第 1 章 习题 A

1. 写出下列随机试验的样本空间

(1) 记录一个小班一次数学考试的平均分数(百分制记分);

(2) 同时掷两颗骰子，记录两颗骰子的点数之和;

(3) 10 只产品中有 3 只是次品，每次从其中取 1 只，取后不放回，直到 3 只次品都取出为止，记录抽取的次数;

(4) 生产的产品直到得到 5 件正品为止，记录生产产品的总件数;

(5) 测量一辆汽车通过某定点的速度;

(6) 在单位圆内任意取一点，记录它的坐标.

解 (1) $\Omega=\left\{\frac{0}{n},\frac{1}{n},...,\frac{100n}{n}\right\}$.

(2) $\Omega=\{2,3,...,11,12\}$.

(3) $\Omega=\{3,4,...,9,10\}$.

(4) $\Omega=\{5,6,...\}$.

(5) $\Omega=\{v\mid v>0\}$ (不考虑汽车运动方向).

$\Omega=\{(v\cos\theta,v\sin\theta)\mid v>0,0\le\theta<2\pi\}$ (考虑汽车的运动方向).

(6) $\Omega=\{(x,y)\mid x^2+y^2<1,x,y\in R\}$.

2. 一批产品中有合格品和废品，从中有放回地抽取 3 个产品，设 A_i 表示事件“第 i 次抽得废品”，试用 A_i 的运算表示下列各个事件:

(1) 第一次、第二次中至少有一次抽到废品; (2) 只有第一次抽到废品;
(3) 三次都抽到废品; (4) 至少有一次抽到合格品; (5) 只有两次抽到废品.

解 (1) $A_1\cup A_2$; (2) $A_1\overline{A}_2\overline{A}_3$; (3) $A_1A_2A_3$; (4) $\overline{A}_1\cup\overline{A}_2\cup\overline{A}_3$ 或 $\overline{A_1A_2A_3}$;

(5) $A_1A_2\overline{A}_3\cup A_1\overline{A}_2A_3\cup\overline{A}_1A_2A_3$.

3. 已知某设备连接三个管道，事件 A_1,A_2,A_3 分别表示三个管道接通，试用 A_i 的运算表示下列事件:

(1) 设备为发电机，管道用于输送冷水冷却发电机，事件 D 表示发电机正常工作.

(2) 设备为反应锅，管道用于输送三种不同的原料，事件 D 表示反应锅正常工作.

解 （1） $D = A_1 \cup A_2 \cup A_3$ ； （2） $D = A_1 \cap A_2 \cap A_3$.

4．对任意事件 A, B，下列命题（　）是正确的

（A）如果 A, B 互不相容，则 $\overline{A}, \overline{B}$ 也互不相容；（B）如果 A, B 相容，则 $\overline{A}, \overline{B}$ 也相容；

（C）如果 $\overline{A}, \overline{B}$ 互不相容，则 $A \cup B = \Omega$；　　（D）如果 $AB = A$，则 $A \cup B = A$.

解 如果 $\overline{A}, \overline{B}$ 互不相容，即 $\overline{A}\overline{B} = \varnothing$，由德摩根律可得 $A \cup B = \overline{\overline{A}} \cup \overline{\overline{B}} = \overline{\overline{A}\overline{B}} = \overline{\varnothing} = \Omega$，所以(C)是正确的.

5．一部五卷的文集按任意次序放上书架，则第一卷和第五卷都不在两端的概率为多少.

解 样本空间样本点总数为把这部五卷的书进行全排列的不同排列的个数 P_5^5，现从第二、三、四卷中取出两卷排再第一、第五两位置，再把剩下的一卷与第一、第五卷在第二至第四个位置进行全排列，即所求事件包含的样本点数为 $P_3^2 \cdot P_3^3$，因此，所求概率为：

$$\frac{P_3^2 P_3^3}{P_5^5} = \frac{3 \times 2 \times 3!}{5!} = \frac{3}{10}.$$

6．从一副扑克牌的 13 张黑桃中，一张接一张地有放回的抽取 3 张，求：(1) 没有同号的概率；(2) 有同号的概率；(3) 最多只有两张同号的概率.

解 （1） $p_1 = \frac{P_{13}^3}{13^3} = \frac{132}{169}$； （2） $p_2 = \frac{C_{13}^1 + C_{13}^1 C_3^1 \cdot C_{12}^1}{13^3} = \frac{37}{169}$；

（3） $p_3 = 1 - \frac{C_{13}^1}{13^3} = \frac{168}{169}$.

