

# Ravninske krivulje s pitagorejskim hodografom

Seminarska naloga pri predmetu *Računalniško podprto geometrijsko oblikovanje*

Univerza v Ljubljani  
Fakulteta za *matematiko in fiziko*



DAMIJAN RANDL IN TIT ARNŠEK

januar, 2023

# Kazalo

1	Uvod	1
2	PH krivulje	1
3	Bézierjeve kontrolne točke PH krivulj	2
4	Parametrična hitrost in dolžina loka	3
5	Racionalni odmiki PH krivulj	4

# 1 Uvod

Polinomske krivulje s pitagorejskim hodografom (PH krivulje) sta prvič predstavila Farouki in Sakkalis, leta 1990. V zadnjih letih so te krivulje postale aktivno področje raziskav, to pa zaradi svojih posebnih lastnosti, saj imajo prednost pri uporabi v računalniško podprtem oblikovanju, proizvodnji (CNC razrez), robotiki, načrtovanju poti, animacijah in v drugih podobnih področjih. Glavni razlog je v tem, da lahko njihovo dolžinono enostavno izračunamo natančno, njihove paralelne krivulje pa imajo vedno racionalno parametrizacijo.

Za splošne krivulje ti dve lastnosti ne veljata vedno, kar lahko v praksi povzroči določene probleme (naprimer, pri dizajniranju paralelne krivulje moramo iskati numerične približke, kar je lahko časovno zahtevno, zaradi iskanja približkov pa lahko pride tudi do napak).

## 2 PH krivulje

DEFINICIJA 2.1. *Hodograf odvedljive parametrične krivulje  $\mathbf{r}(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$  je definiran s predpisom*

$$\mathbf{r}'(t) = \begin{bmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{bmatrix}.$$

DEFINICIJA 2.2. *Polinomska krivulja  $r \in \mathbb{R}^2$  je krivulja s Pitagorejskim hodografom (PH), če velja naslednji pogoj:*

$$x'(t)^2 + y'(t)^2 = \sigma(t)^2, \text{ za nek polinom } \sigma.$$

IZREK 2.3. *Kubota*

*Polinomi  $a$ ,  $b$  in  $c$  zadostijo pitagorejskemu pogoju*

$$a^2(t) + b^2(t) = c^2(t)$$

*natanko tedaj, ko jih lahko izrazimo s polinomi  $u(t)$ ,  $v(t)$  in  $w(t)$  v obliki*

$$\begin{aligned} a(t) &= (u^2(t) - v^2(t))w(t), \\ b(t) &= 2u(t)v(t)w(t), \\ c(t) &= (u^2(t) + v^2(t))w(t). \end{aligned}$$

*kjer  $u$  in  $v$  nimata skupnih ničel.*

Dokaz zgornjega izreka je malo daljši. Podrobno je opisan v [1] na strani 382. Za Ph krivulje torej velja naslenje:

$$\begin{aligned} x'(t) &= (u^2(t) - v^2(t))w(t), \\ y'(t) &= 2u(t)v(t)w(t), \\ \sigma(t) &= (u^2(t) + v^2(t))w(t). \end{aligned}$$

Oglejmo si nekaj robnih primerov:

- Če velja, da je  $w \equiv 0$  ali  $u \equiv v \equiv 0$ , potem  $\mathbf{r}(t)$  predstavlja točko.
- Če so  $u, v$  in  $w$  konstante in  $w \neq 0$ , vsaj eden od  $u, v$  neničelna konstanta, potem  $\mathbf{r}(t)$  predstavlja enakomerno parametrizirano daljico.
- Če sta  $u$  in  $v$  konstanti,  $w$  pa ni konstanta, potem je  $\mathbf{r}(t)$  neenakomerno parametrizirana daljica ali premica.
- Če je  $w \neq 0$  in  $u = \pm v$  ali vsaj eden od  $u, v$  ničelni polinom, potem je  $\mathbf{r}(t)$  neenakomerno parametrizirana daljica.

OPOMBA 2.4. Če je  $w$  polinom stopnje  $n$  in  $z$   $m$  označimo večjo izmed stopenj polinomov  $u$  in  $v$ , potem je PH krivulja dobljena z integracijo hodografa stopnje  $k = n + 2m + 1$ .

