

# Cose Utili per AM2

Stefano Pilosio

8 febbraio 2022

## 1 Integrali Indefiniti

## 2 Sostituzioni utili integrali definiti

## 3 Convergenza Integrali Impropri

$$\int_0^a \frac{1}{x^\alpha} dx \begin{cases} \alpha < 1 & \text{converge} \\ \alpha \geq 1 & \text{non converge} \end{cases}$$
$$a \in \mathbb{R} \setminus 0$$

$$\int_a^\infty \frac{1}{x^\alpha} dx \begin{cases} \alpha > 1 & \text{converge} \\ \alpha \leq 1 & \text{non converge} \end{cases}$$
$$a \in (0, \infty)$$

$$\int_0^a \frac{1}{x^\alpha \log^\beta x} dx \begin{cases} \alpha < 1 & \forall \beta & \text{converge} \\ \alpha = 1 & \beta > 1 & \text{converge} \\ \alpha = 1 & \beta \leq 1 & \text{non converge} \\ \alpha > 1 & \forall \beta & \text{non converge} \end{cases}$$
$$a \in (0, 1)$$

$$\int_a^\infty \frac{1}{x^\alpha \log^\beta x} dx \begin{cases} \alpha < 1 & \forall \beta & \text{converge} \\ \alpha = 1 & \beta > 1 & \text{converge} \\ \alpha = 1 & \beta \leq 1 & \text{non converge} \\ \alpha > 1 & \forall \beta & \text{non converge} \end{cases}$$
$$a \in (1, \infty)$$

$$\int_1^a \frac{1}{\log^\beta x} dx \begin{cases} \beta < 1 & \text{converge} \\ \beta \geq 1 & \text{non converge} \end{cases}$$
$$a \in (0, 1) \vee (1, \infty)$$

## 4 Approssimazioni

## 5 Lista Metodi Eq. Differenziali

## 6 Checklist Studi di Funzione

## 7 Ricerca dei massimi e dei minimi

### 7.1 Condizioni Necessarie

**Teorema 1** (Condizioni Necessarie Estremante Libero).

$f: \Omega \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x_0 \in \Omega^\circ$ ,  $f$  derivabile in  $x_0$ .

Se  $x_0$  è estremo di  $f \implies \nabla f(x_0) = \bar{0}$

Questo non basta in quanto un punto estremo in più dimensioni può essere sia un massimo, che un minimo o, infine, un punto di sella

Nel caso del punto di sella questo non è né un minimo né un massimo, tuttavia è stazionario

## 8 Successioni di funzioni

### 8.1 Dominio della funzione e convergenze

1. Capisci dove è definita la funzione da analizzare per comprendere la continuità della successione
2. Fai il  $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$  per capire qual è la funzione limite
3. Verifica che in tutti i punti si abbia convergenza puntuale alla funzione limite
4. Verifica la convergenza uniforme con:  $\sup_{x \in E} |f_n(x) - f(x)|$ , questo è eseguito cercando un modo per dimostrare o confutare che in ogni punto che  $|f_n - f| \rightarrow 0$  in un modo o nell'altro.

### 8.2 Continuità

**Teorema 2** (Condizioni per la continuità). Se ogni  $f_n$  è continua e la successione è convergente uniformemente  $\implies f$  è continua in  $x_0$ , in particolare se  $f_n$  è continua su  $E$ ,  $f$  è continua in  $E$ .

**OSSERVAZIONE** : se  $f_n$  è continua uniforme in  $E$  e ha la convergenza uniforme in  $E \implies f$  è continua uniforme.

### 8.3 Differenziabilità

**Teorema 3** (Condizioni per la derivata). Sia  $J \subseteq \mathbb{R}$ , intervallo,  $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  la successione di funzioni. Se sono verificate le seguenti condizioni:

- $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  converge puntualmente in  $J$  alla funzione limite  $f$ .
- Ogni  $f_n$  è derivabile in ogni punto di  $J$ .

- $\{f'_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  converge uniformemente su ogni intervallo limitato  $I \subseteq J$
- $\implies f$  è derivabile su  $J$  e  $\forall x \in J$  si ha

$$f'(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f'_n(x)$$

## 9 Serie di Funzioni

### 9.1 Dominio della funzione e convergenze

1. Comprendi dove  $f_n$  è definita anche secondo le condizioni del problema, se anche una sola delle funzioni non esiste allora non può esistere la serie in quel punto.
2. Studia la convergenza della serie come in analisi 1, questa convergenza è solo puntuale.
3. Per la convergenza uniforme studia  $\sup_{x \in E} |f_n(x)|$ . Se questo ha un massimo che non tende a zero all'aumentare di  $n$  allora non si ha convergenza uniforme.

**OSSERVAZIONE:** In caso l'ultimo punto fallisse, c'è un ulteriore metodo, che sfrutta il criterio di Weierstrass, che prevede di maggiorare  $|f_n|$  con una successione numerica  $M_n$  convergente, questo garantisce convergenza più forte.

### 9.2 Conseguenze convergenza uniforme

**Teorema 4.** *Proprietà della convergenza uniforme* Se ho una serie di funzioni convergente su  $E \subseteq \mathbb{R}$  alla funzione somma  $S$ , ho le seguenti proprietà:

- Se ogni  $f_n$  è limitata su  $E \implies S$  è limitata su  $E$ .
- Se ogni  $f_n$  è continua in  $x_0 \in E \implies S$  è continua in  $x_0$ .
- Se ogni  $f_n$  è continua su  $E \implies S$  è limitata su  $E$ .
- Se ogni  $f_n$  è uniformemente continua in  $E \implies S$  è uniformemente continua su  $E$ .

**Teorema 5.** *Integrale e Sommatoria* Se  $f_n$  è continua in  $[a, b]$  e la sua serie converge uniformemente sull'intervallo a  $S$ .

$$\implies \int_a^b S = \int_a^b \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int_a^b f_n(x) dx$$

## 10 Equazioni differenziali di primo ordine

### 10.1 Esistenza e Unicità

**Teorema 6** (Locale).

**Teorema 7** (globale).

## 10.2 a Variabili Separabili

Equazione della forma:

$$y' = h(x) \cdot k(y)$$

Soluzione:

$$\begin{aligned} \int_{x_0}^x \frac{y'(x)}{k(y(x))} dx &= \int_{x_0}^x h(x) dx \\ \text{sostituisco } u = y(x), du &= y'(x) dx \\ \int_{y_0}^y \frac{du}{k(u)} &= \int_{x_0}^x h(x) dx \end{aligned}$$

## 10.3 Lineari del primo ordine

Equazione della forma:

$$y' + p(x)y = q(x), \quad p, q: J \rightarrow \mathbb{R}, \quad J \subseteq \mathbb{R}, \quad p, q \text{ continue in } J$$

Soluzione:

$$y(x) = \exp\left(-\int_{x_0}^x p(t) dt\right) \cdot \left\{ y_0 + \int_{x_0}^x q(r) \exp\left(\int_{x_0}^r p(t) dt\right) dr \right\}$$

## 10.4 Omogenee

Equazione della forma:

$$y' = g\left(\frac{y}{x}\right)$$

Soluzione:

$$\begin{aligned} \text{Sostituisco } t &= \frac{y}{x} \\ \implies y &= x \cdot t(x), \quad y'(x) = t(x) + x \cdot t'(x) \\ \implies t(x) + x \cdot t'(x) &= g(t(x)), \text{ si risolve con le variabili separabili} \end{aligned}$$