本试卷适用范围
11 级本科一年级
工科各专业

南京农业大学试卷

2011-2012 学年第 2 学期　课程类型：必修
试卷类型：A

课程 <u>高等数学</u>　班级 ____________ 学号___________ 姓名__________ 成绩____

一．选择题（本题共 5 小题，每小题 3 分，共 15 分）：

1．单位球体 $x^2+y^2+z^2\le 1$ 被平面 $z=\dfrac{1}{2}$ 所截得截面的面积为　（　　）

(A) $\dfrac{\pi}{2}$　（B）$\dfrac{2\pi}{3}$　(C) $\dfrac{3\pi}{4}$　(D) $\dfrac{4\pi}{5}$.

2. 函数 $f(x,y)$ 在点 (x,y) 可微分是 $f(x,y)$ 在该点连续的　（　　）

(A) 充分非必要条件　（B）必要非充分条件

(C) 充分必要条件　(D) 既非充分又非必要条件.

3. 设 $f(x)$ 为连续函数，$F(t)=\int_0^t dy\int_y^t f(x)dx$，则 $F'(2)=$　（　　）

（A）$2f(2)$　(B) $f(2)$　(C) $-f(2)$　(D) 0.

4.设 L 为连接 $(1,0)$ 及 $(0,1)$ 两点的直线段, 则积分 $\int_L (x+y)ds$ 的值为(　　)

（A）1　（B）$\sqrt{2}$　(C) $\sqrt{3}$　(D) 2.

5. 幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^n}{n}$ 在点 $x=-1$ 处　（　　）

（A）条件收敛（B）绝对收敛 (C)发散（D）既不条件收敛也不绝对收敛.

二．填空题（本题共 6 小题，每小题 3 分，共 18 分）：

1．在空间中，yoz 面内直线 $z=y$ 绕 z 轴旋转一周所得曲面的方程为 ________________.

2. 函数 $z=\ln(1+x^2+y^2)$ 当 $x=1,\ y=2$ 时的全微分 $dz=$ ____________.

3. 设向量$\vec{\alpha}=\vec{i}-3\vec{j}$,$\vec{\beta}=\vec{i}-\vec{j}+3\vec{k}$,$\vec{\gamma}=2\vec{i}-3\vec{j}+\vec{k}$.则$\left(\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}\right)\vec{\gamma}=$____.

4. 设平面区域 $D=\left\{(x,y)\left|\ \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\le 1\right.\right\}, a>0, b>0$, 则

$\iint\limits_D\left(ax^3+by^5\right)dxdy=$________.

5. 若曲线积分$\int_L e^y dx+\left(a\,xe^y-2y\right)dy$ 与积分路径无关, 则常数$a=$___.

6. 周期为 2 的函数$f(x)$在一个周期内的表达式为$f(x)=\begin{cases}x, & 0.5<x<1\\ 1, & -1\le x\le 0.5\end{cases}$,

则它的$Fourier$级数在$x=2$处的和为_______.

三．计算题（本题共 7 小题，每小题 6 分，共 42 分）：

1. 求微分方程$x\dfrac{dy}{dx}-y\ln y=0$的通解.

2. 设$z=\ln\left(x^2+y^2\right)$, 求$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

3. 已知函数$f(x,y)=x^2-x\,y$, $\vec{e}_l=(\cos\theta,\sin\theta)\left(0\le\theta<2\pi\right)$. 求$\theta$, 使

$f(x,y)$在点$(1,1)$沿方向l的方向导数为0.

4. 求函数$f(x,y)=x-2y$在约束条件$x^2+y^2=1$下的最大值.

5. 计算$\iint\limits_D x\,y\,d\sigma$，其中$D$是由直线$y=2, y=x$及$y=2x$所围成的闭区域.

6. 计算$\iint\limits_\Sigma\left(x^2+y^2\right)dS$，其中$\Sigma$是锥面$z=\sqrt{x^2+y^2}$介于平面$z=0$及$z=1$之间的部分.

7. 求幂级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2^n}{n^2+1}x^n$的收敛域.

四．应用题（本题共 3 小题，每小题 5 分，共 15 分）：

1. 求曲线$\begin{cases} z = x^2 + y^2 \\ x^2 + y^2 = 2y \end{cases}$在点$(1, 1, 2)$处的切线方程.

2. 一个单位质量的质点在数轴上运动，开始时质点在原点O处且速度为v_0，在运动过程中，它受到一个力的作用，这个力的大小与质点到原点的距离成正比(比例系数$k_1 = 2$)而方向与初速度一致. 又介质的阻力与速度成正比(比例系数$k_2 = 1$). 求反映这质点的运动规律的函数.

3. 由平面$z = 1$和曲面$z = \sqrt{x^2 + y^2}$围成的立体Ω，其密度为 1. 求Ω绕直线$x = y = z$旋转的转动惯量.

五．证明题（本题共 2 小题，每小题 5 分，共 10 分）：

1. 设$\vec{A} = \dfrac{\vec{r}}{|\vec{r}|^3}$，$\Sigma$为任一封闭曲面的外侧，$\vec{r} = (x, y, z)$. 证明:

(1) 当原点在曲面Σ围成的闭区域之外时，$\oiint\limits_{\Sigma} \vec{A} \cdot d\vec{S} = 0$;

(2) 当原点在曲面Σ围成的区域之内时，$\oiint\limits_{\Sigma} \vec{A} \cdot d\vec{S} = 4\pi$.

