第五章 习题A

1．设随机变量 X 服从参数为 λ 的泊松分布，$E(X)=6$，则 $P(3<X<9)\geq$_______.

解 由切比雪夫不等式可得

$$P\{3<X<9\}=P\{-3<X-E(X)<3\}=P\{|X-E(X)|<3\}\geq 1-\frac{D(X)}{3^2}=1-\frac{3}{3^2}=\frac{2}{3}.$$

2．设随机变量 X 和 Y 的数学期望分别是2和-2，方差分别是1和4，而相关系数为0.5，则根据切比雪夫不等式有 $P(|X+Y|\geq 6)\leq$__________.

解 $E(X+Y)=E(X)+E(Y)=2-2=0, D(X+Y)=D(X)+D(Y)+2\rho_{XY}\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)}=1+4+2\times\frac{1}{2}\times 1\times 2=7,$

由切比雪夫不等式可得 $P(|X+Y|\geq 6)=P(|X+Y-E(X+Y)|\geq 6)\leq\frac{D(X+Y)}{6^2}=\frac{7}{36}$.

3．设 $X_1,\ldots,X_n,\ldots$ 是相互独立的随机变量序列，且它们都服从参数为 λ 的指数分布，

则 $\lim\limits_{n\to\infty}P\left(\frac{\lambda\sum\limits_{i=1}^{n}X_i-n}{\sqrt{n}}\leq x\right)=$____________.

解 由 $X_1,\ldots,X_n,\ldots$ 是相互独立的随机变量序列，且它们都服从参数为 λ 的指数分布得

$$E(\sum_{i=1}^{n}X_i)=\sum_{i=1}^{n}E(X_i)=\frac{n}{\lambda}, D(\sum_{i=1}^{n}X_i)=\sum_{i=1}^{n}D(X_i)=\frac{n}{\lambda^2},$$

由 Lindeberg-levy 定理可知

$$\lim_{n\to\infty}P\left(\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}X_i-E(\sum\limits_{i=1}^{n}X_i)}{D(\sum\limits_{i=1}^{n}X_i)}\leq x\right)=\lim_{n\to\infty}P\left(\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}X_i-\frac{n}{\lambda}}{\sqrt{\frac{n}{\lambda^2}}}\leq x\right)=\lim_{n\to\infty}P\left(\frac{\lambda\sum\limits_{i=1}^{n}X_i-n}{\sqrt{n}}\leq x\right)=\Phi(x)$$

其中 $\Phi(x)$ 是标准正态分布的分布函数.

4．设 $X_1,X_2,\ldots,X_n,\ldots$ 是相互独立的随机变量序列，X_n 服从参数为 n 的指数分布（$n=1,2,\ldots$），则下列随机变量序列不服从切比雪夫大数定律的是（　　）.

（A）$X_1,\ldots,X_n,\ldots$；　　（B）$X_1,2^2X_2,\ldots,n^2X_n,\ldots$；

（C）$X_1,\frac{X_2}{2}\ldots,\frac{X_n}{n},\ldots$；　　（D）$X_1,2X_2\ldots,nX_n,\ldots$.

解 由 $X_1,X_2,\ldots,X_n,\ldots$ 是相互独立的随机变量序列，X_n 服从参数为 n 的指数分布

（$n=1,2,\ldots$），可知 $X_1,2^2X_2,\ldots,n^2X_n,\ldots$ 也是相互独立的随机变量序列，但是 $D(n^2X_n)=n^4D(X_n)=n^4\cdot\dfrac{1}{n^2}=n^2$ 不是一致有界的，所以，随机变量序列 $X_1,2^2X_2,\ldots,n^2X_n,\ldots$ 不服从切比雪夫大数定律，故选择 B.

5．在天平上重复称量一重为 a 的物品，假设每次称量的结果相互独立，且都服从正态分布 $N(a,0.2^2)$．若以 $\bar{X}_n$ 表示 n 次称量结果的算术平均值，则为使 $P(|\bar{X}_n-a|<0.1)>0.95$，$n$ 的最小值应不小于自然数（　　）.

