Hodograf parametično podane odvedljive krivulje $r = (x(t), y(t))^T$ je krivulja, podana s predpisom $r' = (x', y')^T$, pravzaprav gre za odvod podane krivulje. Krivulje s pitagorejskim hodografom so polinomske parametrične krivulje, ki zadoščajo naslednjemu pogoju: $x'^2 + y'^2 = ro^2$ za nek polinom ro^2. Krajše jih imenujemo tudi PH krivulje. Zaradi lepih lastnosti jih pogosto uporabljamo v...

Za izpeljavo lastnosti v nadaljevanju, bomo potrebovali naslednji izrek: Izrek (Kubota) Polinomi a, b in c zadostijo pitagorejskemu pogoju

$$a^2(t) + b^2(t) = c^2(t),$$

natanko tedaj, ko jih lahko izrazimo z drugimi polinomi $u(t), v(t) in w(t)$ v obliki

$$a(t) = (u^2(t) - v^2(t))w(t),$$

$$b(t) = 2uvw,$$
$$c(t) = (u^2 + v^2)w,$$

kjer u in v nimata paroma skupnih ničel Dokaz: ...

Opombe: - Če velja, da je w=0 ali pa je u=v=0, potem taka PH krivulja r(t) predstavlja točko. - Če so u, b in w konstante in w = 0, ter vsaj eden od polinomov u ali v neničelna konstanta, potem je PH krivulja enakomerno parametrizirana daljica. - Če sta u in v konstanti, w pa ni konstanta je PH krivulja neenakomerno parametrizirana daljica ali premica. - Če je w = 0 in u = +-v ali pa je vsaj eden od u, v ničelni polinom, potem je PH krivulja neenakomerno parametrizirana daljica.

Opomba: Če je w polinom stopnje n in z m označimo večjo izmed stopenj polinomov u in v, potem je PH krivulja dobljena z integracijo hodografa stopnje k = n + 2m + 1

V nadaljevanju se bomo osredotočili na hodografe kjer je w(t) = 1 in je GCD(u,v) konstanta. Imenujemo jih primitivni Pitagorejski hodografi. Takšni hodografi definirajo regularne PH krivulje, ki zadostujejo pogoju $r'(t) \neq 0$ za vsak t. Iz opombe (stevilka) sledi, da je stopnja PH krivulje, definirane z integracijo primitivnih hodografov, lihe stopnje (k = 2m + 1).

Karakterizacijo PH krivulj želimo izraziti v Bezierjevi obliki.

Oglejmo si primer primitivne PH krivulje 3. stopnje v Bezierjevi obliki:

$$u(t) = u_0 * B_1^1(t), v(t) = v_0 * B_0^1(t) + v_1 * B_1^1(t)$$

Ker sta u in v tuja, sledi, da mora biti $u_0 * v_1 \neq u_1 * v_0$. Ker velja tudi, da u in v nista oba konstanti, pa mora veljati $(u_0 - u_1)^2 + (v_0 - v_1)^2 \neq 0$.

$$x'(t) = (u_0^2 - v_0^2) * B_0^2(t) + (u_0 * u_1 - v_0 * v_1) * B_1^2(t) + (u_1^2 - v_1^2) * B_2^2(t),$$

$y'(t) = 2 * u_0 * v_0 * B_0^2(t) + (u_0 * v_1 + u_1 * v_0) * B_1^2(t) + 2 * u_1 * v_1 * B_2^2(t).$

Z integracijo dobimo kubično Bezierjevo krivuljo podano s predpisom:

$$p(t) = p_0 * B_0^3(t) + p_1 * B_1^3(t) + p_2 * B_2^3(t) + p_3 * B_3^3(t)$$

kjer je

$$p_1 = p_0 + \frac{1}{3} * (u_0^2 - v_0^2, 2 * u_0 * v_0)^T,$$

$$p_2 = p_1 + \frac{1}{3} * (u_0 * u_1 - v_0 * v_1, u_0 * u_1 + v_0 * v_1)^T,$$

$$p_3 = p_2 + \frac{1}{3} * (u_1^2 - v_1^2, 2 * u_1 * v_1)^T,$$

Pri tem je p_0 prosto izbrana kontrolna točka (zaradi konstante pri integraciji).

