Generalização Não Abeliana da Eletrodinâmica com Campo de Kalb-Ramond

Ranier Menote Lemes Silva and A. E. Santana
Centro Internacional de Física, Instituto de Física, Universidade de Brasília, Brasília, DF, Brasil
(Dated: 24 de Agosto de 2018)

O interesse deste trabalho reside na formulação de uma generalização da eletrodinâmica para uma teoria não abeliana através da inclusão de um propriedades algébricas que garantem essa não comutatividade. Para tanto, utiliza-se o campo antissimétrico de Kalb-Ramond (fonte não pontual) e a algebra dos parêntesis de Nambu.

INTRODUÇÃO

As teorias de calibre são responsáveis pela descrição das interações fundamentais da natureza. Cada teoria de calibre possui um grupo de simetria distinto com um certo número p de parâmetros que irão definir, através do teorema de Noether, p quantidades fracamente conservadas (ou seja, cuja validade dependerá da validade das equações de movimento) que estarão associadas com as definições de energia e momento (caso as simetrias sejam espaço temporais) ou cargas (caso sejam simetrias no espaço de transformações internas).

O grupo de simetria da interação eletromagnética é o grupo dos números complexos de módulo igual à 1(um círculo de raio 1), ou seja, grupo U(1).

As interações, força forte e fraca, estão relacionadas com simetrias de outros grupos, SU(3) e SU(2), respectivamente.[1]

ELETRODINÂMICA CLÁSSICA

O campo eletromagnético é um campo de calibre (associado ao grupo U(1)) real de spin 1 e definido sobre o espaço-tempo de Minkowski($\epsilon_0 = \mu_0 = c = 1$).

O campo eletromagnético é obtido através do seguinte vetor definido no espaço de dimensão $3 + 1$,

$$A^{\mu} = (\phi, \mathbf{A}) \tag{1}$$

Portanto, a partir desses campos obtemos os campos elétrico e magnéticos.

Sendo ϕ e $\mathbf{A}$ os campos escalar e vetorial dados por

$$\mathbf{E} = -\nabla\phi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \tag{2}$$

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \tag{3}$$

Eles obedecem as seguintes propriedades

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 0 \tag{4}$$
$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \tag{5}$$
$$\nabla \times \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0 \tag{6}$$
$$\nabla \times \mathbf{B} = \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \tag{7}$$

Para o vácuo. Dessa forma, definindo o tensor de campo

$$F_{\mu\nu} = \partial_{\mu} A_{\nu} - \partial_{\nu} A_{\mu}, \tag{8}$$

Os campos são assim dados por

$$E^i = F^{0i} \tag{9}$$

$$\epsilon^{ijk} B_k = F^{ij} \tag{10}$$

E as eqs. de Maxwell se reduzem as equações tensoriais abaixo [2]

$$\partial_{\mu} F^{\mu\nu} = 0 \tag{11}$$
$$\partial_{\alpha} F_{\beta\gamma} + \partial_{\beta} F_{\gamma\alpha} + \partial_{\gamma} F_{\alpha\beta} = 0. \tag{12}$$

Essas equações de movimento podem ser deduzidas através da lagrangiana construída com o tensor eletromagnético,

$$\mathcal{L}_{EM} = -\frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} \tag{13}$$

Aplicando-se sobre a lagrangiana acima as equações de Euler Lagrange, método padrão em teoria clássica de campos para encontrar as equações de movimentos dos campos.

Nota-se pelas equações de Maxwell que o potencial quadridimensional é definido a menos de uma derivada de uma função,

$$A'_{\mu} = A_{\mu} + \frac{1}{e} \partial_{\mu} \Lambda(x^{\mu}) \tag{14}$$

(onde e é uma constante necessária à análise dimensional uma vez que Λ deve ser adimensional) não afeta o tensor de campo, mantendo assim as equações de campo inalteradas. Considerando agora a interação do campo E.M. com um campo escalar complexo ψ cuja lagrangiana é dada por

$$\mathcal{L}_\psi = \frac{1}{2}\partial^\mu\psi\partial_\mu\psi^* - \frac{1}{2}m^2|\psi|^2 \tag{15}$$

tem-se que, para que se mantenha a invariância do campo com relação a transformações de calibre locais dadas por

$$\psi' = e^{i\Lambda(x^\mu)}\psi \approx (1 + i\Lambda(x^\mu))\psi$$

é necessário realizar a substituição na lagrangiana (15) de $\partial_\mu\psi$ por

$$(\partial_\mu - ieA_\mu)\psi$$

Ou seja, inclua-se um campo A_μ que satisfaz as mesmas propriedades e equações que o potencial quadridimensional, fundamental para o eletromagnetismo.

