

Relazione 4: Oscillatore armonico

Gruppo MER3: Ziglio Simone, Furlan Riccardo*

1 novembre 2021

1 Introduzione

In quest'esperienza di laboratorio abbiamo sfruttato le caratteristiche degli amplificatori operazionali per costruire due circuiti che implementano un oscillatore armonico. Dapprima abbiamo realizzato un oscillatore smorzato, caratterizzandolo tramite misure del tempo caratteristico di smorzamento in diverse configurazioni. Successivamente, tramite l'aggiunta di un ramo, abbiamo realizzato un oscillatore ad ampiezza costante, in grado di autosostenersi. Abbiamo studiato il comportamento dell'oscillatore al variare di alcune componenti.

2 Oscillatore armonico smorzato

Analizzando il circuito [1](#) si ottiene l'equazione per la tensione V_1 in funzione del tempo dopo un'eccitazione al tempo $t = 0$.

$$\ddot{V}_1 + \frac{2r}{\tau} \dot{V}_1 + \frac{1}{\tau^2} V_1 = 0 \quad (1)$$

È possibile definire il tempo di smorzamento $\tau_S = \frac{\tau}{r}$ ed essendo $r = \frac{\epsilon}{\epsilon+1}$ un valore adimensionale, τ_S è espresso in secondi.

Inoltre, introducendo $\omega_S = \frac{1}{\tau_S}$ e $\omega_0 = \frac{1}{\tau}$, si ottiene la relazione:

$$\omega_S = \omega_0 r = \omega_0 \frac{\epsilon}{\epsilon + 1} \quad (2)$$

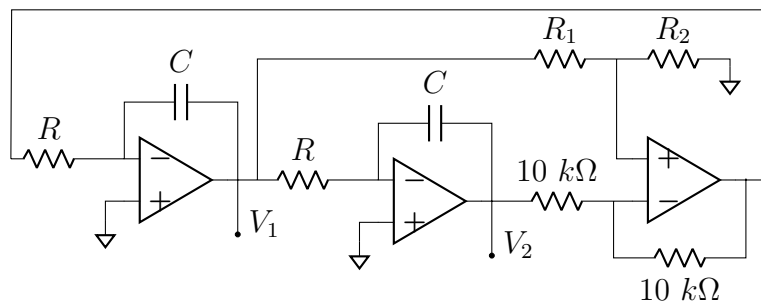


Figura 1: Oscillatore smorzato con due integratori ed un invertitore

*E-mail: simone.ziglio-1@studenti.unitn.it - riccardo.furlan@studenti.unitn.it

Il primo circuito realizzato è visibile in Figura 1. Abbiamo utilizzato tre op-amp OP07, resistori $R = 100\text{ k}\Omega$ e capacità $C = 10\text{ nF}$, R_1 e R_2 sono state scelte da un set di resistori fra $100\text{ }\Omega$ a $10\text{ M}\Omega$ in modo da avere $\epsilon = \frac{R_2}{R_1}$ compreso fra 10^{-5} e 10^{-1} (il valore 0 è stato ottenuto cortocircuitando R_1).

Eccitando il circuito connettendo brevemente il pin invertente dell'op-amp invertitore raccogliamo i segnali V_1 e V_2 all'uscita di ciascun integratore. Osserviamo delle oscillazioni che si smorzano esponenzialmente; i due segnali sono inoltre sfasati di $\frac{\pi}{2}$, essendo il primo la derivata del secondo.

Lo smorzamento del segnale è dovuto al fattore positivo $\frac{2r}{\tau}$ presente nell'equazione differenziale 1 moltiplicato alla derivata prima di V_1 .

Al fine di caratterizzare il tempo di smorzamento τ_S effettuiamo misure di ampiezza del segnale V_1 per 8 valori di tempo (in corrispondenza delle divisioni del fondoscala) a partire dall'inizio della scarica, per 6 valori del parametro ϵ . Nel seguente grafico 2 sono riportate le diverse scariche con i plot dei rispettivi logaritmi ed è possibile notare che per le misure con valori di ϵ grandi ($\epsilon = 0.1, 0.01$), abbiamo dovuto cambiare fondoscala. Infatti, come predetto dall'equazione 2, all'aumentare di ϵ , il tempo di smorzamento diminuisce.

