线性代数（A）答案及评分标准

一．DCDC　DBBD

二．(1) $\frac{n(n-1)}{2}$　　(2) $\begin{pmatrix} \frac{1}{6} & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$　　(3) 0

(4) $A-3E$　　(5) 1　　(6) $|A|=0$或$R(A)<m$

(7) 4　　(8) -3

三．14

四．对方程组的增广矩阵作初等行变换，得

$$B=(A,b)=\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 1 & \lambda \\ 1 & 1 & -2 & \lambda^2 \end{pmatrix} \overset{r}{\to} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & \lambda \\ 0 & -3 & 3 & 2\lambda\text{-}2 \\ 0 & 0 & 0 & (\lambda-1)(\lambda+2) \end{pmatrix}$$

……………………………………(2 分)

当λ=1或λ=-2时，$R(A)=R(B)=2$方程组有解. ……………………………………(2 分)

当λ=1时，同解方程组为$\begin{cases} x_1-x_3=1 \\ x_2-x_3=0. \end{cases}$

从而方程组的通解为$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}+c\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}(c\in R)$.　……………………………(3 分)

当λ=-2时，同解方程组为$\begin{cases} x_1-x_3=2 \\ x_2-x_3=2. \end{cases}$

从而方程组的通解为$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}+c\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}(c\in R)$.　……………………………(3 分)

五．　记$A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)$，则对$A$施行初等行变换得

$$A=\begin{pmatrix}1&1&0&0\\2&1&1&2\\5&3&2&2\end{pmatrix}\overset{r}{\to}\begin{pmatrix}1&0&1&0\\0&1&-1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix},$$

……………………………………(4 分)

所以向量组的秩为3,从而其最大无关组含3个向量,分别为$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4$,………(2 分)

且$\alpha_3=\alpha_1-\alpha_2$.　　　　　　　　　　　……………………………………(2 分)

六．设$B=\left(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n\right)$且$k_1\beta_1+k_2\beta_2+\cdots+k_n\beta_n=0$,…………………………(2 分)

而$k_1\beta_1+k_2\beta_2+\cdots+k_n\beta_n=\left(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n\right)\begin{pmatrix}k_1\\k_2\\\vdots\\k_n\end{pmatrix}=BK=0$,

在$BK=0$两端同时左乘矩阵A,得

$ABK=A0=0$,……………………………………………………………………(2 分)

又$AB=E$,

所以$ABK=EK=K=0$,

即$k_1=k_2=\cdots=k_n=0$.…………………………………………………………(2 分)

故$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$线性无关.………………………………………………………(2 分)

七．二次型的矩阵为$A=\begin{pmatrix}4&2&2\\2&4&-2\\2&-2&4\end{pmatrix}$　　　　……………………………(2 分)

由$\left|A-\lambda E\right|=\begin{vmatrix}4-\lambda&2&2\\2&4-\lambda&-2\\2&-2&4\end{vmatrix}=-\lambda\left(\lambda-6\right)^2$,求得$A$的特征值为$\lambda_1=\lambda_2=6,\lambda_3=0$.

……………………………………………………………………………………(2 分)

当$\lambda_1=\lambda_2=6$时,求得方程$\left(A-6E\right)x=0$的基础解系

$\xi_1=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix},\xi_2=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$,先正交化再单位化得$p_1=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix},p_2=\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}$.

……………………………………………………………………………(2 分)

当$\lambda_3=0$时,求得方程$(A-0E)x=0$的基础解系 $\xi_3=\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}$,单位化得$p_3=\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}$.

……………………………………………………………………………(2 分)

从而正交矩阵为

$$P=(p_1,p_2,p_3)=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{3}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}}\\ 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}}\end{pmatrix}.$$

于是有正交变换$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=P\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix}$,把二次型化成标准形

$$f(y_1,y_2,y_3)=6y_1^2+6y_2^2.$$ …………………………… (2 分)

八. 因为$A^2=A$,则 $A(A-E)=O$, …………………………(2 分)

从而 $R(A)+R(A-E)\le n$ …………………………(2 分)

另一方面, $E=A+E-A$,

故 $n=R(E)=R(A+E-A)\le R(A)+R(E-A)$ …………………………(2 分)

而 $R(A-E)=R(E-A)$,

所以 $R(A)+R(A-E)=n$ …………………………………………(2 分)