

Relazione 6: il campionamento

Gruppo MER3: Ziglio Simone, Furlan Riccardo*

15 novembre 2021

1 Introduzione

In quest'esperienza di laboratorio abbiamo svolto e studiato il campionamento di segnali tramite un dispositivo *sample and hold*. Abbiamo innanzitutto costruito un generatore di segnale digitale TTL; questi faceva da clock al S&H, da noi implementato con un integrato LF398. Abbiamo quindi utilizzato questo setup per campionare segnali sinusoidale e triangolari a frequenze differenti, sia all'interno che all'esterno della banda di Nyquist. Successivamente abbiamo ricostruito il segnale originale a partire da quello campionato, sia in maniera numerica, tramite il teorema di Nyquist-Shannon del campionamento con due funzioni kernel differenti, che via *hardware* con un circuito implementante in cascata un lag high pass e un filtro attivo del secondo ordine.

2 Generazione segnale digitale di clock

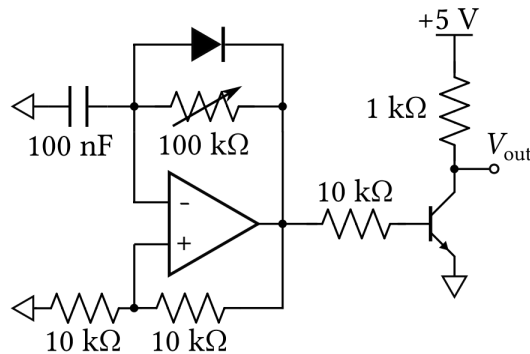


Figura 1: Generatore di un segnale digitale di clock TTL per il controllo del S&H

Per funzionare il *sample and hold* necessita di un segnale digitale TTL come clock. Costruiamo quindi il circuito in Figura 1 utilizzando un op-amp uA741, un trimmer da 100 kΩ, un transistor npn 2N2222, un diodo, resistenze e capacità come in figura. Il blocco di sinistra implementa un oscillatore a rilassamento. L'aggiunta del diodo sul ramo di feedback negativo fa' sì che l'onda quadra in output non abbia un duty cycle pari a 50:50; infatti la capacità si carica tramite la resistenza del trimmer, essendo il diodo in polarizzazione inversa e si scarica attraverso il diodo stesso, il quale in polarizzazione diretta ha resistenza efficace molto minore del trimmer. Il transistor consente di adattare l'output dell'oscillatore ($V_{pp} \simeq 21$ V) alle tensioni della logica TTL (0 – 5 V). Infatti quando

*E-mail: simone.ziglio-1@studenti.unitn.it - riccardo.furlan@studenti.unitn.it

l'uscita dell'oscillatore è negativa il transistor va in interdizione e si ha quindi $V_{out} = 5\text{ V}$; quando il transistor ha un input positivo scorre poca corrente fra base ed emettitore e il collettore va in corto $V_{out} = 0\text{ V}$.

Regoliamo quindi il trimmer finché non otteniamo un clock a frequenza $f = 1\text{ kHz}$, di ampiezza $V_{pp} = (5.14 \pm 0.02)\text{ V}$ e duty cycle $D \simeq 1.5 : 98.5$, quest'ultimo misurato come il tempo in cui l'uscita è alta (da metà della salita a metà della discesa) rispetto al tempo in cui è bassa entrambi normalizzati sul periodo.