7. 设有 10 件产品，其中有 3 件次品,从中任意抽取 5 件，问其中恰有 2 件次品的概率是多少.

解 $p = \frac{C_3^2 C_7^3}{C_{10}^5} = \frac{5}{12}$.

8．一批产品共有 10 个正品 2 个次品，从中任取两次，每次取一个（取后不放回）．求：

（1）至少取到一个正品的概率；

（2）第二次取到次品的概率；

（3）恰有一次取到次品的概率.

解 （1） $p_1 = 1 - \frac{P_2^2}{P_{12}^2} = \frac{65}{66}$； （2） $p_2 = \frac{C_2^1 C_{11}^1}{P_{12}^2} = \frac{1}{6}$ ； （3） $p_3 = \frac{C_2^1 C_{10}^1 P_2^2}{P_{12}^2} = \frac{10}{33}$.

9．把甲、乙、丙 3 名学生依次随机地分到 5 间宿舍中的任意一间中去，假定每间宿舍

最多能住 8 人，试求：（1）这 3 名学生住在不同宿舍的概率；（2）这 3 名学生至少有 2 名住在同一宿舍中的概率.

解 （1） $p_1=\dfrac{C_5^3P_3^3}{5^3}=\dfrac{12}{25}$ ；　（2） $p_2=1-p_1=\dfrac{13}{25}$.

10．有 n 个人，每个人都以同样的概率被分配在 $N(n\le N)$ 间房中的每一间中，求下列事件的概率

（1） A：某指定 n 间房中各有 1 人；

（2） B：恰有 n 间房，其中各有 1 人；

（3） C：某指定房间中恰有 $m(m\le n)$ 人.

解 （1） $P(A)=\dfrac{n!}{N^n}$；（2） $P(B)=\dfrac{n!\cdot C_N^n}{N^n}=\dfrac{N!}{N^n(N-n)!}$；

（3） $P(C)=\dfrac{C_n^m(N-1)^{n-m}}{N^n}=C_n^m(\dfrac{1}{N})^m(\dfrac{N-1}{N})^{n-m}$.

11．某人有 5 把钥匙，但忘了开房门的是哪一把，逐把试开，问：

（1）恰好第三次打开房门锁的概率是多少；

（2）三次内打开的概率是多少；

（3）如 5 把内有 2 把房门钥匙，三次内打开的概率是多少？

解 （1） $p_1=\dfrac{4!}{5!}=\dfrac{1}{5}$（考虑 5 钥匙进行全排列，现开门钥匙排第 3 位置）；

（2）由第一问的求解方法可知，恰好第一、二、三次打开房门锁的概率都是 $\dfrac{1}{5}$，因此三次内打开的概率为 $p_2=\dfrac{3}{5}$ ；

（3） $p_3=1-\dfrac{P_3^3}{P_5^3}=\dfrac{9}{10}$.

12．两人约定某日晚 7 点至 8 点在某地会面，试求一人要等另一人半小时以上的概率.

解 以晚 7 点为时间计算起点，设 x,y 分别表示这两人到达约会地点的时刻（单位：小时），则样本空间为 $\Omega=\{(x,y),0\le x,y\le 1\}$，要求概率应用的事件为 $A=\{(x,y),|x-y|\ge 0.5\}$，

因此，所求概率为 $P(A)=\dfrac{m(A)}{m(\Omega)}=\dfrac{\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}}{1\times 1}=\dfrac{1}{4}$.

13．甲、乙两艘轮船驶向一个不能同时停泊两艘轮船的码头，它们在一昼夜内到达的时刻是相等的，如果甲船的停泊时间为 1 小时，乙船的停泊时间为 2 小时，求它们中的任何一艘都不需要等候码头空出的概率.

解 x,y 分别表示甲、乙两艘轮船到达艘轮船的码头的时刻（单位：小时），则样本空间为

$\Omega=\{(x,y),0\le x,y\le 24\}$，要求概率应用的事件为 $A=\{(x,y),y-x>1或x-y>2\}$，因此，所求概率为 $P(A)=\dfrac{m(A)}{m(\Omega)}=\dfrac{\frac{1}{2}\times 23^2+\frac{1}{2}\times 22^2}{24^2}=0.8793$.

14．掷两颗骰子，记 $A=$“掷出的点数之和大于 9”.

(1) 设 $B=$“第一颗骰子出现 5 点”，求 $P(B\mid A)$；

(2) 设 $C=$“至少有一颗骰子出现 5 点”，求 $P(A\mid C)$.

