装
订
线

本试卷适应范围
经济管理类
（3 学分）

# 南京农业大学试题纸

**2020-2021 学年 2 学期 课程类型：必修 试卷类型：A**

课程号 MATH2117 课程名 线性代数 A 学分 3

学号 ________ 姓名 ________ 班级 ________

| 题号 | 一 | 二 | 三 | 总分 | 签名 |
|---|---|---|---|---|---|
| 得分 | | | | | |

**约定:** $A^T$ **为矩阵** $A$ **的转置，** $|A|$ **为方阵** $A$ **的行列式，** $A^*$ **为方阵** $A$ **的伴随阵，** $E$ **为单位阵。**

一、选择题:（每题 3 分，共 15 分）

1. 已知 $A=\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&1\end{pmatrix}$，则 $A^{2021}=$（ ）

   A. $A$ B. $6A$ C. $6^{2020}A$ D. $6^{2021}A$

2. 已知 $A=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&4&t\\3&6&9\end{pmatrix}$，$B$ 为3阶非零矩阵，且满足 $AB=O$，则（ ）

   A. $t\neq 6$ 时 $B$ 的秩必为1 B. $t=6$ 时 $B$ 的秩必为1
   C. $t=6$ 时 $B$ 的秩必为2 D. $t\neq 6$ 时 $B$ 的秩必为2

3. 设向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关，$\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 线性相关，则正确的结论是（ ）

   A. $\alpha_4$ 必可由 $\alpha_2,\alpha_3$ 线性表示； B. $\alpha_4$ 不能由 $\alpha_2,\alpha_3$ 线性表示；

   C. $\alpha_1,\alpha_3,\alpha_4$ 必线性相关； D. $\alpha_1$ 可由 $\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 线性表示；

4. 非齐次线性方程组 $\begin{cases}x_1+x_2+x_3=1\\ax_1+bx_2+cx_3=d\\a^2x_1+b^2x_2+c^2x_3=d^2\end{cases}$，在 $a$、$b$、$c$ 互不相等时（ ）

   A. 无解 B. 有唯一解 C. 有无穷多解 D. 有解，具体情况根据 $a$、$b$、$c$ 取值而定

5. 设 $A$ 为3 阶方阵，$P=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$ 为3阶可逆矩阵,且 $P^{-1}AP=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&3\end{pmatrix}$，$A(\alpha_1-\alpha_2+\alpha_3)=$（ ）

   A. $\alpha_1-2\alpha_2+\alpha_3$; B. $\alpha_1-\alpha_2+3\alpha_3$; C. $\alpha_1+2\alpha_2+3\alpha_3$; D. $\alpha_1-2\alpha_2+3\alpha_3$;

二、填空题:（每题 3 分，共 18 分）

6. 已知矩阵 $A=\begin{pmatrix} a & -1 & -1 \\ -1 & a & -1 \\ -1 & -1 & a \end{pmatrix}$ 与 $B=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ 等价，则 $a$= ______________.

7. 已知 $A$ 为4阶方阵，且 $\left|A\right|=2$，则 $\left|\left(\frac{2}{3}A\right)^{-1}-A^*\right|=$ ____________________.

8. 已知向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关，则 $k=$ _______________ 时向量 $\alpha_1+2\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\alpha_3+k\alpha_1$ 线性相关.

9. $A$ 是 $n$ 阶正交阵，且 $|A|<0$，求 $|A+E|=$ __________________________.

10. 设 $\alpha,\beta$ 均为3维列向量，若矩阵 $\alpha\beta^T$ 相似于 $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$，则 $\beta^T\alpha=$ _______________.

11. 已知 $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$，若 $A+kE$ 是正定矩阵，则 $k>$ ________________.

三、计算与证明(12-16 题每题 9 分，17 题 15 分，18 题 7 分，共 67 分)

12. 已知5阶行列式 $D_5=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 2 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 2 \\ 4 & 3 & 1 & 5 & 0 \end{vmatrix}=27$，求 $A_{41}+A_{42}+A_{43}$ 和 $A_{44}+A_{45}$.

13. 已知 $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$，矩阵 $X$ 满足 $A^{*}X=4A^{-1}+2X$，其中 $A^{*}$ 为 $A$ 的伴随矩阵，求矩阵 $X$.

14. 设向量 $\alpha_1=(1,1,1,3)^T,\alpha_2=(-1,-3,5,1)^T,\alpha_3=(3,2,-1,p+2)^T,\alpha_4=(-2,-6,10,p)^T$，试问：当 $p$ 取何值时，该向量组线性相关？并在此时求出它的秩和一个极大无关组。

15. 向量组 $\alpha_1=(1,1,a)^T, \alpha_2=(1,a,1)^T, \alpha_3=(a,1,1)^T$，$\beta=(-2,-2,a-3)^T$. 试问当 $a$ 满足什么条件时，

(1) $\beta$ 可由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 唯一的线性表示；(2) $\beta$ 不能由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表示；(3) $\beta$ 可由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表示，但表达式不唯一，并写出该表达式.

16. 设 $A=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & a \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ 则 $a$ 为何值时，矩阵 $A$ 可以对角化.

17. 已知二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=2ax_1x_2+2x_1x_3+2x_2x_3$ 在正交变换 $x=Qy$ 下的标准形为 $-y_1^2-y_2^2+2y_3^2$，

(1)求参数$a$;(2)求出所用的正交变换$Q$.

18. 已知矩阵 $A$满足$A^3=2E$,令$B=A^2-2A+2E$,求 $B^{-1}$.

审核人 杨涛　　　　出卷人 魏敏