装
订
线

本试卷适应范围
经济管理类
（3学分）

南 京 农 业 大 学 试 题 纸

2021-2022 学年 2 学期 课程类型：必修 试卷类型：A

课程号 MATH2117 课程名 线性代数 A 学分 3

学号 ________ 姓名 ________ 班级 ________

题号	一	二	三	总分	核分人
得分					
阅卷人					

约定: A^T 为矩阵 A 的转置，$|A|$ 为方阵 A 的行列式，A^* 为方阵 A 的伴随阵，E 为单位阵.

一、选择题：（每题 3 分，共 15 分）

1. 下列矩阵是初等矩阵的是（　　）

(A) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ (B) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ (C) $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ (D) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

2. 设 A 是 $n(n \geq 3)$ 阶可逆方阵，A^* 是其伴随矩阵，又 k 为常数，且 $k \neq 0, \pm 1$，则 $(kA)^* =$（　　）

(A) kA^* (B) $k^n A^*$ (C) $k^{-1}A^*$ (D) $k^{n-1}A^*$

3. 设 α_0 是非齐次方程组 $AX = b$ 的一个解，$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$ 是 $AX = 0$ 的基础解系，则（　　）

(A) $\alpha_0, \alpha_1, \cdots, \alpha_r$ 线性相关 (B) $\alpha_0, \alpha_1, \cdots, \alpha_r$ 线性无关

(C) $\alpha_0, \alpha_1, \cdots, \alpha_r$ 的线性组合是 $AX = b$ 的解

(D) $\alpha_0, \alpha_1, \cdots, \alpha_r$ 的线性组合是 $AX = 0$ 的解

装
订
线

4. 对于实二次型 $f = X^TAX$，以下正确的结论是（　　）

(A) 矩阵 A 一定有 n 个不同的特征值 (B)存在可逆阵 B，使得 $B^{-1}AB$ 为对角阵

(C)若实二次型 $f = X^TAX$ 是正定的，则 A 的所有子式大于零；

(D)属于矩阵 A 的不同特征值的特征向量一定线性无关，但不一定正交。

5. 设 A 是 3 阶方阵,$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 为线性无关的向量组,若 $A\alpha_1 = 2\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$, $A\alpha_2 = \alpha_2 + 2\alpha_3$, $A\alpha_3 = -\alpha_2 + \alpha_3$,则 A 的实特征值为（　　）

(A) 2 (B) 1 (C) 0 (D) -1

二、填空题：（每题 3 分，共 18 分）

6. 已知$M=\begin{pmatrix} A & C \\ O & B \end{pmatrix}$，其中$m$阶矩阵$A$和$n$阶矩阵$B$都可逆，则$M^{-1}=$______________________.

7. 设A,B为n阶方阵，$|A|=2$，$|B|=-3$，则$\left|A^{-1}B^{*}-A^{*}B^{-1}\right|=$________.

8. 设$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$均为3维列向量,方阵$A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3),B=(\alpha_4,\alpha_2,\alpha_3)$,且$|A|=-2,|B|=3$,则$|A+B|=$__.

9. 已知$A=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & a & 2 \\ 0 & 2 & a \end{pmatrix},(a>0)$有一特征值为1，则$a=$____________.

10. 设A是3阶矩阵，且$|A-E|=|A+2E|=|2A+3E|=0$,则$\left|2A^{*}-3E\right|=$______________.

11. 二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+6x_1x_2+4x_1x_3+x_2^2+2x_2x_3+tx_3^2$的秩为 2, 则$t=$___________.

三、计算与证明(12-15 每题 9 分，16 题 15 分，17-18 每题 8 分，共 67 分)

12. 若矩阵A,B满足$A^{-1}BA=6A+BA$,且$A=\begin{pmatrix} 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 1/4 & 0 \\ 0 & 0 & 1/5 \end{pmatrix}$，求矩阵$B$.（9 分）

13. 计算4阶行列式 $D_4=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ 2^2 & 4^2 & 6^2 & 8^2 \\ 2^4 & 4^4 & 6^4 & 8^4 \end{vmatrix}$ （9 分）

14. $\alpha_1=(1+a,1,1,1)^T, \alpha_2=(2,2+a,2,2)^T, \alpha_3=(3,3,3+a,3)^T, \alpha_4=(4,4,4,4+a)^T$,

(1) a 为何值时 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 线性相关.

(2) 当 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 线性相关时求秩和一个极大无关组，并将其余向量用该极大线性无关组表示.（9 分）

15. 已知非齐次线性方程组 $Ax=b$ 有无穷多解，其中 $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 4 & t & 3 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}, b=\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$，试求 t 的值并写出 $Ax=b$ 的通解.（9 分）

16. 已知二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=X^TAX=x_1^2+4x_2^2+4x_3^2-4x_1x_2+4x_1x_3-8x_2x_3$

(1) 写出对应的矩阵 A；(2) 求出 A 的全部特征值及所对应的全部特征向量；(3) 求正交变换 $X=PY$，将二次型 $f(x_1,x_2,x_3)$ 化为标准形.（15 分）

17. 设$a_1,a_2,\cdots,a_n$是一组n维向量，证明它们线性无关的充分必要条件是：任一n维向量都能由它们线性表示.（8 分）

18. A,B为n阶方阵，证明

(1) 当A,B均为正交矩阵，且$|A||B|<0$时，则$|A+B|=0$.

(2) 当A,B均为正定矩阵，则$A+B,\begin{pmatrix} A & O \\ O & B \end{pmatrix}$均为正定矩阵.（8 分）

审核人 杨涛　　　　出卷人 魏敏