2020/2021 学年 第二学期《线性代数 B》试卷 A 答案（大农类专业 2 学分）

一、选择题:（每题 3 分，共 18 分）

1. D；　2. C；　3. D；　4. A；　5. B；　6. B.

二、填空题:（每题 3 分，共 18 分）

7. 2；　8. $-\frac{1}{2}$；　9. $-\frac{1}{2}$；　10. -1；　11. 126；　12. 2.

三、计算与证明

13. $|A|=3$，由 $AA^*=A^*A=|A|E=3E$，

在 $ABA^*=2BA^*+E$ 两边右乘矩阵 A： $ABA^*A=2BA^*A+A$，

即 $3AB=6B+A$，又即 $3(A-2E)B=A$，

两边取行列式得：$3^3\cdot|A-2E|\cdot|B|=|A|$，

因为 $|A-2E|=\begin{vmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&-1\end{vmatrix}=1$，所以 $|B|=\frac{1}{9}$. …………………………………….. 8 分

14. 按第 1 列展开得：$D_5=5D_4-6D_3$，…………………………………….…...… 3 分

故 $D_5-2D_4=3(D_4-2D_3)=3^2(D_3-2D_2)=3^3(D_2-2D_1)=3^5$，

所以 $D_5=3^5+2D_4=3^5+2(3^4+2D_3)=3^5+2\cdot3^4+2^2D_3=3^5+2\cdot3^4+2^2(3^3+2D_2)$

$=3^5+2\cdot3^4+2^2\cdot3^3+2^3D_2=3^5+2\cdot3^4+2^2\cdot3^3+2^3(3^2+2D_1)$

$=3^5+2\cdot3^4+2^2\cdot3^3+2^3\cdot3^2+2^4D_1=3^5+2\cdot3^4+2^2\cdot3^3+2^3\cdot3^2+2^4(2+3)$

$=3^5+2\cdot3^4+2^2\cdot3^3+2^3\cdot3^2+2^4(3+2)=3^5+2\cdot3^4+2^2\cdot3^3+2^3\cdot3^2+2^4\cdot3+2^5$

$=\frac{3^6-2^6}{3-2}=665$. ……………………………………………………..……… 8 分

15. $(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)=\begin{pmatrix}1&0&1&2\\-1&3&-1&1\\2&1&2&5\\4&2&0&6\end{pmatrix}\xrightarrow{行}\begin{pmatrix}1&0&1&2\\0&1&0&1\\0&0&1&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}\xrightarrow{行}\begin{pmatrix}1&0&0&1\\0&1&0&1\\0&0&1&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}$

故 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 为其一个极大线性无关组，………………………………………………….. 4 分

且 $\alpha_4=\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3$.　…………………………………………………………… …… 8 分

16. 设存在一组数 $k_0,k_1,\cdots,k_r$ 使得 $k_0\alpha_0+k_1\alpha_1+\cdots+k_r\alpha_r=0$，　（1）

上式两边左乘 A 得：$k_0A\alpha_0+k_1A\alpha_1+\cdots+k_rA\alpha_r=0$，

即：　$k_0b=0$，

因 $b\neq 0$，故 $k_0=0$，

将 $k_0=0$ 代入（1）式得：$k_1\alpha_1+\cdots+k_r\alpha_r=0$，

因为 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 是 $Ax=0$ 的基础解系，

故 $k_1=k_2=\cdots=k_r=0$，

所以 $k_0=k_1=\cdots=k_r=0$，

即向量组 $\alpha_0,\alpha_1,\cdots,\alpha_r$ 线性无关．……………………………………………….. .. 10 分

17. 设存在一组数 x_1,x_2,x_3 使得 $x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+x_3\alpha_3=\beta$，即 $\begin{cases} x_1-x_2-x_3=2, \\ 2x_1+ax_2+x_3=a, \\ -x_1+x_2+ax_3=-2, \end{cases}$

增广矩阵为：$\overline{A}=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & -2 \\ 2 & a & 1 & a \\ -1 & 1 & a & -2 \end{array}\right)\rightarrow\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & a+2 & 3 & a-4 \\ 0 & 0 & a-1 & 0 \end{array}\right)$，………..………3 分

（1）　当 $a\neq -2$ 且 $a\neq 1$ 时，　$R(A)=R(\overline{A})=3$，方程组有唯一解，

β 可由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 唯一线性表示；…………………………….…...………..…. 6 分

（2）　当 $a=-2$ 时，增广矩阵 $\overline{A}=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & -2 & -2 \end{array}\right)\rightarrow\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$，

$R(A)=2, R(\overline{A})=3$，$R(A)\neq R(\overline{A})$，方程组无解，

β 不能由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表示；……………………………………...………...….. 9 分

（3）　当 $a=1$ 时，增广矩阵 $\overline{A}=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -2 \end{array}\right)\rightarrow\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$，

$R(A)=R(\overline{A})=2<3$，方程组有无穷多解，

β 可由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表示，但表示式不唯一，

其同解方程组为$\begin{cases} x_1 = 1, \\ x_2 + x_3 = -1 \end{cases}$

令 $x_3 = k$，则 $x_1 = 1, x_2 = -1-k$，

则 $\beta = \alpha_1 + (-1-k)\alpha_2 + k\alpha_3$，$(k \in R)$． ……………… …… ……… ……..12 分