（A）2 ；　　（B）4 ；　　（C）10；　　（D）16.

解　由独立同分布的中心极限定理可知 $\bar{X}_n$ 近似服从 $N(a,\dfrac{0.2^2}{n})$，所以

$$P(|\bar{X}_n-a|<0.1)=P(\frac{\sqrt{n}\,|\bar{X}_n-a|}{0.2}<\frac{1}{2}\sqrt{n})=\Phi\left(\frac{1}{2}\sqrt{n}\right)-\Phi\left(-\frac{1}{2}\sqrt{n}\right)=2\Phi\left(\frac{1}{2}\sqrt{n}\right)-1,$$

要 $P(|\bar{X}_n-a|<0.1)>0.95$，即要 $2\Phi\left(\dfrac{1}{2}\sqrt{n}\right)-1>0.95$，即要 $\Phi\left(\dfrac{1}{2}\sqrt{n}\right)>0.975=\Phi(1.96)$

即 $\dfrac{1}{2}\sqrt{n}>1.96\Rightarrow n>(2\times1.96)^2=15.3664$，所以 n 的最小值应不小于 16，故选择 D.

6．对于一个学生而言，来参加家长会的家长人数是一个随机变量，设一个学生无家长，1 名家长、2 名家长来参加会议的概率分别为 0.05, 0.8, 0.15．若学校共有 400 名学生，设各学生参加会议的家长数相互独立，且服从同一分布．（1）求参加会议的家长数 X 超过 450 的概率；（2）求有 1 名家长来参加会议的学生数不多于 340 的概率.

解 (1)用 X_i 表示第 i 名学生来参加家长会的家长人数（$i=1,2,\cdots,400.$），则 $X_1,X_2,\cdots,X_{400}$ 独立同分布，且 $E(X_i)=0\times0.05+1\times0.8+2\times0.15=1.1, D(X_i)=(-1.1)^2\times0.05+(-0.1)^2\times0.8+0.9^2\times0.15=0.19$，

由独立同分布的中心极限定理可知参加家长会的家长数 $X=\sum\limits_{i=1}^{400}X_i$ 近似服从正态分布 $N(440,76)$，参加会议的家长数 X 超过 450 的概率为

$$P\{X>450\}\approx1-\Phi(\frac{450-440}{\sqrt{76}})=1-\Phi(1.147)\approx1-0.8743=0.1257\ ;$$

（2）记 $Y_i=\begin{cases}1,\text{第}i\text{个学生恰有1名家长参加家长会},\\0,\text{第}i\text{个学生没有家长或有2名家长参加家长会},\end{cases}\ i=1,2,\cdots,400.$

则 $Y_1,Y_2,\cdots,Y_{400}$ 相互独立都服从参数为 0.8 的 0-1 分布，从而 $\sum\limits_{i=1}^{400}Y_i\sim B(400,0.8)$，棣莫弗-

拉普拉斯定理可知，有 1 名家长来参加会议的学生数不多于 340 的概率为

$$P\{\sum_{i=1}^{400} Y_i \le 340\} \approx \Phi\left(\frac{340-400\times 0.8}{\sqrt{400\times 0.2\times 0.8}}\right) = \Phi(2.5) = 0.9938 .$$

7．一保险公司有 10000 人参加人寿保险，每人每年付 12 元保险费，在一年内一个人死亡的概率为 0.006，死亡时，其家属可向保险公司领得 1000 元．试问

（1）保险公司亏本的概率有多大？

（2）保险公司年利润为零的概率是多少？

（3）保险公司年利润不少于 60000 元的概率？

解 记 X_i 表示第 i 个参保人家属向保险公式索赔的次数 $i=1,2,\cdots,10000$. 则 X_i 独立同参数为 0.006 的 0-1 分布，则 10000 个参加人寿保险人的家属索赔的总次数 $X=\sum_{i=1}^{10000} X_i \sim B(10000,0.006)$，

则 $E(X)=10000\times 0.006=60, \sqrt{D(X)}=\sqrt{10000\times 0.006\times 0.994}=7.7227$.

