objects of our perception or our thought"[2] therefore certainly requires some restriction; it has not, however, been successfully replaced by one that is just as simple and does not give rise to such reservations. Under these circumstances there is at this point nothing left for us to do but to proceed in the opposite direction and, starting from "set theory" as it is historically given, to seek out the principles required for establishing the foundations of this mathematical discipline. In solving the problem we must, on the one hand, restrict these principles sufficiently to exclude all contradictions and, on the other, take them sufficiently wide to retain all that is valuable in this theory.

Now in the present paper I intend to show how the entire theory created by *G. Cantor* and *R. Dedekind* can be reduced to a few definitions and seven "principles", or "axioms", which appear to be mutually independent. The further, more philosophical, question about the origin of these principles and the extent to which they are valid will not be discussed here. I have not yet even been able to prove rigorously that my axioms are "consistent", though this is certainly very essential; instead I have had to confine myself to pointing out now and then that the "antinomies" discovered so far vanish one and all if the principles here proposed are adopted as a basis. But I hope to have done at least some useful spadework hereby for subsequent investigations in such deeper problems.

The present paper contains the axioms and their most immediate consequences, as well as a theory of equivalence based upon these principles that avoids the formal use of cardinal numbers. A second paper, which will develop the theory of well-ordering together with its application to finite sets and the principles of arithmetic, is in preparation.

§ 1.
Fundamental definitions and axioms

1. Set theory is concerned with a "*domain*" $\mathfrak{B}$ of individuals, which we shall call simply "*objects*" and among which are the "sets". If two symbols, a and b, denote the same object, we write $a = b$, otherwise $a \neq b$. We say of an object a that it "exists" if it belongs to the domain $\mathfrak{B}$; likewise we say of a class $\mathfrak{K}$ of objects that "there exist objects of the class $\mathfrak{K}$" if $\mathfrak{B}$ contains at least one individual of this class.

2. Certain "*fundamental relations*" of the form $a \varepsilon b$ obtain between the objects of the domain $\mathfrak{B}$. If for two objects a and b the relation $a \varepsilon b$ holds, we say "a is an *element* of the set b", "b contains a as an element", or "b possesses

[2] *Cantor 1895*, p. 481.

das Element a". Ein Ding b, welches ein anderes a als Element enthält, kann immer als eine *Menge* bezeichnet werden, aber auch nur dann — mit einer einzigen Ausnahme (Axiom II).

3. Ist jedes Element x einer Menge M gleichzeitig auch Element der Menge N, so daß aus $x \varepsilon M$ stets $x \varepsilon N$ gefolgert werden kann, so sagen wir, „M sei *Untermenge* von N", und schreiben $M \mathrel{\underline{\in}} N$.[1] Es ist stets $M \mathrel{\underline{\in}} M$, und aus
263 $M \mathrel{\underline{\in}} N$ und $N \mathrel{\underline{\in}} R$ folgt immer $M \mathrel{\underline{\in}} R$. „*Elementenfremd*" | heißen zwei Mengen M, N, wenn sie keine „gemeinsamen" Elemente besitzen, oder wenn kein Element von M gleichzeitig Element von N ist.

4. Eine Frage oder Aussage $\mathfrak{E}$, über deren Gültigkeit oder Ungültigkeit die Grundbeziehungen des Bereiches vermöge der Axiome und der allgemeingültigen logischen Gesetze ohne Willkür entscheiden, heißt „*definit*". Ebenso wird auch eine „Klassenaussage" $\mathfrak{E}(x)$, in welcher der variable Term x alle Individuen einer Klasse $\mathfrak{K}$ durchlaufen kann, als „definit" bezeichnet, wenn sie für *jedes einzelne* Individuum x der Klasse $\mathfrak{K}$ definit ist. So ist die Frage, ob $a \varepsilon b$ oder nicht ist, immer definit, ebenso die Frage, ob $M \mathrel{\underline{\in}} N$ oder nicht.

Über die Grundbeziehungen unseres Bereiches $\mathfrak{B}$ gelten nun die folgenden „*Axiome*" oder „*Postulate*".

