本试卷适用范围 工学院本科二年级

南京农业大学试卷（2013.1.）

2012-2013 学年第 1 学期　课程类型：必修

试卷类型：A

课程 <u>**线性代数**</u>　班级 ______________ 学号_____________ 姓名____________ 成绩_____

说明：１．本试卷共 4 页．

　　　２．请将解答写在答题纸上，试卷自己保留．

一．选择题（每小题 3 分，共 24 分）

1.若 $a_{1i}a_{23}a_{35}a_{44}a_{5j}$ 是五阶行列式中带有正号的一项，则i, j 的值为（　　）

(A)　$i=1, j=3.$　　　(B)　$i=2, j=3.$

(C)　$i=1, j=2.$　　　(D)　$i=2, j=1.$

2.设 A 为四阶矩阵，且$|A|=2$，把 A 按列分块为 $A=(A_1, A_2, A_3, A_4)$，其中 $A_j\,(j=1,2,3,4)$ 是 A 的第 j 列，则行列式$|A_2, -A_1, A_3, A_4|$等于（　　）

(A)　$-2.$　　(B)　2.　　(C)　1.　　(D)　0.

3. 下列四个3×4矩阵中，是行最简形的为（　　）

(A)　$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$　　(B)　$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$

(C)　$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$　　(D)　$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$

4.向量组α_1，α_2，$\cdots$，α_s的秩为r，则（　　）

(A)　必定$r<s.$

(B) 向量组中任意小于r个向量的部分组线性无关.

(C) 向量组中任意r个向量线性无关.

(D) 向量组中任意$r+1$个向量(如果有的话)必定线性相关.

5. 设ξ_1, ξ_2, ξ_3是$Ax=0$的基础解系，则该方程组的基础解系还可以表成 ( )

(A) ξ_1, ξ_2, ξ_3的一个等价向量组.

(B) ξ_1, ξ_2, ξ_3的一个等秩向量组.

(C) ξ_1，$\xi_1+\xi_2$，$\xi_1+\xi_2+\xi_3$.

(D) $\xi_1-\xi_2$，$\xi_2-\xi_3$，$\xi_3-\xi_1$.

6.设$\alpha_1=(1,0,0)^T$, $\alpha_2=(1,1,0)^T$, $\alpha_3=(2,1,0)^T$，V是由$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$生成的向量空间，则V的维数为 ( )

(A) 2. (B) 3. (C) 1. (D) 0.

7.设λ_1, λ_2是A的两个不同的特征值，α与β为A的分别属于λ_1与λ_2的特征向量，则α与β是 ( )

(A) 线性相关. (B) 线性无关.

(C) 对应分量成比例. (D) 可能有零向量.

8.设矩阵$A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$，则$A$与$B$ ( )

(A) 合同，且相似. (B) 合同，但不相似.

(C) 不合同，但相似. (D) 既不合同，也不相似.

二．填空题（每小题 3 分，共 24 分）

1.设 $A=(1,2,3), B=(1,1,1)$，则 $\left(A^T B\right)^2=$ ______________.

2. 设矩阵 $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$，$E$ 为 2 阶单位矩阵，矩阵 B 满足 $BA=B+2E$，

则 $|B|=$ ________.

3. 设矩阵 $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$，则 $A^*=$ ________________.

4. 设矩阵 $A=\begin{pmatrix} k & 1 & 1 \\ 1 & k & 1 \\ 1 & 1 & k \end{pmatrix}$，且 $R(A)=2$，则 $k=$ ________.

5.设向量组 A：$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关，则常数 l,m 满足条件 ________ 时，

向量组 B：$l\alpha_2-\alpha_1, m\alpha_3-\alpha_2, \alpha_1-\alpha_3$ 也线性无关.

6. 设向量组 $\alpha_1=\begin{pmatrix} a \\ 2 \\ 10 \end{pmatrix}, \alpha_2=\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}, \alpha_3=\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$，又设 $\beta=\begin{pmatrix} 1 \\ b \\ c \end{pmatrix}$. 则 a,b,c

满足条件 __________________ 时，β 可由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表示，且表示唯一.

7.设 3 阶方阵 A 的特征值为 $1,-1,2$，则 $|-2A^{-1}+3A-2E|=$ ______.

8.已知二次型 $f\left(x_1,x_2\right)=a\left(x_1^2+x_2^2\right)+4x_1x_2$ 经正交变换 $x=Py$ 可化成标准形 $f=4y_1^2$，则 $a=$ ___________.

