装
订
线

本试卷适应范围 本科一年级

南京农业大学试题纸

2015-2016 学年　第 2 学期　课程类型：必修　试卷类型：A

课程号 MATH2602　　课程名 高等数学　　学分 5

学号 ________　　姓名 ________　　班级 ________

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	九	总分	签名
得分											

一、单选选择题（2 分×5＝10 分）

1．在空间解析几何中，方程 $x^2+y^2=4x$ 表示（　A　）.

A. 圆柱面　B.圆　C. 点　D. 旋转抛物面

2．向量$\vec{a}$在向量$\vec{b}$上的投影为（　D　）

A. $\dfrac{\vec{a}\times\vec{b}}{|\vec{a}|}$　B. $\dfrac{\vec{a}\times\vec{b}}{|\vec{b}|}$　C. $\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|}$　D. $\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{b}|}$

3．函数 $f(x,y)$在点(x_0,y_0)处两个偏导数存在是$f(x,y)$在该点连续的（　D　）

A 充分非必要条件；　B.必要非充分条件；
C.充分必要条件；　D.既非充分又非必要条件.

4．微分方程$y''+3y'+2y=0$的通解为（　C　）

A．$y=C_1e^{x}+C_2e^{2x}$　B．$y=(C_1+C_2x)e^{-2x}$

C．$y=C_1e^{-x}+C_2e^{-2x}$　D．$y=C_1e^{-x}+C_2e^{2x}$

5．$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}(2x+1)^n$ 的收敛域为（　B　）

A. $(-1,0)$　B. $[-1,0)$　C. $[-1,0]$　D. $(-1,0]$

二、填空题（3 分×5＝15 分）

1．设 $\vec{a}=(1,1,1),\vec{b}=(2,0,5)$，则 $\vec{c}=\vec{a}-2\vec{b}=\underline{(-3,1,-9)}$

2．将 xoy面上的双曲线 $4x^2-9y^2=36$ 绕y轴旋转一周所得的旋转曲面方程为

$\underline{4x^2+4z^2-9y^2=36}$

3．设函数$z=e^{xy}$在$(1,2)$处的全微分$dz=\underline{2e^2dx+e^2dy}$

4．设曲线 L为$x^2+y^2=R^2$在第一象限的部分，则$\int_L\sqrt{x^2+y^2}\,ds=\underline{\dfrac{\pi R^2}{2}}$

5．设函数 $f(x)$ 的周期为 2π，在 $(-\pi,\pi]$ 上的定义为 $f(x)=\begin{cases}0 & -\pi<x<0\\ x & 0\le x\le\pi\end{cases}$，则 $f(x)$ 的 Fourier 级数在 $x=\pi$ 处收敛于 $\underline{\dfrac{\pi}{2}}$

三、计算题（6 分×10＝60 分）

1．求过 $(0,2,4)$ 且与两平面 $x+2z=1$ 和 $y-3z=2$ 平行的直线方程。

解：

$$s=n_1\times n_2=\begin{vmatrix} i & j & k\\ 1 & 0 & 2\\ 0 & 1 & -3\end{vmatrix}=(-2,3,1)\quad\cdots\cdots\cdots\cdots 4'$$

$$L:\frac{x}{-2}=\frac{y-2}{3}=\frac{z-4}{1}\qquad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots 2'$$

2．$z=\ln\sqrt{x^2+y^2}$，求 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{x}{x^2+y^2}\qquad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots 3'$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots 3'$$

3．求椭球面 $2x^2+3y^2+z^2=9$ 上平行于平面 $2x-3y+2z+1=0$ 的切平面方程。

解：椭球面的法向量 $n=(4x,6y,2z)$ $\cdots\cdots\cdots\cdots 2'$

$$\frac{4x}{2}=\frac{6y}{-3}=\frac{2z}{2}$$

即：$y=-x, z=2x$ $\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots 2'$

代入椭球面方程，可得 $x=\pm1$，切点为（$\pm1,\mp1,\pm2$）

切平面：$2x-3y+2z\pm9=0$ $\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots 2'$

4. 求 $f(x,y)=xy+\sin(x+2y)$ 在 $(0,0)$ 处沿方向 $\bar{l}=(1,2)$ 的方向导数。

解：$e_l=(\dfrac{1}{\sqrt5},\dfrac{2}{\sqrt5})$ $\cdots\cdots\cdots\cdots 2'$

$$\frac{\partial f}{\partial x}\Big|_{(0,0)}=y+\cos(x+2y)\Big|_{(0,0)}=1$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}\Big|_{(0,0)}=x+2\cos(x+2y)\Big|_{(0,0)}=2\qquad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots 2'$$

$$\therefore\frac{\partial f}{\partial l}\Big|_{(0,0)}=1\cdot\frac{1}{\sqrt5}+2\cdot\frac{2}{\sqrt5}=\sqrt5\qquad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots 2'$$

5．求微分方程 $y'+y\cos x=e^{-\sin x}$ 的通解。

解：$P(x)=\cos x,Q(x)=e^{-\sin x}$

$\therefore y=e^{-\int\cos xdx}[\int e^{-\sin x}e^{\int\cos xdx}dx+C]$ …………4′

$=e^{-\sin x}(x+C)$ ……………………2′

6. 求内接于半径为 a 的球且有最大体积的长方体。

解：设球面方程为：$x^2+y^2+z^2=a^2$,(x,y,z)是内接长方体在第一卦限的一个顶点，则长宽高分别为$2x,2y,2z$,体积为

$V=8xyz$ ……………………2′

令$L(x,y,z)=8xyz+\lambda(x^2+y^2+z^2-a^2)$

由$\begin{cases}L_x=8yz+2\lambda x=0\\L_y=8xz+2\lambda y=0\\L_z=8xy+2\lambda z=0\end{cases}$ ……………………2′

