunstancias correctas, pero toda circunstancia no es correcta.

50. *a)* Use una tabla de verdad para probar que si p y q son proposiciones, al menos una de $p \rightarrow q$ o $q \rightarrow p$ es cierta.

b) Sea $P(x)$ la función proposicional "x es un entero" y sea $Q(x)$ la función proposicional "x es un número positivo". El dominio de discurso es el conjunto de todos los números reales. Determine si la siguiente prueba de que todos los enteros son positivos o todos los números reales positivos son enteros es correcta o no.

Por el inciso *a)*,

$$\forall x\,((P(x) \rightarrow Q(x)) \vee (Q(x) \rightarrow P(x)))$$

es verdadera. En palabras: Para toda x, si x es un entero, entonces x es positivo; o si x es positivo, entonces x es un entero. Por lo tanto, todos los enteros son positivos o todos los números reales positivos son enteros.

51. Demuestre el Teorema 1.3.14, inciso *b)*.

1.4 ➜ Cuantificadores anidados

Considere escribir la afirmación

La suma de cualesquiera dos números reales positivos es positiva,

simbólicamente. Primero se observa que se trata de dos números, se necesitan dos variables, digamos x y y. La aseveración se puede reestablecer como: Si $x > 0$ y $y > 0$, entonces $x + y > 0$. La afirmación dice que la suma de *cualesquiera* dos números reales positivos es positiva, de manera que se necesitan dos cuantificadores universales. Así, la afirmación se escribe simbólicamente como

$$\forall x \forall y((x > 0) \wedge (y > 0) \rightarrow (x + y > 0)).$$

En palabras, para cada x y para cada y, si $x > 0$ y $y > 0$, entonces $x + y > 0$. El dominio de discurso es el conjunto de números reales. Se dice que los cuantificadores múltiples como $\forall x \forall y$ son **cuantificadores anidados.** En esta sección se exploran con detalle los cuantificadores anidados.

Ejemplo 1.4.1 ▶

Replantee

$$\forall m \exists n\ (m < n)$$

en palabras. El dominio de discurso es el conjunto de enteros.

Primero se replantea esta afirmación como: Para toda m, existe n tal que $m < n$. De manera menos formal, esto significa que si toma cualquier entero m, hay un entero n mayor que m. Dicho de otra forma: No existe un entero que sea el más grande. ◀

Ejemplo 1.4.2 ▶

Escriba la aseveración

Todos aman a alguien,

en símbolos, donde $L(x, y)$ es la afirmación "x ama a y".

"Todos" requiere un cuantificador universal y "alguien" requiere un cuantificador existencial. Entonces, la afirmación se escribe en símbolos como

$$\forall x \exists y\ L(x,y).$$

En palabras, para cada persona x, existe una persona y, tal que x ama a y.

Observe que

$$\exists x \forall y\ L(x,y)$$

no es una interpretación correcta de la afirmación original. Esta última afirmación es: Existe una persona x tal que para toda y, x ama a y. De modo menos formal, alguien ama a todos. El orden de los cuantificadores es importante; cambiar el orden altera el significado. ◀

Por definición, la afirmación

$$\forall x \forall y\ P(x,y),$$

con dominio de discurso D, es verdadera si, para *toda* x y para *toda* y en D, $P(x, y)$ es verdadera. La afirmación

$$\forall x \forall y\ P(x,y)$$

es falsa si existe *al menos una* x y *al menos una* y en D tal que $P(x, y)$ es falsa.

Ejemplo 1.4.3 ▶

Considere la afirmación

$$\forall x \forall y((x > 0) \wedge (y > 0) \rightarrow (x + y > 0)),$$

con el conjunto de números reales como dominio de discurso. Esta afirmación es verdadera porque, para todo número real x y para todo número real y, la proposición condicional

$$(x > 0) \wedge (y > 0) \rightarrow (x + y > 0)$$

es verdadera. En palabras, para todo número real x y para todo número real y, si x y y son positivos, su suma es positiva. ◀

Ejemplo 1.4.4 ▶

Considere la afirmación

$$\forall x \forall y((x > 0)\ y < 0) \rightarrow (x + y \neq 0)),$$

con el conjunto de números reales como dominio de discurso. Esta afirmación es falsa porque si $x = 1$ y $y = -1$, la proposición condicional

$$(x > 0) \wedge (y < 0) \rightarrow (\mathrm{x} + \mathrm{y} \neq 0)$$

es falsa. Se dice que el par $x = 1$ y $y = -1$ es un contraejemplo. ◀

Ejemplo 1.4.5 ▶

Suponga que P es una función proposicional cuyo dominio de discurso consiste en los elementos $d_1, ..., d_n$. El siguiente seudocódigo determina si

$$\forall x \forall y\ P(x,y)$$

es verdadera o falsa:

```
for i = 1 to n
   for j = 1 to n
      if(¬P(d_i, d_j)
         return falsa
return verdadera
```

Los ciclos "for" examinan pares de miembros del dominio de discurso. Si encuentran un par d_i, d_j para el cual $P(d_i, d_j)$ es falsa, la condición $\neg P(d_i, d_j)$ en el estatuto "if" es verdadera; entonces, el código envía a falsa [para indicar que $\forall x \forall y\ P(x, y)$ es falsa] y termina. En este caso, el par d_i, d_j es un contraejemplo. Si $P(d_i, d_j)$ es verdadera para todo par d_i, d_j, la condición $\neg P(d_i, d_j)$ en el estatuto "if" es siempre falsa. En este caso, los ciclos "for" corren hasta terminar, después de lo cual, el código regresa a verdadera [para indicar que $\forall x \forall y\ P(x, y)$ es verdadera] y termina. ◀

Por definición, la afirmación

$$\forall x\ \exists y\ P(x, y),$$

con dominio de discurso D, es verdadera si, para *toda* x en D, existe *al menos una* y en D para la que $P(x, y)$ es verdadera. La afirmación

$$\forall x\ \exists y\ P(x, y)$$

es falsa si existe *al menos una* x en D tal que $P(x, y)$ es falsa para toda y en D.

Ejemplo 1.4.6 ▶

Considere la afirmación

$$\forall x \exists y (x + y = 0),$$

cuyo dominio de discurso es el conjunto de números reales. Esta afirmación es verdadera porque, para todo número real x, existe al menos una y (a saber $y = -x$) para la que $x + y = 0$ es verdadera. En palabras, para todo número real x, existe un número que, al sumarse a x hace la suma igual a cero. ◀

Ejemplo 1.4.7 ▶

Considere la afirmación

$$\forall x \exists y (x > y),$$

cuyo dominio de discurso es el conjunto de enteros positivos. Esta afirmación es falsa porque existe al menos una x, a saber $x = 1$, tal que $x > y$ es falsa para todo entero positivo y. ◀

Ejemplo 1.4.8 ▶

Suponga que P es una función proposicional cuyo dominio de discurso consiste en los elementos $d_1, \ldots, d_n$. El siguiente seudocódigo determina si

$$\forall x \exists y\ P(x,y)$$

es verdadera o falsa:

```
for i = 1 to n
   if(¬existe_dj(i))
      return falsa
return verdadera
```

```
existe_dj(i)){
    for j = 1 to n
    if (P(d_i, d_j))
        return verdadera
    return falsa
}
```

Si para cada d_i, existe una d_j tal que $P(d_i, d_j)$ es verdadera, entonces para cada i, $P(d_i, d_j)$ es verdadera para alguna j. Entonces, *existe_dj*(i) regresa a verdadera para toda i. Como ¬*existe_dj*(i) siempre es falsa, el primer ciclo “for” termina eventualmente y regresa a verdadera para indicar que $\forall x \exists y\, P(x)$ es verdadera.

Si para alguna d_i, $P(d_i, d_j)$ es falsa para toda j, entonces, para esta i, $P(d_i, d_j)$ es falsa para toda j. En este caso, el ciclo “for” en *existe_dj*(i) corre hasta el final y regresa a falsa. Como ¬*existe_dj(i)* es verdadera, regresa a falsa para indicar que $\forall x \exists y\, P(x)$ es falsa. ◀

Por definición, la afirmación

$$\exists x \forall y\, P(x, y),$$

con dominio de discurso D, es verdadera si existe *al menos una* x en D tal que $P(x, y)$ es verdadera *para toda* y en D. La afirmación

$$\exists x \forall y\, P(x, y)$$

es falsa si, para *toda* x en D, existe *al menos una* y en D tal que $P(x, y)$ es falsa.

Ejemplo 1.4.9 ▶ Considere la afirmación

$$\exists x \forall y\, (x \leq y),$$

cuyo dominio de discurso es el conjunto de enteros positivos. Esta afirmación es verdadera porque hay al menos un entero positivo x (a saber $x = 1$) para el que $x \leq y$ es verdadera para todo entero positivo y. En otras palabras, existe un entero positivo más pequeño (el 1). ◀

Ejemplo 1.4.10 ▶ Considere la afirmación

$$\exists x \forall y\, (x \geq y),$$

con el conjunto de enteros positivos como dominio de discurso. Esta afirmación es falsa porque, para todo entero positivo x, existe al menos un entero positivo y, a saber $y = x + 1$, tal que $x \geq y$ es falsa. En otras palabras, no hay el entero positivo más grande. ◀

Por definición, la afirmación

$$\exists x \exists y\, P(x, y),$$

con dominio de discurso D, es verdadera si existe *al menos una* x en D y *al menos una* y en D tal que $P(x, y)$ es verdadera. La afirmación

$$\exists x \exists y\, P(x, y)$$

es falsa si, para *toda* x en D y para *toda* y en D, $P(x, y)$ es falsa.

Ejemplo 1.4.11 ▶ Considere la afirmación

$$\exists x \exists y\, ((x > 1) \wedge (y > 1) \wedge (xy = 6)),$$

con el conjunto de enteros positivos como dominio de discurso. Esta afirmación es verdadera porque existe al menos un entero positivo x (a saber $x = 2$) y al menos un entero positivo y (a saber $y = 3$) tales que $xy = 6$. En otras palabras, 6 es compuesto (es decir, no es primo). ◀

Ejemplo 1.4.12 ▶

Considere la afirmación

$$\exists x \exists y((x > 1) \wedge (y > 1) \wedge (xy = 7)),$$

cuyo dominio de discurso es el conjunto de enteros positivos. Esta afirmación es falsa porque para todo entero positivo x y para todo entero positivo y,

$$(x > 1) \wedge (y > 1) \wedge (xy = 7),$$

es falsa. En palabras, 7 es primo. ◀

Las leyes generalizadas de De Morgan para lógica (Teorema 1.3.14) se pueden usar para negar una proposición que contiene cuantificadores anidados.

Ejemplo 1.4.13 ▶

Usando las leyes de De Morgan para lógica, se encuentra que la negación de

$$\forall x \exists y\, P(x, y)$$

es

$$\neg(\forall x \exists y\, P(x, y)) \equiv \exists x \neg(\exists y\, P(x, y)) \equiv \exists x \forall y\, \neg P(x, y)$$

Observe que en la negación, $\forall$ y $\exists$ están intercambiados. ◀

Ejemplo 1.4.14 ▶

Escriba la negación de $\exists x \forall y(xy < 1)$, donde el dominio de discurso es el conjunto de números reales. Determine el valor de verdad de la afirmación y su negación.

Usando las leyes generalizadas de De Morgan para lógica, se encuentra que la negación es

$$\neg(\exists x \forall y(xy < 1)) \equiv \forall x \neg(\forall y(xy < 1)) \equiv \forall x \exists y \neg(xy < 1) \equiv \forall x \exists y(xy \geq 1).$$

La afirmación dada $\exists x \forall y(xy < 1)$ es verdadera porque existe al menos una x (a saber $x = 0$) tal que $xy < 1$ para toda y. Como la afirmación dada es verdadera, su negación es falsa. ◀

Se concluye con un juego de lógica que presenta una manera alternativa para determinar si una función proposicional cuantificada es verdadera o falsa. André Berthiaume contribuyó con este ejemplo.

Ejemplo 1.4.15 ▶

El juego de lógica

A partir de una función proposicional como

$$\forall x \exists y\, P(x, y),$$

usted y su oponente, a quien llamaremos Fernando, participan en un juego de lógica. Su meta es hacer $P(x, y)$ verdadera, y la de Fernando es tratar de que $P(x, y)$ sea falsa. El juego comienza con el primer cuantificador (izquierda). Si el cuantificador es $\forall$, Fernando elige un valor para esa variable; si el cuantificador es $\exists$, usted elige un valor para esa variable. El juego continúa con el segundo cuantificador. Después de elegir los valores para todas la variables, si $P(x, y)$ es verdadera, usted gana; si $P(x, y)$ es falsa, Fernando gana. Se mostrará que si usted gana siempre sin importar qué valores elija Fernando para las variables, la afirmación cuantificada será verdadera, pero si Fernando elige valores para las variables de manera que usted no pueda ganar, la afirmación cuantificada será falsa.

Considere la afirmación

$$\forall x \exists y(x + y = 0).$$

El dominio de discurso es el conjunto de números reales. Como el primer cuantificador es $\forall$, Fernando juega primero y elige un valor para x. Como el segundo cuantificador es $\exists$, usted juega. Sin importar qué valor elija Fernando, usted selecciona $y = -x$, que convierte la afirmación $x + y = 0$ en verdadera. Usted siempre puede ganar este juego, de manera que la afirmación

$$\forall x \exists y (x + y = 0)$$

es verdadera.

Ahora considere la afirmación

$$\exists x \forall y (x + y = 0).$$

De nuevo, el dominio de discurso es el conjunto de números reales. Como el primer cuantificador es $\exists$, usted juega primero y elige un valor para x. Como el segundo cuantificador es $\forall$, Fernando juega después. Sin importar qué valor eligió usted, Fernando siempre puede seleccionar un valor de y que haga falsa la afirmación $x + y = 0$. (Si usted elige $x = 0$, Fernando opta por $y = 1$. Si usted elige $x \neq 0$, Fernando escoge $y = 0$). Fernando puede ganar siempre el juego, por lo tanto la afirmación

$$\exists x \forall y (x + y = 0)$$

es falsa.

Se analizará por qué el juego determina correctamente el valor de verdad de una función proposicional cuantificada. Considere

$$\forall x \forall y P(x, y).$$

Si Fernando gana siempre, significa que encuentra valores de x y y que hacen que $P(x, y)$ sea falsa. En este caso, la función proposicional es falsa; los valores que Fernando encuentra constituyen un contraejemplo. Si Fernando no puede ganar el juego, no existe un contraejemplo; en este caso, la función proposicional es verdadera.

Considere

$$\forall x \exists y P(x, y)$$

Fernando juega primero y elige valores para x. Usted le sigue en turno. No importa qué valor haya elegido Fernando, si usted elige valores para y que hagan a $P(x, y)$ verdadera, ganará siempre y la función proposicional será verdadera. Sin embargo, si Fernando elige un valor de x de manera que todo valor y que usted seleccione haga que $P(x, y)$ sea falsa, entonces usted siempre perderá el juego y la función proposicional será falsa.

Un análisis de los otros casos muestra que si usted gana el juego siempre, la función proposicional es verdadera; pero si Fernando gana siempre, será falsa.

El juego de lógica se extiende a funciones proposicionales de más de dos variables. Las reglas son las mismas y, de nuevo, si usted puede ganar siempre, la función proposicional es verdadera; si Fernando puede ganar siempre, la función proposicional es falsa. ◀

Sugerencias para resolver problemas

Para probar que

$$\forall x \forall y P(x, y)$$

es verdadera, debe demostrar que $P(x, y)$ es verdadera para todos los valores de x y y en el dominio de discurso. Una técnica es argumentar que $P(x, y)$ es verdadera usando los símbolos x y y para representar elementos *arbitrarios* en el dominio de discurso.

Para probar que

$$\forall x \exists y\ P(x, y)$$

es verdadera, debe demostrar que para toda x en el dominio de discurso, existe al menos una y en el dominio de discurso tal que $P(x, y)$ es verdadera. Una técnica consiste en que x represente un elemento arbitrario del dominio de discurso y después encontrar un valor para y (¡*un* valor es suficiente!) para el que $P(x, y)$ es verdadera.

Para probar que

$$\exists x \forall y\, P(x, y)$$

es verdadera, debe demostrar que para al menos una x en el dominio de discurso, $P(x, y)$ es verdadera para toda y en el dominio de discurso. Una técnica consiste en encontrar un valor de x (de nuevo, ¡*un* valor es suficiente!) que tenga la propiedad de que $P(x, y)$ sea verdadera para toda y en el dominio de discurso. Una vez que se ha escogido un valor para x, deje que y represente un elemento arbitrario del dominio de discurso y demuestre que $P(x, y)$ es siempre verdadera.

Para probar que

$$\exists x \exists y\, P(x, y)$$

es verdadera, encuentre un valor de x y un valor de y (*dos* valores son suficientes, uno para x y uno para y) para los que $P(x, y)$ es verdadera.

Para negar una expresión con cuantificadores anidados, se usan las leyes generalizadas de De Morgan para lógica. En palabras comunes, $\forall$ y $\exists$ se intercambian. No olvide que la negación de $p \to q$ es equivalente a $p \wedge \neg q$.

Sección de ejercicios de repaso

1. ¿Cuál es la interpretación de $\forall x \forall y\, P(x, y)$? ¿Cuándo es verdadera esta expresión cuantificada? ¿Cuándo es falsa?
2. ¿Cuál es la interpretación de $\forall x \exists y\, P(x, y)$? ¿Cuándo es verdadera esta expresión cuantificada? ¿Cuándo es falsa?
3. ¿Cuál es la interpretación de $\exists x \forall y\, P(x, y)$? ¿Cuándo es verdadera esta expresión cuantificada? ¿Cuándo es falsa?
4. ¿Cuál es la interpretación de $\exists x \exists y\, P(x, y)$? ¿Cuándo es verdadera esta expresión cuantificada? ¿Cuándo es falsa?
5. Dé un ejemplo para mostrar que, en general, $\forall x \exists y\, P(x, y)$ y $\exists x \forall y\, P(x, y)$ tienen significados diferentes.
6. Escriba la negación de $\forall x \forall y\, P(x, y)$ usando las leyes generalizadas de De Morgan para lógica.
7. Escriba la negación de $\forall x \exists y\, P(x, y)$ usando las leyes generalizadas de De Morgan para lógica.
8. Escriba la negación de $\exists x \forall y\, P(x, y)$ usando las leyes generalizadas de De Morgan para lógica.
9. Escriba la negación de $\exists x \exists y\, P(x, y)$ usando las leyes generalizadas de De Morgan para lógica.
10. Explique las reglas para jugar el juego de lógica. ¿Cómo puede usarse este juego para determinar el valor de verdad de una expresión cuantificada?

Ejercicios

Sea T(x, y) la función proposicional "x es más alto que y, y x $\neq$ y". El dominio de discurso consiste en tres estudiantes: Gerardo, que mide 5 pies 11 pulgadas; Ernesto, que mide 5 pies 6 pulgadas, y Martín que mide 6 pies. Escriba cada proposición en los ejercicios 1 al 4 en palabras y diga si ésta es verdadera o falsa.

1. $\forall x \forall y\, T(x, y)$
2. $\forall x \exists y\, T(x, y)$
3. $\exists x \forall y\, T(x, y)$
4. $\exists x \exists y\, T(x, y)$
5. Escriba la negación de cada proposición en los ejercicios del 1 al 4 en palabras y con símbolos.

Sea T(x, y) la función proposicional "x es más alto o de la misma altura que y". El dominio de discurso consiste en tres estudiantes: Gerardo, que mide 5 pies 11 pulgadas; Ernesto, que mide 5 pies 6 pulgadas, y Martín que mide 6 pies. Escriba cada proposición en los ejercicios 6 al 9 en palabras y diga si ésta es verdadera o falsa.

6. $\forall x \forall y\, T(x, y)$
7. $\forall x \exists y\, T(x, y)$
8. $\exists x \forall y\, T(x, y)$
9. $\exists x \exists y\, T(x, y)$
10. Escriba la negación de cada proposición en los ejercicios 6 al 9 en palabras y con símbolos.

Sea L(x, y) la función proposicional "x ama a y". El dominio de discurso es el conjunto de todas las personas amantes. Escriba cada proposición en los ejercicios 11 al 14 con símbolos. ¿Cuál piensa que sea verdadera?

11. Alguien ama a todos.
12. Todos aman a todos.
13. Alguien ama a alguien.
14. Todos aman a alguien.
15. Escriba la negación de cada proposición en los ejercicios 11 al 14 en palabras y con símbolos.