解 (1) $P(B\mid A)=\dfrac{P(AB)}{P(A)}=\dfrac{\frac{2}{36}}{\frac{6}{36}}=\dfrac{1}{3}$ ；

(2) $P(A\mid C)=\dfrac{P(AC)}{P(C)}=\dfrac{\frac{3}{36}}{\frac{11}{36}}=\dfrac{3}{11}$.

15.（1）设 A,B,C 是三个事件，已知 $P(A)=P(B)=P(C)=0.3$，$P(AB)=0.2$，$P(BC)=P(CA)=0$. 试求 A,B,C 中至少有一个发生的概率与 A,B,C 全不发生的概率.

（2）已知 $P(A)=1/4$，$P(B|A)=1/3$，$P(A|B)=1/2$，求 $P(A\cup B)$.

解 (1) 由于 $ABC\subset BC$，由概率的非负性、单调性和题设条件有 $0\le P(ABC)\le P(BC)=0$，因此可得 $P(ABC)=0$，再由概率的广义可加性可得 A,B,C 中至少有一个发生的概率为

$$P(A\cup B\cup C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(AC)-P(BC)+P(ABC)$$

$$=0.3+0.3+0.3-0.2-0-0+0=0.7\ ;$$

A,B,C 全不发生的概率为

$$P(\overline{A}\overline{B}\overline{C})=P(\overline{A\cup B\cup C})=1-P(A\cup B\cup C)=1-0.7=0.3\ ;$$

(2) 由乘法公式得 $P(AB)=P(A)P(B\mid A)=\dfrac{1}{4}\times\dfrac{1}{3}=\dfrac{1}{12}$，

由条件概率公式变形可得 $P(B)=\dfrac{P(AB)}{P(A\mid B)}=\dfrac{1/12}{1/2}=\dfrac{1}{6}$，

由概率的广义可加性可得

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)=\frac{1}{4}+\frac{1}{6}-\frac{1}{12}=\frac{1}{3}.$$

16．从一批次品率为 10%的 100 件产品中，依次不放回地抽取两件产品，试求：

（1）“两次均取得正品”的概率；

（2）“第二次才取得正品”的概率；

（3）“在已知第一次取得正品的条件下，第二次又取得正品”的概率；

（4）若题目改为不放回地接连取出三个产品，求“第三次才取得正品”的概率.

解 用 A_i 表示第 i 次取得正品(i=1, 2, 3)

(1) $P(A_1A_2)=\dfrac{C_{90}^2}{C_{100}^2}=\dfrac{89}{110}$ ；

(2) $P(\bar{A}_1A_2)=P(\bar{A}_1)P(A_2\mid\bar{A}_1)=\dfrac{10}{100}\times\dfrac{90}{99}=\dfrac{1}{11}$ ；

(3) $P(A_2\mid A_1)=\dfrac{89}{99}$；

(4) $P(\bar{A}_1\bar{A}_2A_3)=P(\bar{A}_1)P(\bar{A}_2\mid\bar{A}_1)P(A_3\mid\bar{A}_1\bar{A}_2)=\dfrac{10}{100}\times\dfrac{9}{99}\times\dfrac{90}{98}=\dfrac{9}{1078}$.

17．已知某种动物的生命超过 40 年的概率为 0.8，而超过 50 年的概率为 0.6，现有一只这种动物活了 40 年，则这只动物在 10 年内死亡的概率是多少？

解 以 A 表示该动物生命超过 40 年，B 表示该动物生命超过 50 年，则 $B\subset A$, 因此现有一只这种动物活了 40 年，则这只动物在 10 年内死亡的概率为

$$P(\bar{B}\mid A)=\frac{P(A\bar{B})}{P(A)}=\frac{P(A)-P(AB)}{P(A)}=\frac{0.8-0.6}{0.8}=0.25\ .$$

18．一个学生接连参加同一课程的两次考试. 第一次考试及格的概率为 p , 若第一次及格则第二次及格的概率为 p ，若第一次不及格则第二次及格的概率为 $\dfrac{p}{2}$.（1）若至少有一次及格则他能取得某种资格，求他取得该资格的概率；（2）若已知他第二次已经及格，求他第一次及格的概率.