（1）保险公司亏本的概率为

$$P\{1000X>120000\}=P\{X>120\}=1-P\{X\le 120\}\approx 1-\Phi\left(\frac{120-E(X)}{\sqrt{D(X)}}\right)$$

$$=1-\Phi\left(\frac{120-60}{7.7227}\right)=0 ;$$

（2）保险公司年利润为零的概率为

$$P\{1000X=120000\}=P\{X=120\}\approx 0 ;$$

（3）保险公司年利润不少于 60000 元的概率为

$$P\{120000-1000X\ge 60000\}=P\{X\le 60\}\approx \Phi\left(\frac{60-60}{7.7227}\right)=\Phi(0)=0.5 .$$

8．计算机进行加法运算时，对每个加数取整（取为最接近它的整数），设所有的取整误差是相互独立的，且它们都在区间 $[-0.5,0.5]$ 服从均匀分布. 求：

(1) 若将 1500 个数相加，误差总和的绝对值超过 15 的概率；

(2) 最多几个数相加，能使误差总和的绝对值小于 10 的概率达到 0.95？

解 (1) 设取整误差为 $X_i(i=1,2,\cdots,1500)$，它们相互独立都在区间 $[-0.5,0.5]$ 服从均匀分布. 于是 $E(X_i)=\frac{0.5+(-0.5)}{2}=0, D(X_i)=\frac{[0.5-(-0.5)]^2}{12}=\frac{1}{12}$，

$$E\left(\sum_{i=1}^{1500} X_i\right)=1500\times 0=0, \sqrt{D\left(\sum_{i=1}^{1500} X_i\right)}=\sqrt{1500\times\frac{1}{12}}\approx 11.18$$

由独立同分布的中心极限定理可知，将1500个数相加，误差总和的绝对值超过15的概率为

$$P\{|\sum_{i=1}^{1500}X_i|>15\}=1-P\{|\sum_{i=1}^{1500}X_i|\le 15\}=1-P\{-15\le\sum_{i=1}^{1500}X_i\le 15\}=1-P\{-\frac{15}{11.18}\le\frac{\sum_{i=1}^{1500}X_i}{11.18}\le\frac{15}{11.18}\}$$

$$=1-[\Phi(1.34)-\Phi(-1.34)]=2[1-\Phi(1.34)]=2(1-0.9099)=0.180\,2;$$

（2）设最多 n 个数相加，能使误差总和的绝对值小于10的概率达到0.95, 即求使得

$P\{|\sum_{i=1}^{1500}X_i|<10\}\ge 0.95$ 的成立的 n，

$$P\left(\left|\sum_{i=1}^{n}X_i\right|\le 10\right)=P\left(\frac{-10-nE(X_i)}{\sqrt{\frac{n}{12}}}\le\frac{\sum_{i=1}^{n}X_i-nE(X_i)}{\sqrt{\frac{n}{12}}}\le\frac{10-nE(X_i)}{\sqrt{\frac{n}{12}}}\right)\approx 2\Phi\left(\frac{10\sqrt{12}}{\sqrt{n}}\right)-1\ge 0.95,$$

即 $\Phi(\frac{20\sqrt{3}}{\sqrt{n}})\ge 0.975, \frac{20\sqrt{3}}{\sqrt{n}}>1.96$， $n<\frac{400\times 3}{1.96^2}=312.37,$

故最多可有 313 数相加使得误差总和的绝对值小于 10 的概率不小于 0.95.

第五章 习题B

1．设 $X_1,X_2,\dots,X_{1000}$ 是相互独立的随机变量序列，且 $X_i\sim B(1,p),i=1,2,...,1000$，则下列（　　）不正确．

（A）$\frac{1}{1000}\sum_{i=1}^{1000}X_i\approx p$；

（B）$\sum_{i=1}^{1000}X_i\sim B(1000,p)$；

（C）$P(a<\sum_{i=1}^{1000}X_i<b)\approx\Phi(b)-\Phi(a)$；

（D）$P(a<\sum_{i=1}^{1000}X_i<b)\approx\Phi\left(\frac{b-1000p}{\sqrt{1000pq}}\right)-\Phi\left(\frac{a-1000p}{\sqrt{1000pq}}\right)$.

