

1. ($\xi 3$) 幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} nx^{n-1}$ 收敛域 $(-1, 1)$ 内的和函数 $s(x) = (\quad)$

A. $\frac{1}{(1+x)^2}$ B. $\frac{1}{1+x^2}$ C. $\frac{1}{1-x^2}$ D. $\frac{1}{(1-x)^2}$

2. ($\xi 3$) 若幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛半径为 $R_1 (0 < R_1 < +\infty)$, $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ 的收敛半径为

$R_2 (0 < R_2 < +\infty)$, 则幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n) x^n$ 的收敛半径为 ()

A. $R_1 + R_2$ B. $R_1 \cdot R_2$ C. $\max \{R_1, R_2\}$ D. $\min \{R_1, R_2\}$

3. ($\xi 3$) 求 $\sum_{n=1}^{\infty} (n+2) x^{n+3}$ 的和函数.

4. 求常数项级数的和. $(\xi 3, \xi 4)$

$$(1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n!}$$

$$(2) \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{n+1}{(2n+1)!}$$

$$(3) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n \cdot (2n-1)}$$

5. (ξ3) 求下列极限 (注意: 用幂级数的和函数)

$$(1) \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{3^k} \left(1 + \frac{1}{k}\right)^{k^2}$$

$$(2) \lim_{n \rightarrow +\infty} \left[2^{\frac{1}{3}} \cdot 4^{\frac{1}{9}} \cdot 8^{\frac{1}{27}} \cdots (2^n)^{\frac{1}{3^n}} \right]$$

6. 设 $f_0(x)$ 在 $[0, a]$ ($0 < a < 1$) 上连续, 且 $f_n(x) = \int_0^x f_{n-1}(t) dt, x \in [0, a], (n = 1, 2, \dots)$,

则 $\forall x \in [0, a]$, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ ()

A. 发散 B. 条件收敛 C. 绝对收敛 D. 敛散性不定

7. 幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{[3 + (-1)^n]^n}{n} x^n$ 的收敛半径等于 ()

A. $\frac{1}{2}$ B. 1 C. $\frac{1}{4}$ D. $\frac{1}{3}$

ξ3 的几道练习

1. 设幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛区间为 $(-3, 3)$, 则幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n (x-1)^{n-1}$ 的收敛区间为_____

2. 幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-2)^{2n}}{n \cdot 4^n}$ 的收敛域为_____

3. 设幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a^{n^2} x^n$ ($a > 0$) 的收敛域为 $(-\infty, +\infty)$, 则 a 应满足_____

4. 幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n + (-3)^n} x^{2n-1}$ 的收敛半径 $R =$ _____

5. 若 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n (x-1)^n$ 在 $x = -1$ 处收敛, 则此级数在 $x = 2$ 处_____

A. 绝对收敛 B. 条件收敛 C. 发散 D. 敛散性不定