第 2 章 习题 A

1．一个袋子中装有5只球，编号分别为$1,2,3,4,5$．从袋中同时取3只，以X表示取出的3只球中的最大号码，写出随机变量X的概率分布律．

解 $P\{X=3\}=\dfrac{C_3^3}{C_5^3}=\dfrac{1}{10}$，$P\{X=4\}=\dfrac{C_3^2}{C_5^3}=\dfrac{3}{10}$，$P\{X=5\}=\dfrac{C_4^2}{C_5^3}=\dfrac{3}{5}$，故随机变量$X$的分布律为

X	3	4	5
p_k	$\dfrac{1}{10}$	$\dfrac{3}{10}$	$\dfrac{3}{5}$

2．一批零件中有9只合格品和3只废品．每次从这批零件中任取1只，如果每次取出的废品不再放回去，求在取得合格品以前已取出的废品数X的概率分布律．

解 $P\{X=0\}=\dfrac{C_9^1}{C_{12}^1}=\dfrac{3}{4},P\{X=1\}=\dfrac{C_3^1C_9^1}{P_{12}^2}=\dfrac{9}{44}$，$P\{X=2\}=\dfrac{P_3^2C_9^1}{P_{12}^3}=\dfrac{9}{220}$，

$P\{X=3\}=\dfrac{P_3^3C_9^1}{P_{12}^4}=\dfrac{1}{220}$，所以在取得合格品以前已取出的废品数$X$的分布律为

X	0	1	2	3
p_k	$\dfrac{3}{4}$	$\dfrac{9}{44}$	$\dfrac{9}{220}$	$\dfrac{1}{220}$

3．自动生产线在调整以后出现废品的概率为p．生产过程中出现废品时立即重新进行调整，求在两次调整之间生产的合格品数X的概率分布律．

解 记$q=1-p$，则q表示自动生产线在调整以后出现合格的概率，故

$P\{X=k\}=pq^k,k=0,1,2,\cdots$，所以在两次调整之间生产的合格品数$X$的分布律为

X	0	1	2	$\cdots$	n	$\cdots$	
p_k	p	pq	pq^2	$\cdots$	pq^n	$\cdots$	$p+q=1$

4．已知一电话总机每分钟收到呼唤的次数X服从参数为4的泊松分布，求下列事件的概率：(1) 某一分钟恰有8次呼唤；(2) 某一分钟的呼唤的次数不多于1次；(3) 某一分钟的呼唤的次数多于3次．

解 （1）$P\{X=1\}=\dfrac{4^8}{8!}\mathrm{e}^{-4}=0.0298$；

（2）$P\{X \le 1\} = P\{X = 0\} + P\{X = 1\} = e^{-4} + 4e^{-4} =$ 0.0916；

（3）$P\{X > 3\} = 1 - P\{X \le 3\} = 1 - \mathrm{e}^{-4} - 4\mathrm{e}^{-4} - \frac{4^2}{2!}\mathrm{e}^{-4} - \frac{4^3}{3!}\mathrm{e}^{-4} =$ 0.5665.

5．设事件 A 在每一次试验中发生的概率为 0.3，当事件 A 发生不少于 3 次时，指示灯发出信号.

(1) 进行了 5 次重复独立试验，求指示灯发出信号的概率；

(2) 进行了 7 次重复独立试验，求指示灯发出信号的概率.

解　（1）$P\left\{X \ge 3\right\} = \sum_{k=3}^{5} C_5^k \times (0.3)^k \times (0.7)^{5-k} = 0.1631$；

（2）$P\left\{Y \ge 3\right\} = 1 - P\left\{Y < 3\right\} = 1 - \sum_{k=0}^{2} C_7^k (0.3)^k (0.7)^{7-k} = 0.3529$.

6．一个袋子中装有 5 只球，编号为 $1,2,3,4,5$．在袋中同时取 3 只，以 X 表示取出的 3 只球中的最大号码，写出随机变量 X 的分布函数.

解　由第 1 题知随机变量 X 的分布律为

X	3	4	5
p_k	$\frac{1}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{3}{5}$

所以，随机变量 X 的分布函数为

$$F(x) = \sum_{x_k \le x} P\{X = x_k\} = \begin{cases} 0, & x < 3, \\ 1/10, & 3 \le x < 4, \\ 4/10, & 4 \le x < 5, \\ 1, & x \ge 5. \end{cases}$$

7．在区间 $\left[0,4\right]$ 上任意投掷一个质点，以 X 表示这个质点的坐标，设这个质点落在 $\left[0,4\right]$ 中任意小区间内的概率与这个小区间的长度成正比例，试求 X 的分布函数.