Sea P(x, y) la función proposicional $x \geq y$. El dominio de discurso es el conjunto de todos los enteros positivos. Diga si cada proposición en los ejercicios 16 al 19 es verdadera o falsa.

16. $\forall x \forall y\, P(x, y)$
17. $\forall x \exists y\, P(x, y)$
18. $\exists x \forall y\, P(x, y)$
19. $\exists x \exists y\, P(x, y)$
20. Escriba la negación de cada proposición en los ejercicios 16 al 19.

Determine el valor de verdad de cada afirmación en los ejercicios 21 al 38. El dominio de discurso es el conjunto de números reales. Justifique sus respuestas.

21. $\forall x \forall y (x^2 < y + 1)$

22. $\forall x \exists y (x^2 < y + 1)$

23. $\exists x \forall y (x^2 < y + 1)$

24. $\exists x \exists y (x^2 < y + 1)$

25. $\exists y \forall x (x^2 < y + 1)$

26. $\forall y \exists x (x^2 < y + 1)$

27. $\forall x \forall y (x^2 + y^2 = 9)$

28. $\forall x \exists y (x^2 + y^2 = 9)$

29. $\exists x \forall y (x^2 + y^2 = 9)$

30. $\exists x \exists y (x^2 + y^2 = 9)$

31. $\forall x \forall y (x^2 + y^2 \geq 0)$

32. $\forall x \exists y (x^2 + y^2 \geq 0)$

33. $\exists x \forall y (x^2 + y^2 \geq 0)$

34. $\exists x \exists y (x^2 + y^2 \geq 0)$

35. $\forall x \forall y ((x < y) \rightarrow (x^2 < y^2))$

36. $\forall x \exists y ((x < y) \rightarrow (x^2 < y^2))$

37. $\exists x \forall y ((x < y) \rightarrow (x^2 < y^2))$

38. $\exists x \exists y ((x < y) \rightarrow (x^2 < y^2))$

39. Escriba la negación de cada proposición en los ejercicios 21 al 38.

40. Suponga que P es una función proposicional cuyo dominio de discurso consiste en los elementos $d_1, ..., d_n$. Escriba el seudocódigo que determina si

$$\exists x \forall y\, P(x, y)$$

es verdadera o falsa.

41. Suponga que P es una función proposicional cuyo dominio de discurso consiste en los elementos $d_1, ..., d_n$. Escriba el seudocódigo que determina si

$$\exists x \exists y\, P(x, y)$$

es verdadera o falsa.

42. Explique cómo determina el juego de lógica (ejemplo 1.4.15) si cada proposición en los ejercicios 21 al 38 es verdadera o falsa.

43. Use el juego de lógica (ejemplo 1.4.15) para determinar si la proposición

$$\forall x \forall y \exists z ((z > x) \wedge (z < y))$$

es verdadera o falsa. El dominio de discurso es el conjunto de todos los enteros.

44. Use el juego de lógica (ejemplo 1.4.15) para determinar si la proposición

$$\forall x \forall y \exists z ((z < \mathrm{x}) \wedge (z < y))$$

es verdadera o falsa. El dominio de discurso es el conjunto de todos los enteros.

45. Use el juego de lógica (ejemplo 1.4.15) para determinar si la proposición

$$\forall x \forall y \exists z ((x < y) \rightarrow ((z > x) \wedge (\mathrm{z} < y)))$$

es verdadera o falsa. El dominio de discurso es el conjunto de todos los enteros.

46. Use el juego de lógica (ejemplo 1.4.15) para determinar si la proposición

$$\forall x \forall y \exists z ((x < y) \rightarrow ((z > x) \wedge (z < y)))$$

es verdadera o falsa. El dominio de discurso es el conjunto de todos los números reales.

Suponga que $\forall x \forall y\, P(x, y)$ es verdadera y que el dominio de discurso es no vacío. ¿Cuál de los ejercicios entre el 47 y el 49 debe ser verdadero también? Si la afirmación es verdadera, explique, de otra manera, dé un contraejemplo.

47. $\forall x \exists y\, P(x, y)$

48. $\exists x \forall y\, P(x, y)$

49. $\exists x \exists y\, P(x, y)$

Suponga que $\forall x \exists y\, P(x, y)$ *es verdadera y que el dominio de discurso es no vacío. ¿Cuál de los ejercicios entre el 50 y el 52 debe ser verdadero también? Si la afirmación es verdadera, explique de otra manera, dé un contraejemplo.*

50. $\forall x \forall y\, P(x, y)$

51. $\exists x \forall y\, P(x, y)$

52. $\exists x \exists y\, P(x, y)$

Suponga que $\exists x \forall y\, P(x, y)$ *es verdadera y que el dominio de discurso es no vacío. ¿Cuál de los ejercicios entre el 53 y el 55 debe ser verdadero también? Si la afirmación es verdadera, explique; de otra manera, dé un contraejemplo.*

53. $\forall x \forall y\, P(x, y)$

54. $\forall x \exists y\, P(x, y)$

55. $\exists x \exists y\, P(x, y)$

Suponga que $\exists x \exists y\, P(x, y)$ *es verdadera y que el dominio de discurso es no vacío. ¿Cuál de los ejercicios entre el 56 y el 58 debe ser verdadero también? Si la afirmación es verdadera, explique; de otra manera, dé un contraejemplo.*

56. $\forall x \forall y\, P(x, y)$

57. $\forall x \exists y\, P(x, y)$

58. $\exists x \forall y\, P(x, y)$

¿Cuál de los ejercicios entre el 59 y el 62 es lógicamente equivalente a $\neg(\forall x \exists y\, P(x, y))$? Explique.

59. $\exists x \neg(\forall y\, P(x, y))$

60. $\forall x \neg(\exists y\, P(x, y))$

61. $\exists x \forall y \neg P(x, y)$

62. $\exists x \exists y \neg P(x, y)$

1.5 ➜ Demostraciones

Un **sistema matemático** consiste en **axiomas, definiciones** y **términos no definidos**. Se supone que los axiomas son verdaderos. Las definiciones se usan para crear nuevos conceptos en términos de los existentes. Algunos términos no están definidos de forma explícita por los axiomas. Dentro de un sistema matemático es posible derivar teoremas. Un **teorema** es una proposición que se ha probado que es verdadera. Algunos tipos especiales de teoremas reciben el nombre de lemas y corolarios. Un **lema** es un teorema que no suele ser muy interesante por sí mismo, pero que resulta útil para probar otro teorema. Un **corolario** es un teorema que se deriva con facilidad de otro teorema.

WWW

Un argumento que establece la verdad de un teorema se llama **demostración o prueba**. La lógica es la herramienta para el análisis de las demostraciones. En esta sección se describen algunos métodos generales de demostración y se usa la lógica para analizar argumentos válidos e inválidos. En las secciones 1.6 a la 1.8, se estudia la solución y la inducción matemática, que son técnicas especiales de demostración. Se comenzará por dar algunos ejemplos de sistemas matemáticos.

Ejemplo 1.5.1 ▶

La geometría euclidiana proporciona un ejemplo de un sistema matemático. Entre los axiomas están los siguientes:

- Si se tienen dos puntos distintos, existe exactamente una línea que los contiene.
- Si se tienen una línea y un punto fuera de la línea, existe exactamente una línea paralela a la línea que pasa por el punto.

Los términos *punto* y *línea* son términos no definidos que están implícitamente definidos por los axiomas que describen sus propiedades.

Entre las definiciones se encuentran:

- Dos triángulos son *congruentes* si sus vértices se pueden aparear de manera que los lados correspondientes y los ángulos correspondientes sean iguales.
- Dos ángulos son *suplementarios* si la suma de sus medidas es 180°. ◀

Ejemplo 1.5.2 ▶

Los números reales proporcionan otro ejemplo de un sistema matemático. Entre los axiomas están los siguientes:

- Para todo número real x y y, $xy = yx$
- Existe un subconjunto **P** de números reales que satisface

a) Si x y y están en **P**, entonces $x + y$ y xy están en **P**.
b) Si x es un número real, entonces exactamente una de las siguientes afirmaciones es verdadera:

$$x \text{ está en } \mathbf{P}, \quad x = 0, \quad -x \text{ está en } \mathbf{P}.$$

La multiplicación está definida de forma implícita por el primer axioma y por otros que describen las propiedades que se supone que tiene la multiplicación.

Entre las definiciones están:

- Los elementos de **P** (del axioma anterior) se llaman *números reales positivos*.
- El *valor absoluto* $|x|$ de un número real x está definido como x si x es positivo o 0, y $-x$ de otra manera. ◀

Se darán varios ejemplos de teoremas, corolarios y lemas en la geometría euclidiana y en el sistema de números reales.

Ejemplo 1.5.3 ▶

Algunos ejemplos de teoremas en la geometría euclidiana son:

- Si dos lados de un triángulo son iguales, entonces los ángulos opuestos a ellos son iguales.
- Si las diagonales de un cuadrilátero se bisectan entre sí, entonces el cuadrilátero es un paralelogramo. ◀

Ejemplo 1.5.4 ▶

Un ejemplo de corolario en la geometría euclidiana es:

- Si un triángulo es equilátero, entonces es equiangular.

Este corolario se deriva de inmediato del primer teorema del ejemplo 1.5.3. ◀

Ejemplo 1.5.5 ▶

Dos ejemplos de teoremas acerca de números reales son:

- $x \cdot 0 = 0$ para todo número real x.
- Para todos los números reales x, y y z, si $x \le y$ y $y \le z$, entonces $x \le z$. ◀

Ejemplo 1.5.6 ▶

Un ejemplo de un lema acerca de números reales es:

- Si n es un entero positivo, entonces $n - 1$ es un entero positivo o $n - 1 = 0$.

Por supuesto, este resultado no es interesante por sí mismo, pero puede usarse para probar otros resultados. ◀

Con frecuencia los teoremas son de la forma

Para toda $x_1, x_2, \ldots, x_n$, si $p(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, entonces $q(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

Esta proposición cuantificada universalmente es verdadera siempre que la proposición condicional

$$\text{si } p(x_1, x_2, \ldots, x_n), \text{ entonces } q(x_1, x_2, \ldots, x_n) \tag{1.5.1}$$

sea verdadera para todo $x_1, x_2, \ldots, x_n$ en el dominio de discurso. Para probar (1.5.1), se supone que $x_1, x_2, \ldots, x_n$ son miembros arbitrarios del dominio de discurso. Si $p(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ es falsa, por la definición 1.2.3, (1.5.1) es trivialmente cierta; así, sólo se necesita considerar el caso en que $p(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ es verdadera. Una **prueba directa** supone que $p(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ es verdadera, y después, usando $p(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ junto con otros axiomas, definiciones y teoremas derivados antes, demuestra directamente que $q(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ es verdadera.

Todos "saben" qué es un entero par o impar, pero la siguiente definición hace estos términos precisos y proporciona una manera formal de usar los términos "entero par" y "entero impar" en las demostraciones.

Definición 1.5.7 ▶

Un entero n es *par* si existe un entero k tal que $n = 2k$. Un entero n es *impar* si existe un entero k tal que $n = 2k + 1$. ◀

Ejemplo 1.5.8 ▶

El entero $n = 12$ es par porque existe un entero k (a saber, $k = 6$) tal que $n = 2k$; es decir, $12 = 2 \cdot 6$. ◀

Ejemplo 1.5.9 ▶

El entero $n = -21$ es impar porque existe un entero k (a saber $k = -11$) tal que $n = 2k + 1$; es decir, $-21 = 2 \cdot -11 + 1$. ◀

Ejemplo 1.5.10 ▶

Se dará una prueba directa de la siguiente afirmación. Para cualesquiera enteros m y n, si m es impar, y n es par, entonces $m + n$ es impar.

Demostración Se supone que m y n son enteros arbitrarios y que

$$m \text{ es impar y } n \text{ es par}$$

es verdadera. Se puede probar que

$$m + n \text{ es impar}$$

es verdadera. Por definición, como m es impar, existe un entero k_1 tal que $m = 2k_1 + 1$. También por definición, como n es par, existe un entero k_2 tal que $n = 2k_2$. (Observe que *no* se supone que $k_1 = k_2$). Ahora la suma es

$$m + n = (2k_1 + 1) + (2k_2) = 2(k_1 + k_2) + 1$$

Entonces, existe un entero k (a saber $k = k_1 + k_2$) tal que $m + n = 2k + 1$. Por lo tanto, $m + n$ es impar. ◀

Ejemplo 1.5.11 ▶

Si a y b son números reales, se define mín$\{a, b\}$ como el *mínimo de a* y *b* o el valor común si son iguales. De modo más preciso,

$$\text{mín}\{a, b\} = \begin{cases} a \text{ si } a < b \\ a \text{ si } a = b \\ b \text{ si } b < a. \end{cases}$$

Se presentará una prueba directa de la siguiente afirmación. Para cualesquiera números reales d, d_1, d_2, x,

$$\text{si } d = \text{mín}\{d_1, d_2\} \text{ y } x \leq d, \text{ entonces } x \leq d_1, \text{ y } x \leq d_2.$$

Demostración Se supone que d, d_1, d_2 y x son números reales arbitrarios y que

$$d = \text{mín}\{d_1, d_2\} \text{ y } x \leq d$$

es verdadera. Entonces se prueba que

$$x \leq d_1 \text{ y } x \leq d_2$$

es verdadera.

De la definición de mín, se tiene que $d \leq d_1$ y $d \leq d_2$. De $x \leq d$ y $d \leq d_1$, se puede derivar $x \leq d_1$ de un teorema anterior (el segundo teorema del ejemplo 1.5.5). De $x \leq d$ y $d \leq d_2$, se puede derivar $x \leq d_2$ a partir del mismo teorema anterior. Por lo tanto, $x \leq d_1$ y $x \leq d_2$. ◀

Una segunda técnica de demostración es la **prueba por contradicción**. Una prueba por contradicción establece (1.5.1) suponiendo que la hipótesis p es cierta y que la conclusión q es falsa y entonces, usando p y $\neg q$ junto con otros axiomas, definiciones y teoremas derivados antes, llega a una **contradicción**. Una contradicción es una proposición de la forma $r \wedge \neg r$ (r puede ser cualquier proposición). Una prueba por contradicción en ocasiones se llama **prueba indirecta** ya que para establecer (1.5.1) usando la prueba por contradicción, se sigue una ruta indirecta: se deriva $r \wedge \neg r$ y después se concluye que (1.5.1) es verdadera.

La única diferencia entre las suposiciones en una prueba directa y una prueba por contradicción es la conclusión negada. En una prueba directa no se supone la conclusión negada, mientras que en una prueba por contradicción la conclusión negada es una suposición.

La prueba por contradicción se justifica observando que las proposiciones

$$p \rightarrow q \quad \text{y} \quad (p \wedge \neg q) \rightarrow (r \wedge \neg r)$$

son equivalentes. La equivalencia es inmediata a partir de la tabla de verdad:

p	q	r	$p \rightarrow q$	$p \wedge \neg q$	$r \wedge \neg r$	$(p \wedge \neg q) \rightarrow (r \wedge \neg r)$
V	V	V	V	F	F	V
V	V	F	V	F	F	V
V	F	V	F	V	F	F
V	F	F	F	V	F	F
F	V	V	V	F	F	V
F	V	F	V	F	F	V
F	F	V	V	F	F	V
F	F	F	V	F	F	V

Ejemplo 1.5.12 ▶

Se dará una prueba por contradicción de la siguiente afirmación:

Para todos los números reales x y y, si $x + y \geq 2$, entonces $x \geq 1$ o $y \geq 1$.

Demostración Primero, sean x y y números reales arbitrarios. Se supondrá que la conclusión es falsa, es decir, que $\neg(x \geq 1 \vee y \geq 1)$ es verdadera. Por las leyes de De Morgan de lógica (vea el ejemplo 1.2.11),

$$\neg(x \geq 1 \vee y \geq 1) \equiv \neg(x \geq 1) \wedge \neg(y \geq 1) \equiv (x < 1) \wedge (y < 1).$$

En palabras, se está suponiendo que $x < 1$ y que $y < 1$. Usando un teorema anterior, se pueden sumar estas desigualdades para obtener

$$x + y < 1 + 1 = 2.$$

En este punto, se ha obtenido la contradicción $p \wedge \neg p$, donde

$$p\colon x + y \geq 2.$$

Por lo tanto, concluimos que la afirmación es verdadera. ◀

Suponga que se da una prueba por contradicción de (1.5.1) en donde, igual que en el ejemplo 1.5.12, se deduce $\neg p$. De hecho, se probó

$$\neg q \rightarrow \neg p.$$

Este caso especial por contradicción se llama **prueba por contrapositiva**.

Ejemplo 1.5.13 ▶

Use la prueba por contrapositiva para demostrar que

para todo entero m, si m^2 es impar, entonces m es impar.

Demostración Primero, sea m un entero arbitrario. La contrapositiva de

si m^2 es impar, entonces m es impar

es

si m es par, entonces m^2 es no es impar

o, de manera equivalente,

si m es par, entonces m^2 es par.

Así, suponga que m es par. Entonces $m = 2k$ para algún entero k. Ahora, $m^2 = (2k)^2 = 2 \cdot (2k^2)$. Como m^2 es de la forma $2 \times$ un entero (a saber $2k^2$), m^2 es par. La prueba queda completa. ◀

La **prueba por casos** se emplea cuando la hipótesis original se divide de manera natural en varios casos. Por ejemplo, la hipótesis "x es un número real" se puede dividir en casos: a) x es un número real no negativo y b) x es un número real negativo. Suponga que la tarea es probar $p \rightarrow q$ y que p es equivalente a $p_1 \vee p_2 \vee \cdots \vee p_n$ ($p_1, \ldots, p_n$ son los casos). En lugar de probar

$$(p_1 \vee p_2 \vee \cdots \vee p_n) \rightarrow q, \tag{1.5.2}$$

se prueba

$$(p_1 \rightarrow q) \wedge (p_2 \rightarrow q) \wedge \cdots \wedge (p_n \rightarrow q). \tag{1.5.3}$$

Como se verá, la prueba por casos se justifica porque las dos afirmaciones son equivalentes.

Primero suponga que alguna p_i es verdadera. En especial, se supone que p_j es cierta. Entonces

$$p_1 \vee p_2 \vee \cdots \vee p_n$$

es verdadera. Si q es verdadera, entonces (1.5.2) es verdadera. Ahora, $p_i \rightarrow q$ es verdadera para toda i; de manera que (1.5.3) también es verdadera. Si q es falsa, entonces (1.5.2) es falsa. Como $p_j \rightarrow q$ es falsa, (1.5.3) también es falsa.

Ahora suponga que ninguna p_i es verdadera; esto es, todas las p_i son falsas. Entonces ambas, (1.5.2) y (1.5.3), son ciertas. Por lo tanto, (1.5.2) y (1.5.3) son equivalentes.

Ejemplo 1.5.14 ▶

Se probará que para todo número real x, $x \leq |x|$.

Demostración Observe que "x es un número real" es equivalente a $(x \geq 0) \vee (x < 0)$. Una afirmación "o" con frecuencia lleva por sí misma a una prueba por casos. El caso 1 es $x \geq 0$

y el caso 2 es $x < 0$. La prueba se divide en dos casos porque la propia definición de valor absoluto está dividida en los casos $x \geq 0$ y $x < 0$ (vea el ejemplo 1.5.2).

Si $x \geq 0$, por definición $|x| = x$. Así, $|x| \geq x$. Si $x < 0$, por definición $|x| = -x$. Como $|x| = -x > 0$ y $0 > x$, $|x| \geq x$. En cualquier caso, $|x| \geq x$, y esto completa la prueba. ◀

Algunos teoremas son de la forma

$$p \text{ si y sólo si } q.$$

Esos teoremas se demuestran usando la equivalencia (vea el ejemplo 1.2.15)

$$p \leftrightarrow q \equiv (p \to q) \wedge (q \to p)$$

es decir, para probar "p si y sólo si q" se prueba "si p entonces q" y "si q entonces p".

Ejemplo 1.5.15 ▶

Demuestre que para todo entero n, n es impar si y sólo si $n - 1$ es par.

Demostración Sea n un entero arbitrario. Debe probarse que

$$\text{si } n \text{ es impar, entonces } n - 1 \text{ es par}$$

y

$$\text{si } n - 1 \text{ es par, entonces } n \text{ es impar.}$$

Primero se demostrará que

$$\text{si } n \text{ es impar, entonces } n - 1 \text{ es par.}$$

Si n es impar, entonces $n = 2k + 1$ para algún entero k. Ahora

$$n - 1 = (2k + 1) - 1 = 2k.$$

Por lo tanto, $n - 1$ es par.