Assim, podemos definir o operador diferencial derivada covariante como

$$D_\mu = \partial_\mu - ieA_\mu, \tag{16}$$

Onde o campo ieA_μ faz o trabalho de uma conexão em um espaço interno ao invés do espaço-tempo.

Além disso, para manter uma lagragiana mais geral é necessário incluir um termo referente ao campo eletromagnético livre de acoplamentos com o campo escalar complexo. Deste modo, a lagrangiana completa resulta em

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}D^\mu\psi(D_\mu\psi)^* - \frac{1}{2}m^2\psi\psi^* - \frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} \tag{17}$$

Como se sabe, o teorema de Noether relaciona para cada simetria na ação do seu sistema uma quantidade conservada.

Deste modo, a lagrangeana em questão é invariante por transformações locais do grupo U(1), ou seja, refere-se a um grupo de simetria.

Isso implica na existência de uma quantidade conservada ao longo das trajetórias de movimento, isto é, ao longo das soluções das equações de Euler-Lagrange.

$$Q = i\int_\Omega(\psi^*\partial_t\psi - \psi\partial_t\psi^*) \tag{18}$$

A quantidade conservada acima é interpretada como a carga carregada pelo campo.

Com essa definição nota-se que a estrutura fundamental de uma carga no espaço 4-dimensional é pontual sendo esta representada por uma linha mundo no diagrama do espaço-tempo.

EXTENSÃO DA ELETRODINÂMICA

O campo de Kalb-Ramond foi introduzido originalmente na teoria de cordas como sendo um campo antissimétrico. [3]

O campo de Kalb-Ramond pode ser pensado como uma generalização do eletromagnetismo na teoria de cordas onde a estrutura fundamental de uma carga, isto é, a fonte dos campos se torna um objeto extenso unidimensional (corda).

Na formulação de Kalb-Ramond o campo vetorial é substituído pelo campo tensorial antissimétrico

$$B_{\mu\nu} \tag{19}$$

Ou seja, o campo fundamental da teoria passa a ser o campo de Kalb-Ramound do qual podemos definir, de modo análogo à eletrodinâmica clássica, o tensor intensidade de campo como

$$G_{\alpha\beta\gamma} = \partial_{[\alpha}B_{\beta\gamma]} \tag{20}$$

que, devido a simetria entre as componentes de $B_{\mu\nu}$ pode ser escrito como

$$G_{\alpha\beta\gamma} = \partial_\alpha B_{\beta\gamma} + \partial_\gamma B_{\alpha\beta} + \partial_\beta B_{\gamma\alpha} \tag{21}$$

Mas, como foi mostrado na seção anterior, quando se considera interação entre campos surge um que chamamos de campo de conexão, para manter a lagrangiana invariante sob certos tipos de transfomações. Deste modo, tal definição deve ser alterada para uma mais geral que envolva derivadas covariantes, definidas a partir da conexão induzida pela interação.

$$G_{\alpha\beta\gamma} = D_\alpha B_{\beta\gamma} + D_\gamma B_{\alpha\beta} + D_\beta B_{\gamma\alpha} \tag{22}$$

A lagrangiana para o campo livre de Kalb-Ramond deve ser um escalar construído a partir do tensor intensidade de campo. Deste modo, a solução mais simples para esse requerimento é

$$\mathcal{L}_{KR} = -\frac{1}{6}G^{\alpha\beta\gamma}G_{\alpha\beta\gamma} \tag{23}$$

Onde o fator um sexto é escolhido por convenção Com essa nova extensão não abeliana da eletrodinâmica, é necessário procurar um suporte ou ferramentas matemáticas que promova o desenvolvimento dessa teoria. Esse suporte reside na algebra dos parêntesis de Nambu.

PARÊNTESIS DE NAMBU

Na mecânica clássica temos que, dada uma variável dinâmica $F(q,p)$, definida sobre o espaço de fase, temos que a equação de movimento pode ser:

$$\frac{dF}{dt} = \{F, H\} \tag{24}$$

Onde $\{F, H\}$ é a expressão do parentesis de Poisson.

Em 1972, Yoichiro Nambu propôs uma generalização da dinâmica hamiltoniana[4] para um espaço de fase de 3 dimenções, ou seja, com 3 variáveis canônicas e com duas hamiltonianas definidas. Neste modelo, para uma Variável dinâmica $F(x^1, x^2, x^3)$:

$$\frac{dF}{dt} = \{F, H, G\} \tag{25}$$

Onde o termo a cima é conhecido como uma generalização do parentesis de Poisson para um espaço de fase de 3 dimensões, definido como:

$$\{F, H, G\} = \sum_{i,j,k} \epsilon_{ijk} \frac{\partial F}{\partial x_i} \frac{\partial H}{\partial x_j} \frac{\partial G}{\partial x_k} \tag{26}$$

Essa generalização da mecânica hamiltoniana acabou sendo conhecida como mecânica de Nambu.

