LOGIQUE. — *Contraction de structures et application à NFU (les « New Foundations » de Quine avec extensionnalité pour les ensembles non vides). Définition du « degré de non-extensionnalité » d'une relation quelconque.* Note (*) de **Roland Hinnion,** présentée par Jean Leray.

Il est bien connu que pour toute structure bien fondée il existe un épimorphisme particulier dont l'image est modèle de l'axiome d'extensionnalité. Nous montrons l'existence d'un tel épimorphisme dans le cas de structures quelconques, ainsi que l'équivalence de la cohérence de NF (les « New Foundations » de Quine) avec l'existence d'un certain modèle de NFU. Enfin nous définissons le degré de non-extensionnalité d'une relation quelconque.

It is a well-known fact that for each well-founded binary relation there exists a particular surjective morphism whose range is a model of the axiom of extensionality. We show that such a morphism exists even when the relation is not well-founded. We are then able to show that the consistency of NF (Quine's "New Foundations") is equivalent to the existence of some particular model of NFU. At last we define the "unextensionality" degree of an arbitrary relation.

INTRODUCTION. — Soit $M = \langle A, R \rangle (R \subset A \times A)$ une structure bien fondée [1].

La construction suivante est bien connue : on définit l'application F par « induction » sur $R : F(a) = \{ F(b) \mid b R a \} (a \in A)$. On vérifie aisément que $T = \{ F(a) \mid a \in A \}$ est un ensemble transitif et que la structure $\langle T, \in \rangle$ est modèle de EXT [l'axiome d'extensionnalité : $\forall t (t \in x \Leftrightarrow t \in y) \Rightarrow x = y$].

La fonction F est un épimorphisme de M sur $\langle T, \in \rangle$ dont l'image est modèle de EXT et qui possède la propriété suivante : $\{ z \in T \mid z \in F(a) \} = \{ F(t) \mid t R a \}$.

Si nous abandonnons l'exigence que l'image doit être un ensemble transitif, nous obtenons la notion suivante (valable même si M n'est pas bien fondée) :

DÉFINITION. — f est une contraction de la structure $M = \langle A, R \rangle$ si et seulement si il existe une structure $N = \langle B, S \rangle$ telle que :

(1) f est un épimorphisme de M sur N [c'est-à-dire f est une surjection telle que $x R y \Rightarrow f(x) S f(y)$];

(2) $N \models EXT$ (N est modèle de l'axiome d'extensionnalité);

(3) $\{ z \in B \mid z S f(a) \} = \{ f(t) \mid t R a \}$ [propriété de conservation : l'ensemble des images des « éléments » de a (au sens de M) est l'image de « l'ensemble » a].

N = l'image de M par f sera noté M^f.

Une contraction permet donc de transformer un modèle M en un modèle $M^f \models EXT$. Nous avons signalé ci-dessus l'existence d'une contraction dans le cas où M est bien fondée. Nous prouvons dans la première partie que dans ce cas, la contraction est unique (à isomorphisme près) et que, d'autre part, toute structure (même non bien fondée) admet une contraction. On aurait pu espérer alors (dans une métathéorie assez forte) que la contraction d'un modèle de NFU [2] donnerait un modèle de NF [3]. Malheureusement, il n'en est rien, comme nous le montrons dans la deuxième partie. Cependant, il est vrai que la contraction d'un modèle « convenable » de NFU fournit un modèle de NF.

Dans la troisième partie, nous définissons le degré de « non-extensionnalité » d'une structure M quelconque.

PREMIÈRE PARTIE. — Nous dirons que deux contractions f et g de M sont isomorphes ($f \cong g$) si et seulement si $M^f \cong M^g$. Considérons toutes les contractions de M et introduisons la relation suivante : $f \leqq g$ si g se factorise à travers f, c'est-à-dire s'il existe une contraction h de M^f sur M^g telle que $g = h \circ f$. On peut vérifier que si $f \leqq g$ et $g \leqq f$, alors $f \cong g$; $\leqq$ est en fait un ordre partiel sur les contractions de M, considérées à isomorphisme près.

Une contraction f de M sera dite minimale si elle est minimale au sens de $\leqq$; cela signifie donc que toute autre contraction g de M se factorise à travers f.

THÉORÈME. – *Soit* $M = \langle A, R \rangle$ *une structure quelconque; alors il existe une contraction minimale de* M, *unique à isomorphisme près.*

Démonstration. – (1) Les lettres grecques α, β, γ, δ, ... désignent des ordinaux de von Neumann; la métathéorie utilisée ici est celle de Zermelo [4]; on pourrait également utiliser la théorie des types, moyennant quelques modifications d'ordre technique.

$M = \langle A, R \rangle$, $R \subset A \times A$. Sur A, définissons les équivalences $\sim^{\alpha}$:

$x \sim^0 y \Leftrightarrow x = y$;

$x \sim^1 y \Leftrightarrow \forall t \in A (t R x \Leftrightarrow t R y)$;

$x \sim^{\alpha+1} y \Leftrightarrow (\forall t R x, \exists t' \sim^{\alpha} t, t' R y)$ et $(\forall z R y, \exists z' \sim^{\alpha} z, z' R x)$;

$x \sim^{\gamma} y \Leftrightarrow \exists \alpha < \gamma, x \sim^{\alpha} y$ (pour γ limite).