3 Sample and hold

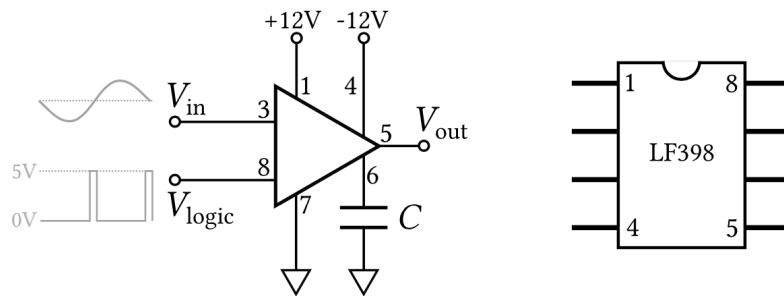


Figura 2: Schema circuitale di un *sample and hold*, da noi implementato con un integrato LF398

Costruiamo il circuito *sample and hold* in Figura 2, utilizziamo un integratore LF398 ed una capacità $C = 10\text{ nF}$. Dando come input un segnale sinusoidale da 100 Hz e ampiezza di 1 V osserviamo il corretto funzionamento del circuito: ogni volta che il clock è alto il S&H campiona l'input e ne trattiene il valore fino al massimo del clock successivo.

Variamo la frequenza dell'input e osserviamo che per valori maggiori della metà della frequenza di Nyquist il segnale campionato si muove all'indietro rispetto l'input: è un effetto analogo a quello delle ruote che paiono ruotare all'indietro. Avvicinandosi e oltrepassando il limite della banda di Nyquist il segnale campionato diventa sempre meno rappresentativo dell'input. Per una frequenza simile a quella di campionamento osserviamo un output pressoché costante, in quanto stiamo campionando un punto ogni periodo e quindi il segnale appare fermo al *sample and hold*. Possiamo effettuare una stima più accurata della frequenza di campionamento stessa andando a trovare la frequenza dell'input che rende costante l'output; troviamo $f \simeq 1007\text{ Hz}$, questo valore non è costante nel tempo ma subisce fluttuazioni in quanto dipendente dalle resistenze, i cui valori variano con la temperatura. Andando a scale temporali molto più elevate rispetto al periodo dell'input possiamo osservare l'*aliasing*: il segnale campionato non è perfettamente costante ma oscilla con un frequenza inferiore all'Hertz.

4 Ricostruzione numerica del segnale campionato

Utilizzando il circuito *sample and hold*, procediamo al campionamento di quattro onde sinusoidali a frequenze diverse (50 Hz , 100 Hz , 200 Hz , 900 Hz) e di altrettante triangolari con ampiezza picco-picco 1 V .

Per la ricostruzione, utilizziamo la formula derivante dal teorema di campionamento:

$$V_r(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} V_s(nT_s) \cdot k(t - nT_s) \quad (1)$$

dove $V_r(t)$ è la ricostruzione, $V_s(nT_s)$ è il campionamento (con periodo T_s) e k è la funzione di kernel.

4.1 Ricostruzione con kernel funzione sinc

Come prima funzione di kernel abbiamo utilizzato

$$k_{sinc}(t - nT_s) = \text{sinc}\left(\frac{\pi(t - nT_s)}{T_s}\right) \quad (2)$$

Nella figura 3 si osserva ciò che viene predetto dal teorema di Nyquist-Shannon, ossia che è possibile ricostruire il segnale effettivo $V_0(t)$ solo utilizzando un periodo di campionamento T_s :

$$T_s < \frac{T_0}{2} \quad \text{ovvero,} \quad f_s > 2f_0 \quad (3)$$

Questa condizione non viene rispettata per la frequenza $f_0 = 900$ Hz ed infatti vediamo che l'onda ricostruita non corrisponde al segnale campionato ma bensì ad un'onda di *aliasing*.

La frequenza di quest'onda è determinata dalla differenza tra frequenza di campionamento f_s ed f_0 , ottenendo così $f_s - 900 \text{ Hz} \simeq 100 \text{ Hz} = 100 \text{ Hz}$. Infatti si può notare qualitativamente dai grafici nella figura 3 che la ricostruzione dell'onda a 900 Hz ha la stessa frequenza e ampiezza dell'onda a 100 Hz.