2. 设$a_n > 0\ (n = 1, 2, \cdots)$且$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$收敛，$r_n = \sum\limits_{k=n}^{\infty} a_k$. 试证: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{a_n}{\sqrt{r_n}}$收敛.

出卷人：张新华

高等数学(A)答案:

一. CAABA

二. 1. $z^2 = x^2 + y^2$.　　2. $\frac{1}{3}dx + \frac{2}{3}dy$　　3. $8\vec{i} - 12\vec{j} + 4\vec{k}$.　　4. 0.

5. $a = 1$.　　6. 1

三. 1. $\frac{\mathrm{dy}}{y\ln y} = \frac{dx}{x}$ ………………….…4 分

$y = e^{cx}$ ……………..……..2 分

2. $\frac{\partial \mathrm{z}}{\partial x} = \frac{2x}{x^2 + y^2}$ ………. …….………4 分

$\frac{\partial^2 \mathrm{z}}{\partial x \partial y} = \frac{-4xy}{\left(x^2 + y^2\right)^2}$ …………………2 分

3. $\frac{\partial f}{\partial l}\Big|_{(1,1)} = \cos\theta - \sin\theta$ ……. ………..4 分

$\theta = \frac{\pi}{4}$ 或 $\frac{5}{4}\pi$ ……………..……..2 分

4. $\mathrm{L}(x, y) = x - 2y + \lambda\left(x^2 + y^2 - 1\right)$……………2 分

L 的驻点为$\left(-\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}\right)$, $\left(\frac{1}{\sqrt{5}}, -\frac{2}{\sqrt{5}}\right)$………2 分

$f(x, y)$的最大值为$\sqrt{5}$. ……………..…………..2 分

5. $\iint\limits_D x\,y\,d\sigma = \int_0^2 dy \int_{\frac{y}{2}}^{y} xy\,dx$ ………………..4 分

$= \frac{3}{2}$…………………………..2 分

6. $\iint_{\Sigma}\left(x^2+y^2\right)dS=\iint_{D_{xy}}\left(x^2+y^2\right)\sqrt{2}dxdy$ ……………..4 分

$$=\sqrt{2}\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1\rho^3 d\rho=\frac{\sqrt{2}}{2}\pi$$ ………..2 分

7. $R=\frac{1}{2}$ …………….... …………4 分

收敛域为 $\left[-\frac{1}{2},\ \ \frac{1}{2}\right]$………..…2 分

四．1. 曲面 $z=x^2+y^2$ 在 $(1,1,2)$ 的法向量为

$\vec{n}_1=(2,2,-1)$，

曲面 $x^2+y^2=2y$ 在 $(1,1,2)$ 的法向量为

$\vec{n}_2=(2,0,0)$， …………….... ……………….... …….2 分

切向量为：$\vec{l}=\vec{n}_1\times\vec{n}_2=(0,-2,-4)$， ……………………….2 分

切线方程为：$\begin{cases}x=1,\\ z=2y.\end{cases}$ 或 $x=1,\ y=1+t,\ z=2+2t.$……..1 分

2.设质点的位置函数为 $x=x(t)$，

$x''+k_2x'-k_1x=0$，

且 $x\big|_{t=0}$-0, $x'\big|_{t=0}=v_0$ …………….... ……………….... ….2 分

解得: $x=C_1e^{r_1t}+C_2e^{r_2t}$,……….... ……………….... ….2 分

因此, $x=\frac{v_0}{3}\left(e^t-e^{-2t}\right)$,……….... ……………….... ….1 分

3. $d^2=\frac{2}{3}\left(x^2+y^2+z^2-xy-xz-yz\right)$,

$I=\iiint\limits_{\Omega} d^2 dv$，……… ………………..... ………………..... ….2 分

由对称性知 $\iiint\limits_{\Omega}(xy+xz+yz)dv=0$，

所以，$I=\frac{2}{3}\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1\rho d\rho\int_\rho^1\left(\rho^2+z^2\right)dz$ ………………..... ….2 分

$=\frac{\pi}{5}$ ……… ………………..... ………………..... ….1 分

五．1. $\oiint\limits_{\Sigma}\vec{A}\cdot d\vec{S}=\oiint\limits_{\Sigma}\frac{xdydz+ydzdx+zdxdy}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{3/2}}$，………………..... ….1 分

(1) 当原点在曲面 Σ 围成的闭区域之外时，$\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}=0$，

由高斯公式得：$\oiint\limits_{\Sigma}\vec{A}\cdot d\vec{S}=0$;……………..... ……. ….2 分

(2) 当原点在曲面 Σ 围成的区域之内时，添加辅助面，再由高斯公式

得：$\oiint\limits_{\Sigma}\vec{A}\cdot d\vec{S}=\frac{1}{r^3}\iiint\limits_{\Omega_r}3dv=4\pi$ …………………….. ….2 分

2. $\frac{a_n}{\sqrt{r_n}}=\frac{r_n-r_{n+1}}{\sqrt{r_n}}\le 2\left(\sqrt{r_n}-\sqrt{r_{n+1}}\right)$,…………………….. ….3 分

又 $\sum\left(\sqrt{r_n}-\sqrt{r_{n+1}}\right)$ 收敛，…………………….. …………….1 分

由比较判别法知：$\sum\frac{a_n}{\sqrt{r_n}}$ 收敛. …………………….. …….1 分