Numerieke Modellering en Benadering

9 april 2017

1 QR factorisatie en kleinste kwadraten problemen

1.1 Opgave 1

Wat zijn de eigenvectoren en bijhorende eigenwaarden van een ***Householder transformatiematrix?*** *Toon hoe je aan deze resultaten komt. Wat is de* ***geometrische interpretatie*** *van deze waarden?*

1.A: Eigenwaarden en eigenvectoren
De vector $\vec{v}$ is een eigenvector van de vierkante matrix A *(n×n)* indien volgende vergelijking geldt:

$$A\vec{v} = \lambda\vec{v}$$

Met λ de bijhorende eigenwaarde en een natuurlijk getal.

Stelling:
De Householder transformatie matrix F is orthogonaal en symmetrisch met enkel reeële waarden.
Bewijs:
F is symmetrisch
Defenitie : $F = I - 2\frac{vv^*}{v^*v}$
Met de genormaliseerde vector $w = \frac{v}{v^*v}$ is de defenitie herschrijfbaar als:

$$F = I - 2ww^*$$

Aangezien de beide termen symmetrisch zijn is de householder transformatiematrix zelf ook symmetrisch.
F is orthogonaal
Indien $F^TF=I$ zal F orthogonaal zijn.

$$F^TF = (I - 2ww^T)^T(I - 2ww^T) = (I - 4ww^T + 4ww^Tww^T) = I$$

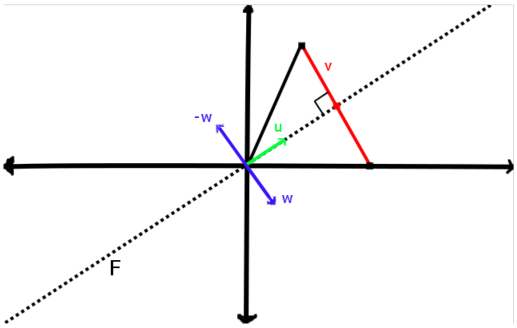
Hierbij is $w^Tw = 1$ aangezien w genormaliseerd is. Daardoor wordt de vergelijking herleid tot :

$$F^TF = (I - 4ww^T + 4ww^T) = I$$

Aangezien F orthogonaal is, hebben de eigenwaarden een absolute waarde van 1 omdat de vermenigvuldiging met een orthogonale matrix een isometrie is.
F is symmetrisch en reeël dus alle eigenwaarden zullen reeël zijn. Daardoor kunnen de eigenwaarden kunnen herleidt worden tot 1 en -1.
Aangezien $Fw = w - 2w(w^Tw) = -w$ is minstens er één eigenwaarde -1 en voor alle vectoren u, loodrecht op w, geldt: $Fu = u - 0w = u$

1.B: Geometrische interpretatie

Figuur 1: Eigenwaarden en vectoren van de Householdertransformatiematrix



Zoals te zien is op de figuur zal de Householder functie de genormaliseerde vector w projecteren op -w omdat F een isometrie is. Daarnaast zullen alle loodrechte vectoren op w op F liggen en zals er geprojecteerd worden op hetzelfde punt.

1.2 Opgave 2

2.B: Vergelijking resultaten

Tabel 1: Conditie van A gelijk aan 1

	Explicit				**Implicit**			
n	δx	r	$\delta x/x$	K(A)r/b	δx	r	$\delta x/x$	K(A)r/b
10	6.9162e-16	6.2979e-16	4.1395e-16	3.7762e-16	5.9923e-16	6.5433e-16	3.6326e-16	3.9842e-16
100	1.5897e-14	1.6162e-14	3.0763e-15	3.099e-15	6.4763e-15	6.3391e-15	1.3988e-15	1.3992e-15
1000	2.6441e-13	2.6477e-13	1.6695e-14	1.6723e-14	4.9441e-14	4.93e-14	3.7536e-15	3.7537e-15

Tabel 2: Conditie van A gelijk aan 10^4

	Explicit				**Implicit**			
n	δx	r	$\delta x/x$	K(A)r/b	δx	r	$\delta x/x$	K(A)r/b
10	3.0736e-12	6.4259e-12	1.8003e-12	4.5603e-12	1.722e-12	3.3718e-12	1.0098e-12	2.3895e-12
100	9.2189e-11	9.7262e-11	1.6467e-11	2.2014e-11	1.8454e-11	2.7045e-11	3.7652e-12	6.9365e-12
1000	1.5252e-09	1.533e-09	9.5391e-11	1.1298e-10	1.6481e-10	1.7583e-10	1.1824e-11	1.636e-11

