

# Capítulo 22

## Grupos. Alguns Exemplos

### Conteúdo

<b>22.1</b>	<b>O Grupo de Permutações</b>	<b>1028</b>
22.1.1	Ciclos, Transposições e Transposições Elementares	1029
<b>22.2</b>	<b>Alguns Grupos Matriciais</b>	<b>1032</b>
22.2.1	Os Grupos $GL(n)$ e $SL(n)$	1032
22.2.2	O Grupo de Borel e o Grupo de Heisenberg	1035
22.2.2.1	O Grupo de Heisenberg	1035
22.2.3	Grupos Associados a Formas Bilineares e Sesquilineares	1042
22.2.4	Os Grupos Ortogonais	1046
22.2.5	Os Grupos Unitários	1047
<b>22.3</b>	<b>Os Grupos <math>SO(2)</math>, <math>SO(3)</math>, <math>SU(2)</math> e <math>SL(2, \mathbb{C})</math></b>	<b>1048</b>
22.3.1	Os Grupos $SO(2)$ , $O(2)$ , $SO(1, 1)$ e $O(1, 1)$	1048
22.3.2	O Grupo $SO(3)$	1052
22.3.2.1	Mais Propriedades das Matrizes de $SO(3)$	1060
22.3.2.2	$SO(3)$ e os Ângulos de Euler	1063
22.3.3	O Grupo $O(3)$	1068
22.3.4	O Grupo $SU(2)$	1071
22.3.5	A Relação Entre $SO(3)$ e $SU(2)$	1076
22.3.6	O Grupo $SL(2, \mathbb{C})$	1081
<b>22.4</b>	<b>Generalidades Sobre os Grupos <math>SU(n)</math> e <math>SO(n)</math></b>	<b>1082</b>
22.4.1	Os Grupos $SU(n)$	1082
22.4.1.1	Um Pouco Sobre o Grupo $SU(3)$	1085
22.4.2	Os Grupos $SO(n)$	1086
<b>22.5</b>	<b>O Grupo Afim e o Grupo Euclidiano</b>	<b>1091</b>
<b>22.6</b>	<b>O Grupo de Lorentz em <math>3 + 1</math>-Dimensões</b>	<b>1095</b>
22.6.1	O Espaço-Tempo, a Noção de Intervalo e a Estrutura Causal	1095
22.6.2	A Invariância do Intervalo	1100
22.6.3	O Grupo de Lorentz	1103
22.6.4	Alguns Subgrupos do Grupo de Lorentz	1104
22.6.5	A Estrutura do Grupo de Lorentz	1107
22.6.6	Os Geradores do Grupo de Lorentz	1112
22.6.7	O Grupo de Galilei	1117
<b>22.7</b>	<b>O Grupo de Poincaré</b>	<b>1119</b>
<b>22.8</b>	<b>Ações de Grupos em Espaços de Funções</b>	<b>1123</b>
<b>22.9</b>	<b>Exercícios Adicionais</b>	<b>1126</b>
	<b>APÊNDICES</b>	<b>1128</b>
<b>22.A</b>	<b>Extensão do Lema 22.1 e do Teorema 22.7 ao Caso Complexo</b>	<b>1128</b>
<b>22.B</b>	<b>Prova do Teorema 22.10</b>	<b>1130</b>



GRUPOS são objetos de suma importância na Física devido à sua relação com transformações de simetria. A noção abstrata de grupo foi introduzida na Seção 2.1.3, página 84. No presente capítulo apresentaremos alguns grupos de particular interesse na Física e na Matemática e estudaremos algumas de suas propriedades mais simples e importantes. Com particular detalhe trataremos do grupo de Lorentz na Seção 22.6, página 1095, grupo esse de fundamental importância na Teoria da Relatividade. No Capítulo 23, página 1141, apresentaremos diversos desenvolvimentos básicos da Mecânica Clássica, notadamente da teoria dos corpos rígidos, sob a luz da Teoria de Grupos, especialmente do grupo de rotações  $SO(3)$ , o qual é estudado com certo detalhe na Seção 22.3.2, página 1052.

