2021-2022-2 经管类线性代数 A 卷答案

1、A;　2、D;　3、B;　4、B;　5、A

6、$\begin{pmatrix} A^{-1} & -A^{-1}CB^{-1} \\ O & B^{-1} \end{pmatrix}$;7、$(-1)^{n-1}\dfrac{5^n}{6}$;　8、4;　9、3;　10、126;　11、$\dfrac{7}{8}$

12、$A^{-1}BA=6A+BA \Rightarrow A^{-1}B=6E+B \Rightarrow \left(A^{-1}-E\right)B=6E \cdots\cdots 5'$

$$B=6\left(A^{-1}-E\right)^{-1}=6\left(\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right)^{-1}=\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{3}{2} \end{pmatrix}\cdots\cdots 9'$$

13、法一：

$$\text{设} f(x)=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 6 & 8 & x \\ 2^2 & 4^2 & 6^2 & 8^2 & x^2 \\ 2^3 & 4^3 & 6^3 & 8^3 & x^3 \\ 2^4 & 4^4 & 6^4 & 8^4 & x^4 \end{vmatrix}\cdots\cdots 3'$$

$$\overset{\text{按照范}}{\underset{\text{式展开}}{=}}(4-2)(6-2)(6-4)(8-2)(8-4)(8-6)(x-2)(x-4)(x-6)(x-8)\cdots\cdots 5'$$

$$\overset{\text{按照最后}}{\underset{\text{一列展开}}{=}}1A_{1,5}+xA_{2,5}+x^2A_{3,5}+x^3A_{4,5}+x^4A_{5,5}\cdots\cdots 7'$$

$$D_4=-A_{4,5}=(4-2)(6-2)(6-4)(8-2)(8-4)(8-6)(2+4+6+8)=15360\cdots\cdots 9'$$

法二：

$$D_4=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ 2^2 & 4^2 & 6^2 & 8^2 \\ 2^4 & 4^4 & 6^4 & 8^4 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 4 & 6 \\ 0 & 12 & 32 & 60 \\ 0 & 240 & 1280 & 4080 \end{vmatrix}\cdots\cdots 3'$$

$$=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 8 & 24 \\ 0 & 0 & 800 & 3360 \end{vmatrix}\overset{\cdots\cdots 6'}{=}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 8 & 24 \\ 0 & 0 & 0 & 960 \end{vmatrix}=15360\cdots\cdots 9'$$

14、$D=\begin{vmatrix} 1+a & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2+a & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3+a & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4+a \end{vmatrix}=a^{3}\ 10+a$

则$D=0$即$a=0$或$a=-10$时，向量组线性相关$\cdots 3'$

1.当$a=0$时，$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4\ =\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

则$R\ \alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4\ =1,\alpha_1$为其一个极大无关组，$\alpha_2=2\alpha_1$，$\alpha_3=3\alpha_1$，$\alpha_4=4\alpha_1\cdots 6'$

2.当$a=-10$时，$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4\ =\begin{pmatrix} -9 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & -8 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & -7 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & -6 \end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

则$R(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)=3,\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$为其一个极大无关组，$\alpha_4=-(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)\cdots 9'$

15、$Ax=b$有无穷多解$\Rightarrow|A|=0\Rightarrow t=-3\cdots\cdots 2'$

$\overline{A}=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 3 \\ 4 & -3 & 3 & 1 \\ 3 & -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots 4'$

即$\begin{cases} x_1=1 \\ x_2-x_3=1 \end{cases}$.令$x_3=0$,则$Ax=b$的一个特解为$\eta=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\cdots\cdots\cdots 6'$

$Ax=O\Rightarrow\begin{cases} x_1=0 \\ x_2-x_3=0 \end{cases}$. 令$x_3=1$,基础解系为$\xi=\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\cdots\cdots\cdots\cdots 8'$

则$Ax=b$的通解为$k\xi+\eta$(k为任意实数).$\cdots\cdots\cdots\cdots 9'$

16、(1) $A=\begin{pmatrix}1&-2&2\\-2&4&-4\\2&-4&4\end{pmatrix}\cdots\cdots\cdots 2'$

(2) $|A-\lambda E|=\begin{vmatrix}1-\lambda&-2&2\\-2&4-\lambda&-4\\2&-4&4-\lambda\end{vmatrix}=0\Rightarrow\lambda_{1,2}=0,\lambda_3=9\cdots\cdots 4'$

当λ=0时，$A-0E\ \ x=0\Rightarrow Ax=0, A=\begin{pmatrix}1&-2&2\\-2&4&-4\\2&-4&4\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1&-2&2\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$

基础解系$\xi_1=\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}$，$\xi_2=\begin{pmatrix}-2\\0\\1\end{pmatrix}$，则$\lambda$=0的全体特征向量为$k_1\xi_1+k_2\xi_2(k_1,k_2$不全为零$)\cdots 7'$