Axiom I. Ist jedes Element einer Menge M gleichzeitig Element von N und umgekehrt, ist also gleichzeitig $M \mathrel{\underline{\in}} N$ und $N \mathrel{\underline{\in}} M$, so ist immer $M = N$. Oder kürzer: jede Menge ist durch ihre Elemente bestimmt.

(Axiom der Bestimmtheit.)

Die Menge, welche nur die Elemente $a, b, c, \ldots, r$ enthält, wird zur Abkürzung vielfach mit $\{a, b, c, \ldots, r\}$ bezeichnet werden.

Axiom II. Es gibt eine (uneigentliche) Menge, die „*Nullmenge*" 0, welche gar keine Elemente enthält. Ist a irgend ein Ding des Bereiches, so existiert eine Menge $\{a\}$, welche a und nur a als Element enthält; sind a, b irgend zwei Dinge des Bereiches, so existiert immer eine Menge $\{a, b\}$, welche sowohl a als b, aber kein von beiden verschiedenes Ding x als Element enthält.

(Axiom der Elementarmengen.)

5. Nach I sind die „Elementarmengen" $\{a\}$, $\{a, b\}$ immer eindeutig bestimmt, und es gibt nur eine einzige „Nullmenge". Die Frage, ob $a = b$ oder nicht, ist immer definit (Nr. 4), da sie mit der Frage, ob $a \varepsilon \{b\}$ ist, gleichbedeutend ist.

6. Die Nullmenge ist Untermenge jeder Menge M, $0 \mathrel{\underline{\in}} M$; eine gleichzeitig von 0 und M verschiedene Untermenge von M wird als „*Teil*" von M bezeichnet. Die Mengen 0 und $\{a\}$ besitzen keine Teile.

[1] Dieses „Subsumptions"-Zeichen wurde von *E. Schröder* („Vorlesungen über Algebra der Logik" Bd. I) eingeführt, Herr *G. Peano* und ihm folgend *B. Russell*, *Whitehead* u.a. brauchen dafür das Zeichen Ɔ.

the element a". An object b may be called a *set* if and—with a single exception (Axiom II)—only if it contains another object, a, as an element.

3. If every element x of a set M is also an element of the set N, so that from $x \varepsilon M$ it always follows that $x \varepsilon N$, we say that "M is a *subset* of N" and we write $M \subseteq N$.[3] We always have $M \subseteq M$ and from $M \subseteq N$ and $N \subseteq R$ it always follows that $M \subseteq R$. Two sets M and N are said to be "*disjoint*" if they possess no common element, or if no element of M is an element of N.

4. A question or assertion $\mathfrak{E}$ is said to be "*definite*" if the fundamental relations of the domain, by means of the axioms and the universally valid laws of logic, determine without arbitrariness whether it holds or not. Likewise a "propositional function" $\mathfrak{E}(x)$, in which the variable term x ranges over all individuals of a class $\mathfrak{K}$, is said to be "definite" if it is definite for *each single* individual x of the class $\mathfrak{K}$. Thus the question whether $a \varepsilon b$ or not is always definite, as is the question whether $M \subseteq N$ or not.

The fundamental relations of our domain $\mathfrak{B}$, now, are subject to the following "*axioms*", or "*postulates*".

Axiom I. If every element of a set M is also an element of N and vice versa, if, therefore, both $M \subseteq N$ and $N \subseteq M$, then always $M = N$; or, more briefly: Every set is determined by its elements.

(Axiom of extensionality.)

The set that contains only the elements $a, b, c, \ldots, r$ will often be denoted briefly by $\{a, b, c, \ldots, r\}$.

Axiom II. There exists a (fictitious) set, the "*null set*", 0, that contains no element at all. If a is any object of the domain, there exists a set $\{a\}$ containing a and only a as element; if a and b are any two objects of the domain, there always exists a set $\{a, b\}$ containing as elements a and b but no object x distinct from both.

(Axiom of elementary sets.)

5. According to Axiom I, the "elementary sets" $\{a\}$ and $\{a, b\}$ are always uniquely determined and there is only a single "null set". The question whether $a = b$ or not is always definite (No. 4), since it is equivalent to the question whether or not $a \varepsilon \{b\}$.

