习题 *A*

1．设 $x_1,\cdots x_n$ 是来自正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$ 的样本值， μ 已知，求 σ^2 的极大似然估计量.

解　**σ^2 的似然函数为** $L(\sigma^2)=\prod_{i=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\mathrm{e}^{-\frac{(x_i-\mu)^2}{2\sigma^2}}=\left(\frac{1}{2\pi\sigma^2}\right)^{\frac{n}{2}}\mathrm{e}^{-\sum_{i=1}^{n}\frac{(x_i-\mu)^2}{2\sigma^2}}$

$\therefore \ln L(\sigma^2)=\frac{n}{2}\ln(2\pi)+\frac{n}{2}\ln\sigma^2-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2$

令 $\frac{d\ln L(\sigma^2)}{d\sigma^2}=\frac{n}{2\sigma^2}-\frac{1}{2}\frac{1}{\left(\sigma^2\right)^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2=0$, 得 $\hat{\sigma}^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2$

故 σ^2 的最大似然估计量为 $\hat{\sigma}^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2$

2．设 $x_1,\cdots x_n$ 是来自正态分布 $N(\mu,1)$ 的样本值，求 μ 的极大似然估计量.

解　**μ 的似然函数为** $L(\mu)=\prod_{i=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{(x_i-\mu)^2}{2}}=\left(\frac{1}{2\pi}\right)^{\frac{n}{2}}\mathrm{e}^{-\sum_{i=1}^{n}\frac{(x_i-\mu)^2}{2}}$

$\therefore \ln L(\mu)=\frac{n}{2}\ln(2\pi)-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2$

令 $\frac{d\ln L(\mu)}{d\mu}=\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)=0$, 得 $\hat{\mu}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i=\overline{x}$

故 μ 的最大似然估计量为 $\hat{\mu}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i=\overline{X}$

3．设 X 服从区间$[0,\lambda]$（$\lambda>0$）上的均匀分布， λ 是未知参数，而 $x_1,\cdots x_n$ 是 X 的样本值，试求出 λ 的极大似然估计量和矩估计量.

解　λ 的似然函数为 $L(\lambda)=\begin{cases}\lambda^{-n},0<x_i\le\lambda(i=1,2,...,n)\\0,\quad 其它\end{cases}=\begin{cases}\lambda^{-n},0<x_{(1)}\le x_{(n)}\le\lambda\\0,\quad 其它\end{cases}$

显然 λ 的似然函数 $L(\lambda)$ 为 λ 的减函数，此外，当 $\lambda<x_{(n)}$ 时，λ 的似然函数 $L(\lambda)$ 值为零，结合这两方面可知， λ 的极大似然估计值为 $\hat{\lambda}_1=x_{(n)}$，

所以 **λ 的最大似然估计量为** $\hat{\lambda}_1=X_{(n)}$；

$\mu_1=E(X)=\dfrac{\lambda}{2}$，**令**　　$\mu_1=E(X)=\bar{X}$，**解得 λ 的矩估计量为** $\hat{\lambda}_2=2\bar{X}$.

4．设总体 X 具有概率密度为 $f(x;\theta)=\begin{cases}c^{\frac{1}{\theta}}\dfrac{1}{\theta}x^{-(1+\frac{1}{\theta})}, & x\ge c,\\ 0, & 其它\end{cases}$ 其中参数 $0<\theta<1$，c 为已知常数，且 $c>0$. 从中抽取一个样本 $x_1,x_2,\cdots,x_n$，求 θ 的矩估计和极大似然估计.

解　θ 的似然函数为 $L(\theta)=\begin{cases}c^{\frac{n}{\theta}}\dfrac{1}{\theta^n}\left(\prod\limits_{i=1}^{n}x_i\right)^{-(1+\frac{1}{\theta})}, & x_{(1)}>c,\\ 0, & 其它.\end{cases}$

对数似然函数为 $\ln L(\theta)=\dfrac{n}{\theta}\ln c-n\ln\theta-(1+\dfrac{1}{\theta})\sum\limits_{i=1}^{n}\ln x_i,x_{(1)}>c$，

令 $\dfrac{d\ln L(\theta)}{d\theta}=-\dfrac{n}{\theta^2}\ln c-\dfrac{n}{\theta}+\dfrac{1}{\theta^2}\sum\limits_{i=1}^{n}\ln x_i=0$，得 θ 的最大似然估计值为

$\hat{\theta}_1=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}\ln x_i-\ln c$，所以 θ 的最大似然估计量为 $\hat{\theta}_1=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}\ln X_i-\ln c$；

$\mu_1=E(X)=\int_c^{+\infty}c^{\frac{1}{\theta}}\dfrac{1}{\theta}x^{-\frac{1}{\theta}}dx=\dfrac{1}{\theta-1}c^{\frac{1}{\theta}}x^{1-\frac{1}{\theta}}\Big|_c^{+\infty}=\dfrac{c}{1-\theta}$，令 $\mu_1=\dfrac{c}{1-\theta}=\bar{X}$ 得 θ 的矩估

计量为 $\hat{\theta}_2 = 1 - \dfrac{c}{\overline{X}}$.

5．设 X 服从区间 $[a,b]$ 上的均匀分布，这里 a,b 是两个未知参数．若 $x_1,\cdots x_n$ (不全相等)是 X 的样本值，试求出 a,b 的最大似然估计量．

解　a,b 的似然函数为 $L(a,b)=\begin{cases}(b-a)^{-n}, a<x_{(1)}\le x_{(n)}<b,\\ 0, \qquad\qquad \text{其它}.\end{cases}$ 显然似然函数 $L(a,b)$ 为 b 的减函数，a 的增函数，即一方面 b 越小，似然函数 $L(a,b)$ 越大，另一方面，$b \ge x_{(n)}$，否则似然函数为 0，综合这两方面可得 b 的最大似然估计值为 $\hat{b}=x_{(n)}$；同样地，一方面 a 越大，另一方面，$a \le x_{(1)}$，否则似然函数为 0，综合这两方面可得 a 的最大似然估计值为 $\hat{a}=x_{(1)}$．所以，a,b 的最大似然估计量为 $\hat{a}=X_{(1)}, \hat{b}=X_{(n)}$．

