第四章　习题 A

1．设随机变量 $X \sim P(\lambda)$，且 $E[(X-1)(X-2)]=8$，则 $\lambda=$ ________ .

解　$E[(X-1)(X-2)]=E(X^2)-3E(X)+2=D(X)+[E(X)]^2-3E(X)=\lambda^2-2\lambda+2=8$

由此可得 $\lambda^2-2\lambda-6=0 \Rightarrow \lambda=-2或\lambda=4$，由 $\lambda>0$，从而 $\lambda=4$.

2．设随机变量 X 的概率密度为 $f(x)=\begin{cases}0.2\mathrm{e}^{-0.2x}, & x>0,\\ 0, & x\le 0.\end{cases}$，则 $E(3X+1)=$（　）

(A) 15；　(B) 1.6；　(C) 16；　(D) 46.

解　$E(3X+1)=3E(X)+1=1+3\int_0^{+\infty}0.2xe^{-0.2x}dx=1+3\times 5=16$，故选 C.

3．设随机变量 X 的 $E(X)=1, D(X)=3$，则 $E(2X^2+6)=$（　）

(A) 14；　(B) 16；　(C) 8；　(D) 22.

解　$E(2X^2+6)=2E(X^2)+6=2\{D(X)+[E(X)]^2\}+6=2\times(3+1^2)+6=14$，故选择 A.

4．设随机变量 X 与 Y 的概率密度分别为

$$f_X(x)=\begin{cases}2\mathrm{e}^{-2x}, & x>0,\\ 0, & x\le 0.\end{cases},\qquad f_Y(y)=\begin{cases}3\mathrm{e}^{-3y}, & y>0,\\ 0, & y\le 0.\end{cases}$$

求 $E(X+Y), E(2X-Y^2)$.

解　$E(X+Y)=E(X)+E(Y)=\int_0^{+\infty}2x\mathrm{e}^{-2x}\mathrm{d}x+\int_0^{+\infty}3y\mathrm{e}^{-3y}\mathrm{d}y=\frac{1}{2}\Gamma(2)+\frac{1}{3}\Gamma(2)=\frac{5}{6}$；

$$E(2X-Y^2)=2E(X)-E(Y^2)=2\int_0^{+\infty}2x\mathrm{e}^{-2x}\mathrm{d}x-3\int_0^{+\infty}y^2\mathrm{e}^{-3y}\mathrm{d}y=\Gamma(2)-\frac{1}{3^2}\Gamma(3)=1-\frac{2}{9}=\frac{7}{9}.$$

5．设随机变量 X 的分布律为

Z	-1	0	1
P	p_1	p_2	p_3

且已知 $E(X)=0.2, E(X^2)=0.8$，求常数 p_1，p_2，p_3.

解　由分布律的性质可得　$p_1+p_2+p_3=1$　（1）

$E(X)=-p_1+0\times p_2+p_3=-p_1+p_3=0.2$　（2）

$E(X^2)=(-1)^2\times p_1+0^2\times p_2+1^2\times p_3=p_1+p_3=0.8$　（3）

上面 3 式联解可得　$p_1=0.3, p_2=0.2, p_3=0.5$.

6. 随机变量 X 的密度函数为 $f(x)=\begin{cases} a+bx^2, & 0\le x\le 1, \\ 0, & 其它. \end{cases}$，且 $E(X)=0.6$，求 a,b.

解 由密度性质可得 $\int_0^1 (a+bx^2)\mathrm{d}x=\left[ax+\frac{1}{3}bx^2\right]_0^1=a+\frac{1}{3}b=1$ （1）

由 $E(X)=0.6$，即 $\int_0^1 x(a+bx^2)\mathrm{d}x=\left[\frac{1}{2}ax^2+\frac{1}{4}bx^4\right]_0^1=\frac{1}{2}a+\frac{1}{4}b=0.6$ （2）

联解上面两式可得 $a=\frac{3}{5},b=\frac{6}{5}$.

7. 随机变量 X 的分布律为

X	0	1	2	3
P	0.5	0.25	0.125	0.125

求 $E(X),E(\frac{1}{1+X}),E(X^2)$.

解 $E(X)=0\times 0.5+1\times 0.25+2\times 0.125+3\times 0.125=\frac{7}{8}$；

$E(\frac{1}{1+X})=1\times 0.5+\frac{1}{2}\times 0.25+\frac{1}{3}\times 0.125+\frac{1}{4}\times 0.125=\frac{67}{96}$；

$E(X^2)=0^2\times 0.5+1^2\times 0.25+2^2\times 0.125+3^2\times 0.125=\frac{15}{8}$.

8．设随机变量 $X\sim B(n,p)$，且 $E(X)=4,D(X)=3.2$，则 $n=$ ________, $p=$ ________ .

解 由 $X\sim B(n,p)$，$E(X)=np=4,D(X)=np(1-p)=3.2$，联解得 n=20, p=0. 2.

9．设随机变量 X 的可能取值为 $1,2,3$，且 $E(X)=2.3,D(X)=0.61$，则 X 的分布律为 ____________________ .

解 记 $P(X=i)=p_i$，由分布律的性质可得 $p_1+p_2+p_3=1$，

由 $E(X)=2.3,D(X)=0.61$ 可得 $p_1+2p_2+3p_3=2.3$，

以及 $E(X^2)=D(X)+[E(X)]^2=0.61+2.3^2=5.9$，即 $p_1+4p_2+9p_3=5.9$

联解上面 3 式可得 $p_1=0.2,p_2=0.3,p_3=0.5$，即 X 的分布律为

X	1	2	3
P	0.2	0.3	0.5

10. 设随机变量 X 与 Y 有 $D(X)=16, D(Y)=25, \rho_{XY}=0.2$，则 $D(X-Y)=$ ______ .

解 $D(X-Y)=D(X)+D(Y)-2\text{Cov}(X,Y)=D(X)+D(Y)-2\rho_{XY}\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)}$

$=16+25-2\times0.2\times4\times5=33$.