6. The null set is a subset of every set M: $0 \subseteq M$; a subset of M that differs from both 0 and M is called a "part" of M. The sets 0 and $\{a\}$ do not have parts.

[3] ⟦Zermelo uses the sign "⋲" for inclusion. He comments here:⟧ This sign ⟦⋲⟧ of inclusion was introduced by *Schröder* (*1890*). *Peano* and, following him, *Russell*, *Whitehead*, and others use the sign Ↄ instead.

Axiom III. Ist die Klassenaussage $\mathfrak{E}(x)$ definit für alle Elemente einer Menge M, so besitzt M immer eine Untermenge $M_{\mathfrak{E}}$, welche alle diejenigen Elemente x von M, für welche $\mathfrak{E}(x)$ wahr ist, und nur solche als Elemente enthält.

(Axiom der Aussonderung.)

Indem das vorstehende Axiom III in weitem Umfange die Definition neuer Mengen gestattet, bildet es einen gewissen Ersatz für die in der Einleitung angeführte und als unhaltbar aufgegebene allgemeine Mengendefinition, von der es sich durch die folgenden Einschränkungen unterscheidet: Erstens dürfen mit Hilfe dieses Axio-
264 mes | niemals Mengen *independent definiert*, sondern immer nur als Untermengen aus bereits gegebenen *ausgesondert* werden, wodurch widerspruchsvolle Gebilde wie „die Menge aller Mengen" oder „die Menge aller Ordinalzahlen" und damit nach dem Ausdrucke des Herrn *G. Hessenberg* („Grundbegriffe der Mengenlehre" XXIV) die „ultrafiniten Paradoxieen" ausgeschlossen sind. Zugleich muß zweitens das bestimmende Kriterium $\mathfrak{E}(x)$ im Sinne unserer Erklärung Nr. 4 immer „definit" d. h. für jedes einzelne Element x von M durch die „Grundbeziehungen des Bereiches" entschieden sein, und hiermit kommen alle solchen Kriterien wie „durch eine endliche Anzahl von Worten definierbar" und damit die „Antinomie Richard" oder die „Paradoxie der endlichen Bezeichnung" (*Hessenberg* a. a. O. XXIII, vergl. dagegen *J. König*, Math. Ann. Bd. 61, p. 156) für unseren Standpunkt in Wegfall. Hieraus folgt aber auch, daß, streng genommen, vor jeder Anwendung unseres Axioms III immer erst das betreffende Kriterium $\mathfrak{E}(x)$ als „definit" nachgewiesen werden muß, was denn auch in den folgenden Entwicklungen bei jeder Gelegenheit, wo es nicht ganz selbstverständlich ist, immer geschehen soll.

7. Ist $M_1 \mathrel{\underline{\in}} M$, so besitzt M immer eine weitere Untermenge $M - M_1$, die „*Komplementärmenge* von M_1", welche alle diejenigen Elemente von M umfaßt, die *nicht* Elemente von M_1 sind. Die Komplementärmenge von $M - M_1$ ist wieder M_1. Die Komplementärmenge von $M_1 = M$ ist die Nullmenge 0, die Komplementärmenge jedes „Teiles" M_1 von M (Nr. 6) ist wieder ein „Teil" von M.

8. Sind M, N irgend zwei Mengen, so bilden nach III diejenigen Elemente von M, welche gleichzeitig Elemente von N sind, die Elemente einer Untermenge D von M, welche auch Untermenge von N ist und alle M und N *gemeinsamen* Elemente umfaßt. Diese Menge D wird der „gemeinsame Bestandteil" oder der „*Durchschnitt*" der Mengen M und N genannt und mit $[M, N]$ bezeichnet. Ist $M \mathrel{\underline{\in}} N$, so ist $[M, N] = M$; ist $N = 0$ oder sind M und N „elementenfremd" (Nr. 3), so ist $[M, N] = 0$.

