1 Equazioni di Maxwell generali

Forma Locale	forma Globale
$\nabla \cdot \vec{\mathbf{D}} = \rho_{free}$	$\Phi(D) = \oint_S \vec{\mathbf{D}} \cdot d\Sigma = Q_{free}$
$\nabla \cdot \vec{\mathbf{B}} = 0$	$\Phi(B) = \oint_S \vec{\mathbf{B}} \cdot d\Sigma = 0$
$\nabla \times \vec{\mathbf{E}} = -\dfrac{\partial \vec{\mathbf{B}}}{\partial t}$	$\Gamma(E) = \oint_\gamma \vec{\mathbf{E}} \cdot dl = -\dfrac{\mathrm{d}\Phi(\vec{\mathbf{B}})}{\mathrm{d}t}$
$\nabla \times \vec{\mathbf{H}} = \vec{\mathbf{J}} + \dfrac{\partial \vec{\mathbf{D}}}{\partial t}$	$\Gamma(H) = \oint_\gamma \vec{\mathbf{H}} \cdot dl = \int_S \vec{\mathbf{J}} \cdot dS + \dfrac{\mathrm{d}\Phi(\vec{\mathbf{D}})}{\mathrm{d}t}$

1.1 Significati

- I Equazione: l'oggetto che genera il campo $\boldsymbol{D}$ sono le cariche libere.
- II Equazione: In assenza di campo magnetico variabile il campo elettrico è conservativo. Posso definire un potenziale Scalare.
- III Equazione: Non esiste un monopolo magnetico.
- IV Equazione: Il campo magnetico è solenoidale. Ha un potenziale vettore.

2 Condizioni al contorno

Il contorno è la superficie di separazione da un mezzo all'altro.

	mezzo lineare	$\sigma_f = 0 \quad K_f = 0$
$D_{1\perp} - D_{2\perp} = \sigma_f$	$\varepsilon_1 E_{1\perp} - \varepsilon_2 E_{2\perp}$	$\varepsilon_1 E_{1\perp} = \varepsilon_2 E_{2\perp}$
$\boldsymbol{E}_{1\parallel} = \boldsymbol{E}_{2\parallel}$	$\boldsymbol{E}_{1\parallel} = \boldsymbol{E}_{2\parallel}$	$\boldsymbol{E}_{1\parallel} = \boldsymbol{E}_{2\parallel}$
$\boldsymbol{H}_{1\parallel} - \boldsymbol{H}_{2\parallel} = \boldsymbol{K}_f \times \vec{\mathbf{n}}$	$\frac{1}{\mu_1}\boldsymbol{B}_{1\parallel} - \frac{1}{\mu_2}\boldsymbol{B}_{2\parallel} = \boldsymbol{K}_f \times \vec{\mathbf{n}}$	$\frac{1}{\mu_1}\boldsymbol{B}_{1\parallel} = \frac{1}{\mu_2}\boldsymbol{B}_{2\parallel}$
$B_{1\perp} = B_{2\perp}$	$B_{1\perp} = B_{2\perp}$	$B_{1\perp} = B_{2\perp}$

Dove K_f è una densità di corrente superficiale, mentre σ_f è una densità di carica superficiale.

3 Relazioni tra i vari campi

3.1 Campi

$$\vec{\mathbf{D}} = \varepsilon_0 \vec{\mathbf{E}} + \vec{\mathbf{P}} \tag{1}$$

$$\vec{\mathbf{P}} = \chi \varepsilon_0 \vec{\mathbf{E}} \tag{2}$$

$$\vec{\mathbf{D}} = \varepsilon_0 \varepsilon_r \vec{\mathbf{E}} \quad \text{Nei materiali isotropi, omogenei e lineari} \tag{3}$$

