Ravninske krivulje s pitagorejskim hodogramom

Tit Arnšek, Damijan Randl

Univerza v Ljubljani, Fakulteta za matematiko in fiziko
Geometrijsko podprto računalniško oblikovanje

Januar 2023

1. Ravninske krivulje s pitagorejskim hodografom
2. Bézierjeve kontrolne točke krivulj s PH
3. Parametrična hitrost in dolžina loka
4. Odvod krivulje
5. Racionalni odmiki krivulj s PH

Kubične PH krivulje

- Primitivni PH: $w = 1$, $GCD(u, v) = konstanta$
- Zapišimo u in v v Bernsteinovi bazi:

$$u(t) = u_0 B_0^1(t) + u_1 B_1^1(t)$$

$$v(t) = v_0 B_0^1(t) + v_1 B_1^1(t)$$

Pri tem predpostavimo, da velja $u_0 : u_1 \neq v_0 : v_1$.

- Po zgornjem izreku tako dobimo hodograf

$$x'(t) = (u_0^2 - v_0^2) B_0^2(t) + (u_0 u_1 - v_0 v_1) B_1^2(t) + (u_1^2 - v_1^2) B_2^2(t),$$

$$y'(t) = 2u_0 v_0 B_0^2(t) + (u_0 v_1 + u_1 v_0) B_1^2(t) + 2u_1 v_1 B_2^2(t).$$

- Kubično PH krivljo tako zapišemo

$$r(t) = (x(t), y(t))^T = \sum_{i=0}^{n} b_k B_k^n(t)$$

kjer sta x in y izražena kot

$$x(t) = \int_0^t (u^2(t) - v^2(t))dt,$$

$$y(t) = \int_0^t (2u(t)v(t))dt$$

- Pravilo za integriranje Bernstainovih baznih polinomov:

$$\int B_k^n(t)dt = \frac{1}{n+1} \sum_{j=k+1}^{n+1} b_k^{n+1}(t)$$

- Integracija nam tako poda kontrolne točke kubične Bézierjeve krivulje

$$
\begin{aligned}
\mathbf{b}_1 &= \mathbf{b}_0 + \frac{1}{3}(u_0^2 - v_0^2, 2u_0v_0)^T,\\
\mathbf{b}_2 &= \mathbf{b}_1 + \frac{1}{3}(u_0u_1 - v_0v_1, u_0u_1 + v_0v_1)^T,\\
\mathbf{b}_3 &= \mathbf{b}_2 + \frac{1}{3}(u_1^2 - v_1^2, 2u_1v_1)^T,
\end{aligned}
$$

Pri čemer je $\mathbf{b}_0$ poljubna kontrolna točke, ki ustreza konstantam pri integraciji.

Racionalni odmik PH krivulje

- Odmik krivulje $r(t)$ na d je definiran kot

$$r_d(t) = r(t) + dn(t)$$

- Zapišimo u in v v Bernsteinovi bazi:

$$u(t) = u_0 B_0^1(t) + u_1 B_1^1(t)$$

$$v(t) = v_0 B_0^1(t) + v_1 B_1^1(t)$$

  Pri tem predpostavimo, da velja $u_0 : u_1 \neq v_0 : v_1$.
- Po zgornjem izreku tako dobimo hodograf

$$x'(t) = (u_0^2 - v_0^2) B_0^2(t) + (u_0 u_1 - v_0 v_1) B_1^2(t) + (u_1^2 - v_1^2) B_2^2(t),$$

$$y'(t) = 2u_0 v_0 B_0^2(t) + (u_0 v_1 + u_1 v_0) B_1^2(t) + 2u_1 v_1 B_2^2(t).$$

- Kubično PH krivljo tako zapišemo

$$r(t) = (x(t), y(t))^T = \sum_{i=0}^{n} b_k B_k^n(t)$$

kjer sta x in y izražena kot

$$x(t) = \int_0^t (u^2(t) - v^2(t))dt,$$

$$y(t) = \int_0^t (2u(t)v(t))dt$$

- Pravilo za integriranje Bernstainovih baznih polinomov:

$$\int B_k^n(t)dt = \frac{1}{n+1} \sum_{j=k+1}^{n+1} b_k^{n+1}(t)$$

- Integracija nam tako poda kontrolne točke kubične Bézierjeve krivulje

$$
\begin{aligned}
\mathbf{b}_1 &= \mathbf{b}_0 + \frac{1}{3}(u_0^2 - v_0^2, 2u_0 v_0)^T, \\
\mathbf{b}_2 &= \mathbf{b}_1 + \frac{1}{3}(u_0 u_1 - v_0 v_1, u_0 u_1 + v_0 v_1)^T, \\
\mathbf{b}_3 &= \mathbf{b}_2 + \frac{1}{3}(u_1^2 - v_1^2, 2u_1 v_1)^T,
\end{aligned}
$$

Pri čemer je $\mathbf{b}_0$ poljubna kontrolna točke, ki ustreza konstantam pri integraciji.