本试卷适用范围
各专业一年级

# 南 京 农 业 大 学 试 题 (2013.7)

**2012 - 2013 学年第 II 学期　　课程类型：必修　　卷 类：A**

课程 高等数学　班级 ________　学号 ________　姓名 __________　成绩 ______________

一、单项选择题 （2 分×6＝12 分）

1．在空间解析几何中，方程$x^2-3y^2=4$表示（　　）.

A. 双曲线　　B. 单叶双曲面　　C. 双曲抛物面　　D. 双曲柱面

2．旋转曲面$x^2-y^2-z^2=1$的旋转轴是（　　）

A. $x$ 轴　　B. $y$ 轴　　C. $z$ 轴　　D. 不能确定

3．在点$P_0(x_0,y_0)$处，对函数$f(x,y)$，下述结论成立的是（　　）

A.若连续，则两个偏导数都存在；　　B.若两个偏导数都存在，则必连续；
C.若两个偏导数都不存在，则必不连续；　　D.虽然两个偏导数存在，但不一定连续.

4．在曲线$x=t,y=-t^2,z=t^3$的所有切线中，与平面$x+2y+z=4$平行的切线（　　）

A．只有 1 条　　B．只有 2 条　　C．至少有 3 条　　D．不存在

5．幂级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n2^n}(x+1)^n$的收敛半径 R= （　　）

A. $\frac{1}{2}$　　B. 1　　C. 2　　D. $\infty$

6．$\lim\limits_{n\to\infty}u_n=0$是级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$收敛的（　　）.

A. 充分条件　　B. 必要条件　　C. 充要条件　　D. 既非充分也非必要条件

二、填空题（2 分×6＝12 分）

1．设$\vec{a}=(0,3,4),\vec{b}=(1,1,-1)$，则$2\vec{a}\cdot\vec{b}=$ ____________

2．设$y=y(x)$，则微分方程$y''-3y'+2y=0$的通解为 ________________

3．设$z=f(x,\frac{x}{y})$，其中$f$对各变量具有连续的一阶偏导数，则$\frac{\partial z}{\partial y}=$ ____________

4．设曲线$L:(x-1)^2+(y-2)^2=9$，则$\oint_L(x^2+y^2-2x-4y)ds=$ ____________

5．设$L$为$\Delta ABC$的正向边界，其中$A(0,0),B(1,0),C(0,1)$，

则由 Green 公式知，$\oint_L \frac{y}{1+x^2}dx+(x+\arctan x)dy=$ ______

6．设函数 $f(x)$ 的周期为 2，在 $(-1,1]$ 上的定义为 $f(x)=\begin{cases}2 & -1<x\le 0\\ x^3 & 0<x\le 1\end{cases}$，则 $f(x)$ 的 Fourier 级数在 $x=1$ 处收敛于______

三、计算题（共 66 分）

1．（6 分）求曲面 $x^2+2y^2+3z^2=21$ 在点 $(-1,2,2)$ 的法线方程。

2．（6 分）证明：$u(x,y)=e^{-x}\cos y-e^{-y}\cos x$ 满足 Laplace 方程 $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0.$

3．（6 分）设 $u+e^u=xy$，求 $\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}.$

4．（8 分）求抛物面 $z=x^2+y^2$ 到平面 $x+y+z+1=0$ 的最短距离。

5．（8 分）求 $\iint_D (x^2+y^2-x)d\sigma,$ 其中 D 是由直线 $y=2, y=x$ 及 $y=2x$ 所围成的闭区域。

6．（8 分）求 $\iiint_\Omega (x+z)dv$，其中 $\Omega$ 是由锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 与球面 $z=\sqrt{1-x^2-y^2}$ 所围成的闭区域。

7．（8 分）证明表达式 $(2xy-y^4+3)dx+(x^2-4xy^3)dy$ 是某一函数 $u(x,y)$ 的全微分，并求出这样的一个 $u(x,y)$。

8．（8 分）求锥形漏斗 $z=\sqrt{x^2+y^2},(0\le z\le 1)$ 的质量，此漏斗的面密度为 $\mu=x^2+y^2$。

.

9．（8 分）求 $\iint_\Sigma ydydz+xdzdx+zdxdy$，其中 $\Sigma: z=1-x^2-y^2,(0\le z\le 1)$ 的上侧。.

四、综合题（共 10 分）

1．（6 分）设 $\Omega$ 是由曲面 $z=\ln\sqrt{x^2+y^2}$ 与平面 $z=0, z=1$ 所围成的立体，

求（1）$\Omega$ 的体积 V；　　（2）$\Omega$ 的表面积 A。

2．（4 分）设正项数列 $\{a_n\}$ 单调减少，且级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ 发散，试问级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{1+a_n})^n$ 是否收敛？并说明理由。