解　当 x<0 时，$F(x) = P\{X < x\} = P\{\varnothing\} = 0$，

当 $0 \le x \le 4$ 时，$F(x) = P\{X \le x\} = kx$，且 $F(4) = P\{X \le 4\} = 4k = 1 \Rightarrow k = \frac{1}{4}$，

从而有，当 $0 \le x \le 4$ 时，$F(x) = P\{X \le x\} = \frac{1}{4}x$，

当 x>4 时，$F(x) = P\{X \le x\} = P\{\Omega\} = 1$，所以，　X 的分布函数为

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ x/4, & 0 \le x < 4, \\ 1, & x \ge 4. \end{cases}$$

8．试说明下列函数能否为某随机变量的分布函数.

$$F_1(x)=\begin{cases}0, & x<0,\\ \sin x, & 0\le x<\dfrac{\pi}{2},\\ 1, & x\ge\dfrac{\pi}{2}.\end{cases}\qquad F_2(x)=\begin{cases}0, & x<0,\\ \dfrac{\ln(1+x)}{1+x}, & x\ge 0.\end{cases}$$

解 容易验证 $F_1(x)$ 满足分布函数的所有性质，所以 $F_1(x)$ 是某随机变量的分布函数；

而 $\lim\limits_{x\to+\infty}F_2(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(1+x)}{1+x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{1+x}=0\ne 1$，所以函数 $F_2(x)$ 不是任何一个随机变量的分布函数.

9．设连续型随机变量 X 的概率密度为 $f(x)=\begin{cases}Ax^2, & |x|<1,\\ 0, & 其他.\end{cases}$

求（1）常数 A；（2） X 落在区间 $(0,0.5)$ 内的概率；（3） X 的分布函数.

解 （1）由密度函数的性质 $\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx=1$ 可得 $1=\int_{-1}^{1}Ax^2\mathrm{d}x=\dfrac{A}{3}x^3\Big|_{-1}^{1}=\dfrac{2}{3}A$，因此 $A=\dfrac{3}{2}$；

（2） $P\left(0<X<0.5\right)=\int_0^{\frac{1}{2}}\dfrac{3}{2}x^2\mathrm{d}x=\dfrac{1}{2}x^3\Big|_0^{\frac{1}{2}}=\dfrac{1}{16}$；

（3） $F(x)=\int_{-\infty}^{x}f(t)\mathrm{d}t=\begin{cases}0, & x<-1,\\ \dfrac{1}{2}x^3, & -1\le x<1,\\ 1, & x\ge 1.\end{cases}$

10．（拉普拉斯分布）设随机变量 X 的概率密度为 $f(x)=A\mathrm{e}^{-|x|},\quad -\infty<x<+\infty.$

求（1）系数 A；（2）随机变量 X 落在区间 $\left(0,1\right)$ 的概率；（3） X 的分布函数.

解 （1）由密度函数的性质可得 $1=A\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-|x|}\mathrm{d}x=2A\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x=-2A\mathrm{e}^{-x}\Big|_0^{+\infty}=2A$，从而有 $A=1/2$；

（2） $P\left(0<X<1\right)=\dfrac{1}{2}\int_0^{1}\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x=\dfrac{1}{2}(1-\mathrm{e}^{-1})\approx 0.316$；

（3） $F(x)=\dfrac{1}{2}\int_{-\infty}^{x}\mathrm{e}^{-|t|}\mathrm{d}t=\begin{cases}\dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{x}, & x<0,\\ 1-\dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{-x}, & x\ge 0.\end{cases}$

11．设随机变量 X 的分布函数为 $F(x)=\begin{cases}0, & x<-1,\\ 1/4, & x=-1,\\ ax+b, & -1<x<1,\\ 1, & x\geq 1.\end{cases}$

且 $P(X=1)=\dfrac{1}{2}$，试求：（1）常数 a,b 的值；（2）$P(-2<X<1)$．

解　（1）由分布函数的右连续型可知 $\lim\limits_{x\to -1^+}F(x)=\lim\limits_{x\to -1^+}(ax+b)=-a+b=F(-1)=\dfrac{1}{4}$，且

$1=F(1)=P\{X\leq 1\}=P\{X<1\}+P\{X=1\}=\lim\limits_{x\to 1^-}F(x)+P\{X=1\}=\lim\limits_{x\to 1^-}(ax+b)+\dfrac{1}{2}=a+b+\dfrac{1}{2}$

联解上面两式可得 $a=\dfrac{1}{8},b=\dfrac{3}{8}$；

（2）$P(-2<X<1)=P(X<1)-P(X\leq -2)=\lim\limits_{x\to 1^-}F(x)-F(-2)=\lim\limits_{x\to 1^-}(\dfrac{1}{8}x+\dfrac{3}{8})-0=\dfrac{1}{2}$．

12. 设连续型随机变量 X 的分布函数为 $F(x)=\begin{cases}c, & x<0,\\ a+b\mathrm{e}^{-x^3/2}, & x\geq 0.\end{cases}$

试求：（1）常数 a,b,c 的值；（2）随机变量 X 的密度函数；（3）$\lim\limits_{x\to 0}P(|X-2|\leq x)$．

解　（1）由 $\lim\limits_{x\to -\infty}F(x)=0$，即 $c=0$，再由 $1=\lim\limits_{x\to +\infty}F(x)=\lim\limits_{x\to +\infty}(a+b\mathrm{e}^{-x^3/2})=a$，得 a=1，

最后由连续型随机变量分布函数的连续性，$\lim\limits_{x\to 0^-}F(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}F(x)=F(0)$，即 $0=1+b$ 得

