Tensores

— Produto vetorial : $\mathbb{C} = \mathbb{A} \times \mathbb{B}$

$\uparrow$ mapeamento

— Produto escalar : mapeamento em invariante

* Notação : { Somatório = índices repetidos.
Índice latino = simetria de Lorentz
Índice grego = simetria de coordenadas.

Espaço de 4D

$$\mathbb{V} = \sum_{\mu=0}^{3} V_\mu \mathbb{e}_\mu \equiv V_\mu \mathbb{e}_\mu$$

$X^\mu \to X'^\mu$ (mudança de coordenadas)

$$\mathbb{e}'_\mu = \frac{\partial X^\nu}{\partial X'^\mu} \mathbb{e}_\nu .$$

* Base inversa? $\mathbb{e}'^{-1}_{\mu} = \frac{\partial X'^{\mu}}{\partial X^{\nu}} \mathbb{e}_{\nu}^{-1}$

$\mathbb{e}'_{\mu} \mathbb{e}'^{-1}_{\mu} = \mathbb{e}_{\mu} \mathbb{e}^{-1}_{\mu}$

$\mathbb{e}_{\mu} \to$ Base covariante ; $\mathbb{e}^{-1}_{\mu} \equiv \mathbb{e}^{\mu} \to$ contra-variante

$\mathbb{V} = V^{\mu} \mathbb{e}_{\mu}$; $\mathbb{V}' = \mathbb{V}$

$$\boxed{V'^{\mu} = \frac{\partial X'^{\mu}}{\partial X^{\nu}} V^{\nu}}$$

Componente contra-variante

$\mathbb{V} = V_{\mu} \mathbb{e}^{\mu}$; $\mathbb{V}' = \mathbb{V}$

$$\boxed{V'_{\mu} = \frac{\partial X^{\nu}}{\partial X'^{\mu}} V_{\nu}}$$

Componente covariante

• Produto tensorial é um mapeamento que transforma um vetor em um bi-vetor.

$$\mathbb{e}_\mu \otimes \mathbb{e}_\nu = \mathbb{e}_{\mu\nu} \quad ; \quad \mathbb{e}^\mu \otimes \mathbb{e}^\nu = \mathbb{e}^{\mu\nu}$$

$$\mathbb{e}^\mu \otimes \mathbb{e}_\nu = \mathbb{e}^\mu{}_\nu$$

$$\mathbb{V} = V^\mu \mathbb{e}_\mu \quad \text{e} \quad \mathbb{W} = W^\nu \mathbb{e}_\nu$$

$$\mathbb{T} = \mathbb{V} \otimes \mathbb{W} = V^\mu W^\nu \mathbb{e}_\mu \otimes \mathbb{e}_\nu = T^{\mu\nu} \mathbb{e}_{\mu\nu}$$

$$\boxed{T'^{\mu\nu} = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\alpha} \frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\beta} T^{\alpha\beta}}$$

* Ordem de um tensor: número de bases vetoriais.

* Cada índice respeita a propriedade de transformação da respectiva base vetorial.

O tensor é caracterizado por suas componentes.

- Simétrico : $T_{\mu\nu} = T_{\nu\mu}$

- Anti-simétrico : $T_{\mu\nu} = - T_{\nu\mu}$

* Simetriza-se um tensor por meio da combinação de todas as trocas possíveis das posições dos índices.

Para 2ª ordem :

$$T_{(\mu\nu)} = \frac{1}{2} \left(T_{\mu\nu} + T_{\nu\mu} \right)$$

$$T_{[\mu\nu]} = \frac{1}{2} \left(T_{\mu\nu} - T_{\nu\mu} \right)$$

$$T_{\mu\nu} = T_{(\mu\nu)} + T_{[\mu\nu]}$$

— Contração:

$$V_\mu T^{\mu\nu} = W^\nu$$

$$V_\mu W^\mu = \phi \rightarrow \text{escalar}$$

* Produto escalar é uma contração.

$$V_{(\mu\nu)} W^{[\mu\nu]} \equiv 0$$

* Delta de Kronecker elimina um somatório

$$\delta^\mu_\nu V_\mu = V_\nu \quad ; \quad \delta^\mu_\nu = \frac{\partial X^\mu}{\partial X^\nu}$$

$$\delta^\mu_\mu = 4$$

$$\begin{cases} C^\mu = A^\mu + B^\mu \\ T^{\mu\nu} = V^\mu W^\nu \\ V^\mu W_\mu = \phi \\ T^\mu{}_\mu = T \end{cases}$$