6．设总体 X 具有分布率

X	1	2	3
概率	θ^2	$2\theta(1-\theta)$	$(1-\theta)^2$

其中 θ（0<θ<1）为未知参数，已取得了样本值 $x_1=1, x_2=2, x_3=1$. 试求 θ 的矩估计值和极大似然估计值．

解　$\mu_1 = E(X) = 1\cdot\theta^2 + 2\cdot 2\theta(1-\theta) + 3\cdot(1-\theta)^2 = 3-2\theta$，

令 $\mu_1 = 3-2\theta = \overline{x} = \dfrac{1}{3}(1+2+1) = \dfrac{4}{3}$，得 θ 的矩估计值为 $\hat{\theta}_1 = \dfrac{5}{6}$；

θ 的似然函数为 $L(\theta)=\prod\limits_{i=1}^{3} P\{X_i = x_i\} = P\{X_1=1\}P\{X_2=2\}P\{X_3=1\} = 2\theta^5(1-\theta)$，

θ 的对数似然函数为 $\ln L(\theta)=\ln 2+5\ln\theta+\ln(1-\theta)$，令 $\dfrac{d\ln L(\theta)}{d\theta}=\dfrac{5}{\theta}-\dfrac{1}{1-\theta}=0$，得 θ 的极大似然估计值为 $\hat{\theta}_2=\dfrac{5}{6}$.

7．设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是来自参数为 λ 的泊松分布的样本, 试证对任意常数 k , 统计量 $k\overline{X}+(1-k)S^2$ 是 λ 的无偏估计量.

证明　因为 $E(\overline{X})=E(X)=\lambda$，$E(S^2)=D(X)=\lambda$

对任意常数 k，有 $E[k\overline{X}+(1-k)S^2]=kE(\overline{X})+(1-k)E(S^2)=k\lambda+(1-k)\lambda=\lambda$

所以，对任意 k, $k\overline{X}+(1-k)S^2$ 是 λ 的无偏估计.

8．设总体 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，$X_1,X_2,\cdots,X_n$ 为一样本, $\boldsymbol{\sigma^2=c\sum_{i=1}^{n-1}(X_{i+1}-X_i)^2}$，求参数 c , 使 $\hat{\sigma}^2$ 为 σ^2 的无偏估计.

解　由总体 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$ 可知 $X_{i+1}-X_i\sim N(0,2\sigma^2)$，所以

$$E[(X_{i+1}-X_i)^2]=D(X_{i+1}-X_i)+[E(X_{i+1}-X_i)]^2=2\sigma^2\text{，因此有}$$

$$E(\hat{\sigma}^2)=c\sum_{i=1}^{n-1}E[(X_{i+1}-X_i)^2]=c\sum_{i=1}^{n-1}2\sigma^2=2(n-1)c\sigma^2\overset{\text{令}}{=\!=}\sigma^2\Rightarrow c=\frac{1}{2(n-1)}$$

9．设总体 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，μ 已知，σ 为未知参数，$X_1,X_2,\cdots,X_n$ 为一样本, $\boldsymbol{\hat{\sigma}=c\sum_{i=1}^{n}|X_i-\mu|}$，求参数 c , 使 $\hat{\sigma}$ 为 σ 的无偏估计.

解　由总体 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$ 可知，$\dfrac{X_i-\mu}{\sigma}\sim N(0,1)$，所以

$$E|X_i-\mu|=\sigma E\left|\frac{X_i-\mu}{\sigma}\right|=\sigma\int_{-\infty}^{+\infty}|y|\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{y^2}{2}}dy=\frac{2\sigma}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{+\infty}ye^{-\frac{y^2}{2}}dy$$

$$=-\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sigma e^{-\frac{y^2}{2}}\Bigg|_0^{+\infty}=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sigma,$$

所以

$$E(\hat{\sigma})=c\sum_{i=1}^{n}E(|X_i-\mu|)=c\sum_{i=1}^{n}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sigma=nc\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sigma\overset{令}{=\!=}\sigma\Rightarrow c=\frac{1}{n}\sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

10．设 $X_1,\cdots X_n$ 是来自某一个具有均值 θ 而方差有限的总体中抽出的样本．证明：对任何常数 $c_1,\cdots,c_n$，只要 $\sum_{i=1}^{n}c_i=1$，则 $\sum_{i=1}^{n}c_iX_i$ 必是 θ 的无偏估计．但是，只有在 $c_1=\cdots=c_n=1/n$ 时方差达到最小（指在上述形式的估计类中达到最小．实际可以证明：$\overline{X}$ 在 θ 的一切无偏估计类中也达到最小．）

证明：$E\left(\sum_{i=1}^{n}c_iX_i\right)=\sum_{i=1}^{n}c_iE(X_i)=\sum_{i=1}^{n}c_iE(X_i)=\sum_{i=1}^{n}c_iE(X)=(\sum_{i=1}^{n}c_i)\theta=\theta(当\sum_{i=1}^{n}c_i=1)$ ．

$$E\left(\sum_{i=1}^{n}c_iX_i\right)=\sum_{i=1}^{n}c_i^2D(X_i)=D(X)\left(\sum_{i=1}^{n}c_i^2\right)\geq\frac{1}{n}D(X)$$

因为在$\sum_{i=1}^{n}c_i=1$下$\sum_{i=1}^{n}c_i^2$在$c_1=c_2=\cdots=c_n=\frac{1}{n}$时取最小值$\frac{1}{n}$.

由拉格朗日乘数法，令$F(c_1,\ldots,c_n,\lambda)=\sum_{i=1}^{n}c_i^2+\lambda(\sum_{i=1}^{n}c_i-1)$

由$\begin{cases}\dfrac{\partial F}{\partial c_i}=2c_i+\lambda=0(i=1,2,\cdots,n)\\ \dfrac{\partial F}{\partial\lambda}=\sum_{i=1}^{n}c_i-1=0\end{cases}$ 得唯一驻点 $c_1=c_2=\ldots=c_n=\frac{1}{n},\lambda=-\frac{2}{n}$.