11. 设随机变量 X 的 $E(X)=\mu, D(X)=\sigma^2$，则对任意常数 C，必有（ ）

(A) $E[(X-C)^2]=E(X^2)-C^2$； (B) $E[(X-C)^2]\ge E[(X-\mu)^2]$；

(C) $E[(X-C)^2]=E[(X-\mu)^2]$； (D) $E[(X-C)^2]\le E[(X-\mu)^2]$.

解 $E[(X-C)^2]=E(X-\mu)^2+2(\mu-C)E(X-\mu)+(\mu-C)^2=E(X-\mu)^2+(\mu-C)^2\ge E[(X-\mu)^2]$

故选择 B.

12. 设随机变量 X 的分布律为

X	-1	0	1	2
P	0.15	0.40	0.25	0.20

求 $E(X), D(X), E(-3X+1), D(-3X+1)$.

解 $E(X)=-1\times0.15+0\times0.4+1\times0.25+2\times0.20=0.5$；

$E(X^2)=(-1)^2\times0.15+0^2\times0.4+1^2\times0.25+2^2\times0.20=1.2$，

$D(X)=E(X^2)-[E(X)]^2=1.2-0.5^2=0.95$；

$E(-3X+1)=-3E(X)+1=-3\times0.5+1=-0.5$；

$D(-3X+1)=(-3)^2\times0.95=8.55$.

13. 设连续型随机变量 X 的分布函数为 $F(x)=\begin{cases}0, & x<0,\\ Ax, & 0\le x<2,\\ 1, & x\ge 2.\end{cases}$

求 $A, E(X), D(X), E(\mathrm{e}^X)$.

解 由连续型随机变量分布函数的连续型可得 $\lim\limits_{x\to2^-}F(x)=F(2)$，即 $2A=1\Rightarrow A=\dfrac{1}{2}$，

从而可得连续型随机变量 X 的密度函数为 $f(x)=F'(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}, 0<x<2,\\ 0, 其它.\end{cases}$，即

$X\sim U(0,2)$，因此可得 $E(X)=\dfrac{2-0}{2}=1, D(X)=\dfrac{(2-0)^2}{12}=\dfrac{1}{3}$，

$$E(e^X)=\int_0^2 e^x\cdot\frac{1}{2}dx=\frac{1}{2}e^x\Big|_0^2=\frac{e^2-1}{2}.$$

14．设随机变量 X 的概率密度为 $f(x)=Ce^{-|x|},-\infty<x<+\infty$, 求 $C,E(X),D(X)$.

解 由 $\int_{-\infty}^{+\infty}Ce^{-|x|}dx=2C\int_0^{+\infty}e^{-x}dx=2C=1\Rightarrow C=\frac{1}{2}$；

$$E(X)=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}xe^{-|x|}dx=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{0}xe^{x}dx+\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}xe^{-x}dx=\frac{1}{2}xe^x\Big|_{-\infty}^0-\frac{1}{2}\int_{-\infty}^0e^xdx-\frac{1}{2}xe^{-x}\Big|_0^{+\infty}+\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}e^{-x}dx$$
$$=-\frac{1}{2}e^x\Big|_{-\infty}^0-\frac{1}{2}e^{-x}\Big|_0^{+\infty}=-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=0；$$

$$D(X)=E[X-E(X)]^2=E[(X-0)^2]=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}x^2e^{-|x|}dx=\int_0^{+\infty}x^2e^{-x}dx=\Gamma(3)=2 .$$

15．设某汽车站每天 $9:00\sim10:00,10:00\sim11:00$ 都恰有一辆客车到站，但到站的时刻是随机的，且两车到站的时间是相互独立的，其规律为

到站时刻	9:10 10:10	9:30 10:30	9:50 10:50
概率	0.25	0.5	0.25

有一旅客 $9:20$ 到汽车站，求他等车时间 X (以分计)的数学期望和方差.

解 容易求得他等车时间 X (以分计)的分布律为

X	10	30	50	70	90
P	$\frac{2}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{2}{16}$	$\frac{1}{16}$

$$E(X)=10\times\frac{1}{2}+30\times\frac{1}{4}+50\times\frac{1}{16}+70\times\frac{1}{8}+90\times\frac{1}{16}=30(\text{分}),$$
$$D(X)=E[(X-30)^2]=(10-30)^2\times\frac{1}{2}+(30-30)^2\times\frac{1}{4}+(50-30)^2\times\frac{1}{16}+(70-30)^2\times\frac{1}{8}+(90-30)^2\times\frac{1}{16}=650(\text{分}^2).$$

16．设随机变量 $X\sim N(2,4),Y\sim N(3,9)$，且 X 与 Y 相互独立，则 $Z=2X-Y+3$ 的概率密度为 ____________________ .

解 由正态随机向量的线性组合仍然服从正态分布可知，

$Z=2X-Y+3\sim N(2\times2-3+3,2^2\times4+(-1)^2\times9)=N(4,25)$，故 $Z=2X-Y+3$ 的概率密度为 $f_Z(z)=\frac{1}{5\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(z-4)^2}{50}},-\infty<z<+\infty$.

17．设随机变量 (X,Y) 的联合分布律为

X \ Y	0	1
-1	0.07	0.08
0	0.18	0.32
1	0.15	0.20

则有（　）

(A) X 与 Y 不独立；　　(B) X 与 Y 相互独立；

(C) X 与 Y 相关；　　(D) X 与 Y 相互独立且不相关.

解　容易求得 $E(X)=-1\times 0.15+0\times 0.5+1\times 0.35=0.2$，$E(Y)=1\times 0.6=0.6$，

$E(XY)=-0.08+0.20=0.12$，$\mathrm{Cov}(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)=0.12-0.2\times 0.6=0$，

所以，X 与 Y 不相关，容易求得 $P\{X=0\}=0.50, P\{Y=0\}=0.40$，而

$P\{X=0,Y=0\}=0.18\neq P\{X=0\}\cdot P\{Y=0\}$，所以，$X$ 与 Y 不独立，故选择 A.

18．设随机变量 X 与 Y 满足 $D(X+Y)=D(X-Y)$，则必有（　）

(A) X 与 Y 相互独立；　　(B) $D(X)=0$；

(C) $D(X)\cdot D(Y)=0$；　　(D) X 与 Y 不相关.