## 22.1 O Grupo de Permutações

Seja  $C$  um conjunto não-vazio qualquer e seja  $\text{Perm}(C)$  o conjunto de todas as funções bijetoras de  $C$  em  $C$ .  $\text{Perm}(C)$  é naturalmente um grupo, onde o produto é a composição de funções e o elemento neutro é a função identidade (que denotaremos doravante por  $id$ ). O elemento inverso de uma função  $f \in \text{Perm}(C)$  é a sua função inversa  $f^{-1}$  (que existe, pois  $\text{Perm}(C)$  contém funções bijetoras, por definição).  $\text{Perm}(C)$  é denominado *grupo de permutações* do conjunto  $C$ .

**E. 22.1** Exercício. Mostre que  $\text{Perm}(C)$  somente é um grupo Abelian se  $C$  possuir um ou dois elementos. ✱

Grupos de permutações desempenham um papel de destaque na Teoria de Grupos, em parte devido ao seguinte teorema estrutural, que não demonstraremos nestas Notas, e que é denominado *Teorema de Cayley*<sup>1</sup>:

**Teorema 22.1** *Todo grupo é subgrupo de um grupo de permutações  $\text{Perm}(C)$ , para algum conjunto  $C$ .* □

De particular importância é o caso em que  $C$  é um conjunto finito. Tais grupos de permutação e suas representações também desempenham um papel de destaque na Física, particularmente na Mecânica Quântica, e por isso vamos nos deter um pouco nos mesmos.

### • Grupos de permutações de $n$ elementos

Seja  $n \geq 1$ , inteiro, e considere-se o conjunto  $\{1, \dots, n\}$ . O grupo  $S_n = \text{Perm}(\{1, \dots, n\})$  é denominado *grupo de permutações de  $n$  elementos*.

**E. 22.2** Exercício. Seja  $C$  um conjunto com  $n$  elementos. Mostre que  $\text{Perm}(C)$  é isomorfo a  $S_n$ . ✱

Um elemento  $\pi \in S_n$  é dito ser uma *permutação*. Como toda a permutação,  $\pi$  é uma função bijetora  $\{1, \dots, n\} \rightarrow \{1, \dots, n\}$  e é costume representá-la na forma de um arranjo matricial:

$$\pi \equiv \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \pi(1) & \pi(2) & \dots & \pi(n) \end{pmatrix},$$

onde na primeira linha ordenamos os elementos de  $\{1, \dots, n\}$  e na segunda suas imagens por  $\pi$ .

*Exemplos.* Os elementos de  $S_2$  são

$$\pi_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \pi_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

$\pi_1$  é a identidade do grupo.

Os elementos de  $S_3$  são

$$\begin{aligned} \pi_1 &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, & \pi_2 &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}, & \pi_3 &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \\ \pi_4 &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, & \pi_5 &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}, & \pi_6 &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

$\pi_1$  é a identidade do grupo.

**E. 22.3** Exercício. Mostre que  $S_n$  tem exatamente  $n!$  elementos. ✱

<sup>1</sup>Arthur Cayley (1821–1895).

### 22.1.1 Ciclos, Transposições e Transposições Elementares

Vamos aqui estudar alguns fatos estruturais importantes sobre os grupos  $S_n$ .

#### • Ciclos

Precisamos da seguinte definição.