$$\vec{\mathbf{H}} = \vec{\mathbf{B}}/\mu_0 - \vec{\mathbf{M}} \tag{4}$$

3.2 Relazione campi con sorgenti

$$\begin{array}{rl} \boldsymbol{\nabla} \cdot \vec{\mathbf{P}} = -\rho_{bounded} & \vec{\mathbf{P}} \cdot \hat{\mathbf{n}} = \sigma_{bounded} \\ \boldsymbol{\nabla} \cdot \vec{\mathbf{D}} = \rho_{free} & \vec{\mathbf{D}} \cdot \hat{\mathbf{n}} = \sigma_{free} \quad [cc] \\ \boldsymbol{\nabla} \times \vec{\mathbf{M}} = \vec{\mathbf{J}}_{\mathbf{Amp,V}} & \vec{\mathbf{M}} \times \hat{\mathbf{n}} = \vec{\mathbf{J}}_{\mathbf{Amp,S}} \end{array}$$

3.3 Potenziali

$$\vec{\mathbf{B}} = \boldsymbol{\nabla} \times \vec{\mathbf{A}} \tag{5}$$

$$\boldsymbol{\nabla} \times \vec{\mathbf{E}} = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \boldsymbol{\nabla} \times \vec{\mathbf{A}} \tag{6}$$

$$-\boldsymbol{\nabla} V = \vec{\mathbf{E}} + \frac{\partial \vec{\mathbf{A}}}{\partial t} \tag{7}$$

3.4 Formule Particolari

Legge di Coulomb

$$\boldsymbol{F}_{12} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q_1 q_2}{|r_1 - r_2|^3} (\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2) \tag{8}$$

La forza di Coulomb è lineare, vale pertanto il *Principio di Sovrapposizione*, quindi per trovare la forza su una carica devo sovrapporre gli effetti delle altre cariche agenti.

Distribuzione continua in un volume di carica

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}_0) = \int_V \frac{\rho(\boldsymbol{r}) \mathrm{d}^3 \boldsymbol{r}}{|\boldsymbol{r}_0 - \boldsymbol{r}|^2} \hat{u}(\boldsymbol{r}) \tag{9}$$

Definizione di Potenziale

(Si ottiene da $E = -\nabla V$):

$$V(r_A) - V(r_B) = \int_A^B \boldsymbol{E} \cdot ds \tag{10}$$

Definizione Generale di Potenziale

$$\phi_p(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_V \frac{\rho(\boldsymbol{r'})d^3\boldsymbol{r'}}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r'}|} \tag{11}$$

Equazione di Laplace

Si ottiene combinando la definizone di campo elettrico mediante il potenziale e la I equazione di Maxwell per il campo elettrico:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\nabla}\cdot E &= \frac{\rho}{\varepsilon_0} \\ E &= -\boldsymbol{\nabla}\phi \\ -\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\nabla}\phi &= \frac{\rho}{\varepsilon_0} \\ \nabla^2\phi &= -\frac{\rho}{\varepsilon_0} \quad \text{Equazione di Poisson} \end{aligned}$$

Equazione di Poisson

è l'omogenea dell'equazione di Laplace. Le due coincidono quando $\rho = 0$

$$\nabla^2\phi = 0 \tag{12}$$

La soluzione dell'equazione di Laplace è unica ed è data dalla somma della soluzione omogenea alla soluzione di Poisson, unitamente alle condizioni al contorno che ne danno l'unicità.

Capacità di un conduttore

$$C = \frac{q}{V} = \frac{\oint_\Sigma \sigma(x',y',z')d\Sigma}{\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\oint_\Sigma \frac{\sigma(x',y',z')}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r'}|}} d\Sigma \tag{13}$$

Condensatore a Facce Piane Parallele

La Capacità dipende solo dalla geometria del sistema

$$C = \varepsilon_0\frac{A}{d}$$

Legge di Biot Savart

(Campo Magnetico $\boldsymbol{B}$ generato da un circuito $\mathcal{C}$ percorso da una corrente i):

$$\frac{\mu_0 i}{4\pi}\oint_{\mathcal{C}} \frac{dl\times r}{r^3} \tag{14}$$

Forza di Lorentz

$$\boldsymbol{F} = q(\boldsymbol{E} + \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}) \tag{15}$$

