2020-2021 学年 2 学期线性代数 A 答案

1. C； 2. A； 3. A； 4. B； 5. D

6. 2； 7. $\frac{1}{32}$； 8. $-\frac{1}{2}$； 9. 0； 10. 2； 11. 0

12：解法一：将 D_5 按第 4 行展开，又将 D_5 中第 2 行元素与第 4 行对应元素的代数余子式相乘并求和，得 $\begin{cases}(A_{41}+A_{42}+A_{43})+2(A_{44}+A_{45})=27,\\ 2(A_{41}+A_{42}+A_{43})+(A_{44}+A_{45})=0,\end{cases}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots 7'$

所以 $A_{41}+A_{42}+A_{43}=\dfrac{\begin{vmatrix}27 & 2\\ 0 & 1\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}1 & 2\\ 2 & 1\end{vmatrix}}=\dfrac{27}{-3}=-9,\quad A_{44}+A_{45}=\dfrac{\begin{vmatrix}1 & 27\\ 2 & 0\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}1 & 2\\ 2 & 1\end{vmatrix}}=\dfrac{-54}{-3}=18\cdots\cdots 9'$.

解法二：将 $A_{41}+A_{42}+A_{43}$ 理解成 D_5 的第 4 行元素换成 $(1,1,1,0,0)$ 后按第 4 行展开，

将 $A_{44}+A_{45}$ 理解成 D_5 的第 4 行元素换成 $(0,0,0,1,1)$ 后按第 4 行展开，则

$$A_{41}+A_{42}+A_{43}=\begin{vmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5\\ 2 & 2 & 2 & 1 & 1\\ 3 & 1 & 2 & 4 & 5\\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0\\ 4 & 3 & 1 & 5 & 0\end{vmatrix}=-9\cdots\cdots 5'$$

$$A_{44}+A_{45}=\begin{vmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5\\ 2 & 2 & 2 & 1 & 1\\ 3 & 1 & 2 & 4 & 5\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1\\ 4 & 3 & 1 & 5 & 0\end{vmatrix}=18\cdots\cdots\cdots 9'$$.

解法三：直接计算 $A_{4j}=(-1)^{4+j}M_{4j},(j=1,2,3,4,5)$，然后计算

$A_{41}+A_{42}+A_{43}=-9\cdots\cdots\cdots 5'$，和 $A_{44}+A_{45}=18\cdots\cdots\cdots 9'$.

13. $|A|=4,$所以 A 可逆$\cdots\cdots\cdots\cdots 1'$

在等式两边左乘矩阵 A， $AA^{*}X=4AA^{-1}+2AX\Rightarrow(2E-A)X=2E\cdots\cdots\cdots 5'$

$$X=\begin{pmatrix}1&0&1\\1&1&0\\0&1&1\end{pmatrix}\cdots\cdots\cdots 9'$$

14. $\begin{pmatrix}\alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&-1&3&-2\\1&-3&2&-6\\1&5&-1&10\\3&1&p+2&p\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&-1&3&-2\\0&-2&-1&-4\\0&0&1&0\\0&0&0&p-2\end{pmatrix}\cdots 6'$

当 $p=2$ 时，该向量组线性相关。$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots 7'$

此时，$R\begin{pmatrix}\alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4\end{pmatrix}=3,\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 为一个极大无关组$\cdots\cdots\cdots 9'$

15. 设存在一组数 x_1,x_2,x_3 使得 $x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+x_3\alpha_3=\beta$，即$\begin{cases}x_1+x_2+ax_3=-2,\\x_1+ax_2+x_3=-2,\\ax_1+x_2+x_3=a-3,\end{cases}$

增广矩阵$\begin{pmatrix}1&1&a&-2\\1&a&1&-2\\a&1&1&a-3\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&a&-2\\0&a-1&1-a&0\\0&0&-(a-1)(a+2)&3(a-1)\end{pmatrix}\cdots 4'$

(1)当$a\neq 1$且$a\neq -2$时，$R(A)=R(\overline{A})=3,$方程组有唯一解，
β可由$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$唯一线性表示$\cdots 5'$