解　因为 $D(X\pm Y)=D(X)+D(Y)\pm 2\rho_{XY}\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)}$，由 $D(X+Y)=D(X-Y)$ 可得

$\rho_{XY}=0$，即 X 与 Y 不相关，故选择 D.

19．将一枚硬币重复抛掷 n 次，若 X 与 Y 分别表示正面向上和反面向上的次数，则 X 与 Y 的相关系数为（　）

(A) 0；　(B) -1；　(C) 0.5；　(D) 1.

解　容易知道 $Y=-X+n$，由相关系数的意义可知，则 X 与 Y 的相关系数为 -1，故选择 B.

20．设随机变量 X 与 Y 有 $D(X)=1, D(Y)=4, \rho_{XY}=-1$，求 $D(2X-3Y+5)$.

解　$D(2X-3Y+5)=4D(X)+9D(Y)-12\rho_{XY}\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)}$

$=4+36-12\times(-1)\times 1\times 2=64$.

21．袋中装有 2 只白球及 3 只黑球，现进行无放回的摸球，定义下列随机变量

$$X=\begin{cases}1, \text{第一次摸出白球},\\ 0, \text{第一次摸出黑球}.\end{cases},\qquad Y=\begin{cases}1, \text{第二次摸出白球}\\ 0, \text{第二次摸出黑球}.\end{cases}$$

求 (X,Y) 的联合分布律及 ρ_{XY}.

解 $P\{X=0,Y=0\}=P\{X=0\}P\{Y=0\mid X=0\}=\dfrac{3}{5}\times\dfrac{2}{4}=0.3$ ，

$P\{X=0,Y=10\backslash\}=P\{X=0\}P\{Y=1\mid X=0\}=\dfrac{3}{5}\times\dfrac{2}{4}=0.3$ ，

$P\{X=1,Y=0\}=P\{X=1\}P\{Y=0\mid X=1\}=\dfrac{2}{5}\times\dfrac{3}{4}=0.3$ ，

$P\{X=1,Y=1\}=P\{X=1\}P\{Y=1\mid X=1\}=\dfrac{2}{5}\times\dfrac{1}{4}=0.1$ ，

所以 (X,Y) 的联合分布律为

X \ Y	0	1
0	0.3	0.3
1	0.3	0.1

$E(X)=E(X^2)=0.4,E(Y)=E(Y^2)=0.4,\ D(X)=E(X^2)-[E(X)]^2=0.24,$

$D(Y)=E(Y^2)-[E(Y)]^2=0.24,E(XY)=0.1,\mathrm{Cov}(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)=-0.06$ ，

所以，X 与 Y 的相关系数为 $\rho_{XY}=\dfrac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)}}=\dfrac{-0.06}{0.24}=-\dfrac{1}{4}$.

22．设随机变量 (X,Y) 的联合概率密度为 $f(x,y)=\begin{cases}Cx, & 0<x<y<1,\\ 0, & \text{其它}.\end{cases}$

求 $C,E(X),E(Y),\rho_{XY}$.

解 由密度函数的性质可得 $C\int_0^1\mathrm{d}x\int_x^1 x\mathrm{d}y=C\int_0^1(x-x^2)\mathrm{d}x=\dfrac{C}{6}=1\Rightarrow C=6$ ，

$$E(X)=\int_0^1\left[\int_x^1 x\cdot 6x\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}x=\int_0^1(6x^2-6x^3)\mathrm{d}x=\left[2x^3-\frac{3}{2}x^4\right]_0^1=\frac{1}{2},$$

$$E(Y)=\int_0^1\left[\int_x^1 y\cdot 6x\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}x=\int_0^1(3x-3x^3)\mathrm{d}x=\left[\frac{3}{2}x^2-\frac{3}{4}x^4\right]_0^1=\frac{3}{4},$$

$$E(X^2)=\int_0^1\left[\int_x^1 x^2\cdot 6x\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}x=\int_0^1(6x^3-6x^4)\mathrm{d}x=\left[\frac{3}{2}x^4-\frac{6}{5}x^4\right]_0^1=\frac{3}{10},$$

$$E(Y^2)=\int_0^1\left[\int_x^1 y^2\cdot 6x\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}x=\int_0^1(2x-2x^4)\mathrm{d}x=\left[x^2-\frac{2}{5}x^5\right]_0^1=\frac{3}{5},$$

$$E(XY)=\int_0^1\left[\int_x^1 xy\cdot 6x\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}x=\int_0^1 3(x^2-x^4)\mathrm{d}x=\left[x^3-\frac{3}{5}x^5\right]_0^1=\frac{2}{5},$$

$$D(X)=E(X^2)-[E(X)]^2=\frac{3}{10}-\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{20},D(Y)=E(Y^2)-[E(Y)]^2=\frac{3}{5}-\left(\frac{3}{4}\right)^2=\frac{3}{80},$$

$$\mathrm{Cov}(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)=\frac{2}{5}-\frac{1}{2}\times\frac{3}{4}=\frac{1}{40},$$

所以，X 与 Y 的相关系数为 $\rho_{XY}=\dfrac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)}}=\dfrac{1/40}{\sqrt{1/20}\sqrt{3/80}}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

23. 设随机变量 (X,Y) 具有密度函数

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{8}(x+y), & 0\le x\le 2, 0\le y\le 2,\\ 0, & \text{其它。}\end{cases}$$

求 $E(X)$，$E(Y)$，$\mathrm{Cov}(X,Y)$，ρ_{XY}，$D(X+Y)$.

