Ravninske krivulje s pitagorejskim hodografom

Seminarska naloga pri predmetu *Računalniško podprto geometrijsko oblikovanje*

Univerza *v Ljubljani*
Fakulteta za *matematiko in fiziko*

Damijan Randl in Tit Arnšek

januar, 2023

Kazalo

1 Uvod

Polinomske krivulje s pitagorejskim hodografom (PH krivulje) sta prvič predstavila Farouki in Sakkalis, leta 1990. V zadnjih letih so te krivulje postale aktivno področje raziskav, to pa zaradi svojih posebnih lastnosti, saj imajo prednost pri uporabi v računalniško podprtem oblikovanju, proizvodnji (CNC razrez), robotiki, načrtovanju poti, animacijah in v drugih podobnih področjih. Glavni razlog je v tem, da lahko njihovo dolžinono enostavno izračuna natančno, njihove paralelne krivulje pa imajo vedno racionalno parametrizacijo.
Za splošne krivulje ti dve lastnosti ne veljata vedno, kar lahko v praksi povzroči določene probleme (naprimer, pri dizajniranju paralelne krivulje moramo iskati numerične približke, kar je lahko časovno zahtevno, zaradi iskanja približkov pa lahko pride tudi do napak).

2 PH krivulje

DEFINICIJA 2.1. *Hodograf odvedljive parametrične krivulje* $r(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$ *je definiran s predpisom*

$$r'(t) = \begin{bmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{bmatrix}.$$

DEFINICIJA 2.2. *Polinomska krivulja* $r \in \mathbb{R}^2$ *je krivulja s Pitagorejskim hodografom (PH), če velja naslednji pogoj:*

$$x'(t)^2 + y'(t)^2 = \sigma(t)^2, \ \textit{za nek polinom } \sigma.$$

IZREK 2.3. *Kubota*
Polinomi a, b in c zadostijo pitagorejskemu pogoju

$$a^2(t) + b^2(t) = c^2(t),$$

natanko tedaj, ko jih lahko izrazimo s polinomi $u(t), v(t)$ *in* $w(t)$ *v obliki*

$$a(t) = (u^2(t) - v^2(t))w(t),$$

$$b(t) = 2u(t)v(t)w(t),$$
$$c(t) = (u^2(t) + v^2(t))w(t),$$

kjer u in v nimata skupnih ničel.

Dokaz: ...TODO
Za Ph krivulje torej velja naslenje:

$$x'(t) = (u^2(t) - v^2(t))w(t),$$

$$y'(t) = 2u(t)v(t)w(t),$$
$$\sigma(t) = (u^2(t) + v^2(t))w(t),$$

Oglejmo si nekaj robnih primerov:

- Če velja, da je $w \equiv 0$ ali $u \equiv v \equiv 0$, potem $r(t)$ predstavlja točko.
- Če so u, v in w konstante in $w \not\equiv 0$, vsaj eden od u, v neničelna konstanta, potem $r(t)$ predstavlja enakomerno parametrizirano daljico. potem je PH krivulja enakomerno parametrizirana daljica.
- Če sta u in v konstanti, w ni konstanta, potem je $r(t)$ neenakomerno parametrizirana daljica ali premica.
- Če je $w \not\equiv 0$ in $u = \pm v$ ali vsaj eden od u, v ničelni polinom, potem $r(t)$ neenakomerno parametrizirana daljica.

Opomba 2.4. *Če je w polinom stopnje n in z m označimo večjo izmed stopenj polinomov u in v, potem je PH krivulja dobljena z integracijo hodografa stopnje* $k = n + 2m + 1$

3 Bézierjeve kontrolne točke PH krivulj

V nadaljevanju se bomo osredotočili na hodografe kjer velja, da je $w(t) = 1$ in $GCD(u, v)$ konstanta. Take hodografe imenujema primitivni pitagorejski hodografi. Primitivni pitagorejski hodografi definirajo regularne PH krivulje, ki zadostujejo pogoju $\mathbf{r}'(t) \neq 0$ za vsak t. Iz opombe 2.4 sledi, da je PH krivulja, definirana z integracijo primitivnih hodografov, lihe stopnje.

Karakterizacijo PH krivulj želimo izraziti v Bezierjevi obliki. Oglejmo si primer primitivne PH krivulje tretje stopnje v Bezierjevi obliki:

Zapišimo u in v v Bernsteinovi bazi in pri tem upoštevajmo pogoj $w(t) = 1$:

$$u(t) = u_0 B_1^1(t) \qquad v(t) = v_0 B_0^1(t) + v_1 B_1^1(t)$$

Ker sta u in v tuja, sledi, da mora veljati $u_0 * v_1 \neq u_1 * v_0$. Iz dejstva, da u in v nista obe konstanti, pa sledi $(u_0 - u_1)^2 + (v_0 - v_1)^2 \neq 0$.

