第3章 习题 A

1. 设盒中有 2 个红球，3 个白球，从中每次任取一个球，连取二次.（1）有放回；（2）不放回. 记 X 与 Y 分别表示第一次与第二次取出的红球数，试写出两种情况的二维随机变量 (X,Y) 的分布律及 X 与 Y 的边缘分布律. 并说明 X 与 Y 是否独立.

解 （1）

$Y \backslash X$	0	1
0	$\frac{9}{25}$	$\frac{6}{25}$
1	$\frac{6}{25}$	$\frac{4}{25}$

X	0	1
P	$\frac{3}{5}$	$\frac{2}{5}$

Y	0	1
P	$\frac{3}{5}$	$\frac{2}{5}$

显然，$P\{X=i,Y=j\}=P\{X=i\}\cdot P\{Y=j\}$，所以 X 与 Y 独立

(2)

$Y \backslash X$	0	1
0	$\frac{6}{20}$	$\frac{6}{20}$
1	$\frac{6}{20}$	$\frac{2}{20}$

X	0	1
P	$\frac{3}{5}$	$\frac{2}{5}$

Y	0	1
P	$\frac{3}{5}$	$\frac{2}{5}$

显然，$P\{X=i,Y=j\}\neq P\{X=i\}\cdot P\{Y=j\}$ 所以，X 与 Y 不独立

2. 设二维随机变量 (X,Y) 的概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases} k(6-x-y), & 0<x<2, 2<y<4, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

求（1）常数 k；(2) $P\{X<1,Y<3\}$；（3）$P\{X<1.5\}$；（4）$P\{X+Y\leq 4\}$.

解 （1）由密度函数的性质可知

$$k\int_0^2\left[\int_2^4(6-x-y)\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}x=k[24-x^2\big|_0^2-y^2\big|_2^4]=k(24-4-12)=8k=1\Rightarrow k=\frac{1}{8};$$

（2）$P\{X<1,Y<3\}=\dfrac{1}{8}\int_0^1[\int_2^3(6-x-y)\mathrm{d}y]\mathrm{d}x=\dfrac{1}{8}(6-\dfrac{1}{2}x^2\Big|_0^1-\dfrac{1}{2}y^2\Big|_2^3)=\dfrac{3}{8}$；

（3）$P\{X<1.5\}=\dfrac{1}{8}\int_0^{1.5}[\int_2^4(6-x-y)\mathrm{d}y]\mathrm{d}x=\dfrac{1}{8}(18-x^2\Big|_0^{3/2}-\dfrac{3}{4}y^2\Big|_2^4)=\dfrac{27}{32}$；

（4）$P\{X+Y\le 4\}=\dfrac{1}{8}\int_0^2\left[\int_2^{4-x}(6-x-y)\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}x=\dfrac{1}{8}\int_0^2\left[(6-x)(2-x)-\dfrac{1}{2}y^2\Big|_2^{4-x}\right]\mathrm{d}x$

$$=\frac{1}{16}\int_0^2(12-8x+x^2)\mathrm{d}x=\frac{1}{16}\left[12-4x^2+\frac{1}{3}x^3\right]_0^2=\frac{2}{3}.$$

3. 设二维随机变量(X,Y)的分布函数为 $F(x,y)=a(b+\arctan\dfrac{x}{2})(c+\arctan\dfrac{y}{3})$.

求（1）系数a,b,c ;(2) (X,Y)的概率密度;（3）关于X与Y的边缘密度，并研究X与Y

的独立性.

解 （1） 由分布函数的性质知，对任意实数 y, $\lim\limits_{x\to-\infty}F(x,y)=0$，即

$a(b-\dfrac{\pi}{2})(c+\arctan\dfrac{y}{3})=0$，可得$b=\dfrac{\pi}{2}$，同样地，对任意实数 x, $\lim\limits_{y\to-\infty}F(x,y)=0$，即

$a(b+\arctan\dfrac{x}{2})(c+\arctan\dfrac{y}{3})=0$，可得$c=\dfrac{\pi}{2}$，又$\lim\limits_{\substack{x\to+\infty\\y\to+\infty}}F(x,y)=1$，即$a(b+\dfrac{\pi}{2})(c+\dfrac{\pi}{2})=1$，

把$a=b=\dfrac{\pi}{2}$代入上式可得$a=\dfrac{1}{\pi^2}$；

（2）(X,Y)的概率密度为

$$f(x,y)=\frac{\partial^2F(x,y)}{\partial x\partial y}=\frac{6}{\pi^2(x^2+4)(y^2+9)},-\infty<x,y<+\infty;$$

（3）由(X,Y)的分布函数可求得其关于X与Y的边缘分布函数分别为

$$F_X(x)=\lim_{y\to+\infty}F(x,y)=\lim_{y\to+\infty}\frac{1}{\pi^2}(\frac{\pi}{2}+\arctan\frac{x}{2})(\frac{\pi}{2}+\arctan\frac{y}{3})=\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}\arctan\frac{x}{2},-\infty<x<+\infty,$$

$$F_Y(y)=\lim_{x\to+\infty}F(x,y)=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\pi^2}(\frac{\pi}{2}+\arctan\frac{x}{2})(\frac{\pi}{2}+\arctan\frac{y}{3})=\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}\arctan\frac{y}{3},-\infty<y<+\infty,$$

从而可求得(X,Y)的分布函数可求得其关于X与Y的边缘密度函数分别为

$$f_X(x)=\frac{dF_X(x)}{dx}=\frac{2}{\pi(x^2+4)},-\infty<x<+\infty,$$

$$f_Y(y)=\frac{dF_Y(y)}{dy}=\frac{3}{\pi(y^2+9)},-\infty<y<+\infty\text{；}$$

显然，$F_X(x)\cdot F_Y(y)=F(x,y)$，所以，$X$ 与 Y 独立.

4. 设二维随机变量（X,Y）的联合分布函数为

$$F(x,y)=\begin{cases}1-\mathrm{e}^{-\lambda_1 x}-\mathrm{e}^{-\lambda_2 y}+\mathrm{e}^{-\lambda_1 x-\lambda_2 y-\lambda_{12}\max\{x,y\}}, & x>0,y>0,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

求（X,Y）的两个边缘分布函数.

