1 Funzione $\delta(x)$ e Sorgente Puntiforme

1.1 Caratteristiche $\delta(x)$

La funzione $\delta(x)$ è un funzionale (manda una funzione in un numero), non una funzione, quindi non è definita fuori dal segno di integrale.

è rappresentata come una funzione che vale zero ovunque, tranne in un punto in cui vale infinito.

Il suo comportamento è:

$$\int_a^b f(x)\delta(x-x_0)dx = f(x_0)$$

La funzione δ ha le dimensioni di una densità

Si puo definire $\delta^3(\vec{r}-\vec{r}_0) = \delta(x-x_0)\delta(y-y_0)\delta(z-z_0)$

1.2 Dimostrazione Sorgente Puntiforme

Considero $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) = \frac{\hat{\boldsymbol{r}}}{r^2}$, tipico per del campo elettrico descritto dalla forza di Coulomb.

Se calcolo la divergenza di $\boldsymbol{F}$, questa è nulla. Se calcolo il suo flusso ottengo: $\oint_\Sigma \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{a} = 4\pi$

Sfrutto il teorema della divergenza:

$$\oint_V \boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{F}d\tau = \oint_\Sigma \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{a} = 4\pi$$

Da cui ottengo:

$$\int_{V_s fera} \boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{F}dV = 4\pi$$

Ho una funzione nulla che però ha integrale non nullo: nel caso di sorgente puntiforme $\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{F} = 0$, tranne nel punto dove si trova la sorgente, in quel punto vale ∞, inoltre il suo integrale è diverso da zero. Si comporta alla stessa maniera di un funzionale: la $\delta(x)$: Quindi ottengo:

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{F} = 4\pi\delta^3(\boldsymbol{r})$$

Infine per le ipotesi sappiamo che:

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) = \frac{\hat{r}}{r^2} = -\boldsymbol{\nabla}\cdot\frac{1}{r} \implies \nabla^2\frac{1}{r} = -4\pi\delta^3(\boldsymbol{r})$$

1.3 Conseguenze

Posso rappresentare una carica puntiforme mediante una distribuzione $q \to \rho(\boldsymbol{r}) = q\delta^3(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')$

Questa produce il risultato corretto:

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_V \frac{q\delta^3(\boldsymbol{r}' - \boldsymbol{r}_0)}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|^2}\frac{\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|\, d^3\boldsymbol{r}'} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|^2}\frac{\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0|}$$

Il potenziale con questa forma soddisfa l'equazione di Poisson, basta buttarlo dentro l'equazione per verificarlo.

$$\phi_p(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_V \frac{\rho(\boldsymbol{r}')d^3\boldsymbol{r}'}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|} \tag{1}$$

2 Condensatori

I condensatori sono dispositivi che possono immagazzinare energia sotto forma di un campo elettrico.

Per definizione la carica sulle armature è $Q = C\Delta V$ Se trasporto una carica dall'armatura superiore (che passa da q a $q - dq$) a quella inferiore (che passa da q a $q + dq$) devo compiere un lavoro:

$$dW = V dq$$
$$q = CV \implies V = q/C$$
$$dW = \frac{q}{C}dq$$

Integrando:

$$W = \int_0^Q \frac{q}{C}dq = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C} \tag{2}$$

Il lavoro compiuto è uguale all'energia immagazzinata ($U = W$), questo lavoro può essere riespresso in funzione del potenziale:

$$U = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C} = \frac{1}{2}CV^2$$

Nel condensatore trascurando gli effetti di bordo ho un campo elettrico uniforme diretto dall'armatura a potenziale maggiore all'armatura a potenziale minore. Il modulo di $\boldsymbol{E}$ è : $E\frac{\sigma}{\epsilon_0}$, la densità di energia $\rho_E = \frac{1}{2}\frac{\sigma^2}{\epsilon_0}$, per ottenere l'energia basta fare l'integrale sul volume del condensatore.

2.1 Forza fra le armature di un condensatore

Condensatore carico, sulle armature ho $\pm Q$ Ho le armature che si attraggono, ho una forza non elettrica che mantiene la distanza fra le armature.