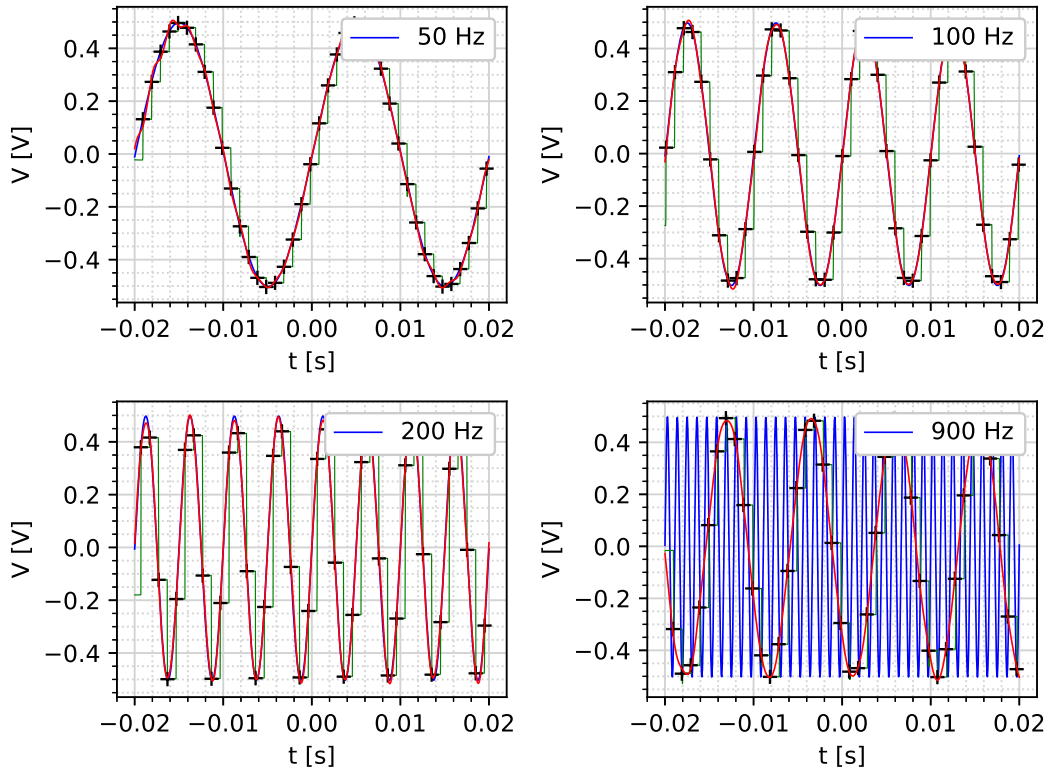


Figura 3: Segnale originale in blu, campionamento in verde e ricostruzione in rosso

Procediamo in modo simile per la ricostruzione dei quattro segnali triangolari, riportando i risultati nella seguente figura 4.