9. Ebenso existiert auch für mehrere Mengen $M, N, R, \ldots$ immer ein „Durchschnitt" $D = [M, N, R, \ldots]$. Ist nämlich T irgend eine Menge, deren Elemente selbst Mengen sind, so entspricht nach III jedem Dinge a eine gewisse Untermenge $T_a \mathrel{\underline{\in}} T$, welche alle diejenigen Elemente von T umfaßt, die a als Element enthalten. Es ist somit für jedes a definit, ob $T_a = T$ ist, d. h. ob a gemeinsames Element aller Elemente von T ist, und ist A ein beliebiges Element von T, so bilden alle Elemente a von A, für welche $T_a = T$

Axiom III. Whenever the propositional function $\mathfrak{E}(x)$ is definite for all elements of a set M, M possesses a subset $M_{\mathfrak{E}}$ containing as elements precisely those elements x of M for which $\mathfrak{E}(x)$ is true.

(Axiom of separation.)

By giving us a large measure of freedom in defining new sets, Axiom III in a sense furnishes a substitute for the general definition of set that was cited in the introduction and rejected as untenable. It differs from that definition in that it contains the following restrictions. In the first place, sets may never be *independently defined* by means of this axiom but must always be *separated* as subsets from sets already given; thus contradictory notions such as "the set of all sets" or "the set of all ordinal numbers", and with them the "ultrafinite paradoxes", to use Mr. *G. Hessenberg*'s expression (*1906*, chap. 24), are excluded. In the second place, moreover, the defining criterion must always be "definite" in the sense of our definition in No. 4 (that is, for each single element x of M the "fundamental relations of the domain" must determine whether it holds or not), with the result that, from our point of view, all criteria such as "definable by means of a finite number of words", hence the "Richard antinomy" and the "paradox of finite denotation" (*Hessenberg 1906*, chap. 23; on the other hand, see *J. König 1905c*) vanish. But it also follows that we must, prior to each application of our Axiom III, prove the criterion $\mathfrak{E}(x)$ in question to be "definite", if we wish to be rigorous; in the considerations developed below this will indeed be proved whenever it is not altogether evident.

7. If $M_1 \subseteq M$, then M always possesses another subset, $M - M_1$, the "*complement* of M_1", which contains all those elements of M that are *not* elements of M_1. The complement of $M - M_1$ is M_1 again. If $M_1 = M$, its complement is the null set, 0; the complement of any "part" (No. 6) M_1 of M is again a "part" of M.

8. If M and N are any two sets, then according to Axiom III all those elements of M that are also elements of N are the elements of a subset D of M; D is also a subset of N and contains all elements *common* to M and N. This set D is called the "common component", or "*intersection*", of the sets M and N and is denoted by $[M, N]$. If $M = N$, then $[M, N] = M$; if $N = 0$ or if M and N are "disjoint" (No. 3), then $[M, N] = 0$.

9. Likewise, for several sets $M, N, R, \ldots$ there always exists an "intersection" $D = [M, N, R, \ldots]$. For, if T is any set whose elements are themselves sets, then according to Axiom III there corresponds to every object a a certain subset T_a of T that contains all those elements of T that contain a as an element. Thus it is definite for every a whether $T_a = T$, that is, whether a is a common element of all elements of T; if A is an arbitrary element of T, all elements a of A for which $T_a = T$ are the elements of a subset D of A that

ist, die Elemente einer Untermenge D von A, welche alle diese gemeinsamen Elemente umfaßt. Diese Menge D wird „der zu T gehörende Durchschnitt“ genannt und mit $\mathfrak{D}T$ bezeichnet. Besitzen die Elemente von T keine gemeinsamen Elemente, so ist $\mathfrak{D}T = 0$, und dies ist z. B. immer der Fall, wenn ein Element von T keine Menge oder die Nullmenge ist.

10. *Theorem.* Jede Menge M besitzt mindestens eine Untermenge M_0, welche nicht Element von M ist.