Z upoštevanjem zgornjega izreka 2.3 dobimo naslednja predpisa za $x'(t)$ in $y'(t)$:

$$
\begin{aligned}
x'(t) &= (u_0^2 - v_0^2)B_0^2(t) + (u_0u_1 - v_0v_1)B_1^2(t) + (u_1^2 - v_1^2)B_2^2(t), \\
y'(t) &= 2u_0v_0B_0^2(t) + (u_0v_1 + u_1v_0)B_1^2(t) + 2u_1v_1B_2^2(t).
\end{aligned}
$$

Z integracijo dobimo kubično Bezierjevo krivuljo podano s predpisom:

$$
\mathbf{p}(t) = \mathbf{b}_0B_0^3(t) + \mathbf{b}_1B_1^3(t) + \mathbf{b}_2B_2^3(t) + \mathbf{b}_3B_3^3(t)
$$

kjer so kontrolne točke definirane kot:

$$
\begin{aligned}
\mathbf{b}_1 &= \mathbf{b}_0 + \frac{1}{3}(u_0^2 - v_0^2, 2u_0v_0)^T, \\
\mathbf{b}_2 &= \mathbf{b}_1 + \frac{1}{3}(u_0u_1 - v_0v_1, u_0u_1 + v_0v_1)^T, \\
\mathbf{b}_3 &= \mathbf{b}_2 + \frac{1}{3}(u_1^2 - v_1^2, 2u_1v_1)^T.
\end{aligned}
$$

Pri tem je $\mathbf{b}_0$ prosto izbrana kontrolna točka, ki jo dobimo zaradi konstante pri integraciji.

4 Parametrična hitrost in dolžina loka

Parametrična hitrost regularne PH krivulje $r(t) = (x(t), y(t))$ je podana s predpisom:

$$
||r\prime(t)|| = \sqrt{x\prime^2(t) + y\prime^2(t)} = u^2(t) + v^2(t) = \sigma(t)
$$

in je polinom.
Iz lastnosti, da je krivulja r, ki jo dobimo z integrinjanjem stopnje $n = 2m + 1$, sledi da morata biti polinoma u in v stopnje $m = \frac{1}{2}(n-1)$. Zapišemu ju lahko v Bernstainovi bazi:

$$
u(t) = \sum_{k=0}^{m} u_kB_k^m(t) \text{ in } v(t) = \sum_{k=0}^{m} v_kB_k^m(t).
$$

Izkaže se, da je

$$
\sigma(t) = \sum_{k=0}^{n-1} \sigma_kB_k^{n-1}(t), \text{kjer so koeficienti}
$$

$$
\sigma_k = \sum_{j=max(0,k-m)}^{min(m,k)} \frac{\binom{m}{j}\binom{m}{k-j}}{\binom{n-1}{k}}(u_ju_{k-j} + v_jv_{k-j}), k = 0, \ldots, n-1.
$$

Če pogledamo primer od zgoraj(kubično B. krivuljo) dobimo naslednje koeficiente za σ :

$\sigma_0 = u_0^2 + v_0^2$, $\sigma_1 = u_0 u_1 + v_0 v_1$, in $\sigma_2 = u_1^2 + v_1^2$.
Dolžino loka dobimo na naslednji način:

$$s(t) = \int_0^t \sigma(\tau) d\tau.$$

Z upoštevanjem integracijskega pravila se nam zgornji izraz poenostavi:

$$s(t) = \sum_{k=0}^{n} s_k \binom{n}{k} (1-t)^{n-k} t^k = \sum_{k=0}^{n} s_k B_k^n(t),$$

kjer je $s_0 = 0$ in $s_k = \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{k-1} \sigma_j, k = 1, \ldots, n.$

Opomba 4.1. *Skupna dolžina loka je $S(1)$.*

Iz lastnosti odvoda PH krivlj sledi, da so enotski tangentni vektor, normala in ukrivljenost racionalno odvisni od parametra krivulje. Natančeneje:

$$\mathbf{t} = \frac{(u^2 - v^2, 2uv)}{\sigma}, \quad \mathbf{n} = \frac{(2uv, v^2 - u^2)}{\sigma}, \quad \kappa = 2\frac{uv\prime - u\prime v}{\sigma^2}.$$

Newton-Raphsonova iteracija

Običajno se Bezierjeve krivulje prikaže z vrednotenjem vrednosti parametrov $t_0, \ldots, t_N$, kjer so bili razmiki enakomerni. S tem se običajno dobi neenakomerno porazdeljene točke na krivulji, saj parametrična hitrost, v splošnem, ni konstantna. Če želimo doseči, da bodo točke $s(t_k)$ vseeno enakomerno porazdeljene na grafu, lahko to dosežemo tako, da za vsak t_k izračunamo nov paramater, ki ga dobimo s pomočjo Newton-Raphsonove iteracije:

$$t_k^{(0)} = t_{k-1} + \frac{\Delta s}{\sigma(t_{k-1})}$$

$$t_k^{(r)} = t_k^{(r-1)} - \frac{s(t_k^{(r-1)}) - k\Delta s}{\sigma(t_k^{(r-1)})}, r = 1, 2, \ldots.$$

Za dobre rezultate je dovolj že nekaj iteracij.