Ahora se demostrará que

$$\text{si } n - 1 \text{ es par entonces } n \text{ es impar.}$$

Si $n - 1$ es par, entonces $n - 1 = 2k$ para algún entero k. Ahora

$$n = 2k + 1,$$

por lo tanto, n es par y la demostración está completa. ◀

Ejemplo 1.5.16 ▶

Demuestre que para todo número real x y todo número real positivo d,

$$|x| < d \text{ si y sólo si } -d < x < d.$$

Demostración Sea x un número real arbitrario y d un número real positivo. Debemos demostrar que

$$\text{si } |x| < d \text{ entonces } -d < x < d$$

y

$$\text{si } -d < x < d \text{ entonces } |x| < d.$$

Para demostrar

$$\text{si } |x| < d \text{ entonces } -d < x < d,$$

se usa la prueba por casos. Se supone que $|x| < d$. Si $x \geq 0$, entonces

$$-d < 0 \leq x = |x| < d.$$

Si $x < 0$, entonces

$$-d < 0 < -x = |x| < d;$$

es decir,

$$-d < x < d.$$

Multiplicando por –1, se obtiene

$$d > x > -d.$$

En cualquier caso, se ha probado que

$$-d < x < d.$$

Para demostrar que

$$\text{si } -d < x < d \text{ entonces } |x| < d,$$

también se usa la prueba por casos. Se supone que $-d < x < d$. Si $x \geq 0$, entonces

$$|x| = x < d.$$

Si $x < 0$, entonces $|x| = -x$. Como $-d < x$, se multiplica por –1 para obtener $d > -x$. Combinando $|x| = -x$ y $d > -x$ se tiene

$$|x| = -x < d.$$

En cualquier caso, se ha probado que

$$|x| < d.$$

La prueba queda completa ◀

Las técnicas de demostración presentadas hasta ahora se aplican a afirmaciones con cuantificadores universales. En la sección 1.3 se muestra que para probar

$$\exists x\, P(x)$$

simplemente se necesita encontrar un elemento x del dominio de discurso que haga $P(x)$ verdadera. Tal prueba se llama **prueba existencial.**

Ejemplo 1.5.17 ▶ Sean a y b números reales con $a < b$. Pruebe que existe un número real x que satisface $a < x < b$.

Demostración Es suficiente encontrar un número real x que satisfaga $a < x < b$. El número real

$$x = \frac{a+b}{2},$$

a la mitad entre a y b, sin duda satisface $a < x < b$. ◀

Ejemplo 1.5.18 ▶ Demuestre que existe un número primo p tal que $2^p - 1$ es compuesto (es decir, *no es primo*).

Demostración Por prueba y error, se encuentra que $2^p - 1$ es primo para $p = 2, 3, 5, 7$ pero no para $p = 11$, ya que

$$2^{11} - 1 = 2048 - 1 = 2047 = 23 \cdot 89.$$ ◀

WWW

Un número primo de la forma $2^p - 1$, donde p es primo, se llama *primo de Mersenne* [en honor de Marin Mersenne (1588–1648)]. Los primos más grandes conocidos son primos de Mersenne. A fines de 2003, se encontró el cuadragésimo número primo de Mersenne, $2^{20,996,011}$, un número que tiene 6,320,430 dígitos decimales. Este número fue encontrado por el Great Internet Mersenne Prime Search (GIMPS). GIMPS es un programa de computadora distribuido en muchas computadoras personales que mantienen voluntarios. Usted puede participar. Sólo entre al enlace en Internet. ¡Podría encontrar el siguiente primo de Mersenne!

Recuerde (vea la sección 1.3) que para *refutar*

$$\forall x\, P(x)$$

simplemente se necesita encontrar un miembro x del dominio de discurso para el que $P(x)$ es falsa. Ese valor de x se llama *contraejemplo*.

Ejemplo 1.5.19 ▶

La afirmación

$$\forall n(2^n + 1 \text{ es primo})$$

es falsa. Un contraejemplo es $n = 3$ ya que $2^3 + 1 = 9$, que no es primo. ◀

Al construir una prueba, debemos asegurarnos de que los argumentos que se usan son **válidos**. Se precisará el concepto de argumento válido y se analizará con cierto detalle.

Considere la siguiente secuencia de proposiciones.

La falla está en el módulo 17 o en el módulo 81.
La falla es un error numérico.
El módulo 81 no tiene error numérico. **(1.5.4)**

Suponiendo que estas afirmaciones son verdaderas, es razonable concluir

La falla está en el módulo 17. **(1.5.5)**

Este proceso de obtener conclusiones de una secuencia de proposiciones se llama **razonamiento deductivo**. Las proposiciones que se dan, como (1.5.4), se llaman **hipótesis** o **premisas**, y la proposición que se deriva de la hipótesis, como (1.5.5), se llama **conclusión**. Un **argumento (deductivo)** consiste en hipótesis junto con una conclusión. Muchas demostraciones en matemáticas y ciencias de la computación son argumentos deductivos.

Cualquier argumento tiene la forma

Si p_1 y p_2 y ... y p_n, entonces q. **(1.5.6)**

Se dice que el argumento (1.5.6) es válido si la conclusión se obtiene de la hipótesis; es decir, si p_1 y p_2 y ... y p_n son verdaderas, entonces q también debe ser verdadera. Este análisis motiva la siguiente definición.

Definición 1.5.20 ▶

Un *argumento* es una secuencia de proposiciones escritas

$$\begin{array}{c} p_1 \\ p_2 \\ \vdots \\ p_n \\ \hline \therefore q \end{array}$$

o

$$p_1, p_2, \ldots, p_n / \therefore q.$$

El símbolo $\therefore$ se lee "por lo tanto". Las proposiciones $p_1, p_2, \ldots, p_n$ se conocen como *hipótesis* (o *premisas*), y la proposición q recibe el nombre de *conclusión*. El argumento es *válido* siempre y cuando, si p_1 y p_2 y . . . y p_n son todas verdaderas, entonces q también es verdadera; de otra manera, el argumento es *inválido* (o una *falacia*). ◀

WWW

En un argumento válido, a veces se dice que la conclusión se deriva de la hipótesis. Observe que no se está afirmando que la conclusión es cierta; sólo se dice que si se garantiza la hipótesis, también se debe garantizar la conclusión. Un argumento es válido por su forma no por su contenido.

Ejemplo 1.5.21 ▶

Determine si el argumento

$$\begin{array}{l} p \to q \\ p \\ \hline \therefore q \end{array}$$

es válido.

[Primera solución] Se construye una tabla de verdad para todas las proposiciones implicadas:

p	q	$p \to q$	p	q
V	V	V	V	V
V	F	F	V	F
F	V	V	F	V
F	F	V	F	F

Se observa que cuando las hipótesis $p \to q$ y p son verdaderas, la conclusión q también es verdadera; por lo tanto, el argumento es válido.

[Segunda solución] Es posible evitar escribir la tabla de verdad con una verificación directa de que cuando las hipótesis son verdaderas, la conclusión también lo es.

Suponga que $p \to q$ y p son verdaderas. Entonces q debe ser verdadera, pues de otra manera $p \to q$ sería falsa. Por lo tanto, el argumento es válido. ◀

Ejemplo 1.5.22 ▶

Represente el argumento

$$\begin{array}{l} \text{Si } 2 = 3\text{, entonces yo me comí mi sombrero.} \\ \text{Me comí mi sombrero.} \\ \hline \therefore 2 = 3 \end{array}$$

simbólicamente y determine si el argumento es válido.

Si se hace

$$p\text{: } 2 = 3, \qquad q\text{: Me comí mi sombrero,}$$

el argumento se escribe como

$$\begin{array}{l} p \to q \\ q \\ \hline \therefore p \end{array}$$

Si el argumento es válido, entonces siempre que $p \to q$ y q sean ciertas ambas, p también debe ser cierta. Suponga que $p \to q$ y q son verdaderas. Esto es posible si p es falsa y q es verdadera. En este caso, p no es verdadera; así, el argumento es inválido. ◀

También es posible determinar la validez del argumento en el ejemplo 1.5.22 examinando la tabla de verdad del ejemplo 1.5.21. En el tercer renglón de la tabla, las hipótesis son verdaderas y la conclusión es falsa; así, el argumento es inválido.

Como se explicó antes, una prueba usa las hipótesis, axiomas, definiciones, etcétera para llegar a una conclusión. Cada paso de la prueba incluye sacar conclusiones inmediatas. Para que la prueba como un todo sea válida, cada paso debe dar como resultado una conclusión intermedia válida. Cuando se construye una prueba, con frecuencia se usa la intuición como guía para sacar conclusiones intermedias válidas; sin embargo, es factible formalizar el proceso. Este capítulo concluye con la observación cuidadosa de las **reglas de inferencia**, que son argumentos válidos breves que se utilizan dentro de argumentos más largos como una demostración.

Regla de inferencia	Nombre	Regla de inferencia	Nombre
$\begin{array}{l} p \to q \\ \underline{p \quad\quad} \\ \therefore q \end{array}$	*Modus ponens*	$\begin{array}{l} p \\ \underline{q \quad\quad} \\ \therefore p \wedge q \end{array}$	Conjunción
$\begin{array}{l} p \to q \\ \underline{\neg q \quad\quad} \\ \therefore \neg p \end{array}$	*Modus tollens*	$\begin{array}{l} p \to q \\ \underline{q \to r} \\ \therefore p \to r \end{array}$	Silogismo hipotético
$\begin{array}{l} \underline{p \quad\quad} \\ \therefore p \vee q \end{array}$	Suma	$\begin{array}{l} p \vee q \\ \underline{\neg p \quad} \\ \therefore q \end{array}$	Silogismo disyuntivo (*Tollens ponens*)
$\begin{array}{l} \underline{p \wedge q} \\ \therefore p \end{array}$	Simplificación		

Figura 1.5.1 Reglas de inferencia para proposiciones.

Reglas de inferencia para proposiciones

En el ejemplo 1.5.21, se vio que el argumento

$$\begin{array}{l} p \to q \\ \underline{p \quad\quad} \\ \therefore q \end{array}$$

es válido. Esta regla de inferencia se llama **modus ponens** o **ley de separación**. Otras reglas de inferencia para proposiciones, que pueden verificarse usando las tablas de verdad (vea los ejercicios 59 al 64), se enumeran en la figura 1.5.1.

Ejemplo 1.5.23 ▶

¿Cuál regla de inferencia se usa en el siguiente argumento?

Si la computadora tiene 32 megabytes de almacenamiento, entonces puede correr "como ráfaga". Si la computadora puede trabajar "como ráfaga", entonces el sonido será impresionante. Por lo tanto, si la computadora tiene 32 megabytes de almacenamiento, entonces el sonido será impresionante.

Sea p la proposición "la computadora tiene 32 megabytes de almacenamiento", sea q la proposición "la computadora puede correr 'como ráfaga', y sea r la proposición "el sonido será impresionante". El argumento se escribe en símbolos como

$$\begin{array}{l} p \to q \\ \underline{q \to r \quad} \\ \therefore p \to r \end{array}$$

Por lo tanto, el argumento usa la regla de inferencia de silogismo hipotético. ◀

Ejemplo 1.5.24 ▶

Se tiene la siguiente hipótesis: si los Cargadores obtienen un buen defensa, entonces los Cargadores pueden derrotar a los Broncos. Si los Cargadores pueden derrotar a los Broncos, entonces los Cargadores pueden derrotar a los Jets. Si los Cargadores pueden derrotar a los Broncos, entonces los Cargadores pueden derrotar a los Delfines. Los Cargadores obtienen un buen defensa. Demuestre usando las reglas de inferencia (vea la figura 1.5.1) que la conclusión, los Cargadores pueden derrotar a los Jets y los Cargadores pueden derrotar a los Delfines, se deriva de la hipótesis.

Sea p la proposición "los Cargadores pueden obtener un buen defensa", sea q la proposición "los Cargadores pueden derrotar a los Broncos", sea r la proposición "los Cargadores pueden derrotar a los Jets" y sea s la proposición "los Cargadores pueden derrotar a los Delfines". Entonces las hipótesis son:

$$p \to q$$
$$q \to r$$
$$q \to s$$
$$p.$$

A partir de $p \to q$ y $q \to r$, se usa el silogismo hipotético para concluir que $p \to r$. A partir de $p \to r$ y p, se utiliza el modus ponens para concluir r. A partir de $p \to q$ y $q \to s$, se emplea el silogismo hipotético para concluir que $p \to s$. A partir de $p \to s$ y p, se usa el modus ponens para concluir s. A partir de r y s, se utiliza la conjunción para concluir $r \wedge s$. Como $r \wedge s$ representa la proposición "los Cargadores pueden derrotar a los Jets y los Cargadores pueden derrotar a los Delfines", se sabe que la conclusión sí se deriva de la hipótesis. ◀

Reglas de inferencia para afirmaciones cuantificadas

Suponga que $\forall x\, P(x)$ es verdadera. Por la definición 1.3.4, $P(x)$ es verdadera para toda x en D, el dominio de discurso. En particular, si d está en D, entonces $P(d)$ es cierta. Se ha demostrado que el argumento

$$\begin{array}{l} \forall x\, P(x) \\ \hline \therefore P(d) \text{ si } d \text{ está en } D \end{array}$$

es válido. Esta regla de inferencia se llama particularización **universal**. Argumentos similares (vea los ejercicios 65 al 67) justifican las otras reglas de inferencia que aparecen en la figura 1.5.2.

Reglas de inferencia	Nombre
$\begin{array}{l} \forall x\, P(x) \\ \hline \therefore\ P(d) \text{ si } d \text{ está en D} \end{array}$	Particularización universal
$\begin{array}{l} P(d) \text{ para toda } d \text{ en } D \\ \hline \therefore \forall x\, P(x) \end{array}$	Generalización universal
$\begin{array}{l} \exists x\, P(x) \\ \hline \therefore\ P(d) \text{ para alguna } d \text{ en } D \end{array}$	Particularización existencial
$\begin{array}{l} P(d) \text{ para alguna } d \text{ en } D \\ \hline \therefore \exists x\, P(x) \end{array}$	Generalización existencial

Figura 1.5.2 Reglas de inferencia para afirmaciones cuantificadas. El dominio de discurso es D.

Ejemplo 1.5.25 ▶

Se tienen las siguientes hipótesis: Todos aman a Microsoft o a Apple. Lina no ama a Microsoft. Demuestre que la conclusión, Lina ama a Appple se deriva de las hipótesis.

Sea $P(x)$ la función proposicional "x ama a Microsoft" y sea $Q(x)$ la función proposicional "x ama a Apple". La primera hipótesis es $\forall x\, P(x) \vee Q(x)$. Por la particularización universal, se tiene que $P(\text{Lina}) \vee Q(\text{Lina})$. La segunda hipótesis es $\neg P(\text{Lina})$. La regla de inferencia del silogismo disyuntivo (vea la figura 1.5.1) ahora da $Q(\text{Lina})$, que representa la proposición "Lina ama a Apple". Determinamos entonces que la conclusión sí se obtiene de las hipótesis. ◀

Sugerencias para resolver problemas

Elaborar una demostración es más que un procedimiento metódico. La práctica y la experiencia son importantes. De cualquier manera, existen algunas sugerencias generales.

Determine si la afirmación que se va a probar está cuantificada universalmente (lo más común) o existencialmente. Si la afirmación está universalmente cuantificada (es decir, para toda x ...), para construir una prueba directa haga que x denote un elemento *arbitrario* del dominio de discurso y argumente en términos de x. Aunque los valores específicos de x resultan útiles para comprender mejor lo que se debe probar, demostrar que esa afirmación es cierta para valores específicos de x no es una demostración.

Si la afirmación está cuantificada existencialmente (es decir, existe x . . .), la demostración consistirá en encontrar un valor de x para el que la afirmación sea verdadera o en dar una prueba indirecta de que ese valor existe. En este caso, un valor específico de x es justo lo que se necesita.

Antes de intentar una demostración, recuerde lo que conoce acerca de los términos, valores, etcétera. Por ejemplo, si la hipótesis se refiere a todo entero par n, sabemos que n es de la forma $2k$ para algún entero k.

Revise las diferentes técnicas de demostración de esta sección. Si desea construir una prueba directa de una afirmación de la forma $p \to q$ y parece estar atorado, intente una prueba por contradicción. Con ella tendrá más elementos con los cuales trabajar: además de suponer p, puede también suponer $\neg q$.

La prueba por casos es útil si las hipótesis se separan en partes de manera natural. Por ejemplo, si la afirmación que va a probar contiene el valor absoluto de x, tal vez quiera considerar los casos $x \geq 0$ y $x < 0$ ya que $|x|$ mismo se define por los casos $x \geq 0$ y $x < 0$.

Por último, recuerde que para probar p si y sólo si q, debe probar dos afirmaciones: 1) si p entonces q y 2) si q entonces p.

Sección de ejercicios de repaso

1. ¿Qué es un sistema matemático?
2. ¿Qué es un axioma?
3. ¿Qué es una definición?
4. ¿Qué es un término no definido?
5. ¿Qué es un teorema?
6. ¿Qué es una demostración?
7. ¿Qué es un lema?
8. ¿Qué es una prueba directa?
9. ¿Cuál es la definición formal de “entero par”?
10. ¿Cuál es la definición formal de “entero impar”?
11. ¿Qué es una prueba por contradicción?
12. ¿Qué es una prueba indirecta?
13. ¿Qué es una prueba por contrapositiva?
14. ¿Qué es una demostración por casos?
15. ¿Qué es una prueba de existencia?
16. ¿Qué es el razonamiento deductivo?
17. ¿Qué es una hipótesis en un argumento?
18. ¿Qué es una premisa en un argumento?
19. ¿Qué es una conclusión en un argumento?
20. ¿Qué es un argumento válido?
21. Qué es un argumento inválido?
22. Establezca la regla de inferencia *modus ponens*.
23. Establezca la regla de inferencia *modus tollens*.
24. Establezca la regla de inferencia de suma.
25. Establezca la regla de inferencia de simplificación.
26. Establezca la regla de inferencia de conjunción.
27. Establezca la regla de inferencia de silogismo hipotético.
28. Establezca la regla de inferencia de silogismo disyuntivo.
29. Establezca la regla de inferencia del particularización universal.
30. Establezca la regla de inferencia de generalización universal.
31. Establezca la regla de inferencia del particularización existencial.
32. Establezca la regla de inferencia de generalización existencial.

Ejercicios

1. Dé un ejemplo (diferente a los del ejemplo 1.5.1) de un axioma de la geometría euclidiana.
2. Dé un ejemplo (diferente a los del ejemplo 1.5.2) de un axioma del sistema de los números reales.
3. Dé un ejemplo (diferente a los del ejemplo 1.5.1) de una definición en la geometría euclidiana.
4. Dé un ejemplo (diferente a los del ejemplo 1.5.2) de una definición en el sistema de los números reales.
5. Dé un ejemplo (diferente a los del ejemplo 1.5.3) de un teorema en la geometría euclidiana.
6. Dé un ejemplo (diferente a los del ejemplo 1.5.5) de un teorema en el sistema de los números reales.

7. Pruebe que para todos los enteros m y n, si m y n son pares, entonces $m + n$ es par.

8. Pruebe que para todos los enteros m y n, si m y n son impares, entonces $m + n$ es par.

9. Pruebe que para todos los enteros m y n, si m y n son pares, entonces mn es par.

10. Pruebe que para todos los enteros m y n, si m y n son impares, entonces mn es impar.

11. Pruebe que para todos los enteros m y n, si m es par y n es impar, entonces mn es par.

12. Si a y b son números reales, se define máx$\{a, b\}$ como el máximo entre a y b o el valor común si son iguales. Pruebe que para todos los números reales d, d_1, d_2, x,

si $d =$ máx$\{d_1, d_2\}$ y $x \geq d$, entonces $x \geq d_1$ y $x \geq d_2$.

13. Justifique cada paso de la siguiente prueba directa, que muestra que si x es un número real, entonces $x \cdot 0 = 0$. Suponga que los siguientes son teoremas previos: Si a, b y c son números reales, entonces $b + 0 = b$ y $a(b + c) = ab + ac$. Si $a + b = a + c$, entonces $b = c$.

Demostración $x \cdot 0 + 0 = x \cdot 0 = x \cdot (0 + 0) = x \cdot 0 + x \cdot 0$; por lo tanto, $x \cdot 0 = 0$.

