1 Equazioni di Maxwell generali

Forma Locale	forma Globale
$\nabla \cdot \vec{\mathbf{D}} = \rho_{free}$	$\Phi(D) = \oint_S \vec{\mathbf{D}} \cdot d\Sigma = Q_{free}$
$\nabla \cdot \vec{\mathbf{B}} = 0$	$\Phi(B) = \oint_S \vec{\mathbf{B}} \cdot d\Sigma = 0$
$\nabla \times \vec{\mathbf{E}} = -\frac{\partial \vec{\mathbf{B}}}{\partial t}$	$\Gamma(E) = \oint_\gamma \vec{\mathbf{E}} \cdot dl = -\frac{\mathrm{d}\Phi(\vec{\mathbf{B}})}{\mathrm{d}t}$
$\nabla \times \vec{\mathbf{H}} = \vec{\mathbf{J}} + \frac{\partial \vec{\mathbf{D}}}{\partial t}$	$\Gamma(H) = \oint_\gamma \vec{\mathbf{H}} \cdot dl = \int_S \vec{\mathbf{J}} \cdot dS + \frac{\mathrm{d}\Phi(\vec{\mathbf{D}})}{\mathrm{d}t}$

1.1 Significati

- I Equazione: l'oggetto che genera il campo $\boldsymbol{D}$ sono le cariche libere.
- II Equazione: In assenza di campo magnetico variabile il campo elettrico è conservativo. Posso definire un potenziale Scalare.
- III Equazione: Non esiste un monopolo magnetico.
- IV Equazione: Il campo magnetico è solenoidale. Ha un potenziale vettore.

2 Relazioni tra i vari campi

2.1 Campi

$$\vec{\mathbf{D}} = \epsilon_0 \vec{\mathbf{E}} + \vec{\mathbf{P}} \tag{1}$$

$$\vec{\mathbf{P}} = \chi \epsilon_0 \vec{\mathbf{E}} \tag{2}$$

$$\vec{\mathbf{D}} = \epsilon_0 \epsilon_r \vec{\mathbf{E}} \quad \text{Nei materiali isotropi, omogenei e lineari} \tag{3}$$

$$\vec{\mathbf{H}} = \vec{\mathbf{B}}/\mu_0 - \vec{\mathbf{M}} \tag{4}$$

2.2 Relazione campi con sorgenti

$$\begin{array}{rl} \nabla \cdot \vec{\mathbf{P}} = -\rho_{bounded} & \vec{\mathbf{P}} \cdot \hat{\mathbf{n}} = \sigma_{bounded} \\ \nabla \cdot \vec{\mathbf{D}} = \rho_{free} & \vec{\mathbf{D}} \cdot \hat{\mathbf{n}} = \sigma_{free} \quad [cc] \\ \nabla \times \vec{\mathbf{M}} = \vec{\mathbf{J}}_{\mathbf{Amp,V}} & \vec{\mathbf{M}} \times \hat{\mathbf{n}} = \vec{\mathbf{J}}_{\mathbf{Amp,S}} \end{array}$$

2.3 Potenziali

$$\vec{\mathbf{B}} = \boldsymbol{\nabla} \times \vec{\mathbf{A}} \tag{5}$$

$$\boldsymbol{\nabla} \times \vec{\mathbf{E}} = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{\nabla} \times \vec{\mathbf{A}} \tag{6}$$

$$-\boldsymbol{\nabla} V = \vec{\mathbf{E}} + \frac{\partial \vec{\mathbf{A}}}{\partial t} \tag{7}$$

2.4 Formule Particolari

Legge di Coulomb

$$\boldsymbol{F}_{12} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q_1 q_2}{|r_1 - r_2|^3}(\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2) \tag{8}$$

La forza di Coulomb è lineare, vale pertanto il *Principio di Sovrapposizione*, quindi per trovare la forza su una carica devo sovrapporre gli effetti delle altre cariche agenti.

