本试卷适应范围 经济管理类 （3 学分）

南京农业大学试题纸

2019-2020 学年 2 学期　课程类型：必修　试卷类型：A

课程号 MATH2117　课程名 线性代数　学分 3

学号 ________　姓名 ________　班级 ________

装订线

题号	一	二	三	四	总分	签名
得分						

约定: A^T 为矩阵 A 的转置，$|A|$ 为方阵 A 的行列式，A^* 为方阵 A 的伴随阵，I 为单位阵。

一、判断题(共 5 题,一题 2 分,共 10 分)

1. 设 n 阶方阵 A 满足 $A^2-I=O, I$ 是 n 阶单位阵，则必有 $|A|=1.$

答案：错误。

2、 $\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}$是标准形

答案：错误。

3、 设A,B都是$m\times n$ 矩阵，则 A与B 等价的充要条件是 $R(A)=R(B).$

答案：正确。

4、设α_0是非齐次线性方程组$Ax=b$的一个解，α_1,α_2是$Ax=O$的基础解系，则

$\alpha_0,\alpha_1,\alpha_2$的线性组合是$Ax=b$的解。

答案：错误。

5、$\begin{pmatrix}1&2&1\\0&2&0\\0&0&3\end{pmatrix}$不能相似对角化。

装订线

答案：错误

二、选择题(共 15 题,一题 2 分,共 30 分)

1. 设A,B为n 阶方阵，下列命题正确的是（　　）

A: $AB=O\Rightarrow A=O$或B=O.　　B： $A^2-I=(A+I)(A-I)$

$C:AB=AC,$且$A\neq O,$则B=$C.$　　D： $(AB)^2=A^2B^2$

答案：B

2、设$\alpha=(1,2),\beta=(-2,3)$,则$(\alpha^T\beta)^{2020}=$(　　)

$A:4^{2020}\begin{pmatrix}-2 & -3\\ -4 & 6\end{pmatrix}$; $B:4^{2020}\begin{pmatrix}-2 & 3\\ -4 & 6\end{pmatrix}$; $C:4^{2019}\begin{pmatrix}-2 & 3\\ -4 & 6\end{pmatrix}$; $D:4^{2019}\begin{pmatrix}-2 & -3\\ -4 & 6\end{pmatrix}$

答案：C

3.已知 4 阶方阵 A 的行列式 $|A|=2$,则 $\left|(\frac{1}{4}A)^{-1}-A^*\right|=$__________.

$A:-8$;；　　$B:8$；　　$C:-2$；　　$D:2$；

答案：B

4、设 A 为三阶矩阵，将 A 的第二列加到第一列得矩阵 B，再交换 B 的第二行与第三行得到单位矩阵，记

$$P_1=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix},P_2=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix},\text{则}A=（\quad）$$

$A:P_1P_2$;；　　$B:P_1^{-1}P_2$;　　$C:P_2P_1$;　　$D:P_2P_1^{-1}$;

答案：D

5、设矩阵 $A=\left(a_{ij}\right)_{3\times3}$,满足$A^*=A^T$, a_{11},a_{12},a_{13} 为三个相等的正数，则 a_{11} 为(　　)

$A:\frac{\sqrt{3}}{3}$;；　　$B:3$;　　$C:\frac{1}{3}$;　　$D:\sqrt{3}$.

答案：A

6、设 3 阶方阵 A 满足 $|A|=0$,则在 A 的行向量组中(　　)

A:必存在一个行向量为零向量；
B:必存在两个行向量，其对应分量成比例；
C:任意一个行向量都是其它两个行向量的线性组合；
D:存在一个行向量，它是其它两个行向量的线性组合.
答案：D

7. 设向量组 $\alpha_1=(a,b,c)^T,\alpha_2=(b,c,d)^T,\alpha_3=(d,e,f)^T,\alpha_4=(f,g,h)^T$,

那么 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 的线性关系为(　　)

A:线性无关；　B:线性相关；$C:\alpha_4$ 可由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表示；D:不能确定.