14. Justifique cada paso de la siguiente demostración por contradicción, que muestra que si $xy = 0$, entonces $x = 0$ o $y = 0$. Suponga que si a, b y c son números reales con $ab = ac$ y $a \neq 0$, entonces, $b = c$.

Demostración Suponga que $xy = 0$ y $x \neq 0$ y $y \neq 0$. Como $xy = 0 = x \cdot 0$ y $x \neq 0$, $y = 0$, que es una contradicción.

15. Demuestre, por contradicción, que si se colocan 100 pelotas en nueve urnas, alguna urna contiene 12 pelotas o más.

16. Demuestre, por contradicción, que si se distribuyen 40 monedas en nueve bolsas de manera que cada bolsa contenga al menos una moneda, al menos dos bolsas contienen el mismo número de monedas.

17. Sea

$$A = \frac{s_1 + s_2 + \cdots + s_n}{n}$$

el promedio de los números reales $s_1, \ldots, s_n$. Demuestre, por contradicción, que existe i tal que $s_i \geq A$.

18. Sea

$$A = \frac{s_1 + s_2 + \cdots + s_n}{n}$$

el promedio de los números reales $s_1, \ldots, s_n$. Pruebe o desapruebe: Existe i tal que $s_i > A$. ¿Qué técnica de demostración utilizó?

19. Sea

$$A = \frac{s_1 + s_2 + \cdots + s_n}{n}$$

el promedio de los números reales $s_1, \ldots, s_n$. Suponga que existe i tal que $s_i < A$. Pruebe o desapruebe: Existe j tal que $s_j > A$. ¿Qué técnica de demostración usó?

20. Utilice la prueba por casos para demostrar que $|xy| = |x|\,|y|$ para todos los números reales x y y.

21. Utilice la prueba por casos para demostrar que $|x + y| \leq |x| + |y|$ para todos los números reales x y y.

22. Defina el *signo del número real* x, sgn(x), como

$$\operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \\ -1 & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

Use la prueba por casos para demostrar que $|x| = \operatorname{sgn}(x)x$ para todo número real x.

23. Utilice la prueba por casos para demostrar que $\operatorname{sgn}(xy) = \operatorname{sgn}(x)\operatorname{sgn}(y)$ para todos los números reales x y y (sgn se define en el ejercicio 22).

24. Use los ejercicios 22 y 23 para dar otra prueba de que $|xy| = |x|\,|y|$ para todos los números reales x y y.

25. Use la prueba por casos para demostrar que máx$\{x, y\}$ + mín$\{x, y\} = x + y$ para todos los números reales x y y.

26. Utilice la demostración por casos para probar que

$$\text{máx}\{x, y\} = \frac{x + y + |x - y|}{2}$$

para todos los números reales x y y.

27. Utilice la demostración por casos para probar que

$$\text{mín}\{x, y\} = \frac{x + y - |x - y|}{2}$$

para todos los números reales x y y.

28. Utilice los ejercicios 26 y 27 para probar que máx$\{x, y\}$ + mín$\{x, y\} = x + y$ para todos los números reales x y y.

†★**29.** Sea $s_1, \ldots, s_n$ una secuencia‡ que satisface

a) s_1 es un entero positivo y s_n es un entero negativo.

b) para toda i, $1 \leq i < n$, $s_{i+1} = s_i + 1$ o $s_{i+1} = s_i - 1$.

Pruebe que existe i, $1 < i < n$, tal que $s_i = 0$.

Los estudiantes de cálculo reconocerán este ejercicio como la versión discreta del teorema de cálculo: Si f es una función continua sobre $[a, b]$ y $f(a) > 0$ y $f(b) < 0$, entonces $f(c) = 0$ para alguna c en (a, b). Existen pruebas similares de las dos afirmaciones.

30. Desapruebe la afirmación: Para todo entero positivo n, $n^2 \leq 2^n$.

Formule con símbolos los argumentos de los ejercicios 31 al 35 y determine si cada uno es válido. Sean

p: Estudio duro. q: Obtengo 10. r: Me hago rico.

31. Si estudio duro, entonces obtengo 10.
Estudio duro.
___
∴ obtengo 10.

32. Si estudio duro, entonces obtengo 10.
Si no me hago rico, entonces no obtengo 10.
___
∴ Me hago rico.

33. Estudio duro si y sólo si me hago rico.
Me hago rico
___
∴ estudio duro.

† El símbolo ★ antepuesto al número de un ejercicio indica un problema con dificultad más alta que el promedio.
‡ De manera informal, una *secuencia* es una lista de elementos en la que se toma en cuenta el orden, de forma que s_2 es el primer elemento, s_2 es el segundo, y así sucesivamente. La definición formal se presenta en la sección 2.3.

34. Si estudio duro o me hago rico, entonces obtengo 10.
Obtengo 10.

$\therefore$ si no estudio duro, entonces me hago rico.

35. Si estudio mucho, entonces obtengo 10 o me hago rico.
No obtengo 10 y no me hago rico.

$\therefore$ no estudio duro.

En los ejercicios 36 al 40, escriba el argumento en palabras y determine si cada argumento es válido. Sean

p: 4 megabytes es mejor que sin memoria.

q: Compraremos más memoria.

r: Compraremos una computadora nueva.

36.
$$\begin{array}{l} p \to r \\ \underline{p \to q} \\ \therefore p \to (r \wedge q) \end{array}$$

37.
$$\begin{array}{l} p \to (r \vee q) \\ \underline{r \to \neg q} \\ \therefore p \to r \end{array}$$

38.
$$\begin{array}{l} p \to r \\ \underline{r \to q} \\ \therefore q \end{array}$$

39.
$$\begin{array}{l} \neg r \to \neg p \\ \underline{r} \\ \therefore p \end{array}$$

40.
$$\begin{array}{l} p \to r \\ r \to q \\ \underline{p} \\ \therefore q \end{array}$$

Determine si cada argumento en los ejercicios 41 al 45 es válido.

41.
$$\begin{array}{l} p \to q \\ \underline{\neg p} \\ \therefore \neg q \end{array}$$

42.
$$\begin{array}{l} p \to q \\ \underline{\neg q} \\ \therefore \neg p \end{array}$$

43.
$$\begin{array}{l} \underline{p \wedge \neg p} \\ \therefore q \end{array}$$

44.
$$\begin{array}{l} p \to (q \to r) \\ \underline{q \to (p \to r)} \\ \therefore (p \vee q) \to r \end{array}$$

45.
$$\begin{array}{l} (p \to q) \wedge (r \to s) \\ \underline{p \vee r} \\ \therefore q \vee s \end{array}$$

46. Demuestre que si

$$p_1, p_2 / \therefore p \quad \text{y} \quad p, p_3, \ldots, p_n / \therefore c$$

son argumentos válidos, el argumento

$$p_1, p_2, \ldots, p_n / \therefore c$$

también es válido.

47. Comente el siguiente argumento:
Almacenar en disco flexible es mejor que nada.
Nada es mejor que un disco duro.

$\therefore$ Almacenar en disco flexible es mejor que un disco duro.

48. Analice los siguientes comentarios del crítico de cine Roger Ebert: Ninguna buena película es demasiado larga. Ninguna mala película es demasiado corta. “Amor en realidad” es buena, pero es demasiado larga.

Para cada argumento en los ejercicios 49 al 52, diga qué regla de inferencia se usó.

49. La pesca es un deporte popular. Por lo tanto, pescar es un deporte popular o el lacrosse es muy popular en California.

50. Si la pesca es un deporte popular, entonces el lacrosse es muy popular en California. La pesca es un deporte popular. Por lo tanto, el lacrosse es muy popular en California.

51. La pesca es un deporte popular o el lacrosse es muy popular en California. El lacrosse no es muy popular en California. Por lo tanto, la pesca es un deporte popular.

52. Todo número racional es de la forma p/q, donde p y q son enteros. Por lo tanto, 9.345 es de la forma p/q.

En los ejercicios 53 al 58, dé un argumento usando las reglas de inferencia para demostrar que la conclusión se deriva de las hipótesis.

53. Hipótesis: Si el auto tiene gasolina, entonces iré a la tienda. Si voy a la tienda, entonces compraré un refresco. El auto tiene gasolina. Conclusión: Compraré un refresco.

54. Hipótesis: Si el auto tiene gasolina, entonces iré a la tienda. Si voy a la tienda, entonces compararé un refresco. No compro un refresco. Conclusión: El auto no tiene gasolina o la transmisión del auto está defectuosa.

55. Hipótesis: Si Julio puede cantar o Daniel puede jugar, entonces compraré el CD. Julio puede cantar. Compraré el reproductor de CD. Conclusión: Compraré el CD y el reproductor de CD.

56. Hipótesis: Todos en clase tienen una calculadora que grafica. Todos los que tienen calculadora que grafica entienden las funciones trigonométricas. Conclusión: Rafael, que está en la clase, entiende las funciones trigonométricas.

57. Hipótesis: Ken, un miembro de los Titanes, puede batear lejos. Todos los que pueden batear lejos pueden ganar mucho dinero. Conclusión: Algún miembro de los Titanes puede ganar mucho dinero.

58. Hipótesis: Todos en la clase de matemáticas discretas aman las demostraciones. Alguien en la clase de matemáticas discretas nunca ha tomado cálculo. Conclusión: Alguien que ama las demostraciones nunca ha tomado cálculo.

59. Demuestre que el *Modus tollens* (vea la figura 1.5.1) es válido.

60. Demuestre que la Suma (vea la figura 1.5.1) es válida.

61. Demuestre que la Simplificación (vea la figura 1.5.1) es válida.

62. Demuestre que la Conjunción (vea la figura 1.5.1) es válida.

63. Demuestre que el Silogismo Hipotético (vea la figura 1.5.1) es válido.

64. Demuestre que el Silogismo Disyuntivo (vea la figura 1.5.1) es válido.

65. Demuestre que la generalización universal (vea la figura 1.5.2) es válida.

66. Demuestre que la particularización existencial (vea la figura 1.5.2) es válida.

67. Demuestre que la generalización existencial (vea la figura 1.5.2) es válida.

1.6 → Pruebas por resolución†

En esta sección, $a \wedge b$ se escribirá como ab.

Resolución es una técnica de prueba propuesta por J. A. Robinson en 1965 (vea [Robinson]) que depende de una sola regla:

$$\text{Si } p \vee q \text{ y } \neg p \vee r \text{ son ambas verdaderas, entonces } q \vee r \text{ es verdadera.} \tag{1.6.1}$$

La afirmación (1.6.1) se verifica escribiendo la tabla de verdad (vea el ejercicio 1). Como la resolución depende de esta única regla sencilla, es la base de muchos programas de computadora que razonan y prueban teoremas.

En una prueba por resolución, las hipótesis y la conclusión se escriben como **cláusulas**. Una cláusula consiste en términos separados por *o*, donde cada término es una variable o la negación de una variable.

Ejemplo 1.6.1 ▶ La expresión

$$a \vee b \vee \neg c \vee d$$

es una cláusula, ya que los términos a, b, $\neg c$ y d están separados por *o*, y cada término es una variable o la negación de una variable. ◀

Ejemplo 1.6.2 ▶ La expresión

$$xy \vee w \vee \neg z$$

no es una cláusula aunque los términos estén separados por *o*, ya que el término xy tiene dos variables, no una sola. ◀

Ejemplo 1.6.3 ▶ La expresión

$$p \rightarrow q$$

no es una cláusula, ya que los términos están separados por $\rightarrow$. Sin embargo, cada término es una variable. ◀

Una prueba directa por resolución procede aplicando (1.6.1), repetidas veces, a pares de afirmaciones para derivar nuevas afirmaciones hasta llegar a la conclusión. Cuando se aplica (1.6.1), p debe ser una variable sencilla, pero q y r pueden ser expresiones. Observe que cuando se aplica (1.6.1) a cláusulas, el resultado $q \vee r$ es una cláusula. (Como q y r están formadas por términos separados por *o*, donde cada término es una variable o la negación de una variable, $q \vee r$ también consiste en términos separados por *o*, donde cada término es una variable o la negación de una variable.)

Ejemplo 1.6.4 ▶ Se demostrará lo siguiente usando resolución:

$$\begin{array}{rl} 1. & a \vee b \\ 2. & \neg a \vee c \\ 3. & \neg c \vee d \\ \hline & \therefore b \vee d \end{array}$$

Al aplicar (1.6.1) a las expresiones 1 y 2, se deriva

$$4. \quad b \vee c.$$

† Esta sección se puede omitir sin pérdida de continuidad.

Al aplicar (1.6.1) a las expresiones 3 y 4, se obtiene

5. $b \vee d$,

la conclusión deseada. A partir de las hipótesis 1, 2 y 3, se probó la conclusión $b \vee d$. ◀

Algunos casos especiales de (1.6.1) son los siguientes:

$$\begin{array}{l}\text{Si } p \vee q \text{ y } \neg p \text{ son verdaderas, entonces } q \text{ es verdadera.}\\ \text{Si } p \text{ y } \neg p \vee r \text{ son verdaderas, entonces } r \text{ es verdadera.}\end{array} \tag{1.6.2}$$

Ejemplo 1.6.5 ▶ Se demostrará lo siguiente usando resolución:

$$\begin{array}{ll} 1. & a \\ 2. & \neg a \vee c \\ 3. & \underline{\neg c \vee d} \\ & \therefore d \end{array}$$

Al aplicar (1.6.2) a las expresiones 1 y 2, se tiene

4. c.

Al aplicar (1.6.2) a las expresiones 3 y 4, se deriva

5. d,

la conclusión deseada. A partir de las hipótesis 1, 2 y 3, se ha probado la conclusión d. ◀

Si una hipótesis no es una cláusula, debe sustituirse por una expresión equivalente que sea una cláusula o el *y* de cláusulas. Por ejemplo, suponga que una de las hipótesis es $\neg(a \vee b)$. Como la negación se aplica a más de un término, se usa la primera ley de De Morgan (vea el ejemplo 1.2.11)

$$\neg(a \vee b) \equiv \neg a\, \neg b, \qquad \neg(ab) \equiv \neg a \vee \neg b \tag{1.6.3}$$

para obtener una expresión equivalente con la negación aplicada sólo a variables:

$$\neg(a \vee b) \equiv \neg a\, \neg b.$$

Después se sustituye la hipótesis original $\neg(a \vee b)$ por las dos hipótesis $\neg a$ y $\neg b$. Esta sustitución se justifica si se recuerda que las hipótesis individuales h_1 y h_2 son equivalentes a $h_1 h_2$ (vea la definición 1.5.20 y el análisis que le precede). El uso repetido de las leyes de De Morgan dará como resultado cada negación aplicada sólo a una variable.

Una expresión que consiste en términos separados por *o*, donde cada término consiste en el *y* de *varias* variables, puede sustituirse por una expresión equivalente que consiste en el *y* de varias cláusulas usando la equivalencia

$$a \vee bc \equiv (a \vee b)(a \vee c). \tag{1.6.4}$$

En este caso, podemos sustituir la hipótesis individual $a \vee bc$ por las dos hipótesis $a \vee b$ y $a \vee c$. Usando las leyes de De Morgan (1.6.3) y después (1.6.4), podemos obtener hipótesis equivalentes, cada una de las cuales es una cláusula.

Ejemplo 1.6.6 ▶ Se demostrará lo siguiente usando resolución:

$$\begin{array}{ll} 1. & a \vee \neg bc \\ 2. & \underline{\neg(a \vee d)} \\ & \therefore \neg b \end{array}$$

Se usa (1.6.4) para reemplazar la hipótesis 1 con las dos hipótesis

$$a \vee \neg b$$
$$a \vee c.$$

Se usa la primera ley de De Morgan (1.6.3) para sustituir la hipótesis 2 con las dos hipótesis

$$\neg a$$
$$\neg d.$$

el argumento se convierte en

$$\begin{array}{ll} 1. & a \vee \neg b \\ 2. & a \vee c \\ 3. & \neg a \\ 4. & \neg d \\ \hline & \therefore \neg b \end{array}$$

Aplicando (1.6.1) a las expresiones 1 y 3, de inmediato se deriva la conclusión

$$\neg b.$$

◀

En los sistemas de razonamiento automatizado, la prueba por resolución se combina con la prueba por contradicción. Escribimos la conclusión negada como cláusulas y agrega las cláusulas a la hipótesis. Después aplicamos repetidamente (1.6.1) hasta obtener la contradicción.

Ejemplo 1.6.7 ▶

Probamos de nuevo el ejemplo 1.6.4 combinando la resolución con la prueba por contradicción.

Primero se niega la conclusión y se usa la primera ley de De Morgan (1.6.3) para obtener

$$\neg(b \vee d) \equiv \neg b \neg d.$$

Después se agregan las cláusulas $\neg b$ y $\neg d$ a las hipótesis para obtener

$$\begin{array}{ll} 1. & a \vee b \\ 2. & \neg a \vee c \\ 3. & \neg c \vee d \\ 4. & \neg b \\ 5. & \neg d \end{array}$$

Aplicando (1.6.1) a las expresiones 1 y 2, se deriva

$$6. \quad b \vee c.$$

Aplicando (1.6.1) a las expresiones 3 y 6, se deriva

$$7. \quad b \vee d.$$

Aplicando (1.6.1) a las expresiones 4 y 7, se deriva

$$8. \quad d.$$

Ahora se combinan 5 y 8 para dar una contradicción, y la prueba queda completa. ◀

Es posible demostrar que la resolución es *correcta* y la *refutación* queda *completa*. "La resolución es correcta" significa que si la resolución deriva una contradicción de un conjunto de cláusulas, las cláusulas son incongruentes (es decir, el conjunto de cláusulas no es todo cierto). "La resolución es la refutación completa" significa que la resolución será capaz de derivar una contradicción a partir del conjunto de cláusulas incongruentes. Así, si una conclusión se obtiene de un conjunto de hipótesis, la resolución podrá derivar una contradicción a partir de las hipótesis y una negación de la conclusión. Por desgracia, la resolución no dice qué cláusulas combinar para deducir la contradicción. Un reto clave para automatizar un sistema de razonamiento es ayudar a guiar la búsqueda de cláusulas a combinar. Las referencias acerca de la resolución y el razonamiento automatizado son [Gallier; Genesereth; y Wos].

Sugerencias para resolver problemas

Para construir una prueba por resolución, primero se sustituye cualquiera de las hipótesis o la conclusión que no sea una cláusula por una o más cláusulas. Después se reemplazan los pares de hipótesis de la forma $p \vee q$ y $\neg p \vee r$ con $q \vee r$ hasta llegar a la conclusión. Recuerde que es posible combinar la resolución con la prueba por contradicción.

Sección de ejercicios de repaso

1. ¿Qué regla de lógica usa la prueba por resolución?

2. ¿Qué es una cláusula?

3. Explique cómo procede una prueba por resolución.

Ejercicios

1. Escriba la tabla de verdad que demuestra (1.6.1).

Use la resolución para derivar cada combinación en los ejercicios 2 al 6. Sugerencia: En los ejercicios 5 y 6, sustituya $\rightarrow$ y $\leftrightarrow$ con expresiones lógicamente equivalentes que usan o e y.

2.
$$\begin{array}{l} \neg p \vee q \vee r \\ \neg q \\ \underline{\neg r} \\ \therefore \neg p \end{array}$$

3.
$$\begin{array}{l} \neg p \vee r \\ \neg r \vee q \\ \underline{p} \\ \therefore q \end{array}$$

4.
$$\begin{array}{l} \neg p \vee t \\ \neg q \vee s \\ \neg r \vee st \\ \underline{p \vee q \vee r \vee u} \\ \therefore s \vee t \vee u \end{array}$$

5.
$$\begin{array}{l} p \rightarrow q \\ \underline{p \vee q} \\ \therefore q \end{array}$$

6.
$$\begin{array}{l} p \leftrightarrow r \\ \underline{r} \\ \therefore p \end{array}$$

7. Use resolución y prueba por contradicción para demostrar de nuevo los ejercicios 2 al 6.

8. Use resolución y prueba por contradicción para demostrar de nuevo el ejemplo 1.6.6.

1.7 ➜ Inducción matemática

WWW

Suponga que una secuencia de bloques numerados 1, 2, . . . están en una mesa (infinitamente) larga (vea la figura 1.7.1) y que algunos bloques están marcados con una "X". (Todos los bloques visibles en la figura 1.7.1 están marcados). Suponga que

El primer bloque está marcado. **(1.7.1)**

Para toda n, si el bloque n está marcado, entonces el bloque $n + 1$ también está marcado. **(1.7.2)**

Se asegura que (1.7.1) y (1.7.2) implican que todo bloque está marcado.