(2) DÉFINITIONS :

$$[x]^{\alpha} = \{ y \mid y \sim^{\alpha} x \},$$

$$A^{\alpha} = \{ [x]^{\alpha} \mid x \in A \},$$

$$M^{\alpha} = \langle A^{\alpha}, R^{\alpha} \rangle, \quad \text{où} \quad [x]^{\alpha} R^{\alpha} [y]^{\alpha} \quad \text{ssi } \exists x' \sim^{\alpha} x, \exists y' \sim^{\alpha} y, x' R y',$$

f^{α} est l'application : $M \to M^{\alpha} : x \mapsto [x]^{\alpha}$.

(3) On vérifie aisément que $\alpha \leqq \beta \Leftrightarrow [x]^{\alpha} \subset [x]^{\beta}$ et que les f^{α} sont des épimorphismes ayant la propriété de conservation, c'est-à-dire que

$$\{ z \in A^{\alpha} \mid z R^{\alpha} f^{\alpha}(x) \} = \{ f^{\alpha}(t) \mid t R x \}.$$

(4) Montrons qu'il existe un ordinal δ tel que $M^{\delta} = M^{\delta+1}$.

Soit $X = \{ Y \in PPA \mid Y$ est une partition de A et il existe un ordinal α tel que $Y = A^{\alpha} \}$.

PZ désigne l'ensemble des parties de Z.

X est bien ordonné par la relation : $Y_1 \leqq Y_2$ si tout élément de la partition Y_1 est inclus dans un élément de la partition Y_2. Soit δ le nombre ordinal « mesurant » le bon ordre $\langle X, \leqq \rangle$. On a clairement : $M^{\delta+1} = M^{\delta}$.

(5) LEMME. – *Si g est un épimorphisme de* $M = \langle A, R \rangle$ *sur* $M = \langle B, S \rangle$, *alors g possède la propriété de conservation si* $\forall x, y \in A (g(x) S g(y) \Rightarrow \exists x' \sim^{g} x, x' R y)$. *L'équivalence* $\sim^{g}$ *sur* A *étant définie par :* $x' \sim^{g} x \Leftrightarrow g(x') = g(x)$.

Ce lemme permet de montrer aisément que $M^{\delta} = M^{\delta+1} \Leftrightarrow M^{\delta} \models \mathrm{EXT}$. Il en résulte que f^{δ} est une contraction.

(6) LEMME. – *Soit g une contraction de* M *et α un ordinal. Alors*

$$\forall x, x' \in A\, x \sim^{\alpha} x' \Rightarrow x \sim^{g} x'.$$

Ce lemme se démontre par induction sur α.

Il en résulte que, si δ est tel que $M^{\delta+1} = M^{\delta}$, et g est une contraction de M, alors g se factorise à travers f^{δ}. La fonction h telle que $h \circ f^{\delta} = g$ est définie par : $h([x]^{\delta}) = g(x)$. On montre que h est une contraction de M^{δ} sur M^{g}.

(7) Si f et g sont deux contractions minimales de M, on a évidemment : $f \leqq g$ et $g \leqq f$, d'où il résulte $f \cong g$ (en vertu d'une remarque ci-dessus).

Nous achèverons cette première partie en énonçant (sans démonstration) quelques propositions concernant les contractions :

PROPOSITION 1. — *La contraction d'une structure bien fondée est unique, à isomorphisme près.*

PROPOSITION 2. — *Soit* $M = \langle A, R \rangle$ *une extension finale de* $N = \langle B, R \rangle$ *(c'est-à-dire que* $B \subset A$, *que* R *dans* N *est la restriction à* B *de* R *dans* M *et que* $\forall x, y \in A\,[y \in B \text{ et } x R y \Rightarrow x \in B)]$. *Alors la restriction à* B *d'une contraction de* M *est une contraction de* N.

PROPOSITION 3. — *Soit* N *une sous-structure de* M, *et* $N \models \mathrm{EXT}$. *Alors la contraction minimale de* M *restreinte à* N *est un isomorphisme.*

DEUXIÈME PARTIE. — Soit g une contraction de $M = \langle A, R \rangle$ sur $M^g = \langle B, S \rangle$.

Nous dirons que la formule (du langage de ZF) $\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ est conservée (par g) si $\forall a_1, a_2, \ldots, a_n \in A$ on a

$$M \models \varphi(a_1, a_2, \ldots, a_n) \quad \Rightarrow \quad M^g \models \varphi(g(a_1), g(a_2), \ldots, g(a_n)).$$

Clairement, les formules positives sont conservées [5].

On remarque que certaines formules non positives sont également conservées, par exemple : $x = y \cup z$, $x = \{y, z\}$, $x = y \times z$ (le produit cartésien), $x = \bigcup y$, $x \subset y$, etc. La classe des formules conservées par contraction semble complexe et est en tout cas loin d'être connue avec précision.

