2020~2021 学年第 2 学期概率论与数理统计 B-*A* 卷解答与评分标准

一. 填空题（每题 3 分，计 15 分.）

1. $\overline{A}B\overline{C}$； 2. $\frac{1}{2}$； 3. $\frac{1}{4}$； 4. $\frac{5}{32}$； 5. 0.2.

二．单项选择题（每题 3 分，计 15 分. ）

6. B； 7. A； 8. B； 9. D； 10. C.

三. 解答题(每题 12 分，共 70 分.)

11. 解：设 A_i 表示抽取的产品来自第 i 个车间，B 表示抽取的产品为次品。

（1） $P(B)=P(B\mid A_1)P(A_1)+P(B\mid A_2)P(A_2)+P(B\mid A_3)P(A_3)$

$= 0.04\times 50\% + 0.02\times 30\% + 0.05\times 20\% = 0.036$； （6 分）

（2）所求 $P(A_1\mid B)=\dfrac{P(B\mid A_1)P(A_1)}{P(B)}=\dfrac{5}{9}$ （12 分）

12. 解 记随机变量 X,Y 的分布函数分别为 $F_X(x),F_Y(y)$. 因为 X 概率密度为

$$f_X(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}},-\infty<x<+\infty .$$

所以 Y 的分布函数为

$$F_Y(y)=P\{Y\le y\}=P\{|X|\le y\}.$$

当 $y\le 0$ 时，$F_Y(y)=P\{Y\le y\}=P\{|X|\le y\}=0$；

当 $y>0$ 时，$F_Y(y)=P\{Y\le y\}=P\{|X|\le y\}=P\{-y\le X\le y\}$

$=F_X(y)-F_X(-y)$. （8 分）

将分布函数 $F_Y(y)$ 对 y 求导，得 Y 概率密度

$$f_Y(y)=\begin{cases} f_X(y)+f_X(-\sqrt{y}), & y>0, \\ 0, & y\le 0. \end{cases} =\begin{cases} \dfrac{2}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{y^2}{2}}, & y>0, \\ 0, & y\le 0. \end{cases}$$ （12 分）

13. 解：（1）随机变量 Y 的分布律

Y	0	1	4
P_k	0.2	0.5	0.3

（6 分）

(2) $EY=0\times0.2+1\times0.5+4\times0.3=1.7$ （9 分）

$DY=EY^2-(EY)^2=0^2\times0.2+1^2\times0.5+4^2\times0.3-1.7^2=2.41$ （12 分）

14. 解：（1） $\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dxdy=\iint\limits_{D} f(x,y)dxdy=\int_{-1}^{1}\mathrm{d}x\int_{x^2}^{1} cx^2 y\mathrm{d}y=\frac{4}{21}c=1.$

得 $c=\frac{21}{4}.$ （6 分）

(2) $f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\mathrm{d}y=\begin{cases}\int_{x^2}^{1}\frac{21}{4}x^2 y\mathrm{d}y\\ 0,\end{cases}=\begin{cases}\frac{21}{8}x^2(1-x^4), & -1\le x\le 1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$ (12分)

15. 解： （1） $E(X)=\int_0^1 x\cdot(\theta+1)x^{\theta}dx=\frac{\theta+1}{\theta+2}$，

令 $\frac{\theta+1}{\theta+2}=\overline{X}$，故 θ 的矩估计量为 $\hat{\theta}=\frac{1-2\overline{X}}{\overline{X}-1}$ （6 分）

（2）似然函数

$$L(\theta)=\begin{cases}(\theta+1)^n\prod_{i=1}^{n}x_i^{\theta} & 0<x_i<1\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$$

对数似然函数为

$$\ln L(\theta)=n\ln(\theta+1)+\theta\sum_{i=1}^{n}\ln x_i$$

$$\frac{d\ln L(\theta)}{d\theta}=\frac{n}{\theta+1}+\sum_{i=1}^{n}\ln x_i=0$$

解得 θ 的最大似然估计量为 $\hat{\theta}=-1-\frac{n}{\sum_{i=1}^{n}\ln X_i}$。 （12 分）

16.解：要检验假设：$H_0:\mu=\mu_0=70 \quad vs \quad H_1:\mu\ne\mu_0$ （2 分）

拒绝域为： $\left|\frac{\overline{x}-\mu_0}{s/\sqrt{n}}\right|\ge t_{\alpha/2}(n-1)$ （6 分）

$t_{\alpha/2}(n-1)=t_{0.025}(24)=2.0639, \mu_0=70, n=25, \overline{x}=61, s=15$

即有 $\left|\frac{\overline{x}-\mu_0}{s/\sqrt{n}}\right|=3>2.0639$，拒绝 H_0，不可认为全体考生的数学平均成绩为 70 分. （12 分）