解 由(X,Y)的分布函数可求得其关于 X 与 Y 的边缘分布函数分别为

$$F_X(x)=\lim_{y\to+\infty}F(x,y)=\begin{cases}1-\mathrm{e}^{-\lambda_1 x}, & x>0,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}\text{；}$$

$$F_Y(y)=\lim_{x\to+\infty}F(x,y)=\begin{cases}1-\mathrm{e}^{-\lambda_2 y}, & y>0,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}.$$

5. 一袋中装有 1 个红球，2 个白球，3 个黑球. 从中任取 4 个球，以 X 与 Y 分别表示 4 个球中红球及白球的数量. 求

（1）(X,Y)的分布律；

（2）求 $X=0$ 的条件下 Y 的分布律；

（3）求 $X=1$ 的条件下 Y 的分布律.

解（1）$P\{X=0,Y=0\}=P(\varnothing)=0,P\{X=0,Y=1\}=\dfrac{C_1^0C_2^1C_3^3}{C_6^4}=\dfrac{2}{15},P\{X=0,Y=2\}=\dfrac{C_1^0C_2^2C_3^2}{C_6^4}=\dfrac{3}{15},$

$P\{X=1,Y=0\}=\dfrac{C_1^1C_2^0C_3^3}{C_6^4}=\dfrac{1}{15},P\{X=1,Y=1\}=\dfrac{C_1^1C_2^1C_3^2}{C_6^4}=\dfrac{6}{15}$，$P\{X=1,Y=2\}=\dfrac{C_1^1C_2^2C_3^1}{C_6^4}=\dfrac{3}{15}$，

所以(X,Y)的分布律为

X \ Y	0	1	2
0	0	$\frac{2}{15}$	$\frac{3}{15}$
1	$\frac{1}{15}$	$\frac{6}{15}$	$\frac{3}{15}$

（2） $P\{Y=0\mid X=0\}=0$，$P\{Y=1\mid X=0\}=\dfrac{2}{5}$，$P\{Y=2\mid X=0\}=\dfrac{3}{5}$.

（3） $P\{Y=0\mid X=1\}=\dfrac{1}{10}$，$P\{Y=1\mid X=1\}=\dfrac{6}{10}$，$P\{Y=2\mid X=1\}=\dfrac{3}{10}$.

6．一射手进行射击，每次击中目标的概率为 $p(0<p<1)$,射击直至击中目标两次为止,设 X 表示首次击中目标所进行的射击次数,以 Y 表示总共进行的射击次数,试求 X 和 Y 的联合分布律、边缘分布律及条件分布律.

解 X 和 Y 的联合分布律为：

$$P\{X=m,Y=n\}=p^2(1-p)^{n-2},(n=2,3,\cdots;m=1,2,\cdots,n-1)\ ;$$

关于 X 和 Y 的边缘分布律分别为

$$P\{X=m\}=\sum_{n=m+1}^{\infty}p^2(1-p)^{n-2}=\frac{p^2(1-p)^{m+1-2}}{1-(1-p)}=p(1-p)^{m-1},m=1,2,\cdots;$$

$$P\{Y=n\}=\sum_{m=1}^{n-1}p^2(1-p)^{n-2}=(n-1)p^2(1-p)^{n-2},n=2,3,\cdots;$$

X 在 $Y=n$ 下的条件分布律为律

当 n=2, 3, …时，记 $q=1-p$

$$P\{X=m\mid Y=n\}=\frac{P\{X=m,Y=n\}}{P\{Y=n\}}=\frac{p^2q^{n-2}}{(n-1)p^2q^{n-2}}=\frac{1}{n-1},m=1,2,\cdots,n-1\ ;$$

Y 在 $X=m$ 下的条件分布律为律

当 m=1, 2, …时，记 $q=1-p$

$$P\{Y=n\mid X=m\}=\frac{P\{X=m,Y=n\}}{P\{X=m\}}=\frac{p^2q^{n-2}}{pq^{m-1}}=pq^{n-m-1},n=m+1,m+2,\cdots.$$

7. 以 X 表示某医院一天内诞生婴儿的个数，以 Y 记其中男婴的个数，设 X 与 Y 的联合分布律为 $P\{X=n,Y=m\}=\dfrac{\mathrm{e}^{-14}(7.14)^m(6.86)^{n-m}}{m!(n-m)!},m=0,1,\cdots,n,n=0,1,2,\cdots$. 试求条件分布 $P\{Y=m\mid X=n\}$.

解 $P\{X=n\}=\displaystyle\sum_{m=0}^{n}P\{X=n,Y=m\}=\sum_{m=0}^{n}\frac{\mathrm{e}^{-14}(7.14)^m(6.86)^{n-m}}{m!(n-m)!}=\frac{\mathrm{e}^{-14}}{n!}\sum_{m=0}^{n}C_n^m(7.14)^m(6.86)^{n-m}$

$$=\frac{(14)^n}{n!}e^{-14}, n=0,1,2,\cdots$$

所以，

$$P\{Y=m\mid X=n\}=\frac{P\{Y=m,X=n\}}{P\{X=n\}}=C_n^m\times 0.51^m\times 0.49^{n-m}, n=0,1,2,\cdots;m=0,1,\cdots,n\ .$$

8．已知二维随机变量 (X,Y) 的联合概率密度函数为 $f(x,y)=\begin{cases}1, & |y|<x,0<x<1,\\ 0, & \text{其他.}\end{cases}$，

求条件密度函数 $f(y\mid x)$.

解 当 0<x<1 时，$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}y=\int_{-\infty}^{-x}0\mathrm{d}y+\int_{-x}^{x}\mathrm{d}y+\int_{x}^{+\infty}0\mathrm{d}y=2x$ ，

当 $x\le 0$ 或 $x\ge 1$时，$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}y=\int_{-\infty}^{+\infty}0\mathrm{d}y=0$.