解 设 A_1, A_2 分别表示学生在第一、第二次考试及格，B 表示学生取得某种资格，

（1）由题意可知 $B=A_1\cup A_2$ ，则某学生取得该资格的概率为

$$P(B)=P(A_1\cup A_2)=P(A_1\cup\bar{A}_1A_2)=P(A_1)+P(\bar{A}_1A_2)=P(A_1)+P(\bar{A}_1)P(A_2\mid\bar{A}_1)$$

$$=p+(1-p)\frac{p}{2}=\frac{p(3-p)}{2}\ ;$$

（2）$P(A_1\mid A_2)=\dfrac{P(A_1A_2)}{P(A_2)}=\dfrac{P(A_1)P(A_2\mid A_1)}{P(A_1)P(A_2\mid A_1)+P(\bar{A}_1)P(A_2\mid\bar{A}_1)}=\dfrac{p\cdot p}{p\cdot p+(1-p)\cdot\dfrac{p}{2}}=\dfrac{2p}{p+1}$.

19．玻璃杯成箱出售，每箱 20 只，假设各箱含 0, 1，2 只残次品的概率相应为 0.8，0.1 和 0.1，一位顾客欲购一箱玻璃杯，在购买时，售货员随意取一箱，而顾客开箱随机察看 4 只，若无残次品，则买下，否则退回，试求（1）顾客买下该箱的概率；（2）在顾客买下的

一箱中，确实没有残次品的概率.

解 设 B_i={玻璃箱中恰有 i 件残次品}(i=0,1,2)，A={顾客买下所观看的一箱玻璃}

由题设条件知　　$P(B_0)=0.8$，$P(B_1)=0.1$，$P(B_2)=0.1$

$$P(A|B_0)=1,P(A|B_1)=\frac{C_{19}^4}{C_{20}^4}=\frac{4}{5},P(A|B_2)=\frac{C_{18}^4}{C_{20}^4}=\frac{12}{19}$$

（1）由全概率公式有

$$P(A)=\sum_{i=0}^{2}P(B_i)P(A|B_i)=0.8+0.1\times\frac{4}{5}+0.1\times\frac{12}{19}\approx 0.94$$

（2）由条件概率和乘法公式得

$$P(B_0|A)=\frac{P(B_0)P(A|B_0)}{P(A)}\approx\frac{0.8}{0.94}\approx 0.85$$

20．步枪 20 支,其中 16 支经过校正,射击命中概率为 0.9,4 支未经过校正,射击命中概率为 0.7.现从 20 支枪中任取一支射击,结果命中目标,求此支步枪是经过校正的概率是多少？

解

解 A_1=“所取一支枪是经过校正的”，A_2=“所取一支枪是未经过校正的”,B=“射击命中目标”，依题意得：

$$P\left(B\middle|A_1\right)=0.9，P\left(B\middle|A_2\right)=0.7，P\left(A_1\right)=\frac{16}{20}=0.8，P\left(A_2\right)=0.2$$

由全概率公式得

$$P\left(B\right)=\sum_{i=1}^{2}P\left(A_i\right)P\left(B\middle|A_i\right)=0.8\times 0.9+0.2\times 0.7=0.86$$

由贝叶斯公式得

$$P(A_1|B)=\frac{P(A_1B)}{P(B)}=\frac{P(A_1)P(B|A_1)}{P(B)}=\frac{0.8\times 0.9}{0.86}=\frac{36}{43}.$$

21．设人群中男人是色盲的概率为 5%，而女人为色盲的概率是 0.25%．今从人群中任选一人，且发现这人是色盲，求此人是女性的概率.

解 以 A 选出的为男人，B 表示选出的人是色盲，则 $P(A)=P(\overline{A})=0.5$，$P(B|A)=0.05$，

$P(B|\overline{A})=0.0025$，由贝叶斯公式可得，所求概率为

$$P(\overline{A}|B)=\frac{P(\overline{A})P(B|\overline{A})}{P(\overline{A})P(B|\overline{A})+P(A)P(B|A)}=\frac{0.5\times 0.0025}{0.5\times 0.0025+0.5\times 0.05}\approx 0.0476\ .$$

22．设甲袋中有 5 个苹果，其中有 2 个是红富士，3 个是红元帅，乙袋中有 4 个苹果，其中 3 个是红富士，1 个是红元帅，丙袋中有 3 个苹果，其中 1 个是红富士，2 个是红元帅，

现从甲袋中任取一个苹果放入乙袋中，然后从乙袋中任取一个苹果，求

(1)从乙袋中取出的苹果是红元帅的概率；

(2)将乙袋中取出的苹果放入丙袋，然后从丙袋中任取一个苹果发现是红元帅，从乙袋中取出的苹果是红元帅的概率.