Distribuzione continua in un volume di carica

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}_0) = \int_V \frac{\rho(\boldsymbol{r})\mathrm{d}^3\boldsymbol{r}}{|\boldsymbol{r}_0 - \boldsymbol{r}|^2}\hat{u}(\boldsymbol{r}) \tag{9}$$

Definizione di Potenziale

(Si ottiene da $E = -\nabla V$):

$$V(r_A) - V(r_B) = \int_A^B \boldsymbol{E} \cdot ds \tag{10}$$

Definizione Generale di Potenziale

$$\phi_p(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_V \frac{\rho(\boldsymbol{r}')d^3\boldsymbol{r}'}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|} \tag{11}$$

Equazione di Laplace

Si ottiene combinando la definizone di campo elettrico mediante il potenziale e la I equazione di Maxwell per il campo elettrico:

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot E = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$
$$E = -\boldsymbol{\nabla}\phi$$
$$-\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{\nabla}\phi = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$
$$\nabla^2\phi = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \quad \text{Equazione di Poisson}$$

Equazione di Poisson

è l'omogenea dell'equazione di Laplace. Le due coincidono quando $\rho = 0$

$$\nabla^2 \phi = 0 \tag{12}$$

La soluzione dell'equazione di Laplace è unica ed è data dalla somma della soluzione omogenea alla soluzione di Poisson, unitamente alle condizioni al contorno che ne danno l'unicità.

Capacità di un conduttore

$$C = \frac{q}{V} = \frac{\oint_\Sigma \sigma(x', y', z') d\Sigma}{\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \oint_\Sigma \frac{\sigma(x',y',z')}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r'}|}} d\Sigma \tag{13}$$

Condensatore a Facce Piane Parallele

La Capacità dipende solo dalla geometria del sistema

$$C = \epsilon_0 \frac{A}{d}$$

Legge di Biot Savart

(Campo Magnetico $\boldsymbol{B}$ generato da un circuito $\mathcal{C}$ percorso da una corrente i):

$$\frac{\mu_0 i}{4\pi} \oint_{\mathcal{C}} \frac{dl \times r}{r^3} \tag{14}$$

Forza di Lorentz

$$\boldsymbol{F} = q(\boldsymbol{E} + \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}) \tag{15}$$

Autoinduttanza

$$\varPhi = Li \tag{16}$$

Mutua Induttanza

$$\varPhi_{k,i} = M_{k,i} \cdot i_k \tag{17}$$

2.5 Onde

$$\vec{\mathbf{S}} = \frac{\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{B}}{\mu_0 \mu_r} \tag{18}$$

$$I =< S >= \frac{1}{2}\epsilon v E_0^2 \tag{19}$$

Formula per assorbimento energia:

$$\mathcal{E} = \epsilon_r \epsilon_0 E_0^2 \qquad \text{materiali assorbenti} \tag{20}$$

$$\mathcal{E} = 2\epsilon_r \epsilon_0 E_0^2 \qquad \text{materiali riflettenti} \tag{21}$$

3 Relazioni notevoli (valgono in tutti i sistemi di riferimento)

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{\nabla} f = \nabla \cdot (\nabla f) = \nabla^2 f \quad \text{Operatore di Laplace o Laplaciano} \tag{22}$$

$$\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{\nabla} f = \nabla \times (\nabla f) = 0 \tag{23}$$

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{F} = \nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{F}) = 0 \tag{24}$$

$$\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{F} = \nabla \times (\nabla \times \mathbf{F}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{F}) - \nabla^2 \mathbf{F} \tag{25}$$

$$\nabla^2 fg = f\nabla^2 g + 2\nabla f \cdot \nabla g + g\nabla^2 f \tag{26}$$

Formula di Lagrange per il prodotto vettoriale:

$$\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \mathbf{B}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{C}) - \mathbf{C}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) \tag{27}$$

$$\nabla \cdot (f\mathbf{A}) = f\nabla \cdot \mathbf{A} + \mathbf{A} \cdot \nabla f \tag{28}$$

$$\nabla \times f\mathbf{A} = f\nabla \times \mathbf{A} - \mathbf{A} \times \nabla f \tag{29}$$

$$\nabla(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = (\mathbf{A} \cdot \nabla)\mathbf{B} + (\mathbf{B} \cdot \nabla)\mathbf{A} + \mathbf{A} \times (\nabla \times \mathbf{B}) + \mathbf{B} \times (\nabla \times \mathbf{A}) \tag{30}$$