当λ=9时，$(A-9E)x=0\Rightarrow (A-9E)=\begin{pmatrix}-8&-2&2\\-2&-5&-4\\2&-4&-5\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}2&0&-1\\0&1&1\\0&0&0\end{pmatrix}$

基础解系$\xi_3=\begin{pmatrix}1\\-2\\2\end{pmatrix}$，则$\lambda$=9的全体特征向量为$k_3\xi_3(k_3$不为零$)\cdots\cdots\cdots 10'$

将ξ_1,ξ_2正交化可得：$\eta_1=\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix},\eta_2=\begin{pmatrix}-\frac{2}{5}\\\frac{4}{5}\\1\end{pmatrix}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots 12'$

将η_1,η_2,ξ_3单位化可得：$e_1=\begin{pmatrix}\frac{2}{\sqrt5}\\\frac{1}{\sqrt5}\\0\end{pmatrix},e_2=\begin{pmatrix}\frac{-2}{3\sqrt5}\\\frac{4}{3\sqrt5}\\\frac{\sqrt5}{3}\end{pmatrix},e_3=\begin{pmatrix}\frac{1}{3}\\\frac{-2}{3}\\\frac{2}{3}\end{pmatrix}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots 14'$

令$P=(e_1,e_2,e_3)$,则正交变换$X=PY$,二次型的标准形为$f=9y_3^2\cdots\cdots 15'$

,

17、“$\Rightarrow$”：令向量β为任一n维向量.

法一：$\because a_1,a_2,\cdots,a_n$线性无关，且$a_1,a_2,\cdots,a_n,\beta$线性相关（$n+1$个$n$维向量必相关）

$\therefore$向量β可由$a_1,a_2,\cdots,a_n$线性表出.$\cdots\cdots\cdots 4'$

法二：令$A=(a_1,a_2,\cdots,a_n),\because a_1,a_2,\cdots,a_n$线性无关，$\therefore |A|\neq 0,$

对于$Ax=\beta$利用克莱姆法则，可得方程组有唯一解，即β可由$a_1,a_2,\cdots,a_n$线性表出.

$\cdots\cdots\cdots 4'$

法三：令$A=(a_1,a_2,\cdots,a_n),E=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots\varepsilon_n)$

$\because a_1,a_2,\cdots,a_n$均可由$n$维单位向量组$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots\varepsilon_n$线性表出，即存在方阵$K$,使得

$A=EK,\because a_1,a_2,\cdots,a_n$线性无关，$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots\varepsilon_n$线性无关，故$K$可逆，则$E=AK^{-1}$,

故A与E等价，任一n维向量β可由$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots\varepsilon_n$线性表出，故可由$a_1,a_2,\cdots,a_n$线性表出.

$\cdots\cdots\cdots 4'$

“$\Leftarrow$”：n维单位向量组$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots\varepsilon_n$可由$a_1,a_2,\cdots,a_n$线性表出，

则n=$R(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots\varepsilon_n)\le R(a_1,a_2,\cdots,a_n)\le n$,故$R(a_1,a_2,\cdots,a_n)$=$n$,

则$a_1,a_2,\cdots,a_n$线性无关.$\cdots\cdots\cdots 8'$

18、(1)：A,B均为正交矩阵，则$AA^T=A^TA=E,BB^T=B^TB=E\cdots\cdots 1'$

则$|AA^T|=|A|^2=1,|BB^T|=|B|^2=1\Rightarrow |A|=\pm 1,|B|=\pm 1$，且$|A||B|<0$，故$|A||B|=-1\cdots\cdots 2'$

$|A+B|=|AE+EB|=|AB^TB+AA^TB|=|A(B^T+A^T)B|=|A||B^T+A^T||B|=-|A+B|$

故$|A+B|=0\cdots\cdots 4'$

(1)$\because A,B$均为正定矩阵，即存在$\forall X\neq O$,有$X^TAX>0,X^TBX>0,$

$X^T(A+B)X=X^TAX+X^TBX>0$,故$A+B$为正定矩阵.$\cdots\cdots 6'$

$\because A,B$均为正定矩阵，即存在$\forall X\neq O$,有$X^TAX>0$,构造$Z=\begin{pmatrix}X\\Y\end{pmatrix}$，$Y$为任一$n$维列向量，

对$\forall 2n$维列向量$Z\neq O,Z^T\begin{pmatrix}A&O\\O&B\end{pmatrix}Z=(X^T,Y^T)\begin{pmatrix}A&O\\O&B\end{pmatrix}\begin{pmatrix}X\\Y\end{pmatrix}=X^TAX+Y^TBY>0,$

故$\begin{pmatrix}A&O\\O&B\end{pmatrix}$为正定矩阵.$\cdots\cdots 8'$