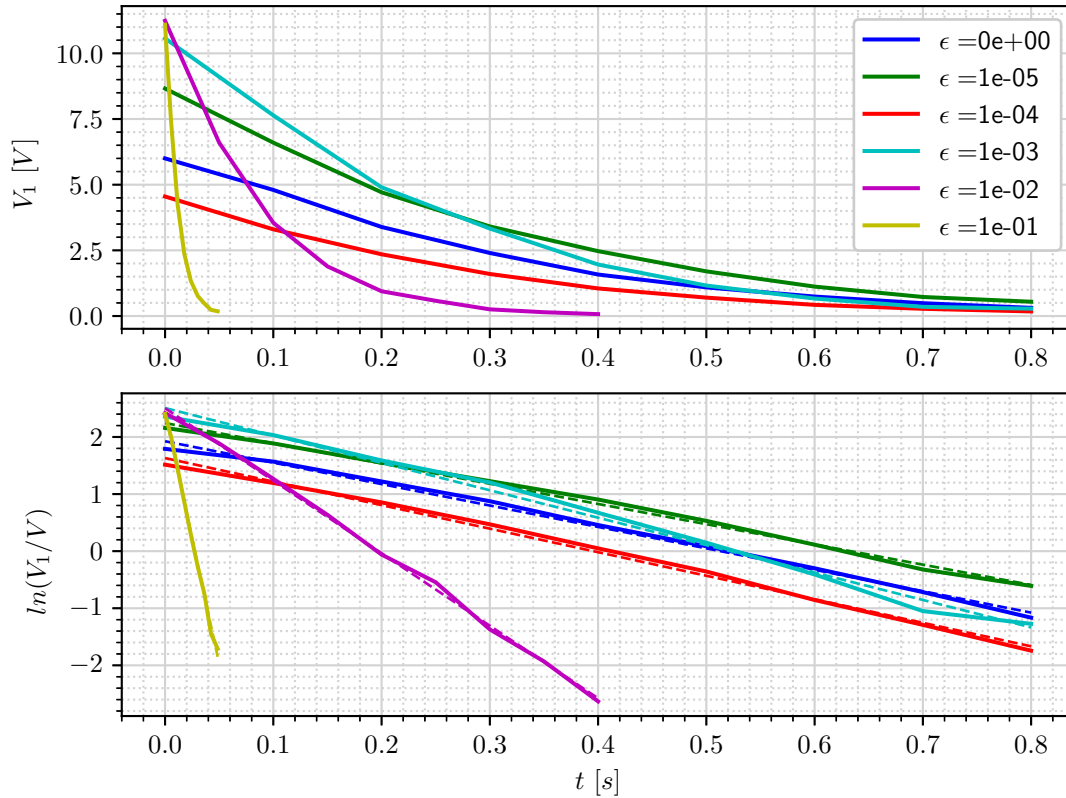
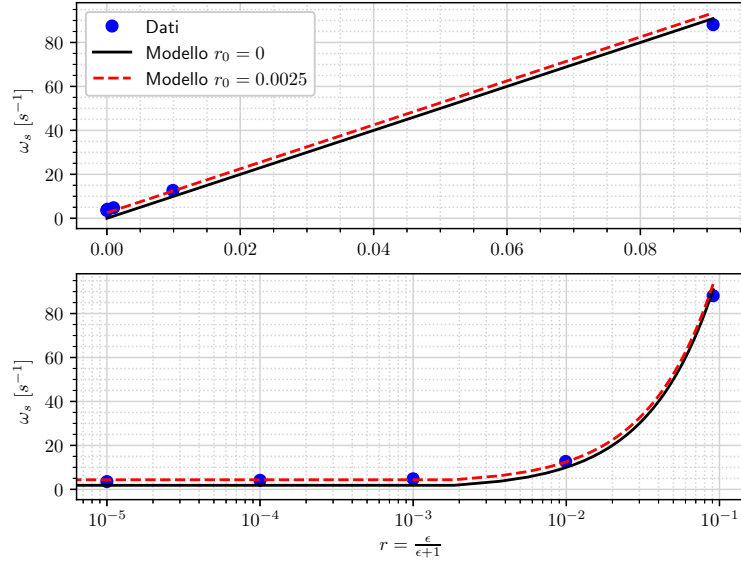