解 容易求得 (X,Y) 关于 X 和 Y 的边缘密度函数分别为

$$f_X(x)=\begin{cases}\frac{1}{4}x+\frac{1}{4}, 0<x<2,\\ 0, \quad \text{其它，}\end{cases} \qquad f_Y(y)=\begin{cases}\frac{1}{4}y+\frac{1}{4}, 0<y<2,\\ 0, \quad \text{其它.}\end{cases}$$

$$E(X)=\int_0^2 x\cdot\frac{1}{4}(x+1)\mathrm{d}x=\left(\frac{1}{12}x^3+\frac{1}{8}x^2\right)\Big|_0^2=\frac{7}{6}, \text{类似地得} E(Y)=\frac{7}{6},$$

$$E(X^2)=\int_0^2 x^2\cdot\frac{1}{4}(x+1)\mathrm{d}x=\left(\frac{1}{16}x^4+\frac{1}{12}x^3\right)\Big|_0^2=\frac{5}{3}, \text{同样地求得} E(Y^2)=\frac{5}{3},$$

$$E(XY)=\int_0^2\left[\int_0^2 xy\cdot\frac{1}{8}(x+y)\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}x=\int_0^2\left(\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{3}x\right)\mathrm{d}x=\left(\frac{1}{12}x^3+\frac{1}{6}x^2\right)\Big|_0^2=\frac{4}{3},$$

$$\mathrm{cov}(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)=\frac{4}{3}-\frac{7}{6}\times\frac{7}{6}=-\frac{1}{36},$$

$$E(X+Y)=E(X)+E(Y)=\frac{7}{6}+\frac{7}{6}=\frac{7}{3},$$

$$E[(X+Y)^2]=E(X^2)+E(Y^2)+2E(XY)=\frac{5}{3}+\frac{5}{3}+2\times\frac{4}{3}=6,$$

所以 $D(X+Y)=E[(X+Y)^2]-[E(X+Y)]^2=6-\left(\dfrac{7}{3}\right)^2=\dfrac{5}{9}$.

24. 设随机变量 X 与 Y 独立，$X\sim N(a,1), Y\sim N(b,1)$，求 $\alpha X+\beta Y$ 与 $\alpha X-\beta Y$ 的相关系数 ρ.

解 由于随机变量 X 与 Y 独立，所以 $D(\alpha X\pm\beta Y)=\alpha^2 D(X)+\beta^2 D(Y)=\alpha^2+\beta^2$,

$$\mathrm{cov}(\alpha X+\beta Y,\alpha X-\beta Y)=\alpha^2 D(X)-\beta^2 D(Y)=\alpha^2-\beta^2,$$

所以$\alpha X+\beta Y$与$\alpha X-\beta Y$的相关系数$\rho=\dfrac{\operatorname{cov}(\alpha X+\beta Y,\alpha X-\beta Y)}{\sqrt{D(\alpha X+\beta Y)}\sqrt{D(\alpha X-\beta Y)}}=\dfrac{\alpha^2-\beta^2}{\alpha^2+\beta^2}$.

25. 设二维随机变量(X,Y)的密度函数为

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{2}{\pi}, & x^2+y^2\le 1, x\ge 0\\ 0, & \text{其它}.\end{cases}$$

试验证X和Y是不相关的，但X和Y不是相互独立的.

解 $E(Y)=\int_{-1}^{1}\left[\int_0^{\sqrt{1-y^2}} y\cdot\dfrac{2}{\pi}\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}y=\dfrac{2}{\pi}\int_{-1}^{1}y\sqrt{1-y^2}\mathrm{d}y=0,$

$$E(X)=\int_0^1\left[\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}x\cdot\frac{2}{\pi}\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}x=\frac{4}{\pi}\int_0^1 x\sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x=\frac{4}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin t\cos^2 t\mathrm{d}t=-\frac{4}{3\pi}\cos^3 t\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{4}{3\pi},$$

$$E(XY)=\int_{-1}^{1}\left[\int_0^{\sqrt{1-y^2}}xy\cdot\frac{2}{\pi}\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}y=\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}y(1-y^2)\mathrm{d}x=0,$$

因为$\operatorname{cov}(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)=0-0\times\dfrac{4}{3\pi}=0$, 所以$X$和$Y$是不相关的；

$$f_X(x)=\begin{cases}\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}\dfrac{2}{\pi}\mathrm{d}y, 0<x<1,\\ 0, \quad \text{其它}.\end{cases}=\begin{cases}\dfrac{4}{\pi}\sqrt{1-x^2}, 0<x<1,\\ 0, \quad \text{其它}.\end{cases}$$

$$f_Y(y)=\begin{cases}\int_0^{\sqrt{1-y^2}}\dfrac{2}{\pi}\mathrm{d}x, -1<y<1\\ 0, \quad \text{其它}.\end{cases}=\begin{cases}\dfrac{2}{\pi}\sqrt{1-y^2}, -1<y<1,\\ 0, \quad \text{其它}.\end{cases}$$

因为$f_X(x)\cdot f_Y(y)\ne f(x,y)$，所以，$X$和$Y$不是相互独立.

26. 设随机变量X与Y相互独立,试证明：

$$D(XY)=D(X)D(Y)+[E(X)]^2D(Y)+[E(Y)]^2D(X).$$

证明 由随机变量X与Y相互独立可知，X^2与Y^2相互独立，因此

$E[(XY)^2]=E(X^2Y^2)=E(X^2)E(Y^2), E(XY)=E(X)E(Y)$, 从而

$$D(XY)=E[(XY)^2]-[E(XY)]^2=E(X^2)E(Y^2)-[E(X)E(Y)]^2=E(X^2)E(Y^2)-[E(X)]^2[E(Y)]^2$$

$$D(X)D(Y)+[E(X)]^2D(Y)+[E(Y)]^2D(X)=\{D(X)+[E(X)]^2\}D(Y)+[E(Y)]^2\{E(X^2)-[E(X)]^2\}$$

$$=E(X^2)\{E(Y^2)-[E(Y)]^2\}+E(X^2)[E(Y)]^2-[E(X)]^2[E(Y)]^2$$

$$=E(X^2)E(Y^2)-[E(X)]^2[E(Y)]^2$$

所以，随机变量 X 与 Y 相互独立时，有

$$D(XY)=D(X)D(Y)+[E(X)]^2D(Y)+[E(Y)]^2D(X).$$

第四章 习题B

1．设随机变量 X 与 Y 相互独立，其概率密度分别为

$$f_X(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}x, & 0<x<2,\\ 0, & 其它.\end{cases}, \qquad f_Y(y)=\begin{cases}\mathrm{e}^{-(y-3)}, & y>3,\\ 0, & 其它.\end{cases},$$

则 $E(XY)=$________．

解 $EX=\int_0^2 x\cdot\frac{1}{2}x\mathrm{d}x=\frac{1}{6}x^3\Big|_0^2=\frac{4}{3}, E(Y)=\int_3^{+\infty}y\mathrm{e}^{-(y-3)}\mathrm{d}y=\int_0^{+\infty}(t+3)\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t=4,$

由于随机变量 X 与 Y 相互独立，所以，$E(XY)=E(X)E(Y)=\frac{4}{3}\times 4=\frac{16}{3}$.