所以，随机变量 Y 在 X 下的条件密度为

$$f(y\mid x)=\frac{f(x,y)}{f_X(x)}=\begin{cases}\frac{1}{2x}, -x<y<x,0<x<1,\\ 0, \qquad \text{其它.}\end{cases}$$

9. 设二维随机变量 (X,Y) 的分布律为

$X \backslash Y$	1	2	3
1	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{18}$
2	$\frac{1}{3}$	a	b

问 a,b 取何值时，X 与 Y 相互独立？

解 由二维随机变量 (X,Y) 的分布律表可知，

$$p_{1\cdot}=P\{X=1\}=P\{X=1,Y=1\}+P\{X=1,Y=2\}+P\{X=1,Y=3\}=\frac{1}{6}+\frac{1}{9}+\frac{1}{18}=\frac{1}{3},$$

$$p_{2\cdot}=P\{X=2\}=1-P\{X=1\}=1-p_{1\cdot}=1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3};$$

$$p_{\cdot 1}=P\{Y=1\}=P\{X=1,Y=1+P\{X=1,Y=2\}=\frac{1}{6}+\frac{1}{3}=\frac{1}{2},$$

要 X 与 Y 相互独立，则必须

$$P\{X=1,Y=2\}=P\{X=1\}P\{Y=2\}\Rightarrow p_{\cdot 2}=P\{Y=2\}=\frac{P\{X=1,Y=2\}}{P\{X=1\}}=\frac{1/9}{1/3}=\frac{1}{3},$$

$p_{\cdot 3}=P\{Y=3\}=1-P\{Y=1\}-P\{Y=2\}=1-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$；

由 X 与 Y 相互独立，可得

$a=P\{X=2,Y=2\}=P\{X=2\}P\{Y=2\}=\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{2}{9},$

$b=P\{X=2,Y=3\}=P\{X=2\}P\{Y=3\}=\frac{2}{3}\times\frac{1}{6}=\frac{1}{9}.$

容易验证，当 $a=\frac{2}{9},b=\frac{1}{9}$ 时，$P\{X=i,Y=j\}=P\{X=i\}P\{Y=j\}(i=1,2,j=1,2,3.)$ 此时 X 与 Y 相互独立.

10. 设随机变量 X 与 Y 的联合分布律为

$X\backslash Y$	0	1
0	$\frac{2}{25}$	b
1	a	$\frac{3}{25}$
2	$\frac{1}{25}$	$\frac{2}{25}$

且 $P(Y=1\mid X=0)=\frac{3}{5}$，（1）　求常数 a,b 的值；（2）当 a,b 取（1）中的值时，X 与 Y 是否独立？为什么？

解 (1) 由联合分布律的性质可知

$$a+b=1-\frac{2}{25}-\frac{3}{25}-\frac{1}{25}-\frac{2}{25}=\frac{17}{25} \qquad （1）$$

$$P\{X=0\}=P\{X=0,Y=0\}+P\{X=0,Y=1\}=\frac{2}{25}+b，$$

由 $P(Y=1\mid X=0)=\frac{3}{5}$ 可得

$$P(Y=1\mid X=0)=\frac{P(X=0,Y=1)}{P(X=0)}=\frac{b}{2/25+b}=\frac{3}{5}\Rightarrow b=\frac{3}{25},$$

把 $b=\frac{3}{25}$ 代入（1）式可得 $a=\frac{17}{25}-b=\frac{17}{25}-\frac{3}{25}=\frac{14}{25}$；

（2）当 $a=\frac{14}{25},b=\frac{3}{25}$ 时，可求得 $P(X=0)=\frac{5}{25},P(Y=0)=\frac{17}{25}$，易见

$P(X=0,Y=0)=\frac{2}{25}\neq P(X=0)P(Y=0)$，因此，$X$ 与 Y 不独立.

11. 设随机变量 X 服从区间[0,1]上的均匀分布 $U(0,1)$．当观察到 $X=x,(0<x<1)$时,随机变量 Y 服从区间$(x,1)$上的均匀分布,求(1)(X,Y)的联合概率密度函数;(2)随机变量 X 在随机变量 $Y=y,(0<y<1)$下的条件密度.

解 （1）由题设条件可知，随机变量 X 的密度函数为 $f_X(x)=\begin{cases}1,0<x<1,\\0,其它.\end{cases}$，

随机变量 Y 在 $X=x$ 下的条件密度为 $f(y|x)=\begin{cases}\dfrac{1}{1-x},0<x<y<1,\\ 0, \quad\quad 其它.\end{cases}$

因此(X,Y)的联合概率密度函数为

$$f(x,y)=f_X(x)\cdot f(y|x)=\begin{cases}\dfrac{1}{1-x},0<x<y<1,\\ 0, \quad\quad 其它.\end{cases}$$

（2）当 $0<y<1$ 时，$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}x=\int_0^y\dfrac{1}{1-x}\mathrm{d}x=-\ln(1-y)$，所以随机变量 X 在随机变量 $Y=y,(0<y<1)$下的条件密度为

$$f(x|y)=\frac{f(x,y)}{f_Y(y)}=\begin{cases}-\dfrac{1}{(1-x)\ln(1-y)},0<x<y<1,\\ 0, \quad\quad\quad 其它.\end{cases}$$

12. 已知二维随机变量(X,Y)的密度函数为$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{-(x+\frac{1}{2}y)}, & x>0,y>0,\\ 0, & 其他.\end{cases}$

（1）求(X,Y)的分布函数；

（2）求关于 X 和 Y 的边缘概率密度，说明 X 和 Y 是否相互独立.

解 （1）当 $x\le 0$ 或 $y\le 0$ 时，$F(x,y)=\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y}0\mathrm{d}u\mathrm{d}v=0,$

当 $x>0$ 且 $y>0$ 时,

$$F(x,y)=\int_{-\infty}^{0}\mathrm{d}u\int_{-\infty}^{y}0\mathrm{d}v+\int_0^x\mathrm{d}u\int_{-\infty}^{0}0\mathrm{d}v+\int_0^x\mathrm{e}^{-u}\mathrm{d}u\int_0^y\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}v}\mathrm{d}v=(1-\mathrm{e}^{-x})(1-\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}y}),$$

所以(X,Y)的分布函数为$F(x,y)=\begin{cases}(1-\mathrm{e}^{-x})(1-\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}y}), & x>0,y>0,\\ 0, & 其他.\end{cases}$

（2）当 $x\le 0$ 时，$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}0\mathrm{d}y=0$，

当 $x>0$ 时，$f_X(x)=\int_{-\infty}^{0}0\mathrm{d}y+\int_0^{+\infty}\dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{-(x+\frac{1}{2}y)}\mathrm{d}y=\mathrm{e}^{-x}$，

所以(X,Y)关于 X 的边缘概率密度为 $f_X(x)=\begin{cases}\mathrm{e}^{-x}, & x>0,\\ 0, & 其他.\end{cases}$

当 $y\le 0$ 时，$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}0\mathrm{d}x=0$，

当 $y>0$ 时,

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{0}0\mathrm{d}x+\int_{0}^{+\infty}\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-(x+\frac{1}{2}y)}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}y},$$

所以 (X,Y) 关于 Y 的边缘概率密度为 $f_Y(y)=\begin{cases}\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}y}, & y>0,\\ 0, & 其他.\end{cases}$

显然有 $f_X(x)\cdot f_Y(y)=f(x,y)$，所以 X 与 Y 独立.