Primo conto considerando condensatore carico, ma isolato da un generatore, innalzo di un tratto dz l'armatura superiore, la forza meccanica applicata è bilanciata dalla forza elettrica.

$$dW = \boldsymbol{F}_m \cdot d\boldsymbol{r} = F_m dz = -F_e dz$$

In questo modo anche l'energia immagazzinata aumenta, in quanto la capacità diminuisce:

$$U = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C} \implies dU = \frac{1}{2}Q^2 d\frac{1}{C} = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C}\frac{dz}{L}$$

L'aumento di energia è dovuto al lavoro fatto dalla forza meccanica. Uguagliando le due espressioni ottengo la forza elettrica. Vedo che le due armature di attraggono.

Se la differenza di potenziale è tenuta costante quello che succede è che le cariche varieranno, quindi ho sia un lavoro per muovere l'armatura, che un lavoro per muovere le cariche $dW_G = VdQ = V^2 dC$: Il bilancio energetico corretto diventa:

$$dW_m + dW_G = dU \implies -F_e dz + V^2 dC = \frac{1}{2}V^2 dC$$
$$\to -F_e dz = -\frac{1}{2}V^2 dC$$
$$\to F_e = -\frac{1}{2}\frac{Q^2}{C}\frac{1}{L}$$

è abbastanza analogo il problema in cui le facce si spostano parallelamente l'una all'altra.

2.2 Conduttori

Si parla di induzione completa quando tutte le linee del campo elettrico passano attraverso il conduttore (Caso del condensatore in cui si trascurano gli effetti di bordo) Se voglio una relazione per determinare la carica su ogni conduttore noti i potenziali sui conduttori stessi devo usare il teorema di unicità dell'equazione di Poisson.

- Metto a potenziale $\phi = 0$ tutti i conduttori meno il primo, che rimane a ϕ_1
- Per effetto di ϕ_1 sugli altri conduttori compare una carica elettrica $q_1, \ldots, q_n$
- C'è una relazione lineare tra potenziale e le cariche: $q_i = C_{i1}\phi_1$
- ripeto per ogni conduttore, spegnendo ogni altro conduttore tranne quello in analisi
- Sfruttando al linearità la carica finale su ogni conduttore è

$$q_i = \sum_{k=1}^{n} C_{ik}\phi_k \tag{3}$$

Si può dimostrare che i i coefficenti C_{ik} sono simmetrici sotto scambio di indice, e sono detti *coefficienti di capacità.* Posso invertire le relazioni per trovare i potenziale, nel nuovo caso i coefficienti della matrice inversa sono detti *coefficienti di potenziale.*

3 Dielettrici

3.1 Dipolo Elettrico

Sistema di due cariche di segno opposto $-q$ e $+q$ poste a distanza d.

Si parte calcolando il potenziale:

$$\psi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_+|} - fracq4\pi\epsilon_0\frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_-|}$$

Questa formula vale a qualunque distanza, ma a noi interessa a distanze maggiori rispetto a quella dell'atomo ($r \gg d$). Mi serve una formula approssimata.

Considero il potenziale in un punto $\boldsymbol{r}$, uso le coordinate sferiche (Ho simmetria per rotazioni attorno a z, quindi non dipendo dall'angolo azimutale).

Analisi dei denominatori:

$$|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_+| = \sqrt{r^2 + \frac{d^2}{4} - rd\cos\theta} = r\sqrt{1 + \frac{d^2}{4r^2} - \frac{d}{r}\cos\theta}$$

Per le condizioni poste in precedenza posso ignorare il termine al quadrato:

$$\frac{d^2}{r^2} \ll 1$$

Quindi ottengo:

$$\frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_+|} \approx \frac{1}{r\sqrt{1-\frac{d}{r}\cos\theta}} \approx \frac{1}{r}(1+\frac{d}{2r}\cos\theta) \tag{4}$$

$$\frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_-|} \approx \frac{1}{r\sqrt{1+\frac{d}{r}\cos\theta}} \approx \frac{1}{r}(1-\frac{d}{2r}\cos\theta) \tag{5}$$

Introduco le approssimazioni nel potenziale:

$$\psi \approx \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{1}{r}(1+\frac{d}{2r}\cos\theta) - \frac{1}{r}(1-\frac{d}{2r}\cos\theta)\right] \quad \text{I termini uguali si elidono}$$

$$\psi \approx \left[\frac{d}{2r^2}\cos\theta + \frac{d}{2r^2}\cos\theta\right]$$

$$\psi = \frac{qd}{4\pi\epsilon_0}\frac{\cos\theta}{r^2} \tag{6}$$

Dipende solo dal prodotto $\boldsymbol{p} = q\boldsymbol{d}$, che è detto *Momento di Dipolo* (Per le approssimazioni adottate il dipolo ideale è puntiforme). Il potenziale varia come $1/r^2$, quindi si attenua più velocemente di una carica puntiforme. Ho una dipendenza rispetto a θ, quindi perdo la simmetria sferica, ho una direzione privilegiata che è l'asse delle due cariche, che in questo caso è l'asse z.