2．设随机变量 X 与 Y 的相关系数 $\rho_{XY}=0.9$，若 $Z=X-0.4$，则 Y 与 Z 的相关系数为________________．

解 因为 $\operatorname{cov}(Y,Z)=\operatorname{cov}(Y,X-0.4)=\operatorname{cov}(Y,X)=\operatorname{cov}(X,Y), D(Z)=D(X-0.4)=D(X),$

所以，Y 与 Z 的相关系数为 $\rho_{YZ}=\dfrac{\operatorname{cov}(Y,Z)}{\sqrt{D(Y)}\sqrt{D(Z)}}=\dfrac{\operatorname{cov}(X,Y)}{\sqrt{D(Y)}\sqrt{D(X)}}=\rho_{XY}=0.9$.

3．设随机变量 X 与 Y 独立同分布，令 $U=X-Y, V=X+Y$，则随机变量 U 与 V 一定有（ ）

(A) U 与 V 不独立；　　(B) U 与 V 相互独立；

(C) U 与 V 不相关；　　(D) U 与 V 相关.

解 因为 $\operatorname{cov}(U,V)=\operatorname{cov}(X-Y,X+Y)=D(X)-D(Y)=0$（由于 X 与 Y 独立同分布），所以 U 与 V 不相关，故选择 C.

4．设随机变量 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 独立同分布，且其方差为 $\sigma^2>0$，令 $Y=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$，则有（ ）

(A) $\operatorname{Cov}(X_1,Y)=\dfrac{\sigma^2}{n}$；　　(B) $\operatorname{Cov}(X_1,Y)=\sigma^2$；

(C) $D(X_1+Y)=\dfrac{(n+2)\sigma^2}{n}$；　　(D) $D(X_1-Y)=\dfrac{(n+1)\sigma^2}{n}$.

解 $\mathrm{Cov}(X_1,Y)=\mathrm{cov}(\mathrm{X}_1,\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i)=\frac{1}{n}D(X_1)+\frac{1}{n}\sum_{i=2}^{n}\mathrm{cov}(X_1,X_i)=\frac{\sigma^2}{n}+\frac{1}{n}\sum_{i=2}^{n}0=\frac{\sigma^2}{n}$，

故 选择 A.

5．某人用 5 把钥匙去开门，只有一把能打开，今逐个任取一把试开，假设（1）打不开的钥匙不放回；（2）打不开的钥匙放回. 求在这两种情况下打开此门所需开门次数 X 的数学期望及方差.

解（1）打不开的钥匙不放回下所需开门次数 X 的分布律为

X	1	2	3	4	5
P	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$

$$E(X)=1\times\frac{1}{5}+2\times\frac{1}{5}+3\times\frac{1}{5}+4\times\frac{1}{5}+5\times\frac{1}{5}=3, E(X)=1^2\times\frac{1}{5}+2^2\times\frac{1}{5}+3^2\times\frac{1}{5}+4^2\times\frac{1}{5}+5^2\times\frac{1}{5}=11,$$

$D(X)=E(X^2)-[E(X)]^2=11-3^2=2$；

（2）打不开的钥匙放回下所需开门次数 X 的分布律为

$$P\{X=k\}=\left(\frac{4}{5}\right)^{k-1}\frac{1}{5}, k=1,2,\cdots$$

$$E(X)=\sum_{k=1}^{\infty}k(\frac{4}{5})^{k-1}\frac{1}{5}=\frac{1}{5}\sum_{k=1}^{\infty}kx^{k-1}\bigg|_{x=4/5}=\frac{1}{5}\left(\sum_{k=1}^{\infty}x^k\right)'\bigg|_{x=4/5}=\frac{1}{5}\left(\frac{x}{1-x}\right)'\bigg|_{x=4/5}=\frac{1}{5}\frac{1}{(1-x)^2}\bigg|_{x=4/5}=5,$$

$$E(X^2)=E[X(X-1)]+E(X)=\sum_{k=1}^{\infty}k(k-1)(\frac{4}{5})^{k-1}\frac{1}{5}+5=5+\frac{4}{25}\sum_{k=1}^{\infty}k(k-1)x^{k-2}\bigg|_{x=4/5}$$

$$=5+\frac{4}{25}\left(\sum_{k=1}^{\infty}x^k\right)''\bigg|_{x=4/5}=5+\frac{4}{25}\left(\frac{x}{1-x}\right)''\bigg|_{x=4/5}=5+\frac{4}{25}\frac{2}{(1-x)^3}\bigg|_{x=4/5}=45,$$

$$D(X)=E(X^2)-[E(X)]^2=45-5^2=20.$$

6．设加工的某种零件的内径 X (单位：毫米)服从正态分布 $N(\mu,1)$，内径在 8 与 10 之间的为合格品，其余为不合格品. 已知销售一个零件的利润 Y (单位：元)和该零件的内径 X 有如下关系

$$Y=\begin{cases}-1, & X<8,\\ 10, & 8\le X\le 10,\\ -2, & X>10.\end{cases}$$

求平均内径 μ 取何值时，销售一个零件所获利润的数学期望最大？

解 $E(Y)=10P\{8\le X\le 10\}-P\{X<8\}-2P\{X>10\}$

$$=10\left[\Phi(10-\mu)-\Phi(8-\mu)\right]-\Phi(8-\mu)-2\left[1-\Phi(10-\mu)\right]$$
$$=12\Phi(10-\mu)-11\Phi(8-\mu)-2$$

由 $\dfrac{dE(\mathrm{Y})}{d\mu}=-\dfrac{12}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(10-\mu)^2}{2}}+\dfrac{11}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(8-\mu)^2}{2}}\underline{\underline{令}}0$, 得 $\mu=9-\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{12}{11}$,

由题仪意知，当 $\mu=9-\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{12}{11}$ 毫米时，平均利润最大.