18.（1）二次型的矩阵为 $A = \begin{pmatrix} a & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix}$，

因为二次型在正交变换 $x = Qy$ 下的标准形为 $2y_1^2 + 2y_2^2 - 3y_3^2$，

所以 A 的特征值为特征值为 $\lambda_1 = \lambda_2 = 2, \lambda_3 = -3$，

故有 $a+2-2 = 2+2-3$，即 $a = 1$． …………………… ……… ……………3 分

所以 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix}$，

（2）当 $\lambda_1 = \lambda_2 = 2$ 时，求 $(A-2E)x = 0$ 的基础解系：

$A - 2E = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$，同解方程组为 $x_1 \quad -2x_3 = 0$，

令 $x_2 = k_1, x_3 = k_2$，则 $x_1 = 2k_2$，得通解为 $x = \begin{pmatrix} 2k_2 \\ k_1 \\ k_2 \end{pmatrix} = k_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + k_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$，

故 A 对应于特征值 $\lambda_1 = \lambda_2 = 2$ 的特征向量为 $p_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$，$p_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$； …… …5 分

当 $\lambda_3 = -3$ 时，求 $(A+3E)x = 0$ 的基础解系：

$A + 3E = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 2 \\ 0 & 5 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$，同解方程组为$\begin{cases} x_1 \quad + \dfrac{1}{2}x_3 = 0 \\ x_2 = 0 \end{cases}$，

令 $x_3 = 2k$，则 $x_1 = -k, x_2 = 0$，得通解为 $x = \begin{pmatrix} -k \\ 0 \\ 2k \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$，

故 A 对应于特征值 $\lambda_3=2$ 的特征向量为 $p_3=\begin{pmatrix}-1\\0\\2\end{pmatrix}$．…………………………..……7 分

由于 p_1,p_2,p_3 已两两正交，故只需将 p_1,p_2,p_3 单位化：

令 $e_1=\frac{p_1}{\|p_1\|}=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$， $e_1=\frac{p_2}{\|p_2\|}=\frac{1}{\sqrt5}\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}$， $e_3=\frac{p_3}{\|p_3\|}=\frac{1}{\sqrt5}\begin{pmatrix}-1\\0\\2\end{pmatrix}$， …. ………... 10 分

令 $Q=(e_1,e_2,e_3)=\begin{pmatrix}0&\frac{2}{\sqrt5}&-\frac{1}{\sqrt5}\\1&0&0\\0&\frac{1}{\sqrt5}&\frac{2}{\sqrt5}\end{pmatrix}$，

则 Q 为正交矩阵，且 $Q^{-1}AQ=Q^TAQ=\Lambda=\begin{pmatrix}2&&\\&2&\\&&-3\end{pmatrix}$.

作正交变换 $x=Qy$， 即 $\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&\frac{2}{\sqrt5}&-\frac{1}{\sqrt5}\\1&0&0\\0&\frac{1}{\sqrt5}&\frac{2}{\sqrt5}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix}$,

将二次型 f 化为标准形： $f=x^TAx=(Qy)^TA(Qy)=y^T(Q^TAQ)y=y^T\Lambda y$

$$=(y_1,y_2,y_3)\begin{pmatrix}2&&\\&2&\\&&-3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix}=2y_1^2+2y_2^2-3y_3^2,$$

故 $Q=\begin{pmatrix}0&\frac{2}{\sqrt5}&-\frac{1}{\sqrt5}\\1&0&0\\0&\frac{1}{\sqrt5}&\frac{2}{\sqrt5}\end{pmatrix}$ 为所用的正交变换矩阵． …. ……………………..… 12 分

19. （1）设存在一组数 k_1,k_2 使得 $k_1\alpha+k_2A\alpha=0$，

若 $k_2\neq0$，则 $A\alpha=-\frac{k_1}{k_2}\alpha$， 故 α 是 A 的对应于特征值 $-\frac{k_1}{k_2}$ 的特征向量，与已知条件

矛盾，故 $k_2=0$， 所以 $k_1\alpha=0$，

因为$\alpha \neq 0$，所以$k_1 = 0$，

所以$k_1 = k_2 = 0$， 故$\alpha, A\alpha$线性无关， 故P可逆． ……...……...……… 3 分

（2）因为$A^2\alpha = 6\alpha - A\alpha$，

所以$AP = A(\alpha, A\alpha) = (A\alpha, A^2\alpha) = (A\alpha, 6\alpha - A\alpha) = (\alpha, A\alpha)\begin{pmatrix} 0 & 6 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = PB$，

由P可逆知$P^{-1}AP = B = \begin{pmatrix} 0 & 6 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$．

由$|B - \lambda E| = \begin{vmatrix} -\lambda & 6 \\ 1 & -1-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda - 2)(\lambda + 3) = 0$，

得B的特征值为：$\lambda_1 = 2, \lambda_2 = -3$，故$A$的特征值也为：$\lambda_1 = 2, \lambda_2 = -3$，

因为$\lambda_1 \neq \lambda_2$，所以A相似于对角矩阵$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$． ……………………...……… 6 分