解 由棣莫弗-拉普拉斯定理可知，D 是正确的，故 C 不正确，因此选择 C.

2．设 X,Y 是两个相互独立的随机变量，则下列说法中（　　）正确．

（A）当已知 X 与 Y 的分布时，对于随机变量 $X+Y$ 可使用切比雪夫不等式进行概率估计；
（B）当 X 与 Y 的期望和方差都存在时，可用切比雪夫不等式估计 $X+Y$ 落在任意区间 (a,b) 内的概率；

（C）当 X 与 Y 的期望和方差都存在时，可用切比雪夫不等式估计 $X+Y$ 落在对称区间 $(-a,a)$ 内的概率（$a>0$ 常数）；

（D）当 X 与 Y 的期望和方差都存在时，可用切比雪夫不等式估计 $X+Y$ 落在区间 $(E(X)+E(Y)-a,E(X)+E(Y)+a)$ 内的概率（$a>0$ 常数）.

解 由切比雪夫不等式相关理论可知 D 正确，故选择 D.

3．根据遗传学理论，红黄两种番茄杂交第二代结红果植株和黄果植株的比率为 3：1，现种植杂交种 432 株，试问

（1）黄株介于 108 和 117 之间的概率是多少？

（2）红株介于 315 和 324 之间的概率是多少？

解 记 X_i 为种植的第 i 株番茄杂交种的第二代结黄果植株的株数($i=1,2,\cdots,432$)，则有 $X_1,X_2,\cdots,X_{432}$ 相互独立同参数为 0.25 的 0-1 分布，$X=\sum_{i=1}^{432}X_i\sim B(432,0.25)$，$E(X)=432\times0.25=108,\sqrt{D(X)}=\sqrt{432\times0.25\times0.75}=9$，因此棣莫弗-拉普拉斯中心极限定理可知：

（1）黄株介于 108 和 117 之间的概率为

$$P\{108\le X\le117\}\approx\Phi\left(\frac{117-108}{9}\right)-\Phi\left(\frac{108-108}{9}\right)=\Phi(1)-\Phi(0)=0.8413-0.5=0.3413；$$

（2）红株介于 315 和 324 之间的概率为

$$P\{315\le432-X\le324\}=P\{108\le X\le117\}\approx\Phi\left(\frac{117-108}{9}\right)-\Phi\left(\frac{108-108}{9}\right)$$

$$=\Phi(1)-\Phi(0)=0.8413-0.5=0.3413 .$$

4．某工厂有 200 台同类型的机器,每台机器工作时需要的电功率为 1 千瓦．由于工艺等原因,每台机器的实际工作时间只占全部工作时间的 75%,各台机器是否工作是相互独立的．求：(1) 任一时刻有 144 至 160 台机器正在工作的概率；(2) 需要供应多少电功率可以保证所有机器正常工作的概率不小于 0.99?

解 用 X_i 表示第 i 台需要的电功率数(单位：千瓦)($i=1,2,\cdots,200$)，则有 $X_1,X_2,\cdots,X_{200}$ 相互独立同参数为 0.75 的 0-1 分布，$X=\sum_{i=1}^{200}X_i\sim B(200,0.75)$，$E(X)=200\times0.75=150$，$\sqrt{D(X)}=\sqrt{200\times0.25\times0.75}=6.124$,因此棣莫弗-拉普拉斯中心极限定理可知：

（1）任一时刻有 144 至 160 台机器正在工作的概率为

$$P\{144\le X\le160\}\approx\Phi\left(\frac{160-150}{6.124}\right)-\Phi\left(\frac{144-150}{6.124}\right)=\Phi(1.63)-\Phi(-0.98)$$

$$=\Phi(1.63)+\Phi(0.98)-1=0.9484+0.8365-1=0.7849 ;$$

（2）设至少需要供应 k 千瓦电功率可以保证所有机器正常工作的概率不小于 0.99，

即 $P\{X\le k\}\approx\Phi(\frac{k-150}{6.124})\ge0.99=\Phi(2.33)$,

即要 $\frac{k-150}{6.124}\ge2.33\Rightarrow k\ge150+6.124\times2.33=164.269$,

所以，需要供应 165 千瓦的电功率可以保证所有机器正常工作的概率不小于 0.99.