所以，$\sum_{i=1}^{n}c_i^2$ 在 $\sum_{i=1}^{n}c_i=1$ 的最小值是当 $c_1=c_2=\ldots=c_n=\frac{1}{n}$ 的取值 $\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{n}\right)^2=\frac{1}{n}$.

11．设 $X_1,\cdots,X_n$ 和 $Y_1,\cdots,Y_m$ 分别是来自正态总体 $N(\theta,\sigma_1^2)$ 和 $N(\theta,\sigma_2^2)$ 的样本，σ_1^2 和 σ_2^2 都已知．(a)找常数 c,d，使 $\hat{\theta}=c\overline{X}+d\overline{Y}$ 为 θ 的无偏估计．并使其方差最小（在所有形如 $c\overline{X}+d\overline{Y}$ 的无偏估计类中最小）.

解　由 $E(\hat{\theta})=cE(\bar{X})+dE(\bar{Y})=c\theta+d\theta=\theta \Rightarrow c+d=1$，

$$D(\hat{\theta})=c^2D(\bar{X})+d^2D(\bar{Y})=c^2\frac{\sigma_1^2}{n}+d^2\frac{\sigma_2^2}{m}=c^2\frac{\sigma_1^2}{n}+(1-c)^2\frac{\sigma_2^2}{m},$$

显然上式时 c 的可导函数，所以其最小值点必为驻点，所以，由

$\frac{d}{dc}D(\hat{\theta})=\frac{2c}{n}\sigma_1^2-\frac{2(1-c)}{m}\sigma_2^2=0$，可得 $c=\frac{n\sigma_2^2}{m\sigma_1^2+n\sigma_2^2}$，因此，

$$d=1-c=\frac{m\sigma_1^2}{m\sigma_1^2+n\sigma_2^2}.$$

12． 设总体 X 为离散型随机变量，其分布律为 $P(X=-1)=(1-\theta)/2,$ $P(X=0)=1/2,$ $P(X=1)=\theta/2$， $X_1,\cdots,X_n$ 为其样本.

（1）求θ的 *MLE*（极大似然估计）$\hat{\theta}_1$；

（2）求θ的矩估计 $\hat{\theta}_2$；

解　（1）设 n_1,n_2 分别表示样本中取值为-1，取值为 1 的个数，则 $n-n_1-n_2$ 为样本中取值为 0 的个数，则此时θ的似然函数为 $L(\theta)=2^{-n}\theta^{n_2}(1-\theta)^{n_1}$，

对数似然函数为 $\ln L(\theta)=-n\ln 2+n_2\ln\theta+n_1\ln(1-\theta)$，

令 $\frac{d\ln L(\theta)}{d\theta}=\frac{n_2}{\theta}-\frac{n_1}{1-\theta}=0$，得求θ的 *MLE*（极大似然估计）$\hat{\theta}_1=\frac{n_2}{n_1+n_2}$；

（2）$\mu_1=E(X)=-1\times\frac{1-\theta}{2}+0\times\frac{1}{2}+1\times\frac{\theta}{2}=\theta-\frac{1}{2}$，

令 $\mu_1=\bar{X}$ 得θ的矩估计为　$\hat{\theta}_2=\bar{X}+\frac{1}{2}$.

13. 设总体 X 的概率密度为 $f(x,\sigma)=\frac{1}{2\sigma}\exp\{-\frac{|x|}{\sigma}\},\sigma>0$， $X_1,\cdots,X_n$ 为其样本.

（1）求 σ 的矩估计 $\hat{\sigma}_1$；

（2）求 σ 的极大似然估计 $\hat{\sigma}_2$；

（3）证明 σ 的极大似然估计 $\hat{\sigma}_2$ 为 σ 的无偏估计.

解　（1）$\mu_1 = E(X) = \dfrac{1}{2\sigma}\int_{-\infty}^{+\infty} x\mathrm{e}^{-\frac{|x|}{\sigma}}\mathrm{d}x = 0,$

$$\mu_2 = E(X^2) = \frac{1}{2\sigma}\int_{-\infty}^{+\infty} x^2\mathrm{e}^{-\frac{|x|}{\sigma}}\mathrm{d}x = \frac{1}{\sigma}\int_{0}^{+\infty} x^2\mathrm{e}^{-\frac{|x|}{\sigma}}\mathrm{d}x = \sigma^2\int_{0}^{+\infty} t^2\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t = 2\sigma^2,$$

令 $\mu_2 = A_2 = \dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} X_i^2$，得 σ 的矩估计为 $\hat{\sigma}_1 = \sqrt{\dfrac{1}{2n}\sum\limits_{i=1}^{n} X_i^2}$；

（2）σ 的似然函数为 $L(\sigma) = 2^{-n}\sigma^{-n}\mathrm{e}^{-\frac{1}{\sigma}\sum\limits_{i=1}^{n}|x_i|}$，

所以 $\ln L(\sigma) = -n\ln 2 - n\ln\sigma - \dfrac{1}{\sigma}\sum\limits_{i=1}^{n}|x_i|$，令 $\dfrac{d\ln L(\sigma)}{d\sigma} = -\dfrac{n}{\sigma} + \dfrac{1}{\sigma^2}\sum\limits_{i=1}^{n}|x_i| = 0$，得

σ 的极大似然估计为 $\hat{\sigma}_2 = \dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}|X_i|$；

（3）$E(\hat{\sigma}_2) = E\left(\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}|X_i|\right) = \dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}E(|X_i|) = E(|X|)$

$$= \frac{1}{2\sigma}\int_{-\infty}^{+\infty}|x|\mathrm{e}^{-\frac{|x|}{\sigma}}\mathrm{d}x = \frac{1}{\sigma}\int_{0}^{+\infty} x\mathrm{e}^{-\frac{x}{\sigma}}\mathrm{d}x = \sigma\int_{0}^{+\infty} t\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t = \sigma\cdot\Gamma(2) = \sigma,$$

所以，σ 的极大似然估计 $\hat{\sigma}_2$ 为 σ 的无偏估计.

