本试卷适应范围：2012级本科

南京农业大学试题纸

2013-2014 学年 1 学期　课程类型：必修　试卷类型：A

课程 线性代数 　班级__________　学号_________　姓名__________　成绩__________

一、填空题（每题 4 分，共 5 题，共 20 分）

1、设α,β,γ都是 3 维列向量，并且$|\alpha,\beta,\gamma|=1$，则$|4\alpha,2\alpha-3\beta,\gamma|=$________。

2、设A,B都是 3 阶矩阵，且$|A|=-2$，$B=\begin{pmatrix}1&0&3\\1&1&0\\0&0&3\end{pmatrix}$，则$|2A^*B^{-1}|=$_______。

3、设矩阵$A=\begin{pmatrix}1&-1&2\\-1&a&b\end{pmatrix}$，且$R(A)=1$，则$a=$_____，$b=$_____。

4、设$A=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&0&1\\0&1&x\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&y&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$且 A 与 B 相似，则$x=$____，

$y=$____。

5、若二次型$f=x_1^2+4x_2^2+2x_3^2+2tx_1x_2+2x_1x_3$正定，则$t$满足___________。

二、选择题（每题 2 分，共 5 题，共 10 分）

6、已知齐次线性方程组$\begin{cases}2x-y+z=0\\x+ky-z=0\\kx+y+z=0\end{cases}$只有零解，则$k$必须满足（　　）

（A）$k=4$　（B）$k=-1$　（C）$k\neq-1$且$k\neq4$　（D）$k=-1$或$k=4$。

7、设 C 是$m\times n$的矩阵，若矩阵A,B满足$AC=C^TB$，则矩阵A的“行数×列数”为（　　）

（A）$m\times n$　（B）$n\times m$　（C）$m\times m$　（D）$n\times n$。

8、设$\alpha_1=\begin{pmatrix}0\\0\\c_1\end{pmatrix}$，$\alpha_2=\begin{pmatrix}0\\1\\c_2\end{pmatrix}$，$\alpha_3=\begin{pmatrix}1\\-1\\c_3\end{pmatrix}$，$\alpha_4=\begin{pmatrix}-1\\1\\c_4\end{pmatrix}$，其中$c_1,c_2,c_3,c_4$为任意常数，则下列向量一定线性相关的是（　　）

（A）$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$　　（B）$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4$　　（C）$\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$　　（D）$\alpha_1,\alpha_3,\alpha_4$

9、设$\boldsymbol{\xi_1,\xi_2,\xi_3}$是齐次线性方程组$\boldsymbol{Ax=0}$的基础解系，则$\boldsymbol{Ax=0}$的基础解系还可以为（　　）

（A）$\xi_1-\xi_2,\xi_2-\xi_3,\xi_3-\xi_1$　　（B）$\xi_1-\xi_2-\xi_3,\xi_1+\xi_2+\xi_3$

（C）$\xi_1,\xi_1+\xi_2,\xi_1+\xi_2+\xi_3$　　（D）$\xi_1,\xi_1+\xi_2,\xi_1-\xi_2$

10、设A,B都是 n 阶正交矩阵，则下列命题错误的是（　　）

（A）$A+B$也是正交矩阵　　（B）A^T也是正交矩阵

（C）AB也是正交矩阵　　（D）A^{-1}也是正交矩阵。

三、计算题（每题 10 分，共 6 题，共 60 分）

11、计算四阶行列式$\boldsymbol{D}=\begin{vmatrix} \mathbf{5} & \mathbf{0} & \mathbf{4} & \mathbf{2} \\ \mathbf{1} & \mathbf{-1} & \mathbf{2} & \mathbf{1} \\ \mathbf{4} & \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{0} \\ \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} \end{vmatrix}$。

12、求矩阵方程的解，其中$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} \mathbf{3} & \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{3} \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} \mathbf{-1} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ \mathbf{3} & \mathbf{2} & \mathbf{-1} \end{pmatrix}$

13、考虑线性方程组$\begin{cases} \boldsymbol{x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=1} \\ \boldsymbol{3x_1+2x_2+x_3+x_4-3x_5=p} \\ \boldsymbol{x_2+2x_3+2x_4+6x_5=3} \\ \boldsymbol{5x_1+4x_2+3x_3+3x_4-x_5=q} \end{cases}$

（1）$\boldsymbol{p,q}$取何值时，上述方程组无解？有解？（2）在有解的情况下，求出该方程组的解。

14、给定向量组$\boldsymbol{\alpha_1}=\begin{pmatrix} \mathbf{1} \\ \mathbf{1} \\ \mathbf{1} \\ \mathbf{1} \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\alpha_2}=\begin{pmatrix} \mathbf{1} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{1} \\ \mathbf{1} \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\alpha_3}=\begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{3} \\ \mathbf{2} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\alpha_4}=\begin{pmatrix} \mathbf{-1} \\ \mathbf{1} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{-1} \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\alpha_5}=\begin{pmatrix} \mathbf{5} \\ \mathbf{6} \\ \mathbf{7} \\ \mathbf{5} \end{pmatrix}$。求向量组$\boldsymbol{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5}$的一个最大无关组，并将其余向量用所求的最大无关组线性表示。

15、已知 $\boldsymbol{A}$ 为 $\boldsymbol{n}$ 阶正交矩阵，且 $|\boldsymbol{A}| < 0$ 。

（1）求行列式 $|\boldsymbol{A}|$ 的值；（2）求行列式 $|\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}|$ 的值。

16、用正交变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{y}$ 化二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2+3x_2^2+3x_3^2+4x_2x_3$ 为标准形；并求正交矩阵 $\boldsymbol{Q}$ ；研究 $f(x_1,x_2,x_3)=1$ 的几何意义。

四、证明题（说明：请在 17、18 两题中任选一题作答，多做不加分）（共 10 分）

17、设 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 满足 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\boldsymbol{AB}$ ，证明矩阵 $\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}$ 与 $\boldsymbol{B}-\boldsymbol{E}$ 都可逆，并且 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$ 。

18、设 A 是 $n\times n$ 阶矩阵，$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 是三个 n 维列向量，且 $\alpha_1 \neq 0$，$A\alpha_1=\alpha_1$，$A\alpha_2=\alpha_1+\alpha_2$, $A\alpha_3=\alpha_2+\alpha_3$，试证：$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关。