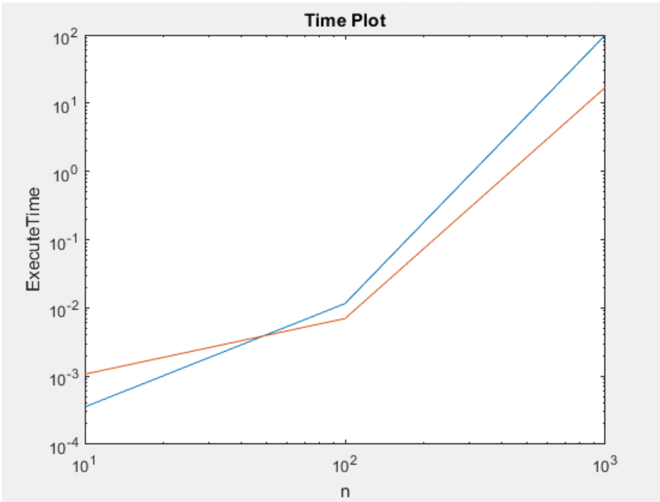
Tabel 3: Conditie van A gelijk aan 10^8

	Explicit				**Implicit**			
n	δx	r	$\delta x/x$	K(A)r/b	δx	r	$\delta x/x$	K(A)r/b
10	2.7567e-08	4.432e-08	1.6671e-08	3.499e-08	1.6694e-08	2.4974e-08	9.8794e-09	1.785e-08
100	8.0343e-07	8.27904e-07	1.5567e-07	1.9718e-07	1.4431e-07	1.78499e-07	3.2706e-08	4.9677e-08
1000	1.533e-05	1.542e-05	9.5357e-07	1.1203e-06	1.526e-06	1.6375e-06	1.086e-07	1.4195e-07

TODO : Meer Verklaren

Bij het vergelijken van de impliciete en expliciete methoden voor matrices van dezelfde grootte is er een klein verschil in nauwkeurigheid. De Impliciete functie zal iets nauwkeuriger zijn omdat het de matrix Q zelf niet meer moet samenstellen en zo minder onderhevig zijn aan afrondingsfouten. Verder is het zichtbaar dat voor alle conditiegetallen van A de nauwkeurigheid van de resultaten zal dalen naarmate de grootte van A toeneemt. Dit komt omdat er meer elementen van x berekend moeten worden en daardoor meer fouten in het algoritme kunnen voorkomen. De scherpte van de grens blijft ongeveer hetzelfde voor de verschillende condities van A.

Figuur 2: Uitvoeringstijd: Expliciet(rood), Impliciet(Blauw)



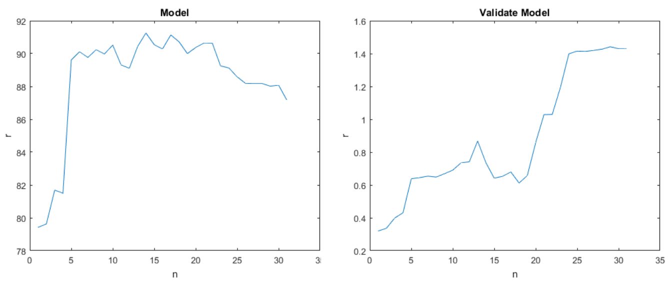
TODO: niet zeker

In het algemeen geval zou de impliciete versie sneller moeten zijn als de expliciete versie. In opdracht 2 is dit enkel het geval bij de kleine matrix. Dit komt omdat we gebruik maken van 2 scripts die elk een for lus gebruiken over de groote van de matrix terwijl dit bij de expliciete versie maar 1 is. Verder heeft de conditie van de matrix geen invloed op de uitvoeringstijd van beide algoritmes.

1.3 Opgave 3

Met behulp van de QR factorisatie is het mogelijk om een kleinste kwadraten probleem op te lossen. De projector $P = QQ^{*}$ projecteert de vector b in de range van A en zo is het mogelijk om een exacte oplossing van x te vinden voor $QRx = QQ^{*}$. Dit zal dan herleidt worden tot $Rx = Qb$ en zal de uitkomst zo dicht mogelijk bij de waarden van b liggen.

Figuur 3: Vergelijking tijdsvertragingen



Residu Validate model

Bij de lage tijdsvertraging zal het residu en de fout met het de data in validate.mat het kleinste zijn dus een kleine n zal een geschikte keuze zijn.