2021~2022 学年第 2 学期概率论与数理统计 B-*A* 卷解答与评分标准

一. 填空题（每题 3 分，计 15 分.）

1. 0.4； 2. $\frac{1}{2}$； 3. $\frac{1}{3}$； 4. $\frac{1}{3}$； 5. T_3.

二．单项选择题（每题 3 分，计 15 分. ）

6. D； 7. A； 8. C； 9. B； 10. D.

三. 解答题(每题 12 分，共 70 分.)

11. 解：设 A_1, A_2, A_3 分别表示一等，二等，三等麦种，B 表示播种后麦种发芽.

（1）$P(B) = P(B \mid A_1)P(A_1) + P(B \mid A_2)P(A_2) + P(B \mid A_3)P(A_3)$

$= 0.8 \times 0.8 + 0.18 \times 0.5 + 0.02 \times 0.2 = 0.734$； （6 分）

（2）所求 $P(A_1 \mid \bar{B}) = \dfrac{P(\bar{B} \mid A_1)P(A_1)}{P(\bar{B})} = \dfrac{0.8 \times 0.2}{1 - 0.734} = \dfrac{80}{133} \approx 0.602$ （12 分）

12. 解 记随机变量 X, Y 的分布函数分别为 $F_X(x), F_Y(y)$. 因为 X 概率密度为

$$f_X(x) = \begin{cases} \lambda \mathrm{e}^{-\lambda x}, x > 0, \\ 0, \ \ x \le 0. \end{cases}.$$

所以 Y 的分布函数为

$$F_Y(y) = P\{Y \le y\} = P\{|X| \le y\}.$$

当 $y \le 0$ 时，$F_Y(y) = P\{Y \le y\} = P\{X^2 \le y\} = 0$；

当 $y > 0$ 时，$F_Y(y) = P\{Y \le y\} = P\{X^2 \le y\} = P\{-\sqrt{y} \le X \le \sqrt{y}\}$

$$= F_X(\sqrt{y}) - F_X(-\sqrt{y}) = (1 - \mathrm{e}^{-\lambda\sqrt{y}}) - 0 = 1 - \mathrm{e}^{-\lambda\sqrt{y}}.$$ （8 分）

将分布函数 $F_Y(y)$ 对 y 求导，得 Y 概率密度

$$f_Y(y) = \begin{cases} \dfrac{\lambda}{2\sqrt{y}} \mathrm{e}^{-\lambda\sqrt{y}}, & y > 0, \\ 0, & y \le 0. \end{cases}$$ （10 分）

13. 解：（1）随机变量 Y 的分布律

Y	0	1	4
P_k	0.2	0.3	0.5

（6 分）

(2) $E(Y) = 0 \times 0.2 + 1 \times 0.3 + 4 \times 0.5 = 2.3$ **(9 分）**

$D(Y) = E(Y^2) - [E(Y)]^2 = 0^2 \times 0.2 + 1^2 \times 0.3 + 4^2 \times 0.5 - 2.3^2 = 3.01$ （12 分）

14.解：(1) 由于当 $x\le 0$ 或 $x\ge 1$ 时，$f(x,y)=0$,所以 $f_X(x)=0$; 而当 $0<x<1$ 时，有

$$f_X(x)=\int_{x^2}^{x}6dy=6x(1-x)\ .$$

所以 X 的边际密度函数为 $f_X(x)=\begin{cases}6x(1-x), 0<x<1,\\ 0, \qquad 其它.\end{cases}$ （3 分）

由于当 $y\le 0$ 或 y≥1 时，$f(x,y)=0$,所以 $f_Y(y)=0$; 而当 $0<y<1$ 时，有

$$f_Y(y)=\int_{y}^{\sqrt{y}}6dx=6(\sqrt{y}-y)\ .$$

所以 Y 的边际密度函数为 $f_Y(y)=\begin{cases}6(\sqrt{y}-y), 0<y<1,\\ 0, \qquad 其它.\end{cases}$ **（6 分）**

(2) $$E(XY)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}xyf(x,y)dxdy=\int_0^1 xdx\int_{x^2}^{x}6ydy=\int_0^1(3x^3-3x^5)dx=\frac{1}{4},$$

$$E(X)=\int_0^1 x\cdot 6x(1-x)dx=\frac{1}{2}, E(Y)=\int_0^1 y\cdot 6(\sqrt{y}-y)dy=\frac{2}{5},$$

$$\operatorname{cov}(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)=\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\times\frac{2}{5}=\frac{1}{20}.$$ **(12 分)**

15. 解： （1）$E\left(X\right)=\int_c^{+\infty}x\cdot\theta c^{\theta}x^{-(\theta+1)}dx=\dfrac{\theta c}{\theta-1}$，

令 $\dfrac{c\theta}{\theta-1}=\bar{X}$**，故** θ **的矩估计量为** $\hat{\theta}=\dfrac{\bar{X}}{\bar{X}-c}$ （6 分）

（2）似然函数

$$L(\theta)=\begin{cases}\theta^n c^{n\theta}\prod_{i=1}^{n}x_i^{-(\theta+1)} & x_i>c\\ 0 & 其它\end{cases}$$

对数似然函数为

$$\ln L(\theta)=n\ln\theta+n\theta\ln c-(\theta+1)\sum_{i=1}^{n}\ln x_i$$

$$\frac{d\ln L(\theta)}{d\theta}=\frac{n}{\theta}+n\ln c-\sum_{i=1}^{n}\ln x_i=0$$

解得 θ **的最大似然估计量为** $\hat{\theta}=\dfrac{1}{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\ln X_i-\ln c}$. （12 分）

16. 解：（1）**要检验假设：** $H_0:\mu=\mu_0=5.5 \quad vs \quad H_1:\mu\ne\mu_0$

拒绝域为： $\left|\dfrac{\bar{x}-\mu_0}{s/\sqrt{n}}\right|\ge t_{\alpha/2}(n-1)$

$$t_{\alpha/2}(n-1)=t_{0.025}(9)=2.3060, \mu_0=5.5, n=9, \bar{x}=6.00, s=0.5745$$

即有$\left|\dfrac{\overline{x}-\mu_0}{s/\sqrt{n}}\right| = 2.6110 < 2.3060$，接受$H_0$，可认认为这种清漆平均干燥时间为**5.5**小时．（6分）

（2）由于σ^2未知，$\overline{x}$=6.00,样本标准差为s=0.5745，$\alpha = 0.05$，自由度为n−1=9−1=8,

$$t_{\alpha/2}(n-1) = t_{0.025}(8) = 2.3060,\ t_{\alpha/2}(n-1)\cdot\sqrt{\frac{s^2}{n}} = 2.3060\times\frac{0.5745}{\sqrt{9}} = 0.4416$$,所以，

平均干燥时间μ的置信度为95%的置信区间为（5.56,6.44）．（12分）