

Vaje 1.3.2022: Funkcijski zleпки

1. Podan je zlepek $z : [-2, 2] \rightarrow \mathbb{R}$ s predpisom

$$z(x) = \begin{cases} \ln(x+2), & x \in [-2, -1) \\ (x+1)^2, & x \in [-1, 0) \\ \frac{2x-1}{x^2+1}, & x \in [0, 1) \\ \frac{x}{2}, & x \in [1, 2] \end{cases}.$$

Obravnavajte zveznost in zvezno odvedljivost zleпка z v stičnih točkah.

Rešitev: naloga 1.12 v Gradivo s predavanj in vaj.

2. Naj bodo $x_i = \frac{i}{m}, i = 0, 1, \dots, m$, ekvidistantne stične točke na intervalu $[0, 1]$. Obravnavajte zvezni linearni zlepek z_m , ki v stičnih točkah interpolira vrednosti funkcije $f(x) = \sin(2\pi x)$.

- a) Zapišite predpis za z_4 .
b) Pokažite, da velja

$$\|f - z_4\|_{\infty, [0, 1]} < \frac{\pi}{2} - 1.$$

- c) Čim bolj natančno ocenite, katero je najmanjše število m , da velja

$$\|f - z_m\|_{\infty, [0, 1]} < 10^{-6}.$$

- d) *Matlab:* V Matlabu sestavite funkcijo, ki izračuna vrednost zleпка z_m v poljubnih točkah \mathbf{x} z intervala $[0, 1]$. Nato ugotovite, katero je najmanjše število m , da velja

$$\|f - z_m\|_{\infty, \mathbf{x}} < 10^{-6},$$

pri čemer je $\mathbf{x} = \left(\frac{i}{10^5}\right)_{i=0}^{10^5}$.

Rešitev: nalogi 1.13 in 1.14 v Gradivo s predavanj in vaj.

3. Dana je funkcija $f(x) = \sin(2\pi x)$.

- a) Dane so stične točke $x_0 = 0, x_1 = \frac{1}{4}$ in $x_2 = \frac{1}{2}$. Zapišite zvezno odvedljivi kubični zlepek $\mathcal{I}_3^1 f$, ki v stičnih točkah interpolira vrednosti funkcije f in vrednosti njenih odvodov.

- b) Naj bodo $x_i = \frac{i}{m}, i = 0, 1, \dots, m$, ekvidistantne stične točke na intervalu $[0, 1]$. Čim bolj natančno ocenite, katero je najmanjše število m , da velja

$$\|f - \mathcal{I}_3^1 f\|_{\infty, [0, 1]} < 10^{-6}.$$

Rešitev: nalogi 1.16 in 1.17 v Gradivo s predavanj in vaj.