Ravninske krivulje s pitagorejskim hodogramom

Tit Arnšek, Damijan Randl

Univerza v Ljubljani, Fakulteta za matematiko in fiziko
Geometrijsko podprto računalniško oblikovanje

Januar 2023

1. Ravninske krivulje s pitagorejskim hodografom
2. Bézierjeve kontrolne točke krivulj s PH
3. Parametrična hitrost in dolžina loka
4. Odvod krivulje
5. Racionalni odmiki krivulj s PH

Ravninske krivulje s pitagorejskim hodografom

- PH krivuluje
- Rida T. Farouki in Vangelis Sakkalis, 1990
- Uporaba v računalniško podprtem oblikovanju, proizvodnji (CNC razrez), robotiki, načrtovanju poti, animacijah...
- Enostaven in natančen izračun dolžine; paralelne krivulje imajo racionalno parametrizacijo.

Definicija

- Hodograf parametrične krivulje $r(t) \in \mathbb{R}^2$ je odvod krivulje same $r\prime(t)$ podan kot parametrična krivulja.
- Polinomska krivulja $r(t)$ v $\mathbb{R}^n$ je krivulja s Pitagorejskim hodografom (PH), če velja naslednji pogoj:

$$x'(t)^2 + y'(t)^2 = \sigma(t)^2 \text{ za nek polinom } \sigma$$

.

Izrek(Kubota)

Polinomi a, b in c zadostijo pitagorejskemu pogoju

$$a^2(t) + b^2(t) = c^2(t),$$

natanko tedaj, ko jih lahko izrazimo s polinomi $u(t), v(t)$ in $w(t)$ v obliki

$$a(t) = (u^2(t) - v^2(t))w(t),$$

$$b(t) = 2u(t)v(t)w(t),$$

$$c(t) = (u^2(t) + v^2(t))w(t),$$

ter u in v nimata skupnih ničel.

- $x'(t) = (u^2(t) - v^2(t))w(t)$,
- $y'(t) = 2u(t)v(t)w(t)$,
- $\sigma(t) = (u^2(t) + v^2(t))w(t)$,

Opombe:

Če:

- $w = 0$ ali $u = v = 0$, potem $r(t)$ predstavlja točko.
- u, v in w konstante in $w \neq 0$, vsaj eden od u, v neničelna konstanta, potem $r(t)$ enakomerno parametrizirana daljica.
- u in v konstanti, w ni konstanta, potem $r(t)$ neenakomerno parametrizirana daljica ali premica.
- $w = 0$ in $u = \pm v$ ali vsaj eden od u, v ničelni polinom, potem $r(t)$ neenakomerno parametrizirana daljica.

$r(t)$ stopnje $n + 2m + 1$, kjer $n = deg(w)$ in $m = max(deg(u), deg(v))$

Kubične PH krivulje

- Primitivni PH: $w = 1$, $GCD(u, v) = konstanta$
- Zapišimo u in v v Bernsteinovi bazi:

$$\mathbf{u}(t) = u_0 B_0^1(t) + u_1 B_1^1(t)$$

$$\mathbf{v}(t) = v_0 B_0^1(t) + v_1 B_1^1(t)$$

  Pri tem predpostavimo, da velja $u_0 : u_1 \neq v_0 : v_1$.
- Po zgornjem izreku tako dobimo hodograf

$$\mathbf{x}'(t) = (u_0^2 - v_0^2) B_0^2(t) + (u_0 u_1 - v_0 v_1) B_1^2(t) + (u_1^2 - v_1^2) B_2^2(t),$$

$$\mathbf{y}'(t) = 2u_0 v_0 B_0^2(t) + (u_0 v_1 + u_1 v_0) B_1^2(t) + 2u_1 v_1 B_2^2(t).$$

- Kubično PH krivljo tako zapišemo

$$\mathbf{r}(t) = (\mathbf{x}(t), \mathbf{y}(t))^T = \sum_{i=0}^{n} \mathbf{b}_k B_k^n(t)$$

kjer sta x in y izražena kot

$$\mathbf{x}(t) = \int_0^t (\mathbf{u}^2(t) - \mathbf{v}^2(t))dt,$$

$$\mathbf{y}(t) = \int_0^t (2\mathbf{u}(t)\mathbf{v}(t))dt$$

- Pravilo za integriranje Bernstainovih baznih polinomov:

$$\int B_k^n(t)dt = \frac{1}{n+1} \sum_{j=k+1}^{n+1} B_k^{n+1}(t)$$

- Integracija nam tako poda kontrolne točke kubične Bézierjeve krivulje

$$\begin{aligned}
\mathbf{b}_1 &= \mathbf{b}_0 + \frac{1}{3}(u_0^2 - v_0^2, 2u_0v_0)^T, \\
\mathbf{b}_2 &= \mathbf{b}_1 + \frac{1}{3}(u_0u_1 - v_0v_1, u_0u_1 + v_0v_1)^T, \\
\mathbf{b}_3 &= \mathbf{b}_2 + \frac{1}{3}(u_1^2 - v_1^2, 2u_1v_1)^T,
\end{aligned}$$

  Pri čemer je $\mathbf{b}_0$ poljubna kontrolna točke, ki ustreza konstantam pri integraciji.