$b=-1$ ；

（2）$f(x)=F'(x)=\begin{cases}0, & x<0,\\ \dfrac{3}{2}x^2e^{-x^3/2}, & x\geq 0.\end{cases}$；

（3）$\lim\limits_{x\to 0}P(|X-2|\leq x)=\lim\limits_{x\to 0}P(2-x\leq X\leq 2+x)=\lim\limits_{x\to 0}[F(2+x)-F(2-x)]=F(2)-F(2)=0$．

13.设随机变量 X 服从正态分布 $N(1,2^2)$，求下列概率：

（1）　$P(X<2.2)$　；（2）$P(-1.6<X<5.8)$ ；　（3）$P(|X|<3.5)$．

解　（1）$P(X<2.2)=\Phi\left(\dfrac{2.2-1}{2}\right)=\Phi(0.6)=0.7257$ ；

（2）$P(-1.6<X<5.8)=\Phi\left(\dfrac{5.8-1}{2}\right)-\Phi\left(\dfrac{-1.6-1}{2}\right)=\Phi(2.4)-\Phi(-1.3)$

$$=\Phi(2.4)+\Phi(1.3)-1=0.9918+0.9032=0.8950\text{ ；}$$

（3） $P(|X|<3.5)=\Phi(\frac{3.5-1}{2})-\Phi(\frac{-3.5-1}{2})=\Phi(1.25)-\Phi(-2.25)$

$$=\Phi(1.25)+\Phi(2.25)-1=0.8944+0.9878-1=0.8822\ .$$

14．某人上班所需的时间 $X\sim \mathrm{N}\left(30,100\right)$（单位：min）已知上班时间为 8：30，他每天 7：50 出门，求：（1）某天迟到的概率；（2）一周（以 5 天计）最多迟到一次的概率．

解 （1）$p=P\{X>40\}=1-P\{X\le 40\}=1-\Phi(\frac{40-30}{10})=1-\Phi(1.0)=1-0.8413=0.1587$；

（2）若用 Y 表示这人一周中上班迟到的次数，则 $Y\sim B(5,0.1587)$，一周（以 5 天计）最多迟到一次的概率为

$$P\{Y\le 1\}=0.8413^5+5\times 0.8413^4\times 0.1587\approx 0.8190.$$

15．一工厂生产的某种电子元件的寿命 X（小时）服从参数 $\mu=160$， σ 的正态分布，若要求 $P(120<X\le 200)\ge 0.80$，允许 σ 最大为多少？

解 由 $P(120<X\le 200)=\Phi\left(\dfrac{200-160}{\sigma}\right)-\Phi\left(\dfrac{120-160}{\sigma}\right)=2\Phi\left(\dfrac{40}{\sigma}\right)-1\ge 0.80$，得

$$\Phi\left(\frac{40}{\sigma}\right)\ge 0.90\approx\Phi(1.282)\text{，得 }\sigma\le\frac{40}{1,282}\approx 31.20.$$

16．设 $X_i,i=1,2,3$ 是三个随机变量，并且 $X_1\sim N(0,1),X_2\sim N(0,4),X_3\sim N(5,9)$，$p_i=P(-2\le X_i\le 2),i=1,2,3$，试不查表比较 $p_i,i=1,2,3$ 的大小.

解　$p_1=P(-2\le X_1\le 2)=\Phi(2)-\Phi(-2)=2\Phi(2)-1,$

$$p_2=P(-2\le X_2\le 2)=\Phi(\frac{2}{2})-\Phi(\frac{-2}{2})=\Phi(1)-\Phi(-1)=2\Phi(1)-1,$$

$$p_3=P(-2\le X_3\le 2)=\Phi(\frac{2-5}{3})-\Phi(\frac{-2-5}{3})=\Phi(-1)-\Phi(-\frac{7}{3}),$$

由于 $\Phi(2)>\Phi(1)$，所以， $p_1>p_2$，此外，由标准正态分布的密度函数的性质可知，$\forall x\in(-\frac{7}{3},-1)$，有 $0<\varphi(x)<\varphi(x+\frac{4}{3})$，从而可得

$$p_3=\int_{-\frac{7}{3}}^{-1}\varphi(x)\mathrm{d}x<\int_{-\frac{7}{3}}^{-1}\varphi(x+\frac{4}{3})\mathrm{d}x=\int_{-1}^{\frac{1}{3}}\varphi(y)\mathrm{d}y<\int_{-1}^{1}\varphi(y)\mathrm{d}y=p_2\text{ ，}$$

综合以上结论可得：$p_1 > p_2 > p_3$.

17．设随机变量 X 的概率分布律为

X	-2	-1	0	1	2
p_k	0.1	0.2	0.3	0.2	0.2

求（1）$Y = X^2$ 的概率分布律；（2）$Y = 2X - 1$ 的概率分布律.

解（1）

Y	0	1	4
p_k	0.3	0.4	0.3

（2）

Y	-5	-3	-1	1	3
p_k	0.1	0.2	0.3	0.2	0.2

18．设 X 的密度函数为 $f\left(x\right)=\begin{cases}|x|,|x|<1,\\ 0,其它.\end{cases}$，求以下随机变量的密度函数 (1) $Y = 2X$；(2) $Y = -X + 1$；(3) $Y = X^2$.