### 3 Bézierjeve kontrolne točke PH krivulj

V nadaljevanju se bomo osredotočili na hodografe kjer velja, da je  $w(t) = 1$  in  $GCD(u, v)$  konstanta. Take hodografe imenujema primitivni pitagorejski hodografi. Primitivni pitagorejski hodografi definirajo regularne PH krivulje, ki zadošujejo pogoju  $\mathbf{r}'(t) \neq 0$  za vsak  $t$ . Iz opombe 2.4 sledi, da je PH krivulja, definirana z integracijo primitivnih hodografov, lihe stopnje.

Karakterizacijo PH krivulj želimo izraziti v Bézierjevi obliki. Oglejmo si primer primitivne PH krivulje tretje stopnje v Bézierjevi obliki:

Zapišimo  $u$  in  $v$  v Bernsteinovi bazi in pri tem upoštevajmo pogoj  $w(t) = 1$ :

$$u(t) = u_0 B_1^1(t) \quad v(t) = v_0 B_0^1(t) + v_1 B_1^1(t)$$

Ker sta  $u$  in  $v$  tuja, sledi, da mora veljati  $u_0 \cdot v_1 \neq u_1 \cdot v_0$ . Iz dejstva, da  $u$  in  $v$  nista obe konstanti, pa sledi  $(u_0 - u_1)^2 + (v_0 - v_1)^2 \neq 0$ . Z upoštevanjem zgornjega izreka 2.3 dobimo naslednja predpisa za  $x'(t)$  in  $y'(t)$ :

$$\begin{aligned} x'(t) &= (u_0^2 - v_0^2) B_0^2(t) + (u_0 u_1 - v_0 v_1) B_1^2(t) + (u_1^2 - v_1^2) B_2^2(t), \\ y'(t) &= 2u_0 v_0 B_0^2(t) + (u_0 v_1 + u_1 v_0) B_1^2(t) + 2u_1 v_1 B_2^2(t). \end{aligned}$$

Z integracijo dobimo kubično Bézierjevo krivuljo podano s predpisom:

$$\mathbf{p}(t) = \mathbf{b}_0 B_0^3(t) + \mathbf{b}_1 B_1^3(t) + \mathbf{b}_2 B_2^3(t) + \mathbf{b}_3 B_3^3(t),$$

kjer so kontrolne točke definirane kot:

$$\begin{aligned}\mathbf{b}_1 &= \mathbf{b}_0 + \frac{1}{3}(u_0^2 - v_0^2, 2u_0v_0)^T, \\ \mathbf{b}_2 &= \mathbf{b}_1 + \frac{1}{3}(u_0u_1 - v_0v_1, u_0u_1 + v_0v_1)^T, \\ \mathbf{b}_3 &= \mathbf{b}_2 + \frac{1}{3}(u_1^2 - v_1^2, 2u_1v_1)^T.\end{aligned}$$

Pri tem je  $\mathbf{b}_0$  prosto izbrana kontrolna točka, ki jo dobimo zaradi konstante pri integraciji.

## 4 Parametrična hitrost in dolžina loka

Parametrična hitrost regularne PH krivulje  $r(t) = (x(t), y(t))$  je podana s predpisom:

$$\|\mathbf{r}'(t)\| = \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)} = u^2(t) + v^2(t) = \sigma(t)$$

in je polinom.

Iz lastnosti, da je krivulja  $r$ , ki jo dobimo z integriranjem stopnje  $n = 2m + 1$ , sledi da morata biti polinoma  $u$  in  $v$  stopnje  $m = \frac{1}{2}(n - 1)$ . Zapišemo ju lahko v Bernsteinovi bazi:

$$u(t) = \sum_{k=0}^m u_k B_k^m(t) \text{ in } v(t) = \sum_{k=0}^m v_k B_k^m(t).$$

Izkaže se, da je

$$\begin{aligned}\sigma(t) &= \sum_{k=0}^{n-1} \sigma_k B_k^{n-1}(t), \text{ kjer so koeficienti} \\ \sigma_k &= \sum_{j=\max(0, k-m)}^{\min(m, k)} \frac{\binom{m}{j} \binom{m}{k-j}}{\binom{n-1}{k}} (u_j u_{k-j} + v_j v_{k-j}), k = 0, \dots, n-1.\end{aligned}$$