答案：B

8. 设矩阵 $A_{m\times n}$，则有(　　)

A:若 $m<n$,则$Ax=b$ 有无穷多解；

B:若 $m<n$,则$Ax=O$ 有非零解，且基础解系含有 $n-m$ 个线性无关的解向量；

C:若 A有n阶子式不为零,则$Ax=b$有唯一解；

D: A有n阶子式不为零,则$Ax=O$仅有零解.

答案：D

9、设四元非齐次线性方程组 $Ax=b$ 的系数矩阵的秩为 3，已知 η_1,η_2,η_3 是它的三个解向量，且

$\eta_1=\begin{pmatrix}2\\3\\4\\5\end{pmatrix},\eta_2+\eta_3=\begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\end{pmatrix}$，则不是该方程组通解的形式为(　　)

$A:x=\begin{pmatrix}2\\3\\4\\5\end{pmatrix}+k\begin{pmatrix}3\\4\\5\\6\end{pmatrix}$; $B:x=\begin{pmatrix}2\\3\\4\\5\end{pmatrix}+k\begin{pmatrix}-3\\-4\\-5\\-6\end{pmatrix}$; $C:x=\begin{pmatrix}1\\\frac{5}{3}\\\frac{7}{3}\\3\end{pmatrix}+k\begin{pmatrix}3\\4\\5\\6\end{pmatrix}$; $D:x=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\1\\\frac{3}{2}\\2\end{pmatrix}+k\begin{pmatrix}2\\3\\4\\5\end{pmatrix}$;

答案：D

10、设α_0是非齐次线性方程组$Ax=b$的一个解，α_1,α_2是$Ax=O$的基础解系，则下列命题一定正确的是( )

$A:\alpha_0,\ \alpha_1,\alpha_2$的线性组合是$Ax=b$的解；　　$B:\alpha_0,\ \alpha_1,\alpha_2$线性相关；

$C:\alpha_0,\ \alpha_1,\alpha_2$的线性组合是$Ax=O$的解；　　$D:\alpha_0,\ \alpha_1,\alpha_2$线性无关；

解答：D

11、设 $A=\begin{pmatrix}0&0\\1&1\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}1&0\\1&0\end{pmatrix}$,则$A-B$ 为（　　）

A:正定矩阵；　　B:正交矩阵　　C:奇异矩阵　　D:不可逆矩阵

答案：B

12、已知 A 是 3 阶实对称矩阵，如果非齐次线性方程组 $Ax=b$ 有通解 $5b+k_1\eta_1+k_2\eta_2$,其中 η_1,η_2 是 $Ax=O$ 的基础解系，那么 A 的特征值为(　　)

$A:\frac{1}{5},\frac{1}{5},0;$；　　$B:\frac{1}{5},0,0;$　　$C:\frac{1}{5},1,0$　　$D:1,1,1$；

答案：B

13、设矩阵 $A=\begin{pmatrix}0&0&1\\a&1&2\\1&0&0\end{pmatrix}$ 可对角化，则 a 的值为(　　)

$A:2;$；　　$B:-2;$　　$C:1$　　$D:0$

答案：B

14、设二次型 $f(x_1,x_2,x_3)$ 在正交变换 $x=Py$ 下的标准形为 $f=2y_1^2+y_2^2-y_3^2$，其中 $P=(e_1,e_2,e_3)$, 若 $Q=(e_1,-e_2,e_3)$,则 $f(x_1,x_2,x_3)$ 在正交变换 $x=Qy$ 下的标准形为(　)

$A: f=2y_1^2+y_2^2+y_3^2$;　　$B: f=2y_1^2+y_2^2-y_3^2$

$C: f=2y_1^2-y_2^2+y_3^2$;　　$D: f=2y_1^2-y_2^2-y_3^2$.

