Fisica Computazionale: Esercitazione 4

1 Stabilitá delle stelle

La condizione di equilibrio per una stella compatta, come le nane bianche o le stelle di neutroni, si basa sulla condizione locale di equilibrio idrostatico. Se consideriamo una massa sferica composta da materia omogenea ma non uniforme, possiamo scrivere la massa totale $m(r)$ contenuta in una sfera di raggio r come

$$m(r) = 4\pi \int_0^r dx\rho(x)x^2 \ , \tag{1}$$

con $\rho(x)$ la densitá di massa a una distanza x dal centro. L'elemento di massa contenuto in un volume infinitesimo $dV(r) = 4\pi r^2 dr$ é dunque

$$dm(r) = \rho(r)dV(r) = 4\pi\rho(r)r^2 dr \ , \tag{2}$$

e puo' essere ottenuta differenziando Eq. (1). La forza gravitazionale esercitata su questo elemento di volume dalla massa interna $m(r)$ é quindi

$$dF = -G\frac{m(r)dm(r)}{r^2} = -G\frac{m(r)\rho(r)}{r^2}4\pi r^2 dr \ . \tag{3}$$

Dividenso per la superficie della sfera otteniamo la pressione

$$dP(r) = \frac{dF}{4\pi r^2} = -G\frac{m(r)\rho(r)}{r^2}dr \ . \tag{4}$$

Possiamo quindi riscrivere Eq. (2) e Eq. (4) in forma differenziale

$$\frac{dP}{dr} = -G\frac{m(r)\rho(r)}{r^2} \qquad \frac{dm}{dr} = 4\pi\rho(r)r^2 \ . \tag{5}$$

Questo sistema di equazioni differenziali puó essere risolto per ottenere le proprietá della stella. Se prendiamo come condizioni iniziali $P(r=0) = P_c$, la pressione centrale, e $m(r=0) = 0$, integrando queste equazioni verso l'esterno arriviamo al punto in cui la pressione diventa nulla $P(R) = 0$. Abbiamo raggiunto la superficie della stella ad un raggio $r = R$. Dalla soluzione otteniamo anche la massa totale $M = m(R)$. Sia M che R dipendono dalla scelta della pressione centrale. Variando P_c possiamo ottenere una curva che descrive la relazione massa-raggio $M(R)$.

Quantitá	valore
Massa solare	$M_\odot = 1.989\ 10^{30}$ [kg] $= 1.1157467\ 10^{60}$ [MeVc^{-2}]
Massa neutrone	$M_n = 1.67492\ 10^{-27}$ [kg] $= 938.565$ [MeVc^{-2}]
Densitá nucleo terrestre	$\rho_s = M_n \times 0.16$ [MeVc^{-2}fm^{-3}]
Costante gravitazionale	$G = \hbar c \times 6.67259\ 10^{-45}$[MeV^{-1}fmc^4]
Raggio stella di neutroni	≈ 10[km]
Distanze tipiche nucleo	1[fm] $= 10^{-15}$[m]
$\hbar c$	197.327[MeVfm]

Table 1: Alcune costanti utili per questo problema

In generale non abbiamo accesso alla funzione $\rho(r)$ e dobbiamo quindi collegare la densitá ad un raggio r alla pressione $P(r)$ e/o alla massa $m(r)$. Questo collegamento puó essere fatto utilizzando un modello per l'equazione di stato della materia di cui é composta la stella. Questa é una relazione fra la densitá di energia ϵ e la densitá numerica $n = N/V$, con N il numero totale di particelle in un volume V. Un modello molto comune per definire un equazione di stato si puó ottenere usando una politropica

$$\epsilon(n) = \mu c^2 n + K c^2 n^\Gamma \ , \tag{6}$$

dove il primo contributo viene dalla massa a riposo (μ é la massa delle particelle e c la velocitá della luce), mentre il secondo contributo descrive l'effetto delle interazioni. Il parametro Γ é chiamato indice politropico. La densitá di massa ρ é collegata alla densitá numerica n come: $\rho(r) = \mu n(r)$.