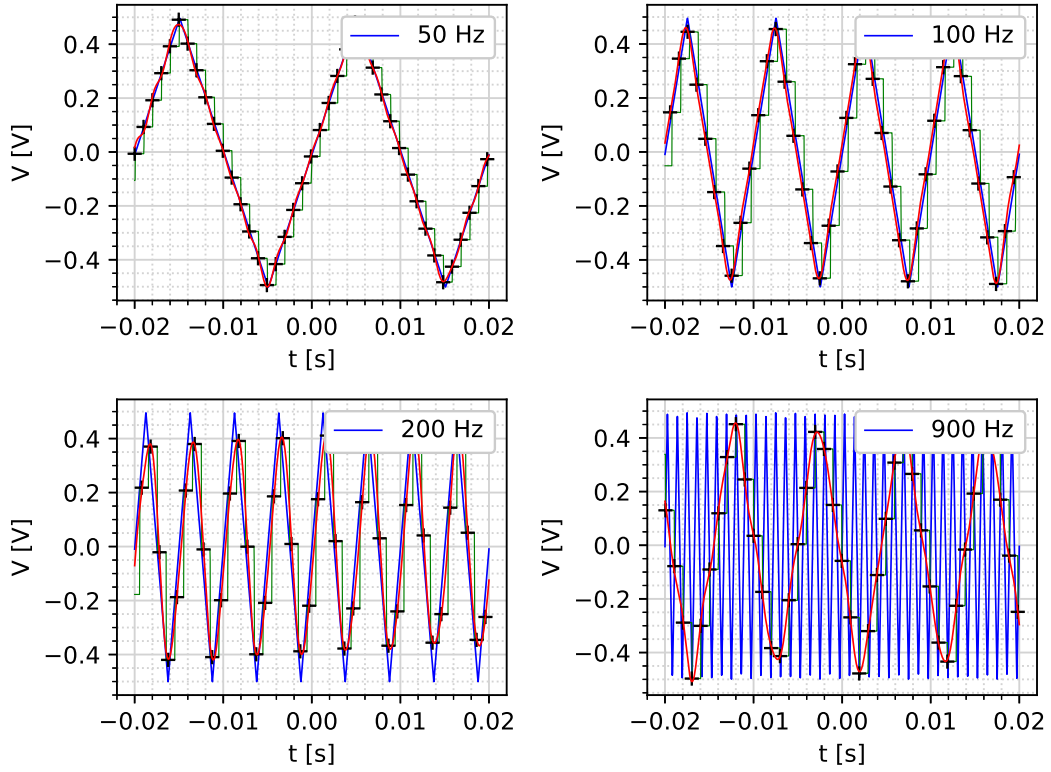


Figura 4: Segnale originale in blu, campionamento in verde e ricostruzione in rosso

Per analizzare la ricostruzione dell'onda triangolare, è utile considerare la sua serie di Fourier:

$$f(t) = \frac{8}{\pi^2} \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{(-1)^{(n-1)/2}}{n^2} \sin(2\pi n f_0 t) \quad (4)$$

Da questa decomposizione si vede che i termini della sommatoria che danno il contributo maggiore sono i primi ($n = 1, 3, 5$), ovvero quelli relativi a frequenze $f_0, 3f_0, 5f_0$.

Nei casi in cui $f_0 = 50 \text{ Hz}, 100 \text{ Hz}$, tutte e tre le frequenze risultano inferiori alla metà della frequenza di campionamento f_s , consentendo quindi di ricostruire il segnale in modo attendibile.

Quando invece $f_0 = 200 \text{ Hz}$, solo il termine nella sommatoria con $n = 1$ ha frequenza t.c. $2f_0 < f_s$ e perciò si perdono dettagli sui picchi dell'onda triangolare.

L'ultimo caso, $f_0 = 900 \text{ Hz}$, presenta nuovamente l'aliasing ed infatti otteniamo una ricostruzione errata a frequenza $\sim 100 \text{ Hz}$.

4.2 Ricostruzione con kernel lineare

Un'alternativa alla funzione sinc utilizzata in precedenza come kernel, è una semplice interpolazione lineare:

$$k_{tr}(t - nT_s) = \begin{cases} \frac{T_s - |t - nT_s|}{T_s} & \text{per } |t - nT_s| \leq T_s \\ 0 & \text{per } |t - nT_s| \geq T_s \end{cases} \quad (5)$$

Osserviamo i risultati nella Figura 5 (input sinusoidale e triangolare). Si ottengono ricostruzioni analoghe alle precedenti solo meno accurate, in quanto in questo caso non si applica il teorema del campionamento in quanto il kernel utilizzato non corrisponde all'antitrasformata della funzione finestra di Nyquist. Esso corrisponde invece ad un'interpolazione lineare e quindi nella ricostruzione i punti campionati vengono collegati da segmenti, ciò la rende meno precisa, soprattutto nei picchi.