答案：B

15、二次型 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=x^TAx$ 为正定二次型的充要条件是　(　　　)

(A) 对任一 n 维列向量 x，$x^TAx>0$；(B) 通过正交变换得到的 f 的标准形的系数均非负；

(C) A^{-1} 为正定矩阵　　(D) A 的所有子式均大于零.

答案：C

二、填空题(共 15 题,一题 2 分,共 30 分)

1.设矩阵 $A=\begin{pmatrix}2&1&0&0\\1&2&0&0\\0&0&4&0\\0&0&7&5\end{pmatrix}$，求 $|A|=$________.

答案：60

2.计算2020阶行列式 $\begin{vmatrix}2&1&1&\cdots&1&1\\1&2&1&\cdots&1&1\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\1&1&1&\cdots&2&1\\1&1&1&\cdots&1&2\end{vmatrix}=$____________.

答案：2021

3、设 $f(x)=\begin{vmatrix}2x&x&1&2\\1&x&1&-1\\3&2&x&1\\1&1&1&x\end{vmatrix}$,则$x^4$的系数为____________

答案：2

4、设$\alpha,\beta,\gamma_2,\gamma_3,\gamma_4$是四维列向量，且$|A|=|\alpha,\gamma_2,\gamma_3,\gamma_4|=4,|B|=|\beta,\gamma_2,\gamma_3,\gamma_4|=1$,

求$|A+B|=$__________.

答案：40

5、已知矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&3&4&5\\0&0&1&0\end{pmatrix}$，对调矩阵 A 的第一行与第三行得到矩阵 B，P 为初等矩阵，关系式 $B=PA$

中的$|P^2|=$____________.

答案：1，$P=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}$

6、设矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&0&2\\1&a&2\\a&0&a^2\end{pmatrix}, a>0.$ 若 $R(A)<3,$ 则 $a=$________.

答案：$a=2$

7、$t\neq$______时，向量组 $\alpha_1=(1,2,3),\alpha_2=(2,2,4),\alpha_3=(3,0,t)$ 线性无关？

答案：3

8、设矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&0&1\\1&1&1\\0&1&1\end{pmatrix}, \alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 为线性无关的 3 维向量，则向量组 $A\alpha_1, A\alpha_2, A\alpha_3$ 的秩为________

答案：3

9、若非零的三阶矩阵 B 的每一列都是方程组 $\begin{cases}x_1+2x_2-2x_3=0,\\2x_1-x_2+\lambda x_3=0,\\3x_1+x_2-x_3=0\end{cases}$ 的解，求 $\lambda=$_____.

答案：$\lambda=1$

10、线性方程组 $\begin{cases}x_1-2x_2-x_3=1,\\3x_1-x_2+x_3=2,\\2x_1+x_2+ax_3=1,\end{cases}$ 有无穷多解，则 $a=$_____

答案：a=2

11、向量 $e_1=\left(\frac{2}{3},-\frac{2}{3},\frac{1}{3}\right)^T, e_2=\left(\frac{2}{3},\frac{1}{3},-\frac{2}{3}\right)^T, e_3=\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3},\frac{2}{3}\right)^T$ 是 R^3 的一个标准正交基，

则向量 $\beta=e_1+2e_2+2e_3$ 的长度为____________

答案：3

12、设 $A=\begin{pmatrix}0&1&2\\1&2&a\\2&a&-4\end{pmatrix}$, 其一个特征向量为 $(1,2,1)^T$, 则 $a=$____________.

答案：3

13、设矩阵 $A=\begin{pmatrix}3&2&2\\2&3&2\\2&2&3\end{pmatrix}, P=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&1\\0&0&1\end{pmatrix}, B=P^{-1}A^*P,$ 则 $B+2I$ 的单特征根为__________

答案：3

14、设方阵 $A=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&0&1\\0&1&x\end{pmatrix}$ 与 $B=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&y&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$ 相似. 则 $y=$___________.