parametrična hitrost regularne PH krivulje $r(t) = (x(t), y(t))$ je podana s predpisom:

$$|r\prime(t)| = \sqrt{x\prime^2(t) + y\prime^2(t)} = u^2(t) + v^2(t) = \sigma(t),$$

in je polinom v t. Iz lastnosti, da je krivulja, ki jo dobimo z integrinjanjem stopnje (k = 2m + 1) sledi da morata biti u in v stopnje $m = \frac{1}{2}(n-1)$. Zapišemu ju lahko v Bernstainovi bazi:

$u(t) = \sum_{k=0}^{m} u_k B_k^m(t)$, SO TUKI RES VELIKI B-JI??? $v(t) = \sum_{k=0}^{m} v_k B_k^m(t)$.

Potem je

$$\sigma(t) = \sum_{k=0}^{n-1} \sigma_k B_k^{n-1}(t),$$

, kjer so koeficienti

$$\sigma_k = \sum_{j=max(0,k-m)}^{min(m,k)} \frac{\binom{m}{j}\binom{m}{k-j}}{\binom{n-1}{k}} (u_j u_{k-j} + v_j v_{k-j}),$$

$$k = 0, \ldots, n-1.$$

Če pogledamo primer od zgoraj(kubično B. krivuljo) dobimo naslednje koeficiente za sigmo :

$\sigma_0 = u_0^2 + v_0^2$, $\sigma_1 = u_0 u_1 + v_0 v_1$, $\sigma_2 = u_1^2 + v_1^2$.

Poglejmo si sedaj še dolžino loka s. To dobimo kot:

$$s(t) = \int_0^t \sigma(\tau) d\tau,$$

. Pri računanju integrala upoštevamo integracijsko pravilo za B. bazne polinome DOPIŠI PRAVILO ZDAJ ALI PA ŽE PREJ KO GA UPORABIMA PRI ENI IZPELJAVI Zgornji izraz se nam poenostavi v

$$s(t) = \sum_{k=0}^{n} s_k \binom{n}{k} (1-t)^{n-k} t^k = \sum_{k=0}^{n} s_k B_k^n(t),$$

kjer je $s_0 = 0$ in $s_k = \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{k-1} \sigma_j, k = 1, \ldots, n..$

Skupna dolžina loka je tako S(1).

Običajno smo za b. krivulje prikazali z vrednotenjem vrednosti parametrov $t_0, \ldots, t_N$, (enakomerni razmik med parametri)... ampak smo s tem dobili neenakomerno porazdeljene točke na krivulji, saj parametrična hitrost, v splošnem, ni konstantna. Če želimo doseči, da bodo točke $s(t_k)$ vseeno enakomerno porazdeljene na grafu, lahko to dosežemo tako, da za vsak t_k izračunamo nov paramater, ki ga dobimo s pomočjo Newton-Raphsonove iteracije:

$$t_k^{(0)} = t_{k-1} + \frac{\Delta s}{\sigma(t_{k-1})}$$

$$t_k^{(r)} = t_k^{(r-1)} - \frac{s(t_k^{(r-1)}) - k\Delta s}{\sigma(t_k^{(r-1)})}, r = 1, 2, \ldots.$$

Za dobre rezultate je dovolj že nekaj iteracij. KOOLLIKO JE TO??? (DVA ALI TRI PIŠE V ANGLEŠKEM ČLANKU)