7．设随机事件 A 与 B 满足 $P(A)=\dfrac{1}{4},P(B|A)=\dfrac{1}{3},P(A|B)=\dfrac{1}{2}$，定义下列随机变量

$$X=\begin{cases}1, & A发生,\\ 0, & A不发生.\end{cases},\qquad Y=\begin{cases}1, & B发生,\\ 0, & B不发生.\end{cases}$$

求 (X,Y) 的联合分布律及 ρ_{XY}.

解 $P(AB)=P(A)P(B\mid A)=\dfrac{1}{12},P(B)=\dfrac{P(AB)}{P(A\mid B)}=\dfrac{1}{6}$

$$P(X=1,Y=1)=P(AB)=\frac{1}{12},P(X=1,Y=0)=P(A\overline{B})=P(A)-P(AB)=\frac{1}{6}$$
$$P(X=0,Y=1)=P(\overline{A}B)=P(B)-P(AB)=\frac{1}{12}$$
$$P(X=0,Y=0)=P(\overline{A}\overline{B})=1-P(A\cup B)=1-P(A)-P(B)+P(AB)=\frac{2}{3}$$

即（X,Y）的联合分布律为

X \ Y	0	1
0	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{12}$
1	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{12}$

$E(X)=E(X^2)=P(A)=\dfrac{1}{4}$, $E(Y)=E(Y^2)=P(B)=\dfrac{1}{6}$, $E(XY)=P(AB)=\dfrac{1}{12}$

$D(X)=E(X^2)-[E(X)]^2=\dfrac{3}{16}$,$D(Y)=E(Y^2)-[E(Y)]^2=\dfrac{5}{36}$

$\mathrm{Cov}(X,Y)=E(XY)-E(X)\,E(Y)=\dfrac{1}{24}$， $\rho_{XY}=\dfrac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sqrt{D(X)D(Y)}}=\dfrac{\sqrt{15}}{15}$.

8．设 A 与 B 是两随机事件，定义下列随机变量

$$X=\begin{cases}1, & A发生,\\ -1, & A不发生.\end{cases},\qquad Y=\begin{cases}1, & B发生,\\ -1, & B不发生.\end{cases}$$

证明：X 与 Y 不相关的充要条件是 A 与 B 相互独立.

证明 $E(X)=1\times P\{X=1\}+(-1)\times P\{X=-1\}=P(A)-P(\bar{A})=2P(A)-1,$

$$E(Y)=1\times P\{Y=1\}+(-1)\times P\{Y=-1\}=P(B)-P(\bar{B})=2P(B)-1,$$

$$E(XY)=P\{X=1,Y=1\}-P\{X=1,Y=-1\}-P\{X=-1,Y=1\}+P\{X=-1,Y=-1\}$$

$$=P(AB)-P(A\bar{B})-P(\bar{A}B)+P(\bar{A}\bar{B})=3P(AB)-P(A)-P(B)+1-[P(A)+P(B)-P(AB)]$$

$$=4P(AB)-2P(A)-2P(B)+1,$$

于是 $\mathrm{Cov}(X,Y)=4P(AB)-4P(A)P(B)$, 所以 $\mathrm{Cov}(X,Y)=0$ 当且仅当 $P(AB)=P(A)P(B)$，即 X 与 Y 不相关的充要条件是 A 与 B 相互独立.

9．设二维随机变量 (X,Y) 的概率密度函数为 $f(x,y)=\begin{cases}12y^2, 0<y<x<1\\ 0,\text{其他}\end{cases}$，求

求 $E(X),\ E(Y),\ E(XY),\ E(X^2+Y^2)$，$\rho_{XY}$.

解 $E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_{0\le y\le x\le 1}x\cdot 12y^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^x 12xy^2\mathrm{d}y=\dfrac{4}{5}$，

$$E(Y)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}yf(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_{0>y<x<1}y\cdot 12y^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^x 12y^3\mathrm{d}y=\frac{3}{5},$$

$$E(XY)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}xyf(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_{0<y<x<1}xy\cdot 12y^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^x 12xy^3\mathrm{d}y=\frac{1}{2},$$

$$E(X^2)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}x^2f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_{0\le y\le x\le 1}x^2\cdot 12y^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^x 12x^2y^2\mathrm{d}y=\frac{2}{3},$$

$$E(Y^2)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}y^2f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_{0>y<x<1}y^2\cdot 12y^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^x 12y^4\mathrm{d}y=\frac{2}{5},$$

$$E(X^2+Y^2)=E(X^2)+E(Y^2)=\frac{2}{3}+\frac{2}{5}=\frac{16}{15},$$

$$D(X)=E(X^2)-[E(X)]^2=\frac{2}{3}-(\frac{4}{5})^2=\frac{2}{75},$$

$$D(Y)=E(Y^2)-[E(Y)]^2=\frac{2}{5}-(\frac{3}{5})^2=\frac{1}{25},$$

$$\mathrm{cov}(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)=\frac{1}{2}-\frac{4}{5}\times\frac{3}{5}=\frac{1}{50},$$

$$\rho_{XY}=\frac{\operatorname{cov}(X,Y)}{\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)}}=\frac{1/50}{\sqrt{2/75}\sqrt{1/25}}=\frac{\sqrt{6}}{4}.$$

10．设随机变量 (X,Y) 在区域 $\{(x,y)\big|0\le x\le 2,0\le y\le 1\}$ 上服从均匀，定义下列随机变量

$$U=\begin{cases}1, & X>Y,\\ 0, & X\le Y.\end{cases},\qquad V=\begin{cases}1, & X>2Y,\\ 0, & X\le 2Y.\end{cases}$$

求 (U,V) 的联合分布律及 ρ_{UV}.

