2019/2020 学年 第二学期《线性代数》试卷 A 答案（大农类专业 2 学分）

一、选择题：（每题 3 分，共 18 分）

1. D； 2. B； 3. C； 4. A； 5. B； 6. D.

二、填空题：（每题 3 分，共 18 分）

7. $\begin{pmatrix} -4/3 & -1 & 0 & 0 \\ 1/3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ 或 $-\dfrac{1}{3}A^*$；8. -1；9. $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}+k\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$；10. -6；11. 2；12. $t>5$.

三、计算与证明

13. $|A|=4\neq 0$，所以 A 可逆.

在 $A^*X=4A^{-1}+2X$ 两边左乘矩阵 A：$AA^*X=4AA^{-1}+2AX$，

即 $|A|X=4E+2AX$，又即 $4X=4E+2AX$，

所以 $(4E-2A)X=4E$，即 $(2E-A)X=2E$.

因为 $|2E-A|=\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}=4\neq 0$，所以 $2E-A$ 可逆，因此 $X=2(2E-A)^{-1}$ 3 分

因为 $(2E-A|E)=\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)\xrightarrow{\text{行}}\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1/2 & 1/2 \end{array}\right)$ 6 分

所以 $X=2(2E-A)^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. …………………………………………….. 8 分

14. 从第 2 行起至第 5 行，每行都减去第 1 行得：$D_5 \overset{r_i-r_1}{\underset{i=2,3,4,5}{=}} \begin{vmatrix} 1 & 3 & 3 & 3 & 3 \\ 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix}$，

按第 3 行展开得：$D_5=2\cdot(-1)^{3+1}\cdot\begin{vmatrix} 3 & 3 & 3 & 3 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix}$，

按第 2 行展开得：$D_5 = 2\cdot(-1)\cdot(-1)^{2+1}\cdot\begin{vmatrix}3 & 3 & 3\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{vmatrix} = 12$． ……………….……… 8 分

15. $(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4) = \begin{pmatrix}1 & -1 & 2 & -2\\ 1 & 0 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 2 & 0\\ 2 & -2 & 3 & -3\end{pmatrix} \xrightarrow{行} \begin{pmatrix}1 & -1 & 2 & -2\\ 0 & 1 & -2 & 3\\ 0 & 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix} \xrightarrow{行} \begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$

故 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 为其一个极大线性无关组，…………………………………………….. 4 分

且 $\alpha_4 = \alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3$． ……………………………………………………… …… 8 分

16. 因为 $R(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3) = R(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4) = 3$，

所以 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关，而 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 线性相关，

故存在一组数 $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$ 使得 $\alpha_4 = \lambda_1\alpha_1 + \lambda_2\alpha_2 + \lambda_3\alpha_3$，　（1）

设存在一组数 k_1,k_2,k_3,k_4 使得 $k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + k_3\alpha_3 + k_4(\alpha_5 - \alpha_4) = 0$，　（2）

将（1）式代入（2）式，整理得：

$$(k_1 - \lambda_1 k_4)\alpha_1 + (k_2 - \lambda_2 k_4)\alpha_2 + (k_3 - \lambda_3 k_4)\alpha_3 + k_4\alpha_5 = 0，\quad （3）$$

由 $R(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_5) = 4$ 知：　$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_5$ 线性无关，

所以 $\begin{cases} k_1 - \lambda_1 k_4 = 0,\\ k_2 - \lambda_2 k_4 = 0,\\ k_3 - \lambda_3 k_4 = 0,\\ k_4 = 0 \end{cases}$　（3）

因为 $\begin{vmatrix}1 & 0 & 0 & -\lambda_1\\ 0 & 1 & 0 & -\lambda_2\\ 0 & 0 & 1 & -\lambda_3\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{vmatrix} = 1 \neq 0$，所以（3）式只有零解，

故 $k_1 = k_2 = k_3 = k_4 = 0$，所以 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_5 - \alpha_4$ 线性无关，

所以 $R(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_5 - \alpha_4) = 4$． ……………………………………………….. .. 10 分

17. 设存在一组数 x_1,x_2,x_3 使得 $x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+x_3\alpha_3=\beta$，即 $\begin{cases} x_1+x_2+ax_3=-2, \\ x_1+ax_2+x_3=-2, \\ ax_1+x_2+x_3=a-3, \end{cases}$

增广矩阵为：$\overline{A}=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & a & -2 \\ 1 & a & 1 & -2 \\ a & 1 & 1 & a-3 \end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & a & -2 \\ 0 & a-1 & 1-a & 0 \\ 0 & 0 & -(a-1)(a+2) & 3(a-1) \end{array}\right)$　　3 分

（1）　当 $a\neq1$ 且 $a\neq-2$ 时，　$R(A)=R(\overline{A})=3$，方程组有唯一解，

β 可由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 唯一线性表示；………………………………………… 6 分

（2）　当 $a=-2$ 时，增广矩阵 $\overline{A}\to\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & -2 \\ 0 & -3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -9 \end{array}\right)$，$R(A)=2, R(\overline{A})=3$，

$R(A)\neq R(\overline{A})$，方程组无解，

β 不能由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表示；……………………………………………… 9 分