Campi Magnetici Famosi

Filo infinito:

$$\boldsymbol{B}_0(\boldsymbol{r}) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}\boldsymbol{\theta} \tag{16}$$

Solenoide rettilineo lungo:

$$\boldsymbol{B}_0(\boldsymbol{r}) = \frac{\mu_0 N I}{l}\boldsymbol{z} = \mu_0 n I \boldsymbol{z} \tag{17}$$

Asse di spira circolare:

$$\boldsymbol{B}_0(\boldsymbol{r}) = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{I\boldsymbol{S}}{(R^2 + z^2)^{3/2}} \tag{18}$$

Nastro di corrente:

$$\boldsymbol{B}_0(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{n}\frac{\mu_0 I}{2\pi b}\ln\left(\frac{l+b}{l}\right) \tag{19}$$

Autoinduttanza

$$\Phi = Li \tag{20}$$

$$fem = -L\frac{dI}{dt} \tag{21}$$

Mutua Induttanza

$$\Phi_{k,i} = M_{k,i} \cdot i_k \tag{22}$$

$$fem = -M_{k,i}\frac{di_k}{dt} \tag{23}$$

Induttanza solenoide

$$L = \mu_0 \mu_r N^2 S$$

3.5 Onde

$$\vec{\mathbf{S}} = \frac{\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{B}}{\mu_0 \mu_r} \tag{24}$$

$$I = < S > = \frac{1}{2}\varepsilon v E_0^2 \tag{25}$$

Formula per assorbimento energia:

$$\mathcal{E} = \varepsilon_r \varepsilon_0 E_0^2 \qquad \text{materiali assorbenti} \tag{26}$$

$$\mathcal{E} = 2\varepsilon_r \varepsilon_0 E_0^2 \qquad \text{materiali riflettenti} \tag{27}$$

4 Relazioni notevoli (valgono in tutti i sistemi di riferimento)

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{\nabla} f = \nabla \cdot (\nabla f) = \nabla^2 f \quad \text{Operatore di Laplace o Laplaciano} \tag{28}$$

$$\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{\nabla} f = \nabla \times (\nabla f) = 0 \tag{29}$$

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{F} = \nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{F}) = 0 \tag{30}$$

$$\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{F} = \nabla \times (\nabla \times \mathbf{F}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{F}) - \nabla^2 \mathbf{F} \tag{31}$$

$$\nabla^2 fg = f\nabla^2 g + 2\nabla f \cdot \nabla g + g\nabla^2 f \tag{32}$$

Formula di Lagrange per prodotto vettoriale:

$$\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \mathbf{B}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{C}) - \mathbf{C}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) \tag{33}$$

$$\nabla \cdot (f\mathbf{A}) = f\nabla \cdot \mathbf{A} + \mathbf{A} \cdot \nabla f \tag{34}$$

$$\nabla \times f\mathbf{A} = f\nabla \times \mathbf{A} - \mathbf{A} \times \nabla f \tag{35}$$

$$\nabla(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = (\mathbf{A} \cdot \nabla)\mathbf{B} + (\mathbf{B} \cdot \nabla)\mathbf{A} + \mathbf{A} \times (\nabla \times \mathbf{B}) + \mathbf{B} \times (\nabla \times \mathbf{A}) \tag{36}$$