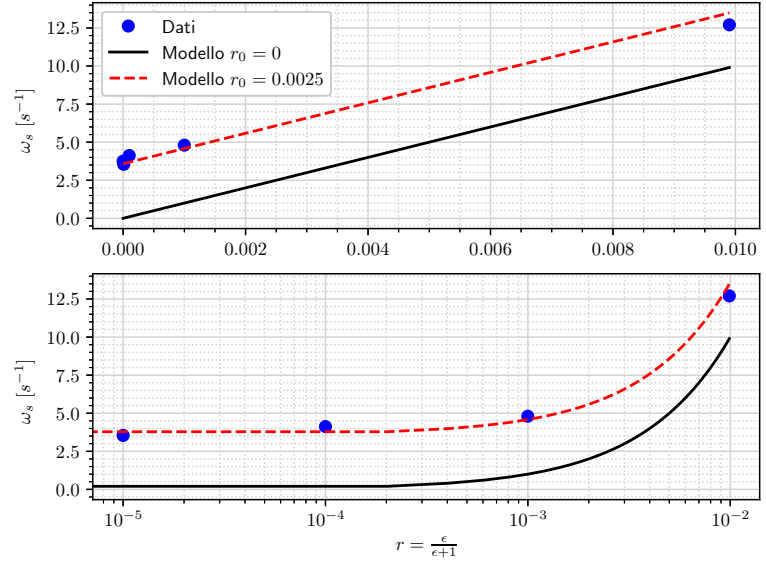
Figura 2: Scariche per diversi valori di $\epsilon = \frac{R_2}{R_1}$.

Effettuiamo quindi un fit lineare del logaritmo naturale dell'ampiezza nel tempo, in modo da trovare τ_S espresso in secondi come l'inverso del valore assoluto della pendenza della retta di fit. Nel grafico il fit lineare è rappresentato da una linea tratteggiata.

Graficando i valori di $\omega_s = \frac{1}{\tau}$ al variare di $r = \frac{\epsilon}{\epsilon+1}$ ci aspettiamo (equazione 2) una retta con pendenza $w_0 = \frac{1}{RC}$ passante per l'origine (retta di colore nero nei grafici 3a e 3b).



(a) Plot di ω_s per 6 valori diversi di r e due possibili modelli (Nel plot in scala logaritmica, non viene riportato $r = 0$)



(b) Plot di 5 valori e rispettivi modelli
A questa scala è evidente la necessità di r_0

Confrontando questo modello con i dati raccolti, notiamo che è necessario aggiungere un fattore correttivo al valore di r dovuto alla non idealità degli amplificatori. Tramite un fit a pendenza fissata, calcoliamo un valore del fattore correttivo $r_0 = 2.5 \times 10^{-3}$ che corrisponde ad un tempo di smorzamento per $\epsilon = 0$ uguale a $\tau_S(0) = \frac{1}{\omega_S(0)} = 0.39$ s, leggermente diverso dal valore ottenuto dai valori misurati 2, $\tau_S(0) = 0.27$ s.

3 Oscillatore armonico con ampiezza costante

Successivamente introduciamo un ramo fra le uscite dei due integratori, come visibile in Figura 4 utilizzando due resistenze da $1\text{ M}\Omega$ e due diodi. Grazie a questa aggiunta riusciamo a compensare lo smorzamento, osserviamo infatti come il circuito si alimenti a partire dal rumore, amplificandolo fino ad ottenere in output un'onda sinusoidale di ampiezza costante. Eccitando il circuito come nella prima parte, il segnale amplificato torna in breve all'ampiezza di equilibrio.

Effettuiamo misure di ampiezza e fase per V_1 e V_2 , sia per le componenti inizialmente scelte sia al variare di resistori e capacità, in modo da studiare il funzionamento di quest'oscillatore; i dati raccolti sono visibili in tabella 1 confrontati con le previsioni teoriche.