14．测量铝的比重 16 次，测得 $\bar{x}$=2.705,S=0.029，试求铝的比重的置信区间（设测量值服从正态分布，置信度为 0.95）.

解　由于 σ^2 未知，$\bar{x} = 2.705, s = 0.029$，$\alpha = 0.05$，自由度为 n−1=16−1=15,查 t 分布表

得 $t_{\alpha/2}(n-1)=t_{0.025}(15)=2.1314$，$t_{\alpha/2}(n-1)\cdot\frac{s}{\sqrt{n}}=2.1314\times\frac{0.029}{\sqrt{16}}=0.0155$，铝的比重的 0.95 的置信区间为(2.705-0.0155,2.705+0.0155), 即（2.6895，2.7205）.

15．设 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$, $x_1,\cdots x_n$ 是其样本值．如果 σ^2 已知，问：n 取多大时方能保证 μ 的置信度为 0.95 的置信区间的长度不大于给定的 L?

解 因为 μ 的置信度为 0.95 的置信区间为 $(\bar{X}-t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)\frac{S}{\sqrt{n}},\bar{X}+t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)\frac{S}{\sqrt{n}})$，$\mu$ 的置信度为 0.95 的置信区间长度为 $2t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)\frac{S}{\sqrt{n}}$，要 $2t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)\frac{S}{\sqrt{n}}\le L$，则必须 $n\ge\frac{4S^2t^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)}{L^2}$，所以，当 $n\ge\left[\frac{4S^2t^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)}{L^2}\right]+1$ 时，才能能保证 μ 的置信度为 0.95 的置信区间的长度不大于给定的 L.

16．从一批电子元件中抽取 100 件，若抽取的元件的平均强度为 1000，样本标准差为 40，假设该批元件强度 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，试求μ的置信区间（设α=0.05).

解 由于 σ^2 未知，$\bar{x}=1000, s=40$，$\alpha=0.05$，自由度为 n−1=100−1=99,自由度 99 较大，所以 $t_{\alpha/2}(n-1)=t_{0.025}(99)\approx u_{0.025}=1.96$，$t_{\alpha/2}(n-1)\cdot\frac{s}{\sqrt{n}}=1.96\times\frac{40}{\sqrt{100}}=7.84$，μ的 0.95 的置信区间为(1000-7.84,1000+7.84), 即（992.16，1007.84）.

17．设某厂每天生产的一批钢筋强度 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$．现从中抽取 20 件，测得抗拉强度为：45.20，44.90，45.11，45.20，45.54，45.38，44.77，45.35，45.15，45.11，45.00，45.61，44.88，45.27，45.38，45.46，45.27，45.23，44.96，45.35．给定α=0.05，试求μ与 σ 的置信区间.

解 由样本值计算得 $\bar{x}=45.206$，$s=0.2253$，n=20, α =0.05, 查 t 分布表得 $t_{\alpha/2}(n-1)=t_{0.025}(19)=2.0930$，$t_{\alpha/2}(n-1)\cdot\frac{s}{\sqrt{n}}=2.0930\times\frac{0.2253}{\sqrt{20}}=0.1054$，所以μ的 0.95 的置信区间为(45.206−0.1054, 45.206+0.1054)，即（45.1006，45.3114);

查 χ^2 分布表可得 $\chi^2_{\alpha/2}(n-1)=\chi^2_{0.025}(19)=32.852,\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)=\chi^2_{0.975}(19)=8.907$，

$$\frac{\sqrt{n-1}s}{\sqrt{\chi^2_{\alpha/2}(n-1)}}=\frac{\sqrt{19}\times0.2253}{\sqrt{32.852}}=0.1713,\frac{\sqrt{n-1}s}{\sqrt{\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)}}=\frac{\sqrt{19}\times0.2253}{\sqrt{8.907}}=0.3291$$，所以

σ 的 0.95 的置信区间为（0.1713, 0.3291）.

18．设 A 和 B 两批导线是用不同工艺生产的,今随机地从每批导线中抽取 5 根测量其电阻,算得 $s_A^2=1.07\times10^{-7}$，$s_B^2=5.3\times10^{-6}$，若 A 批导线的电阻服从 $N(\mu_1,\sigma_1^2)$，B 批导线的电阻服从 $N(\mu_2,\sigma_2^2)$，求 σ_1^2/σ_2^2 的置信度为 0.90 的置信区间.

解　$n=m=5,\alpha=0.10$，查 F 分布表可得 $F_{\alpha/2}(n-1,m-1)=F_{0.05}(4,4)=6.39=F_{\alpha/2}(m-1,n-1)$，

$$\frac{S_A^2}{S_B^2}\cdot\frac{1}{F_{\alpha/2}(n-1,m-1)}=\frac{1.07\times10^{-7}}{5.3\times10^{-6}}\times\frac{1}{6.39}=0.0032,\frac{S_A^2}{S_B^2}\cdot\frac{1}{F_{1-\alpha/2}(n-1,m-1)}=\frac{1.07\times10^{-7}}{5.3\times10^{-6}}\times6.39=0.1290$$

所以，σ_1^2/σ_2^2 的置信度为 0.90 的置信区间为（0.0032,0.1290）.

19．从甲乙两个蓄电池厂的产品中分别抽取 6 个产品,测得蓄电池的容量(A.h)如下:

甲厂　140 , 138 , 143 , 141 , 144 , 137;

乙厂 135 , 140 , 142 , 136 , 138 , 140,

设蓄电池的容量服从正态分布,且方差相等,求两个工厂生产的蓄电池的容量均值差的 95%置信区间.