# 试卷(A)答案

一、DADBCB

二、1．－2　　2．$y=C_1e^x+C_2e^{2x}$　　3．$-\dfrac{x}{y^2}f_2'$

4．$24\pi$　　5．$\dfrac{1}{2}$　　6．$\dfrac{3}{2}$

三、1．解：$F(x,y,z)=x^2+2y^2+3z^2-21$

法向量$\vec{n}=(F_x,F_y,F_z)=(2x,4y,6z)\big|_{(-1,2,2)}=(-2,8,12)$

法线：$\dfrac{x+1}{-1}=\dfrac{y-2}{4}=\dfrac{z-2}{6}$

2．证明：$u_x=-e^{-x}\cos y+e^{-y}\sin x$，　$u_{xx}=e^{-x}\cos y+e^{-y}\cos x$

$u_y=-e^{-x}\sin y+e^{-y}\cos x$，　$u_{yy}=-e^{-x}\cos y-e^{-y}\cos x$

$\therefore \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0.$

3．解：方程两边分别对$x$和$y$求偏导，得$u_x+e^u u_x=y$，$u_x=\dfrac{y}{1+e^u}$

$u_y+e^u u_y=x$，$u_y=\dfrac{x}{1+e^u}$

$$u_{xy}=\frac{1+e^u-ye^u u_y}{(1+e^u)^2}=\frac{(1+e^u)^2-xye^u}{(1+e^u)^3}$$

4．解：$d^2=\dfrac{1}{3}(x+y+z+1)^2$

记：$L(x,y,z,\lambda)=\dfrac{1}{3}(x+y+z+1)^2+\lambda(x^2+y^2-z)$，令

$$L_x=\frac{2}{3}(x+y+z+1)+2\lambda x=0$$

$$L_y=\frac{2}{3}(x+y+z+1)+2\lambda y=0$$

$$L_z=\frac{2}{3}(x+y+z+1)-\lambda=0$$

$$L_\lambda=x^2+y^2-z=0$$

得$x=y=-\dfrac{1}{2},\ z=\dfrac{1}{2}$，于是$d_{\min}=\dfrac{\sqrt{3}}{6}$

5．解：$\iint_D (x^2+y^2-x)d\sigma=\int_0^2 dy\int_{\frac{y}{2}}^{y}(x^2+y^2-x)dx,=\int_0^2(\frac{29}{24}y^3-\frac{3}{8}y^2)dy=\frac{23}{6}$

6．解：$D_{xy}: x^2+y^2\le\frac{1}{2}$

$$I=\iiint_\Omega xdv+\iiint_\Omega zdv=0+\iint_{D_{xy}}dxdy\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{\sqrt{1-x^2-y^2}}zdz \qquad \text{（由对称性）}$$

$$=\iint_{D_{xy}}\frac{1}{2}(1-2x^2-2y^2)dxdy=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\sqrt{\frac{1}{2}}}(1-2\rho^2)\rho d\rho=\frac{\pi}{8}$$

7．解：$P(x,y)=2xy-y^4+3, Q(x,y)=x^2-4xy^3$，$P_y=2x-4y^3=Q_x$，

故 $(2xy-y^4+3)dx+(x^2-4xy^3)dy$ 是某一函数 $u(x,y)$ 的全微分

$$u(x,y)=\int_{(0,0)}^{(x,y)}(2xy-y^4+3)dx+(x^2-4xy^3)dy$$

$$=\int_0^x 3dx+\int_0^y(x^2-4xy^3)dy=3x+[x^2y-xy^4]_0^y=3x+x^2y-xy^4$$

8．解：$m=\iint_\Sigma(x^2+y^2)dS,\quad \Sigma: z=\sqrt{x^2+y^2}, D_{xy}: x^2+y^2\le 1$

$$dS=\sqrt{1+\frac{x^2}{x^2+y^2}+\frac{y^2}{x^2+y^2}}dxdy=\sqrt{2}dxdy$$

$$m=\iint_\Sigma(x^2+y^2)dS=\iint_{D_{xy}}(x^2+y^2)\sqrt{2}dxdy=\sqrt{2}\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1\rho^3d\rho=\frac{\sqrt{2}}{2}\pi$$

.

9．解：添加曲面 $\Sigma_1: z=0$，取下侧，由 Gauss 公式，

$$I=(\oiint_{\Sigma+\Sigma_1}-\iint_{\Sigma_1})ydydz+xdzdx+zdxdy=\iiint_\Omega dv-0=\int_0^1 dz\iint_{D_z}dxdy$$

$$=\int_0^1\pi(1-z)dz=\frac{\pi}{2}$$

或：$\iint_\Sigma ydydz+xdzdx+zdxdy=\iint_\Sigma(y\cdot 2x+x\cdot 2y+z)dxdy$

$$=\iint_{D_{xy}}(4xy+1-x^2-y^2)dxdy=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1(1-\rho^2)\rho d\rho=\frac{\pi}{2}$$

四、1．解：（1）. $V=\iiint_\Omega dv=\int_0^1 dz\iint\limits_{x^2+y^2\le e^{2z}}dxdy=\int_0^1\pi e^{2z}dz=\frac{\pi}{2}[e^{2z}]_0^1=\frac{\pi(e^2-1)}{2}$

（2）. $\Sigma: z=\ln\sqrt{x^2+y^2}$，$dS=\sqrt{1+\frac{1}{x^2+y^2}}dxdy$，$D_{xy}: 1\le x^2+y^2\le e^2$

$$A=\pi+\pi e^2+\iint_{\Sigma} dS$$

$$\iint_{\Sigma} dS=\iint_{D_{xy}}\sqrt{1+\frac{1}{x^2+y^2}}dxdy=\int_0^{2\pi} d\theta\int_1^e \sqrt{1+\rho^2}d\rho$$

$$\therefore A=\pi+\pi e^2+\int_0^{2\pi} d\theta\int_1^e \sqrt{1+\rho^2}d\rho$$

$$=\pi(e^2+1)+\pi[e\sqrt{1+e^2}+\ln(e+\sqrt{1+e^2})-\sqrt{2}-\ln(1+\sqrt{2})]$$

2．解：级数收敛。因正项数列$\{a_n\}$单调减少，故必有$\lim\limits_{n\to\infty} a_n=a,$且$a\geq 0;$

若$a=0,$则由 Leibniz 定理知$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$收敛，与条件矛盾，$\therefore a>0;$

因$a_n\geq a>0;$对于级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{1+a_n})^n$，有$\left|\frac{1}{1+a_n}\right|<\left|\frac{1}{1+a}\right|<1$，

所以由比较审敛法知级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{1+a_n})^n$收敛。