13. 设随机变量 X 和 Y 相互独立，且都服从均匀分布 $U(0,2)$，求随机变量 X 和 Y 之差的绝对值不超过 1 的概率.

解　由随机变量 X 和 Y 相互独立，且都服从均匀分布 $U(0,2)$ 可得 X 和 Y 的联合密度函数为

$$f(x,y)=f_X(x)\cdot f_Y(y)=\begin{cases}\frac{1}{4}, 0<x,y<2,\\ 0, \quad 其它.\end{cases}$$

因此随机变量 X 和 Y 之差的绝对值不超过 1 的概率为

$$P\{|X-Y|\le 1\}=1-P\{|X-Y|>1\}=1-\iint\limits_{\substack{|x-y|>1\\0<x<2\\0<y<2}}\frac{1}{4}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}.$$

14. 设二维随机变量 (X,Y) 的联合概率密度函数为 $f(x,y)=\begin{cases}A, x^2\le y\le x,\\ 0, \quad 其他.\end{cases}$

（1）求常数 A；

（2）求关于 X 和 Y 的边缘概率密度，问 X 和 Y 是否相互独立？

（3）求概率 $P\{0<Y<\frac{1}{2}\}$.

解　（1）由密度函数的性质 $\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=1$，即

$$A\int_0^1\mathrm{d}x\int_{x^2}^{x}\mathrm{d}y=A\int_0^1(x-x^2)\mathrm{d}x=\frac{1}{6}A=1\Rightarrow A=6;$$

（2）当 0<x<1 时，$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}x=\int_{x^2}^{x}6\mathrm{d}x=6x(1-x)$，

当 $x\le 0$ 或 $x\ge 1$ 时，$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}y=\int_{-\infty}^{+\infty}0\mathrm{d}y=0,$

所以 (X,Y) 关于 X 的边缘概率密度为 $f_X(x)=\begin{cases}6x(1-x), & 0<x<1,\\ 0, & 其他.\end{cases}$

同样地，当 0<y<1 时，$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}x=\int_{y}^{\sqrt{y}}6\mathrm{d}x=6(\sqrt{y}-y)$，

当 $y\le 0$ 或 $y\ge 1$ 时，$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}x=\int_{-\infty}^{+\infty}0\mathrm{d}x=0,$

所以 (X,Y) 关于 X 的边缘概率密度为 $f_Y(y)=\begin{cases}6(\sqrt{y}-y), & 0<y<1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$

显然，$f_X(x)\cdot f_Y(y)\ne f(x,y)$，所以，随机变量 X 与 Y 不独立；

（3）$P\{0<Y<\frac{1}{2}\}=\int_0^{\frac{1}{2}}6(\sqrt{y}-y)\mathrm{d}y=\left[4y^{3/2}-3y^2\right]_0^{\frac{1}{2}}=\sqrt{2}-\frac{3}{4}$.

15.　设随机变量 X 和 Y 相互独立，且 X 与 Y 的分布律分别为

X	1	2
P	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$

Y	0	1	2
P	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

求下列随机变量 X 和 Y 的函数的分布律：

（1）$Z=X+Y$；（2）$Z=XY$；（3）$Z=\max\{X,Y\}$；（4）$Z=\min\{X,Y\}$.

解　由设随机变量 X 和 Y 相互独立，且 X 与 Y 的分布律可得 X 与 Y 的联合分布表，并在此基础上列草表可得

(X,Y)	(1,0)	(1,1)	(1,2)	(2,0)	(2,1)	(2,2)
P	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$
$X+Y$	1	2	3	2	3	4
XY	0	1	2	0	2	4
$\max\{X,Y\}$	1	1	2	2	2	2
$\min\{X,Y\}$	0	1	1	0	1	2

由上面的草表，我们再把相同的值合并，并根据概率的可加性把相应的概率相加就可得所以随机变量函数的分别律，分表如下面表所示

（1）

$Z=X+Y$	1	2	3	4
P	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{5}{12}$	$\frac{1}{6}$

（2）

$Z=XY$	0	1	2	4
P	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{5}{12}$	$\frac{1}{6}$

（3）

$Z=\max\{X,Y\}$	1	2
P	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$

（4）

$Z=\min\{X,Y\}$	0	1	2
P	$\frac{1}{4}$	$\frac{7}{12}$	$\frac{1}{6}$

16. 设随机变量 X 和 Y 相互独立，且 $X\sim N(0,\ 2)$，$Y\sim N\ (0,\ 3)$，求 $Z=X+Y$ 的概率密度函数.

解 由 $X\sim N(0,\ 2)$，$Y\sim N\ (0,\ 3)$ 可知它们的密度函数分布为

$$f_X(x)=\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{4}},-\infty<x<+\infty\ ,\qquad f_Y(y)=\frac{1}{\sqrt{6\pi}}e^{-\frac{y^2}{6}},-\infty<y<+\infty\ ,$$

所以 $Z=X+Y$ 的概率密度函数为

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}f_X(x)f_Y(z-x)\mathrm{d}x=\frac{1}{24\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{4}-\frac{(z-x)^2}{6}}\mathrm{d}x=\frac{1}{24\pi}\mathrm{e}^{-\frac{z^2}{10}}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-\frac{(x-\frac{2}{5}z)^2}{2\cdot\frac{6}{5}}}\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{\sqrt{10\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{z^2}{10}}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{12\pi/5}}\mathrm{e}^{-\frac{(x-\frac{2}{5}z)^2}{\frac{12}{5}}}\mathrm{d}x=\frac{1}{\sqrt{10\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{z^2}{10}},-\infty<z<+\infty$$

（注：$f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{12\pi/5}}\mathrm{e}^{-\frac{(x-\frac{2}{5}z)^2}{\frac{12}{5}}}$ 为正态分布 $N(\frac{2}{5}z,\frac{6}{5})$ 的密度函数）

17. 设 X 与 Y 是两个相互独立的随机变量，它们的概率密度函数分别为

$$f_X(x)=\begin{cases}1, & 0\le x\le 1,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}\quad f_Y(y)=\begin{cases}\mathrm{e}^{-y}, & y>0,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

求随机变量 $Z=X+Y$ 的概率密度.

