Fisica Computazionale: Esercitazione 3

March 15, 2022

1 Soluzione equazioni differenziali ordinarie

A lezione abbiamo visto come risolvere un sistema di equazioni differenziali al primo ordine nella forma

$$\begin{cases} \frac{dx(t)}{dt} = f\left(t, x(t), y(t)\right) \\ \frac{dy(t)}{dt} = g\left(t, x(t), y(t)\right) \end{cases} \tag{1}$$

In questa esercitazione risolveremo l'equazione del moto per un'oscillatore armonico descritto dall'Hamiltoniana

$$H(x,v) = \frac{m}{2}v^2 + \frac{k}{2}x^2 \ .$$

1. scrivi l'equazione del moto per l'oscillatore come un sistema di equazioni al primo ordine simile a Eq. (1). Prendi una scala di lunghezze (arbitraria) L, $T = \sqrt{m/k}$ come scala dei tempi e riscrivi l'Hamiltoniana e il sistema di equazioni in forma adimensionale usando $\hat{x} = x/L$, $\hat{t} = t/T$ e $\hat{v} = (T/L)v$. Qual'é la scala delle energie?

2. scrivi del codice per implementare i seguenti algoritmi

   (a) metodo di Eulero esplicito

   (b) metodo di Eulero implicito

   (c) regola dei trapezi

   (d) metodo di Eulero-Cromer

   Per gli ultimi tre metodi implementa l'integratore nel caso specifico dell'oscillatore armonico mentre nel caso del metodo di Eulero esplicito implementa un'integratore generale per risolvere sistemi di equazioni come quello in Eq. (1).

   - suggerimento: usando C puó essere conveniente definire due funzioni

$$\text{double } f(\text{double } t, \text{double } x, \text{double } y, \text{double } {}^*fargs)\{...\}$$
$$\text{double } g(\text{double } t, \text{double } x, \text{double } y, \text{double } {}^*gargs)\{...\}$$

che restituisco il falore della derivata di x e y rispettivamente. I puntatori all'ultimo argomento conterranno i parametri necessari per calcolare queste derivate. Usando queste definizioni, possiamo quindi creare un'integratore del tipo

$$\begin{aligned} \text{int } eulero(&\text{double } t, \text{double } {}^*x, \text{double } {}^*y, \text{double } h, \\ &\text{double}({}^*f)(\text{double }, \text{double }, \text{double }, \text{double}^*), \\ &\text{double } {}^*fargs, \\ &\text{double}({}^*g)(\text{double }, \text{double }, \text{double }, \text{double}^*), \\ &\text{double } {}^*gargs)\{...\} \end{aligned}$$

Gli argomenti alla seconda e quarta riga sono puntatori a funzione e ci permettono di chiamare l'integratore come

$$result = eulero(t, \&x, \&y, h, f, fargs, g, gargs);\, ,$$

usando le funzioni implementate prima. L'integratore restituisce 0 se non ci sono stati problemi e 1 altrimenti mentre il valore di x e y viene aggiornato.

3. usa gli algoritmi implementati al punto precedente per risolvere le equazioni del moto con $\hat{x}(0) = 1$, $\hat{y}(0) = 0$ per un tempo totale $t_{max} = 25T$. Per ogni metodo fai un grafico dell'energua in funzione del tempo e dell'errore sul valore di $\hat{x}$. Che valore per il time step h serve per ottenere un errore su $\hat{x}$ minore di 0.01? E se usiamo invece $t_{max} = 250T$? Per stimare l'errore puoi usare la deviazione osservata all'ultimo minimo (o massimo) della funzione.