2021/2022 学年 第二学期《线性代数 B》试卷 A 答案（大农类专业 2 学分）

一、选择题：（每题 3 分，共 18 分）

1. D；　2. A；　3. D；　4. B；　5. C；　6. A.

二、填空题：（每题 3 分，共 18 分）

7. -1；　8. -1；　9. 1；　10. 3；　11. 2；　12. $-2<t<1$.

三、计算与证明

13. 解法一：　因为 $|\boldsymbol{A}|=6\neq 0,$ 所以 $\boldsymbol{A}$ 可逆，因此 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}.$

$$\because(\boldsymbol{A}|\boldsymbol{B})=\left(\begin{array}{ccc|cc}1&-2&0&-1&4\\4&-2&-1&2&6\\-3&0&2&3&-4\end{array}\right)\xrightarrow[r_3+3r_1]{r_2-4r_1}\left(\begin{array}{ccc|cc}1&-2&0&-1&4\\0&6&-1&6&-10\\0&-6&2&0&8\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{r_3+r_2}\left(\begin{array}{ccc|cc}1&-2&0&-1&4\\0&6&-1&6&-10\\0&0&1&6&-2\end{array}\right)\xrightarrow{r_2+r_3}\left(\begin{array}{ccc|cc}1&-2&0&-1&4\\0&6&0&12&-12\\0&0&1&6&-2\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{\frac{1}{6}\times r_2}\left(\begin{array}{ccc|cc}1&-2&0&-1&4\\0&1&0&2&-2\\0&0&1&6&-2\end{array}\right)\xrightarrow{r_1+2r_2}\left(\begin{array}{ccc|cc}1&0&0&3&0\\0&1&0&2&-2\\0&0&1&6&-2\end{array}\right),$$

$$\therefore \boldsymbol{X}=\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}3&0\\2&-2\\6&-2\end{pmatrix}.$$ ………………………………………….. 8 分

解法二：　因为 $|\boldsymbol{A}|=6\neq 0,$ 所以 $\boldsymbol{A}$ 可逆，因此 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}.$

$$\because(A|I)=\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&-2&0&1&0&0\\4&-2&-1&0&1&0\\-3&0&2&0&0&1\end{array}\right)\xrightarrow{r}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&-\frac{2}{3}&\frac{2}{3}&\frac{1}{3}\\0&1&0&-\frac{5}{6}&\frac{1}{3}&\frac{1}{6}\\0&0&1&-1&1&1\end{array}\right),$$

$$\therefore A^{-1}=\begin{pmatrix}-\frac{2}{3}&\frac{2}{3}&\frac{1}{3}\\-\frac{5}{6}&\frac{1}{3}&\frac{1}{6}\\-1&1&1\end{pmatrix},$$ ………………………………………….. 4 分

$$\therefore X=A^{-1}B=\begin{pmatrix}-\frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3}\\ -\frac{5}{6} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6}\\ -1 & 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & 4\\ 2 & 6\\ 3 & -4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & 0\\ 2 & -2\\ 6 & -2\end{pmatrix}.$$ ……………….. 8 分

14. 将行列式的第 2，3，4，5 列都加到第 1 列，再按第 1 列展开，得

$$D_5=\begin{vmatrix}1 & a & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1-a & a & 0 & 0\\ 0 & -1 & 1-a & a & 0\\ 0 & 0 & -1 & 1-a & a\\ -a & 0 & 0 & -1 & 1-a\end{vmatrix}=D_4+(-a)(-1)^{5+1}a^4=D_4+(-1)^5a^5,$$

于是有 $D_5=D_4+(-1)^5a^5=D_3+(-1)^4a^4+(-1)^5a^5=D_2+(-1)^3a^3+(-1)^4a^4+(-1)^5a^5$

$$=D_2-a^3+a^4-a^5.$$

而 $D_2=\begin{vmatrix}1-a & a\\ -1 & 1-a\end{vmatrix}=1-a+a^2$，所以 $D_5=1-a+a^2-a^3+a^4-a^5$. ……………….……… 8 分