Usando una scrittura vettoriale posso riscrivere come:

$$\psi(r, \theta) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\hat{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{r}} \cdot \boldsymbol{p}}{r^2} \tag{7}$$

Il campo elettrico diventa:

$$\boldsymbol{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p}{r^3} (2\vec{\mathbf{e_r}} \cos\theta + \vec{\mathbf{e_\theta}} \sin\theta) \tag{8}$$

Forza Sul Dipolo

Partendo dal caso di campo elettrico uniforme

Il sistema dipolo in se e per se non trasla, infatti essendo composto di due cariche di segno opposto su di esse agiscono due forze di uguale intensità e di segno opposto, quindi si cancellano. Tuttavia è perfettamente libero di ruotare:

$$\boldsymbol{\tau} = q\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{d} = \boldsymbol{E} \times \boldsymbol{p} \tag{9}$$

Quindi ho un lavoro di rotazione che si ottiene intergando la seguente:

$$dW = \tau d\alpha$$

Come sempre il lavoro della forza esterna è pari a una variazione dell'energia interna del sistema, quindi ottegno che:

$$U(\theta) = -pE\cos\theta = -\boldsymbol{p} \cdot \boldsymbol{E}$$

In caso di campo elettrico non uniforme invece succedono cose, ma tutto si riassume in:

$$\boldsymbol{F} = (\boldsymbol{p} \cdot \nabla)\boldsymbol{E}$$

4 Materia Polarizzata

4.1 Campo elettrico generato

Introduco $\boldsymbol{P} = n(\boldsymbol{r})\boldsymbol{p}$ *Vettore di densità di polarizzazione.* Con $n(\boldsymbol{r})$ che è la densità di dipoli per unità di volume. Quindi la sua unità di misura è *Coulomb al metro quadro.* Suppongo di avere un volume infinitesimo con un numero di dipoli molto grade, allora posso definire:

$$d\boldsymbol{p} = \boldsymbol{P} dv$$

Per calcolare il campo elettrico all'esterno suddivido il blocco in tante colonne verticali, a questo punto calcolo il campo elettrico generato da ogni colonna per cui $dv = dadz$, sfrutto il potenziale generato da un dipolo:

$$\begin{aligned} d\phi(\boldsymbol{r}) &= \frac{d\boldsymbol{p}\cdot\vec{\mathbf{r}}}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{dp\cos\theta}{4\pi\epsilon_0 r^2} \\ &= \int_{z_1}^{z_2} \frac{Pdadz\cos\theta}{4\pi\epsilon_0} \\ &= \frac{Pda}{4\pi\epsilon_0}\int_{z_1}^{z_2}\frac{dz\cos\theta}{r^2} \end{aligned}$$

è necessario guardare la relazione tra dr e dx:

$$dz\cos\theta = -dr$$

$$\begin{aligned} d\phi(\boldsymbol{r}) &= \frac{Pda}{4\pi\epsilon_0}\int_{z_1}^{z_2}\frac{dz\cos\theta}{r^2} \\ &= \frac{Pda}{4\pi\epsilon_0}\int_{r_1}^{r_2} -\frac{dr}{r^2} \\ &= \frac{Pda}{4\pi\epsilon_0}(\frac{1}{r_2}-\frac{1}{r_1}) \end{aligned}$$

Questa relazione è identica aquella del potenziale generato da una carica $+Pda$ posta in z_2 e una carica $-Pda$ posta in z_1. Per ottenere il potenziale a questo punto basta fare il flusso attraverso la superficie del dielettrico (In quanto il campo che esce dalla superificie laterale di una colonna, entra in quella laterale di un'altra colonna, a meno che non ci si trovi sulla superifice del blocco). Il risultato finale è che il blocco di materiale polarizzato generea un potenziale elettrico identico a quello di due densità di carica superificiale poste sulle superfici esterne del blocco.

Da quest'ultima considerazione si ottiene:

$$\sigma = P = |\boldsymbol{P}| \tag{10}$$

In questo caso si è assunta polarizzazione uniforme e diretta lungo l'asse z.

5 Onde Elettromagnetiche