解 随机变量 $Z=X+Y$ 的概率密度为 $f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}f_X(x)f_Y(z-x)\mathrm{d}x$，

由 X 和 Y 的密度函数可知，而要 $f_X(x)f_Y(z-x)>0$，就必须 $\begin{cases}0<x<1\\ z-x>0\end{cases}$，所以

当 $0\le z\le 1$ 时，而要 $f_X(x)f_Y(z-x)>0$，就必须 $0<x<z$，此时有

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}f_X(x)f_Y(z-x)\mathrm{d}x=\int_0^z \mathrm{e}^{-(z-x)}\mathrm{d}x=\mathrm{e}^{-z}\cdot\mathrm{e}^{x}\Big|_0^z=1-\mathrm{e}^{-z}，$$

当 $z>1$ 时，而要 $f_X(x)f_Y(z-x)>0$，只要 $0<x<1$，此时有

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}f_X(x)f_Y(z-x)\mathrm{d}x=\int_0^1 \mathrm{e}^{x-z}\mathrm{d}x=\mathrm{e}^{x-z}\Big|_0^1=(\mathrm{e}-1)\mathrm{e}^{-z}，$$

当 $z<0$ 时，$f_X(x)f_Y(z-x)=0$，因此，$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}f_X(x)f_Y(z-x)\mathrm{d}x=0$，

所以，随机变量 $Z=X+Y$ 的概率密度为 $f_Z(z)=\begin{cases}1-\mathrm{e}^{-z}, & 0\le z\le 1,\\(\mathrm{e}-1)\mathrm{e}^{-z}, & z\ge 1,\\0, & 其他.\end{cases}$

18. 电子仪器由六个相互独立的部件组成，联结方式如图 3-10，设各个部件的使用寿命 X 服从相同的指数分布，其概率密度为 $f(x)=\begin{cases}\lambda\mathrm{e}^{-\lambda x}, & x>0,\\0, & x\le 0.\end{cases}$，求仪器使用寿命的概率密度.

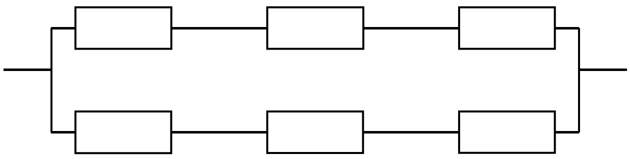

图 3-10

解　该仪器由两个子系统并联而成，第一、第二子系统都为三个部件构成的串联系统，不妨设第一个子系统的三个部件的寿命分别为 X_1,X_2,X_3，第一个子系统的三个部件的寿命分别为 X_4,X_5,X_6，由已知条件可得 X_i 的分布函数为 $F(x)=\begin{cases}1-\mathrm{e}^{-\lambda x}, x<0,\\0, \quad x\le 0.\end{cases}$，则第一、第二两个子系统的寿命分别为 $T_1=\min(X_1,X_2,X_3)$，$T_2=\min(X_4,X_5,X_6)$，则仪器使用寿命为 $T=\max(T_1,T_2)$，由各部件寿命相互独立都处相同的指数分布 $E(\lambda)$，容易 T_1,T_2 相互独立同分布，其分布函数为 $F_{T_i}(x)=1-[1-F(x)]^3=\begin{cases}1-\mathrm{e}^{-3\lambda x}, x>0,\\0, \quad x\le 0.\end{cases}$

即两个子系统的寿命同服从参数为 3λ 的指数分布 $E(3\lambda)$，其概率密度为

$f_{T_i}(x)=\begin{cases}3\lambda\mathrm{e}^{-3\lambda x}, & x>0,\\0, & x\le 0.\end{cases}$，其分布函数为 $F_{T_i}(x)=\begin{cases}1-\mathrm{e}^{-3\lambda x}, x<0,\\0, \quad x\le 0.\end{cases}$，该仪器寿命的分布

函数为$F_T(x)=\left[F_{T_i}(x)\right]^2=\begin{cases}\left[1-\mathrm{e}^{-3\lambda x}\right]^2, x<0, \\ 0, \quad x\le 0.\end{cases}$，所以仪器使用寿命的概率密度为

$$f_T(x)=F_T'(x)=\begin{cases}6\lambda\mathrm{e}^{-3\lambda x}(1-\mathrm{e}^{-3\lambda x}), & x>0, \\ 0, & x\le 0.\end{cases}$$

19. 设随机变量 X 和 Y 相互独立，求下列情况下，求 $P\{X+Y=m\}$ 和 $P\{X=k \mid X+Y=m\}$.

（1）X 和 Y 都服从参数为 n,p 的二项分布 $B(n,p)$；

(2) X 和 Y 分别服从参数为 λ_1 的泊松分布 $P(\lambda_1)$ 和 λ_2 的泊松分布 $P(\lambda_2)$；

解　(1) 首先记 $Z=X+Y$ 可以取 $0,1,2,\cdots,2n$ 等 $2n+1$ 个不同的可能值，且

$$P\{Z=m\}=\sum_{i=0}^{m}P\{X=i,Y=m-i\}=\sum_{i=0}^{m}P\{X=i\}P\{Y=m-i\}$$

在二项分布场合，上式中有些事件是不可能事件：

当 $i>n$ 时，$\{X=i\}$ 是不可能事件，所以只需要考虑 $i\le n.$

当 $m-i>n$ 时，$\{Y=m-i\}$ 是不可能事件，所以只需要考虑 $i\ge m-n.$

因此记　$a=\max\{0,m-n\}$，　$b=\min\{n,m\}$，则

$$P\{Z=m\}=\sum_{i=a}^{b}P\{X=i\}P\{Y=m-i\}$$

$$=\sum_{i=a}^{b}C_n^i p^i(1-p)^{n-i}\cdot C_n^{m-i}p^{m-i}(1-p)^{n-(m-i)}$$

$$=p^m(1-p)^{2n-m}\sum_{i=a}^{b}C_n^iC_n^{m-i}$$

利用组合乘积的计算公式$\sum_{i=a}^{b}C_n^iC_n^{m-i}=C_{2n}^m$代换原式可得

$$P\{Z=m\}=P\{X+Y=m\}=C_{2n}^m p^m(1-p)^{2n-m}, m=0,1,2,\cdots,2n.$$

$$P\{X=k \mid X+Y=m\}=\frac{P\{X=k,X+Y=m\}}{P\{X+Y=m\}}=\frac{P\{X=k\}P\{Y=m-k\}}{P\{X+Y=m\}}$$

$$=\frac{C_n^k p^k(1-p)^{n-k}\cdot C_n^{m-k}p^{m-k}(1-p)^{n-(m-k)}}{C_{2n}^m p^m(1-p)^{2n-m}}=\frac{C_n^k C_n^{m-k}}{C_{2n}^m},k=0,1,\cdots,m;$$