15.

$$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)=\begin{pmatrix}1 & 2 & 0 & 3\\ 2 & 0 & -4 & -2\\ -1 & t & 5 & t+4\\ 1 & 0 & -2 & -1\end{pmatrix}\xrightarrow{\text{行}}\begin{pmatrix}1 & 2 & 0 & 3\\ 0 & -4 & -4 & -8\\ 0 & t+2 & 5 & t+7\\ 0 & -2 & -2 & -4\end{pmatrix}\xrightarrow{\text{行}}\begin{pmatrix}1 & 2 & 0 & 3\\ 0 & 1 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 3-t & 3-t\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

………………………………………………….. 4 分

(1) $t=3$ 时， $R(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)=2$， 故 α_1,α_2 为其一个极大线性无关组，… ….. 6 分

(2) $t\neq 3$ 时， $R(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)=3$， 故 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 为其一个极大线性无关组． . 8 分

16. 必要性：设 β 是任一 n 维向量，

$\because \alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 线性无关，

$\therefore \alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n,\beta$ 线性相关，

$\therefore \beta$ 可由 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 线性表示. ……………………………………………….. 5 分

充分性：$\because$ 任一 n 维向量都能由 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 线性表示，

$\therefore$ n 维单位坐标向量组 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$ 可由 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 线性表示，

$\because$ 任一 n 维向量都可由 n 维单位坐标向量组 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$ 线性表示，

$\therefore$ 向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 可由向量组 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$ 线性表示，

$\therefore$ 向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 与向量组 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$ 等价，

$\therefore R(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)=R(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n)=n$，

故 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 线性无关.　　………………………………………….. .. 10 分

17. 设存在一组数 x_1,x_2,x_3 使得 $x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+x_3\alpha_3=\beta$，即 $\begin{cases} x_1+x_2+x_3=1, \\ x_2-x_3=b, \\ 2x_1+3x_2+ax_3=4, \\ 3x_1+5x_2+x_3=7. \end{cases}$

方程组的增广矩阵为：$\overline{A}=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & b \\ 2 & 3 & a & 4 \\ 3 & 5 & 1 & 7 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & b \\ 0 & 0 & a-1 & 2-b \\ 0 & 0 & 0 & 2-b \end{array}\right)$，…………..… 3 分

（1）　当 $a\neq 1$ 且 $b=2$ 时，增广矩阵 $\overline{A}\to\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & a-1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$，

$R(A)$=$R(\overline{A})=3$，方程组有唯一解：$x=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$，

β 可由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 唯一线性表示，表示式为 $\beta=-\alpha_1+2\alpha_2$ ………….………. 6 分

（2）当 $a\in R$ 且 $b\neq 2$ 时，　$R(A)\neq R(\overline{A})$，方程组无解，

β 不能由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表示；…………………………………...………..……. 9 分

（3）当 $a=1$ 且 $b=2$ 时，增广矩阵 $\overline{A}\to\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$，

$R(A)$=$R(\overline{A})=2<3$，方程组有无穷多解，

β 可由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表示，但表示式不唯一，.

其同解方程组为$\begin{cases} x_1 \quad +2x_3=-1, \\ \quad x_2-x_3=2, \end{cases}$

令$x_3=k$，则$x_1=-2k-1, x_2=k+2$，

则$\beta=(-2k-1)\alpha_1+(k+2)\alpha_2+k\alpha_3$，$(k\in R)$. ………… …… ……… …….12 分

18. 二次型的矩阵为$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$，

由$|A-\lambda E|=0$解出A的特征值为$\lambda_1=0, \lambda_2=\lambda_3=2$，……… ……… ……………3 分

当$\lambda_1=0$时，求$(A-0E)x=0$的基础解系：

$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$，同解方程组为$\begin{cases} x_1 \quad -x_3=0 \\ \quad x_2=0 \end{cases}$，

