本试卷适应范围
经济管理类
（3 学分）

# 南京农业大学试题纸

**2019-2020 学年 2 学期 课程类型：必修 试卷类型：A**

课程号 MATH2117 课程名 线性代数 学分 3

学号 ________ 姓名 ________ 班级 ________

装
订
线

| 题号 | 一 | 二 | 三 | 四 | 总分 | 签名 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 得分 | | | | | | |

**约定: $A^T$ 为矩阵 $A$ 的转置，$|A|$ 为方阵 $A$ 的行列式，$A^*$ 为方阵 $A$ 的伴随阵，$I$ 为单位阵。**

一、判断题：对的打“√ ”，错误打“×”(共 5 题,一题 2 分,共 10 分)

1、设 $n$ 阶方阵 $A$ 满足 $A^2-I=O, I$ 是 $n$ 阶单位阵，则必有 $|A|=1.$ （ ）

2、$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$是标准形 （ ）

3、 设$A,B$都是$m\times n$矩阵，则 $A$与$B$ 等价的充要条件是 $R(A)=R(B).$ （ ）

4、设$\alpha_0$是非齐次线性方程组$Ax=b$的一个解，$\alpha_1,\alpha_2$是$Ax=O$的基础解系，则 $\alpha_0, \alpha_1,\alpha_2$的线性组合是$Ax=b$的解。 （ ）

5、$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$不能相似对角化。 （ ）

二、选择题(共 15 题,一题 2 分,共 30 分)

1. 设$A,B$为$n$阶方阵，下列命题正确的是 ( )

$A$: $AB=O\Rightarrow A=O$或$B$=O. $B$： $A^2-I=(A+I)(A-I)$

$C: AB=AC,$ 且$A\neq O,$则$B$=$C$. $D$： $(AB)^2=A^2B^2$

2、设$\alpha=(1,2),\beta=(-2,3)$,则$\left(\alpha^T\beta\right)^{2020}=$( )

$A:4^{2020}\begin{pmatrix} -2 & -3 \\ -4 & 6 \end{pmatrix}; B:4^{2020}\begin{pmatrix} -2 & 3 \\ -4 & 6 \end{pmatrix}; C:4^{2019}\begin{pmatrix} -2 & 3 \\ -4 & 6 \end{pmatrix}; D:4^{2019}\begin{pmatrix} -2 & -3 \\ -4 & 6 \end{pmatrix}$

3.已知 4 阶方阵 $A$ 的行列式$|A|=2$,则$\left|(\frac{1}{4}A)^{-1}-A^*\right|$=__________.

$A:-8;$； $B:8$； $C:-2$； $D:2$；

4、设 $A$ 为三阶矩阵，将 $A$ 的第二列加到第一列得矩阵 $B$，再交换 $B$ 的第二行与第三行得到单位矩阵，记

装
订
线

$P_1=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}, P_2=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}$,则$A=$（　　）

$A: P_1P_2$;；　　　$B: P_1^{-1}P_2$;　　　$C: P_2P_1$;　　　$D: P_2P_1^{-1}$;

5、设矩阵 $A=\left(a_{ij}\right)_{3\times3}$,满足$A^*=A^T$, $a_{11}, a_{12}, a_{13}$ 为三个相等的正数，则 $a_{11}$ 为(　　)

$A: \dfrac{\sqrt{3}}{3}$;；　　　$B: 3$;　　　$C: \dfrac{1}{3}$;　　　$D: \sqrt{3}$.

6、设 3 阶方阵 $A$ 满足 $|A|=0$,则在 $A$ 的行向量组中(　　)

$A$:必存在一个行向量为零向量；
$B$:必存在两个行向量，其对应分量成比例；
$C$:任意一个行向量都是其它两个行向量的线性组合；
$D$:存在一个行向量，它是其它两个行向量的线性组合.

7. 设向量组 $\alpha_1=(a,b,c)^T, \alpha_2=(b,c,d)^T, \alpha_3=(d,e,f)^T, \alpha_4=(f,g,h)^T$，

那么 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 的线性关系为(　　)

$A$:线性无关；　$B$:线性相关；$C$: $\alpha_4$ 可由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表示；$D$:不能确定.