答案：$y=1$.

15、设二次型 $f(x,y)=x^2+ty^2-4xy$，则当 $t>$ __时，$f(x,y)$ 为正定二次型.

答案：4

三计算证明题(共 4 题,第 3 题 12 分,其余每题 6 分，共 30 分)

1.设矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&0&0&1\\0&1&0&-1\\0&0&1&-1\\2&-1&3&t\end{pmatrix}$, 若 $R(A)=3$, (1)求出 t 的值, (2) 求出 A 的列组 的极大无关组, 并用此极大线性无关组表示其余列向量。

【解答】 $A=\begin{pmatrix}1&0&0&1\\0&1&0&-1\\0&0&1&-1\\2&-1&3&t\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0&1\\0&1&0&-1\\0&0&1&-1\\0&0&0&t\end{pmatrix}\overset{R(A)=3}{\Rightarrow} t=0\cdots 2'$

用初等行变换将矩阵 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)$ 化为行最简形矩阵：

$$A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)=\begin{pmatrix}1&0&0&1\\0&1&0&-1\\0&0&1&-1\\2&-1&3&0\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}1&0&0&1\\0&1&0&-1\\0&0&1&-1\\0&0&0&0\end{pmatrix}=B\triangleq(\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4)\quad\cdots 2'$$

知 $R(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)=3$，故该向量组的极大线性无关组含有 3 个向量。而三个非零行的第一个非零元所在的列为 1，2，3 三列，故 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 为向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 的一个极大线性无关组。

$\beta_4=\beta_1-\beta_2-\beta_3$，因此 $\alpha_4=\alpha_1-\alpha_2-\alpha_3$。$\cdots 2'$

2、设有方程组 $\begin{cases}x_1+2x_2+\lambda x_3=2\\3x_1+2\lambda x_2+9x_3=6\\\lambda x_1+6x_2+9x_3=6\end{cases}$，问 λ 为何值时，此方程组(1)有唯一解，(2)无解，(3)有无穷多解，并在无穷多解时求其通解。

解答：$D=\begin{vmatrix}1&2&\lambda\\3&2\lambda&9\\\lambda&6&9\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&2&\lambda\\0&2\lambda-6&9-3\lambda\\0&6-2\lambda&9-\lambda^2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&2&\lambda\\0&2\lambda-6&9-3\lambda\\0&0&18-3\lambda-\lambda^2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&2&\lambda\\0&2\lambda-6&9-3\lambda\\0&0&-(\lambda+6)(\lambda-3)\end{vmatrix}$

$\cdots 2'$

(1)$D\neq 0\Rightarrow\lambda\neq -6$ 且 $\lambda\neq 3$ 时，方程组有唯一解。

(1)$D=0\Rightarrow\lambda=-6$ 或 $\lambda=3$ 时，

1.$\lambda=-6$ 时，$\begin{pmatrix}1&2&-6&2\\3&-12&9&6\\-6&6&9&6\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&2&-6&2\\0&-18&27&0\\0&18&-27&18\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&2&-6&2\\0&-18&27&0\\0&0&0&18\end{pmatrix}$

$\because R(A)<R(A,b)$

故方程组无解。 $\cdots 2'$

$2.\lambda=3$时，$\begin{pmatrix}1&2&3&2\\3&6&9&6\\3&6&9&6\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&2&3&2\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}\because R(A)=R(A,b)=1$，故方程组有无穷多解。

同解方程组为 $x_1+2x_2+3x_3=2$，特解为 $\eta=(2,0,0)^T$，

齐次的基础解系为 $\xi_1=(-2,1,0)^T,\xi_2=(-3,0,1)^T$，

故无穷多解为 $x=k_1\xi_1+k_2\xi_2+\eta.$ $\cdots 2'$

3、设二次型 $f=3x_1^2+2x_2^2+2x_3^2+2x_1x_2+2x_1x_3$

（1）写出对应的矩阵 A；（2）求出 A 的特征值及所对应的全部特征向量；

（3）求正交变换 $X=QY$，将 $f(x_1,x_2,x_3)$ 化为标准形；(4)判断二次型是否正定.

