Appunti di Elettromagnetismo (Basato su Ragusa)

Stefano Pilosio

27 gennaio 2023

1 Funzione $\delta(x)$ e Sorgente Puntiforme

1.1 Caratteristiche $\delta(x)$

La funzione $\delta(x)$ è un funzionale (manda una funzione in un numero), non una funzione, quindi non è definita fuori dal segno d'integrale.

È rappresentata come una funzione che vale zero ovunque, tranne in un punto in cui vale infinito.

Il suo comportamento è:

$$\int_a^b f(x)\delta(x - x_0)dx = f(x_0)$$

La funzione δ ha le dimensioni di una densità

Si può definire $\delta^3(\vec{r} - \vec{r}_0) = \delta(x - x_0)\delta(y - y_0)\delta(z - z_0)$

1.2 Dimostrazione Sorgente Puntiforme

Considero $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) = \frac{\hat{\boldsymbol{r}}}{r^2}$, tipico per del campo elettrico descritto dalla forza di Coulomb.

Se calcolo la divergenza di $\boldsymbol{F}$, questa è nulla. Se calcolo il suo flusso ottengo: $\oint_\Sigma \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{a} = 4\pi$

Sfrutto il teorema della divergenza:

$$\oint_V \boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{F}d\tau = \oint_\Sigma \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{a} = 4\pi$$

Da cui ottengo:

$$\int_{V_sfera} \boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{F}dV = 4\pi$$

Ho una funzione nulla che però ha integrale non nullo: nel caso di sorgente puntiforme $\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{F} = 0$, tranne nel punto dove si trova la sorgente, in quel punto vale ∞, inoltre il suo integrale è diverso da zero. Si comporta alla stessa maniera di un funzionale: la $\delta(x)$: Quindi ottengo:

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{F} = 4\pi\delta^3(\boldsymbol{r})$$

Infine per le ipotesi sappiamo che:

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) = \frac{\hat{r}}{r^2} = -\boldsymbol{\nabla} \cdot \frac{1}{r} \implies \nabla^2 \frac{1}{r} = -4\pi\delta^3(\boldsymbol{r})$$

1.3 Conseguenze

Posso rappresentare una carica puntiforme mediante una distribuzione $q \to \rho(\boldsymbol{r}) = q\delta^3(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}')$

Questa produce il risultato corretto:

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_V \frac{q\delta^3(\boldsymbol{r}' - \boldsymbol{r}_0)}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|^2} \frac{\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|\, d^3\boldsymbol{r}'} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|^2} \frac{\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0|}$$

Il potenziale con questa forma soddisfa l'equazione di Poisson, basta buttarlo dentro l'equazione per verificarlo.

$$\phi_p(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_V \frac{\rho(\boldsymbol{r}')d^3\boldsymbol{r}'}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|} \tag{1}$$

2 Condensatori

I condensatori sono dispositivi che possono immagazzinare energia sotto forma di un campo elettrico.

Per definizione la carica sulle armature è $Q = C\Delta V$ Se trasporto una carica dall'armatura superiore (che passa da q a $q - dq$) a quella inferiore (che passa da q a $q + dq$) devo compiere un lavoro:

$$dW = V dq$$
$$q = CV \implies V = q/C$$
$$dW = \frac{q}{C} dq$$

Integrando:

$$W = \int_0^Q \frac{q}{C} dq = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C} \tag{2}$$

Il lavoro compiuto è uguale all'energia immagazzinata ($U = W$), questo lavoro può essere riespresso in funzione del potenziale:

$$U = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C} = \frac{1}{2} C V^2$$

Nel condensatore trascurando gli effetti di bordo ho un campo elettrico uniforme diretto dall'armatura a potenziale maggiore all'armatura a potenziale minore. Il modulo di $\boldsymbol{E}$ è: $E\frac{\sigma}{\varepsilon_0}$, la densità di energia $\rho_E = \frac{1}{2}\frac{\sigma^2}{\varepsilon_0}$, per ottenere l'energia basta fare l'integrale sul volume del condensatore.

2.1 Forza fra le armature di un condensatore

Condensatore carico, sulle armature ho $\pm Q$ Ho le armature che si attraggono, ho una forza non elettrica che mantiene la distanza fra le armature.

Primo conto considerando condensatore carico, ma isolato da un generatore, innalzo di un tratto dz l'armatura superiore, la forza meccanica applicata è bilanciata dalla forza elettrica.

$$dW = \boldsymbol{F}_m \cdot d\boldsymbol{r} = F_m dz = -F_e dz$$

In questo modo anche l'energia immagazzinata aumenta, in quanto la capacità diminuisce:

$$U = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C} \implies dU = \frac{1}{2}Q^2 d\frac{1}{C} = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C}\frac{dz}{L}$$

L'aumento di energia è dovuto al lavoro fatto dalla forza meccanica. Uguagliando le due espressioni ottengo la forza elettrica. Vedo che le due armature di attraggono.