解　$n=m=6$,由两组样本值可计算的两组样本均值和样本方差分别为

$\bar{x}=140.5,\bar{y}=138.5,s_X^2=7.5000,s_y^2=7.1000$，$s_w=\sqrt{(n-1)s_X^2+(m-1)s_y^2/(n+m-2)}=2.7019$，

$1-\alpha=0.95,\alpha/2=0.025$，查 t 分布表得 $t_{\alpha/2}(n+m-2)=t_{0.025}(10)=2.2281$，所以两个工厂生产的蓄电池的容量均值差的 95%置信区间为

$$(140.5-138.5\pm2.2281\times2.7019\times\sqrt{\frac{1}{6}+\frac{1}{6}})=(-1.4757,5.4757)$$.

20．为比较两个小麦品种的产量，选择 18 块条件相似的试验田，采用相同的耕作方法作试验，结果播种甲品种的 8 块试验田的亩产量和播种乙品种的 10 块试验田的亩产量（单位：千克/亩）分别为：

甲品种	628	583	510	554	612	523	530	615		
乙品种	535	433	398	470	567	480	498	560	503	426

假定亩产量均服从正态分布，试求这两个品种平均亩产量差的置信区间.($\alpha=0.05$).

解　$n=8,m=10$,由两组样本值可计算的两组样本均值和样本方差分别为

$\bar{x}=569.3750,\bar{y}=487.0000,s_X^2=2140.5520,s_y^2=3256.2222$，

$s_w=\sqrt{(n-1)s_X^2+(m-1)s_y^2/(n+m-2)}=52.6129$，

$1-\alpha=0.95,\alpha/2=0.025$，查 t 分布表得 $t_{\alpha/2}(n+m-2)=t_{0.025}(16)=2.1199$，所以两个工厂生产的蓄电池的容量均值差的 95%置信区间为

$(569.3750-487.0000\pm 2.1199\times 52.6129\times\sqrt{\frac{1}{8}+\frac{1}{10}})=(29.4697, 135.2803)$.

习题 B

1．设随机变量 X 的分布函数为 $F(x;\alpha,\beta)=\begin{cases}1-\left(\frac{\alpha}{x}\right)^{\beta}, x>\alpha,\\ 0, \quad x\le\alpha,\end{cases}$

其中参数 $\alpha>0,\beta>1$．设 $X_1,\ldots,X_n$ 为来自总体 X 的简单随机样本，

（1） 当 $\alpha=1$ 时，求未知参数 β 的矩估计量；

（2） 当 $\alpha=1$ 时，求未知参数 β 的最大似然估计量；

（3） 当 $\beta=2$ 时，求未知参数 α 的最大似然估计量；

解　当 $\alpha=1$ 时，X 的概率密度函数为

$$f(x;\beta)=\begin{cases}\frac{\beta}{x^{\beta+1}}, x>1,\\ 0, \quad x\le 1,\end{cases}$$

（1） 由于 $\quad E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x;\beta)dx=\int_{1}^{+\infty}x\frac{\beta}{x^{\beta+1}}dx=\frac{\beta}{\beta-1}$,

令 $\frac{\beta}{\beta-1}=\bar{X}$,解得 $\beta=\frac{\bar{X}}{\bar{X}-1}$,

所以参数 β 的矩估计量为 $\hat{\beta}=\frac{\bar{X}}{\bar{X}-1}$;

（2）对于总体 X 的样本值 $x_1,x_2,\ldots,x_n$，似然函数为

$$L(\beta)=\prod_{i=1}^{n}f(x_i,\beta)=\begin{cases}\frac{\beta^n}{(x_1x_2\cdots x_n)^{\beta+1}}, x_i>1(i=1,2,\cdots,n)\\ 0, \quad \text{其它}\end{cases}$$

当 $x_i > 1(i=1,2,\cdots,n)$ 时， $L(\beta)$ >0,取对数得

$$\ln L(\beta) = n\ln\beta - (\beta+1)\sum_{i=1}^{n}\ln x_i,$$

对 β 求导数，得

$$\frac{d\ln L(\beta)}{d\beta} = \frac{n}{\beta} - \sum_{i=1}^{n}\ln x_i,$$

令 $\frac{d\ln L(\beta)}{d\beta} = 0$,解得

$$\beta = \frac{n}{\sum_{i=1}^{n}\ln x_i},$$

β 的最大似然估计量为

$$\hat{\beta} = \frac{n}{\sum_{i=1}^{n}\ln X_i}.$$

（3）当 $\beta = 2$ 时，X 的概率密度函数为

$$f(x;\beta) = \begin{cases} \dfrac{2\alpha^2}{x^3}, x > \alpha, \\ 0, \qquad x \le \alpha, \end{cases}$$

对于总体 X 的样本值 $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ，似然函数为

$$L(\alpha) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i;\alpha) = \begin{cases} \dfrac{2^n\alpha^{2n}}{(x_1x_2\cdots x_n)^3}, x_i > \alpha(i=1,2,\cdots,n) \\ 0, \qquad\qquad 其它 \end{cases}$$

当 $x_i > \alpha(i=1,2,\cdots,n)$ 时，α 越大，$L(\alpha)$越大，另一方面，$\alpha \le \min\{x_1,\ldots,x_n\}$，

因而 α 的最大似然估计值为

$$\hat{\alpha} = min\{x_1, x_2, \dots, x_n\},$$

则 α 的最大似然估计量为

$$\hat{\alpha} = min\{X_1, X_2, \dots, X_n\}.$$

2．设 $X_1, \dots, X_n (n > 2)$ 为来自总体 $N(0, \sigma^2)$ 的简单随机样本，$\bar{X}$ 为样本均值，记 $Y_i = X_i - \bar{X}, i = 1, 2, \dots, n.$

求（1）Y_i的方差$D(Y_i), i = 1, 2, \dots, n$；

（2）Y_1与Y_n的协方差$\mathrm{Cov}(Y_1, Y_n)$

（3）若 $C(Y_1 + Y_n)^2$ 是σ^2 的无偏估计，求常数 C；

(4)求 $P\{Y_1 + Y_n \le 0\}$.