Possiamo ora ottenere la pressione in funzione della densitá usando la relazione termodinamica

$$P = -\frac{dE}{dV} \ , \tag{7}$$

dove E é l'energia totale in un volume V. Otteniamo quindi

$$P = -\frac{d(\epsilon V)}{dV} = -\epsilon - V\frac{d\epsilon}{dV} = -\epsilon - V\frac{dn}{dV}\frac{d\epsilon}{dn} = -\epsilon + n\frac{d\epsilon}{dn} \ , \tag{8}$$

Usando l'equazione di stato in Eq. (6) troviamo quindi

$$P = K(\Gamma - 1)c^2 n^\Gamma \ . \tag{9}$$

A questo punto possiamo usare questa relazione per esprimere la densitá di massa in funzione della pressione locale

$$\rho(r) = \rho\left(P(r)\right) = \mu\left(\frac{P}{K(\Gamma-1)c^2}\right)^{\frac{1}{\Gamma}} \ . \tag{10}$$

Le scale in gioco in questo problema hanno differenze gigantesche, é molto importante quindi portare le equazioni differenziali in forma adimensionale per evitare errori numerici catastrofici. In particolare prendiamo

$$m = M_0\hat{m} \quad r = R_0\hat{r} \quad P = P_0\hat{P} \quad \rho = \rho_0\hat{\rho} \quad \epsilon = \epsilon_0\hat{\epsilon} \ , \tag{11}$$

dove indichiamo con ˆ le variabili adimensionali. Una scelta conveniente é prendere $\rho_0 = \rho_s$, $\epsilon_0 = P_0 = \rho_0 c^2$ e sciegliere M_0 e R_0 in modo da avere costanti pari a uno nelle equazioni differenziali

$$\frac{d\hat{P}}{d\hat{r}} = -\frac{\hat{m}\hat{\rho}}{\hat{r}^2} \qquad \frac{d\hat{m}}{d\hat{r}} = \hat{r}^2\hat{\rho} \tag{12}$$

insieme all'equazione di stato

$$\hat{\epsilon} = \hat{\rho} + \hat{K}\hat{\rho}^{\Gamma} \Rightarrow \hat{\rho} = \left(\frac{\hat{P}}{\hat{K}(\Gamma-1)}\right)^{\frac{1}{\Gamma}} \tag{13}$$

Per ottenere le espressioni riportate sopra abbiamo scelto

$$1 = G\frac{M_0\rho_0}{P_0 R_0} \qquad 1 = 4\pi\frac{R_0^3\rho_0}{M_0} \qquad \hat{K} = K\frac{\rho_0^{\Gamma-1}}{\mu^{\Gamma}}\ . \tag{14}$$

1. Per le scelte di scale riportate sopra, vedi Eq. (14), calcola il valore di M_0 e R_0. Il risultato é compatibile con le scale tipiche riportate in Tab.1?

2. usa il metodo di Runge-Kutta al quarto ordine per risolvere il sistema di equazioni in Eq. (12) usando 3 valori diversi per la costante Γ

   (a) $\Gamma = 5/3$ materia fermionica non relativistica (usa $\hat{K} = 0.05$)

   (b) $\Gamma = 4/3$ materia fermionica ultra relativistica (usa $\hat{K} = 0.1$)

   (c) $\Gamma = 2.54$ materia nucleare ad alta densitá (usa $\hat{K} = 0.01$)

   Per ciascuna scelta fai un grafico della relazione massa/raggio variando il valore iniziale per la pressione centrale. Cerca soluzioni con raggi tra $R_{\min} \approx 3$ [km] e $R_{\max} \approx 50$ [km].

3. prova ad usare il metodo di Eulero e confronta la convergenza dell'errore in funzione dell'errore nello step di integrazione h con il metodo di Runge-Kutta. Per stimare la convergenze con h, prova a fare un conto con h_1 e un'altro con $h_2 = h_1/2$ e confronta le soluzioni: continua a diminuire il valore di h fino a quando la soluzione non varia piu' in modo apprezzabilie. Che valore di h serve per ottenere risultati stabili nei due casi?