Če pogledamo primer od zgoraj(3), dobimo naslednje koeficiente za  $\sigma$  :

$$\sigma_0 = u_0^2 + v_0^2, \sigma_1 = u_0u_1 + v_0v_1 \text{ in } \sigma_2 = u_1^2 + v_1^2.$$

Dolžino loka dobimo na naslednji način:

$$s(t) = \int_0^t \sigma(\tau) d\tau.$$

Z upoštevanjem integracijskega pravila se nam zgornji izraz poenostavi:

$$s(t) = \sum_{k=0}^n s_k \binom{n}{k} (1-t)^{n-k} t^k = \sum_{k=0}^n s_k B_k^n(t),$$

kjer je  $s_0 = 0$  in  $s_k = \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{k-1} \sigma_j$ ,  $k = 1, \dots, n$ .

OPOMBA 4.1. *Skupna dolžina loka je  $S(1)$ .*

Iz lastnosti odvoda PH krivlj sledi, da so enotski tangentni vektor, normala in ukrivljenost racionalno odvisni od parametra krivulje. Natančneje:

$$\mathbf{t} = \frac{(u^2 - v^2, 2uv)}{\sigma}, \quad \mathbf{n} = \frac{(2uv, v^2 - u^2)}{\sigma}, \quad \kappa = 2 \frac{uv' - u'v}{\sigma^2}.$$

## Newton-Raphsonova iteracija

Običajno se Bezierjeve krivulje prikaže z vrednotenjem vrednosti parametrov  $t_0, \dots, t_N$ , kjer so razmiki med parametri enakomerni. S tem se običajno dobi neenakomerno porazdeljene točke na krivulji, saj parametrična hitrost, v splošnem, ni konstantna. Če želimo doseči, da bodo točke  $s(t_k)$  vseeno enakomerno porazdeljene na grafu, lahko to dosežemo tako, da za vsak  $t_k$  izračunamo nov paramater, ki ga dobimo s pomočjo *Newton-Raphsonove iteracije*:

$$t_k^{(0)} = t_{k-1} + \frac{\Delta s}{\sigma(t_{k-1})}$$

$$t_k^{(r)} = t_k^{(r-1)} - \frac{s(t_k^{(r-1)}) - k\Delta s}{\sigma(t_k^{(r-1)})}, r = 1, 2, \dots$$

Za dobre rezultate je dovolj že nekaj iteracij.

## 5 Racionalni odmiki PH krivulj

Racionalni odmiki PH krivulj Odmik krivulje  $\mathbf{r}(t)$  je v splošnem definiran kot

$$\mathbf{r}_d(t) = \mathbf{r}(t) + d\mathbf{n}(t)$$

Če  $\mathbf{r}(t)$  pri tem predstavlja Bezierjevo PH krivuljo velja, da  $\mathbf{r}_d(t)$  spada med racionalne Bezierjeve krivulje. V primeru kubične PH krivulje je njen odmik 5. stopnje. Normala  $\mathbf{n}$  je pri tem enaka, kot smo jo definirali zgoraj:

$$\mathbf{n} = \frac{(2uv, v^2 - u^2)}{\sigma},$$

kjer je  $\sigma$  parametrična hitrost krivulje  $\mathbf{r}$ .

Definirajmo kontrolne točke krivulje  $\mathbf{r}$  v homogenih koordinatah kot

$$\mathbf{P}_k = (W_k, X_k, Y_k) = (1, x_k, y_k), \quad k = 0, \dots, n$$

Definirajmo tudi razlike med njimi:

$$\Delta \mathbf{P}_k = \mathbf{P}_{k+1} - \mathbf{P}_k = (0, \Delta x_k, \Delta y_k), \quad k = 0, \dots, n-1$$

$$\Delta x_k = x_{k+1} - x_k \quad \text{in} \quad \Delta y_k = y_{k+1} - y_k$$

Označimo še

$$\Delta \mathbf{P}_k^\perp = (0, \Delta y_k, -\Delta x_k).$$

Potem lahko racionalni odmik PH krivulje  $\mathbf{r}(t)$  zapišemo kot

$$\mathbf{r}_d(t) = \left( \frac{X(t)}{W(t)}, \frac{Y(t)}{W(t)} \right),$$

kjer so  $W$ ,  $X$  in  $Y$  polinomi stopnje  $2n-1$ . Njihovi koeficienti, podani kot

