本试卷适应范围
2013 级本科生

南京农业大学试题纸

14-15 学年 1 学期　课程类型：必修　试卷类型：A

课程 线性代数　班级__________　学号__________　姓名__________　成绩__________

一、填空题（每题 3 分，共 30 分）

1. 四阶行列式 D 中第 2 列元素依次为 -1，2，0，-2，它们的余子式依次分别为 5，3，-7，6，则行列式 D=____________。

2. $A=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&1\\3&1&2\end{pmatrix}$，则$A$的伴随矩阵$A^*$中第二行第三列的元素为_______。

3. 若 $A^2=2E$，则 $(A-E)^{-1}=$___________。

4. A为3阶方阵,$|A|=2$，则$|2A^{-1}|=$__________。

5. 设 n 阶矩阵 A 及 s 阶矩阵 B 都可逆，则$\begin{pmatrix}O&A\\B&O\end{pmatrix}^{-1}==$ ___________。

6. 四阶矩阵 A 的秩为 2，则伴随矩阵 A^*的秩为___________。

7. 向量$a=\begin{pmatrix}-1&2&4\end{pmatrix}^T$与$b=\begin{pmatrix}6&k&1\end{pmatrix}^T$正交，则$k=$________。

8. 设 $A=\begin{pmatrix}2&1&3\\1&x&1\\0&0&2\end{pmatrix}$，且 A 的特征值为 1，2，3，则 $x=$___________。

9. $a_1=\begin{pmatrix}1&0&0\end{pmatrix}^T,a_2=\begin{pmatrix}1&1&0\end{pmatrix}^T,a_3=\begin{pmatrix}1&1&1\end{pmatrix}^T$为向量空间$R^3$的一组基，向量$\beta$在这组基下坐标为$1,-1,2$，则 β=___________。

10. 若 $A=\begin{pmatrix}1&2\\2&t\end{pmatrix}$为正定矩阵，则参数$t$的范围为___________。

二、计算题（每题 9 分，共 54 分）

1. 设 $A=\begin{pmatrix}1&2&-3\\-2&1&2\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}-1&1&4\\3&-2&1\\0&0&2\end{pmatrix}$，求 ABA^T

2. 计算行列式$\begin{vmatrix} 4 & 1 & 3 & -1 \\ 3 & 3 & 3 & -6 \\ 1 & 2 & 0 & 6 \\ -3 & 2 & -3 & -1 \end{vmatrix}$

3. 设$XA = B - X$，其中$A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$，求矩阵$X$。

4. a取何值时,线性方程组$\begin{cases} 3x_1 + 5x_2 + 10x_3 + 7x_4 = a \\ x_1 + 3x_2 + 6x_3 + x_4 = 3 \\ x_1 + 5x_2 + 10x_3 - x_4 = 5 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 1 \end{cases}$有解？在方程组有解时求出通解。

5. 设矩阵A=$\begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 0 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 3 & 3 & 4 \\ -2 & 4 & 2 & 6 & -6 \end{pmatrix}$，求：（1）$A$的秩；（2）$A$的列向量组的一个最大线性无关组，并把其余列向量用该最大无关组线性表示。

6. 求一个正交变换将三元二次型$f = x_1^2 + x_2^2 + 3x_3^2 + 4x_1x_2$化成标准形。

三、证明题（每题 8 分，共 16 分）

1. 设$\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_r$为齐次线性方程组$AX = 0$的一个基础解系，证明：

$\eta_1, \eta_1 + \eta_2, \cdots, \eta_1 + \eta_2 + \cdots + \eta_r$也是$AX = 0$的一个基础解系。

2. 设α为列向量，且为单位向量，证明$\lambda = 1$为$A = \alpha\alpha^T$的唯一非零特征值，且α为 1 对应的特征向量。

答案：

一．1. -1；　2. 5；　3. A+E；　4. 4；　5. $\begin{pmatrix} O & B^{-1} \\ A^{-1} & O \end{pmatrix}$；

6. 0；　7. 1；　8. 2；　9. $(2,1,2)^T$ ；　10. $t>4$.

二．1. $\begin{pmatrix} -1 & 13 \\ 6 & -20 \end{pmatrix}$；

2. 99；

3. $X=\begin{pmatrix} -2 & 3 & -3 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$；

4. $a=5$；$x=c_1(0,-2,1,0)^T+c_2(-4,1,0,1)^T+(0,1,0,0)^T$；

5. 最大无关组a_1,a_2,a_4，　$a_3=\frac{1}{3}a_1+\frac{2}{3}a_2$；　$a_5=\frac{16}{9}a_1-\frac{1}{9}a_2-\frac{1}{3}a_4$；

6. $P=\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{2}{\sqrt{6}} & 0 \end{pmatrix}$，　$f=3y_1^2+3y_2^2-y_3^2$

三．1. （1）说明$\eta_1,\eta_1+\eta_2,\cdots,\eta_1+\eta_2+\cdots+\eta_r$是解，

（2）证明$\eta_1,\eta_1+\eta_2,\cdots,\eta_1+\eta_2+\cdots+\eta_r$ 线性无关，

（3）指出$\eta_1,\eta_1+\eta_2,\cdots,\eta_1+\eta_2+\cdots+\eta_r$个数为$r$.

2. $A\alpha=\alpha\alpha^T\alpha=\alpha,\therefore\lambda=1$为$A$的特征值，$\alpha$为对应的特征向量；

因$R(A)=1$，故$\lambda=1$为A的唯一非零特征值.