解（1）$D(Y_i) = D\left[(1-\frac{1}{n})X_i - \frac{1}{n}\sum\limits_{j=1, j\neq i}^{n} X_j\right] = \frac{(n-1)^2}{n^2} D(X_i) + \frac{1}{n^2}\sum\limits_{j=1, j\neq i}^{n} D(X_j)$

$$= \frac{(n-1)^2}{n^2}\sigma^2 + \frac{1}{n^2}\sum_{j=1, j\neq i}^{n}\sigma^2 = \frac{n-1}{n}\sigma^2 \text{；}$$

（2）$\mathrm{Cov}(Y_1, Y_n) = \mathrm{Cov}((1-\frac{1}{n})X_1 - \frac{1}{n}\sum\limits_{i=2}^{n} X_i, -\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n-1} X_i + (1-\frac{1}{n})X_n)$

$$= -\frac{n-1}{n^2}D(X_1) + \frac{1}{n^2}\sum_{i=2}^{n-1}D(X_i) - \frac{n-1}{n^2}D(X_n) = -\frac{n-1}{n^2}\sigma^2 + \frac{1}{n^2}\sum_{i=2}^{n-1}\sigma^2 - \frac{n-1}{n^2}\sigma^2 = -\frac{\sigma^2}{n}\text{；}$$

（3）$Y_1 + Y_n = (X_1 - \bar{X}) + (X_n - \bar{X}) = \frac{n-2}{n}X_1 - \frac{2}{n}\sum\limits_{i=2}^{n-1} X_i + \frac{n-2}{n}X_n$，由正态分布的线性组合仍服从正态分布的性质可知，$Y_1 + Y_n \sim N(0, \frac{2(n-2)}{n}\sigma^2)$，由方差的简化计算公式可得 $E[(Y_1 + Y_n)^2] = D(Y_1 + Y_n) - [E(Y_1 + Y_n)]^2 = \frac{2(n-2)}{n}\sigma^2$，

由此可得，$E\left[\dfrac{n}{2(n-2)}(Y_1+Y_n)^2\right]=\sigma^2$, 从而有若 $C(Y_1+Y_n)^2$ 是 σ^2 的无偏估计，则常数 $C=\dfrac{n}{2(n-2)}$；

（4）由（3）中的结论 $Y_1+Y_n \sim N(0,\dfrac{2(n-2)}{n}\sigma^2)$ 可得 $P\{Y_1+Y_n \le 0\}=0.5$.

3. 设随机变量 X 的密度函数为 $f(x;\theta)=\begin{cases}\theta, & 0<x<1, \\ 1-\theta, & 1\le x<2 \\ 0, & 其他,\end{cases}$

其中 θ 是未知参数（0< θ <1）. $X_1,\ldots,X_n$ 为来自总体 X 的简单随机样本，记 N 为样本 $x_1,x_2,\ldots,x_n$ 中小于 1 的个数，（1）求 θ 的矩估计量；（2）求 θ 的最大似然估计量；

解　（1）由于

$$EX=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x;\theta)dx=\int_0^1\theta xdx+\int_1^2(1-\theta)xdx=\frac{1}{2}\theta+\frac{3}{2}(1-\theta)=\frac{3}{2}-\theta$$

令 $\dfrac{3}{2}-\theta=\bar{X}$，解得 $\theta=\dfrac{3}{2}-\bar{X}$,

所以参数 θ 的矩估计为　$\hat{\theta}=\dfrac{3}{2}-\bar{X}$

（2）似然函数为 $L(\theta)=\prod_{i=1}^{n}f(x_i;\theta)=\theta^N(1-\theta)^{n-N}$,

取对数，得　$\ln L(\theta)=N\ln\theta+(n-N)\ln(1-\theta)$,

两边对 θ 求导数，得　$\dfrac{d\ln L(\theta)}{d\theta}=\dfrac{N}{\theta}-\dfrac{n-N}{1-\theta}$

令 $\dfrac{d\ln L(\theta)}{d\theta}=0$, 得 $\theta=\dfrac{N}{n}$,

所以 θ 的最大似然估计为　$\hat{\theta}=\dfrac{N}{n}$.

4. 设随机变量 X 的密度函数为 $f(x;\theta)=\begin{cases}\dfrac{1}{2\theta}, & 0<x<\theta,\\ \dfrac{1}{2(1-\theta)}, & \theta\le x<1\\ 0, & 其他,\end{cases}$

其中 θ 是未知参数（0<θ<1）. $X_1,\ldots,X_n$ 为来自总体 X 的简单随机样本，$\bar{X}$ 为样本均值，

（1）求 θ 的矩估计量 $\hat{\theta}$；（2）判断 $4\bar{X}^2$ 是否为 θ^2 的无偏估计量，并说明理由.

5. 设总体 X 的概率密度为 $f(x;\mu)=\begin{cases}e^{-(x-\mu)}, & 若 x\ge\mu,\\ 0, & 若 x<\mu;\end{cases}$，而 $X_1,X_2,\ldots,X_n$ 是来自总体 X 的简单随机样本，μ 为未知参数.

（1）求 μ 的最大似然估计量 $\hat{\mu}$, 并验证 $\hat{\mu}_1=\hat{\mu}-\dfrac{1}{n}$ 是 μ 的无偏估计;

（2）求 μ 的矩估计量 $\hat{\mu}_2$, 并验证 $\hat{\mu}_2$ 是 μ 的无偏估计;

（3）问 $\hat{\mu}_1,\hat{\mu}_2$ 中哪个较有效？

解（1）似然函数为 $L(\mu)=\prod_{i=1}^{n}f(x_i)=\begin{cases}e^{-\sum_{i=1}^{n}x_i+n\mu}, & x_{(1)}\ge\mu,\\ 0, & x_{(1)}<\mu.\end{cases}$

一方面要 $L(\mu)$ 最大, 就必须 μ 尽可能地大, 另一方面 $x_{(1)}\ge\mu$

得 μ 的最大似然估计为 $\hat{\mu}=X_{(1)}=\min\{X_i\}$.