解 以 A 表示从甲袋中取出的苹果为红元帅，B 表示从乙袋取出的苹果为红元帅，C 表示从丙袋取出的苹果为红元帅，

（1）由全概率公式可得

$$P(B)=P(A)P(B\mid A)+P(\bar{A})P(B\mid \bar{A})=0.6\times 0.4+0.4\times 0.2=0.32\text{ ；}$$

（2）由贝叶斯公式可得

$$P(B\mid C)=\frac{P(B)P(C\mid B)}{P(B)P(C\mid B)+P(\bar{B})P(C\mid \bar{B})}=\frac{0.32\times 0.75}{0.32\times 0.75+0.68\times 0.5}=\frac{12}{29}.$$

23．10 名篮球运动员独立地投篮，每个运动员投篮的命中率都是 80％．他们各投一次，试求：(1) 恰有 4 次命中的概率；(2) 至少有 4 次命中的概率；(3) 至多有 4 次命中的概率.

解 （1） $P_{10}(4)=\mathrm{C}_{10}^{4}\times 0.8^{4}\times 0.2^{6}=0.0055$ ；

（2） $\sum_{i=4}^{10}P_{10}(i)=\sum_{i=4}^{10}C_{10}^{i}\times 0.8^{i}\times 0.2^{10-i}=\ 0.9991$ ；

（3） $\sum_{i=0}^{4}P_{10}(i)=\sum_{i=0}^{4}C_{10}^{i}\times 0.8^{i}\times 0.2^{10-i}=\ 0.0064$.

24．设某种型号的高射炮，每一门炮发射一发子弹而击中飞机的概率为 0.5,问至少需要几门这种高射炮同时发射（每炮只射一发）才能以 99%的把握击中来犯的一架敌机？

解 设至少需要 n 门这种高射炮同时发射（每炮只射一发）才能以 99%的把握击中来犯的一架敌机,即

$$1-P_n(0)=1-0.5^n\geq 0.99\Leftrightarrow 0.5^n\leq 0.01\Leftrightarrow(-\lg 2)n\leq -2\text{ ，}$$

由此可得 $n\geq\dfrac{2}{\lg 2}=6.644$，所以至少需要 7 门这种高射炮同时发射（每炮只射一发）才能以 99%的把握击中来犯的一架敌机.

25．设 A,B 是任意两个事件，其中 A 的概率不等于 0 和 1，证明：

$P(B|A)=P(B|\overline{A})$ 是事件 A 与 B 独立的充分必要条件.

证明　$P(B|A)=P(B|\overline{A}) \Leftrightarrow \dfrac{P(AB)}{P(A)}=\dfrac{P(\overline{A}B)}{P(\overline{A})}=\dfrac{P(B)-P(AB)}{1-P(A)}$

$$\Leftrightarrow P(AB)-P(A)P(AB)=P(A)P(B)-P(A)P(AB) \Leftrightarrow P(AB)=P(A)P(B)$$

即 $P(B|A)=P(B|\overline{A})$ 的充分必要条件是事件 A 与 B 独立.

第一章　习题 B

1. 把 3 棵枫树、4 棵橡树和 5 棵白桦树栽成一行，12 棵的排序是随机的. 每一种排列都是等可能的，求没有两棵白桦树相邻的概率.

解 所有排列总数可如下考虑：从 12 个位置任选 3 个放枫树有 C_{12}^3 种方法，从余下 9 个位置选 4 个放橡树有 C_9^4 种方法，余下的放白桦树.因此共有 $C_{12}^3 \cdot C_9^4$ 种方法.

“白桦树不相邻”事件数：可先放好 4 棵橡树、3 棵枫树共有 C_7^3 种方法. 然后在它们的间隔位置(中间 6 个加上前后各 1 个)，任取 5 个位置放置白桦树共有 C_8^5 种方法.

因此所求事件的概率为 $P=\dfrac{C_7^3 \cdot C_8^5}{C_{12}^3 \cdot C_9^4}=\dfrac{7}{99}$.

2. 某大学同窗好友 7 人，临毕业前随机地站成一行照像以作毕业留念，试求以下事件的概率.(1）甲站在中间；(2)甲乙两人不站在两端；(3）甲乙丙三人相邻；（4）甲乙丙三人不相邻；(5)甲乙两人之间有两人；(6）甲乙两人相邻但与丙不相邻.

解 样本空间的总点数为 7！　位置排法

(1)　$p_1=\dfrac{1\times 6!}{7!}=\dfrac{1}{7}$　甲站中间仅有 1 种站法，　而其它人随意站有 6！种站法.

(2)　$p_2=\dfrac{2C_5^2\times 5!}{7!}=\dfrac{10}{21}$　从甲乙以外的 5 人中任选 2 人站两端有 $2C_5^2$ 种站法，其余 5 人随意站有 5！种站法.