Se la differenza di potenziale è tenuta costante quello che succede è che le cariche varieranno, quindi ho sia un lavoro per muovere l'armatura, che un lavoro per muovere le cariche $dW_G = VdQ = V^2 dC$: Il bilancio energetico corretto diventa:

$$dW_m + dW_G = dU \implies -F_e dz + V^2 dC = \frac{1}{2}V^2 dC$$
$$\to -F_e dz = -\frac{1}{2}V^2 dC$$
$$\to F_e = -\frac{1}{2}\frac{Q^2}{C}\frac{1}{L}$$

È abbastanza analogo il problema in cui le facce si spostano parallelamente l'una all'altra.

2.2 Conduttori

Si parla d'induzione completa quando tutte le linee del campo elettrico passano attraverso il conduttore (Caso del condensatore in cui si trascurano gli effetti di bordo) Se voglio una relazione per determinare la carica su ogni conduttore noti i potenziali sui conduttori stessi devo usare il teorema di unicità dell'equazione di Poisson.

- Metto a potenziale $\phi = 0$ tutti i conduttori meno il primo, che rimane a ϕ_1
- Per effetto di ϕ_1 sugli altri conduttori compare una carica elettrica $q_1, \ldots, q_n$
- C'è una relazione lineare tra potenziale e le cariche: $q_i = C_{i1}\phi_1$

- ripeto per ogni conduttore, spegnendo ogni altro conduttore tranne quello in analisi
- Sfruttando la linearità la carica finale su ogni conduttore è

$$q_i = \sum_{k=1}^{n} C_{ik}\phi_k \tag{3}$$

Si può dimostrare che i coefficienti C_{ik} sono simmetrici sotto scambio d'indice, e sono detti *coefficienti di capacità.* Posso invertire le relazioni per trovare i potenziale, nel nuovo caso i coefficienti della matrice inversa sono detti *coefficienti di potenziale.*

3 Dielettrici

3.1 Dipolo Elettrico

Sistema di due cariche di segno opposto $-q$ e $+q$ poste a distanza d.

Si parte calcolando il potenziale:

$$\psi = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_+|} - fracq4\pi\varepsilon_0\frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_-|}$$

Questa formula vale a qualunque distanza, ma a noi interessa a distanze maggiori rispetto a quella dell'atomo ($r \gg d$). Mi serve una formula approssimata.

Considero il potenziale in un punto $\boldsymbol{r}$, uso le coordinate sferiche (Ho simmetria per rotazioni attorno a z, quindi non dipendo dall'angolo azimutale).

Analisi dei denominatori:

$$|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_+| = \sqrt{r^2 + \frac{d^2}{4} - rd\cos\theta} = r\sqrt{1 + \frac{d^2}{4r^2} - \frac{d}{r}\cos\theta}$$

Per le condizioni poste in precedenza posso ignorare il termine al quadrato:

$$\frac{d^2}{r^2} \ll 1$$

Quindi ottengo:

$$\frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_+|} \approx \frac{1}{r\sqrt{1-\frac{d}{r}\cos\theta}} \approx \frac{1}{r}(1+\frac{d}{2r}\cos\theta) \tag{4}$$

$$\frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_-|} \approx \frac{1}{r\sqrt{1+\frac{d}{r}\cos\theta}} \approx \frac{1}{r}(1-\frac{d}{2r}\cos\theta) \tag{5}$$

Introduco le approssimazioni nel potenziale:

$$\psi \approx \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{r}(1+\frac{d}{2r}\cos\theta) - \frac{1}{r}(1-\frac{d}{2r}\cos\theta)\right] \quad \text{I termini uguali si elidono}$$

$$\psi \approx \left[\frac{d}{2r^2}\cos\theta + \frac{d}{2r^2}\cos\theta\right]$$

$$\psi = \frac{qd}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\cos\theta}{r^2} \tag{6}$$

Dipende solo dal prodotto $\boldsymbol{p} = q\boldsymbol{d}$, che è detto *Momento di Dipolo* (Per le approssimazioni adottate il dipolo ideale è puntiforme). Il potenziale varia come $1/r^2$, quindi si attenua più velocemente di una carica puntiforme. Ho una dipendenza rispetto a θ, quindi perdo la simmetria sferica, ho una direzione privilegiata che è l'asse delle due cariche, che in questo caso è l'asse z.