Il comportamento del circuito è spiegabile partendo dall'equazione di Van der Pol:

$$\ddot{x} - \mu(1 - x^2)\dot{x} + \omega_S^2 x = 0 \quad \text{con} \quad x = \frac{V_1(t)}{V_{ref}} \quad \text{e} \quad \mu = \omega_S \left(\frac{R_f}{R_0} \chi - 2r \right) \quad (3)$$

I termini χ e V_{ref} sono costanti e dipendono da parametri dei diodi, mentre $\omega_S = 1/\tau$ come al solito.

R_A	R_B	C	ω_S^{teo}	ω_S	$\Delta\phi^{teo}$	$\Delta\phi$	V_1	V_2
$100\text{ k}\Omega$		10 nF	$1 \times 10^3\text{ s}^{-1}$	$0.99 \times 10^3\text{ s}^{-1}$	$\pi/2 \simeq 1.57$	1.58	630 mV	640 mV
$1\text{ M}\Omega$		10 nF	$1 \times 10^2\text{ s}^{-1}$	$0.97 \times 10^2\text{ s}^{-1}$		1.56	1.35 V	1.34 V
$100\text{ k}\Omega$	$1\text{ M}\Omega$	10 nF		$3.1 \times 10^2\text{ s}^{-1}$		1.55	3.85 V	1.2 V

Tabella 1: Valori misurati e confronto con valori attesi

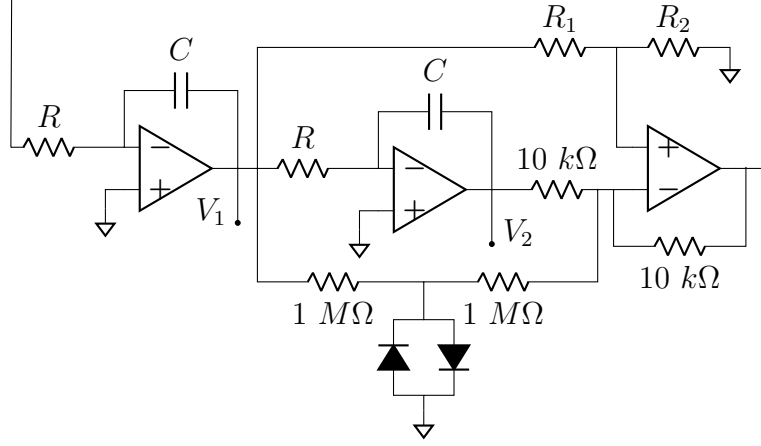


Figura 4: Oscillatore non smorzato

Lo smorzamento del segnale è determinato dal coefficiente di \dot{x} :

$$-\mu(1 - x^2) \quad \text{e} \quad \mu > 0 \quad \text{se} \quad r < \frac{R_f}{2R_0}\chi \quad (4)$$

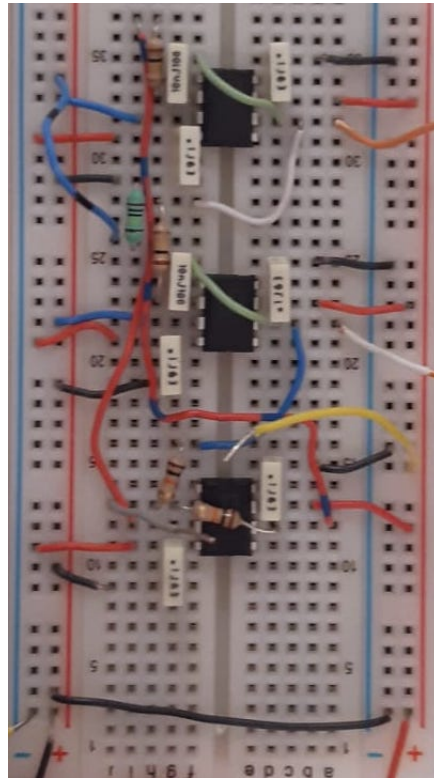
Se non eccitiamo il circuito V_1 (e quindi x) saranno circa zero, quindi l'espressione precedente 4 sarà complessivamente negativa. Tornando all'equazione 3, si vede che non c'è alcun termine di smorzamento ed x è destinato ad aumentare. Così facendo però il termine $(1 - x^2)$ non è più positivo ed il coefficiente di \dot{x} porterà ad un ulteriore smorzamento di x .