解 $P\{U=0,V=0\}=P\{X\le Y,X\le 2Y\}=P\{X\le Y\}=\int_0^1\mathrm{d}y\int_0^y\frac{1}{2}\mathrm{d}x=\frac{1}{4},$

$P\{U=0,V=1\}=P\{X\le Y,X>2Y\}=P(\varnothing)=0,$

$P\{U=1,V=0\}=P\{X>Y,X\le 2Y\}=P\{Y<X\le 2Y\}=\int_0^1\mathrm{d}y\int_y^{2y}\frac{1}{2}\mathrm{d}x=\frac{1}{4},$

$P\{U=1,V=1\}=P\{X>Y,X>2Y\}=P\{X>2Y\}=\int_0^1\mathrm{d}y\int_{2y}^{2}\frac{1}{2}\mathrm{d}x=\frac{1}{2},$

所以 (U,V) 的联合分布律为

U \ V	0	1
0	$\frac{1}{4}$	0
1	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$

$E(U)=E(U^2)=\frac{3}{4},E(V)=E(V^2)=\frac{1}{2},E(XY)=\frac{1}{2}$，$D(U)=\frac{3}{16},D(V)=\frac{1}{4}$，

$\operatorname{cov}(U,V)=E(UV)-E(U)E(V)=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\times\frac{3}{4}=\frac{1}{8}$，所以 U 与 V 的相关系数为

$$\rho_{UV}=\frac{\operatorname{cov}(U,V)}{\sqrt{D(U)}\sqrt{D(V)}}=\frac{1/8}{\sqrt{3/16}\sqrt{1/4}}=\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

11．某商场对某种商品的销售情况作了统计，知顾客对该商品的日需求量 X 服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$，且日平均销售量为 μ=40(件)，销售机会在 30 到 50 件之间的概率为 0.5．若进货不足，则每件利润损失为 70 元；若进货量过大，则因资金积压，每件损失 100 元．求日最优进货量．

解 $X\sim N(40,\sigma^2)$，$0.5=P(30<X<50)=P\left(\left|\frac{X-40}{\sigma}\right|<\frac{10}{\sigma}\right)$，即

$$2\Phi(\frac{10}{\sigma})-1=0.5,\Phi(\frac{10}{\sigma})=0.75=\Phi(0.675),\text{得}\sigma=14.9$$

$$\text{利润函数为}:h(y,X)=\begin{cases}70y, & y\le X\\ 170X-100y, & y>X\end{cases}$$

$$\begin{aligned}E[h(y,X)]&=\int_{-\infty}^{+\infty}h(y,x)f(x)dx\\&=\int_{-\infty}^{y}(170x-100y)f(x)dx+70y\int_{y}^{+\infty}f(x)dx\\&=70y+170\left(\int_{-\infty}^{y}xf(x)dx-y\int_{-\infty}^{y}f(x)dx\right)\end{aligned}$$

$$\frac{d}{dy}E[h(y,X)]=70-170\int_{-\infty}^{y}f(x)dx=0\ \text{得}F(y)=\Phi\left(\frac{y-40}{\sigma}\right)=1-\Phi\left(\frac{40-y}{\sigma}\right)=\frac{7}{17},\text{即}$$

$$\Phi\left(\frac{40-y}{14.9}\right)=\frac{10}{17},\text{得}y=36.7\approx 37$$,所以日最优进货量 37 件.

12. 在一个有 n 个人参加的晚会上，每个人带一件礼物，且假定各个人带的礼物都不相同. 晚会期间各个人从放在一起的 n 件礼物中随机抽取一件，试求抽到自己礼物的人数 X 的均值和方差.

解 记

$$X_i=\begin{cases}1,\text{第}i\text{个人恰好取到自己的礼物},\\ 0,\ \text{第}i\text{个人取到别人的礼物},\end{cases}\quad i=1,2,,\ldots,n$$

则 $X_1,X_2,\ldots,X_n$ 是同分布的，但不独立.其共同的分布为

$$P(X_i=1)=\frac{1}{n},P(X_i=0)=1-\frac{1}{n},i=1,2,\cdots,n.$$

由此得 $E(X_i)=\frac{1}{n},D(X_i)=\frac{1}{n}(1-\frac{1}{n}),i=1,2,\cdots,n$ 。

又因为 $X=X_1+X_2+\ldots+X_n$,所以

$$E(X)=E(X_1)+E(X_2)+\ldots+E(X_n)=n\cdot\frac{1}{n}=1.$$

但因为 X_i 间不独立，所以

$$D(X)=\sum_{i=1}^{n}D(X_i)+2\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i+1}^{n}\mathrm{Cov}(X_i,X_j)$$

为计算 $\mathrm{Cov}(X_i,X_j)$，先求出 X_iX_j 的分布列，注意到 X_iX_j 的可能取值为 0，1.且

$$P(X_iX_j=1)=P(X_i=1,X_j=1)=\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{n-1},$$

所以 $E(X_iX_j)=0\times P(X_iX_j=0)+1\times P(X_iX_j=1)=\dfrac{1}{n(n-1)}.$

因此 $\mathrm{Cov}(X_i,X_j)=E(X_iX_j)-E(X_i)E(X_j)=\dfrac{1}{n(n-1)}-\left(\dfrac{1}{n}\right)^2=\dfrac{1}{n^2(n-1)}$

由此得
$$D(X)=\frac{n-1}{n}+2C_n^2\frac{1}{n^2(n-1)}=1.$$

13． 设 $X_1,X_2,\ldots,X_n$ 为独立同分布的随机变量，且仅取正值，证明：对任意 $k(1\le k\le n)$ 有
$$E\left(\frac{X_1+X_2+\cdots+X_k}{X_1+X_2+\cdots+X_n}\right)=\frac{k}{n}.$$

证明 $X_j/\sum_{i=1}^{n}X_i$ 同分布 $(j=1,\cdots,n)$，又 $\left|X_j/\sum_{i=1}^{n}X_i\right|\le 1$，所以 $E\left[X_j/\sum_{i=1}^{n}X_i\right]$ 都存在且相等 $(j=1,\cdots,n)$． 由于 $1=E\left[\sum_{i=1}^{n}X_i/\sum_{i=1}^{n}X_i\right]=n\cdot E\left[X_1/\sum_{i=1}^{n}X_i\right]$，所以
$$E\left(\frac{X_1+\cdots+X_k}{X_1+\cdots+X_n}\right)=k\cdot E\left[X_1/\sum_{i=1}^{n}X_i\right]=\frac{k}{n}$$