（3）　当 $a=1$ 时，增广矩阵 $\overline{A}\to\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$，$R(A)=R(\overline{A})=2<3$，

方程组有无穷多解，　β 可由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表示，但表示式不唯一，

其同解方程组为 $x_1+x_2+x_3=-2$，

令 $x_2=k_1,x_3=k_2$，则 $x_1=-2-k_1-k_2$，

则 $\beta=(-2-k_1-k_2)\alpha_1+k_1\alpha_2+k_2\alpha_3$，$(k_1,k_2\in R)$.　　………………… …....12 分

18.（1）二次型的矩阵为 $A=\begin{pmatrix} 0 & a & 1 \\ a & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$，

因为二次型在正交变换 $x=Qy$ 下的标准形为 $-y_1^2-y_2^2+2y_3^2$，

所以 A 的特征值为特征值为 $\lambda_1=\lambda_2=-1,\lambda_3=2$，

故有 $|A|=2a=(-1)\times(-1)\times2$，即 $a=1$.　　…………………… ………………3 分

所以 $A=\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&1&0\end{pmatrix}$，

当 $\lambda_1=\lambda_2=-1$时，求 $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系：

$$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$，同解方程组为 $x_1+x_2+x_3=0$，

令 $x_2=k_1, x_3=k_2$，则 $x_1=-k_1-k_2$，得通解为 $\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}-k_1-k_2\\k_1\\k_2\end{pmatrix}=k_1\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$，

故 $\boldsymbol{A}$ 对应于特征值 $\lambda_1=\lambda_2=-1$的特征向量为 $\boldsymbol{p}_1=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$， $\boldsymbol{p}_2=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$； …… …5 分

当 $\lambda_3=2$时，求 $(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系：

$$\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E}=\begin{pmatrix}-2&1&1\\1&-2&1\\1&1&-2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&-1\\0&0&0\end{pmatrix}$$，同解方程组为 $\begin{cases}x_1 \quad -x_3=0\\ x_2-x_3=0\end{cases}$，

令 $x_3=k$，则 $x_1=k, x_2=k$，得通解为 $\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}k\\k\\k\end{pmatrix}=k\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$，

故 $\boldsymbol{A}$ 对应于特征值 $\lambda_3=2$ 的特征向量为 $\boldsymbol{p}_3=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$． …………………………...……. 6 分

将 $\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_2$ 正交化：令 $\boldsymbol{\eta}_1=\boldsymbol{p}_1=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$，

$$\boldsymbol{\eta}_2=\boldsymbol{p}_2-\frac{(\boldsymbol{p}_2,\boldsymbol{\eta}_1)}{(\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_1)}\boldsymbol{\eta}_1=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}-\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-1\\-1\\2\end{pmatrix},$$

则 $\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\boldsymbol{p}_3$ 两两正交． …………………………..……………...………………..…. 8 分

将 $\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\boldsymbol{p}_3$ 单位化：

令 $e_1=\dfrac{\eta_1}{\|\eta_1\|}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$， $e_2=\dfrac{\eta_2}{\|\eta_2\|}=\dfrac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}-1\\-1\\2\end{pmatrix}$， $e_3=\dfrac{p_3}{\|p_3\|}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$， ….. 10 分

令 $Q=(e_1,e_2,e_3)=\begin{pmatrix}-\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}}\\ 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}}\end{pmatrix}$，

则 Q 为正交矩阵，且 $Q^{-1}AQ=Q^TAQ=\Lambda=\begin{pmatrix}-1 & & \\ & -1 & \\ & & 2\end{pmatrix}$.

作正交变换 $x=Qy$，即 $\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}}\\ 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix}$,

将二次型 f 化为标准形： $f=x^TAx=(Qy)^TA(Qy)=y^T(Q^TAQ)y=y^T\Lambda y$

$$=(y_1,y_2,y_3)\begin{pmatrix}-1 & & \\ & -1 & \\ & & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix}=-y_1^2-y_2^2+2y_3^2,$$

故 $Q=\begin{pmatrix}-\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}}\\ 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}}\end{pmatrix}$为所用的正交变换矩阵. …. ……………………..… 12 分

19. （1） $A(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=(A\alpha_1,A\alpha_2,A\alpha_3)=(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3,2\alpha_2+\alpha_3,2\alpha_2+3\alpha_3)$

$$=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\begin{pmatrix}1&0&0\\1&2&2\\1&1&3\end{pmatrix},$$

所以$B=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&2&2\\1&1&3\end{pmatrix}$. ………………………..………………..……………..……… 3 分

（2）令$P=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$，因$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$是线性无关，故$P$可逆.

由$A(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)B$知：$AP=PB$，即$P^{-1}AP=B$，

故A与B相似，它们有相同的特征值.

由$|B-\lambda E|=\begin{vmatrix}1-\lambda&0&0\\1&2-\lambda&2\\1&1&3-\lambda\end{vmatrix}=-(\lambda-1)^2(\lambda-4)=0$

得矩阵B的特征值为：$\lambda_1=\lambda_2=1,\lambda_3=4$，

故矩阵A的特征值为：$\lambda_1=\lambda_2=1,\lambda_3=4$. ………………………..……………… 6 分