

Ravninske krivulje s pitagorejskim hodografom

Seminarska naloga pri predmetu *Računalniško podprto geometrijsko oblikovanje*

Univerza v Ljubljani
Fakulteta za *matematiko in fiziko*



DAMIJAN RANDL IN TIT ARNŠEK

januar, 2023

Kazalo

1	Uvod	1
2	PH krivulje	1
3	Bézierjeve kontrolne točke PH krivulj	2
4	Parametrična hitrost in dolžina loka	3
5	Racionalni odmiki PH krivulj	4

1 Uvod

Polinomske krivulje s pitagorejskim hodografo (PH krivulje) sta prvič predstavila Farouki in Sakkalis, leta 1990. V zadnjih letih so te krivulje postale aktivno področje raziskav, to pa zaradi svojih posebnih lastnosti, saj imajo prednost pri uporabi v računalniško podprtem oblikovanju, proizvodnji (CNC razrez), robotiki, načrtovanju poti, animacijah in v drugih podobnih področjih. Glavni razlog je v tem, da lahko njihovo dolžinono enostavno izračuna natančno, njihove paralelne krivulje pa imajo vedno racionalno parametrizacijo.

Za splošne krivulje ti dve lastnosti ne veljata vedno, kar lahko v praksi povzroči določene probleme (naprimer, pri dizajniranju paralelne krivulje moramo iskati numerične približke, kar je lahko časovno zahtevno, zaradi iskanja približkov pa lahko pride tudi do napak).

2 PH krivulje

DEFINICIJA 2.1. *Hodograf odvedljive parametrične krivulje $r(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$ je definiran s predpisom*

$$r'(t) = \begin{bmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{bmatrix}.$$

DEFINICIJA 2.2. *Polinomska krivulja $r \in \mathbb{R}^2$ je krivulja s Pitagorejskim hodografo (PH), če velja naslednji pogoj:*

$$x'(t)^2 + y'(t)^2 = \sigma(t)^2, \text{ za nek polinom } \sigma.$$

IZREK 2.3. *Kubota*

Polinomi a , b in c zadostijo pitagorejskemu pogoju

$$a^2(t) + b^2(t) = c^2(t),$$

natanko tedaj, ko jih lahko izrazimo s polinomi $u(t)$, $v(t)$ in $w(t)$ v obliki

$$a(t) = (u^2(t) - v^2(t))w(t),$$

$$b(t) = 2u(t)v(t)w(t),$$

$$c(t) = (u^2(t) + v^2(t))w(t),$$

kjer u in v nimata skupnih ničel.

Dokaz zgornjega izreka je malo daljši. Podrobno je opisan v [1] na strani 382. Za PH krivulje torej velja naslenje:

$$x'(t) = (u^2(t) - v^2(t))w(t),$$

$$y'(t) = 2u(t)v(t)w(t),$$

$$\sigma(t) = (u^2(t) + v^2(t))w(t),$$

Oglejmo si nekaj robnih primerov:

- Če velja, da je $w \equiv 0$ ali $u \equiv v \equiv 0$, potem $r(t)$ predstavlja točko.
- Če so u , v in w konstante in $w \neq 0$, vsaj eden od u, v neničelna konstanta, potem $r(t)$ predstavlja enakomerno parametrizirano daljico. potem je PH krivulja enakomerno parametrizirana daljica.
- Če sta u in v konstanti, w ni konstanta, potem je $r(t)$ neenakomerno parametrizirana daljica ali premica.
- Če je $w \neq 0$ in $u = \pm v$ ali vsaj eden od u, v ničelni polinom, potem $r(t)$ neenakomerno parametrizirana daljica.

OPOMBA 2.4. Če je w polinom stopnje n in z m označimo večjo izmed stopenj polinomov u in v , potem je PH krivulja dobljena z integracijo hodografa stopnje $k = n + 2m + 1$

3 Bézierjeve kontrolne točke PH krivulj

V nadaljevanju se bomo osredotočili na hodografe kjer je $w(t) = 1$ in je $GCD(u, v)$ konstanta. Imenjujemo jih primitivni Pitagorejski hodografi. Takšni hodografi definirajo regularne PH krivulje, ki zadostujejo pogoju $r'(t) \neq 0$ za vsak t . Iz opombe (stevilka) sledi, da je stopnja PH krivulje, definirane z integracijo primitivnih hodografov, lihe stopnje ($k = 2m + 1$).

Karakterizacijo PH krivulj želimo izraziti v Bezierjevi obliki.

Oglejmo si primer primitivne PH krivulje 3. stopnje v Bezierjevi obliki: Zapišimo u in v v Bernsteinovi bazi in pri tem upoštevamo pogoj $w(t) = 1$

$$u(t) = u_0 B_1^1(t), v(t) = v_0 B_0^1(t) + v_1 B_1^1(t)$$

Ker sta u in v tuja, sledi, da mora biti $u_0 * v_1 \neq u_1 * v_0$. Iz dejstva, da u in v nista obe konstanti, pa sledi $(u_0 - u_1)^2 + (v_0 - v_1)^2 \neq 0$.