O processo de quantização na mecânica hamiltoniana envolve, além de transformar as variáveis dinâmicas em operadores, transformar os parêntesis de Poissonm $\{f, g\} = \frac{\partial(f,g)}{\partial(x,p)}$ em comutadores:

$$[\hat{f}, \hat{g}] = \hat{f}\hat{g} - \hat{g}\hat{f} \tag{27}$$

Para a Mecânica de Nambu, o processo de quantização é semelhante, transformando o parêntesis de Nambu na seguinte representação:

$$[X, Y, Z] = X[Y, Z] + Y[Z, X] + Z[X, Y] \tag{28}$$

Onde $[A, B]$ é o comutador de dois operadores, A e B.

REPRESENTAÇÃO DE NAMBU DA ELETRODINÂMICA DE KALB RAMOND

Nota-se que os parêntesis de Nambu oferecem justamente a algebra não comutativa necessária para se construir o tensor intensidade de campo como em uma teoria geral de calibre, mas no caso um calibre não abeliano.

Dada a derivada covariante

$$D_\nu = \partial_\nu - ieA_\nu \tag{29}$$

Onde, o A_ν é o potencial vetor enquanto que e é apenas uma constante de acoplamento da interação de calibre.

Na eletrodinâmica de Maxwell, ou em qualquer outra teoria de calibre, o tensor de campo pode ser conseguido a partir do comutador das derivadas covariantes. Para o caso de uma generalização da eletrodinâmica de Kalb-Ramond para uma teoria não abeliana, esperamos que os comutadores sejam generalizados para parêntesis de Nambu. Portanto,

$$[D_\nu, D_\mu, D_\alpha] \tag{30}$$

Deve resultar no Tensor de Campo.

Calculando a partir da definição do parêntesis de Nambu, temos:

$$\begin{aligned}[D_\nu, & D_\mu, D_\alpha]\Psi = \\ &= D_\nu[D_\mu, D_\alpha]\Psi + D_\mu[D_\alpha, D_\nu]\Psi + D_\alpha[D_\nu, D_\mu]\Psi\end{aligned} \tag{31}$$

Usando a definição da derivada covariante (18), verifica-se que o comutador $[D_\nu, D_\mu]$ é igual à:

$$[D_\nu, D_\mu]\Psi = -ie\left(\partial_\nu A_\mu - \partial_\mu A_\nu - ie[A_\nu, A_\mu]\right)\Psi \tag{32}$$

Logo, temos que:

$$[D_\nu, D_\mu] = -ie\left(F_{\nu\mu} - ie[A_\nu, A_\mu]\right) \tag{33}$$

Nota-se que o campo $F_{\nu\mu} - ie[A_\nu, A_\mu]$ é um tensor de segunda ordem e ainda antissimétrico, devido a propriedade do parêntesis de Nambu.

Podemos dizer que este é o campo de Kalb Ramond.

Podemos reescrever a equação a cima como:

$$[D_\nu, D_\mu] = -ieB_{\nu\mu} \tag{34}$$

É importante notar que o campo $B_{\nu\mu}$ apresenta uma estrutura, como pode ser observado nas equações (33) e (34).

Portanto, finalmente temos que:

$$[D_\nu, D_\mu, D_\alpha] = -ie\left(D_\nu B_{\mu\alpha} + D_\mu B_{\alpha\nu} + D_\alpha B_{\nu\mu}\right) \tag{35}$$

$$[D_\nu, D_\mu, D_\alpha] = -ieG_{\nu\mu\alpha} \tag{36}$$

$G_{\nu\mu\alpha}$ é justamente o tensor intensidade de campo da eletrodinâmica de Kalb-Ramond, aqui em sua extensão não abeliana.

CONCLUSÃO

Neste trabalho foi inciado a formulação de uma generalização da eletrodinâmica através do campo de Kalb Ramond. Para isso, foi apresentado que ao definir uma estrutura para o campo antissimétrico de Kalb Ramond pode-se utilizar a algebra não comutativa do parêntesis de Nambu das derivadas covariantes para construir, analogamente com a eletrdinâmica clássica, o tensor intensidade de campo. Apesar disso, ainda há muito o que ser feito, como por exemplo encontrar as simetrias da teoria e as quantidades conservadas associadas a elas.

REFERÊNCIAS

[1] Lewis H. Ryder. Quantum Field Theory. Cambridge University Press, 1996.

[2] John David Jackson. Classical Electrodynamics. TBS, 1998.

[3] M. Kalb and P. Ramond. Phys. Rev. D, 9:2273., 1974.

[4] Y. Nambu. Phys. Rev. D, 7 (8):2405–2412, 1973.