

1. 设级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ 都收敛, 且对于充分大的 n , 有 $a_n \leq b_n \leq c_n$,

证明: $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 收敛.

2. 设级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n^2$ 都收敛, 证明下列级数收敛:

(1) $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n b_n|$

(2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|a_n|}{n}$

3. 设正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ 都收敛, 证明: $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + c_n)^2$ 收敛.

4. 设 $a_1 = 2, a_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + \frac{1}{a_n}), (n = 1, 2, 3, \dots)$, 证明: 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1)$ 收敛。

5. 设 $a_n > 0$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) 且 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, $r_n = \sum_{k=n}^{\infty} a_k$, , 证明: 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{\sqrt{r_n}}$ 收敛。

6. 设常数 $\mu > 0$, 且 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ 收敛, 证明 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{a_n}{\sqrt{n^2 + \mu}}$ 绝对收敛

7. 设级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 都是正项级数, 证明:

(1) 若 $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{u_n u_{n+1}}$ 收敛, 且 u_n 单调减少, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛

(2) 若 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{u_n}{n}$ 收敛.