Iz lastnosti odvoda PH krivlja sledi tudi, da so enotski tangentni vektor, normala in ukrivljenost racionalno odvisni od parametra krivulje. Natancneje, ˇ definirani so v smislu polinomov u(t) in v(t), in sicer:

$$\mathbf{t} = \frac{(u^2 - v^2, 2uv)}{\sigma}, \quad \mathbf{n} = \frac{(2uv, v^2 - u^2)}{\sigma}, \quad \kappa = 2\frac{uv\prime - u\prime v}{\sigma^2}.$$

DAMIJAN YOUR TURN ;-) Racionalni odmiki PH krivulj Odmik krivulje r(t) je v splošnem definiran kot

$$r_d(t) = r(t) + dn(t)$$

V primeru, da r(t) pri tem predstavlja Bezierjevo PH krivuljo velja, da $r_d(t)$ spada med racionalne Bezierjeve krivulje. V primeru kubične PH krivilje je njen odmik 5. stopnje. Normala n je pri tem enaka, kot smo jo definirali zgoraj:

$$\mathbf{n} = \frac{(2uv, v^2 - u^2)}{\sigma}$$

, kjer je σ parametrična hitrost krivulje r.

Definirajmo kontrolne točke krivulje r v homogenih koordinatah kot

$$P_k = (W_k, X_k, Y_k) = (1, x_k, y_k), k = 0, ..., n.$$

Z

$$\Delta P_k = P_{k+1} - P_k = (0, \Delta x_k, \Delta y_k), k = 0, ..., n-1$$

pa definirajmo razlike med njimi. Pri tem so

$$\Delta x_k = x_{k+1} - x_k$$

in

$$\Delta y_k = y_{k+1} - y_k$$

Označimo še

$$\Delta P_k^{\perp} = (0, \Delta y_k, -\Delta x_k)$$

. Potem lahko racionalni odmik PH krivulje r(t) zapišemo kot

$$r_d(t) = (\frac{X(t)}{W(t)}, \frac{Y(t)}{W(t)})$$

, kjer so W, X in Y polinomi stopnje

$$2n - 1$$

, katerih koeficienti

$$O_k = (W_k, X_k, Y_k), k = 0, ..., 2n-1$$

definirajo kontrolne točke racionalne Bezierjeve krivulje. Homogene koordinate kontrolnih točk pa lahko izrazimo tudi s pomočjo kontrolnih točk podane začetne krivulje:

$$O_k = \sum_{j=max(0,k-n)}^{min(n-1,k)} \frac{\binom{n-1}{j}\binom{n}{k-j}}{\binom{2n-1}{k}} (\sigma_j P_{k-j} + dn\Delta P_j^{\perp}), k = 0, ..., 2n-1.$$

Kontrolne točke racionalnega odmika kubičnih PH krivulj so tako podane kot:

$$O_0 = \sigma_0 P_0 + 3d\Delta P_0^{\perp}$$

,

$$O_1 = \frac{1}{5}[2\sigma_1 P_0 + 3\sigma_0 P_1 + 3d(3\Delta P_0^{\perp} + 2\Delta P_1^{\perp})]$$

,

$$O_2 = \frac{1}{10}[\sigma_2 P_0 + 6\sigma_1 P_1 + 3\sigma_0 P_2 + 3d(3\Delta P_0^{\perp} + 6\Delta P_1^{\perp}) + \Delta P_2^{\perp})]$$

,

$$O_3 = \frac{1}{10}[3\sigma_2 P_1 + 6\sigma_1 P_2 + \sigma_0 P_3 + 3d(\Delta P_0^{\perp} + 6\Delta P_1^{\perp} + 3\Delta P_2^{\perp})]$$

,

$$O_4 = \frac{1}{5}[3\sigma_2 P_2 + 2\sigma_1 P_3 + 3d(2\Delta P_1^{\perp} + 3\Delta P_2^{\perp})]$$

,

$$O_5 = \sigma_2 P_3 + 3d\Delta P_2^{\perp}$$