8. 设矩阵 $A_{m\times n}$，则有(　　)

$A$:若 $m<n$,则$Ax=b$ 有无穷多解；

$B$:若 $m<n$,则$Ax=O$ 有非零解，且基础解系含有 $n-m$ 个线性无关的解向量；

$C$:若 $A$有$n$阶子式不为零,则$Ax=b$有唯一解；

$D$: $A$有$n$阶子式不为零,则$Ax=O$仅有零解.

9、设四元非齐次线性方程组 $Ax=b$ 的系数矩阵的秩为3，已知 $\eta_1,\eta_2,\eta_3$ 是它的三个解向量，且

$\eta_1=\begin{pmatrix}2\\3\\4\\5\end{pmatrix}, \eta_2+\eta_3=\begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\end{pmatrix}$，则不是该方程组通解的形式为(　　)

$A: x=\begin{pmatrix}2\\3\\4\\5\end{pmatrix}+k\begin{pmatrix}3\\4\\5\\6\end{pmatrix}$; $B: x=\begin{pmatrix}2\\3\\4\\5\end{pmatrix}+k\begin{pmatrix}-3\\-4\\-5\\-6\end{pmatrix}$;　$C: x=\begin{pmatrix}1\\\frac{5}{3}\\\frac{7}{3}\\3\end{pmatrix}+k\begin{pmatrix}3\\4\\5\\6\end{pmatrix}$;　$D: x=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\1\\\frac{3}{2}\\2\end{pmatrix}+k\begin{pmatrix}2\\3\\4\\5\end{pmatrix}$;

10、设$\alpha_0$是非齐次线性方程组$Ax=b$的一个解，$\alpha_1,\alpha_2$是$Ax=O$的基础解系，则下列命题一定正确的是( )

$A:\alpha_0,\ \alpha_1,\alpha_2$的线性组合是$Ax=b$的解； $B:\alpha_0,\ \alpha_1,\alpha_2$线性相关；

$C:\alpha_0,\ \alpha_1,\alpha_2$的线性组合是$Ax=O$的解； $D:\alpha_0,\ \alpha_1,\alpha_2$线性无关；

11、设$A=\begin{pmatrix}0&0\\1&1\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}1&0\\1&0\end{pmatrix}$,则$A-B$为（ ）

$A$:正定矩阵； $B$:正交矩阵 $C$:奇异矩阵 $D$:不可逆矩阵

12、已知$A$是3阶实对称矩阵，如果非齐次线性方程组$Ax=b$有通解$5b+k_1\eta_1+k_2\eta_2$,其中$\eta_1,\eta_2$是$Ax=O$的基础解系，那么$A$的特征值为( )

$A:\frac{1}{5},\frac{1}{5},0;$； $B:\frac{1}{5},0,0;$ $C:\frac{1}{5},1,0$ $D:1,1,1$；

13、设矩阵$A=\begin{pmatrix}0&0&1\\a&1&2\\1&0&0\end{pmatrix}$可对角化，则$a$的值为( )

$A:2;$； $B:-2;$ $C:1$ $D:0$

14、设二次型$f(x_1,x_2,x_3)$在正交变换$x=Py$下的标准形为$f=2y_1^2+y_2^2-y_3^2$，其中$P=(e_1,e_2,e_3)$,若$Q=(e_1,-e_2,e_3)$,则$f(x_1,x_2,x_3)$在正交变换$x=Qy$下的标准形为( )

$A:\ f=2y_1^2+y_2^2+y_3^2;$ $B:\ f=2y_1^2+y_2^2-y_3^2$

$C:\ f=2y_1^2-y_2^2+y_3^2;$ $D:\ f=2y_1^2-y_2^2-y_3^2.$

15、二次型$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=x^TAx$为正定二次型的充要条件是 ( )

$(A)$对任一$n$维列向量$x$, $x^TAx>0$; $(B)$通过正交变换得到的$f$的标准形的系数均非负;

$(C)$ $A^{-1}$为正定矩阵 $(D)$ $A$的所有子式均大于零.

三、填空题(共15题,一题2分,共30分)

1.设矩阵 $A=\begin{pmatrix}2&1&0&0\\1&2&0&0\\0&0&4&0\\0&0&7&5\end{pmatrix}$，求$|A|=$________.

2.计算2020阶行列式$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 2 \end{vmatrix}$=______________.