Se examinan los bloques uno por uno. La afirmación (1.7.1) establece, de modo explícito, que el bloque 1 está marcado. Considere el bloque 2. Como el bloque 1 está marcado, por (1.7.2) (con $n = 1$), el bloque 2 también está marcado. Considere el bloque 3. Como el bloque 2 está marcado, por (1.7.2) (con $n = 2$), el bloque 3 también está marcado. Continuando de esta manera, se demuestra que todo bloque está marcado. Por ejemplo, suponga que se ha verificado que los bloques 1 al 5 están marcados, como se indica en la figura 1.7.1. Para probar que el bloque 6 (que no se ilustra en la figura 1.7.1) está marcado, se observa que como el bloque 5 está marcado, por (1.7.1) (con $n = 5$), el bloque 6 también está marcado.

El ejemplo anterior ilustra el **principio de inducción matemática.** Para mostrar cómo se utiliza la inducción matemática en una forma más profunda, sea S_n la suma de los primeros n enteros positivos:

$$S_n = 1 + 2 + ... + n \qquad \textbf{(1.7.3)}$$

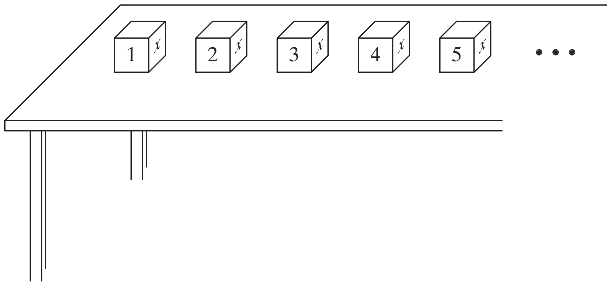


Figura 1.7.1 Bloques numerados en una mesa.

$$
\begin{aligned}
S_1 &= \frac{1(2)}{2} && \times \\
S_2 &= \frac{2(3)}{2} && \times \\
&\vdots \\
S_{n-1} &= \frac{(n-1)n}{2} && \times \\
S_n &= \frac{n(n+1)}{2} && \times \\
S_{n+1} &= \frac{(n+1)(n+2)}{2} && ? \\
&\vdots
\end{aligned}
$$

Figura 1.7.2 Una secuencia de afirmaciones. Las afirmaciones verdaderas están marcadas con $\times$.

Suponga que alguien asegura que

$$S_n = \frac{n(n+1)}{2} \quad \text{para toda } n \geq 1. \tag{1.7.4}$$

En realidad ésta es una secuencia de afirmaciones, a saber,

$$
\begin{aligned}
S_1 &= \frac{1(2)}{2} = 1 \\
S_2 &= \frac{2(3)}{2} = 3 \\
S_3 &= \frac{3(4)}{2} = 6 \\
&\vdots
\end{aligned}
$$

Suponga que cada ecuación verdadera tiene una “$\times$” colocada a su lado (vea la figura 1.7.2). Como la primera ecuación es verdadera, está marcada. Ahora suponga que podemos demostrar que para toda n, si la ecuación n está marcada, entonces la ecuación $n+1$ también está marcada. Entonces, igual que en el ejemplo de los bloques, todas la ecuaciones están marcadas; es decir, todas las ecuaciones son verdaderas y la fórmula (1.7.4) queda verificada.

Debe demostrarse que para toda n, si la ecuación n es verdadera, entonces la ecuación $n+1$ también es verdadera. La ecuación n es

$$S_n = \frac{n(n+1)}{2}. \tag{1.7.5}$$

Suponiendo que esta ecuación es verdadera, debe probarse que la ecuación $n+1$

$$S_{n+1} = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

es verdadera. Según la definición (1.7.3),

$$S_{n+1} = 1 + 2 + \cdots + n + (n+1).$$

Observe que S_n está contenido en S_{n+1}, en el sentido de que

$$S_{n+1} = 1 + 2 + \cdots + n + (n+1) = S_n + (n+1). \tag{1.7.6}$$

Por (1.7.5) y (1.7.6), tenemos

$$S_{n+1} = S_n + (n+1) = \frac{n(n+1)}{2} + (n+1).$$

Como

$$
\begin{aligned}
\frac{n(n+1)}{2} + (n+1) &= \frac{n(n+1)}{2} + \frac{2(n+1)}{2} \\
&= \frac{n(n+1) + 2(n+1)}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2},
\end{aligned}
$$

tenemos

$$S_{n+1} = \frac{(n+1)(n+2)}{2}.$$

Por lo tanto, suponiendo que la ecuación n es cierta, se ha probado que la ecuación $n+1$ es cierta. Se concluye que todas las ecuaciones son ciertas.

La prueba usando inducción matemática consiste en dos pasos. Primero, se verifica que la afirmación correspondiente a $n = 1$ sea verdadera. Segundo, se *supone* que la afirmación n es verdadera y después se *prueba* que la afirmación $n + 1$ también es verdadera. Al probar la afirmación $n + 1$, se puede usar la afirmación n; sin duda, el truco al desarrollar una prueba usando inducción matemática es relacionar la afirmación n con la afirmación $n + 1$.

Ahora se establece formalmente el principio de inducción matemática.

Principio de inducción matemática

Suponga que se tiene una función proposicional S(n) cuyo dominio de discurso es el conjunto de enteros positivos. Suponga que

S(1) *es verdadera;* **(1.7.7)**

para toda $n \geq 1$, *si S(n) es verdadera, entonces S(n* $+ 1$*) es verdadera.* **(1.7.8)**

Entonces S(n) es verdadera para todo entero positivo n.

La condición (1.7.7) en ocasiones recibe el nombre de **paso base** y la condición (1.7.8) el de **paso inductivo**. En adelante, por "inducción" entenderemos "inducción matemática".

Después de definir el factorial de n, se ilustra el principio de inducción matemática con otro ejemplo.

Definición 1.7.1 ▶

El *factorial de n* (o *n factorial*) se define como

$$n! = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 0 \\ n(n-1)(n-2)\cdots 2 \cdot 1 & \text{si } n \geq 1. \end{cases}$$

Esto es, si $n \geq 1$, $n!$ es igual al producto de todos los enteros entre 1 y n inclusive. Como caso especial, 0! se define como 1. ◀

Ejemplo 1.7.2 ▶

$$0! = 1! = 1, \quad 3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6, \quad 6! = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 720$$ ◀

Ejemplo 1.7.3 ▶

Utilice inducción matemática para demostrar que

$$n! \geq 2^{n-1} \quad \text{para toda } n \geq 1. \qquad \textbf{(1.7.9)}$$

Paso base

[Condición (1.7.7)] Debe demostrarse que (1.7.9) es verdadera si $n = 1$. Esto es sencillo ya que $1! = 1 \geq 1 = 2^{1-1}$.

Paso inductivo

[Condición (1.7.8)] Suponemos que la desigualdad es cierta para n; es decir, suponemos que

$$n! \geq 2^{n-1} \qquad \textbf{(1.7.10)}$$

es cierta. Debemos probar que la desigualdad es cierta para $n + 1$; es decir, debemos probar que

$$(n+1)! \geq 2^{n} \qquad \textbf{(1.7.11)}$$

es cierta. Podemos relacionar (1.7.10) y (1.7.11) si observamos que

$$(n+1)! = (n+1)(n!).$$

Ahora bien

$$\begin{aligned}(n+1)! &= (n+1)(n!) \\ &\geq (n+1)2^{n-1} && \text{por (1.7.10)} \\ &\geq 2 \cdot 2^{n-1} && \text{ya que } n+1 \geq 2 \\ &= 2^n.\end{aligned}$$

Por lo tanto, (1.7.11) es cierta. Esto completa el paso inductivo.

Como se verificaron el *paso base* y el paso inductivo, el principio de inducción matemática dice que (1.7.9) es verdadera para todo entero positivo n. ◀

Si se desea verificar que las afirmaciones

$$S(n_0), S(n_0+1), \ldots,$$

donde $n_0 \neq 1$, son verdaderas, debe cambiarse el paso base a

$$S(n_0) \textit{ es verdadera.}$$

Entonces, el paso inductivo se convierte en

para toda $n \geq n_0$, si S(n) es verdadera, entonces S(n+1) es verdadera.

Ejemplo 1.7.4 ▶

Suma geométrica

Use la inducción para demostrar que si $r \neq 1$,

$$a + ar^1 + ar^2 + \cdots + ar^n = \frac{a(r^{n+1}-1)}{r-1} \quad \textbf{(1.7.12)}$$

para toda $n \geq 0$.

La suma en el lado izquierdo se llama **suma geométrica**. En la suma geométrica en la que $a \neq 0$ y $r \neq 0$, la razón de términos adyacentes $[(ar^{i+1})/(ar^i) = r]$ es constante.

Paso base

El paso base, que en este caso se obtiene haciendo $n = 0$, es

$$a = \frac{a(r^1-1)}{r-1},$$

que es verdadera.

Paso inductivo

Suponga que la afirmación (1.7.12) es verdadera para n. Ahora

$$\begin{aligned}a + ar^1 + ar^2 + \cdots + ar^n + ar^{n+1} &= \frac{a(r^{n+1}-1)}{r-1} + ar^{n+1} \\ &= \frac{a(r^{n+1}-1)}{r-1} + \frac{ar^{n+1}(r-1)}{r-1} \\ &= \frac{a(r^{n+2}-1)}{r-1}.\end{aligned}$$

Como se verificaron el paso base y el paso inductivo, el principio de inducción matemática dice que (1.7.12) es verdadera para toda $n \geq 0$. ◀

Como ejemplo del uso de la suma geométrica, si tomamos $a = 1$ y $r = 2$ en (1.7.12), obtenemos la fórmula

$$1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \cdots + 2^n = \frac{2^{n+1}-1}{2-1} = 2^{n+1} - 1.$$

Sin duda el lector ha observado que para probar las fórmulas anteriores, debe contar con las fórmulas correctas desde el principio. Una pregunta razonable es: ¿cómo se obtienen las fórmulas? Existen muchas respuestas a esta pregunta. Una técnica para derivar una fórmula consiste en experimentar con pequeños valores e intentar descubrir un patrón. (Otra técnica se ve en los ejercicios 64 al 67.) Por ejemplo, considere la suma $1+3+\dots+(2n-1)$. La siguiente tabla da los valores de esta suma para $n = 1, 2, 3, 4$.

n	$1 + 3 + \dots + (2n-1)$
1	1
2	4
3	9
4	16

Como la segunda columna consiste en los cuadrados, se conjetura que

$$1 + 3 + \dots + (2n-1) = n^2 \quad \text{para todo entero positivo } n.$$

La conjetura es correcta y la fórmula se puede probar por inducción matemática (vea el ejercicio 1).

En este momento, quizá el lector quiera leer el rincón de solución de problemas que sigue a esta sección. Este cuadro proporciona una exposición amplia y detallada de cómo desarrollar las demostraciones por inducción matemática.

Los ejemplos finales muestran que la inducción no está limitada a probar fórmulas para sumas y verificar desigualdades.

Ejemplo 1.7.5 ▶

Utilice la inducción para demostrar que $5^n - 1$ es divisible entre 4 para toda $n \geq 1$.

Paso base

Si $n = 1$, $5^n - 1 = 5^1 - 1 = 4$, que es divisible entre 4.

Paso inductivo

Se supone que $5^n - 1$ es divisible entre 4. Debemos demostrar que $5^{n+1} - 1$ es divisible entre 4. Se usa el hecho de que si p y q son cada uno divisibles entre k, entonces $p+q$ también es divisible entre k. En este caso, $k = 4$. Se deja la prueba de este hecho como ejercicio (vea el ejercicio 68).

El caso $(n + 1)$ se relaciona con el caso n escribiendo

$$5^{n+1} - 1 = 5^n - 1 + \text{por determinar.}$$

Ahora, por la suposición de inducción, $5^n - 1$ es divisible entre 4. Si “por determinar” también es divisible entre 4, entonces la suma anterior, que es igual a $5^{n+1} - 1$, también será divisible entre 4, y el paso inductivo quedará completo. Debe encontrarse el valor de “por determinar”.

Ahora

$$5^{n+1} - 1 = 5 \cdot 5^n - 1 = 4 \cdot 5^n + 1 \cdot 5^n - 1.$$

Así, “por determinar” es $4 \cdot 5^n$, que es divisible entre 4. De manera formal, el paso inductivo se escribe como sigue.

Por la suposición de inducción, $5^n - 1$ es divisible entre 4 y, como $4 \cdot 5^n$ es divisible entre 4, la suma

$$(5^n - 1) + 4 \cdot 5^n = 5^{n+1} - 1$$

es divisible entre 4.

Como se verificaron el paso base y el paso inductivo, el principio de inducción matemática dice que $5^n - 1$ es divisible entre 4 para toda $n \geq 1$. ◀

Ejemplo 1.7.6 ▶

Un problema de enlosado

Un *tromino derecho*, en adelante llamado sólo *tromino*, es un objeto formado por tres cuadros como el que se observa en la figura 1.7.3. Un tromino es un tipo de poliomino. Desde que Solomon W. Golomb introdujo los poliominos en 1954 (vea [Golomb, 1954]), han sido un tema favorito de matemáticas recreativas. Un *poliomino de orden s* consiste en *s* cuadros unidos en las orillas. Un tromino es un poliomino de orden 3. Tres cuadros en una fila forman sólo otro tipo de poliomino de orden 3. (No se ha encontrado una fórmula sencilla para el número de poliominos de orden *s*). Se han diseñado numerosos problemas usando poliominos (vea [Martin]).

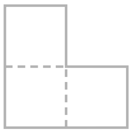


Figura 1.7.3 Un tromino.

Presentamos la prueba inductiva de Golomb (vea [Golomb, 1954]) que indica que si se quita un cuadro de un tablero de $n \times n$, donde n es una potencia de 2, se puede enlosar con trominos el resto de los cuadros (vea la figura 1.7.4). *Enlosar* una figura con trominos significa un cubrimiento exacto de la figura con los trominos sin que ninguno de los trominos se traslape con otro o se extienda fuera de la figura. Un tablero al que le falta un cuadro se llama *tablero deficiente*.

Ahora se usará inducción matemática sobre k para probar que es posible enlosar un tablero deficiente de $2^k \times 2^k$ con trominos.

Paso base

Si $k = 1$, el tablero deficiente de 2×2 es en sí un tromino y por lo tanto se puede enlosar con un tromino.

Paso inductivo

Suponga que se puede enlosar un tablero deficiente de $2^k \times 2^k$. Se debe probar que es posible enlosar un tablero deficiente de $2^{k+1} \times 2^{k+1}$.

Considere un tablero deficiente de $2^{k+1} \times 2^{k+1}$. Divida el tablero en cuatro tableros de $2^k \times 2^k$, como se indica en la figura 1.7.5. Rote el tablero de manera que el cuadro que falta esté en el cuadrante superior izquierdo. Por la suposición inductiva, este tablero arriba a la izquierda de $2^k \times 2^k$ se puede enlosar. Coloque un tromino T en el centro como se ve en la figura 1.7.5, de manera que cada cuadro de T esté en cada uno de otros los cuadrantes. Si se consideran los cuadros cubiertos por T como faltantes, cada cuadrante es un tablero deficiente de $2^k \times 2^k$. De nuevo, por la suposición inductiva, estos tableros se pueden enlosar. Ahora tenemos un enlosado del tablero $2^{k+1} \times 2^{k+1}$. Por el principio de inducción matemática, se concluye que cualquier tablero deficiente de $2^k \times 2^k$ se puede enlosar con trominos, $k = 1, 2, \ldots$.

Si se puede enlosar un tablero deficiente de $n \times n$, donde n no necesariamente es una potencia de 2, entonces el número de cuadros, $n^2 - 1$, debe ser divisible entre 3. [Chu] mostró que el inverso es cierto, excepto cuando n es 5. Con mayor precisión, si $n \neq 5$, cualquier tablero deficiente de $n \times n$ se puede enlosar con trominos si y sólo si 3 es divisor de $n^2 - 1$ (vea los ejercicios 23 y 24, sección 1.8). [Algunos tableros deficientes de 5×5 se pueden enlosar y otros no (vea los ejercicios 29 y 30)].

Es posible modelar algunos problemas de la vida real como problemas de enlosado. Un ejemplo es el *problema de la distribución de VLSI*, el problema de empacar muchos componentes en un chip de computadora (vea [Wong]). (VSLI son las siglas de *very large*

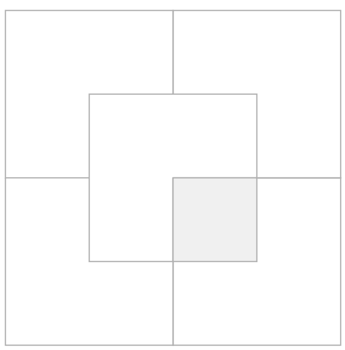


Figura 1.7.4 Enlosado de un tablero deficiente de 4×4 con trominos.

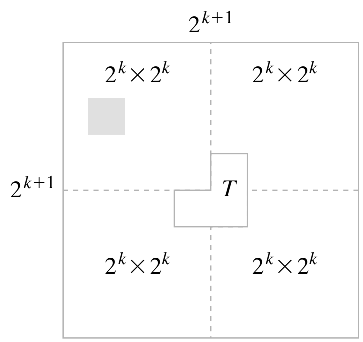


Figura 1.7.5 Empleo de la inducción matemática para enlosar un tablero deficiente de $2^{k+1} \times 2^{k+1}$ con trominos.

scale integration o integración a gran escala). El problema es enlosar un rectángulo de área mínima con los componentes deseados. Algunas veces, los componentes se modelan como rectángulos y figuras en forma de L similares a los trominos. En la práctica, se imponen otras restricciones, como la proximidad de diferentes componentes que deben interconectarse y las restricciones sobre la relación entre la base y la altura del rectángulo resultante. ◀

Un **ciclo invariante** es una afirmación acerca de variables de programa que es verdadera justo antes de que inicie la ejecución del ciclo y también después de cada iteración del ciclo. En particular, un ciclo invariante es verdadero cuando termina el ciclo, punto en el que el invariante nos dice algo acerca del estado de las variables. De manera ideal, esta afirmación dice que el ciclo produce el resultado esperado, es decir, que el ciclo es correcto. Por ejemplo, un ciclo invariante para un ciclo "while" (o mientras)

```
while (condición)
    //cuerpo del ciclo
```

es verdadero justo antes de evaluar la *condición* la primera vez, y también es verdadero cada vez que se ejecuta el cuerpo del ciclo.

Mediante la inducción matemática es posible probar que un invariante tiene el comportamiento deseado. El paso base demuestra que el invariante es verdadero antes de que la condición que controla el ciclo se pruebe la primera vez. El paso inductivo supone que el invariante es verdadero y después demuestra que si la condición que controla el ciclo es verdadera (de manera que el cuerpo del ciclo se ejecuta de nuevo), el invariante es verdadero después de ejecutar el cuerpo del ciclo. Como un ciclo itera un número finito de veces, la forma de la inducción matemática usada aquí demuestra que una secuencia *finita* de afirmaciones es verdadera, en lugar de una secuencia infinita de afirmaciones como en el ejemplo anterior. Sea finita o infinita la secuencia de afirmaciones, los pasos necesarios para la demostración por inducción matemática son los mismos. Se ilustra un ciclo invariante con un ejemplo.

Ejemplo 1.7.7 ▶

Se usa un ciclo invariante para demostrar que cuando el seudocódigo

```
i = 1
fact = 1
while (i < n){
    i = i + 1
    fact = fact * 1
}
```

termina, *fact* es igual a $n!$.

Se demostrará que $fact = i!$ es un invariante para el ciclo "while". Justo antes de que el ciclo "while" comience a ejecutarse, $i = 1$ y $fact = 1$, o sea, $fact = 1!$. Esto prueba el paso base.

Suponga que $fact = i!$. Si $i < n$ es verdadera (y el cuerpo del ciclo se ejecuta otra vez), i se convierte en $i + 1$ y *fact* se convierte en

$$fact * (i + 1) = i! * (i + 1) = (i + 1)!.$$

Se probó el paso inductivo. Por lo tanto, $fact = i!$ es un invariante para el ciclo "while".