(2)当$a=-2$时，$R(A)<R(\overline{A}),$方程组无解，β不可由$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性表示$\cdots 6'$

(2)当$a=1$时，$R(A)=R(\overline{A})=2<3,$方程组有无穷多解，$\beta$可由$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性表示，且表达式不唯一

同解方程组为$x_1+x_2+x_3=-2,$令$x_2=k_1,x_3=k_2,x_1=-2-k_1-k_2.$
则$\beta=(-2-k_1-k_2)\alpha_1+k_1\alpha_2+k_2\alpha_3.\cdots\cdots 9'$

16. 特征方程为 $|A-\lambda E|=\begin{vmatrix}-\lambda&0&1\\1&1-\lambda&a\\1&0&-\lambda\end{vmatrix}=-(\lambda-1)^2(\lambda+1)=0$，故特征值为

$\lambda_1=-1,\lambda_2=\lambda_3=1\cdots\cdots 3'$。

对于单根 $\lambda_1=-1,$ 可求线性无关特征向量恰有 1 个，而对应于 $\lambda_2=\lambda_3=1$，要使矩阵能够对角化，应该有 2 个线性无关的特征向量，即 $(A-E)x=0$ 有 2 个线性无关的解，也就

是：$R(A-E)=1\cdots\cdots\cdots6'$。

由 $A-E=\begin{pmatrix}-1&0&1\\1&0&a\\1&0&-1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&0&a+1\\0&0&0\end{pmatrix}$

求得 $a+1=0$, 即 $a=-1$ 时矩阵 A 可以对角化。$\cdots\cdots\cdots9'$

17. 解：(1)二次型的矩阵$A=\begin{pmatrix}0&a&1\\a&0&1\\1&1&0\end{pmatrix}\cdots\cdots1'$

已知二次型在正交变换下的标准型，则 A 的特征值为 λ_1=λ_2=-1，λ_3=2$\cdots\cdots\cdots2'$

故$|A|$=$2a=2\Rightarrow a=1\cdots\cdots4'$，$A$=$\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&1&0\end{pmatrix}$.

当 λ_1=λ_2=-1时,$(A+E)x=0\Rightarrow x_1+x_2+x_3=0$的基础解系为：

$$p_1=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix},p_2=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix};\cdots\cdots\cdots7'$$

当 λ_3=2时,$(A\text{-}2E)x=0\Rightarrow\begin{cases}x_1\text{-}x_3=0\\x_2\text{-}x_3=0\end{cases}$的基础解系为：$p_1=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix};\cdots\cdots\cdots10'$

将 p_1,p_2 正交化：

令 η_1=$p_1=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix},\eta_2$=$p_2-\dfrac{(\eta_1,p_2)}{(\eta_1,\eta_1)}\eta_1=\dfrac{1}{2}\begin{pmatrix}-1\\-1\\2\end{pmatrix}$, 则 η_1,η_2,p_3 两两正交$\cdots13'$

将 η_1,η_2,p_3 单位化：

$$e_1=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix},e_2=\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}-1\\-1\\2\end{pmatrix},e_3=\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\cdots\cdots\cdots14'$$

则 $Q=\begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}\cdots\cdots\cdots 15'$

18. **由题设，得** $B=A^2-2A+2E=A^2-2A+A^3=A(A+2E)(A-E)\cdots\cdots\cdots 3'$

下面先证明 $A, A+2E, A-E$ 都是可逆矩阵，并求它们的逆阵.

$A^3=2E\Rightarrow |A|\neq 0,$ 则 A 可逆，且 $A^{-1}=\frac{1}{2}A^2$； $\cdots\cdots\cdots 4'$

$(A+2E)(A^2-2A+E^2)=A^3+8E=10E$,则 $(A+2E)^{-1}=\frac{1}{10}(A^2-2A+4E)$;$\cdots 5'$

$(A-E)(A^2+A+E^2)=A^3-E^3=E$,则 $(A-E)^{-1}=A^2+A+E$ $\cdots\cdots\cdots 6'$

所以 $B^{-1}=(A-E)^{-1}(A+2E)^{-1}A^{-1}=\frac{1}{10}(A^2+3A+4E)$. $\cdots\cdots\cdots 7'$