(3)　$p_3=\dfrac{5!\times 3!}{7!}=\dfrac{1}{7}$　把必须相邻的 3 人捆绑成 1 人与剩下 4 人随意站有 5！种站法，捆绑的 3 人还有 3！种站法。常称此法为捆绑法.

(4)　$p_4=\dfrac{4!\times C_5^3\times 3!}{7!}=\dfrac{2}{7}$　把不能相邻的人比作○，其余人比作｜，先随意排｜, 在两｜之间的空挡中插入○, 这样就保证了○不能相邻. 本问题中有 3 个○, 4 个｜， 随意排｜有 4！

种方法，4 个丨之间有 5 个空挡，在 5 个空挡中插入○，有 $C_5^3 3!$ 种方法. 由乘法原理即得到 $4!C_5^3 3!$. 此方法称为插入空挡法.

（5） $p_5=\dfrac{C_5^2\times 2\times 2\times 4!}{7!}=\dfrac{4}{21}$　　从甲乙以外的 5 人中任选 2 人夹在甲乙之间，再将连甲乙在内的这 4 人捆绑成 1 人，有 $C_5^2\times 2\times 2$ 种方法, 接着与另外的 3 人随意排列，共有 4! 种方法，故共有 $C_5^2\times 2\times 2\times 4!$ 种站法.

（6） $p_6=\dfrac{C_5^2\times 2\times 2\times 4!}{7!}$　　先把甲乙两人捆绑成 1 人，与丙一起算作两个○，剩下 4 人当作 4 条丨，由 4) 得到 $C_5^2\times 2\times 2$ 种方法，故共有 $C_5^2\times 2\times 2\times 4!$ 种站法.

3. 在（0，1）区间内任取两个随机数 x,y, 求两数之积小于 1/4 的概率.

解　这显然是几何概率，可把两数写成二维点（x,y）则它与平面内区域 Ω $=(0,1)\times(0,1)$ 中点一一对应. 事件 A 表示两数的乘积小于 $\dfrac{1}{4}$ ，则它与平面内区域 $G_A=\{(x,y):0<x<1,0<y<1,xy<\dfrac{1}{4}\}$ 一一对应，所求概率为平面区域 G_A 的面积与 Ω 的面积之比，故

$$p=\frac{S(G_A)}{S(\Omega)}=\frac{1}{4}+\int_{\frac{1}{4}}^{1}\frac{1}{4x}dx\quad=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\ln x\Big|_{\frac{1}{4}}^{1}=\frac{1}{4}(1+\ln 4)\,.$$

4. 证明：对任意三个随机事件 A,B,C，有 $P(AB)+P(AC)-P(BC)\le P(A)$.

证明： $P(A)\ge P(A(B\cup C))=P(AB\cup AC)$

$$=P(AB)+P(AC)-P(ABC)\ge P(AB)+P(AC)-P(BC).$$

5. 设 A，B，C 为三个随机事件，证明：$P(AB)+P(AC)+P(BC)\ge P(A)+P(B)+P(C)-1$.

6. 设 A,B,C 为三个随机事件,若 $P(A)=P(B)=P(C)=1/2$，且 $P(ABC)=P(\overline{A}\overline{B}\overline{C})$，

证明：$2P(ABC)=P(AB)+P(AC)+P(BC)-1/2$.

证明：由于 $P(A\cup B\cup C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(AC)-P(BC)+P(ABC)$

即　$1-P(\overline{A}\overline{B}\overline{C})=P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(AC)-P(BC)+P(ABC)$

得$1+P(AB)+P(AC)+P(BC)-P(A)-P(B)-P(C)=P(\overline{A}\overline{B}\overline{C})+P(ABC)$

又由已知条件 $P(A)=P(B)=P(C)=\dfrac{1}{2}$，且 $P(ABC)=P(\overline{A}\overline{B}\overline{C})$ 得

$2P(ABC)=1+P(AB)+P(AC)+P(BC)-\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2}=P(AB)+P(AC)+P(BC)-\dfrac{1}{2}.$

7. 设 A,B,C 为三个随机事件,若 $P(A)=a,P(B)=2a,\ P(C)=3a,$ 且

$P(AB)=P(AC)=P(BC)=b$. 证明：$a\le 1/4,b\le 1/4$.

证明：由于$1\ge P(B\bigcup C)=P(B)+P(C)-P(BC)=2a+3a-P(AB)=5a-P(AB)$

$b=P(AB)\le P(A)=a$ ，所以

$1\ge 5a-a=4a\Rightarrow a\le\dfrac{1}{4}$，又由上面的证明知$b\le a,故b\le\dfrac{1}{4}$.

