Cose Utili per AM2

Stefano Pilosio

21 giugno 2022

1 Convergenza Integrali Impropri

$$\int_0^a \frac{1}{x^\alpha}\mathrm{d}x \begin{cases} \alpha < 1 & \text{converge} \\ \alpha \geq 1 & \text{non converge} \end{cases}$$
$$a \in \mathbb{R} \setminus 0$$

$$\int_a^\infty \frac{1}{x^\alpha}\mathrm{d}x \begin{cases} \alpha > 1 & \text{converge} \\ \alpha \leq 1 & \text{non converge} \end{cases}$$
$$a \in (0, \infty)$$

$$\int_0^a \frac{1}{x^\alpha \log^\beta x}\mathrm{d}x \begin{cases} \alpha < 1 & \forall\beta & \text{converge} \\ \alpha = 1 & \beta > 1 & \text{converge} \\ \alpha = 1 & \beta \leq 1 & \text{non converge} \\ \alpha > 1 & \forall\beta & \text{non converge} \end{cases}$$
$$a \in (0, 1)$$

$$\int_a^\infty \frac{1}{x^\alpha \log^\beta x}\mathrm{d}x \begin{cases} \alpha < 1 & \forall\beta & \text{converge} \\ \alpha = 1 & \beta > 1 & \text{converge} \\ \alpha = 1 & \beta \leq 1 & \text{non converge} \\ \alpha > 1 & \forall\beta & \text{non converge} \end{cases}$$
$$a \in (1, \infty)$$

$$\int_1^a \frac{1}{\log^\beta x}\mathrm{d}x \begin{cases} \beta < 1 & \text{converge} \\ \beta \geq 1 & \text{non converge} \end{cases}$$
$$a \in (0, 1) \vee (1, \infty)$$

1.1 Condizioni Necessarie

Teorema 1 (Condizioni Necessarie Estremante Libero)**.**
$f\colon \Omega \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x_0 \in \Omega^o$, f derivabile in x_0.
Se x_0 è estremante di $f \implies \nabla f(x_0) = \bar{0}$

Questo non basta in quanto un punto estremante in più dimensioni può essere sia un massimo, che un minimo o, infine, un punto di sella

Nel caso del punto di sella questo non è né un minimo né un massimo, tuttavia è stazionario

2 Successioni di funzioni

2.1 Dominio della funzione e convergenze

1. Capisci dove è definita la funzione da analizzare per comprendere la continuità della successione

2. Fai il $\lim_{n\to\infty} f_n(x)$ per capire qual è la funzione limite

3. Verifica che in tutti i punti si abbia convergenza puntuale alla funzione limite

4. Verifica la convergenza uniforme con: $\sup_{x\in E} |f_n(x) - f(x)|$, questo è eseguito cercando un modo per dimostrare o confutare che in ogni punto che $|f_n - f| \to 0$ in un modo o nell'altro.

2.2 Continuità

Teorema 2 (Condizioni per la continuità). *Se ogni f_n è continua e la successione è convergente uniformemente $\implies$ f è continua in x_0, in particolare se f_n è continua su E, f è continua in E.*
OSSERVAZIONE *: se f_n è continua uniforme in E e ha la convergenza uniforme in E $\implies$ f è continua uniforme.*

2.3 Differenziabilità

Teorema 3 (Condizioni per la derivata). *Sia $J \subseteq \mathbb{R}$, intervallo, $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ la successione di funzioni. Se sono verificate le seguenti condizioni:*

- *$\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge puntualmente in J alla funzione limite f.*

- *Ogni f_n è derivabile in ogni punto di J.*

- *$\{f'_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente su ogni intervallo limitato $I \subseteq J$*

$\implies$ *f è derivabile su J e $\forall x \in J$ si ha*

$$f'(x) = \lim_{n\to\infty} f'_n(x)$$

3 Serie di Funzioni

3.1 Dominio della funzione e convergenze

1. Comprendi dove f_n è definita anche secondo le condizioni del problema, se anche una sola delle funzioni non esiste allora non può esistere la serie in quel punto.

2. Studia la convergenza della serie come in analisi 1, questa convergenza è solo puntuale.

3. Per la convergenza uniforme studia $sup_{x \in E}|f_n(x)|$. Se questo ha un massimo che non tende a zero all'aumentare di n allora non si ha convergenza uniforme. Se per esempio lo zero fosse un punto problematico basta evitare di includerlo nell'intervallo selezionando un ϵ maggiore o minore del punto problematico.

OSSERVAZIONE: In caso l'ultimo punto fallisse, c'è un ulteriore metodo, che sfrutta il criterio di Weierstrass, che prevede di maggiorare $|f_n|$ con una successione numerica M_n convergente, questo garantisce convergenza più forte.

3.2 Conseguenze convergenza uniforme

Teorema 4. *Proprietà della convergenza uniforme Se ho una serie di funzioni convergente su $E \subseteq \mathbb{R}$ alla funzione somma S, ho le seguenti proprietà:*

- *Se ogni f_n è limitata su $E \implies S$ è limitata su E.*
- *Se ogni f_n è continua in $x_0 \in E \implies S$ è continua in x_0.*
- *Se ogni f_n è continua su $E \implies S$ è limitata su E.*
- *Se ogni f_n è uniformemente continua in $E \implies S$ è uniformemente continua su E.*

Teorema 5. *Integrale e Sommatoria Se f_n è continua in [a,b] e la sua serie converge uniformemente sull'intervallo a S.*

$$\implies \int_a^b S = \int_a^b \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int_a^b f_n(x)dx$$

4 Equazioni differenziali di primo ordine

4.1 a Variabili Separabili

Equazione della forma:

$$y' = h(x) \cdot k(y)$$

Soluzione:

$$\int_{x_0}^{x} \frac{y'(x)}{k(y(x))}\mathrm{d}x = \int_{x_0}^{x} h(x)\mathrm{d}x$$

$$\text{sostituisco} \quad u = y(x),\ du = y'(x)dx$$

$$\int_{y_0}^{y} \frac{\mathrm{d}u}{k(u)} = \int_{x_0}^{x} h(x)\mathrm{d}x$$

4.2 Lineari del primo ordine

Equazione della forma:

$$y' + p(x)y = q(x), \quad p, q \colon J \to \mathbb{R},\ J \subseteq \mathbb{R},\ p, q \text{ continue in } J$$

Soluzione:

$$y(x) = \exp\left(-\int_{x_0}^{x} p(t)\mathrm{d}t\right) \cdot \left\{y_0 + \int_{x_0}^{x} q(r)\exp\left(\int_{x_0}^{r} p(t)\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}r\right\}$$

4.3 Omogenee

Equazione della forma:

$$y' = g\left(\frac{y}{x}\right)$$

Soluzione:

$$\text{Sostituisco } t = \frac{y}{x}$$
$$\implies y = x \cdot t(x),\ y'(x) = t(x) + x \cdot t'(x)$$
$$\implies t(x) + x \cdot t'(x) = g(t(x)), \text{ si risolve con le variabili separabili}$$