Usando una scrittura vettoriale posso riscrivere come:

$$\psi(r,\theta) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\hat{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{r}} \cdot \boldsymbol{p}}{r^2} \tag{7}$$

Il campo elettrico diventa:

$$\boldsymbol{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{p}{r^3}(2\vec{\mathbf{e_r}}\cos\theta + \vec{\mathbf{e_\theta}}\sin\theta) \tag{8}$$

Forza Sul Dipolo

Partendo dal caso di campo elettrico uniforme

Il sistema dipolo in se e per se non trasla, infatti essendo composto di due cariche di segno opposto su di esse agiscono due forze di uguale intensità e di segno opposto, quindi si cancellano. Tuttavia è perfettamente libero di ruotare:

$$\boldsymbol{\tau} = q\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{d} = \boldsymbol{E} \times \boldsymbol{p} \tag{9}$$

Quindi ho un lavoro di rotazione che si ottiene integrando la seguente:

$$dW = \tau d\alpha$$

Come sempre il lavoro della forza esterna è pari a una variazione dell'energia interna del sistema, quindi ottengo che:

$$U(\theta) = -pE\cos\theta = -\boldsymbol{p} \cdot \boldsymbol{E}$$

In caso di campo elettrico non uniforme invece succedono cose, ma tutto si riassume in:

$$\boldsymbol{F} = (\boldsymbol{p} \cdot \nabla)\boldsymbol{E}$$

4 Materia Polarizzata

4.1 Campo elettrico generato

Introduco $\boldsymbol{P} = n(\boldsymbol{r})\boldsymbol{p}$ *Vettore di densità di polarizzazione.* Con $n(\boldsymbol{r})$ che è la densità di dipoli per unità di volume. Quindi la sua unità di misura è *Coulomb al metro quadro.*

Suppongo di avere un volume infinitesimo con un numero di dipoli molto grande, allora posso definire:

$$d\boldsymbol{p} = \boldsymbol{P} dv$$

Per calcolare il campo elettrico all'esterno suddivido il blocco in tante colonne verticali, a questo punto calcolo il campo elettrico generato da ogni colonna per cui $dv = dadz$, sfrutto il potenziale generato da un dipolo:

$$\begin{aligned} d\phi(\boldsymbol{r}) &= \frac{d\boldsymbol{p} \cdot \vec{\mathbf{r}}}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = \frac{dp\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \\ &= \int_{z_1}^{z_2} \frac{Pdadz\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0} \\ &= \frac{Pda}{4\pi\varepsilon_0} \int_{z_1}^{z_2} \frac{dz\cos\theta}{r^2} \end{aligned}$$

è necessario guardare la relazione tra dr e dx:

$$dz\cos\theta = -dr$$

$$\begin{aligned} d\phi(\boldsymbol{r}) &= \frac{Pda}{4\pi\varepsilon_0} \int_{z_1}^{z_2} \frac{dz\cos\theta}{r^2} \\ &= \frac{Pda}{4\pi\varepsilon_0} \int_{r_1}^{r_2} -\frac{dr}{r^2} \\ &= \frac{Pda}{4\pi\varepsilon_0} (\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1}) \end{aligned}$$

Questa relazione è identica a quella del potenziale generato da una carica $+Pda$ posta in z_2 e una carica $-Pda$ posta in z_1. Per ottenere il potenziale a questo punto basta fare il flusso attraverso la superficie del dielettrico (In quanto il campo che esce dalla superficie laterale di una colonna, entra in quella laterale di un'altra colonna, a meno che non ci si trovi sulla superficie del blocco). Il risultato finale è che il blocco di materiale polarizzato genera un potenziale elettrico identico a quello di due densità di carica superficiale poste sulle superfici esterne del blocco.

Da quest'ultima considerazione si ottiene:

$$\sigma = P = |\boldsymbol{P}| \tag{10}$$

In questo caso si è assunta polarizzazione uniforme e diretta lungo l'asse z.

5 Forza di Lorentz

La forza totale agente su una carica è:

$$\boldsymbol{F} = q\,(\boldsymbol{E} + \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}) \tag{11}$$

Questa vale anche per campi variabili nel tempo, è una relazione locale (tutte le grandezze sono misurate nello stesso punto allo stesso tempo e rispetto allo stesso sistema di riferimento inerziale). La forza di Lorentz è una forza che non compie lavoro essendo sempre perpendicolare alla traiettoria. Quindi una particella che si muove con velocità uniforme percorre un *Moto Circolare Uniforme*, caratterizzato da una frequenza detta *di ciclotrone*:

$$\omega = \frac{qB}{m} \tag{12}$$

Forza su un filo percorso da corrente

Filo conduttore di sezione S percorso da una corrente I, i portatori portano una carica q e ho una densità ρ_N di portatori nel filo. Suppongo che tutte le particelle abbiano la stessa velocità v, se prendo un tratto infinitesimo di filo $\boldsymbol{dl}$ trovo la seguente relazione:

$$dN = \rho_N S|d\boldsymbol{l}|$$

Per il numero di cariche all'interno del filo conduttore.