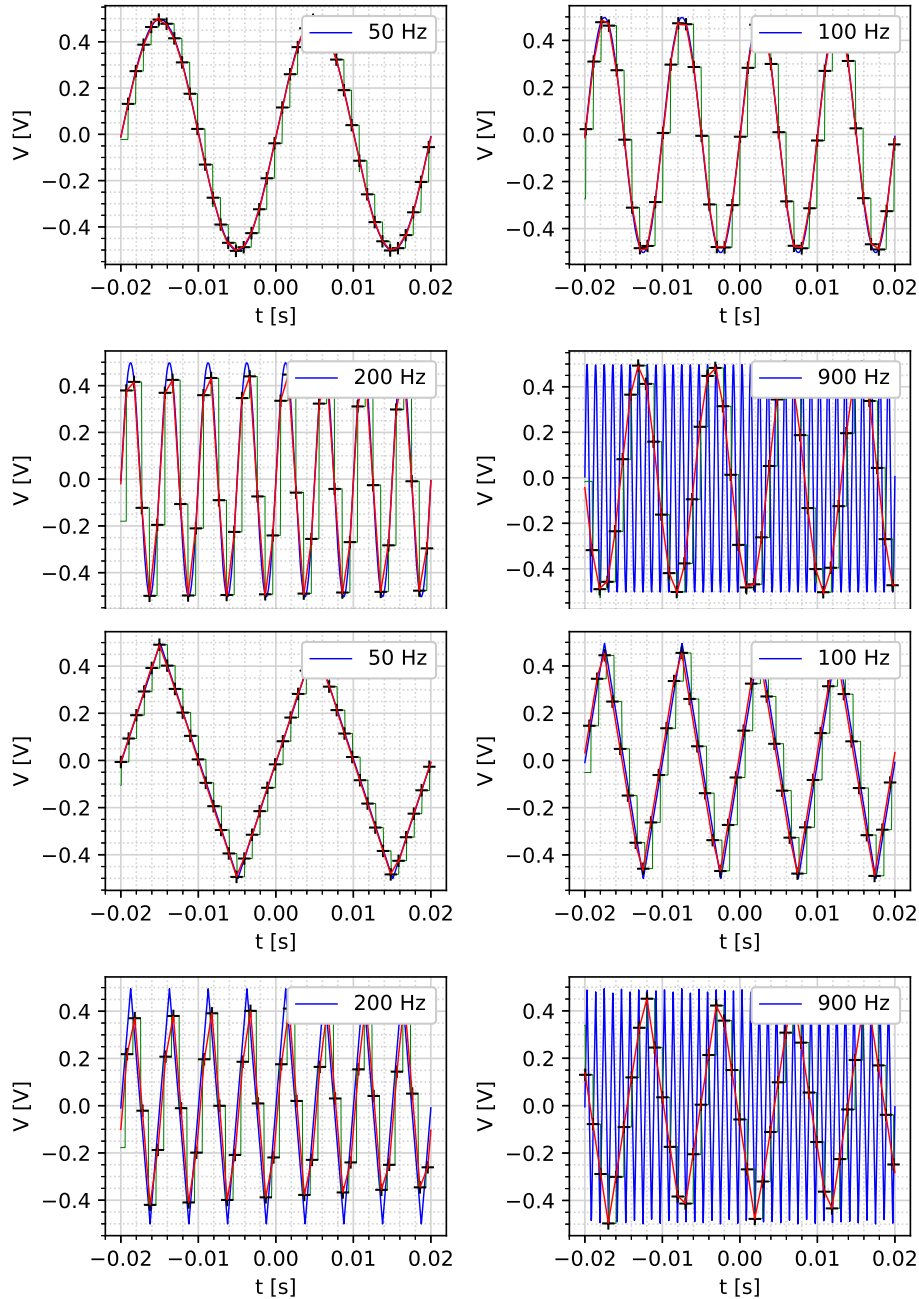


Figura 5: Segnale originale in blu, campionamento in verde e ricostruzione in rosso