令$x_3=k$，则$x_1=k, x_2=0$，得通解为$x=\begin{pmatrix} k \\ 0 \\ k \end{pmatrix}=k\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$，

故A对应于特征值$\lambda_1=0$的特征向量为$p_1=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$； …… …4 分

当$\lambda_2=\lambda_3=2$时，求$(A-2E)x=0$的基础解系：

$A-2E=\begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$，同解方程组为$x_1 \quad +x_3=0$，

令$x_2=k_1, x_3=k_2$，则$x_1=-k_2$，得通解为$x=\begin{pmatrix} -k_2 \\ k_1 \\ k_2 \end{pmatrix}=k_1\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$，

故A对应于特征值$\lambda_2=\lambda_3=2$的特征向量为$p_2=\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, p_3=\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. ……………..…… 6 分

由于p_1, p_2, p_3已两两正交，故只需将p_1, p_2, p_3单位化：

令 $e_1=\dfrac{p_1}{\|p_1\|}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$， $e_2=p_2=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$， $e_3=\dfrac{p_3}{\|p_3\|}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$， …. ………... 9 分

令 $Q=(e_1,e_2,e_3)=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}}\\ 0 & 1 & 0\\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}$，

则 Q 为正交矩阵，且 $Q^{-1}AQ=Q^TAQ=\Lambda=\begin{pmatrix}0 & & \\ & 2 & \\ & & 2\end{pmatrix}$.

作正交变换 $x=Qy$，即 $\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}}\\ 0 & 1 & 0\\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix}$,

经过正交 $x=Qy$，二次型化为：

$$f(x_1,x_2,x_3)=x^TAx=(Qy)^TA(Qy)=y^T(Q^TAQ)y=y^T\Lambda y$$

$$=(y_1,y_2,y_3)\begin{pmatrix}0 & & \\ & 2 & \\ & & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix}=2y_2^2+2y_3^2.$$ ……………………..… 12 分

19. （1）设 $\boldsymbol{A}$ 的对应于特征值 $\boldsymbol{\lambda_2=\lambda_3=1}$ 的特征向量为 $\boldsymbol{p}=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$，

因为 $\boldsymbol{A}$ 为实对称矩阵，故 $\boldsymbol{(p_1,p)=0}$，即 $\boldsymbol{0x_1+x_2+x_3=0}$，

令 $\boldsymbol{x_1=k_1,x_3=k_2}$，则 $\boldsymbol{x_2=-k_2}$，得通解为 $\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}k_1\\-k_2\\k_2\end{pmatrix}=k_1\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}$，

故 $\boldsymbol{A}$ 对应于特征值 $\boldsymbol{\lambda_2=\lambda_3=1}$ 的特征向量为 $\boldsymbol{p_2}=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$， $\boldsymbol{p_3}=\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}$； ………… 3 分

（2）令 $\boldsymbol{e}_1=\dfrac{\boldsymbol{p}_1}{\|\boldsymbol{p}_1\|}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}, \boldsymbol{e}_2=\boldsymbol{p}_2=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \boldsymbol{e}_3=\dfrac{\boldsymbol{p}_3}{\|\boldsymbol{p}_3\|}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}$，

令 $\boldsymbol{Q}=(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3)=\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ \dfrac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\dfrac{1}{\sqrt{2}}\\ \dfrac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \dfrac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}$，则 $\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{\Lambda}=\begin{pmatrix}-1 & & \\ & 1 & \\ & & 1\end{pmatrix}$，

所以 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{Q}^{-1}$，

从而 $\boldsymbol{A}^{2022}=(\boldsymbol{Q}\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{Q}^{-1})(\boldsymbol{Q}\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{Q}^{-1})\cdots(\boldsymbol{Q}\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{Q}^{-1})=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{\Lambda}^{2022}\boldsymbol{Q}^{-1}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{E}\boldsymbol{Q}^{-1}=\boldsymbol{E}$． …… 6 分