解（1）由于函数 y=2x 在（-1,1）单调增加且可导，其值域为(-2,2)，其反函数为 $x = \frac{1}{2}y, x' = \frac{1}{2} > 0$，由公式法可得 $Y = 2X$ 的密度函数为

$$f_Y(y)=\begin{cases}f(\frac{1}{2}y)\cdot|x'|,-2<y<2,\\ \quad 0, \qquad 其它,\end{cases}=\begin{cases}\frac{1}{4}|y|,|y|<2,\\ \quad 0, \quad 其它;\end{cases}$$

（2）由于函数 y=-x+1 在（-1,1）单调减少且可导，其值域为（0,2），其反函数为 $x = -y + 1, x' = -1 < 0$，由公式法可得 $Y = -X + 1$ 的密度函数为

$$f_Y(y)=\begin{cases}f(-y+1)\cdot|x'|,0<y<2,\\ \quad 0, \qquad 其它,\end{cases}=\begin{cases}|1-y,0<y<2,\\ \quad 0, \quad 其它;\end{cases}$$

（3）下面我们由分布函数法来求的 $Y = X^2$ 概率分布：

当 y<0 时，$F_Y(y) = P\{Y \le y\} = P\{X^2 \le y\} = P\{\varnothing\} = 0$，

当 $0 \le y < 1$ 时，$F_Y(y) = P\{Y \le y\} = P\{X^2 \le y\} = P\{-\sqrt{y} \le X \le \sqrt{y}\} = \int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}}|x|\,\mathrm{d}x = y$，

当 $y \ge 1$ 时，$F_Y(y) = P\{Y \le y\} = P\{X^2 \le y\} = P\{\Omega\} = 1$.

所以，随机变量$Y=X^2$的概率密度函数为

$$f_Y(y)=F_Y'(y)=\begin{cases}1,0<y<1,\\0,\text{其它}.\end{cases}$$

19．设随机变量X服从参数为0.01的指数分布，求下列随机变量的概率密度：（1）$Y=X^2$；（2）$Y=\mathrm{e}^X$．

解　（1）随机变量X的密度密度为$f_X(x)=\begin{cases}0.01\mathrm{e}^{-0.01x},x>0,\\0,\quad x\le 0.\end{cases}$由于函数$y=x^2$在$(0,+\infty)$单调增加且可导，其值域为$(0,+\infty)$，其反函数为$x=\sqrt{y}$，且$x'=\dfrac{1}{2\sqrt{y}}$，由公式法可知$Y=X^2$的密度函数为

$$f_Y(y)=\begin{cases}f_X(\sqrt{y})\,|\,x'\,|,y>0,\\0,\qquad y\le 0\end{cases}=\begin{cases}\dfrac{1}{200\sqrt{y}}\mathrm{e}^{-\sqrt{y}/100},\quad y>0,\\0,\qquad y\le 0;\end{cases}$$

（2）随机变量X的密度密度为$f_X(x)=\begin{cases}0.01\mathrm{e}^{-0.01x},x>0,\\0,\quad x\le 0.\end{cases}$由于函数$y=\mathrm{e}^x$在$(0,+\infty)$单调增加且可导，其值域为$(1,+\infty)$，其反函数为$x=\ln y$，且$x'=\dfrac{1}{y}$，由公式法可知$Y=\mathrm{e}^X$的密度函数为

$$f_Y(y)=\begin{cases}f_X(\sqrt{y})\,|\,x'\,|,y>1,\\0,\qquad y\le 1\end{cases}=\begin{cases}\dfrac{1}{100y}\mathrm{e}^{-\ln y/100},\quad y>1,\\0,\qquad y\le 1.\end{cases}$$

20．设随机变量X的概率密度为$f(x)=\begin{cases}\dfrac{A}{1+x^2},\quad x>0,\\0,\qquad x\le 0.\end{cases}$

求（1）A；(2) 随机变量$Y=\ln X$的概率密度．

解　（1）由密度函数的性质可知$A\int_0^{+\infty}\dfrac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x=A\arctan x\Big|_0^{+\infty}=A\dfrac{\pi}{2}=1\Rightarrow A=\dfrac{2}{\pi}$；

（2）随机变量$Y=\ln X$的分布函数为

$$F_Y(y)=P\{Y\le y\}=P\{\ln X\le y\}=P\{X\le \mathrm{e}^y\}=\frac{2}{\pi}\int_0^{\mathrm{e}^y}\frac{\mathrm{d}x}{1+x^2},$$

所以随机变量$Y=\ln X$的密度函数为

$$f_Y(y)=F_Y'(y)=\frac{2}{\pi}\frac{e^y}{1+e^{2y}},-\infty<y<+\infty .$$

21．设随机变量 X 服从正态分布 $N(0,\sigma^2)$，求随机变量 $Y=|X|$ 的概率密度.