要讨论 $\hat{\mu}_1=\hat{\mu}-\dfrac{1}{n}$ 的无偏性，我们先求出求出最小次序统计量的密度函数

记其分布函数为 $F_1(x)$,密度函数为 $f_1(x)$，则

当 $x<\mu$ 时，$F_1(x)=0$；当 $x\geqslant\mu$ 时

$$F_1(x)=P\{\min\{X_i\}\le x\}=1-P\{\min\{X_i\}>x\}$$

$$=1-P\{X_1>x,\ldots,X_n>x\}=1-\prod_{i=1}^{n}P\{X_i>x\}$$

$$=1-\left(\int_{\mu}^{x}\mathrm{e}^{-(x-\mu)}dx\right)^{n}=1-\mathrm{e}^{-n(x-\mu)}.$$

所以$X_{(1)}$的密度函数为 $f_1(x)=\begin{cases}n\mathrm{e}^{-n(x-\mu)}, & x\ge\mu,\\ 0, & x<\mu.\end{cases}$

$$E(X_{(1)})=\int_{\mu}^{+\infty}xn\mathrm{e}^{-n(x-\mu)}dx=-x\mathrm{e}^{-n(x-\mu)}\Big|_{\mu}^{+\infty}+\int_{\mu}^{+\infty}\mathrm{e}^{-n(x-\mu)}dx=\mu+\frac{1}{n},$$

$$E(\hat{\mu}_1)=E\left(X_{(1)}-\frac{1}{n}\right)=E\left(X_{(1)}\right)-\frac{1}{n}=\mu+\frac{1}{n}-\frac{1}{n}=\mu,$$

所以 $\hat{\mu}_1=\hat{\mu}-\frac{1}{n}$ 是 μ 无偏估计；

（2） $E(X)=\int_{\mu}^{+\infty}x\mathrm{e}^{-(x-\mu)}dx=\mu+1$

得$\mu=E(X)-1$, 所以μ的矩估计为$\hat{\mu}_2=\bar{X}-1$.

$$E(\hat{\mu}_2)=E\left(\bar{X}-1\right)=E(X)-1=\mu$$

所以矩估计 $\hat{\mu}_2$ 是 μ 无偏估计；

(3) $D(\hat{\mu}_2)=D(\bar{X}-1)=D(\bar{X})=\frac{1}{n}D(X)=\frac{1}{n}D(X-\mu)=\frac{1}{n}.$

(注: 可以证明当X服从双参数指数分布$E(\mu,\lambda)$, 即其密度为$f(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda(x-\mu)}, & x\ge\mu,\\ 0, & x<\mu.\end{cases}$时,

$X-\mu$服从参数为λ的指数分布, 即$X-\mu$的密度为$f(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x}, & x\ge 0,\\ 0, & x<0.\end{cases}$.）

$$D(\hat{\mu}_1)=D\left(X_{(1)}-\frac{1}{n}\right)=D\left(X_{(1)}\right)=D\left(X_{(1)}-\mu\right)=\frac{1}{n^2}$$

当$n>1$时，$D(\hat{\mu}_2)=\frac{1}{n}>\frac{1}{n^2}=D(\hat{\mu}_1)$

所以$\hat{\mu}_1$较$\hat{\mu}_2$有效.

6. 设总体 X 服从区间[1，θ]上的均匀分布，$\theta>1$ 未知，X_1，X_2，…，X_n 是来自 X 的样本.（1）求θ的矩估计和极大似然估计；（2）上述两个估计量是否为无偏估计量，

若不是请修正为无偏估计量；（3）试问（2）中的两个无骗估计量哪个更有效？

解（1）$EX=\int_1^\theta x\frac{1}{\theta-1}dx=\frac{\theta+1}{2}$，得$\theta=2EX-1,$ 所以θ的矩估计为$\tilde{\theta}=2\overline{X}-1;$

$$L(\theta)=\prod_{i=1}^{n}f(x_i)=\begin{cases}\frac{1}{(\theta-1)^n},1\le x_{(1)}\le\ldots\le x_{(n)}\le\theta,\\0, \qquad\qquad 其它.\end{cases}$$

一方面要$L(\theta)$最大,就必须θ尽可能地小,另一方面$x_{(n)}\le\theta$, 得θ的最大似然估计为$\hat{\theta}=X_{(n)}=\max\{X_i,1\le i\le n\};$

（2）$E\tilde{\theta}=E\left(2\overline{X}-1\right)=2E\overline{X}-1=2EX-1=2\times\frac{\theta+1}{2}-1=\theta$，

所以矩估计是无偏估计;

要讨论最大似然估计的无偏性，我们先求出求出最大次序统计量的密度函数记其分布函数为 $F_n(x)$,密度函数为 $f_n(x)$，则

当 $x<1$ 时，$F_n(x)=0$；当 $x\geqslant\theta$时，$F_n(x)=1$；

当 $1\leqslant x<\theta$时,

$$F_n(x)=P\{\max\{X_i\}\le x\}=P\{X_1\le x,\ldots,X_n\le x\}=\prod_{i=1}^{n}p\{X_i\le x\}$$

$$=\left(\int_1^x\frac{1}{\theta-1}dx\right)^n=\left(\frac{x-1}{\theta-1}\right)^n,$$