8. 某人写了 n 张信笺与 n 个信封，将信笺随便乱装入信封内（每个信封装一张信笺），求至少有一信匹配的概率是多少.

解 令 A={没有一封信插对信封}，A_i={第 i 封信插对信封}(i=1,2,⋯，n)，则 $\overline{A}=\bigcup\limits_{i=1}^{n}A_i.$，我们先求出 P($\overline{A}$),由 n 个事件的加法定理

$$P(\overline{A})=P(\bigcup_{i=1}^{n}A_i)$$
$$=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)-\sum_{1\le i<j\le n}P(A_iA_j)+\sum_{1\le i<j<k\le n}P(A_iA_jA_k)-\cdots+(-1)^{n-1}P(A_1A_2\cdots A_n).$$

易知，n 封信插入 n 只不同地址的信封，共有 n!种插法. 而有 k 封信插对信封意味着这 k 封信插入固定的 k 只信封后，其他 n-k 封信可随意插入剩下的 n-k 只信封中，共有(n-k)!种插法。故

$$P(A_{i1}A_{i2}\cdots A_{ik})=\frac{(n-k)!}{n!},$$

而和式 $\sum\limits_{1\le i_1<i_2<\cdots<i_k\le n}P(A_{i_1}A_{i_2}\cdots A_{i_k})中共有C_n^k=\dfrac{n!}{k!(n-k)!}$项，故

$$\sum_{1\le i_1<i_2<\cdots<i_k\le n}P(A_{i_1}A_{i_2}\cdots A_{i_k})=C_n^k\frac{(n-k)!}{n!}=\frac{1}{k!},$$

则 $\quad P(\overline{A})=1-\dfrac{1}{2!}+\dfrac{1}{3!}-\cdots+(-1)^{n-1}\cdot\dfrac{1}{n!}$

所以　$P(A)=1-P(\overline{A})=\dfrac{1}{2!}-\dfrac{1}{3!}+\cdots+(-1)^{n}\cdot\dfrac{1}{n!}$

9. 某厂生产的钢琴中有 70％可以直接出厂，剩下的钢琴经调试后，其中 80％可以出厂，20％被定为不合格品不能出厂．现该厂生产了 $n(\geqslant 2)$ 架钢琴，假定各架钢琴的质量是相互独立的，试求：(1) 任意一架钢琴能出厂的概率；(2) 恰有两架钢琴不能出厂的概率；(3) 全部钢琴都能出厂的概率.

解　用 A 表示生产的某钢琴能直接出厂，B 表示生产的某钢琴最终能出厂，

（1）$p=P(B)=P(A\cup B\overline{A})=P(A)+P(B\overline{A})=P(A)+P(\overline{A})P(B\mid\overline{A})=0.7+0.3\times 0.8=0.94$；

（2）$P_n(n-2)=C_n^2\times 0.94^{n-2}\times 0.06^2$；

（3）$P_n(n)=0.94^n$.

10. 已知 $0<P(B)<1$，$P[(A_1\cup A_2)\mid B]=P(A_1\mid B)+P(A_2\mid B)$，则下列选项成立的是（　）

(A) $P[(A_1\cup A_2)\mid\overline{B}]=P(A_1\mid\overline{B})+P(A_2\mid\overline{B})$；(B) $P(A_1B\cup A_2B)=P(A_1B)+P(A_2B)$；

(C) $P(A_1\cup A_2)=P(A_1\mid B)+P(A_2\mid B)$；　　(D) $P(B)=P(B\mid A_1)P(A_1)+P(B\mid A_2)P(A_2)$.

解 $P[(A_1\cup A_2)|B]=P(A_1|B)+P(A_2|B)\Leftrightarrow\dfrac{P(A_1B\cup A_2B)}{P(B)}=\dfrac{P(A_1B)}{P(B)}+\dfrac{P(A_2B)}{P(B)}$

$\Leftrightarrow P(A_1B\cup A_2B)=P(A_1B)+P(A_2B)$　故本题应选 B.

11. 若 $P(A\mid B)>P(A\mid\overline{B})$，证明：$P(B\mid A)>P(B\mid\overline{A})$.