Malheureusement, la contraction d'un modèle quelconque de NFU ne donne qu'un modèle d'un fragment de NF, fragment mal connu, mais dont on peut affirmer qu'il contient au moins les axiomes de compréhension contenant les formules atomiques stratifiées, ainsi que l'axiome de la réunion, du produit cartésien, etc.

Rien cependant ne permet d'affirmer que ce fragment contient l'axiome de l'intersection, ni du complémentaire, ni de l'ensemble des parties d'un ensemble, etc.

Cependant, si la contraction et le modèle de NFU sont « convenables », on peut obtenir un modèle de NF, comme le montre le théorème suivant :

THÉORÈME. — $\exists N, N \models \mathrm{NF}$ *si et seulement si* $\exists M, M \models \mathrm{NFU}$ *et* $\exists g$, *g est une contraction de* M définissable *dans* M.

Par contraction définissable, nous entendons une contraction g telle qu'il existe une formule stratifiée $\theta(x, y, \vec{z})$, où « x » et « y » ont le même type, et des paramètres $\vec{c}$ dans M tels que

$$g(a) = g(b) \quad \Leftrightarrow \quad M \models \theta(a, b, \vec{c}).$$

Démonstration. — (1) Si $\exists N, N \models \mathrm{NF}$, la fonction identique sur N est une contraction définissable de N sur N.

(2) Soit M et g une contraction définissable de $M \models \mathrm{NFU}$.

On peut montrer par induction sur la longueur de la formule $\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ que pour toute formule $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ stratifiée, il existe une formule $\bar{\varphi}(x_1, \ldots, x_n)$ stratifiée, où les variables « x_i » ont le même type que dans φ, et telle que

$$\forall a_1, \ldots, a_n \in A, \quad (M^g \models \varphi(g(a_1), \ldots, g(a_n)) \Leftrightarrow M \models \bar{\varphi}(a_1, \ldots, a_n)),$$

M^g est bien entendu modèle de EXT.

Il suffit donc de montrer que, si $\varphi(t, \vec{x})$ est une formule stratifiée, l'ensemble $\{t \mid \varphi(t, \vec{x})\}$ existe dans M^g pour toute « valeur » $g(a_i)$ donnée aux paramètres « x_i ».

On vérifie aisément que

$$\forall t \in A\,[g(t)\, S\, g(\{t \mid \bar{\varphi}(t, a_i)\}) \Leftrightarrow M^g \models \varphi(g(t), g(a_i))],$$

où S est la relation de M^g, ce qui montre que l'ensemble $\{ t \mid \varphi(t, x_i) \}$ pour les paramètres $x_i = g(a_i)$ est simplement $g(\{ t \mid \bar{\varphi}(t, a_i) \})$.

TROISIÈME PARTIE. — Le degré de non-extensionnalité δ_M d'une structure $M = \langle A, R \rangle$ est défini comme étant le plus petit ordinal α tel que $M^\alpha = M^{\alpha+1}$. On a donc trivialement : $M \models EXT \Leftrightarrow \delta_M = 0$ et $M^{\delta M} \models EXT$.

En admettant l'axiome de choix : $|A \times A| = |A|$ (où $|x|$ désigne le cardinal de x), on peut démontrer la proposition suivante :

THÉORÈME :

$$\forall M = \langle A, R \rangle \, |\delta_M| \leqq |A|.$$

Démonstration. — (1) Si A est fini, on a : $\forall \alpha, \beta \leqq \delta (\alpha < \beta \Rightarrow |A^\beta| < |A^\alpha|)$; or $|A^0| = |A| = n$ un nombre fini, et $|A^\delta| \geqq 1$. On en déduit que $\delta \leqq n-1$.

(2) Si A est infini, définissons $(R^\alpha)^*$ par

$$x (R^\alpha)^* y \Leftrightarrow [x]^\alpha R^\alpha [y]^\alpha.$$

Les $(R^\alpha)^*$ $(\alpha \leqq \delta)$ constituent une chaîne croissante pour l'inclusion, et $\forall \alpha (R^\alpha)^* \subset A \times A$; de plus, on montre par induction sur α que $(R^\alpha)^* = (R^{\alpha+1})^* \Rightarrow M^{\alpha+1} = M^{\alpha+2}$. On en déduit que $|\delta_M| \leqq |A \times A| = |A|$.

(*) Remise le 14 janvier 1980, acceptée le 14 avril 1980.

[1] HINNION, *Comptes rendus*, 279, série A, 1974, p. 42.
[2] JENSEN, *Synthèse*, 19, 1968-1969, p. 250-263.
[3] QUINE, *Amer. Monthly*, 44, 1937, p. 70-80.
[4] CHANG et KEISLER, North-Holland Publishing Company, 1973, p. 507-509.
[5] *Idem*, p. 126.

Rue d'Elsenbosch, 4, 5919 *Hélécine, Belgique*.