（2）$P\{X+Y=m\}=\sum_{i=0}^{m}P\{X=i,Y=m-i\}=\sum_{i=0}^{m}P\{X=i\}P\{Y=m-i\}$

$$=\sum_{i=0}^{m}\frac{\lambda_1^i}{i!}e^{-\lambda_1}\cdot\frac{\lambda_2^{m-i}}{(m-i)!}e^{-\lambda_2}=\frac{1}{m!}e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}\sum_{i=0}^{m}C_m^i\lambda_1^i\lambda_2^{m-i}$$

$$=\frac{(\lambda_1+\lambda_2)^m}{m!}e^{-(\lambda_1+\lambda_2)},m=0,1,2,\cdots.$$

$$P\{X=k\mid X+Y=m\}=\frac{P\{X=k,X+Y=m\}}{P\{X+Y=m\}}=\frac{P\{X=k\}P\{Y=m-k\}}{P\{X+Y=m\}}$$

$$=\frac{\frac{\lambda_1^k}{k!}e^{-\lambda_1}\cdot\frac{\lambda_2^{m-k}}{(m-k)!}e^{-\lambda_2}}{\frac{(\lambda_1+\lambda_2)^m}{m!}e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}}=C_m^k\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}\right)^k\left(1-\frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}\right)^{m-k},k=0,1,2,\cdots,m.$$

第 3 章　习题 B

1．随机变量 X 与 Y 都仅取 1，-1 两个值，且已知，

$P\{X=1\}=\frac{1}{2},P\{Y=1|X=1\}=\frac{1}{3}=P\{Y=-1|X=-1\}$.

（1）求 (X,Y) 的联合联合分布律；

（2）求 t 的方程 $t^2+(X+Y)t+(X+Y)=0$ 至少有一个实根的概率.

解（1）　$P\{X=1,Y=1\}=P\{X=1\}P\{Y=1\mid X=1\}=\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$,

$P\{X=1,Y=-1\}=P\{X=1\}-P\{X=1,Y=1\}=\frac{1}{2}-\frac{1}{6}=\frac{1}{3}$,

$P\{X=-1\}=1-P\{X=1\}=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$,

$P\{X=-1,Y=-1\}=P\{X=-1\}P\{Y=-1\mid X=-1\}=\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$,

$P\{X=-1,Y=1\}=P\{X=-1\}-P\{X=-1,Y=-1\}=\frac{1}{2}-\frac{1}{6}=\frac{1}{3}$,

所以为 (X,Y) 的联合联合分布律

$X \backslash Y$	-1	1
-1	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$
1	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$

（2）t 的方程 $t^2+(X+Y)t+(X+Y)=0$ 至少有一个实根的概率为

$$p=P\{(X+Y)^2-4(X+Y)\geq 0\}=P(\{X+Y\leq 0\}\cup\{X+Y\geq 4\})$$

$$=1-P(\{X+Y>0\}\cap\{X+Y<4\})=1-P\{X+Y>0\}(\because\{X+Y<4\}=\Omega)$$

$$=1-P\{X=1,Y=1\}=1-\frac{1}{6}=\frac{5}{6}.$$

2. 设某单位班车起点站上乘客人数 X 服从参数为 λ（$\lambda>0$）的泊松分布，每位乘客在中途下车的概率为 p $(0<p<1)$. 且各位乘客中途下车与否相互独立，以 Y 表示在中途下车的乘客数. 求

（1）在发车时有 n 个乘客的条件下，中途有 m 个人下车的概率；

（2）二维随机变量 (X,Y) 的分布律；

（3）关于 Y 的边缘分布律.

解　（1）在发车时有 n 个乘客的条件下，中途有 m 个人下车的概率为

$$P(Y=m|X=n)=C_n^m p^m(1-p)^{n-m}\quad,\quad 0\leq m\leq n,\quad n=0,1,2,\cdots;$$

（2）由于单位班车起点站上乘客人数 X 服从参数为 λ（$\lambda>0$）的泊松分布，即

$$P\{X=n\}=\frac{\lambda^n}{n!}\mathrm{e}^{-\lambda},n=0,1,2,\cdots$$

所以，二维随机变量 (X,Y) 的分布律为

$$P(X=n,Y=m)=P(X=n)P(Y=m\mid X=n)$$

$$=C_n^m p^m(1-p)^{n-m}\frac{\mathrm{e}^{-\lambda}}{n!}\lambda^n\quad,\quad 0\leq m\leq n,\quad n=0,1,2,\cdots$$

（3）(X,Y) 关于 Y 的边缘分布律为

$$P(Y=m)=\sum_{n=m}^{\infty}P(X=n,Y=m)=\sum_{n=m}^{\infty}C_n^m p^m(1-p)^{n-m}\frac{\lambda^n}{n!}\mathrm{e}^{-\lambda}=\frac{(\lambda p)^m}{m!}\mathrm{e}^{-\lambda}\sum_{n=m}^{\infty}\frac{[\lambda(1-p)]^m}{(n-m)!}$$

$$=\frac{(\lambda p)^m}{m!}\mathrm{e}^{-\lambda}\cdot\mathrm{e}^{\lambda(1-p)}=\frac{(\lambda p)^m\mathrm{e}^{-\lambda p}}{m!},m=0,1,2,\cdots$$

3. 设二维随机变量 (X,Y) 的概率密度为 $f(x,y)=\begin{cases}x+y\ ,0<x<1,0<y<1,\\ 0, \qquad\qquad 其他.\end{cases}$

求随机变量 $Z=X+Y$ 的概率密度.