265 | *Beweis.* Für jedes Element x von M ist es definit, ob $x \,\varepsilon\, x$ ist oder nicht; diese Möglichkeit $x \,\varepsilon\, x$ ist an und für sich durch unsere Axiome nicht ausgeschlossen. Ist nun M_0 diejenige Untermenge von M, welche gemäß III alle solchen Elemente von M umfaßt, für die *nicht* $x \,\varepsilon\, x$ ist, so kann M_0 nicht Element von M sein. Denn entweder ist $M_0 \,\varepsilon\, M_0$ oder nicht. Im ersteren Falle enthielte M_0 ein Element $x = M_0$, für welches $x \,\varepsilon\, x$ wäre, und dieses widerspräche der Definition von M_0. Es ist also sicher *nicht* $M_0 \,\varepsilon\, M_0$, und es müßte somit M_0, wenn es Element von M wäre, auch Element von M_0 sein, was soeben ausgeschlossen wurde.

Aus dem Theorem folgt, daß nicht alle Dinge x des Bereiches $\mathfrak{B}$ Elemente einer und derselben Menge sein können; d. h. *der Bereich* $\mathfrak{B}$ *ist selbst keine Menge*, — womit die „*Russell*sche Antinomie“ für unseren Standpunkt beseitigt ist.

Axiom IV. Jeder Menge T entspricht eine zweite Menge $\mathfrak{U}T$ (die „*Potenzmenge*“ von T), welche alle Untermengen von T und nur solche als Elemente enthält.

(Axiom der Potenzmenge.)

Axiom V. Jeder Menge T entspricht eine Menge $\mathfrak{S}T$ (die „*Vereinigungsmenge*“ von T), welche alle Elemente der Elemente von T und nur solche als Elemente enthält.

(Axiom der Vereinigung.)

11. Ist kein Element von T eine von 0 verschiedene Menge, so ist natürlich $\mathfrak{S}T = 0$. Ist $T = \{M, N, R, \ldots\}$, wo die $M, N, R, \ldots$ sämtlich Mengen sind, so schreibt man auch $\mathfrak{S}T = M + N + R + \cdots$ und nennt $\mathfrak{S}T$ die „*Summe* der Mengen $M, N, R, \ldots$“, ob einige dieser Mengen $M, N, R, \ldots$ nun gemeinsame Elemente besitzen oder nicht. Es ist immer $M = M + 0 = M + M = M + M + \cdots$.

12. Für die soeben definierte „Addition“ der Mengen gilt das „kommutative“ und das „assoziative“ Gesetz:

$$M + N = N + M\,, \quad M + (N + R) = (M + N) + R\,.$$

contains all these common elements. This set D is called "the intersection associated with T" and is denoted by $\mathfrak{D}T$. If the elements of T do not possess a common element, $\mathfrak{D}T = 0$, and this is always the case if, for example, an element of T is not a set or if it is the null set.

10. *Theorem.* Every set M possesses at least one subset M_0 that is not an element of M.

Proof. It is definite for every element x of M whether $x \varepsilon x$ or not; the possibility that $x \varepsilon x$ is not in itself excluded by our axioms. If now M_0 is the subset of M that, in accordance with Axiom III, contains all those elements of M for which it is *not* the case that $x \varepsilon x$, then M_0 cannot be an element of M. For either $M_0 \varepsilon M_0$ or not. In the first case, M_0 would contain an element $x = M_0$ for which $x \varepsilon x$, and this would contradict the definition of M_0. Thus M_0 is surely *not* an element of M_0, and in consequence M_0, if it were an element of M, would also have to be an element of M_0, which was just excluded.

It follows from the theorem that not all objects x of the domain $\mathfrak{B}$ can be elements of one and the same set; that is, *the domain* $\mathfrak{B}$ *is not itself a set*, and this disposes of the "*Russell* antinomy" so far as we are concerned.

Axiom IV. To every set T there corresponds another set $\mathfrak{U}T$, the "*power set*" of T, that contains as elements precisely all subsets of T.

(Axiom of the power set.)

Axiom V. To every set T there corresponds a set $\mathfrak{S}T$, the "*union*" of T, that contains as elements precisely all elements of the elements of T.

(Axiom of the union.)

11. If no element of T is a set different from 0, then, of course, $\mathfrak{S}T = 0$. If $T = \{M, N, R, \ldots\}$, where $M, N, R, \ldots$ all are sets, we also write $\mathfrak{S}T = M + N + R + \cdots$ and call $\mathfrak{S}T$ the "*sum*" of the sets $M, N, R, \ldots$, whether some of these sets $M, N, R, \ldots$ contain common elements or not. Always $M = M + 0 = M + M = M + M + \cdots$.