5 Racionalni odmiki PH krivulj

Odmik krivulje $\mathbf{r}(t)$ je v splošnem definiran kot

$$\mathbf{r}_d(t) = \mathbf{r}(t) + d\mathbf{n}(t)$$

Če $\mathbf{r}(t)$ pri tem predstavlja Bezierjevo PH krivuljo velja, da $\mathbf{r}_d(t)$ spada med racionalne Bezierjeve krivulje. V primeru kubične PH krivulje je njen odmik 5. stopnje. Normala $\mathbf{n}$ je pri tem enaka, kot smo jo definirali zgoraj:

$$\mathbf{n} = \frac{(2uv, v^2 - u^2)}{\sigma},$$

kjer je σ parametrična hitrost krivulje $\mathbf{r}$.

Definirajmo kontrolne točke krivulje $\mathbf{r}$ v homogenih koordinatah kot

$$\mathbf{P}_k = (W_k, X_k, Y_k) = (1, x_k, y_k), \quad k = 0, ..., n$$

Definirajmo tudi razlike med njimi:

$$\Delta\mathbf{P}_k = \mathbf{P}_{k+1} - \mathbf{P}_k = (0, \Delta x_k, \Delta y_k), \quad k = 0, ..., n-1$$

$$\Delta x_k = x_{k+1} - x_k \quad \text{in} \quad \Delta y_k = y_{k+1} - y_k$$

Označimo še

$$\Delta\mathbf{P}_k^{\perp} = (0, \Delta y_k, -\Delta x_k).$$

Potem lahko racionalni odmik PH krivulje $\mathbf{r}(t)$ zapišemo kot

$$\mathbf{r}_d(t) = \left(\frac{X(t)}{W(t)}, \frac{Y(t)}{W(t)}\right),$$

kjer so W, X in Y polinomi stopnje $2n-1$. Njihovi koeficienti, podani kot

$$\mathbf{O}_k = (W_k, X_k, Y_k) \qquad k = 0, ..., 2n-1,$$

pa definirajo kontrolne točke racionalne Bezierjeve krivulje. Homogene koordinate kontrolnih točk lahko izrazimo tudi s pomočjo kontrolnih točk podane začetne krivulje:

$$\mathbf{O}_k = \sum_{j=max(0,k-n)}^{min(n-1,k)} \frac{\binom{n-1}{j}\binom{n}{k-j}}{\binom{2n-1}{k}} (\sigma_j \mathbf{P}_{k-j} + dn\Delta\mathbf{P}_j^{\perp}) \quad k = 0, ..., 2n-1.$$

V primeru racionalnega odmika kubičnih PH krivulj so tako kontrolne točke podane kot:

$$
\begin{aligned}
\mathbf{O}_0 &= \sigma_0 \mathbf{P}_0 + 3d\Delta\mathbf{P}_0^{\perp}, \\
\mathbf{O}_1 &= \frac{1}{5}[2\sigma_1 \mathbf{P}_0 + 3\sigma_0 \mathbf{P}_1 + 3d(3\Delta\mathbf{P}_0^{\perp} + 2\Delta\mathbf{P}_1^{\perp})], \\
\mathbf{O}_2 &= \frac{1}{10}[\sigma_2 \mathbf{P}_0 + 6\sigma_1 \mathbf{P}_1 + 3\sigma_0 \mathbf{P}_2 + \\
&\quad 3d(3\Delta\mathbf{P}_0^{\perp} + 6\Delta\mathbf{P}_1^{\perp} + \Delta\mathbf{P}_2^{\perp})], \\
\mathbf{O}_3 &= \frac{1}{10}[3\sigma_2 \mathbf{P}_1 + 6\sigma_1 \mathbf{P}_2 + \sigma_0 \mathbf{P}_3 + \\
&\quad 3d(\Delta\mathbf{P}_0^{\perp} + 6\Delta\mathbf{P}_1^{\perp} + 3\Delta\mathbf{P}_2^{\perp})], \\
\mathbf{O}_4 &= \frac{1}{5}[3\sigma_2 \mathbf{P}_2 + 2\sigma_1 \mathbf{P}_3 + 3d(2\Delta\mathbf{P}_1^{\perp} + 3\Delta\mathbf{P}_2^{\perp})], \\
\mathbf{O}_5 &= \sigma_2 \mathbf{P}_3 + 3d\Delta\mathbf{P}_2^{\perp}
\end{aligned}
$$

Literatura

[1] R. T. Farouki: *Pythagorean-Hodograph Curves: Algebra and Geometry Inseparable*, poglavje 17 in 19, Springer, 2008.

[2] KRAMER, Sabina, 2018, Krivulje s pitagorejskim hodografom in interpolacija: magistrsko delo [na spletu]. Magistrsko delo. Univerza v Ljubljani. [Dostopano: 2. januar 2023].