解 当 $y<0$ 时，$F_Y(y)=P\{Y\le y\}=P\{|X|\le y\}=P(\varnothing)=0,$

当 $y\ge 0$ 时，$F_Y(y)=P\{Y\le y\}=P\{|X|\le y\}=P\{-y\le X\le y\}=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\displaystyle\int_{-y}^{y}e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}dx$，

所以，随机变量 $Y=|X|$ 的概率密度为

$$f_Y(y)=F_Y'(y0=\begin{cases}\frac{1}{\sigma}\sqrt{\frac{2}{\pi}}e^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}}, & y>0,\\ 0, & y\le 0.\end{cases}$$

22．设随机变量 X 在区间 $[-1,2]$ 上服从均匀分布，随机变量 $Y=\begin{cases}1, 若X>0;\\ 0, 若X=0;\\ -1, 若X<0.\end{cases}$ 试求随机变量函数 Y 的分布律.

解 $P\{Y=-1\}=P\{X<0\}=\int_{-1}^{0}\frac{1}{3}dx=\frac{1}{3},$

$P\{Y=0\}=P\{X=0\}=0,$

$P\{Y=1\}=P\{X>0\}=\int_{0}^{2}\frac{1}{3}dx=\frac{2}{3}.$

所以随机变量函数 Y 的分布律为

Y	-1	0	1
P	1/3	0	2/3

23．设随机变量 X 服从柯西分布 $\mathrm{Cau}(\mu,\lambda)$，即其密度函数为

$$f(x)=\frac{1}{\pi}\frac{\lambda}{\lambda^2+(x-\mu)^2},-\infty<x<+\infty,\lambda>0$$

证明：$Y=\dfrac{X-\mu}{\lambda}$ 服从标准柯西分布，即 $Y\sim \mathrm{Cau}(0,1)$.

证明　随机变量 $Y=\dfrac{X-\mu}{\lambda}$ 的分布函数为

$$F_Y(y)=P\{Y\le y\}=P\{\frac{X-\mu}{\lambda}\le y\}=P\{X\le \lambda y+\mu\}=\int_{-\infty}^{\lambda y+\mu}\frac{1}{\pi}\frac{\lambda}{\lambda^2+(x-\mu)^2}dx ,$$

所以，随机变量 $Y=\dfrac{X-\mu}{\lambda}$ 的密度函数为

$$f_Y(y)=F_Y'(y)=\frac{1}{\pi}\frac{\lambda}{\lambda^2+(\lambda y)^2}\cdot\lambda=\frac{1}{\pi}\frac{1}{1+y^2},-\infty<y<+\infty\ ,$$

即随机变量 $Y=\dfrac{X-\mu}{\lambda}$ 服从标准柯西分布.

第 2 章 习题 B

1.（超几何分布）已知某批产品共 100 个，其中 10 个次品，从中随机地抽取 5 个样品，求抽取 5 个样品中次品数 X 的概率分布律，并求 X 的分布函数.

解 $P\{X=k\}=\dfrac{C_{10}^{k}C_{90}^{5-k}}{C_{100}^{5}},k=0,1,2,3,4,5.$

所以抽取 5 个样品中次品数 X 的概率分布律为：

X	0	1	2	3	4	5
P	0.5838	0.3394	0.0702	0.0064	0.0003	0

X 的分布函数为

$$F(x)=\sum_{x_k\le x}p_k=\begin{cases}0, & x<0,\\ 0.5838, & 0\le x<1,\\ 0.9231, & 1\le x<2,\\ 0.9934, & 2\le x<3,\\ 0.9997, & 3\le x<4,\\ 1, & x\ge 4.\end{cases}$$

2. 在伯努利试验中，如果每次试验成功的概率为 p .（1）将试验进行到出现 r 次成功为止，求试验次数 Y 的分布律；（2）将试验进行到成功与失败都出现为止，求试验次数 Y 的分布律.

解 （1） $P\{Y=k\}=C_{k-1}^{r-1}p^{r-1}q^{k-r}p=C_{k-1}^{r-1}p^rq^{k-r},k=r,r+1,r+2,\cdots\quad(0<p<1,p+q=1)$；

（2） $P\{Y=k\}=pq^{k-1}+p^{k-1}q,k=2,3,\cdots.$

3. 设随机变量 X 服从指数分布 $E(\lambda)$，求随机变量 $Y=\min(X,2)$ 的分布函数.

解 当 $y<0$ 时，$F_Y(y)=P\{Y\le y\}=P\{\min(X,2)\le y\}=P(\varnothing)=0$ ，

当 $0\le y<2$ 时，$F_Y(y)=P\{Y\le y\}=P\{\min(X,2)\le y\}=P\{X\le y\}=1-\mathrm{e}^{-\lambda y}$ ，

当 $y\ge 2$ 时，$F_Y(y)=P\{Y\le y\}=P\{\min(X,2)\le y\}=P\{\Omega\}=1$ ，

所以，随机变量 $Y=\min(X,2)$ 的分布函数为 $F(y)=\begin{cases}0, & y\le 0,\\ 1-\mathrm{e}^{-\lambda y}, & 0<y<2,\\ 1, & y\ge 2.\end{cases}$

4. 设随机变量 X 在区间 $[0,3]$ 上服从均匀分布，求关于变量 t 的方程

$$4t^2+4Xt+X+2=0$$

无实根的概率.