三.（本题 8 分）计算行列式：

$$D=\begin{vmatrix} 2 & -5 & 1 & 2 \\ -3 & 7 & -1 & 4 \\ 5 & -9 & 2 & 7 \\ 4 & -6 & 1 & 2 \end{vmatrix}.$$

四.（本题 8 分）设

$$A=\begin{pmatrix} 0 & a_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_2 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{n-1} \\ a_n & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}，其中 a_i \neq 0\left(i=1,2,\cdots,n\right)，求 A^{-1}.$$

五.（本题 8 分）设矩阵

$A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & 1 \\ 4 & -6 & 2 & -2 \end{pmatrix}$，求矩阵 A 的列向量组的最大无关组，并把不属于最大无关组的列向量用最大无关组线性表示.

六.（本题 8 分）设 4×5 矩阵 A 的秩为 3，5×2 矩阵 B 的秩为 2，且 $AB=0$，证明：若向量 α 是齐次线性方程组 $Ax=0$ 的解，则非齐次线性方程组 $By=\alpha$ 必有唯一解.

七.（本题 8 分）设 n 阶可逆矩阵 $A=\left(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n\right)$, α_i 为 n 维列向量 $\left(i=1,2,\cdots,n\right)$，$\beta$ 为 n 维非零列向量，且与 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{n-1}$ 均正交，证明：矩阵 $B=\left(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{n-1},\beta\right)$ 可逆.

八.（本题共 3 小题，依次为 2 分，8 分和 2 分，共 12 分）

设二次型 $f\left(x,y,z\right)=2x^2+3y^2+3z^2+4yz$，

1.写出二次型 f 的矩阵；

2.求一个正交变换化 f 为标准形；

3.问 $f\left(x,y,z\right)=1$ 是三维空间中的何种曲面？

出卷人：张新华

线性代数（A）答案及评分标准：

一．CBDD　CABB

二．（1）$6\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 2 & 2 & 2\\ 3 & 3 & 3\end{pmatrix}$　　（2） 1　　(3) $\begin{pmatrix}4 & -2\\ -3 & 1\end{pmatrix}$　　(4) -2

(5) $lm \neq 1$　　(6) $a \neq -4$ ，但 b, c 任意　　(7) 9　　(8) $a = 2$

三．-9

四． $\begin{pmatrix}0 & 0 & \cdots & 0 & \frac{1}{a_n}\\ \frac{1}{a_1} & 0 & \cdots & 0 & 0\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{a_{n-1}} & 0\end{pmatrix}$

五． a_1, a_2, a_4；　………………………..4 分

$a_3 = -a_1 - a_2$……………………..4 分

或 a_1, a_3, a_4；　$a_2 = -a_1 - a_3$.

六．AB=0$\Rightarrow$B 的列向量为方程组 Ax=0 的解，…………………….2 分
又 R(A)=3$\Rightarrow$Ax=0 的基础解系中向量个数=2……………………2 分
$\Rightarrow$B 的列向量组是方程组 Ax=0 的一个基础解系…...2 分
$\Rightarrow$$\alpha$ 必可由 B 的列向量组唯一地线性表示
$\Rightarrow$方程组 By=α 有唯一解……………………………..2 分

七．即证向量组α_1，$\alpha_2,\cdots$，$\alpha_{\text{n-1}}$，β线性无关.

令 $k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_{n-1}\alpha_{n-1}+k_n\beta=0,$…………………..2 分

上式两边左乘β^T，得：

$$k_1\beta^T\alpha_1+k_2\beta^T\alpha_2+\cdots+k_{n-1}\beta^T\alpha_{n-1}+k_n\beta^T\beta=0.$$

因$\beta^T\alpha_i=0,(i=1,2,\cdots,n-1)$，$\beta^T\beta\neq 0,$

所以 $k_n\beta^T\beta=0,$ 即 $k_n=0.$………………………………..2 分

从而 $k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_{n-1}\alpha_{n-1}=0.$

又因 A 可逆，故α_1，$\alpha_2,\cdots$，$\alpha_{\text{n-1}}$线性无关，……………….2 分

所以$k_1=k_2=\cdots=k_{n-1}=0.$

因此，α_1，$\alpha_2,\cdots$，$\alpha_{\text{n-1}}$，β线性无关………………………..2 分

八．（1）$\begin{pmatrix}2&0&0\\0&3&2\\0&2&3\end{pmatrix}$，……………………………..2 分

（2）$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{2}}\\0&\frac{1}{\sqrt{2}}&-\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix}$，…………4 分

$f=2x'^2+5y'^2+z'^2$，…………………..4 分

（3）椭球面………………………………………..2 分