Se sono immerso in un campo magnetico su ogni particella agisce la forza di Lorentz, che sul tratto si traduce in:

$$\begin{gathered}
d\boldsymbol{F} = \boldsymbol{f}dN \\
\boldsymbol{f} = q\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B} \\
d\boldsymbol{F} = q\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}dN \\
d\boldsymbol{F} = q\rho_N S|d\boldsymbol{l}|\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B} \\
\boldsymbol{I} \parallel |d\boldsymbol{l}| \implies \boldsymbol{v} \parallel |d\boldsymbol{l}| \\
|\boldsymbol{J}| = q\rho_N|\boldsymbol{v}| \\
d\boldsymbol{F} = |\boldsymbol{J}|S|d\boldsymbol{l}| \times \boldsymbol{B} \\
d\boldsymbol{F} = I|d\boldsymbol{l}| \times \boldsymbol{B} \\
\boldsymbol{F} = I\oint_C d\boldsymbol{l} \times \boldsymbol{B}
\end{gathered}$$

Ho trovato la forza totale agente su un circuito C. Posso fare il discorso precedenti con i plasmi oppure con cariche in un fluido parlando della densità volumetrica di corrente e della forza volumetrica.

5.1 Legge di Biot-Savart

Sorgenti del campo magnetico

Operativamente il campo magnetico è generato da una carica in movimento. La forza di Lorentz non definisce chi sia la sorgente del campo magnetico. Abbiamo i magneti permanenti che generano un campo magnetico, abbiamo le correnti che subiscono un campo magnetico e ne generano uno. La vera origine dei campi magnetici è complessa, serve una teoria quantistica.

La legge

Detta anche prima formula di Laplace, permette il calcolo del campo d'induzione magnetica generato da un filo percorso da corrente. *Vale solo per correnti stazionarie.* Considero filo percorso da una corrente i. Considero un elemento dl del filo. Il contributo al campo $\boldsymbol{B}$ nel punto $\boldsymbol{r}$ è dato da:

$$d\boldsymbol{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} i \frac{d\boldsymbol{l} \times \vec{\mathbf{r}}}{r^2} \tag{13}$$

Il pezzo di filo fa parte di un circuito chiuso, bisogna integrare su ogni pezzo di filo per ottenere il campo magnetico finale:

$$d\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}_2) = \frac{\mu_0}{4\pi} i \frac{d\boldsymbol{l}_1 \times (\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1)}{|\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1|^3} \implies \boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}_2) = \frac{\mu_0}{4\pi} i \oint_{filo} \frac{d\boldsymbol{l}_1 \times (\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1)}{|\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1|^3} \tag{14}$$

Conduzione di Magnetostatica

La condizione di stazionarietà che definisce la magnetostatica è dovuta a delle cariche in movimento, un movimento con delle caratteristiche precise, per cui non si hanno variazioni sulla densità di carica: Deve valere la *condizione di continuità*

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t} \tag{15}$$

In particolare per la magnetostatica deve valere che il termine a sinistra sia nullo, quindi si riduce a:

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{J} = 0 \tag{16}$$

Per cui si hanno correnti continue, ossia che non variano nel tempo.

5.2 Campo Magnetico Filo

Filo infinito lungo l'asse $x \implies d\boldsymbol{l} = \vec{\mathbf{e}}_x dx$, il punto su cui calcolare il campo magnetico giace sull'asse y.

$$\vec{\mathbf{r}} = \vec{\mathbf{e}}_x \sin\theta + \vec{\mathbf{e}}_y \cos\theta$$
$$\vec{\mathbf{e}}_x \times \vec{\mathbf{e}}_x = 0$$
$$d\boldsymbol{l} \times \vec{\mathbf{r}} = \vec{\mathbf{e}}_x \times \vec{\mathbf{e}}_y \sin\theta dx = \vec{\mathbf{e}}_z \sin\theta dx$$

Il contributo del campo magnetico è quindi perpendicolare al piano xy. Ora voglio far dipendere tutto dall'angolo θ, visto che integrare su tutti i reali fa un po' schifo...

$$\text{(a distanza verticale di r da dl)}\, a = r\sin(\pi - \theta) = r\sin\theta \implies r = \frac{a}{\sin\theta}$$
$$\text{(x distanza orizzontale di r da dl)}\, a = x\tan(\pi - \theta) = -x\tan\theta \implies x = -a\frac{\cos\theta}{\sin\theta}$$
$$\implies dx = a\frac{d\theta}{\sin^2\theta}$$
$$d\boldsymbol{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} i \frac{\vec{\mathbf{e}}_z \sin\theta}{a} d\theta$$

Integrando da $0 \to \pi$ ho ottenuto il risultato cercato.