解 $p=P\{\text{方程}4t^2+4Xt+X+2=0\text{无实根}\}=P\{16X^2-16(X+2)<0\}$

$$=P\{X^2-X-2<0\}=P\{-1<X<2\}=\int_0^2\frac{1}{3}\mathrm{d}x=\frac{2}{3}.$$

5．设随机变量 X 服从正态分布 $N(\mu_1,\sigma_1{}^2)$，随机变量 Y 服从正态分布 $N(\mu_2,\sigma_2{}^2)$，且有 $P(|X-\mu_1|<1)>P(|Y-\mu_2|<1)$, 则参数 $\sigma_1<\sigma_2$ 是否成立？

解 $P(|X-\mu_1|<1)=\Phi\left(\frac{1}{\sigma_1}\right)-\Phi\left(-\frac{1}{\sigma_1}\right)=2\Phi\left(\frac{1}{\sigma_1}\right)-1$，

$P(|Y-\mu_2|<1)=\Phi\left(\frac{1}{\sigma_2}\right)-\Phi\left(-\frac{1}{\sigma_2}\right)=2\Phi\left(\frac{1}{\sigma_2}\right)-1$，

由 $P(|X-\mu_1|<1)>P(|Y-\mu_2|<1)$ 得 $\Phi\left(\frac{1}{\sigma_1}\right)>\Phi\left(\frac{1}{\sigma_2}\right)\Rightarrow\frac{1}{\sigma_1}>\frac{1}{\sigma_2}\Rightarrow\sigma_1<\sigma_2$.

6．（伽玛分布）设随机变量 X 的概率密度为 $f(x)=\begin{cases}Ax^{\alpha-1}\mathrm{e}^{-\beta x}, & x>0,\\ 0, & x\le 0.\end{cases}$

其中 $\alpha>0,\beta>0$ 都是常数．求系数 A．当 $\alpha=1$ 时，该分布为什么分布？

解 由密度函数的性质知 $\int_0^{+\infty}Ax^{\alpha-1}\mathrm{e}^{-\beta x}\mathrm{d}x=\frac{A}{\beta^\alpha}\int_0^{+\infty}t^{\alpha-1}\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t=\frac{A}{\beta^\alpha}\Gamma(\alpha)=1\Rightarrow A=\frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)}$；

当 $\alpha=1$ 时，$f(x)=\begin{cases}\beta\mathrm{e}^{-\beta x}, & x>0,\\ 0, & x\le 0.\end{cases}$，该分布参数为 β 的指数分布 $E(\beta)$.

7．设随机变量 X 服从参数为 λ 的指数分布 $E(\lambda)$，试求 $Y=\sqrt[m]{X}+\mu$（$m>0,\mu>0$ 为已知常数）的概率分布.

解 当 $y\le\mu$ 时，$F_Y(y)=P\{Y\le y\}=P\{\sqrt[m]{X}+\mu\le y\}=P(\varnothing)=0,$

当 $y>\mu$ 时，$F_Y(y)=P\{Y\le y\}=P\{\sqrt[m]{X}+\mu\le y\}=P\{X\le(y-\mu)^m\}=1-\mathrm{e}^{-\lambda(y-\mu)^m},$

所以随机变量 $Y=\sqrt[m]{X}+\mu$（$m>0,\mu>0$ 的密度函数为

$$f_Y(y)=F_Y'(y)=\begin{cases}\lambda m(y-\mu)^{m-1}e^{-\lambda(y-\mu)^m}, y>\mu,\\0, \qquad y\le\mu.\end{cases}$$

8．每天某种商品的销售量（件）服从参数为 λ 的泊松分布，随机选取 4 天，其中恰有一天的销售量为 5 件的概率.

解　X（每天的销售量）服从 $P(\lambda)$，$p=P(X=5)=\dfrac{\lambda^5\mathrm{e}^{-\lambda}}{5!}$；$Y$ 为销售量为 5 件的天数，

Y 服从二项分布 $B(4,p)$，$P(Y=1)=C_4^1\dfrac{\lambda^5\mathrm{e}^{-\lambda}}{5!}(1-\dfrac{\lambda^5\mathrm{e}^{-\lambda}}{5!})^3$.

9．设随机变量 X 的概率密度函数为 $f(x)=\begin{cases}2x, & 0<x<1,\\0, & 其它.\end{cases}$,以 Y 表示 X 进行三次独立重复观察中事件 $\{X\le 1/2\}$ 出现的次数，求概率 $P(Y=2)$.

解　$p=P\{X\le 1/2\}=\int_0^{\frac{1}{2}}2x\mathrm{d}x=\dfrac{1}{4}$，则 $Y\sim B(3,\dfrac{1}{4})$，因此

$$P(Y=2)=C_3^2\left(\frac{1}{4}\right)^2(1-\frac{1}{4})=\frac{9}{64}.$$

10．设随机变量 $X\sim U(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2})$，求随机变量 $Y=\cos X$ 的概率密度.