Questo ciclo si ripete ed in media $x \sim 1$, generando un'onda sinusoidale con ampiezza costante nel tempo.

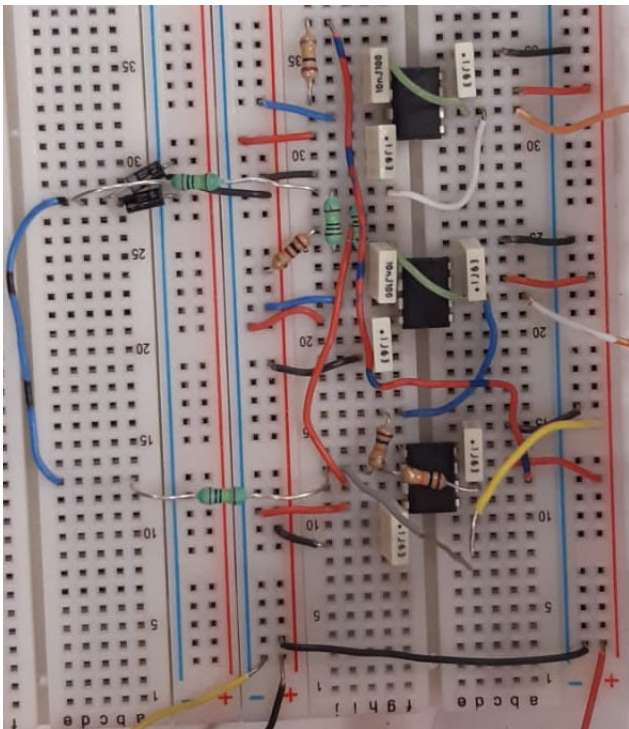
4 Conclusione

Siamo riusciti a costruire entrambi gli oscillatori, verificandone il comportamento e trovando un buon accordo con le previsioni.

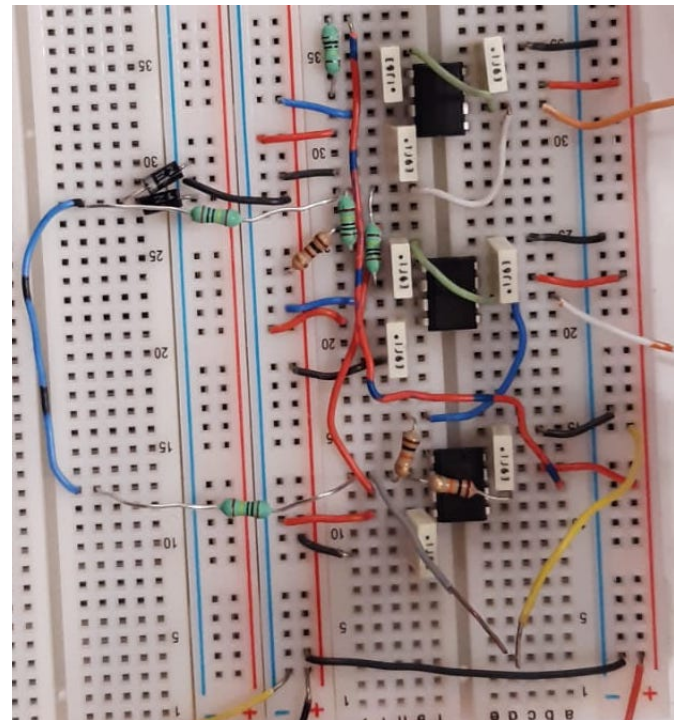
5 Appendice



(a) Oscillatore smorzato ($R = 100 \text{ k}\Omega$, $C = 10 \text{ nF}$, $R_1 = 1 \text{ M}\Omega$, $R_2 = 0 \text{ M}\Omega$)



(b) Oscillatore non smorzato ($R_A = 100 \text{ k}\Omega$, $R_B = 1 \text{ M}\Omega$, $C = 10 \text{ nF}$, $R_1 = 1 \text{ M}\Omega$, $R_2 = 100 \Omega$)



(c) Oscillatore non smorzato ($R_A = 1 \text{ M}\Omega$, $R_B = 1 \text{ M}\Omega$, $C = 100 \text{ nF}$, $R_1 = 1 \text{ M}\Omega$, $R_2 = 100 \Omega$)