解 随机变量 $Z=X+Y$ 的概率密度为 $f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,z-x)\mathrm{d}x$，

而要 $f(x,z-x)>0$，就必须 $0<x<1$ 且 $0<z-x<1$，

当 0<z<1 时，$0<x<1且0<z-x<1\Leftrightarrow 0<x<z$，此时 $f(x,z-x)=z>0$，因时，

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,z-x)\mathrm{d}x=\int_0^z z\mathrm{d}x=z^2,$$

当 $1\le z<2$ 时，$0<x<1且0<z-x<1\Leftrightarrow z-1<x<1$，此时 $f(x,z-x)=z>0$，因时，

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,z-x)\mathrm{d}x=\int_{z-1}^1 z\mathrm{d}x=2z-z^2,$$

当 $z\le 0$ 或 $z\ge 2$ 时，$\{x:0<x<1,0<z-x<1\}=\varnothing$，此时，$f(x,z-x)=0$，从而有

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,z-x)\mathrm{d}x=\int_{-\infty}^{+\infty}0\mathrm{d}x=0,$$

故 $$f_Z(z)=\begin{cases}z^2, & 0<z<1,\\ 2z-z^2, & 1\le z<2,\\ 0, & 其他.\end{cases}$$

4. 设二维随机变量 (X,Y) 的概率密度为 $f(x,y)=\begin{cases}2\mathrm{e}^{-2x-y}\ , x>0,y>0,\\ 0, \qquad\qquad 其他.\end{cases}$

求 $Z=\max\{X,Y\}$ 概率密度.

解 当 $z\le 0$ 时，

$$F_Z(z)=P\{Z\le z\}=P\{\max\{X,Y\}\le z\}=P\{X\le z,Y\le z\}$$

$$=\int_{-\infty}^z\mathrm{d}x\int_{-\infty}^z f(x,y)\mathrm{d}y=\int_{-\infty}^z\mathrm{d}x\int_{-\infty}^z 0\mathrm{d}y=0,$$

当 z>0 时，

$$F_Z(z)=P\{Z\le z\}=P\{\max\{X,Y\}\le z\}=P\{X\le z,Y\le z\}$$

$$=\int_{-\infty}^z\mathrm{d}x\int_{-\infty}^z f(x,y)\mathrm{d}y=\int_0^z 2\mathrm{e}^{-2x}\mathrm{d}x\int_0^z\mathrm{e}^{-y}\mathrm{d}y=(1-\mathrm{e}^{-2z})(1-\mathrm{e}^{-z}),$$

所以 $Z=\max\{X,Y\}$ 概率密度为

$$f_Z(z)=F_Z'(z)=\begin{cases}\mathrm{e}^{-z}+2\mathrm{e}^{-2z}-3\mathrm{e}^{-3z}, & z>0,\\ 0, & z\le 0.\end{cases}$$

5. 设随机变量 X 与 Y 相互独立，并且都服从标准正态分布 $N(0,1)$，求

（1） $Z=X^2+Y^2$ 概率密度；（2） $P\{Z\ge 4\}$.

解（1） 由于随机变量 X 与 Y 相互独立，并且都服从标准正态分布 $N(0,1)$，所以它们的联合密度为 $f(x,y)=f_X(x)\cdot f_Y(y)=\dfrac{1}{2\pi}\mathrm{e}^{-\frac{x^2+y^2}{2}},-\infty<x,y<+\infty$，

当 $z\le 0$ 时，$F_Z(z)=P\{X^2+Y^2\le z\}=0,$

当 $z>0$ 时，$F_Z(z)=P\{X^2+Y^2\le z\}=\dfrac{1}{2\pi}\iint\limits_{x^2+y^2\le z}\mathrm{e}^{-\frac{x^2+y^2}{2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\dfrac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\,\theta\int_0^{\sqrt{z}}r\mathrm{e}^{-\frac{r^2}{2}}dr$

$$=\frac{1}{2\pi}\cdot 2\pi\cdot\left[-\mathrm{e}^{-\frac{r^2}{2}}\right]_0^{\sqrt{z}}=1-\mathrm{e}^{-\frac{z}{2}},$$

所以，$Z=X^2+Y^2$ 的密度函数为

$$f_Z(z)=F_Z'(z)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}z}, & z>0,\\ 0, & z\le 0.\end{cases}$$

（2） $P\{Z\ge 4\}=1-P\{Z<4\}=1-P\{Z\le 4\}=1-F_z(4)=\mathrm{e}^{-\frac{4}{2}}=\mathrm{e}^{-2}$.

6. 设二维随机变量 (X,Y) 服从 $D=\{(x,y)\big|1\le x\le 3,1\le x\le 3\}$ 上的均匀分布，求 $Z=\big|X-Y\big|$ 概率密度.

解 随机变量 (X,Y) 服从 $D=\{(x,y)\big|1\le x\le 3,1\le x\le 3\}$ 上的均匀分布，所以其密度函数为

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{4},1<x,y<3,\\ 0,\quad 其它.\end{cases}$$

当 $z\le 0$ 时，$F_Z(z)=P\{Z\le z\}=P\{|X-Y|\le z\}=0$；

当 $z\ge 2$，$F_Z(z)=P\{Z\le z\}=P\{|X-Y|\le z\}=P(\Omega)=1$；

当 $0<z<2$ 时，

$$F_Z(z)=P\{Z\le z\}=P\{|X-Y|\le z\}=\iint\limits_{\substack{|x-y|\le 2\\ 1<x<3\\ 1<y<3}}\frac{1}{4}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=1-\frac{(2-z)^2}{4}.$$

所以，$Z=\left|X-Y\right|$ 概率密度为

$$f_Z(z)=F_Z'(z)=\begin{cases}\frac{1}{2}(2-z), & 0<z<2,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

7. 设随机变量 X 与 Y 相互独立，并且 X 为离散型分布随机变量，它的分布律为 $P(X=i\}=\frac{1}{4},(i=0,1,2,3)$，而随机变量 Y 为连续型随机变量，其概率密度函数为 $f(y)$，求随机变量 $Z=X+Y$ 的概率密度 $f_Z(z)$.