12. For the "addition" of sets that we have just defined, the "commutative" and "associative" laws hold:

$$M + N = N + M\,, \quad M + (N + R) = (M + N) + R\,.$$

Endlich gilt für „Summen" und „Durchschnitte" (Nr. 8) auch das „distributive" Gesetz in doppelter Form:

$$[M+N, R] = [M, R] + [N, R]\,,$$
$$[M, N] + R = [M+R, N+R]\,.$$

Den Beweis führt man mit Hilfe von I, indem man zeigt, daß jedes Element der linksstehenden Menge zugleich Element der rechtsstehenden Menge ist und umgekehrt.[1]

266 | 13. *Einführung des Produktes.* Ist M eine von 0 verschiedene Menge und a irgend eines ihrer Elemente, so ist nach Nr. 5 definit, ob $M = \{a\}$ ist oder nicht. *Es ist also immer definit, ob eine vorgelegte Menge aus einem einzigen Element besteht oder nicht.*

Es sei nun T eine Menge, deren Elemente $M, N, R, \ldots$ lauter (untereinander elementenfremde) Mengen sein mögen, und S_1 irgend eine Untermenge ihrer „Vereinigungsmenge" $\mathfrak{S}T$. Dann ist für jedes Element M von T definit, ob der Durchschnitt $[M, S_1]$ aus einem einzigen Element besteht oder nicht. Somit bilden alle diejenigen Elemente von T, welche mit S_1 genau ein Element gemein haben, die Elemente einer gewissen Untermenge T_1 von T, und es ist wieder definit, ob $T_1 = T$ ist oder nicht. Alle Untermengen $S_1 \Subset \mathfrak{S}T$, welche mit jedem Elemente von T genau ein Element gemein haben, bilden also nach III die Elemente einer Menge $P = \mathfrak{P}T$, welche nach III und IV Untermenge von $\mathfrak{U}\mathfrak{S}T$ ist und als die „zu T gehörende *Verbindungsmenge*" oder als „das *Produkt* der Mengen $M, N, R, \ldots$" bezeichnet werden soll. Ist $T = \{M, N\}$, oder $T = \{M, N, R\}$, so schreibt man abgekürzt $\mathfrak{P}T = MN$ oder $= MNR$.

Um nun den Satz zu gewinnen, daß *ein Produkt mehrerer Mengen nur dann verschwinden* (d. h. der Nullmenge gleich sein) *kann, wenn ein Faktor verschwindet*, brauchen wir ein weiteres Axiom.

Axiom VI. Ist T eine Menge, deren sämtliche Elemente von 0 verschiedene Mengen und untereinander elementenfremd sind, so enthält ihre Vereinigung $\mathfrak{S}T$ mindestens eine Untermenge S_1, welche mit jedem Elemente von T ein und nur ein Element gemein hat.

(Axiom der Auswahl.)

Man kann das Axiom auch so ausdrücken, daß man sagt, es sei immer möglich, aus jedem Elemente $M, N, R, \ldots$ von T ein einzelnes Element $m, n, r, \ldots$ *auszuwählen* und alle diese Elemente zu einer Menge S_1 zu vereinigen.[1]

---

[1] Diese vollständige Theorie dieser „logischen Addition und Multiplikation" findet sich in *E. Schröders* „Algebra der Logik", Bd. I.

[1] Über die Berechtigung dieses Axiomes vgl. meine Abhandlung Math. Ann. Bd. 65, p. 107–128, wo im § 2 p. 111 ff. die bezügliche Literatur erörtert wird.