3、设 $f(x)=\begin{vmatrix} 2x & x & 1 & 2 \\ 1 & x & 1 & -1 \\ 3 & 2 & x & 1 \\ 1 & 1 & 1 & x \end{vmatrix}$,则$x^4$的系数为______________

4、设$\alpha,\beta,\gamma_2,\gamma_3,\gamma_4$是四维列向量，且$|A|=|\alpha,\gamma_2,\gamma_3,\gamma_4|=4,|B|=|\beta,\gamma_2,\gamma_3,\gamma_4|=1,$

求$|A+B|$=____________.

5、已知矩阵$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$，对调矩阵$A$的第一行与第三行得到矩阵$B$，$P$为初等矩阵，关系式$B=PA$

中的$|P^2|$=_____________.

6、设矩阵$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & a & 2 \\ a & 0 & a^2 \end{pmatrix}, a>0.$若$R(A)<3,$则 $a=$_________.

7、$t\neq$_______时，向量组$\alpha_1=(1,2,3),\alpha_2=(2,2,4),\alpha_3=(3,0,t)$线性无关?

8、设矩阵$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$,$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$为线性无关的 3 维向量，则向量组$A\alpha_1,A\alpha_2,A\alpha_3$的秩为_________

9、若非零的三阶矩阵$B$的每一列都是方程组$\begin{cases} x_1+2x_2-2x_3=0, \\ 2x_1-x_2+\lambda x_3=0, \\ 3x_1+x_2-x_3=0 \end{cases}$的解，求$\lambda$=_____.

10、线性方程组$\begin{cases} x_1-2x_2-x_3=1, \\ 3x_1-x_2+x_3=2, \\ 2x_1+x_2+ax_3=1, \end{cases}$有无穷多解，则$a$=_____

11、向量$e_1=\left(\frac{2}{3},-\frac{2}{3},\frac{1}{3}\right)^T,e_2=\left(\frac{2}{3},\frac{1}{3},-\frac{2}{3}\right)^T,e_3=\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3},\frac{2}{3}\right)^T$是$R^3$的一个标准正交基，

则向量$\beta=e_1+2e_2+2e_3$的长度为_____________

12、设$A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & a \\ 2 & a & -4 \end{pmatrix}$,其一个特征向量为$(1,2,1)^T$，则$a=$_____________.

13、设矩阵 $A=\begin{pmatrix}3&2&2\\2&3&2\\2&2&3\end{pmatrix}, P=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&1\\0&0&1\end{pmatrix}, B=P^{-1}A^{*}P$,则$B+2I$ 的单特征根为__________

14、设方阵 $A=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&0&1\\0&1&x\end{pmatrix}$ 与 $B=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&y&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$ 相似. 则 $y=$___________.

15、设二次型 $f(x,y)=x^2+ty^2-4xy$，则当 $t>$___时， $f(x,y)$ 为正定二次型.

四、计算证明题(共 4 题,第 3 题 12 分,其余每题 6 分，共 30 分)

1.设矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&0&0&1\\0&1&0&-1\\0&0&1&-1\\2&-1&3&t\end{pmatrix}$,若$R(A)=3$,(1)求出$t$的值,(2)求出$A$的列组 的极大无关组,并用此极大线性无关组表示其余列向量。

2、设有方程组$\begin{cases}x_1+2x_2+\lambda x_3=2\\3x_1+2\lambda x_2+9x_3=6\\\lambda x_1+6x_2+9x_3=6\end{cases}$，问 $\lambda$ 为何值时，此方程组(1)有唯一解，(2)无解，(3)有无穷多解，并在无穷多解时求其通解。

3、设二次型 $f=3x_1^2+2x_2^2+2x_3^2+2x_1x_2+2x_1x_3$

（1）写出对应的矩阵 $A$；（2）求出 $A$ 的特征值及所对应的全部特征向量；

（3）求正交变换 $X=QY$，将 $f(x_1,x_2,x_3)$ 化为标准形；(4)判断二次型是否正定.

4、设 $A$ 为 $n$ 阶矩阵，$n$ 维向量 $\xi_1,\xi_2,\xi_3$ 满足 $A\xi_1=O, A\xi_2=\xi_1, A^2\xi_3=\xi_1$，$\xi_1\neq O$，证明向量组 $\xi_1,\xi_2,\xi_3$ 线性无关。

审核人＿李强＿　　　　出卷人＿魏敏＿