El ciclo "while" termina cuando $i = n$. Como $fact = i!$ es un invariante, en este punto, $fact = n!$. ◀

Sugerencias para resolver problemas

Para demostrar que

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n = F(n),$$

donde $F(n)$ es la fórmula para la suma, primero se verifica la ecuación para $n = 1$

$$a_1 = F(1)$$

(Paso base). Éste suele ser directo.

Ahora suponga que la afirmación es verdadera para n; es decir, suponga que

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n = F(n).$$

Sume a_{n+1} a ambos lados para obtener

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n + a_{n+1} = F(n) + a_{n+1}.$$

Por último, demuestre que

$$F(n) + a_{n+1} = F(n+1).$$

Para verificar la ecuación anterior, use álgebra para manejar el lado izquierdo de la ecuación $[F(n) + a_{n+1}]$ hasta obtener $F(n+1)$. *Observe* $F(n+1)$ *para que sepa hacia dónde va.* (¡Es algo como ver la respuesta al final del libro!) Usted demostró que

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_{n+1} = F(n+1),$$

que es el paso inductivo. La demostración queda completa.

Probar una desigualdad se maneja de manera similar. La diferencia es que en lugar de obtener la igualdad $[F(n) + a_{n+1} = F(n+1)$ del análisis anterior], se obtiene una *desigualdad*.

En general, la clave para idear una demostración por inducción es encontrar el caso n "dentro" del caso $n + 1$. Revise el problema del enlosado (ejemplo 1.7.6), que proporciona un ejemplo notable del caso n "dentro" del caso $n + 1$.

Sección de ejercicios de repaso

1. Establezca el principio de inducción matemática.

2. Explique cómo procede una demostración por inducción matemática.

3. Dé una fórmula para la suma $1 + 2 + \ldots + n$.

4. ¿Qué es una suma geométrica? Dé una fórmula para calcularla.

Ejercicios

En los ejercicios 1 al 11, mediante inducción matemática, verifique que cada ecuación es verdadera para todo entero positivo n.

1. $1 + 3 + 5 + \cdots + (2n-1) = n^2$

2. $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \cdots + n(n+1) = \dfrac{n(n+1)(n+2)}{3}$

3. $1(1!) + 2(2!) + \cdots + n(n!) = (n+1)! - 1$

4. $1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

5. $1^2 - 2^2 + 3^2 - \cdots + (-1)^{n+1}n^2 = \dfrac{(-1)^{n+1}n(n+1)}{2}$

6. $1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = \left[\dfrac{n(n+1)}{2}\right]^2$

7. $\dfrac{1}{1 \cdot 3} + \dfrac{1}{3 \cdot 5} + \dfrac{1}{5 \cdot 7} + \cdots + \dfrac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \dfrac{n}{2n+1}$

8. $\dfrac{1}{2 \cdot 4} + \dfrac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 6} + \dfrac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8} + \cdots + \dfrac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2n+2)} = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n+1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2n+2)}$

9. $\dfrac{1}{2^2-1} + \dfrac{1}{3^2-1} + \cdots + \dfrac{1}{(n+1)^2-1} = \dfrac{3}{4} - \dfrac{1}{2(n+1)} - \dfrac{1}{2(n+2)}$

★*10.* $\cos x + \cos 2x + \cdots + \cos nx = \dfrac{\cos[(x/2)(n+1)]\operatorname{sen}(nx/2)}{\operatorname{sen}(x/2)}$

siempre que $\operatorname{sen}(x/2) \neq 0$.

★11. $1 \operatorname{sen} x + 2 \operatorname{sen} 2x + \cdots + n \operatorname{sen} nx = \dfrac{\operatorname{sen}[(n+1)x]}{4\operatorname{sen}^2(x/2)} - \dfrac{(n+1)\cos[(2n+1)x/2]}{2\operatorname{sen}(x/2)}$

siempre que $\operatorname{sen}(x/2) \neq 0$.

En los ejercicios 12 al 17, use inducción para verificar la desigualdad.

12. $\dfrac{1}{2n} \le \dfrac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2n)}, \quad n = 1, 2, \ldots$

★13. $\dfrac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2n)} \le \dfrac{1}{\sqrt{n+1}}, \quad n = 1, 2, \ldots$

14. $2n + 1 \le 2^n, \quad n = 3, 4, \ldots$

★*15.* $2^n \ge n^2, \quad n = 4, 5, \ldots$

★**16.** $(a_1 a_2 \cdots a_{2^n})^{1/2^n} \leq \dfrac{a_1 + a_2 + \cdots + a_{2^n}}{2^n}$, $n = 1, 2, \ldots,$ y las a_i son números positivos.

17. $(1 + x)^n \geq 1 + nx$, para $x \geq -1$ y $n \geq 1$

18. Use la suma geométrica para probar que

$$r^0 + r^1 + \cdots + r^n < \frac{1}{1 - r}$$

para toda $n \geq 0$ y $0 < r < 1$.

★**19.** Demuestre que

$$1 \cdot r^1 + 2 \cdot r^2 + \cdots + nr^n < \frac{r}{(1 - r)^2}$$

para toda $n \geq 1$ y $0 < r < 1$. *Sugerencia:* Use el resultado del ejercicio anterior, compare la suma de los términos en

$$\begin{array}{llllll}
r & r^2 & r^3 & r^4 & \cdots & r^n \\
r^2 & r^3 & r^4 & \cdots & r^n & \\
r^3 & r^4 & \cdots & r^n & & \\
r^4 & \cdots & & & & \\
\vdots & \vdots & & & & \\
 & r^n & & & & \\
r^n & & & & &
\end{array}$$

en la diagonal ($\swarrow$) con la suma de los términos por columna.

20. Pruebe que

$$\frac{1}{2^1} + \frac{2}{2^2} + \frac{3}{2^3} + \cdots + \frac{n}{2^n} < 2$$

para toda $n \geq 1$.

En los ejercicios 21 al 24, use la inducción para probar la afirmación.

21. $7^n - 1$ es divisible entre 6, para toda $n \geq 1$.

22. $11^n - 6$ es divisible entre 5, para toda $n \geq 1$.

23. $6 \cdot 7^n - 2 \cdot 3^n$ es divisible entre 4, para toda $n \geq 1$.

★***24.*** $3^n + 7^n - 2$ es divisible entre 8, para toda $n \geq 1$.

25. Experimentando con valores pequeños de n, adivine una fórmula para la suma

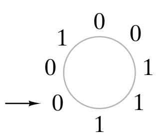
$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \cdots + \frac{1}{n(n + 1)};$$

después use inducción para verificar su fórmula.

26. Use inducción para demostrar que n líneas rectas en el plano lo dividen en $(n^2 + n + 2)/2$ regiones. Suponga que no hay dos líneas paralelas y que no hay tres líneas con un punto en común.

27. Demuestre que las regiones del ejercicio anterior pueden colorearse de rojo y verde de modo que no haya dos regiones que comparten una orilla que sean del mismo color.

28. Dados n ceros y n unos distribuidos de cualquier manera alrededor de un círculo (vea la figura siguiente), demuestre, por inducción sobre n, que es posible comenzar en algún número y proceder en el sentido de las manecillas del reloj alrededor del círculo hasta la posición original de inicio, de manera que en cualquier punto durante el ciclo se hayan visto al menos la misma cantidad de ceros que de unos. En la siguiente figura, un punto de inicio posible está marcado con una flecha.



29. Dé un enlosado de un tablero de 5×5 con trominos en los que falte el cuadro superior izquierdo.

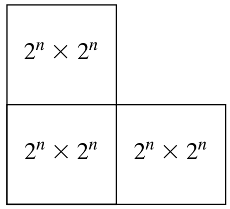
30. Demuestre un tablero deficiente de 5×5 que es imposible enlosar con trominos. Explique por qué no se puede enlosar.

31. Demuestre que cualquier tablero de $(2i) \times (3j)$, donde i y j son enteros positivos, sin cuadro faltante, se puede enlosar con trominos.

★***32.*** Demuestre que cualquier tablero deficiente de 7×7 se puede enlosar con trominos.

33. Demuestre que cualquier tablero deficiente de 11×11 se puede enlosar con trominos. *Sugerencia:* Subdivida el tablero en tableros que se traslapan de 7×7 y 5×5 y dos tableros de 6×4. Después remítase a los ejercicios 29, 31 y 32.

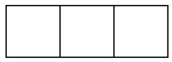
34. Este ejercicio y el siguiente se deben a Anthony Quass. Una *forma-L* de $2^n \times 2^n$, $n \geq 0$ es una figura de la forma



sin cuadros faltantes. Demuestre que cualquier forma-L de $2^n \times 2^n$ se puede enlosar con trominos.

35. Use el ejercicio anterior para dar una prueba diferente de que cualquier tablero deficiente de $2^n \times 2^n$ se puede enlosar con trominos.

Un tromino recto es *un objeto hecho de tres cuadros en fila:*



36. ¿Qué tableros deficientes de 4×4 se pueden enlosar con trominos rectos? *Sugerencia:* Numere los cuadros del tablero de 4×4, de izquierda a derecha y de arriba abajo: 1, 2, 3, 1, 2, 3, etcétera. Observe que si existe un enlosado, cada tromino recto cubre exactamente un 2 y exactamente un 3.

37. ¿Qué tableros deficientes de 5×5 se pueden enlosar con trominos rectos?

38. ¿Qué tableros deficientes de 8×8 se pueden enlosar con trominos rectos?

39. Use un ciclo invariante para probar que cuando el seudocódigo

```
i=1
pow=1
while(i ≤ n){
   pow = pow * a
   i=i+1
}
```

termina, *pow* es igual a a^n.

40. Pruebe que, después de que termina el siguiente seudocódigo, $a[h] = val$; para toda p, $i \leq p < h$, $a[p] < val$; y para toda p, $h < p \leq j$, $a[p] \geq val$. En particular, *val* está en la posición en el arreglo $a[i], \ldots, a[j]$ donde estaría si el arreglo fuera ordenado.

```
val = a[i]
h = i
for k = i + 1 to j
   if (a[k] < val) {
```

```
      h = h + 1
      swap(a[h], a[k])
    }
  swap(a[i], a[h])
```

Sugerencia: Use el ciclo invariante: para toda p, $i < p \leq h$, $a[p] < val$; y para toda p, $h < p < k$, $a[p] \geq val$. (Un dibujo ayuda).

Esta técnica se llama *particionar*. Esta versión particular se debe a Nico Lomuto. Las particiones se emplean para encontrar el k-ésimo, elemento más pequeño en cualquier arreglo y para construir un algoritmo para ordenar llamado *quicksort*.

Un septomino en 3D es un *cubo de tres dimensiones de* $2 \times 2 \times 2$ *sin una esquina de* $1 \times 1 \times 1$. Un cubo deficiente es *un cubo de* $k \times k \times k$ *sin un cubo de* $1 \times 1 \times 1$.

41. Pruebe que un cubo deficiente de $2^n \times 2^n \times 2^n$ se puede enlosar con septominos en 3D.

42. Demuestre que si un cubo deficiente de $k \times k \times k$ se puede enlosar con septominos en 3D, entonces 7 divide uno de los $k-1$, $k-2$, $k-4$.

43. Suponga que $S_n = (n + 2)(n - 1)$ se propone (incorrectamente) como fórmula para

$$2 + 4 + \ldots + 2n.$$

a) Demuestre que el paso inductivo se satisface pero que el paso base falla.

★ *b)* Si S'_n es una expresión arbitraria que satisface el paso inductivo, ¿qué forma debe tener S'_n?

★ **44.** ¿Qué está mal en el siguiente argumento, que se supone que prueba que cualesquiera dos enteros positivos son iguales?

Se usa inducción sobre n para "probar" que si a y b son enteros positivos y $n = \text{máx}\{a, b\}$, entonces $a = b$.

Paso base $(n = 1)$. Si a y b son enteros positivos y $1 = \text{máx}\{a, b\}$, debe tenerse $a = b = 1$.

Paso inductivo Suponga que si a' y b' son enteros positivos y $n = \text{máx}\{a', b'\}$, entonces $a' = b'$. Suponga que a y b son enteros positivos y que $n + 1 = \text{máx}\{a, b\}$. Ahora $n = \text{máx}\{a–1, b–1\}$. Por la hipótesis inductiva, $a–1 = b–1$. Por lo tanto, $a = b$.

Como se verificaron el paso base y el paso inductivo, por el principio de inducción matemática, ¡cualesquiera dos enteros positivos son iguales!

45. ¿Qué está mal en la siguiente "prueba" de que

$$\frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \cdots + \frac{n}{n+1} \neq \frac{n^2}{n+1}$$

para toda $n \geq 2$?

Suponga, a manera de contradicción, que

$$\frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \cdots + \frac{n}{n+1} = \frac{n^2}{n+1}. \qquad \textbf{(1.7.13)}$$

Entonces también

$$\frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \cdots + \frac{n}{n+1} + \frac{n+1}{n+2} = \frac{(n+1)^2}{n+2}.$$

Se podría probar la afirmación (1.7.13) por inducción. En particular, el paso inductivo daría

$$\left(\frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \cdots + \frac{n}{n+1}\right) + \frac{n+1}{n+2} = \frac{n^2}{n+1} + \frac{n+1}{n+2}.$$

Por lo tanto,

$$\frac{n^2}{n+1} + \frac{n+1}{n+2} = \frac{(n+1)^2}{n+2}.$$

Al multiplicar cada lado de esta ecuación por $(n + 1)(n + 2)$ se tiene

$$n^2(n+2) + (n+1)^2 = (n+1)^3.$$

Esta última ecuación se rescribe como

$$n^3 + 2n^2 + n^2 + 2n + 1 = n^3 + 3n^2 + 3n + 1$$

o

$$n^3 + 3n^2 + 2n + 1 = n^3 + 3n^2 + 3n + 1,$$

lo cual es una contradicción. Por lo tanto,

$$\frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \cdots + \frac{n}{n+1} \neq \frac{n^2}{n+1},$$

como se aseguró.

46. Use inducción matemática para probar que

$$\frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \cdots + \frac{n}{n+1} < \frac{n^2}{n+1}$$

para toda $n \geq 2$. Esta desigualdad da una prueba correcta de la afirmación del ejercicio anterior.

En los ejercicios 47 al 51, suponga que $n > 1$ *personas se colocan en un campo (plano euclidiano) de manera que cada una tiene un vecino más cercano único. Aún más, suponga que cada persona tiene un pastel que lanza a su vecino más cercano. Un sobreviviente es una persona a la que no le pega un pastel.*

47. Proporcione un ejemplo para mostrar que si n es par, puede no haber un sobreviviente.

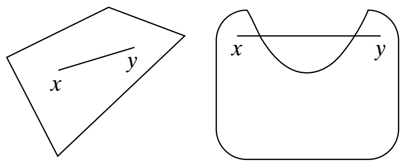
48. Dé un ejemplo para demostrar que puede haber más de un sobreviviente.

★ **49.** [Carmony] Use inducción sobre n para demostrar que si n es impar, siempre habrá al menos un sobreviviente.

50. Pruebe o desapruebe: Si n es impar, una de las dos personas más separadas es un sobreviviente.

51. Pruebe o desapruebe: Si n es impar, la persona que lanza un pastel la mayor distancia es un sobreviviente.

Los ejercicios 52 al 55 manejan conjuntos convexos planos. Un conjunto convexo plano, *en adelante abreviado "conjunto convexo", es un conjunto no vacío X en el plano que tiene la propiedad de que si x y y son cualesquiera dos puntos en X, el segmento de recta de x a y también está en X. Las siguientes figuras ilustran esto.*



conjunto convexo   conjunto no convexo

52. Pruebe que si X y Y son conjuntos convexos y $X \cap Y$ (los puntos comunes a X y Y) es no vacío, $X \cap Y$ es un conjunto convexo.

★ **53.** Suponga que X_1, X_2, X_3, X_4 son conjuntos convexos, cada tres de los cuales tienen un punto en común. Pruebe que los cuatro tienen un punto en común.

★ **54.** *Pruebe el Teorema de Helly:* Suponga que $X_1, X_2, \ldots, X_n$, $n \geq 4$, son conjuntos convexos, cada tres de los cuales tienen un punto en común. Pruebe que los n conjuntos tienen un punto en común.

55. Suponga que $n \geq 3$ puntos en el plano tienen la propiedad de que cada tres de ellos están contenidos en un círculo de radio 1. Pruebe que existe un círculo de radio 1 que contiene a todos los puntos.

56. Si a y b son números reales con $a < b$, un *intervalo abierto* (a, b) es el conjunto de números reales x tales que $a < x < b$. Pruebe que si $I_1, \ldots, I_n$ es un conjunto de $n \geq 2$ intervalos abiertos tales que cada par tiene una intersección no vacía, entonces

$$I_1 \cap I_2 \cap \cdots \cap I_n$$

(los puntos comunes a $I_1, \ldots, I_n$) es no vacío.

Flavius Josephus era un soldado e historiador judío que vivió en el siglo I (vea [Graham, 1994; Schumer]). Era uno de los líderes de una revuelta judía contra Roma en el año 66. El siguiente año, se encontraba entre un grupo de soldados atrapados que decidieron suicidarse antes de que los capturaran. Una versión de la historia dice que, antes que ser capturados, formaron un círculo y procedieron a matar a cada tercera persona alrededor del círculo. Josephus, que tenía conocimientos de matemáticas discretas, se dio cuenta dónde debían pararse él y un amigo para evitar que los mataran.

Los ejercicios 57 al 63 se refieren a una variante del problema de Josephus en el que se elimina a una persona cada dos. Se supone que n personas se colocan en un círculo y se numeran 1, 2, . . . , n en el sentido de las manecillas del reloj. Se elimina 2, se elimina 4, etcétera, hasta que hay un sobreviviente, denotado por J(n).

57. Calcule $J(4)$.

58. Calcule $J(6)$.

59. Calcule $J(10)$.

60. Use la inducción para demostrar que $J(2^i) = 1$ para toda $i \geq 1$.

61. Con un valor de $n \geq 2$, sea 2^i la potencia más grande de 2 tal que $2^i \leq n$. (Ejemplos: Si $n = 10$, $i = 3$. Si $n = 16$, $i = 4$.) Sea $j = n - 2^i$. (Después de restar de n, 2^i, la potencia más grande de 2 menor o igual que n, j es lo que queda.) Usando el resultado del ejercicio 60 o de otra manera, pruebe que

$$J(n) = 2j + 1.$$

62. Use el resultado del ejercicio 61 para calcular $J(1000)$.

63. Use el resultado del ejercicio 61 para calcular J (100,000).

Si $a_1, a_2, \ldots$ es una secuencia, se define el operador diferencia Δ como

$$\Delta a_n = a_{n+1} - a_n.$$

La fórmula del ejercicio 64 se utiliza en ocasiones para encontrar *una fórmula para una suma en lugar de usar la inducción para* probar *una fórmula para la suma (vea los ejercicios 65 al 67).*

64. Suponga que $\Delta a_n = b_n$. Demuestre que

$$b_1 + b_2 + \cdots + b_n = a_{n+1} - a_1.$$

Esta fórmula es análoga a la fórmula de cálculo $\int_c^d f(x)\,dx = g(d) - g(c)$, donde $Dg = f$ (D es el operador derivada). En la fórmula de cálculo, la suma se sustituye por la integral y Δ se sustituye por la derivada.

65. Sea $a_n = n^2$, calcule Δa_n. Use el ejercicio 64 para encontrar una fórmula para

$$1 + 2 + 3 + \ldots + n.$$

66. Use el ejercicio 64 par encontrar una fórmula para

$$1(1!) + 2(2!) + \cdots + n(n!).$$

(Compare con el ejercicio 3).

67. Use el ejercicio 64 para encontrar una fórmula para

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)}.$$

(Compare con el ejercicio 25).

68. Pruebe que si p y q son divisibles entre k, entonces $p + q$ es divisible entre k.

Rincón de solución de problemas — Inducción matemática

Problema

Defina

$$H_k = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{k} \qquad \textbf{(1)}$$

para toda $k \geq 1$. Los números $H_1, H_2, \ldots$ se llaman *números armónicos*. Pruebe que

$$H_{2^n} \geq 1 + \frac{n}{2} \qquad \textbf{(2)}$$

Para toda $n \geq 0$.