Finally, for "sums" and "intersections" (No. 8) the "distributive law" also holds, in the two forms:

$$[M + N, R] = [M, R] + [N, R]$$

and

$$[M, N] + R = [M + R, N + R] .$$

The proof is carried out by means of Axiom I and consists in a demonstration that every element of the set on the left is also an element of the set on the right, and conversely.[4]

13. *Introduction of the product.* If M is a set different from 0 and a is any one of its elements, then according to No. 5 it is definite whether $M = \{a\}$ or not. *It is therefore always definite whether a given set consists of a single element or not.*

Now let T be a set whose elements, $M, N, R, \ldots$, are various (mutually disjoint) sets, and let S_1 be any subset of its "union" $\mathfrak{S}T$. Then it is definite for every element M of T whether the intersection $[M, S_1]$ consists of a single element or not. Thus all those elements of T that have exactly one element in common with S_1 are the elements of a certain subset T_1 of T, and it is again definite whether $T_1 = T$ or not. All subsets S_1 of $\mathfrak{S}T$ that have exactly one element in common with each element of T then are, according to Axiom III, the elements of a set $P = \mathfrak{P}T$, which, according to Axioms III and IV, is a subset of $\mathfrak{U}\mathfrak{S}T$ and will be called the "*connection set* associated with T" or "the *product* of the sets $M, N, R, \ldots$". If $T = \{M, N\}$, or $T = \{M, N, R\}$, we write $\mathfrak{P}T = MN$, or $\mathfrak{P}T = MNR$, respectively, for short.

In order, now, to obtain the theorem that *the product of several sets can vanish* (that is, be equal to the null set) *only if a factor vanishes* we need a further axiom.

Axiom VI. If T is a set whose elements all are sets that are different from 0 and mutually disjoint, its union $\mathfrak{S}T$ includes at least one subset S_1 having one and only one element in common with each element of T.

(Axiom of choice.)

We can also express this axiom by saying that it is always possible to *choose* a single element from each element $M, N, R, \ldots$ of T and to combine all the chosen elements, $m, n, r, \ldots$, into a set S_1.[5]

[4] The complete theory of this "logical addition and multiplication" can be found in *Schröder 1890.*

[5] For the justification of this axiom see my *1908a*, where in § 2, pp. 111 ff, the relevant literature is discussed.

Die vorstehenden Axiome genügen, wie wir sehen werden, um alle wesentlichen Theoreme der allgemeinen Mengenlehre abzuleiten. Um aber die Existenz „unendlicher“ Mengen zu sichern, bedürfen wir noch des folgenden, seinem wesentlichen Inhalte von Herrn *R. Dedekind*[2] herrührenden Axiomes.

Axiom VII. Der Bereich enthält mindestens eine Menge Z, welche die Nullmenge als Element enthält und so beschaffen ist, daß jedem ihrer
267 | Elemente a ein weiteres Element der Form $\{a\}$ entspricht, oder welche mit jedem ihrer Elemente a auch die entsprechende Menge $\{a\}$ als Element enthält.

(Axiom des Unendlichen.)

14_{VII}.[1] Ist Z eine beliebige Menge von der in VII geforderten Beschaffenheit, so ist für jede ihrer Untermengen Z_1 definit, ob sie die gleiche Eigenschaft besitzt. Denn ist a irgend ein Element von Z_1, so ist definit, ob auch $\{a\} \,\varepsilon\, Z_1$ ist, und alle so beschaffenen Elemente a von Z_1 bilden die Elemente einer Untermenge $Z_1{}'$, für welche definit ist, ob $Z_1{}' = Z_1$ ist oder nicht. Somit bilden alle Untermengen Z_1 von der betrachteten Eigenschaft die Elemente einer Untermenge $T \Subset \mathfrak{U} Z$, und der ihnen entsprechende Durchschnitt (Nr. 9) $Z_0 = \mathfrak{D} T$ ist eine Menge von der gleichen Beschaffenheit. Denn einmal ist 0 gemeinsames Element aller Elemente Z_1 von T, und andererseits, wenn a gemeinsames Element aller dieser Z_1 ist, so ist auch $\{a\}$ allen gemeinsam und somit gleichfalls Element von Z_0.