6 Relatività

Supponiamo una carica che inizi a muoversi a $t = 0$, con velocità uniforme $\boldsymbol{b}$, ho delle variazioni del campo elettrico dovute solo al fatto che adesso la carica è in moto. Queste variazioni *non possono essere percepite istantaneamente in tutto lo spazio.* La perturbazione indotta deve viaggiare con *la velocità della luce c.* Quindi al tempo t i punti nello spazio a distanza superiore a $R = ct$, non possono sapere che la carica si sia messa in moto, quelli a distanza inferiore invece vedono la carica in moto. Ho due campi elettrici separati da una zona di transizione, il cui spessore dipende dal tempo che la particella ha impiegato a passare dallo stato di riposo al moto rettilineo uniforme. Nella regione di transizione passiamo da un campo radiale a un campo perpendicolare al raggio. Questo è analogo se la carica si arresta.

Si può verificare partendo dalla geometria nel caso della carica che si ferma che il raccordo delle linee di campo segue la seguente legge:

$$\tan \phi_0 = \gamma \tan \theta_0$$

6.1 Quadrivettore

Nel passaggio da un sistema di riferimento a un altro la posizione e il tempo di un evento si trasformano in una maniera non banale:

- Lo spazio e il Tempo non sono quantità indipendenti
- Sono le componenti del quadrivettore posizione (ct, x, y, z)
- Nuova notazione: cambio nome alle coordinate spaziali $(x, y, z) \to (x^1, x^2, x^3)$
- introduco una coordinata temporale: $x^0 = ct$
- introduco $\beta = \frac{v}{c}$
- introduco $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$

A questo punto scrivo le trasformazioni di Lorentz come:

$$\begin{cases} x' = \gamma(x - \beta ct) \\ y' = y \\ z' = z \\ ct' = \gamma(ct - \beta x) \end{cases} \tag{17}$$

O in forma matriciale:

$$\begin{pmatrix} x'^0 \\ x'^1 \\ x'^2 \\ x'^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta & 0 & 0 \\ -\gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} \tag{18}$$

Per costruzione questa lasciata invariata la quantità detta *invariante relativistico*

$$(x^0)^2 - (x^1)^2 - (x^2)^2 - (x^3)^2 \tag{19}$$

Se si applica questa operazione alle quantità trasformate si ottiene che la condizione di uguaglianza si ha se:

$$\gamma^2(1 - \beta^2) = 1 \tag{20}$$

Questo è facile da verificare, inoltre si nota che questo è il determinante della matrice della trasformazione di Lorentz.

Quelle in precedenza definite sono le componenti controvarianti del quadrivettore posizione, queste hanno indice alto.

Posso definire anche le componenti covarianti, queste si differenziano per l'indice basso, e per la parte spaziale con segno invertito:

$$x_\mu = (ct, -x, -y, -z) \tag{21}$$

Inoltre per calcolare l'invariante posso definire il modulo quadrato del quadrivettore come:

$$x \cdot x = x^\mu x_\mu \tag{22}$$

7 Fem Indotta

Spiega la terza equazione di Maxwell, ricavata da Michael Faraday nel 1830 in tre diversi esperimenti:

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi}{dt} \tag{23}$$

Caratteristiche degli esperimenti:

- Campo magnetico fisso, spira che si muove
- Campo magnetico che si muove, spira ferma (Uguale al primo, ma rispetto a un altro sistema di riferimento)
- Campo magnetico variabile nel tempo

Presa una curva chiusa e stazionaria $\mathcal{C}$ in un sistema inerziale $\mathcal{S}$. La curva delimita una superficie $\mathcal{A}$. È presente un campo magnetico dipendente dal tempo.

Dalla legge di Faraday si ottiene:

$$\oint_{\mathcal{C}} \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{l} = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d}{dt}\int_A \boldsymbol{B} \cdot d\boldsymbol{a}$$
$$textUsoilteoremadiStokes$$
$$\int_A (\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{E}) \cdot d\boldsymbol{a} = -\frac{d}{dt}\int_A \boldsymbol{B} \cdot d\boldsymbol{a}$$
$$\text{sia A che C sono stazionarie}$$
$$\int_A (\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{E}) \cdot d\boldsymbol{a} = -\int_A \frac{d\boldsymbol{B}}{dt} \cdot d\boldsymbol{a}$$
$$\text{La curva è arbitraria}$$
$$\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{E} = -pdv\boldsymbol{B}t$$

Ho ottenuto la terza equazione di Maxwell per il terzo caso.