Z upoštevanjem zgornjega izreka pa dobimo naslednja predpisa za $x'(t)$ in $y'(t)$

$$x'(t) = (u_0^2 - v_0^2)B_0^2(t) + (u_0 u_1 - v_0 v_1)B_1^2(t) + (u_1^2 - v_1^2)B_2^2(t),$$

$$y'(t) = 2u_0v_0B_0^2(t) + (u_0v_1 + u_1v_0)B_1^2(t) + 2u_1v_1B_2^2(t).$$

Definirajmo sedaj (brez dokaza) še pravilo za integriranje Bernsteinovih baznih polinomov: Z integracijo dobimo kubično Bezierjevo krivuljo podano s predpisom:

$$p(t) = b_0 * B_0^3(t) + b_1 * B_1^3(t) + b_2 * B_2^3(t) + b_3 * B_3^3(t)$$

kjer je

$$b_1 = b_0 + \frac{1}{3} * (u_0^2 - v_0^2, 2 * u_0 * v_0)^T,$$

$$b_2 = b_1 + \frac{1}{3} * (u_0 * u_1 - v_0 * v_1, u_0 * u_1 + v_0 * v_1)^T,$$

$$b_3 = b_2 + \frac{1}{3} * (u_1^2 - v_1^2, 2 * u_1 * v_1)^T,$$

Pri tem je p_0 prosto izbrana kontrolna točka (zaradi konstante pri integraciji).

4 Parametrična hitrost in dolžina loka

Parametrična hitrost regularne PH krivulje $r(t) = (x(t), y(t))$ je podana s predpisom:

$$\|r'(t)\| = \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)} = u^2(t) + v^2(t) = \sigma(t)$$

in je polinom.

Iz lastnosti, da je krivulja r , ki jo dobimo z integriranjem stopnje $n = 2m + 1$, sledi da morata biti polinoma u in v stopnje $m = \frac{1}{2}(n - 1)$. Zapišemo ju lahko v Bernsteinovi bazi:

$$u(t) = \sum_{k=0}^m u_k B_k^m(t) \text{ in } v(t) = \sum_{k=0}^m v_k B_k^m(t).$$

Izkaže se, da je

$$\sigma(t) = \sum_{k=0}^{n-1} \sigma_k B_k^{n-1}(t), \text{ kjer so koeficienti}$$

$$\sigma_k = \sum_{j=\max(0, k-m)}^{\min(m, k)} \frac{\binom{m}{j} \binom{m}{k-j}}{\binom{n-1}{k}} (u_j u_{k-j} + v_j v_{k-j}), k = 0, \dots, n-1.$$

Če pogledamo primer od zgoraj (kubično B. krivuljo) dobimo naslednje koeficiente za σ :

$\sigma_0 = u_0^2 + v_0^2$, $\sigma_1 = u_0 u_1 + v_0 v_1$, in $\sigma_2 = u_1^2 + v_1^2$.
Dolžino loka dobimo na naslednji način:

$$s(t) = \int_0^t \sigma(\tau) d\tau.$$

Z upoštevanjem integracijskega pravila se nam zgornji izraz poenostavi:

$$s(t) = \sum_{k=0}^n s_k \binom{n}{k} (1-t)^{n-k} t^k = \sum_{k=0}^n s_k B_k^n(t),$$

kjer je $s_0 = 0$ in $s_k = \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{k-1} \sigma_j$, $k = 1, \dots, n$.

OPOMBA 4.1. *Skupna dolžina loka je $S(1)$.*

Iz lastnosti odvoda PH krivlj sledi, da so enotski tangentni vektor, normala in ukrivljenost racionalno odvisni od parametra krivulje. Natančneje:

$$\mathbf{t} = \frac{(u^2 - v^2, 2uv)}{\sigma}, \quad \mathbf{n} = \frac{(2uv, v^2 - u^2)}{\sigma}, \quad \kappa = 2 \frac{uv' - u'v}{\sigma^2}.$$

Newton-Raphsonova iteracija

Običajno se Bezierjeve krivulje prikaže z vrednotenjem vrednosti parametrov t_0, \dots, t_N , kjer so bili razmiki enakomerni. S tem se običajno dobi neenakomerno porazdeljene točke na krivulji, saj parametrična hitrost, v splošnem, ni konstantna. Če želimo doseči, da bodo točke $s(t_k)$ vseeno enakomerno porazdeljene na grafu, lahko to dosežemo tako, da za vsak t_k izračunamo nov paramater, ki ga dobimo s pomočjo Newton-Raphsonove iteracije:

$$t_k^{(0)} = t_{k-1} + \frac{\Delta s}{\sigma(t_{k-1})}$$

$$t_k^{(r)} = t_k^{(r-1)} - \frac{s(t_k^{(r-1)}) - k \Delta s}{\sigma(t_k^{(r-1)})}, r = 1, 2, \dots$$

Za dobre rezultate je dovolj že nekaj iteracij.