Tabella 1: Formule differenziali necessarie per esame

nome	Cartesiane	Cilindriche	Sferiche
$\boldsymbol{\nabla} f$	$\frac{\partial f}{\partial x}\vec{\mathbf{x}} + \frac{\partial f}{\partial y}\vec{\mathbf{y}} + \frac{\partial f}{\partial z}\vec{\mathbf{z}}$	$\frac{\partial f}{\partial \rho}\vec{\boldsymbol{\rho}} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial f}{\partial \phi}\vec{\boldsymbol{\phi}} + \frac{\partial f}{\partial z}\vec{\mathbf{z}}$	$\frac{\partial f}{\partial r}\vec{\mathbf{r}} + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}\vec{\boldsymbol{\theta}} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial f}{\partial \phi}\vec{\boldsymbol{\phi}}$
$\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{F}$	$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial z}$	$\frac{1}{\rho}\frac{\partial \rho A_\rho}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial A_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$	$\frac{1}{r^2}\frac{\partial r^2 F_r}{\partial r} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial F_\theta \sin\theta}{\partial \theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial F_\phi}{\partial \phi}$
$\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{F}$	$\left(\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z}\right)\hat{\boldsymbol{x}}$ $\left(\frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x}\right)\hat{\boldsymbol{y}}$ $\left(\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y}\right)\hat{\boldsymbol{z}}$	$\left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial A_z}{\partial \phi} - \frac{\partial A_\phi}{\partial z}\right)\hat{\boldsymbol{\rho}}$ $\left(\frac{\partial A_\rho}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial \rho}\right)\hat{\boldsymbol{\phi}}$ $\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial(\rho A_\phi)}{\partial \rho} - \frac{\partial A_\rho}{\partial \phi}\right)\hat{\boldsymbol{z}}$	$\frac{1}{r\sin\theta}\left(\frac{\partial}{\partial\theta}(A_\phi \sin\theta) - \frac{\partial A_\theta}{\partial \phi}\right)\hat{\boldsymbol{r}}$ $\frac{1}{r}\left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial A_r}{\partial \phi} - \frac{\partial(rA_\phi)}{\partial r}\right)\hat{\boldsymbol{\theta}}$ $\frac{1}{r}\left(\frac{\partial}{\partial r}(rA_\theta) - \frac{\partial A_r}{\partial \theta}\right)\hat{\boldsymbol{\phi}}$
$\nabla^2 f$	$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$	$\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial f}{\partial \rho}\right) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 f}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$	$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial f}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial f}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 f}{\partial\phi^2}$
$\nabla^2\mathbf{A}$	$\nabla^2 A_x\hat{\mathbf{x}} + \nabla^2 A_y\hat{\mathbf{y}} + \nabla^2 A_z\hat{\mathbf{z}}$	$\left(\nabla^2 A_\rho - \frac{A_\rho}{\rho^2} - \frac{2}{\rho^2}\frac{\partial A_\phi}{\partial\phi}\right)\hat{\boldsymbol{\rho}}$ $\left(\nabla^2 A_\phi - \frac{A_\phi}{\rho^2} + \frac{2}{\rho^2}\frac{\partial A_\rho}{\partial\phi}\right)\hat{\boldsymbol{\phi}}$ $(\nabla^2 A_z)\hat{\boldsymbol{z}}$	$\left(\nabla^2 A_r - \frac{2A_r}{r^2} - \frac{2}{r^2\sin\theta}\frac{\partial(A_\theta\sin\theta)}{\partial\theta} - \frac{2}{r^2\sin\theta}\frac{\partial A_\phi}{\partial\phi}\right)\hat{\boldsymbol{r}}$ $\left(\nabla^2 A_\theta - \frac{A_\theta}{r^2\sin^2\theta} + \frac{2}{r^2}\frac{\partial A_r}{\partial\theta} - \frac{2\cos\theta}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial A_\phi}{\partial\phi}\right)\hat{\boldsymbol{\theta}}$ $\left(\nabla^2 A_\phi - \frac{A_\phi}{r^2\sin^2\theta} + \frac{2}{r^2\sin\theta}\frac{\partial A_r}{\partial\phi} + \frac{2\cos\theta}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial A_\theta}{\partial\phi}\right)\hat{\boldsymbol{\phi}}$