7.1 Conseguenze

Valgono sempre la terza e la seconda equazione di Maxwell, dalla seconda si deriva che per $\boldsymbol{B}$ posso definire un potenziale vettore $\boldsymbol{A}$, tale che $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{A}$.

Se si inserisce questa relazione nella terza equazione di Maxwell si ottiene:

$$\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{A}}{\partial t} = -\boldsymbol{\nabla} \times \frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t} \implies \boldsymbol{\nabla} \times \left(\boldsymbol{E} + \frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t}\right) = 0 \tag{24}$$

Quindi ho trovato una combinazione di campi a rotore nullo, questo vuol dire che è la combinazione è il gradiente di un campo scalare:

$$E + \frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t} = -\nabla\phi \tag{25}$$

Da cui trovo l'espressione corretta per il campo elettrico:

$$\boldsymbol{E} = -\nabla\phi - \frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t} \tag{26}$$

Questa è anche una conseguenza del teorema di Helmoltz (guarda Slide 20 bis), per cui il campo elettrico ha sia una componente irrotazionale, dovuta alle cariche, che una componente solenoidale, dovuta alle cariche in movimento, quindi il potenziale vettore agisce anche nel campo elettrico e non solo nel campo magnetico, che rimane totalmente solenoidale, in quanto non ha divergenza.

7.2 Auto Induttanza

Se considera una spira percorsa da corrente I, la spira genera un campo magnetico $\boldsymbol{B}$. Sfrutto la legge di Biot-Savart:

$$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} I \oint_{\mathcal{C}} \frac{d\boldsymbol{l}_1 \times (\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_1)}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_1|^3}$$

Il campo magnetico dipende linearmente dalla corrente, a questo punto calcolo il flusso del campo magnetico inserendo l'equazione di Biot-Savart, di solito è una cosa difficile da calcolare come integrale, tuttavia la cosa importante è che questo è ancora proporzionale alla corrente, quindi posso riscriverlo come:

$$\varPhi = LI \tag{27}$$

Da cui ricavo che L è:

$$L = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \left[\frac{d\boldsymbol{l}_1 \times (\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_1|^3} \right] \cdot d\boldsymbol{a} \tag{28}$$

Questa forma si può ottenere in una formula più semplice a partire dalla definizione di flusso e dal potenziale vettore:

$$\varPhi = \int_S \boldsymbol{B} \cdot d\boldsymbol{a} = \int_S \boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{A} \cdot d\boldsymbol{a} = \oint_{\mathcal{C}} \boldsymbol{A} \cdot d\boldsymbol{l}$$

Sfruttando l'espressione per il potenziale vettore:

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} I \oint_{\mathcal{C}} \frac{d\boldsymbol{l'}}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|} \tag{29}$$

Questa introdotta nella definizione di flusso ottengo che L è:

$$L = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{\mathcal{C}} \oint_{\mathcal{C}} \frac{d\boldsymbol{l} \cdot d\boldsymbol{l}}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|} \tag{30}$$

Il discorso con la mutua Induttanza è legato al flusso del secondo circuito attraversato dal campo magnetico del primo circuito.

Circuiti con induttanze

Considero solenoide con induttanza L e collegato a una batteria con fem $\mathcal{E}_0$. Il conduttore della spira ha una resistenza complessiva R. Quindi ho un'induttanza serie e una resistenza serie. Quando il circuito è chiuso comincia a circolare una corrente $i(t)$. La corrente porta ad avere una caduta di tensione Ri, inoltre nel solenoide genera un flusso concatenato $\varPhi(t) = Li(t)$. Quindi ho una forza elettromotrice indotta $\mathcal{E}_i$ che si oppone alla variazione di flusso, questo riduce gli effetti di $i(t)$.

$$\mathcal{E}_{\prime} + \mathcal{E}_{\rangle} = Ri$$
$$\mathcal{E}_{\prime} - L\frac{di}{dt} = Ri$$

