Fisica Computazionale: Esercitazione 1

1 Errori Numerici e Differenze Finite

1. trova l'errore macchina ϵ usando un for loop e la seguente comparazione $(1.0 + x == 1.0)$. Utilizza sia singola (float) che doppia (double) precisione (usa $1.f$ e $1.$ rispettivamente). Puoi anche provare con quadrupla precisione (long double) usando la costante $1.l$.

2. calcola numericamente la derivate di $f(x) = e^x$ in $x = 1$ usando le formule alle differenze finite
$$\frac{df(x)}{dx} = \frac{f(x+h) - f(x)}{h} + \mathcal{O}(h)\ . \tag{1}$$
   (a) Fai un grafico dell'errore in funzione del passo h. Puoi usare sia singola che doppia precisione.
   (b) Assumi che l'errore numerico nel fare l'operazione $*$ (puó essere $+, -, \times, /$) possa essere descritto come
$$\widetilde{(a * b)} = (a * b)\left(1 \pm \frac{\epsilon}{2}\right)\ .$$
   Trova una stima dell'errore per la derivata e usa questa stima per spiegare il risultato ottenuto al punto precedente.

3. la soluzione standard per un'equazione quadratica $ax^2 + bx + c = 0$
$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$
   puó diventare instabile quando $b^2 \gg 4ac$.
   (a) Cerca di prevedere quale delle due soluzioni e' instabile, scegli parametri appropriati e fai vedere il problema usando variabili in singola precisione (float)
      - suggerimento: confronta con il risultato ottenuto in doppia precisione per ottenere una stima dell'errore relativo

   Un'alternativa piu' stabile puó essere ottenuta moltiplicando il numeratore e denominatore di x_1 per $-b - \sqrt{b^2 - 4ac}$, mentre per la seconda soluzione x_2 usiamo $-b + \sqrt{b^2 - 4ac}$, ottenendo
$$x_1 = \frac{2c}{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}} \quad x_2 = \frac{2c}{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}\ .$$

(b) Implementa la versione stabile della soluzione dell'equazione quadratica in due casi: $b > 0$ e $b < 0$. Confronta la stabilitá numerica con il metodo precedente

4. [BONUS] il calcolo di $\log(x)$ quando $x \to 1$ diventa numericamente instabile. La libreria math.h implementa delle versioni accurate con i nomi: $log1pf$ (per float) e $log1p$ (per double).

   (a) Usa la versione in double precision come riferimento e guarda all'errore relativo nel calcolo con variabili float in funzione di x facendo un loop in cui $x \to x/2$ partendo da due punti diversi: $x = 1.f$ e $x = 0.1f$. Commenta le differenze.

   Una versione accurata puo' essere costruita usando

$$log(1+x) \to \begin{cases} x & \text{se} \quad x + 1.f == 1.f \\ x\left(\frac{\log(1.f+x)}{(1.f+x)-1.f}\right) & \text{altrimenti} \end{cases}$$

   Questa espressione puó essere ottenuta notando che $\log(1+x) \approx x$ quando $x \to 0$ e che l'espressione in parentesi varia poco in quel limite. Quest'ultima osservazione vuol dire che possiamo approssimare la parentesi in modo stabile usando un valore appropriato $y \approx x$.

   (b) Prova a usare questa implementazione e confronta l'errore relativo.

   (c) Cerca di giustificare la scelta di y usando il fatto che $\log(1 + x)$ per $x \to 0$ é invece stabile