解得$x=y=z=\dfrac{a}{\sqrt{3}}$，为唯一驻点

由题意知长方体必有最大体积，

故当长宽高都为$\dfrac{2a}{\sqrt{3}}$时，体积最大。 ……………………2′

7. 求$\iint_D yd\sigma$, 其中 D 是由直线 $y^2=2x$与$y=x-4$所围成的区域。

解:$\iint_D ydxdy=\int_{-2}^{4}dy\int_{\frac{y^2}{2}}^{y+4}ydx$

$=\int_{-2}^{4}(y^2+4y-\dfrac{y^3}{2})dy$ …………4′

$=[\dfrac{y^3}{3}+2y^2-\dfrac{y^4}{8}]_{-2}^{4}=18$ ……………………2′

8．利用三重积分求由 $z=\sqrt{5-x^2-y^2}$及$x^2+y^2=4z$所围成的立体的体积。

解：$V=\iiint_\Omega dv$

$=\iint_{D_{xy}}dxdy\int_{\frac{x^2+y^2}{4}}^{\sqrt{5-x^2-y^2}}dz$ ……………………2′

$=\iint_{D_{xy}}(\sqrt{5-x^2-y^2}-\dfrac{x^2+y^2}{4})d\sigma$

$=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^2(\sqrt{5-\rho^2}-\dfrac{\rho^2}{4})\rho d\rho$……………………2′

$=\dfrac{2}{3}\pi(5\sqrt{5}-4)$ ……………………2′

9. 验证在 xoy面内，$(3x^2y+8xy^2)dx+(x^3+8x^2y+12ye^y)dy$ 是某一函数 $u(x,y)$ 的全微分，并求出这样的一个 $u(x,y)$。

解：因 $\frac{\partial P}{\partial y}=3x^2+16xy=\frac{\partial Q}{\partial x}$

故所给表达式为某一函数 $u(x,y)$ 的全微分。……………………… $2'$

令 $u(x,y)=\int_{(0,0)}^{(x,y)}(3x^2y+8xy^2)dx+(x^3+8x^2y+12ye^y)dy$

$=\int_0^x 0dx+\int_0^y (x^3+8x^2y+12ye^y)dy$ ……………………… $2'$

$=x^3y+4x^2y^2+12ye^y-12e^y$ ……………………… $2'$

.

10．求 $\iint_\Sigma (2x+z)dydz+zdxdy$，其中 $\Sigma: z=x^2+y^2,(0\le z\le 1)$ 的上侧。.

解：添加曲面 Σ_1：$z=1$, 取下侧

$I=(\iint_{\Sigma+\Sigma_1}-\iint_{\Sigma_1})(2x+z)dydz+zdxdy$ …………… $2'$

$=-\iiint_\Omega 3dv+\iint_{D_{xy}}dxdy$

$=-3\int_0^1 dz\iint_{D_z}dxdy+\pi$ ……………………… $2'$

$=-\frac{3}{2}\pi+\pi=-\frac{\pi}{2}$ ……………………… $2'$

四、综合题（共 15 分）

1.（8 分）曲面 $z=13-x^2-y^2$将球面$x^2+y^2+z^2=25$分成三部分，求这三部分曲面面积之比。

解：交线方程为$\begin{cases} z=13-x^2-y^2 \\ x^2+y^2+z^2=25 \end{cases}$，即$\begin{cases} x^2+y^2=9 \\ z=4 \end{cases}$和$\begin{cases} x^2+y^2=16 \\ z=-3 \end{cases}$ ……………$2'$

记$\sum_1: z=\sqrt{25-x^2-y^2}, 4\le z\le 5$，在$xoy$面的投影区域$D_1: x^2+y^2\le 9$

$\Rightarrow \sum_1$的面积$=\iint_{\Sigma_1} dS=\iint_{D_1}\sqrt{1+{z_x}^2+{z_y}^2}\Big|_{z=\sqrt{25-x^2-y^2}}d\sigma$

$=\iint_{D_1}\dfrac{5}{\sqrt{25-x^2-y^2}}d\sigma=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^3\dfrac{5}{\sqrt{25-\rho^2}}\rho d\rho=10\pi$ ………………$3'$

记$\sum_2: z=-\sqrt{25-x^2-y^2}, -5\le z\le 3$，在$xoy$面的投影区域$D_2: x^2+y^2\le 16$

$\Rightarrow \sum_2$的面积$=\iint_{\Sigma_2} dS=\iint_{D_2}\dfrac{5}{\sqrt{25-x^2-y^2}}d\sigma$

$=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^4\dfrac{5}{\sqrt{25-\rho^2}}\rho d\rho=20\pi$

由此可得$\sum_3$的面积$=4\pi\cdot 5^2-10\pi-20\pi=70\pi$,故面积之比为$1:2:7$ …………$3'$

2.（7 分）设$a_1=2, a_{n+1}=\dfrac{1}{2}(a_n+\dfrac{1}{a_n}), (n=1,2,3\ldots\ldots)$，证明：级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\dfrac{a_n}{a_{n+1}}-1)$收敛。

解：易知$a_{n+1}\ge 1$，即$\{a_n\}$有下界;

$\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=\dfrac{1}{2}(1+\dfrac{1}{{a_n}^2})\le 1$ ，即$\{a_n\}$单减,故$\lim\limits_{n\to\infty}a_n$存在;………$3'$

因$0\le\dfrac{a_n}{a_{n+1}}-1\le a_n-a_{n+1}$，级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n-a_{n+1})$收敛，

由比较审敛法知,$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\dfrac{a_n}{a_{n+1}}-1)$ 也收敛。 ……………………$4'$

教研室主任__________ 出卷人 王 凡