Parametrična hitrost in dolžina loka

Parametrična hitrost:

$$|r\prime(t)| = \sqrt{x\prime^2(t) + y\prime^2(t)} = u^2(t) + v^2(t) = \sigma(t)$$

$$\sigma(t) = \sum_{k=0}^{n-1} \sigma_k B_k^{n-1}(t),$$

kjer

$$\sigma_k = \sum_{j=max(0,k-m)}^{min(m,k)} \frac{\binom{m}{j}\binom{m}{k-j}}{\binom{n-1}{k}} (u_j u_{k-j} + v_j v_{k-j}),$$

$$k = 0, \ldots, n-1.$$

Dolžina loka:

$$s(t) = \int_0^t \sigma(\tau) d\tau,$$

.

$$s(t) = \sum_{k=0}^{n} s_k \binom{n}{k} (1-t)^{n-k} t^k = \sum_{k=0}^{n} s_k B_k^n(t),$$

kjer $s_0 = 0$ in $s_k = \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{k-1} \sigma_j, k = 1, \ldots, n.$.
Skupna dolžina loka je S(1).

Enotska tangenta in normala:

- $\mathbf{t} = \frac{(u^2 - v^2, 2uv)}{\sigma}$
- $\mathbf{n} = \frac{(2uv, v^2 - u^2)}{\sigma}$

Racionalni odmik PH krivulje

- Odmik krivulje $r(t)$ na razdalji d je definiran kot

$$\mathbf{r}_d(t) = \mathbf{r}(t) + d\mathbf{n}(t)$$

- Racionalna Bézierjeva krivulja
- Racionalni odmik kubične PH krivulje je 5. stopnje
- Homogeni zapis koordinat kontrolnih točk PH krivulje $\mathbf{r}(\mathrm{t})$:

$$\mathbf{P}_k = (W_k, X_k, Y_k) = (1, x_k, y_k), k = 0, ..., n$$

- Racionalni odmik PH krivulje lahko predstavimo kot:

$$\mathbf{r}_d(t) = \left(\frac{X(t)}{W(t)}, \frac{Y(t)}{W(t)} \right)$$

- Pri tem so

$$\mathbf{O}_k = (W_k, X_k, Y_k), k = 0, ..., 2n-1$$

  kontrolne točke racionalnega odmika.
- Zapišemo jih lahko tudi drugače:

$$\mathbf{O}_k = \sum_{j=\max(0,k-n)}^{\min(n-1,k)} \frac{\binom{n-1}{j}\binom{n}{k-j}}{\binom{2n-1}{k}} (\sigma_j \mathbf{P}_{k-j} + dn\Delta\mathbf{P}_j^{\perp}),$$

$$k = 0, ..., 2n-1$$

- Tako dobimo kontrolne točke racionalnega odmika kubične PH krivulje:

$$
\begin{aligned}
\mathbf{O}_0 &= \sigma_0 \mathbf{P}_0 + 3d\Delta\mathbf{P}_0^{\perp}, \\
\mathbf{O}_1 &= \frac{1}{5}[2\sigma_1 \mathbf{P}_0 + 3\sigma_0 \mathbf{P}_1 + 3d(3\Delta\mathbf{P}_0^{\perp} + 2\Delta\mathbf{P}_1^{\perp})], \\
\mathbf{O}_2 &= \frac{1}{10}[\sigma_2 \mathbf{P}_0 + 6\sigma_1 \mathbf{P}_1 + 3\sigma_0 \mathbf{P}_2 + \\
&\quad 3d(3\Delta\mathbf{P}_0^{\perp} + 6\Delta\mathbf{P}_1^{\perp}) + \Delta\mathbf{P}_2^{\perp})], \\
\mathbf{O}_3 &= \frac{1}{10}[3\sigma_2 \mathbf{P}_1 + 6\sigma_1 \mathbf{P}_2 + \sigma_0 \mathbf{P}_3 + \\
&\quad 3d(\Delta\mathbf{P}_0^{\perp} + 6\Delta\mathbf{P}_1^{\perp} + 3\Delta\mathbf{P}_2^{\perp})], \\
\mathbf{O}_4 &= \frac{1}{5}[3\sigma_2 \mathbf{P}_2 + 2\sigma_1 \mathbf{P}_3 + 3d(2\Delta\mathbf{P}_1^{\perp} + 3\Delta\mathbf{P}_2^{\perp})], \\
\mathbf{O}_5 &= \sigma_2 \mathbf{P}_3 + 3d\Delta\mathbf{P}_2^{\perp}
\end{aligned}
$$