14. 设随机变量 X 服从参数为 n,p 的二项分布 $B(n,p)$，试证明：
$$E\left(\frac{1}{X+1}\right)=\frac{1-(1-p)^{n+1}}{(n+1)p}.$$

证明 $E\left(\dfrac{1}{X+1}\right)=\sum_{k=0}^{n}\dfrac{1}{k+1}\dbinom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}=\sum_{k=0}^{n}\dfrac{1}{k+1}\cdot\dfrac{n!}{k!(n-k)!}p^k(1-p)^{n-k}$

$$=\sum_{k=0}^{n}\frac{n!}{(k+1)![(n+1)-(k+1)]!}p^k(1-p)^{n-k}=\frac{1}{(n+1)p}\sum_{k=0}^{n}\frac{(n+1)!}{(k+1)![(n+1)-(k+1)]!}p^{k+1}(1-p)^{n-k}$$

$$\underline{\underline{k+1=i}}\frac{1}{(n+1)p}\sum_{k=1}^{n+1}\frac{(n+1)!}{i![(n+1)-i]!}p^i(1-p)^{(n+1)-i}$$

$$=\frac{1}{(n+1)p}\left[\sum_{i=0}^{n+1}\binom{n+1}{i}p^i(1-p)^{(n+1)-i}-(1-p)^{(n+1)}\right]$$

$$=\frac{1-(1-p)^{(n+1)}}{(n+1)p}.$$

15. 设随机变量 X 服从参数为 λ 的泊松分布 $P(\lambda)$，试证明：

$$E\left(X^{n}\right)=\lambda E\left[(X+1)^{n-1}\right],$$

并利用这样结果计算$E(X^3)$.

证明 $E(X^n)=\sum_{k=0}^{\infty}k^n\cdot\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}=\sum_{k=1}^{\infty}k^n\cdot\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}\xlongequal{j=k-1}\sum_{j=0}^{\infty}(j+1)^n\cdot\frac{\lambda^{j+1}}{(j+1)!}e^{-\lambda}$

$$=\lambda\sum_{j=0}^{\infty}(j+1)^n\cdot\frac{\lambda^j}{(j+1)!}e^{-\lambda}=\lambda\sum_{j=0}^{\infty}(j+1)^{n-1}\cdot\frac{\lambda^j}{j!}e^{-\lambda}$$

$$=\lambda E(X+1)^{n-1}.$$

下面利用此结果计算$E(X^3)$，

$E(X^3)=\lambda E(X+1)^2=\lambda[E(X^2)+2E(X)+1]$

$$=\lambda[D(X)+(E(X))^2+2E(X)+1]=\lambda(\lambda+\lambda^2+2\lambda+1)$$

$$=\lambda^3+3\lambda^2+\lambda.$$

16. 设随机变量X服从正态分布$N(\mu,\sigma^2)$，证明：$E(|X-\mu|)=\sigma\sqrt{\frac{2}{\pi}}$.

证明 $E(|X-\mu|)=\int_{-\infty}^{+\infty}|x-\mu|\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\mathrm{e}^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}\mathrm{d}xt\xlongequal{\frac{x-\mu}{\sigma}}\frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}|t|\,\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\mathrm{d}t$

$$=\frac{2\sigma}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{+\infty}t\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\mathrm{d}t=\sigma\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\mathrm{d}\left(\frac{t^2}{2}\right)=-\sigma\sqrt{\frac{2}{\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\Big|_0^{+\infty}=\sigma\sqrt{\frac{2}{\pi}}.$$

17. 设随机变量X与Y相互独立且都服从正态分布$N(\mu,\sigma^2)$，证明：

（1）$E[\min(X,Y)]=\mu-\frac{\sigma}{\sqrt{\pi}}$；

（2）$E[\mathrm{maxn}(X,Y)]=\mu+\frac{\sigma}{\sqrt{\pi}}$.

证明 容易得出$\max(X,Y)=\frac{1}{2}\left[X+Y+|X-Y|\right],\min(X,Y)=\frac{1}{2}\left[X+Y-|X-Y|\right]$，
从而有，

$$E[\max(X,Y)]=\frac{1}{2}\left[E(X)+E(Y)+E(|X-Y|)\right]=\frac{1}{2}[\mu+\mu+E(|X-Y|)]$$

$$=\mu+\frac{1}{2}E(|X-Y|),$$

$$E[\min(X,Y)]=\frac{1}{2}\big[E(X)+E(Y)-E(|X-Y|)\big]=\frac{1}{2}[\mu+\mu-E(|X-Y|)]$$

$$=\mu-\frac{1}{2}E(|X-Y|)\text{，}$$

再由随机变量 X 与 Y 相互独立且都服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$ 和正态随机变量的线性组合仍服从正态分布可知，$X-Y\sim N(0,2\sigma^2)$，从而可得

$$E|X-Y|=\int_{-\infty}^{+\infty}|x|\cdot\frac{1}{2\sigma\sqrt{\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{4\sigma^2}}\mathrm{d}xt=\underline{\underline{\frac{x}{2\sigma}}}\frac{2\sigma}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}|t|\,\mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t=\frac{2\sigma}{\sqrt{\pi}}\int_{0}^{+\infty}2t\mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t$$

$$=\frac{2\sigma}{\sqrt{\pi}}\mathrm{e}^{-t^2}\Big|_{0}^{+\infty}=\frac{2\sigma}{\sqrt{\pi}}\text{，}$$

因此，可得下列两个结果

（1）$E[\min(X,Y)]=\mu-\frac{1}{2}\cdot\frac{2\sigma}{\sqrt{\pi}}=\mu-\frac{\sigma}{\sqrt{\pi}}$；

（2）$E[\max(X,Y)]=\mu+\frac{1}{2}\cdot\frac{2\sigma}{\sqrt{\pi}}=\mu+\frac{\sigma}{\sqrt{\pi}}$.