5 Ricostruzione hardware del segnale campionato

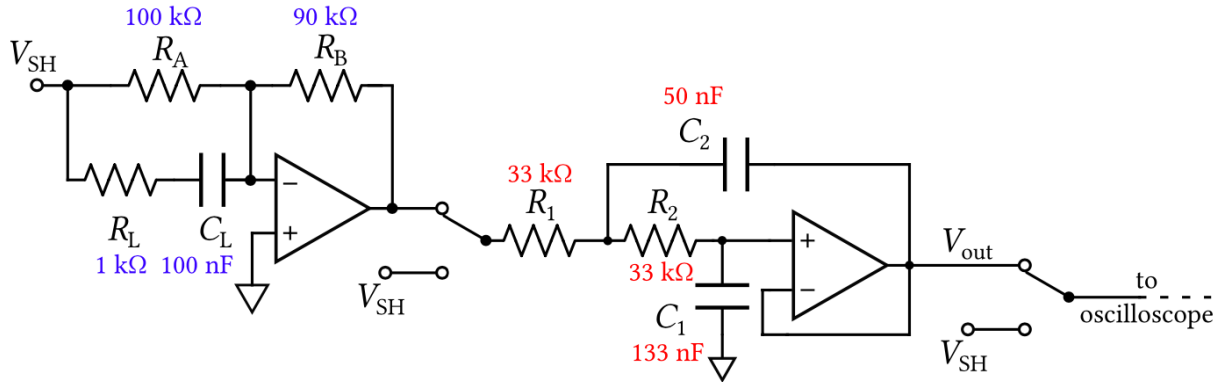


Figura 6: circuito

Collegando il circuito in Figura 6 all'uscita del *sample and hold* possiamo effettuare una ricostruzione del segnale via *hardware*, visualizzabile direttamente sull'oscilloscopio. La ricostruzione non risulta perfetta, in quanto la funzione k_{sinc} non è limitata temporalmente, mentre il nostro circuito sì; aspettando però tempi sufficientemente lunghi rispetto il periodo dell'input si osserva un buon risultato.

Diamo in input al circuito un'onda triangolare di frequenza $f = 50$ Hz.

Bypassando il primo stadio osserviamo in output una buona ricostruzione dell'input. Si ha però uno sfasamento di $\frac{\pi}{2}$ e un'ampiezza lievemente ridotta, ciò è dovuto al comportamento da passa basso del filtro attivo del second'ordine.

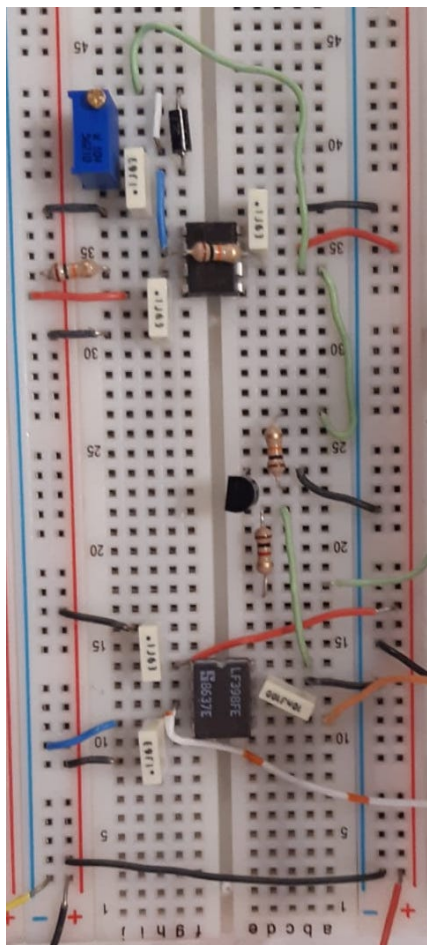
Includendo anche il primo stadio osserviamo il segnale ricostruito in output, a meno di un segno dovuto al comportamento da invertente del primo stadio.

La ricostruzione resta buona anche al variare del tipo di segnale in input e della frequenza, purché quest'ultima sia contenuta nella banda di Nyquist; per frequenze superiori si hanno effetti di aliasing.