解　显然 $Z=X+Y$ 是连续型随机变量，下面我们根据分布函数法来求其概率分布．设 $Z=X+Y$ 的分布函数和概率密度函数分别为 $F_Z(z)$ 和 $f_Z(z)$，则对任意实数 z

$$F_Z(z)=P\{Z\le z\}=P\{X+Y\le z\}=\sum_{i=0}^{3}P\{X+Y\le z\mid X=i\}P\{X=i\}$$

$$=\frac{1}{4}\sum_{i=0}^{3}P\{Y=z-i\mid X=i\}=\frac{1}{4}\sum_{i=0}^{3}P\{Y=z-i\}$$

$$=\frac{1}{4}\sum_{i=0}^{3}\int_{-\infty}^{z-i}f(y)\mathrm{d}y$$

由此可得 $Z=X+Y$ 的密度函数为

$$f_Z(z)=F_Z'(z)=\frac{1}{4}\left[f(z)+f(z-1)+f(z-2)+f(z-3)\right].$$

8. 设(X,Y)服从区域 $D:\{(x,y)\mid 0\le y\le 1-x^2\}$ 上的均匀分布：(1)写出(X,Y)的概率密度；(2)求 X 和 Y 的边缘密度函数；(3)求 $X=-\frac{1}{2}$ 时 Y 的条件密度函数和 $Y=\frac{1}{2}$ 时 X 的条件密度函数;(4)求 $P((X,Y)\in B)$,其中区域 $B:\{(x,y)\mid y\ge x^2\}$.

解　（1）容易求得区域 $D:\{(x,y)\mid 0\le y\le 1-x^2\}$ 的面积为 $\int_{-1}^{1}(1-x^2)\mathrm{d}x=2-\frac{1}{3}x^3\Big|_{-1}^{1}=\frac{4}{3}$,

所以(X,Y)的概率密度为 $f(x,y)=\begin{cases}\frac{3}{4},0\le y\le 1-x^2\\ 0, \quad 其它\end{cases}$；

（2）当$-1<x<1$时，$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}y=\int_0^{1-x^2}\frac{3}{4}\mathrm{d}y$，

当$|x|\ge 1$时，$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}y=\int_{-\infty}^{+\infty}0\mathrm{d}y=0,$

所以(X,Y)关于 X 的边缘密度函数为 $f_X(x)=\begin{cases}\frac{3(1-x^2)}{4},-1<x<1\\ 0, \quad 其他\end{cases}$；

当 0<y<1 时，$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}x=\int_{-\sqrt{1-y}}^{\sqrt{1-y}}\frac{3}{4}\mathrm{d}x=\frac{3}{2}\sqrt{1-y}$，

当 $y\le 0$ 或 $y\ge 1$时，$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}x=\int_{-\infty}^{+\infty}0\mathrm{d}x=0$，

所以(X,Y)关于 Y 的边缘密度函数为 $f_Y(y)=\begin{cases}\frac{3}{2}\sqrt{1-y},0<y<1\\ 0, \quad 其他\end{cases}$；

（3）由（2）可知在 $X=-\frac{1}{2}$时 Y 的条件密度函数为

$$f(y|x=-\frac{1}{2})=\frac{f(-\frac{1}{2},y)}{f_X(-\frac{1}{2})}=\begin{cases}\frac{3/4}{3/16},0<y<1-(-\frac{1}{2})^2\\ 0, \quad 其它\end{cases}=\begin{cases}\frac{4}{3},0<y<\frac{3}{4}\\ 0, \quad 其他\end{cases};$$

而 $Y=\frac{1}{2}$时 X 的条件密度函数为

$$f(x|y=\frac{1}{2})=\frac{f(x,\frac{1}{2})}{f_Y(\frac{1}{2})}=\begin{cases}\frac{3/4}{3/2\sqrt{2}},-\frac{\sqrt{2}}{2}<x<\frac{\sqrt{2}}{2}\\ 0, \quad 其它\end{cases}=\begin{cases}\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2}<x<\frac{\sqrt{2}}{2}\\ 0, \quad 其他\end{cases};$$

（4）$P\{(X,Y)\in B\}=\iint_B f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{3}{4}\int_{-\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\mathrm{d}x\int_{x^2}^{1-x^2}\mathrm{d}y=\frac{3}{2}\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}(1-2x^2)\mathrm{d}x=\frac{\sqrt{2}}{2}.$

9. 设随机变量 X 与 Y 独立，服从相同的柯西分布，它们的密度函数分别为

$$f_X(x)=\frac{1}{\pi(1+x^2)},(-\infty<x<+\infty),f_Y(y)=\frac{1}{\pi(1+y^2)},(-\infty<y<+\infty)$$

证明：$U=\frac{1}{2}(X+Y)$服从同一柯西分布.

证明 由于随机变量 X 与 Y 独立，所以其联合密度函数为

$$f(x,y)=f_X(x)\cdot f_Y(y)=\frac{1}{\pi^2}\frac{1}{(1+x^2)(1+y^2)},-\infty<x,y<+\infty \text{ ,}$$

$$F_U(z)=P\{U\le z\}=P\{\frac{X+Y}{2}\le z\}=P\{X+Y\le 2z\}=\frac{1}{\pi^2}\iint\limits_{x+y\le 2z}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\frac{1}{\pi^2}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{2z-x}\frac{1}{(1+x^2)(1+y^2)}\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}x \xlongequal{y=2t-x} \frac{2}{\pi^2}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{z}\frac{1}{(1+x^2)[1+(x-2t)^2]}\mathrm{d}t\right]\mathrm{d}x$$

$$=\frac{2}{\pi^2}\int_{-\infty}^{z}\left[\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{(1+x^2)[1+(x-2t)^2]}\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}t$$

所以$U=\frac{1}{2}(X+Y)$服从的密度函数为

$$f_U(z)=F_U'(z)=\frac{2}{\pi^2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{(1+x^2)[1+(x-2z)^2]}\mathrm{d}x=\frac{1}{2\pi^2 z(1+z^2)}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\frac{x+z}{1+x^2}-\frac{x-3z}{1+(x-2z)^2}\right]\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{2\pi^2 z(1+z^2)}\left[\frac{1}{2}\ln\frac{1+x^2}{1+(x-2z)^2}+z\arctan x+z\arctan(x-2z)\right]_{-\infty}^{+\infty}$$

$$=\frac{1}{\pi(1+z^2)},-\infty<z<+\infty$$
,

即$U=\frac{1}{2}(X+Y)$服从同一柯西分布.

10. 设随机变量 X,Y 相互独立且服从同一分布，证明：

$$P\{a<\min(X,Y)\le b\}=[P\{X>a\}]^2-[P\{X>b\}]^2 .$$

证明　$P\{a<\min(X,Y)\le b\}=P\{\min(X,Y)>a\}-P\{\min(X,Y)>b\}$

$$=P\{X>a,Y>a\}-P\{X>b,Y>b\}=P\{X>a\}P\{Y>a\}-P\{X>b\}P\{Y>b\}$$

$$=[P\{X>a\}]^2-[P\{X>b\}]^2 .$$