解答：(1) $A=\begin{pmatrix}3&1&1\\1&2&0\\1&0&2\end{pmatrix}$； $\cdots 1'$

(2) $|A-\lambda I|=\begin{vmatrix}3-\lambda&1&1\\1&2-\lambda&0\\1&0&2-\lambda\end{vmatrix}=-(\lambda-4)(\lambda-2)(\lambda-1)=0,\lambda_1=1,\lambda_2=2,\lambda_3=4$ $\cdots 1'$

$\lambda_1=1,(A-I)x=0,\begin{pmatrix}2&1&1\\1&1&0\\1&0&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&-1\\0&0&0\end{pmatrix},\begin{cases}x_1+x_3=0\\x_2-x_3=0\end{cases},p_1=\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}$，$x=k_1p_1(k_1\neq 0)$； $\cdots 2'$

$\lambda_1=2,(A-2I)x=0,\begin{pmatrix}1&1&1\\1&0&0\\1&0&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&-1\\0&0&0\end{pmatrix},\begin{cases}x_1=0\\x_2+x_3=0\end{cases},p_2=\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix},x=k_2p_2(k_2\neq 0);\cdots 2'$

$\lambda_1=4,(A-4I)x=0,\begin{pmatrix}-1&1&1\\1&-2&0\\1&0&-2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&-2\\0&1&-1\\0&0&0\end{pmatrix},\begin{cases}x_1-2x_3=0\\x_2-x_3=0\end{cases},p_1=\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix},x=k_3p_3(k_3\neq 0);\cdots 2'$

则 k_1p_1,k_2p_2,k_3p_3 $(k_i\neq 0,i=1,2,3)$ 分别为 A 对应于特征值 1、2、4 的特征向量。

（3） p_1,p_2,p_3 是不同特征值下的特征向量，故正交，只需单位化即可。

取 $e_1=\frac{p_1}{\|p_1\|}=\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}$，$e_2=\frac{p_2}{\|p_2\|}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}$，$e_3=\frac{p_3}{\|p_3\|}=\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}$,

令 $Q=(e_1，e_2，e_3)$，作正交变换 $X=QY$ 得 $f=y_1{}^2+2y_2{}^2+4y_3{}^2$ $\cdots 2'$

(4) 由于矩阵$A=\begin{pmatrix}3&1&1\\1&2&0\\1&0&2\end{pmatrix}$,$3>0,\begin{vmatrix}3&1\\1&2\end{vmatrix}=5>0,\begin{vmatrix}3&1&1\\1&2&0\\1&0&2\end{vmatrix}=8>0$，故矩阵 A 正定，则其对应的二次型也是正定二次型。 $\cdots 2'$

4、设A为n阶矩阵，n维向量ξ_1,ξ_2,ξ_3满足$A\xi_1=O,A\xi_2=\xi_1,A^2\xi_3=\xi_1$，$\xi_1\neq O$，证明向量组$\xi_1,\xi_2,\xi_3$线性无关。

证明：令$k_1\xi_1+k_2\xi_2+k_3\xi_3=O$（1），$\cdots 1'$；$k_1A^2\xi_1+k_2A^2\xi_2+k_3A^2\xi_3=O\Rightarrow k_3\xi_1=O\Rightarrow k_3=0$ $\cdots 2'$

代入（1）式得$k_1\xi_1+k_2\xi_2=O$则$k_1A\xi_1+k_2A\xi_2=O\Rightarrow k_2\xi_1=0\Rightarrow k_2=0$ $\cdots 2'$

由$k_2=0,k_3=0\Rightarrow k_1=0$，证毕。$\cdots 1'$

审核人___李强____ 出卷人__魏敏_____