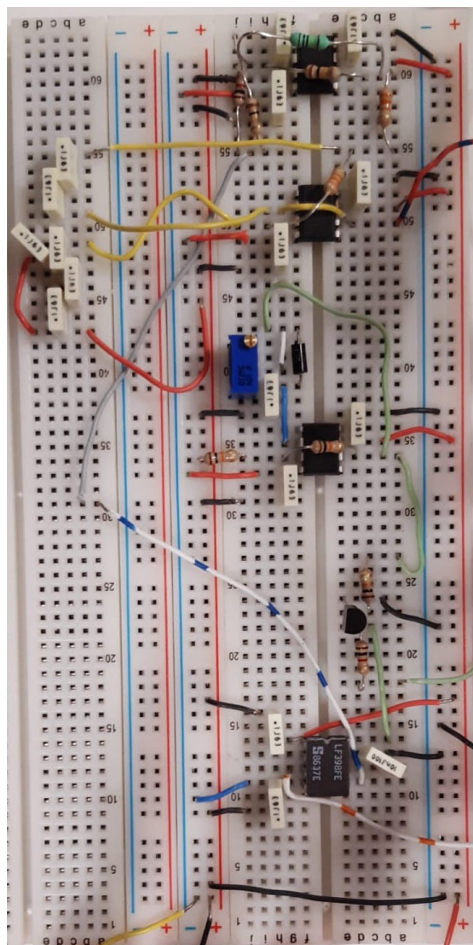
6 Conclusione

Abbiamo costruito un circuito in grado di campionare un segnale periodico. Successivamente abbiamo ricostruito questo segnale in maniera numerica, sia con il kernel k_{sinc} osservando una ricostruzione pressoché perfetta, come previsto dal teorema del campionamento, che col kernel lineare k_{tr} , che ci ha restituito una ricostruzione più approssimata, soprattutto nei picchi. Infine abbiamo implementato un circuito in grado di effettuare una ricostruzione via *hardware* del segnale, osservandone la bontà nonostante i vari limiti.

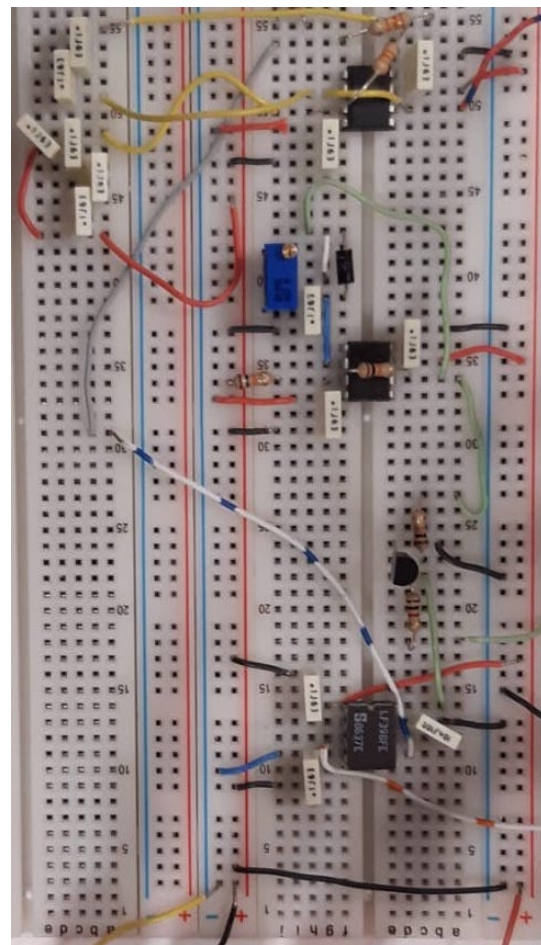
7 Appendice



(a) *Sample and hold* con generatore di clock



(b) Filtro per la ricostruzione del segnale via *hardware*



(c) Filtro precedente con bypass del primo stadio