证明　$P(A\mid B)>P(A\mid\overline{B})\Rightarrow\dfrac{P(AB)}{P(B)}>\dfrac{P(A\overline{B})}{P(\overline{B})}=\dfrac{P(A)-P(AB)}{1-P(B)}\Rightarrow P(AB)>P(A)P(B)$

$\Rightarrow P(AB)-P(A)P(AB)>P(A)P(B)-P(A)P(AB)\Leftrightarrow P(AB)[1-P(A)]>P(A)[P(B)-P(AB]$

$\Rightarrow\dfrac{P(AB)}{P(A)}>\dfrac{P(B)-P(AB)}{1-P(A)}=\dfrac{P(B\overline{A}}{P(\overline{A})})\Leftrightarrow P(B\mid A)>P(B\mid\overline{A})$.

12. 设根据以往的记录的数据分析，某船只运输的某种物品损坏的情况共有三种：损坏 2%（这一事件记为 A_1），损坏 10%（事件 A_2），损坏 90%（事件 A_3），且已知 $P(A_1)=0.8$，

$P(A_2)=0.15$，$P(A_3)=0.05$. 现从已被运输的物品中随机的取 3 件，发现 3 件都是好的（这一事件记为 B）. 试求 $P(A_1|B), P(A_2|B), P(A_3|B)$（这里设物品件数很多，取出一件后不影响取后一件是否为好品的概率）.

解 $P(A_1|B)=\dfrac{P(A_1)P(B|A_1)}{\sum\limits_{i=1}^{3}P(A_i)P(B|A_i)}=\dfrac{0.8\times0.98^3}{0.8\times0.98^3+0.15\times0.9^3+0.05\times0.1^3}=0.8731$；

$$P(A_2|B)=\frac{P(A_2)P(B|A_2)}{\sum\limits_{i=1}^{3}P(A_i)P(B|A_i)}=\frac{0.15\times0.9^3}{0.8\times0.98^3+0.15\times0.9^3+0.05\times0.1^3}=0.1268；$$

$$P(A_3|B)=\frac{P(A_3)P(B|A_3)}{\sum\limits_{i=1}^{3}P(A_i)P(B|A_i)}=\frac{0.05\times0.1^3}{0.8\times0.98^3+0.15\times0.9^3+0.05\times0.1^3}=0.0001.$$

13. 一枚深水炸弹击沉、击伤和击不中一艘潜水艇的概率分别为 $1/3, 1/2$ 和 $1/6$. 设击伤该潜水艇两次也使该潜水艇沉没，求用 4 枚深水炸弹击沉该潜水艇的概率.

解 $p=1-\dfrac{1}{6^4}-C_4^3\times\dfrac{1}{6^3}\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{1283}{1296}$.

14. 如果一危险情况 C 发生时，一电路闭合并发出警报，我们可以借用两个或多个开关并联以改善可靠性. 在 C 发生时这些开关每一个都应闭合，且若至少一个开关闭合了，警报就发出. 如果两个这样的开关并联连接，它们每一个具有 0.96 的可靠性（即在情况 C 发生时闭合的概率），问这时系统的可靠性（即电路闭合的概率）是多少？如果需要有一个可靠性至少为 0.9999 的系统，则至少需要用多少只开关并联？设各开关闭合与否相互独立.

解 $p=1-0.04^2=0.9984$，

由 $1-0.04^n\geq0.9999\Rightarrow0.04^n\leq0.0001\Rightarrow n(2\lg2-2)\leq-4\Rightarrow n\geq\dfrac{4}{2-2\lg2}\approx2.8614$，

取 $n=3$.

15. 设 A,B 是任意两个事件，其中 $0<P(A)<1, 0<P(B)<1$，证明：若 $P(B|A)+P(\overline{B}|\overline{A})=1$，则事件 A 与 B 独立.

证明 $P(B|A)+P(\overline{B}|\overline{A})=1\Rightarrow P(B|A)=1-P(\overline{B}|\overline{A})=P(B|\overline{A})$

$$\Rightarrow \frac{P(AB)}{P(A)} = \frac{P(\overline{A}B)}{P(\overline{A})} = \frac{P(B)-P(AB)}{1-P(A)}$$

$$\Rightarrow P(AB)-P(A)P(AB) = P(A)P(B)-P(A)P(AB)$$

$\Rightarrow P(AB) = P(A)P(B)$　即事件 A 与 B 独立.

16. 设 $P(A)>0$，试证：$P(B|A) \geq 1-\dfrac{P(\overline{B})}{P(A)}$.

证明　$P(B|A) = \dfrac{P(AB)}{P(A)} = \dfrac{P(A)-P(A\overline{B})}{P(A)} \geq \dfrac{P(A)-P(\overline{B})}{P(A)} = 1-\dfrac{P(\overline{B})}{P(A)}$.