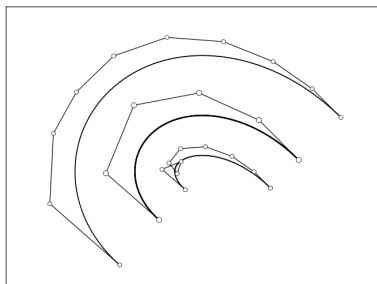
$$\mathbf{O}_k = (W_k, X_k, Y_k) \quad k = 0, \dots, 2n-1,$$

pa definirajo kontrolne točke racionalne Bezierjeve krivulje. Homogene koordinate kontrolnih točk lahko izrazimo tudi s pomočjo kontrolnih točk podane začetne krivulje:

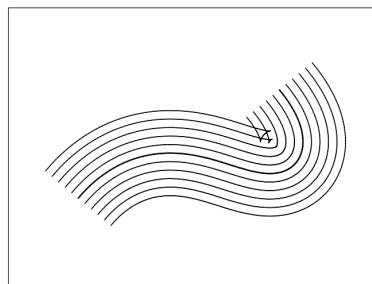
$$\mathbf{O}_k = \sum_{j=\max(0, k-n)}^{\min(n-1, k)} \frac{\binom{n-1}{j} \binom{n}{k-j}}{\binom{2n-1}{k}} (\sigma_j \mathbf{P}_{k-j} + dn \Delta \mathbf{P}_j^\perp) \quad k = 0, \dots, 2n-1.$$

V primeru racionalnega odmika kubičnih PH krivulj so tako kontrolne točke podane kot:

$$\begin{aligned} \mathbf{O}_0 &= \sigma_0 \mathbf{P}_0 + 3d \Delta \mathbf{P}_0^\perp, \\ \mathbf{O}_1 &= \frac{1}{5} [2\sigma_1 \mathbf{P}_0 + 3\sigma_0 \mathbf{P}_1 + 3d(3\Delta \mathbf{P}_0^\perp + 2\Delta \mathbf{P}_1^\perp)], \\ \mathbf{O}_2 &= \frac{1}{10} [\sigma_2 \mathbf{P}_0 + 6\sigma_1 \mathbf{P}_1 + 3\sigma_0 \mathbf{P}_2 + \\ &\quad 3d(3\Delta \mathbf{P}_0^\perp + 6\Delta \mathbf{P}_1^\perp + \Delta \mathbf{P}_2^\perp)], \\ \mathbf{O}_3 &= \frac{1}{10} [3\sigma_2 \mathbf{P}_1 + 6\sigma_1 \mathbf{P}_2 + \sigma_0 \mathbf{P}_3 + \\ &\quad 3d(\Delta \mathbf{P}_0^\perp + 6\Delta \mathbf{P}_1^\perp + 3\Delta \mathbf{P}_2^\perp)], \\ \mathbf{O}_4 &= \frac{1}{5} [3\sigma_2 \mathbf{P}_2 + 2\sigma_1 \mathbf{P}_3 + 3d(2\Delta \mathbf{P}_1^\perp + 3\Delta \mathbf{P}_2^\perp)], \\ \mathbf{O}_5 &= \sigma_2 \mathbf{P}_3 + 3d \Delta \mathbf{P}_2^\perp. \end{aligned}$$



(a) Primer Bezierjeve krivulje  
5. stopnje z odmiki in  
kontrolnim poligonom



(b) Primer Bezierjeve krivulje  
5. stopnje z odmiki

## Literatura

- [1] R. T. Farouki: *Pythagorean-Hodograph Curves: Algebra and Geometry Inseparable*, poglavje 17 in 19, Springer, 2008.
- [2] KRAMER, Sabina, 2018, *Krivulje s pitagorejskim hodografom in interpolacija: magistrsko delo* [na spletu]. Magistrsko delo. Univerza v Ljubljani. [Dostopano: 2. januar 2023].