5 Racionalni odmiki PH krivulj

Racionalni odmiki PH krivulj Odmik krivulje $r(t)$ je v splošnem definiran kot

$$r_d(t) = r(t) + dn(t)$$

V primeru, da $r(t)$ pri tem predstavlja Bezierjevo PH krivuljo velja, da $r_d(t)$ spada med racionalne Bezierjeve krivulje. V primeru kubične PH krivulje je njen odmik 5. stopnje. Normala n je pri tem enaka, kot smo jo definirali zgoraj:

$$\mathbf{n} = \frac{(2uv, v^2 - u^2)}{\sigma}$$

, kjer je σ parametrična hitrost krivulje r .

Definirajmo kontrolne točke krivulje r v homogenih koordinatah kot

$$P_k = (W_k, X_k, Y_k) = (1, x_k, y_k), k = 0, \dots, n.$$

Z

$$\Delta P_k = P_{k+1} - P_k = (0, \Delta x_k, \Delta y_k), k = 0, \dots, n-1$$

pa definirajmo razlike med njimi. Pri tem so

$$\Delta x_k = x_{k+1} - x_k$$

in

$$\Delta y_k = y_{k+1} - y_k$$

Označimo še

$$\Delta P_k^\perp = (0, \Delta y_k, -\Delta x_k)$$

. Potem lahko racionalni odmik PH krivulje $r(t)$ zapišemo kot

$$r_d(t) = \left(\frac{X(t)}{W(t)}, \frac{Y(t)}{W(t)} \right)$$

, kjer so W , X in Y polinomi stopnje

$$2n-1$$

, katerih koeficienti

$$O_k = (W_k, X_k, Y_k), k = 0, \dots, 2n-1$$

definirajo kontrolne točke racionalne Bezierjeve krivulje. Homogene koordinate kontrolnih točk pa lahko izrazimo tudi s pomočjo kontrolnih točk podane začetne krivulje:

$$O_k = \sum_{j=\max(0, k-n)}^{\min(n-1, k)} \frac{\binom{n-1}{j} \binom{n}{k-j}}{\binom{2n-1}{k}} (\sigma_j P_{k-j} + dn \Delta P_j^\perp), k = 0, \dots, 2n-1.$$

Kontrolne točke racionalnega odmika kubičnih PH krivulj so tako podane kot:

$$O_0 = \sigma_0 P_0 + 3d\Delta P_0^\perp$$

,

$$O_1 = \frac{1}{5}[2\sigma_1 P_0 + 3\sigma_0 P_1 + 3d(3\Delta P_0^\perp + 2\Delta P_1^\perp)]$$

,

$$O_2 = \frac{1}{10}[\sigma_2 P_0 + 6\sigma_1 P_1 + 3\sigma_0 P_2 + 3d(3\Delta P_0^\perp + 6\Delta P_1^\perp) + \Delta P_2^\perp]$$

,

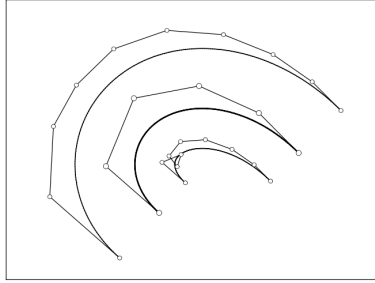
$$O_3 = \frac{1}{10}[3\sigma_2 P_1 + 6\sigma_1 P_2 + \sigma_0 P_3 + 3d(\Delta P_0^\perp + 6\Delta P_1^\perp + 3\Delta P_2^\perp)]$$

,

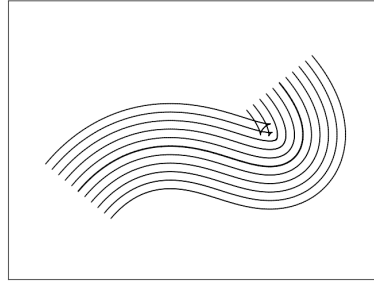
$$O_4 = \frac{1}{5}[3\sigma_2 P_2 + 2\sigma_1 P_3 + 3d(2\Delta P_1^\perp + 3\Delta P_2^\perp)]$$

,

$$O_5 = \sigma_2 P_3 + 3d\Delta P_2^\perp$$



(a) label 1



(b) label 2

Slika 1: 2 Figures side by side

Literatura

- [1] R. T. Farouki: *Pythagorean-Hodograph Curves: Algebra and Geometry Inseparable*, Springer, 2008