所以 $X_{(n)}$ 的密度函数为 $f_n(x)=F_n'(x)=\begin{cases}n\left(\frac{x-1}{\theta-1}\right)^{n-1}\frac{1}{\theta-1},1<x<\theta,\\0, \qquad\qquad 其它.\end{cases}$

$$E\hat{\theta}=\int_1^\theta xn\left(\frac{x-1}{\theta-1}\right)^{n-1}\frac{1}{\theta-1}dxt\,\underline{\underline{=\frac{x-1}{\theta-1}}}\,n(\theta-1)\int_0^1t^ndt+\int_0^1nt^{n-1}dt$$

$$=\frac{n(\theta-1)}{n+1}+1$$

所以极大似然不是无偏估计；把最大似然估计修正后的 $\hat{\theta}_1=\frac{n+1}{n}\max\{X_i\}-\frac{1}{n}$；

(3) $D(\tilde{\theta})=D(2\overline{X}-1)=4D(\overline{X})=4\times\frac{(\theta-1)^2}{12n}=\frac{(\theta-1)^2}{3n}.$

$$E\left[\frac{n+1}{n}X_{(n)}-\frac{1}{n}\right]^2=\frac{(n+1)^2}{n^2}E(X_{(n)}^2)-\frac{2(n+1)}{n^2}E(X_{(n)})+\frac{1}{n^2}$$

$$\text{而}E(X_{(n)}^2)=\int_1^{\theta}x^2n\left(\frac{x-1}{\theta-1}\right)^{n-1}\frac{1}{\theta-1}dx=n\int_0^1\left((\theta-1)t+1\right)^2t^{n-1}dt$$

$$=\frac{n(\theta-1)^2}{n+2}+\frac{2n(\theta-1)}{n+1}+1$$

$$\text{所以}E\left[\frac{n+1}{n}X_{(n)}-\frac{1}{n}\right]^2=\frac{(n+1)^2}{n^2}\left(\frac{n(\theta-1)^2}{n+2}+\frac{2n(\theta-1)}{n+1}+1\right)$$

$$-\frac{2(n+1}{n^2}\left(\frac{n(\theta-1)}{n+1}+1\right)+\frac{1}{n^2}$$

$$=\frac{(n+1)^2(\theta-1)^2}{n(n+2)}+2\theta-1$$

$$D(\hat{\theta}_1)=D\left(\frac{n+1}{n}X_{(n)}-\frac{1}{n}\right)=E\left[\frac{n+1}{n}X_{(n)}-\frac{1}{n}\right]^2-\left[E\left(\frac{n+1}{n}X_{(n)}-\frac{1}{n}\right)\right]^2$$

$$=\frac{(n+1)^2(\theta-1)^2}{n(n+2)}+2\theta-1-\theta^2=\frac{(\theta-1)^2}{n(n+2)}$$

当$n>1$时，$D(\tilde{\theta})=\dfrac{(\theta-1)^2}{3n}>\dfrac{(\theta-1)^2}{n(n+2)}=D(\hat{\theta}_1)$

所以$\hat{\theta}_1$较$\tilde{\theta}$更有效.

7．设 $X_1,\ldots,X_n$ 为来自总体 $N(\mu,\sigma^2)$的简单随机样本，记

$$\bar{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i,S^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2,T=\bar{X}^2-\frac{1}{n}S^2$$

（1）证明 T 是 μ^2 的无偏估计量；

（2）当 $\mu=0,\sigma=1$时, 求$D(T)$.

（1）证明　由正态总体抽样分布理论可知，$\bar{X}\sim N(\mu,\frac{1}{n}\sigma^2)$，$\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(n-1)$，

且它们相互独立，因此可得 $E(\bar{X}^2)=D(\bar{X})+[E(\bar{X})]^2=\mu^2+\frac{1}{n}\sigma^2$，

$$E(S^2)=E\left(\frac{\sigma^2}{n-1}\cdot\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\right)=\frac{\sigma^2}{n-1}E\left[\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\right]=\frac{\sigma^2}{n-1}\cdot(n-1)=\sigma^2，$$

故 $E(T)=E\left(\bar{X}^2-\frac{1}{n}S^2\right)=E(\bar{X}^2)-\frac{1}{n}E(S^2)=\mu^2+\frac{1}{n}\sigma^2-\frac{1}{n}\sigma^2=\sigma^2$，即 T 是 μ^2 的无偏估计量；

（3）由正态总体抽样分布理论可知，$\bar{X}$ 与 S^2 独立，从而 $\bar{X}^2$ 与 S^2 独立，所以当 $\mu=0$，$\sigma=1$ 时，$D(T)=D(\bar{X}^2)+\frac{1}{n^2}D(S^2)$，而由 $\bar{X}\sim N(0,\frac{1}{n})$ 可知 $n\bar{X}^2\sim\chi^2(1)$，$(n-1)S^2\sim\chi^2(n-1)$，因此 $n^2D(\bar{X}^2)=D(n\bar{X}^2)=2\Rightarrow D(\bar{X}^2)=\frac{2}{n^2}$，而 $(n-1)^2D(S^2)=D[(n-1)S^2]=2(n-1)\Rightarrow D(S^2)=\frac{2}{n-1}$，所以，

$$D(T)=D(\bar{X}^2)+\frac{1}{n^2}D(S^2)=\frac{2}{n^2}+\frac{2}{n^2(n-1)}=\frac{2}{n(n-1)}.$$

8．设一批零件的长度服从正态分布 N（μ，σ^2），其中 μ，σ^2 均未知，现从中随机抽取 16 个零件，测得样本均值 $\bar{x}$ =20(cm)，样本标准差 s=1(cm),则 μ 的置信度为 0.90 的置信区间是（　）

A．$(20-\frac{1}{4}t_{0.05}(16),20+\frac{1}{4}t_{0.05}(16))$　　B．$(20-\frac{1}{4}t_{0.1}(16),20+\frac{1}{4}t_{0.1}(16))$

C．$(20-\frac{1}{4}t_{0.05}(15),20+\frac{1}{4}t_{0.05}(15))$　　D．$(20-\frac{1}{4}t_{0.1}(15),20+\frac{1}{4}t_{0.1}(15))$

解　由单个正态总体在方差未知时均值的双侧区间估计理论可知，应该选择 C.

9．设由来自正态总体 $X\sim N(\mu,0.9^2)$ 容量为 9 的简单随机样本，得样本均值 $\bar{X}$ =5，则未知参数 μ 置信度为 0. 95 的置信区间是________________.

解　由单个正态总体在方差已知时均值的双侧区间估计理论可知， 未知参数 μ 置信度为 0. 95 的置信区间是 $(\bar{X}-u_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}},\bar{X}+u_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}})=(5-1.96\times\frac{0.9}{\sqrt{9}},5+1.96\times\frac{0.9}{\sqrt{9}})$=(4. 412，5. 588)．