Cómo atacar el problema

Con frecuencia es una buena idea comenzar a atacar un problema viendo algunos ejemplos concretos de las expresiones que se consideran. Veamos H_k para algún valor pequeño de k. El valor más pequeño de k para el que H_k está definida es $k = 1$. En este caso, el último término $1/k$ en la definición de H_k es igual a $1/1 = 1$. Como el primero y último términos coinciden,

$$H_1 = 1.$$

Para $k = 2$, el último término $1/k$ en la definición de H_k es igual a 1/2, entonces

$$H_2 = 1 + \frac{1}{2}.$$

De manera similar, se encuentra que

$$H_3 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3},$$

$$H_4 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4}.$$

Se observa que H_1 aparece como el primer término de H_2, H_3 y H_4, que H_2 aparece como los dos primeros términos de H_3 y H_4, y que H_3 aparece como los tres primeros términos de H_4. En general, H_m aparece como los m primeros términos de H_k si $m \leq k$. Esta observación será útil más adelante porque el paso inductivo en una prueba por inducción debe relacionar las instancias más pequeñas de un problema con las instancias más grandes del problema.

En general, es una buena estrategia para retrasar la combinación de términos y simplificar lo más tarde posible; ésta es, por ejemplo, la razón para dejar H_4 como la suma de cuatro términos en lugar de escribir $H_4 = 25/12$. Como se dejó H_4 como la suma de cuatro términos, se pudo ver que cada una de H_1, H_2 y H_3 aparece en la expresión para H_4.

Cómo encontrar una solución

El paso base consiste en probar la afirmación que se da para el valor más pequeño de n, que aquí es $n = 0$. Para $n = 0$, la desigualdad (2) que debemos probar se convierte en

$$H_{2^0} \geq 1 + \frac{0}{2} = 1.$$

Se ha observado que $H_1 = 1$. Así, la desigualdad (2) es verdadera cuando $n = 0$; de hecho, la desigualdad es una igualdad. (Recuerde que por definición, si $x = y$ es verdadera, entonces $x \geq y$ también es verdadera).

Sigamos al paso inductivo. Es una buena idea escribir lo que se supone (aquí, el caso n).

$$H_{2^n} \geq 1 + \frac{n}{2}, \tag{3}$$

y lo que se debe probar (aquí el caso $n + 1$),

$$H_{2^{n+1}} \geq 1 + \frac{n+1}{2}. \tag{4}$$

También es una buena idea escribir las fórmulas para cualquier expresión que ocurra. Usando la ecuación (1), se escribe

$$H_{2^n} = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2^n} \tag{5}$$

y

$$H_{2^{n+1}} = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2^{n+1}}.$$

No es tan evidente de la última ecuación que $H_2{}^n$ aparece como los primeros 2^n términos de $H_2{}^{n+1}$. Escribamos la última ecuación como

$$H_{2^{n+1}} = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^n+1} + \cdots + \frac{1}{2^{n+1}} \tag{6}$$

para hacer claro que H_{2n} aparece como los primeros 2^n términos de H_{2n+1}.

Por claridad, se escribe el término que sigue a $1/2^n$. Observe que el denominador aumenta en 1, por lo que el término que sigue a $1/2^n$ es $1/(2^n + 1)$. Además, observe que hay una gran diferencia entre $1/(2^n + 1)$, el término que sigue a $1/2^n$, y $1/2^{n+1}$, el último término de la ecuación (6).

Usando las ecuaciones (5) y (6) se puede relacionar $H_2{}^n$ con $H_2{}^{n+1}$ explícitamente escribiendo

$$H_{2^{n+1}} = H_{2^n} + \frac{1}{2^n+1} + \cdots + \frac{1}{2^{n+1}}. \tag{7}$$

Combinando (3) y (7) se obtiene

$$H_{2^{n+1}} \geq 1 + \frac{n}{2} + \frac{1}{2^n+1} + \cdots + \frac{1}{2^{n+1}}. \tag{8}$$

Esta desigualdad muestra que $H_2{}^{n+1}$ es mayor o igual que

$$1 + \frac{n}{2} + \frac{1}{2^n+1} + \cdots + \frac{1}{2^{n+1}},$$

pero nuestra meta (4) es demostrar que H_{2n+1} es mayor o igual que $1 + (n + 1)/2$. Se logrará la meta si se demuestra que

$$1 + \frac{n}{2} + \frac{1}{2^n+1} + \cdots + \frac{1}{2^{n+1}} \geq 1 + \frac{n+1}{2}.$$

En general, para probar una desigualdad, se sustituyen los términos en la expresión más grande con términos más pequeños de manera que la expresión que se obtiene sea igual a la expresión más pequeña; o se sustituyen términos en la expresión más pequeña con términos más grandes de modo que la expresión resultante sea igual a la expresión más grande. Se sustituirá cada término de la suma

$$\frac{1}{2^n+1} + \cdots + \frac{1}{2^{n+1}}$$

con el término más pequeño $1/2^{n+1}$ en la suma. Se obtiene

$$\frac{1}{2^n+1} + \cdots + \frac{1}{2^{n+1}} \geq \frac{1}{2^{n+1}} + \cdots + \frac{1}{2^{n+1}}.$$

Como existen 2^n términos en la última suma, cada uno igual a $1/2^{n+1}$, la desigualdad anterior se rescribe como

$$\begin{aligned} \frac{1}{2^n+1} + \cdots + \frac{1}{2^{n+1}} &\geq \frac{1}{2^{n+1}} + \cdots + \frac{1}{2^{n+1}} \\ &= 2^n \frac{1}{2^{n+1}} = \frac{1}{2}. \end{aligned} \tag{9}$$

Combinando (8) y (9),

$$H_{2^{n+1}} \geq 1 + \frac{n}{2} + \frac{1}{2} = 1 + \frac{n+1}{2}.$$

Se tiene el resultado deseado y el paso inductivo queda completo.

Solución formal

La solución formal se escribe como sigue.

Paso base ($n = 0$).

$$H_{2^0} = 1 \geq 1 = 1 + \frac{0}{2}.$$

Paso inductivo Se supone (2). Ahora

$$\begin{aligned} H_{2^{n+1}} &= 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^n+1} + \cdots + \frac{1}{2^{n+1}} \\ &= H_{2^n} + \frac{1}{2^n+1} + \cdots + \frac{1}{2^{n+1}} \\ &\geq 1 + \frac{n}{2} + \frac{1}{2^{n+1}} + \cdots + \frac{1}{2^{n+1}} \\ &= 1 + \frac{n}{2} + 2^n \frac{1}{2^{n+1}} \\ &= 1 + \frac{n}{2} + \frac{1}{2} = 1 + \frac{n+1}{2}. \end{aligned}$$

Resumen de técnicas de solución de problemas

- Observe ejemplos concretos de las expresiones bajo consideración, en general, para valores pequeños de las variables.
- Busque expresiones para valores pequeños de n que aparezcan dentro de las expresiones para valores más grandes de n. En particular, el paso inductivo depende de relacionar el caso n con el caso $n + 1$.

- Retrase la combinación y simplificación de términos lo más posible para ayudar a descubrir las relaciones entre las expresiones.
- Escriba completos los casos específicos para probar, en particular, el valor más pequeño de n para el paso base, el caso n que se supone en el paso inductivo, y el caso $n + 1$ para probar el paso inductivo. Escriba las fórmulas para las diferentes expresiones que surjan.
- Para probar una desigualdad, sustituya términos en la expresión más grande con términos más pequeños, de manera que la expresión que obtenga sea igual a la expresión más pequeña, o sustituya términos en la expresión más pequeña con términos mayores, de modo que la expresión obtenida sea igual a la expresión más grande.

Comentarios

La serie

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots,$$

que surge en cálculo, se llama *serie armónica*. La desigualdad (2) muestra que los números armónicos aumentan sin límite. En terminología de cálculo, la serie armónica diverge.

Ejercicios

1. Pruebe que $H_{2^n} \le 1 +$ para toda $n \ge 0$.

2. Pruebe que

$$H_1 + H_2 + \cdots + H_n = (n+1)H_n - n$$

para toda $n \ge 1$.

3. Pruebe que

$$H_n = H_{n+1} - \frac{1}{n+1}$$

para toda $n \ge 1$.

4. Pruebe que

$$1 \cdot H_1 + 2 \cdot H_2 + \cdots + nH_n = \frac{n(n+1)}{2}H_{n+1} - \frac{n(n+1)}{4}$$

para toda $n \ge 1$.

1.8 ➜ Forma fuerte de inducción y la propiedad del buen orden

En el paso inductivo de la inducción matemática presentado en la sección 1.7, se supone que la afirmación n es cierta y después se prueba que la afirmación $n + 1$ es cierta. En otras palabras, para probar que una afirmación es verdadera (afirmación $n + 1$), se supone la verdad de su predecesor inmediato (afirmación n). En algunos casos en el paso inductivo, para probar que una afirmación es verdadera, resulta útil suponer la verdad de *todas* las afirmaciones precedentes (no sólo del predecesor inmediato). La **forma fuerte de inducción matemática** permite suponer la verdad de todas las afirmaciones precedentes. Siguiendo la convención usual, la afirmación que se va a probar se denota por n en lugar de $n + 1$. Se establecerá de manera formal la forma fuerte de inducción matemática.

Forma fuerte de inducción matemática

Suponga que se tiene una función proposicional $S(n)$ cuyo dominio de discurso es el conjunto de enteros mayores o iguales que n_0. Suponga que

$S(n_0)$ es verdadera;
para toda $n > n_0$, si $S(k)$ es verdadera para toda k, $n_0 \le k < n$, entonces $S(n)$ es verdadera.

Entonces $S(n)$ es verdadera para todo entero $n \ge n_0$.

Las dos formas de inducción matemática son lógicamente equivalentes (vea el ejercicio 29).

Se presentarán varios ejemplos que ilustran el uso de la forma fuerte de inducción matemática.

Ejemplo 1.8.1 ▶

Utilice inducción matemática para demostrar que el importe postal de 4 centavos o más se puede lograr usando sólo timbres de 2 y 5 centavos.

Antes de dar una demostración formal, se analiza la idea de la prueba por inducción matemática. Considere el paso inductivo, donde se quiere probar que el importe de n centavos se puede lograr sólo con timbres de 2 y 5 centavos. Sería en particular sencillo probar esta afirmación si se pudiera suponer que se puede lograr un importe de $n – 2$ centavos. Entonces, con sólo sumar un timbre de 2 centavos se tendría el importe de n centavos. ¡Qué sencillo! Si usamos la forma fuerte de inducción matemática, *se puede* suponer la verdad de la afirmación para toda $k < n$. En particular, se supone la verdad de la afirmación para $k = n - 2$. Así, la forma fuerte de inducción matemática permite dar una demostración correcta basada en el razonamiento informal.

Existe un punto sutil al que debe ponerse atención. Se están considerando sólo importes de 4 centavos o más. Entonces, cuando $n = 5$, $n - 2$ no es un valor válido; esto es, como $n - 2 < 4$, no se puede suponer que se logrará un importe de $n - 2$ centavos. Por lo tanto, además del caso $n = 4$, debe verificarse explícitamente el caso $n = 5$. Sólo cuando $n \geq 6$, $n - 2$ es válido. Así, deben verificarse de manera explícita los casos $n = 4$ y $n = 5$, que ahora se convierten en los pasos base.

Pasos base ($n = 4$, $n = 5$)

Se pueden reunir importes de 4 centavos usando dos timbres de 2 centavos. Se logran importes de 5 centavos usando un timbre de 5 centavos. El paso base queda verificado.

Paso inductivo

Se supondrá que $n \geq 6$ y que el importe de k centavos o más se puede lograr usando sólo timbres de 2 y 5 centavos para $4 \leq k < n$.

Por la suposición de inducción, se puede lograr un importe de $n - 2$ centavos. Se agrega un timbre de 2 centavos para reunir el importe de n centavos. El paso inductivo queda completo. ◀

Ejemplo 1.8.2 ▶

Cuando un elemento de una secuencia se define en términos de alguno de sus predecesores, la forma fuerte de inducción matemática resultará útil para probar una propiedad de la secuencia. Por ejemplo, suponga que la secuencia $c_1, c_2, \ldots$ está definida por las ecuaciones†

$$c_1 = 0, \qquad c_n = c_{\lfloor n/2 \rfloor} + n \quad \text{para toda } n > 1.$$

Como ejemplos,

$$\begin{aligned}
c_2 &= c_{\lfloor 2/2 \rfloor} + 2 = c_{\lfloor 1 \rfloor} + 2 = c_1 + 2 = 0 + 2 = 2,\\
c_3 &= c_{\lfloor 3/2 \rfloor} + 3 = c_{\lfloor 1.5 \rfloor} + 3 = c_1 + 3 = 0 + 3 = 3,\\
c_4 &= c_{\lfloor 4/2 \rfloor} + 4 = c_{\lfloor 2 \rfloor} + 4 = c_2 + 4 = 2 + 4 = 6,\\
c_5 &= c_{\lfloor 5/2 \rfloor} + 5 = c_{\lfloor 2.5 \rfloor} + 5 = c_2 + 5 = 2 + 5 = 7.
\end{aligned}$$

Se usa la inducción fuerte para probar que

$$c_n < 4n \qquad \text{para toda } n \geq 1.$$

Paso base ($n = 1$)

$$c_1 = 0 < 4 = 4 \cdot 1.$$

El paso base queda verificado.

Paso inductivo

Se supone que

$$c_2 < 4k$$

para toda $k < n$, y se prueba que

$$c_n < 4n.$$

---

† El piso de x, $\lfloor x \rfloor$, es el entero más grande menor o igual que x (vea la sección 2.2). De manera informal, se está "redondeando hacia abajo". Ejemplos: $\lfloor 2.3 \rfloor = 2$, $\lfloor 5 \rfloor = 5$, $\lfloor -2.7 \rfloor = -3$

Observe que $\lfloor n/2 \rfloor < n$. Por lo tanto, con $k = \lfloor n/2 \rfloor$, por la suposición de inducción

$$c_{\lfloor n/2 \rfloor} = c_k < 4k = 4\lfloor n/2 \rfloor.$$

Ahora

$$c_n = c_{\lfloor n/2 \rfloor} + n < 4\lfloor n/2 \rfloor + n \le 4(n/2) + n = 3n < 4n;$$

y el paso inductivo queda completo. ◀

Ejemplo 1.8.3 ▶

Suponga que se insertan paréntesis y después se multiplican los n números $a_1a_2 \ldots a_n$. Por ejemplo, si $n = 4$, podrían insertarse paréntesis como se muestra:

$$(a_1a_2)(a_3a_4). \tag{1.8.1}$$

Aquí, primero se multiplicaría a_1 por a_2 para obtener a_1a_2 y a_3 por a_4 para obtener a_3a_4. Después, se multiplicaría a_1a_2 por a_3a_4 para obtener $(a_1a_2)(a_3a_4)$. Note que el número de multiplicaciones es tres. Pruebe que si se insertan paréntesis de cualquier manera y después se multiplican los n números $a_1a_2 \ldots a_n$, se realizan $n - 1$ multiplicaciones.

Se usará la inducción fuerte para probar el resultado.

Paso base ($n = 1$)

Se necesitan 0 multiplicaciones para calcular a_1. Esto verifica el paso base.

Paso inductivo

Se supone que para toda $k < n$ toma $k - 1$ multiplicaciones calcular el producto de k números si se insertan paréntesis de cualquier manera. Debe probarse que se necesitan n multiplicaciones para calcular el producto $a_1a_2 \ldots a_n$ si se insertan paréntesis de cualquier manera.

Suponga que se insertan paréntesis en el producto $a_1a_2 \ldots a_n$. Considere la multiplicación final, que se ve como

$$(a_1 \cdots a_t)(a_{t+1} \cdots a_n),$$

para alguna $t < n$. [Por ejemplo, en la ecuación (1.8.1), $t = 2$]. Existen $t < n$ términos en el primer conjunto de paréntesis y $n - t < n$ términos en el segundo conjunto de paréntesis. Por la suposición inductiva, se requieren $t - 1$ multiplicaciones para calcular $a_1 \ldots a_t$ y $n - t - 1$ multiplicaciones para calcular $a_{t+1} \ldots a_n$, sin importar cuántos paréntesis se inserten. Se necesita una multiplicación adicional para multiplicar $a_1 \ldots a_t$ por $a_{t+1} \ldots a_n$. Entonces, el número total de multiplicaciones es

$$(t - 1) + (n - t - 1) + 1 = n - 1.$$

El paso inductivo queda completo. ◀

Propiedad del buen orden

La **propiedad del buen orden para enteros no negativos** establece que todo conjunto no vacío de enteros no negativos tiene un elemento menor. Esta propiedad es equivalente a las dos formas de inducción (vea los ejercicios 27 al 29). Se usará la propiedad del buen orden para probar algo familiar de la división: cuando se divide un entero n entre un entero positivo d, se obtiene el cociente q y un residuo r que satisface $0 \le r < d$ de manera que $n = dq + r$.

Ejemplo 1.8.4 ▶

Cuando se divide $n = 74$ entre $d = 13$

$$\begin{array}{r@{}l} & 5 \\ 13 & \overline{)74} \\ & 65 \\ & 9 \end{array}$$

se obtiene el cociente $q = 5$ y el residuo $r = 9$. Observe que r satisface $0 \le r < d$; es decir, $0 \le 9 < 13$. Se tiene

$$n = 74 = 13 \cdot 5 + 9 = dq + r.$$ ◀

Teorema 1.8.5

Teorema del cociente-residuo

Si d y n son enteros, $d > 0$, existen enteros q (cociente) y r (residuo) que satisfacen

$$n = dq + r \qquad 0 \le r < d.$$

Más aún, q y r son únicos; es decir, si

$$n = dq_1 + r_1 \qquad 0 \le r_1 < d$$

y

$$n = dq_2 + r_2 \qquad 0 \le r_2 < d$$

entonces $q_1 = q_2$ y $r_1 = r_2$.

Es posible idear una prueba del teorema 1.8.5 observando con cuidado la técnica usada en la división. ¿Por qué es 5 el cociente en el ejemplo 1.8.4? Porque $q = 5$ hace que el residuo $n - dq$ sea no negativo y tan pequeño como es posible. Si, por ejemplo, $q = 3$, el residuo sería $n - dq = 74 - 13 \cdot 3 = 35$, que es demasiado grande. Como otro ejemplo, si $q = 6$, el residuo sería $n - dq = 74 - 13 \cdot 6 = -4$, que es negativo. La existencia del residuo no negativo más pequeño $n - dq$ está garantizada por la propiedad del buen orden.

Demostración del teorema 1.8.5 Sea X el conjunto de todos los enteros de la forma $n - dk$ donde $n - dk \ge 0$ y k es un entero. Se demostrará que X es no vacío usando la prueba por casos. Si $n \ge 0$, entonces

$$n - d \cdot 0 = n \ge 0$$

así que n está en X. Suponga que $n < 0$. Como d es un entero positivo, $1 - d \le 0$. Por tanto,

$$n - dn = n(1 - d) \ge 0.$$

En este caso, $n - dn$ está en X. Por lo tanto, X es no vacío.

Como X es un conjunto no vacío de enteros negativos, por la propiedad del buen orden, X tiene un elemento más pequeño que denotamos por r. Sea q el valor específico de k para el que $r = n - dq$. Entonces

$$n = dq + r.$$

Como r está en X, $r \ge 0$. Se usa la prueba por contradicción para demostrar que $r < d$. Suponga que $r \ge d$. Entonces

$$n - d(q + 1) = n - dq - d = r - d \ge 0.$$

Así, $n - d(q + 1)$ está en X. Además, $n - d(q + 1) = r - d < r$. Pero r es el entero más pequeño en X. Esta contradicción demuestra que $r < d$.

Se ha demostrado que si d y n son enteros, $d > 0$, existen enteros q y r que satisfacen

$$n = dq + r \qquad 0 \le r < d.$$

Ahora se analiza la unicidad de q y r. Suponga que

$$n = dq_1 + r_1 \qquad 0 \le r_1 < d$$

y

$$n = dq_2 + r_2 \qquad 0 \le r_2 < d.$$

Debe demostrarse que $q_1 = q_2$ y $r_1 = r_2$. Restando las ecuaciones anteriores se obtiene

$$0 = n - n = (dq_1 + r_1) - (dq_2 + r_2) = d(q_1 - q_2) - (r_2 - r_1),$$

que se rescribe como

$$d(q_1 - q_2) = r_2 - r_1.$$

La ecuación anterior demuestra que d divide a $r_2 - r_1$. Sin embargo, $0 \le r_1 < d$ y $0 \le r_2 < d$,

$$-d < r_2 - r_1 < d.$$

Pero el único entero estrictamente entre $-d$ y d divisible por d es 0. Por lo tanto,

$$r_1 = r_2.$$

Así,

$$d(q_1 - q_2) = 0;$$

y con ello

$$q_1 = q_2.$$

Y la prueba queda completa. ◀

Observe que, en el teorema 1.8.5, el residuo r es cero si y sólo si d divide a n.