解 随机变量 $X\sim U(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2})$，其密度函数为 $f_X(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\pi},-\dfrac{\pi}{2}<x<\dfrac{\pi}{2},\\0, \qquad 其它.\end{cases}$

当 $y<0$ 时，$F_Y(y)=P\{Y\le y\}=P\{\cos X\le y\}=P(\varnothing)=0$，

当 $0\le y<1$ 时，

$$F_Y(y)=P\{Y\le y\}=P\{\cos X\le y\}=P\{\arccos y\le X<\frac{\pi}{2}\}+P\{-\frac{\pi}{2}<X\le-\arccos y\}$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{\arccos y}^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}x+\frac{1}{\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{-\arccos y}\mathrm{d}x=1-\frac{2}{\pi}\arccos y,$$

当 $y\ge 1$ 时，$F_Y(y)=P\{Y\le y\}=P\{\cos X\le y\}=P(\Omega)=1$.

所以，随机变量 $Y=\cos X$ 的概率密度为

$$f_Y(y)=F_Y'(y)=\begin{cases}\dfrac{2}{\pi\sqrt{1-y^2}}, & 0<y<1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

11．某人上班，自家里到单位要经过一交通指示灯，这指示灯有 $\dfrac{1}{3}$ 时间亮红灯，他遇到红灯时要在指示灯旁等待直至绿灯亮，等待时间（单位：秒）服从区间 $[0,30]$ 上的均匀分布，设 X 表示他的等待时间，求 X 的分布函数. 问 X 是否是连续型随机变量？又是否是离散型随机变量？请说明理由.

解　$P\{X=0\}=P\{\text{交通指示灯亮绿灯}\}=\dfrac{2}{3}$,

当 $x<0$ 时，$F(x)=P\{X\le x\}=P(\varnothing)=0$ ，

当 $0\le x<30$ 时，$F(x)=P\{X\le x\}=P\{X<0\}+P\{X=0\}+P\{0<X\le x\}$

$$=\frac{2}{3}+P\{\text{交通指示灯为红灯}\}P\{0<X<x\,|\,\text{交通指示灯为红灯}\}$$

$$=\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\int_0^x\frac{1}{30}\mathrm{d}t=\frac{2}{3}+\frac{x}{90},$$

当 $x\ge 30$ 时，$F(x)=P\{X\le x\}=P(\Omega)=1$ ，即 X 的分布函数为

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<0,\\ 2/3+x/90, & 0\le x<30,\\ 1, & x\ge 30.\end{cases}$$

X 既不是连续型随机变量也不是离散型随机变量.

12．假设一保险公司在任何长为 t (单位：小时)的时间内发生索赔的次数 $N(t)$ 服从参数为 $\lambda t(\lambda>0)$ 的泊松分布，试求：（1）相继两次索赔之间时间间隔 Y 的分布；（2）在保险公司 6 小时内无索赔的情况下，再过 4 小时仍无索赔的概率.

解：（1）设 Y 的分布为 $F(y)$ ，显然当 $y\le 0$ 时，$F(y)=P\{Y\le y\}=0$ ，当 $y>0$ 时，

$$F(y)=P\{Y\le y\}=1-P\{Y>y\}\}=1-P\{\text{在时间间隔}(0,y]\text{内没有索赔}\}=1-P\{N(y)=0\}$$

$$=1-\frac{(\lambda y)^0}{0!}\mathrm{e}^{-\lambda y}=1-\mathrm{e}^{-\lambda y},$$

即相继两次索赔之间时间间隔 Y 服从参数为 λ 的指数分布；

（2）在保险公司 6 小时内无索赔的情况下，再过 4 小时仍无索赔的概率为

$$P\{Y>6+4\,|\,Y>6\}=\frac{P\{Y>10\}}{P\{Y>6\}}=\frac{\mathrm{e}^{-10\lambda}}{\mathrm{e}^{-6\lambda}}=\mathrm{e}^{-4\lambda}.$$

13．已知某种昆虫的产卵数 X 服从泊松分布 $P(\lambda)$,而每个卵能孵化成幼虫的概率为 p，且各卵的孵化是相互独立的，试求该昆虫能育成的幼虫数 Y 所服从的概率分布.

解 用 Y 该昆虫能育成的幼虫数, 由全概率公式, 对任意正整数 k 有

$$P(Y=k)=\sum_{i=0}^{\infty}P(X=i)P(Y=k\mid X=i)=\sum_{i=0}^{k-1}P(X=i)\times 0+\sum_{i=k}^{\infty}P(X=i)P(Y=k\mid X=i)$$

$$=\sum_{i=k}^{\infty}\frac{\lambda^i}{i!}e^{-\lambda}\cdot C_i^k p^k(1-p)^{i-k}=\frac{(\lambda p)^k}{k!}e^{-\lambda}\sum_{i=k}^{\infty}\frac{[\lambda(1-p)]^{i-k}}{(i-k)!}=\frac{(\lambda p)^k}{k!}e^{-\lambda}\cdot e^{\lambda(1-p)}=\frac{(\lambda p)^k}{k!}e^{-\lambda p}.$$

这表明：Y 服从参数为 λp 的泊松分布.

14．设连续型随机变量 X 的分布函数为 $F(x)$，其密度函数 $f(x)$ 为偶函数. 试证明：对任意实数 $a>0$，有

（1） $F(-a)=1-F(a)=\dfrac{1}{2}-\int_0^a f(x)dx$ ；

（2） $P(|X|<a)=2F(a)-1$ ；

（3） $P(|X|>a)=2(1-F(a))$.