5．一食品厂有三种蛋糕出售，由于售出哪一种蛋糕是随机的，因而售出的一只蛋糕的价格是一个随机变量，它取 1 元，1.2 元，1.5 元各个值的概率分别为 0.3，0.2，0.5．某天售出 300 只蛋糕．(1) 求这天收入至少 400 元的概率；(2) 求这天售出价格为 1.2 元的蛋糕多于 60 只的概率.

解（1）设 X 表示售出一只蛋糕的价格，则 X 的可能取值为 1、1.2、1.5，且

$P(X=1)=0.3, P(X=1.2)=0.2, P(X=1.5)=0.5,$ 于是

$$E(X)=1\times0.3+1.2\times0.2+1.5\times0.5=1.29, E(X^2)=1^2\times0.3+1.2^2\times0.2+1.5^2\times0.5=1.713,$$
$$D(X)=E(X^2)-[E(X)]^2=1.713-1.29^2=0.0489.$$

设 X_i 表示售出第 i 只蛋糕的价格 $(i=1,2,\cdots,300)$，则 $X_1,X_2,\cdots,X_{300}$ 与 X 同分布，且相互独立，由林德贝格—列维中心极限定理得

$$P(\sum_{i=1}^{300}X_i\ge400)=1-P(\sum_{i=1}^{300}X_i<400)=1-P(\frac{\sum_{i=1}^{300}X_i-300\times1.29}{\sqrt{300\times0.0489}}<\frac{400-300\times1.29}{\sqrt{300\times0.0489}})$$
$$\approx1-\Phi(3.394)=1-0.9997=0.0003.$$

（2） 设 Y 表示这一天中售出的 300 只蛋糕中，价格为 1.2 元的蛋糕的只数，则 $Y\sim B(300,0.2)$，由棣莫弗—拉普拉斯中心极限定理知

$$P(Y>60)=1-P(Y\le60)\approx1-\Phi(\frac{60-300\times0.2}{\sqrt{300\times0.2\times0.8}})=1-\Phi(0)=0.5.$$

所以这天售出价格为 1.2 元的蛋糕多于 60 只的概率近似为 0.5.

6．一个复杂的系统由 n 个相互独立起作用的部件所组成，在整个运行期间每个部件的可靠性（能正常工作的概率）为 0.90，要使整个系统能正常工作，就必须至少有 80%的部件正常工作．问 n 至少为多大才能使系统的可靠性不低于 0.95?

设 $X_i=\begin{cases}1,\text{若第}i\text{个部件正常工作}\\0,\text{若第}i\text{个部件损坏不工作}\end{cases}$（$i=1,2,\cdots,n$），则 $X_1\ldots,X_n$ 相互独立，且

$X_i\sim B(1,0.9)$.记 $X=X_1+\ldots+X_n$,则 X 表示 n 个部件中能正常工作的部件数，且 $X\sim B(n,0.9)$，由棣莫弗—拉普拉斯中心极限定理知

$$P(\text{系统能正常工作})=P(\frac{X}{n}\ge0.80)=1-P(\frac{X}{n}<0.80)=1-P\left(\frac{X-0.9n}{\sqrt{n\times0.9\times0.1}}<\frac{0.8n-0.9n}{\sqrt{n\times0.9\times0.1}}\right)$$

$$=1-P\left(\frac{X-0.9n}{\sqrt{n\times0.9\times0.1}}<-\frac{\sqrt{n}}{3}\right)=1-\Phi\left(-\frac{\sqrt{n}}{3}\right)=\Phi\left(\frac{\sqrt{n}}{3}\right)\ge0.95$$

$$\text{由于}\Phi\left(1.645\right)=0.95,\text{所以}\frac{\sqrt{n}}{3}\ge1.645,\text{得}n\ge24.35,\text{即}n\text{至少为}25.$$

所以 n 至少为 25 才能使系统的可靠性不低于 0.95.