

Ravninske krivulje s pitagorejskim hodogramom

Tit Arnšek, Damijan Randl

Univerza v Ljubljani, Fakulteta za matematiko in fiziko
Geometrijsko podprto računalniško oblikovanje

Januar 2023

1. Ravninske krivulje s pitagorejskim hodografom
2. Bézierjeve kontrolne točke krivulj s PH
3. Parametrična hitrost in dolžina loka
4. Odvod krivulje
5. Racionalni odmiki krivulj s PH

Kubične PH krivulje

- ▶ Primitivni PH: $w = 1$, $GCD(u, v) = \text{konstanta}$
- ▶ Zapišimo u in v v Bernsteinovi bazi:

$$\mathbf{u}(t) = u_0 B_0^1(t) + u_1 B_1^1(t)$$

$$\mathbf{v}(t) = v_0 B_0^1(t) + v_1 B_1^1(t)$$

Pri tem predpostavimo, da velja $u_0 : u_1 \neq v_0 : v_1$.

- ▶ Po zgornjem izreku tako dobimo hodograf

$$\mathbf{x}'(t) = (u_0^2 - v_0^2) B_0^2(t) + (u_0 u_1 - v_0 v_1) B_1^2(t) + (u_1^2 - v_1^2) B_2^2(t),$$

$$\mathbf{y}'(t) = 2u_0 v_0 B_0^2(t) + (u_0 v_1 + u_1 v_0) B_1^2(t) + 2u_1 v_1 B_2^2(t).$$

- Kubično PH krivljo tako zapišemo

$$\mathbf{r}(t) = (\mathbf{x}(t), \mathbf{y}(t))^T = \sum_{i=0}^n \mathbf{b}_k B_k^n(t)$$

kjer sta x in y izražena kot

$$\mathbf{x}(t) = \int_0^t (\mathbf{u}^2(t) - \mathbf{v}^2(t)) dt,$$

$$\mathbf{y}(t) = \int_0^t (2\mathbf{u}(t)\mathbf{v}(t)) dt$$

- Pravilo za integriranje Bernsteinovih baznih polinomov:

$$\int B_k^n(t) dt = \frac{1}{n+1} \sum_{j=k+1}^{n+1} B_k^{n+1}(t)$$

- Integracija nam tako poda kontrolne točke kubične Bézierjeve krivulje

$$\mathbf{b}_1 = \mathbf{b}_0 + \frac{1}{3}(u_0^2 - v_0^2, 2u_0v_0)^T,$$

$$\mathbf{b}_2 = \mathbf{b}_1 + \frac{1}{3}(u_0u_1 - v_0v_1, u_0u_1 + v_0v_1)^T,$$

$$\mathbf{b}_3 = \mathbf{b}_2 + \frac{1}{3}(u_1^2 - v_1^2, 2u_1v_1)^T,$$

Pri čemer je \mathbf{b}_0 poljubna kontrolna točka, ki ustreza konstantam pri integraciji.

Racionalni odmik PH krivulje

- ▶ Odmik krivulje $r(t)$ na d je definiran kot

$$\mathbf{r}_d(t) = \mathbf{r}(t) + d\mathbf{n}(t)$$

- ▶ Racionalna Bézierjeva krivulja
- ▶ Racionalni odmik kubične PH krivulje je 5. stopnje
- ▶ Homogeni zapis koordinat kontrolnih točk PH krivulje $\mathbf{r}(t)$:

$$\mathbf{P}_k = (W_k, X_k, Y_k) = (1, x_k, y_k), k = 0, \dots, n$$

- Racionalni odmik PH krivulje lahko predstavimo kot:

$$\mathbf{r}_d(t) = \left(\frac{X(t)}{W(t)}, \frac{Y(t)}{W(t)} \right)$$

- Pri tem so

$$\mathbf{O}_k = (W_k, X_k, Y_k), k = 0, \dots, 2n - 1$$

kontrolne točke racionalnega odmika.

- Zapišemo jih lahko tudi drugače:

$$\mathbf{O}_k = \sum_{j=\max(0, k-n)}^{\min(n-1, k)} \frac{\binom{n-1}{j} \binom{n}{k-j}}{\binom{2n-1}{k}} (\sigma_j \mathbf{P}_{k-j} + dn \Delta \mathbf{P}_j^\perp),$$

$$k = 0, \dots, 2n - 1$$

- Tako dobimo kontrolne točke racionalnega odmika kubične PH krivulje:

$$\mathbf{O}_0 = \sigma_0 \mathbf{P}_0 + 3d\Delta\mathbf{P}_0^\perp,$$

$$\mathbf{O}_1 = \frac{1}{5}[2\sigma_1 \mathbf{P}_0 + 3\sigma_0 \mathbf{P}_1 + 3d(3\Delta\mathbf{P}_0^\perp + 2\Delta\mathbf{P}_1^\perp)],$$

$$\mathbf{O}_2 = \frac{1}{10}[\sigma_2 \mathbf{P}_0 + 6\sigma_1 \mathbf{P}_1 + 3\sigma_0 \mathbf{P}_2 + 3d(3\Delta\mathbf{P}_0^\perp + 6\Delta\mathbf{P}_1^\perp) + \Delta\mathbf{P}_2^\perp],$$

$$\mathbf{O}_3 = \frac{1}{10}[3\sigma_2 \mathbf{P}_1 + 6\sigma_1 \mathbf{P}_2 + \sigma_0 \mathbf{P}_3 + 3d(\Delta\mathbf{P}_0^\perp + 6\Delta\mathbf{P}_1^\perp + 3\Delta\mathbf{P}_2^\perp)],$$

$$\mathbf{O}_4 = \frac{1}{5}[3\sigma_2 \mathbf{P}_2 + 2\sigma_1 \mathbf{P}_3 + 3d(2\Delta\mathbf{P}_1^\perp + 3\Delta\mathbf{P}_2^\perp)],$$

$$\mathbf{O}_5 = \sigma_2 \mathbf{P}_3 + 3d\Delta\mathbf{P}_2^\perp$$