Sappiamo le condizioni al contorno da porre in questa equazione differenziale, infatti per un tempo molto grande la corrente deve essere:

$$i = \frac{\mathcal{E}_{\prime}}{R}$$

Mentre nella condizione iniziale devo avere una corrente che circola nel circuito nulla, quindi:

$$\frac{di}{dt} \approx \frac{\mathcal{E}_{\prime}}{L}$$

Quindi l'induttanza *limita la massima velocità di crescita della corrente.* Risolviamo l'equazione differenziale:

$$\mathcal{E}_{\prime} - L\frac{di}{dt} = Ri$$

$$\text{Sostituisco} \quad I = i - \frac{\mathcal{E}_{\prime}}{R}$$

$$\mathcal{E}_{\prime} - l\frac{dI}{dt} = RI + R\frac{\mathcal{E}_{\prime}}{R}$$

$$\frac{dI}{dt} = -\frac{R}{L}I \quad \text{definisco} \quad \tau = \frac{L}{R}$$

$$\frac{dI}{dt} = -\frac{1}{\tau}I$$

La soluzione che si ottiene per $t \geq 0$ è:

$$I(t) = A\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \implies i(t) = \frac{\mathcal{E}_{\prime}}{R} + A\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)$$

Con la condizione iniziale posta $i(0) = 0$ si ottiene subito:

$$i(t) = \frac{\mathcal{E}_{\prime}}{R}\left(1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)\right)$$

7.3 Energia del Campo magnetico

Trovata la corrente che scorre nel circuito RL, capiamo quanta energia eroga la batteria:

$$P_{\mathcal{E}} = \mathcal{E}_{\prime}i(t) = \frac{\mathcal{E}_{\prime}^{2}}{R}\left(1 - e^{(-t/\tau)}\right) = P_0\left(1 - e^{(-t/\tau)}\right)$$

La resistenza dissipa:

$$P_R = Ri^2 = R\left(\frac{\mathcal{E}_{\prime}}{R}\right)^2\left(1 - e^{(-t/\tau)}\right)^2 = \frac{\mathcal{E}_{\prime}^{2}}{R}\left(1 - e^{(-t/\tau)}\right)^2$$

Quindi la differenza è la potenza assorbita dal solenoide:

$$P_L = \frac{\mathcal{E}_{\prime}^{\in}}{R}(e^{(-t/\tau)} - e^{(-2t/\tau)})$$

Integrando rispetto a un tempo infinito ottengo l'energia immagazzinata nel solenoide:

$$W = \frac{1}{2}LI_0^2 \tag{31}$$

Questa energia è immagazzinata in un campo magnetico, si può arrivare a questo risultato partendo anche dall'equazione del circuito e moltiplicando per entrambi i termini per la corrente e integrando l'equazione.

Cosa succede escludendo la batteria, che si produce una fem indotta dal solenoide, che si scarica, rilasciando tutta l'energia contenuta all'interno del campo magnetico. Tutta questa energia viene completamente dissipata dalla resistenza per effetto joule.

Per fare questa cosa si è spento il solenoide lentamente, quindi si è staccata la batteria e immediatamente è stato chiuso il circuito. Se si spegnesse di colpo la batteria quello che si otterrebbe sarebbe una fem indotta infinita che si oppone alla variazione, quindi nella pratica avrei una scarica di corrente con ampiezza molto grande.

Nella pratica tutto l'effetto dell'energia si può riassumere come:

$$dW_b = I d\Phi$$

In cui I è la corrente del circuito, e l'altro termine è il flusso attraverso il solenoide.

Questo è il lavoro fatto dalla batteria quando le correnti sono mantenute costanti, compensa le forze elettromotrici indotte generate da variazioni di flusso dovute a campi magnetici esterni o spostamenti infinitesimi del circuito.

Serve adesso un lavoro esterno che abbia le stesse caratteristiche, quindi dotato di una corrente finale e un flusso finale. Il lavoro esterno speso costituisce l'energia immagazzinata nel sistema magnetico. Quindi per calcolare l'energia immagazzinata U_M, devo considerare N correnti I_k e N flussi Φ_k.

Questa energia deve essere indipendente dal modo con il quale si raggiunge la condizione finale. Quindi parto facendo cambiare tutte le correnti in odo proporzionale: quindi tutte le correnti e i flussi sono pari a una frazione del loro valore finale in un dato istante:

$$I_k(\alpha) = \alpha I_k$$
$$d\Phi_k(\alpha) = \alpha d\Phi_k$$
$$dU_M = \int_0^1 \sum_{k=1}^{N} \alpha I_k \Phi_k d\alpha = \sum_{k=1}^{N} I_k \Phi_k \int_0^1 \alpha d\alpha$$
$$U_M = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{N} I_k \Phi_k$$

Questa relazione è generale, vale anche in presenza di materiali magnetici purché lineari. Si osserva che il lavoro fatto dalla batteria per mantenere costanti le correnti è doppio rispetto al lavoro necessario per costruire il sistema.

U_M è il lavoro necessario per un agente estero per costruire un sistema magnetico qualunque, questa è anche l'energia immagazzinata nel campo, però non è un energia dalla quale si possano ricavare le forze, soprattutto se questa dipende dalle posizioni dei circuiti magnetici.