Ist nun Z' irgend eine andere Menge von der im Axiom geforderten Beschaffenheit, so entspricht ihr in genau derselben Weise wie Z_0 dem Z eine kleinste Untermenge $Z_0{}'$ von der betrachteten Eigenschaft. Nun muß aber auch der Durchschnitt $[Z_0, Z_0{}']$, welcher eine gemeinsame Untermenge von Z und Z' ist, die gleiche Beschaffenheit wie Z und Z' haben und als Untermenge von Z den Bestandteil Z_0, sowie als Untermenge von Z' den Bestandteil $Z_0{}'$ enthalten. Nach I folgt also, daß $[Z_0, Z_0{}'] = Z_0 = Z_0{}'$ sein muß, und daß somit Z_0 *der gemeinsame Bestandteil aller möglichen wie Z beschaffenen Mengen* ist, obwohl diese nicht die Elemente einer Menge zu bilden brauchen. Die Menge Z_0 enthält die Elemente $0, \{0\}, \{\{0\}\}$ usw. und möge als „*Zahlenreihe*“ bezeichnet werden, weil ihre Elemente die Stelle der Zahlzeichen vertreten können. Sie bildet das einfachste Beispiel einer „abzählbar unendlichen“ Menge (Nr. 36).

[2] „Was sind und was sollen die Zahlen?“ § 5 Nr. 66. Der von Herrn Dedekind hier versuchte „Beweis“ dieses Prinzips kann nicht befriedigen, da er von der „Menge alles Denkbaren“ ausgeht, während für unseren Standpunkt nach Nr. 10 der Bereich $\mathfrak{B}$ selbst *keine* Menge bildet.

[1] Die Indizes VI oder VII an der Nummer eines Theorems sollen ausdrücken, daß hier das Axiom VI oder VII explizit oder implizit zur Anwendung kommt.

The preceding axioms suffice, as we shall see, for the derivation of all essential theorems of general set theory. But in order to secure the existence of infinite sets we still require the following axiom, which is essentially due to Mr. *R. Dedekind*.[6]

Axiom VII. There exists in the domain at least one set Z that contains the null set as an element and is so constituted that to each of its elements a there corresponds a further element of the form $\{a\}$, in other words, that with each of its elements a it also contains the corresponding set $\{a\}$ as an element.

(Axiom of infinity.)

14_{VII}.[7] If Z is an arbitrary set constituted as required by Axiom VII, it is definite for each of its subsets Z_1 whether it possesses the same property. For, if a is any element of Z_1, it is definite whether $\{a\}$, too, is an element of Z_1, and all elements a of Z_1 that satisfy this condition are the elements of a subset $Z_1{}'$ for which it is definite whether $Z_1{}' = Z_1$ or not. Thus all subsets Z_1 having the property in question are the elements of a subset T of $\mathfrak{U}Z$, and the intersection (No. 9) $Z_0 = \mathfrak{D}T$ that corresponds to them is a set constituted in the same way. For, on the one hand, 0 is a common element of all elements Z_1 of T, and, on the other, if a is a common element of all of these Z_1, then $\{a\}$ is also common to all of them and is thus likewise an element of Z_0.

Now if Z' is any other set constituted as required by the axiom, there corresponds to it a smallest subset Z_0' having the same property, exactly as Z_0 corresponds to Z. But now the intersection $[Z_0, Z_0{}']$, which is a common subset of Z and Z', must be constituted in the same way as Z and Z'; and just as, being a subset of Z, it must contain the component Z_0, so, as a subset of Z', it must contain the component $Z_0{}'$. According to Axiom I it then necessarily follows that $[Z_0, Z_0{}'] = Z_0 = Z_0{}'$ and that Z_0 thus is the *common component of all possible sets constituted like* Z, even though these need not be elements of a set. The set Z_0 contains the elements 0, $\{0\}$, $\{\{0\}\}$, and so forth, and it may be called the "*number sequence*", because its elements can take the place of the numerals. It is the simplest example of a "denumerably infinite" set (below, No. 36).

[6] *Dedekind 1888*, §5, art. 66. The "proof" that Mr. Dedekind there attempts to give of this principle cannot be satisfactory, since it takes its departure from "the set of everything thinkable", whereas from our point of view the domain $\mathfrak{B}$ itself, according to No. 10, does *not* form a set.

[7] The subscript VI, or VII, on the number of a section indicates that explicit or implicit use has been made of Axiom VI, or VII, respectively, in establishing the theorem of that section.