Sugerencias para resolver problemas

En el paso inductivo de la forma fuerte de inducción matemática, la meta es probar el caso n. Para hacerlo, se pueden suponer *todos* los casos precedentes (no sólo el precedente inmediato como en la sección 1.7). Siempre es posible usar la forma fuerte de inducción matemática. Si ocurre que se necesita sólo el caso precedente inmediato en el paso inductivo, simplemente se usa la forma de inducción matemática de la sección 1.7. No obstante, suponer todos los casos anteriores potencialmente da más con qué trabajar para probar el caso n.

Sección de ejercicios de repaso

1. Enuncie la forma fuerte de inducción matemática.

2. Enuncie la propiedad del buen orden.

3. Enuncie el teorema del cociente-residuo.

Ejercicios

1. Demuestre que un importe postal de 6 centavos o más se logra usando sólo timbres de 2 y 7 centavos.

2. Demuestre que el importe postal de 24 centavos o más se logra usando sólo timbres de 5 y 7 centavos.

★ ***3.*** Utilice la forma

Si $S(n)$ es verdadera, entonces $S(n + 1)$ es verdadera

del paso inductivo para probar la afirmación del ejemplo 1.8.1.

★ **4.** Utilice la forma

Si $S(n)$ es verdadera, entonces $S(n + 1)$ es verdadera

del paso inductivo para probar la afirmación en el ejercicio 1.

★ **5.** Utilice la forma

Si $S(n)$ es verdadera, entonces $S(n + 1)$ es verdadera

del paso inductivo para probar la afirmación en el ejercicio 2.

Los ejercicios 6 y 7 se refieren a la secuencia $c_1, c_2, \ldots$ definida por las ecuaciones

$$c_1 = 0, \qquad c_n = c_{\lfloor n/2 \rfloor} + n^2 \quad \textit{para toda } n > 1.$$

6. Calcule c_2, c_3, c_4 y c_5.

7. Pruebe que $c_n < 4n^2$ para toda $n \ge 1$.

Los ejercicios 8 al 10 se refieren a la secuencia $c_1, c_2, \ldots$ definida por las ecuaciones

$$c_1 = 0, \qquad c_n = 4c_{\lfloor n/2 \rfloor} + n \quad \textit{para toda } n > 1.$$

8. Calcule c_2, c_3, c_4 y c_5.

9. Pruebe que $c_n \le 4(n-1)^2$ para toda $n \ge 1$.

10. Pruebe que $(n+1)^2/8 < c_n$ para toda $n \ge 2$. *Pista:* Los pasos base son $n = 2, 3$. Además $\lfloor n/2 \rfloor \ge (n-1)/2$ para toda n.

11. Suponga que se tienen dos pilas de cartas cada una con n cartas. Dos jugadores juegan el siguiente juego. Cada jugador, en su turno, elige una pila y quita cualquier número de cartas, pero al menos una, de la pila elegida. El jugador que quita la última carta gana el juego. Muestre que el segundo jugador siempre puede ganar.

En los ejercicios 12 al 17, encuentre el cociente q y el residuo r como en el teorema 1.8.5 cuando n se divide entre d.

12. $n = 47,\ d = 9$

13. $n = -47,\ d = 9$

14. $n = 7,\ d = 9$

15. $n = -7,\ d = 9$

16. $n = 0,\ d = 9$

17. $n = 47,\ d = 47$

Los egipcios de la antigüedad expresaban una fracción como la suma de fracciones cuyos numeradores eran 1. Por ejemplo, 5/6 se expresaba como

$$\frac{5}{6} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3}.$$

Decimos que la fracción p/q, donde p y q son enteros positivos, está en forma egipcia si

$$\frac{p}{q} = \frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} + \cdots + \frac{1}{n_k}, \tag{1.8.2}$$

donde $n_1, n_2, \ldots, n_k$ son enteros positivos que satisfacen $n_1 < n_2 < \ldots < n_k$.

18. Demuestre que la representación (1.8.2) no tiene que ser única representando $5/6$ de dos maneras diferentes.

★**19.** Demuestre que la representación (1.8.2) nunca es única.

20. Siguiendo los pasos descritos, proporcione una prueba por inducción sobre p para demostrar que toda fracción p/q con $0 < p/q < 1$ puede expresarse en forma egipcia.

a) Verifique el paso base ($p = 1$).

b) Suponga que $0 < p/q < 1$ y que todas las fracciones i/q', con $1 \le i < p$ y q' arbitrarios, se pueden expresar en la forma egipcia. Seleccione el menor entero positivo n con $1/n \le p/q$. Demuestre que

$$n > 1 \qquad \text{y} \qquad \frac{p}{q} < \frac{1}{n-1}.$$

c) Demuestre que si $p/q = 1/n$, la prueba queda completa.

d) Suponga que $1/n < p/q$. Sea

$$p_1 = np - q \qquad \text{y} \qquad q_1 = nq.$$

Demuestre que

$$\frac{p_1}{q_1} = \frac{p}{q} - \frac{1}{n}, \qquad 0 < \frac{p_1}{q_1} < 1, \qquad \text{y} \qquad p_1 < p.$$

Concluya que

$$\frac{p_1}{q_1} = \frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} + \cdots + \frac{1}{n_k}$$

y $n, n_1, \ldots, n_k$ son diferentes.

e) Demuestre que $p_1/q_1 < 1/n$.

f) Demuestre que

$$\frac{p}{q} = \frac{1}{n} + \frac{1}{n_1} + \cdots + \frac{1}{n_k}$$

y $n, n_1, \ldots, n_k$ son diferentes.

21. Use el método del ejercicio anterior para encontrar formas egipcias para $3/8$, $5/7$ y $3/19$.

★***22.*** Demuestre que cualquier fracción p/q, donde p y q son enteros positivos, se puede escribir en la forma egipcia. (No se está suponiendo que $p/q < 1$).

★***23.*** Demuestre que cualquier tablero deficiente de $n \times n$ se puede enlosar con trominos si n es impar, $n > 5$ y 3 divide a $n^2 - 1$. *Sugerencia:* Use las ideas mencionadas en la sugerencia del ejercicio 33, sección 1.7.

★**24.** Demuestre que cualquier tablero deficiente de $n \times n$ se puede enlosar con trominos si n es par, $n > 8$ y 3 divide a $n^2 - 1$. *Sugerencia:* Tome como base el hecho de que un tablero deficiente de 4×4 se puede enlosar con trominos; ejercicios 23 y 31, sección 1.7.

25. Proporcione una prueba alternativa de la existencia de q y r en el teorema 1.8.5 para el caso $n \ge 0$; para ello demuestre primero que el conjunto X de todos los enteros k donde $dk > n$ es un conjunto no vacío de enteros no negativos, después demuestre que X tiene un elemento menor, y por último analice el elemento menor de X.

26. Proporcione una prueba alternativa de la existencia de q y r en el teorema 1.8.5 usando la forma de inducción matemática donde el paso inductivo es "si $S(n)$ es verdadera, entonces $S(n+1)$ es verdadera". *Sugerencia:* Primero suponga que $n > 0$. Maneje el caso $n = 0$ por separado. Reduzca el caso $n < 0$ al caso $n > 0$.

★***27.*** Suponga la forma de inducción matemática donde el paso inductivo es "si $S(n)$ es verdadera, entonces $S(n+1)$ es verdadera". Pruebe la propiedad del buen orden.

★**28.** Suponga la propiedad del buen orden. Pruebe la forma fuerte de inducción matemática.

★**29.** Demuestre que la forma fuerte de inducción matemática y la forma de inducción matemática donde el paso inductivo es "si $S(n)$ es verdadera, entonces $S(n+1)$ es verdadera" son equivalentes. Es decir, suponga la forma fuerte de inducción matemática y pruebe la forma alternativa; después suponga la forma alternativa y pruebe la forma fuerte de inducción matemática.

Notas

Las referencias generales de matemáticas discretas son [Graham, 1994; Liu, 1985; Tucker]. [Knuth, 1997, 1998a, 1998b] es la referencia clásica para la mayor parte de este material.

[Barker; Copi; Edgar] son libros de introducción a la lógica. Un análisis más avanzado se encuentra en [Davis]. El primer capítulo del libro de geometría de [Jacobs] está dedicado a lógica básica. [D'Angelo; Solow] estudian el problema de cómo construir demostraciones. Si desea la historia de la lógica vea [Kline]. El papel de la lógica en el razonamiento acerca de programas de computadora se estudia en [Gries].

Enlosar con poliominos es el tema del libro de [Martin].

Repaso del capítulo

Sección 1.1

1. Lógica
2. Proposición
3. Conjunción: p y q, $p \wedge q$
4. Disyunción: p o q, $p \vee q$
5. Negación: no p, $\neg p$
6. Tabla de verdad
7. or-exclusivo de las proposiciones p, q: p o q, pero no ambos

Sección 1.2

8. Proposición condicional: si p, entonces q; $p \to q$
9. Hipótesis
10. Conclusión
11. Condición necesaria
12. Condición suficiente
13. Recíproca de $p \to q$: $q \to p$
14. Proposición bicondicional: p si y sólo si q, $p \leftrightarrow q$
15. Equivalencia lógica: $P \equiv Q$
16. Leyes de De Morgan para lógica $\neg(p \vee q) \equiv \neg p \wedge \neg q$, $\neg(p \wedge q) \equiv \neg p \vee \neg q$
17. Contrapositiva de $p \to q$: $\neg q \to \neg p$

Sección 1.3

18. Proposición funcional
19. Dominio de discurso
20. Cuantificador universal
21. Afirmación cuantificada universalmente
22. Contraejemplo
23. Cuantificador existencial
24. Afirmación cuantificada existencialmente
25. Leyes generalizadas de De Morgan para lógica:

    $\neg(\forall x\, P(x))$ y $\exists x \neg P(x)$ tienen los mismos valores de verdad.

    $\neg(\exists x\, P(x))$ y $\forall x \neg P(x)$ tienen los mismos valores de verdad.

26. Para probar que la afirmación cuantificada universalmente
$$\forall x\, P(x)$$
es verdadera, se demuestra que para toda x en el dominio de discurso, la proposición $P(x)$ es verdadera.
27. Para probar que la afirmación cuantificada existencialmente
$$\exists x\, P(x)$$
es verdadera, encuentre un valor de x en el dominio de discurso para el que $P(x)$ es verdadera.
28. Para probar que la afirmación cuantificada universalmente
$$\forall x\, P(x)$$
es falsa, encuentre un valor de x (contraejemplo) en el dominio de discurso para el que $P(x)$ es falsa.
29. Para probar que la afirmación cuantificada existencialmente
$$\exists x\, P(x)$$
es falsa, demuestre que para toda x en el dominio de discurso, la proposición $P(x)$ es falsa.

Sección 1.4

30. Para probar que
$$\forall x \forall y\, P(x, y)$$
es verdadera, demuestre que $P(x, y)$ es verdadera para todos los valores de x y y en el dominio de discurso.

31. Para probar que

$$\forall x \exists y P(x, y)$$

es verdadera, demuestre que para toda x en el dominio de discurso, existe al menos una y en el dominio de discurso tal que $P(x, y)$ es verdadera.

32. Para probar que

$$\exists x \forall y P(x, y)$$

es verdadera, demuestre que para al menos una x en el dominio de discurso, $P(x, y)$ es verdadera para toda y en el dominio de discurso.

33. Para probar que

$$\exists x \exists y P(x, y)$$

es verdadera, encuentre un valor de x y un valor de y en el dominio de discurso que hagan verdadera a $P(x, y)$.

34. Para probar que

$$\forall x \forall y P(x, y)$$

es falsa, encuentre un valor de x y un valor de y en el dominio de discurso que hagan falsa a $P(x, y)$.

35. Para probar que

$$\forall x \exists y P(x, y)$$

es falsa, demuestre que para al menos una x en el dominio de discurso, $P(x, y)$ es falsa para toda y en el dominio de discurso.

36. Para probar que

$$\exists x \forall y P(x, y)$$

es falsa, demuestre que para toda x en el dominio de discurso, existe un y en el dominio de discurso tal que $P(x, y)$ es falsa.

37. Para probar que

$$\exists x \exists y P(x, y)$$

es falsa, demuestre que $P(x, y)$ es falsa para todos los valores de x y y en el dominio de discurso.

38. Para negar una expresión con cuantificadores anidados, use las leyes generalizadas de De Morgan para lógica.

39. El juego de lógica

Sección 1.5

40. Sistema matemático
41. Axioma
42. Definición
43. Término no definido
44. Teorema
45. Demostración
46. Lema
47. Prueba directa
48. Entero par
49. Entero impar
50. Prueba por contradicción
51. Prueba indirecta
52. Prueba por contrapositiva
53. Prueba por casos
54. Prueba de existencia
55. Razonamiento deductivo
56. Hipótesis
57. Premisas
58. Conclusión
59. Argumento
60. Argumento válido

61. Argumento inválido
62. Reglas de inferencia para proposiciones: *modus ponens*, *modus tollens*, suma, simplificación, conjunción, silogismo hipotético, silogismo disyuntivo.
63. Reglas de inferencia para afirmaciones cuantificadas: particularización universal, generalización universal, particularización existencial, generalización existencial

Sección 1.6

64. Pruebas por resolución; usos: si $p \vee q$ y $\neg p \vee r$ son ambas verdaderas, entonces $q \vee r$ es verdadera.
65. Cláusula: consiste en términos separados por *o*, donde cada término es una variable o la negación de una variable.

Sección 1.7

66. Principio de inducción matemática
67. Paso base: se prueba que la primera instancia es verdadera.
68. Paso inductivo: suponga que la instancia n es verdadera; después se prueba que la instancia $n + 1$ es verdadera.
69. n factorial: $n! = n(n - 1) \cdots 1$, $0! = 1$
70. Fórmula para la suma de los n primeros enteros positivos:
$$1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$
71. Fórmula para la suma geométrica:
$$ar^0 + ar^1 + \cdots + ar^n = \frac{a(r^{n+1} - 1)}{r - 1}, \qquad r \neq 1$$

Sección 1.8

72. Forma fuerte de inducción matemática
73. Paso base para la forma fuerte de inducción matemática: se prueba que la primera instancia es verdadera.
74. Paso inductivo de la forma fuerte de inducción matemática: se supone verdadera para todas las instancias menores que n; después se prueba que la instancia n es verdadera.
75. Propiedad de buen orden: todo conjunto no vacío de enteros no negativos tiene un elemento menor.
76. Teorema del cociente-residuo: si d y n son enteros, $d > 0$, existen enteros q (cociente) y r (residuo) que satisfacen $n = dq + r$, $0 \leq r < d$. Más aún, q y r son únicos.

Autoevaluación del capítulo

Sección 1.1

1. Si p, q y r son verdaderas, encuentre la tabla de verdad de la proposición
$(p \vee q) \wedge \neg((\neg p \wedge r) \vee q)$.

2. Escriba la tabla de verdad de la proposición $\neg(p \wedge q) \vee (p \vee \neg r)$.

3. Formule la proposición $p \wedge (\neg q \vee r)$ en palabras usando

p: Tomo el curso de administración de hoteles.
q: Tomo el curso de supervisión recreativa.
r: Tomo el curso de cultura popular.

4. Suponga que a, b y c son números reales. Represente la afirmación
$$a < b \text{ o } (b < c \text{ y } a \geq c)$$
simbólicamente, cuando
$$p\colon a < b, \qquad q\colon b < c, \qquad r\colon a < c.$$

Sección 1.2

5. Restablezca la proposición “Una condición necesaria para que Luis obtenga 10 en matemáticas discretas es que estudie duro” en la forma de una proposición condicional.

6. Escriba la recíproca y la contrapositiva de la proposición del ejercicio 5.

7. Si p es verdadera y q y r son falsas, encuentre el valor de verdad de la proposición

$$(p \vee q) \rightarrow \neg r.$$

8. Represente la afirmación

Si ($a \geq c$ o $b < c$), entonces $b \geq c$

simbólicamente usando las definiciones del ejercicio 4.

Sección 1.3

9. ¿Es la afirmación:

El equipo ganó el campeonato de la Asociación Nacional de Básquetbol en 2004

una proposición? Explique.

10. La afirmación del ejercicio 9, ¿es una función proposicional? Explique.

Sea $P(n)$ la afirmación

$$n \text{ y } n + 2 \text{ son primos.}$$

En los ejercicios 11 y 12, escriba la afirmación en palabras y diga si es verdadera o falsa.

11. Para todo entero positivo n, $P(n)$.

12. Para algún entero positivo n, $P(n)$.

Sección 1.4

13. Sea $K(x, y)$ la función proposicional "x conoce a y". El dominio de discurso es el conjunto de estudiantes que toman matemáticas discretas. Represente la aseveración "alguien no conoce a nadie" en símbolos.

14. Escriba la negación de la aseveración del ejercicio 13 simbólicamente y en palabras.

15. Determine si la afirmación

$$\forall x \exists y (x = y^3)$$

es verdadera o falsa. El dominio de discurso es el conjunto de números reales. Explique su respuesta. Explique, en palabras, el significado de la afirmación.

16. Use las leyes generalizadas de De Morgan para lógica para escribir la negación de

$$\forall x \exists y \forall z P(x, y, z).$$

Sección 1.5

17. Demuestre, con una prueba por contradicción, que si cuatro equipos juegan siete juegos, algún par de equipos juega al menos dos veces.

18. Distinga entre los términos *axioma* y *definición*.

19. ¿Cuál es la diferencia entre una prueba directa y una prueba por contradicción?

20. Determine si el siguiente argumento es válido.

$$\begin{array}{l} p \rightarrow q \vee r \\ p \vee \neg q \\ r \vee q \\ \hline \therefore q \end{array}$$

Sección 1.6

21. Encuentre una expresión, que sea el y de las cláusulas, equivalente a $(p \vee q) \rightarrow r$.

22. Encuentre una expresión, que sea el y de las cláusulas, equivalente a $(p \vee \neg q) \rightarrow \neg rs$.

23. Use la resolución para probar

$$\begin{array}{l} \neg p \vee q \\ \neg q \vee \neg r \\ p \vee \neg r \\ \hline \therefore \neg r \end{array}$$

24. Realice de nuevo el ejercicio 23 usando la resolución y la prueba por contradicción.

Sección 1.7

Utilice inducción matemática para probar que las afirmaciones en los ejercicios 25 al 28 son verdaderas para todo entero positivo n.

25. $2 + 4 + \cdots + 2n = n(n + 1)$

26. $2^2 + 4^2 + \cdots + (2n)^2 = \dfrac{2n(n + 1)(2n + 1)}{3}$

27. $\dfrac{1}{2!} + \dfrac{2}{3!} + \cdots + \dfrac{n}{(n + 1)!} = 1 - \dfrac{1}{(n + 1)!}$

28. $2^{n+1} < 1 + (n + 1)2^n$

Sección 1.8

29. Encuentre el cociente q y el residuo r como en el teorema 1.8.5 cuando $n = 101$ se divide entre $d = 11$.

Los ejercicios 30 y 31 se refieren a la secuencia $c_1, c_2, \ldots$ definida por las ecuaciones

$$c_1 = 0, \qquad c_n = 2c_{\lfloor n/2 \rfloor} + n \text{ para toda } n > 1.$$

30. Calcule c_2, c_3, c_4 y c_5.

31. Pruebe que $c_n \le n \log n$ para toda $n \ge 1$.

32. Defina una *cota superior* para un conjunto no vacío X de números como un número a que satisface $a \ge x$ para toda x en X. Utilice la propiedad del buen orden para demostrar que cualquier conjunto no vacío X de enteros no negativos que tiene una cota superior contiene un elemento que es el más grande. *Sugerencia:* Considere el conjunto de cotas superiores enteras de X.

Ejercicios para computadora

1. Escriba un programa que lea una expresión lógica en p y q e imprima la tabla de verdad de la expresión.

2. Escriba un programa que lea un expresión lógica en p, q y r e imprima la tabla de verdad de la expresión.

3. Escriba un programa que pruebe si dos expresiones lógicas en p y q son lógicamente equivalentes.

4. Escriba un programa que pruebe si dos expresiones lógicas en p, q y r son lógicamente equivalentes.

5. Implante una prueba por resolución a través de un programa.

6. Escriba un programa que dé una forma egipcia de una fracción.