证明（1） $F(-a)=\int_{-\infty}^{-a}f(x)dx\,\underline{\underline{x=-t}}\,-\int_{\infty}^{a}f(t)dt=\int_a^{\infty}f(t)dt=1-\int_{-\infty}^{a}f(x)dx=1-F(a)$；

由上面还可得

$$F(-a)=1-\int_{-\infty}^{a}f(x)dx=1-\int_{-\infty}^{-a}f(x)dx-\int_{-a}^{a}f(x)dx=1-F(-a)-2\int_0^a f(x)dx\text{ ，}$$

从而有　　$F(-a)=0.5-\int_0^a f(x)dx$ ；

（2） $P(|X|<a)=P(-a<X<a)=F(a)-F(-a)=F(a)-[1-F(a)]=2F(a)-1$ ；

（3） $P(|X|>a)=1-P(|X|\le a)=1-P(-a\le X\le a)=1-[F(a)-F(-a)]=2[1-F(a)]$.

15．假设随机变量 X 的绝对值不大于 1； $P(X=-1)=\dfrac{1}{8},\ P(X=1)=\dfrac{1}{4}$ ，在事件 $\{-1<X<1\}$ 出现的条件下，X 在 $(-1,\ 1)$ 内任意子区间上取值的概率与该子区间的长度成正比. 试求：（1） X 的分布函数；（2） X 取负值的概率 p .

解 （1）由题意可知 $P\{-1<X<1\}=1-P\{X=-1\}-P\{X=1\}=1-\dfrac{1}{8}-\dfrac{1}{4}=\dfrac{5}{8}$,

且对任意 $-1<x<1$ 有， $P\{-1<X<x\mid -1<X<1\}=k(x+1)$, 令 x=1 得

$1=P\{-1<X<1\mid -1<X<1\}=k(1+1)\Rightarrow k=\dfrac{1}{2}$,

即对任意 $-1<x<1$ 有，$P\{-1<X<x\mid -1<X<1\}=\dfrac{1}{2}(x+1)$,

从而有，当 $x<-1$ 时，$F(x)=P\{X\le x\}=P(\varnothing)=0$,

当意 $-1\le x<1$ 时，

$$F(x)=P\{X\le x\}=P\{X<-1\}+P\{X=-1\}+P\{-1<X<x\}$$

$$=0+\frac{1}{8}+P\{-1<X<1\}P\{-1<X<x\mid -1<X<1\}=\frac{1}{8}+\frac{5}{8}\cdot\frac{x+1}{2}=\frac{5x+7}{16},$$

当 $x\ge 1$ 时，$F(x)=P\{X\le x\}=P(\Omega)=1$，所以 X 的分布函数为

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<-1,\\ \dfrac{5x+7}{16}, & -1\le x<1,\\ 1, & x\ge 1.\end{cases};$$

（2）$p=P\{X<0\}=\lim\limits_{x\to 0^-}F(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{5x+7}{16}=\dfrac{7}{16}$.

16．设随机变量 X 的概率密度函数为 $f(x)=\begin{cases}cx^2, & 0<x<3,\\ 0, & \text{其它}.\end{cases}$，其中 c 为待求参数，随机变量 $Y=\begin{cases}2, & X\le 1\\ X, & 1<X<2\\ 1, & X\ge 2\end{cases}$，求常数 c 以及随机变量 Y 的分布函数 $F_Y(y)$.（提示：做出随机变量 Y 与 X 的函数关系图，据此图像，针对 y 的不同取值，分别将事件 $Y\le y$ 转化为随机变量 X 的取值落在某个范围）.

解　由密度函数的性质 $\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x=1$，即 $1=c\int_0^3 x^2\mathrm{d}x=9c$，得常数 $c=\dfrac{1}{9}$；

当 $y<1$ 时，$F_Y(y)=P\{Y\le y\}=P(\varnothing)=0$,

当 $1\le y<2$ 时，

$$F_Y(y)=P\{Y\le y\}=P\{Y<1\}+P\{Y=1\}+P\{1<Y<2\}+P\{Y=2\}$$

$$=P(\varnothing)+P\{X\ge 2\}+P\{1<X\le y\}=\frac{1}{9}\int_2^3 x^2\mathrm{d}x+\frac{1}{9}\int_1^y x^2\mathrm{d}x=\frac{1}{27}y^3+\frac{2}{3},$$

当 $y\ge 2$ 时，

$$F_Y(y)=P\{Y\le y\}=P\{Y<1\}+P\{Y=1\}+P\{1<Y<2\}+P\{Y=2\}$$

$$=P(\varnothing)+P\{X\ge 2\}+P\{1<X<2\}+P\{X\le 1\}=1,$$

所以，随机变量 Y 的分布函数 $F_Y(y)$ 为

$$F_Y(y)=\begin{cases} 0, & y<1, \\ \dfrac{1}{27}y^3+\dfrac{2}{3}, & 1\le y<2, \\ 1, & y\ge 2. \end{cases}$$