Tabella 1: Formule differenziali necessarie per esame

nome	Cartesiane	Cilindriche	Sferiche
$\boldsymbol{\nabla} f$	$\frac{\partial f}{\partial x}\vec{\mathbf{x}} + \frac{\partial f}{\partial y}\vec{\mathbf{y}} + \frac{\partial f}{\partial z}\vec{\mathbf{z}}$	$\frac{\partial f}{\partial \rho}\vec{\rho} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial f}{\partial \phi}\vec{\phi} + \frac{\partial f}{\partial z}\vec{\mathbf{z}}$	$\frac{\partial f}{\partial r}\vec{\mathbf{r}} + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}\vec{\theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial f}{\partial \phi}\vec{\phi}$
$\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{F}$	$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial z}$	$\frac{1}{\rho}\frac{\partial \rho A_\rho}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial A_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$	$\frac{1}{r^2}\frac{\partial r^2 F_r}{\partial r} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial F_\theta \sin\theta}{\partial \theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial F_\phi}{\partial \phi}$
$\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{F}$	$\left(\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z}\right)\hat{\boldsymbol{x}}$ $\left(\frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x}\right)\hat{\boldsymbol{y}}$ $\left(\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y}\right)\hat{\boldsymbol{z}}$	$\left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial A_z}{\partial \phi} - \partial A_\phi \frac{\partial}{\partial z}\right)\hat{\boldsymbol{\rho}}$ $\left(\partial A_\rho \partial z - \partial A_z \partial \rho\right)\hat{\boldsymbol{\phi}}$ $1\rho\left(\partial(\rho A_\phi)\partial\rho - \partial A_\rho \partial\phi\right)\hat{\boldsymbol{z}}$	$\frac{1}{r\sin\theta}\left(\frac{\partial}{\partial\theta}(A_\phi \sin\theta) - \frac{\partial A_\theta}{\partial\phi}\right)\hat{\boldsymbol{r}}$ $1r\left(1\sin\theta \partial A_r \partial\phi - \frac{\partial}{\partial r}(rA_\phi)\right)\hat{\boldsymbol{\theta}}$ $\frac{1}{r}\left(\frac{\partial}{\partial r}(rA_\theta) - \frac{\partial A_r}{\partial\theta}\right)\hat{\boldsymbol{\phi}}$
$\nabla^2 f$	$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$	$\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial f}{\partial\rho}\right) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 f}{\partial\phi^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$	$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial f}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial f}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 f}{\partial\phi^2}$
$\nabla^2 \mathbf{A}$	$\nabla^2 A_x \hat{\mathbf{x}} + \nabla^2 A_y \hat{\mathbf{y}} + \nabla^2 A_z \hat{\mathbf{z}}$	$\left(\nabla^2 A_\rho - \frac{A_\rho}{\rho^2} - \frac{2}{\rho^2}\frac{\partial A_\phi}{\partial\phi}\right)\hat{\boldsymbol{\rho}}$ $\left(\nabla^2 A_\phi - \frac{A_\phi}{\rho^2} + \frac{2}{\rho^2}\frac{\partial A_\rho}{\partial\phi}\right)\hat{\boldsymbol{\phi}}$ $(\nabla^2 A_z)\hat{\boldsymbol{z}}$	$\left(\nabla^2 A_r - \frac{2A_r}{r^2} - \frac{2}{r^2\sin\theta}\frac{\partial(A_\theta\sin\theta)}{\partial\theta} - \frac{2}{r^2\sin\theta}\frac{\partial A_\phi}{\partial\phi}\right)\hat{\boldsymbol{r}}$ $\left(\nabla^2 A_\theta - \frac{A_\theta}{r^2\sin^2\theta} + \frac{2}{r^2}\frac{\partial A_r}{\partial\theta} - \frac{2\cos\theta}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial A_\phi}{\partial\phi}\right)\hat{\boldsymbol{\theta}}$ $\left(\nabla^2 A_\phi - \frac{A_\phi}{r^2\sin^2\theta} + \frac{2}{r^2\sin\theta}\frac{\partial A_r}{\partial\phi} + \frac{2\cos\theta}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial A_\theta}{\partial\phi}\right)\hat{\boldsymbol{\phi}}$