8 Onde Elettromagnetiche

8.1 Teorema di Poynting

Energia associata a campi elettrici:

$$U_E = \frac{\varepsilon_0}{2} \int E^2 dV$$

Energia associata a campi magnetici:

$$\frac{1}{2\mu_0} \int B^2 dV$$

Queste valgono anche per campi elettromagnetici, faccio semplicemente la somma:

$$U_{EM} = \frac{1}{2} \int (\varepsilon_0 E^2 + \frac{1}{\mu_0} B^2) dV \tag{32}$$

Suppongo di avere una distribuzione di carica ρ e di corrente $\boldsymbol{J}$, che generino un campo EM.

Suppongo le cariche in movimento, $\boldsymbol{v}$ è la velocità della carica contenuta in dV. Calcoliamo il lavoro fatto dal campo EM sulle cariche e le correnti nel tempo dt: Prendo un elemento di volume dV,

$$dq = \rho dV \quad \boldsymbol{J} dV = \rho \boldsymbol{v} dV = dq \boldsymbol{v}$$

Sulla carica infinitesima agisce la Forza di Lorentz:

$$dwdV = \boldsymbol{f} \cdot d\boldsymbol{s} = \boldsymbol{f} \cdot \boldsymbol{v} dt = dq(\boldsymbol{E} + \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}) \cdot \boldsymbol{v} dt = dq \boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{v} dt$$
$$dwdV = \rho dV \boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{v} dt = \rho \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{E} dt dV = \boldsymbol{J} \cdot \boldsymbol{E} dt dV$$

Quindi la potenza erogata nel volume è:

$$\frac{dw}{dt} dV = \boldsymbol{J} \cdot \boldsymbol{E} dV \tag{33}$$

Integrando sul Volume:

$$\frac{dW}{dt} = \int \boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{J} dV$$

Considero la IV equazione di Maxwell:

$$\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{B} = \mu_0 \boldsymbol{J} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} \implies \boldsymbol{J} = \frac{1}{\mu_0} \boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{B} - \varepsilon_0 \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t}$$

La inserisco all'interno dell'integrale:

$$\frac{dW}{dt} = \int \left(\frac{1}{\mu_0} \boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{B} - \varepsilon_0 \boldsymbol{E} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} \right) dV$$

Sfrutta la regola del prodotto scalare per il rotore:

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot (\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{C}) = \boldsymbol{C} \cdot (\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{A}) - \boldsymbol{A} \cdot (\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{C})$$
$$E \cdot \boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{B} = -\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{E} \times \boldsymbol{B} + \boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{E}$$
$$\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}$$
$$E \cdot \boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{B} = -\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{E} \times \boldsymbol{B} - \boldsymbol{B} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}$$

Inserita nell'espressione della potenza:

$$\frac{dW}{dt} = \int \left(-\frac{1}{\mu_0} \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{E} \times \boldsymbol{B} - \boldsymbol{B} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} - \varepsilon_0 \boldsymbol{E} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} \right) dV$$

Si può osservare che:

$$\boldsymbol{E} \cdot \frac{\partial E}{\partial t} = \frac{1}{2} \frac{\partial E^2}{\partial t} \qquad \boldsymbol{B} \cdot \frac{\partial B}{\partial t} = \frac{1}{2} \frac{\partial B^2}{\partial t}$$

Quindi posso sostituire all'intero dell'integrale:

$$\frac{dW}{dt} = -\frac{1}{\mu_0} \int \boldsymbol{\nabla} \cdot (\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{B})\, dV - \frac{\partial}{\partial t} \frac{1}{2} \int \left(\frac{1}{\mu_0} B^2 - \varepsilon_0 E^2 \right) dV$$

Il secondo integrale descrive l'energia elettromagnetica del sistema, invece il primo integrale descrive l'energia che fluisce attraverso la superficie che delimita il sistema. Sfrutto il teorema della divergenza per dimostrare questa seconda affermazione:

$$\frac{dW}{dt} = -\frac{1}{\mu_0} \oint_{\partial V} (\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{B})\, d\boldsymbol{a} - \frac{\partial}{\partial t} \frac{1}{2} \int_V \left(\frac{1}{\mu_0} B^2 - \varepsilon_0 E^2 \right) dV$$

Definisco il *vettore di Poynting*

$$\boldsymbol{S} = \frac{1}{\mu_0} \boldsymbol{E} \times \boldsymbol{B} \tag{34}$$

La potenza diventa:

$$\frac{dW}{dt} = -\oint_{\partial V} \boldsymbol{S} \cdot d\boldsymbol{a} - \frac{\partial U_E M}{\partial t} \tag{35}$$