**Definição.** Uma permutação  $\pi$  é dita ser um *ciclo*, ou um *r-ciclo*, se existirem  $r$  inteiros distintos  $i_1, \dots, i_r$  tais que

$$\pi(j) = \begin{cases} j, & \text{se } j \notin \{i_1, \dots, i_r\}, \\ i_{a+1}, & \text{se } j = i_a, \text{ mas } a \neq r, \\ i_1, & \text{se } j = i_r. \end{cases}$$



**E. 22.4 Exercício.** Mostre que se  $\pi$  é um  $r$ -ciclo, então  $\pi^r = id$ .



A importância do conceito de ciclo manifesta-se no seguinte teorema:

**Teorema 22.2** Toda permutação diferente da identidade é um produto de ciclos disjuntos dois a dois.  $\square$

*Prova.* Seja  $\pi \in S_n$ ,  $\pi \neq id$ . Seja  $i_1$  o menor elemento de  $\{1, \dots, n\}$  para o qual  $\pi(i) \neq i$ . Vamos considerar a sequência (em princípio infinita)

$$i_1, \quad \pi(i_1), \quad \pi^2(i_1), \quad \pi^3(i_1), \dots$$

Os elementos dessa sequência são obviamente elementos de  $\{1, \dots, n\}$  que é um conjunto finito. Consequentemente essa sequência tem, na verdade, elementos repetidos. Vamos supor que  $\pi^p(i_1)$  e  $\pi^q(i_1)$ ,  $p < q$ , sejam os primeiros elementos que se repetem:  $\pi^p(i_1) = \pi^q(i_1)$ . Essa igualdade implicaria  $i_1 = \pi^{r_1}(i_1)$ , onde  $r_1 = q - p$ . Assim, o primeiro par que se repete na sequência acima é, em verdade, o par  $i_1$  e  $\pi^{r_1}(i_1)$ .

Isso nos diz que a sequência acima é uma repetição infinita da sequência finita

$$i_1, \quad \pi(i_1), \quad \pi^2(i_1), \quad \dots, \quad \pi^{r_1}(i_1),$$

sequência esta formada por  $r_1$  elementos que, por construção, são distintos.

Vamos denominar

$$i_1, \quad i_2 := \pi(i_1), \quad i_3 = \pi^2(i_1), \quad \dots, \quad i_{r_1} = \pi^{r_1}(i_1)$$

e definir  $\pi_1 \in S_n$  por

$$\pi_1(j) = \begin{cases} j, & \text{se } j \notin \{i_1, \dots, i_{r_1}\}, \\ i_{a+1} = \pi^a(i_1), & \text{se } j = i_a, \text{ mas } a \neq r_1, \\ i_1, & \text{se } j = i_{r_1}. \end{cases}$$

É evidente que  $\pi_1$  é um ciclo e que  $\pi_1$  e  $\pi$  coincidem no conjunto  $\{i_1, \dots, i_{r_1}\}$ . Podemos então escrever

$$\pi = \pi_1 \pi' = \pi' \pi_1,$$

onde  $\pi' \in S_n$  é a identidade em  $\{i_1, \dots, i_{r_1}\}$  e coincide com  $\pi$  no complemento:

$$\pi'(j) = \begin{cases} j, & \text{se } j \in \{i_1, \dots, i_{r_1}\}, \\ \pi(j), & \text{de outra forma.} \end{cases}$$

O que fazemos em seguida é repetir o procedimento, mas agora para a permutação  $\pi'$ . Obteremos  $\pi' = \pi_2 \pi'' = \pi'' \pi_2$ , onde  $\pi_2$  é novamente um ciclo (disjunto de  $\pi_1$ , por construção). Como  $\{1, \dots, n\}$  é um conjunto finito, a repetição desse procedimento deve ter um fim, e obtemos

$$\pi = \pi_1 \pi_2 \cdots \pi_k$$

para  $k$  ciclos  $\pi_1, \dots, \pi_k$  disjuntos dois a dois. Isso completa a prova. ■

### • Transposições

2-ciclos são denominados *transposições*. Sejam  $p$  e  $q$  dois elementos distintos de  $\{1, \dots, n\}$ . A transposição de  $p$  e  $q$ , denotada por  $t_{p,q}$  é a permutação definida por

$$t_{p,q}(j) = \begin{cases} j, & \text{se } j \neq p \text{ e } j \neq q, \\ q, & \text{se } j = p, \\ p, & \text{se } j = q. \end{cases}$$

Transposições são importantes pela seguinte razão:

**Teorema 22.3** *Todo ciclo pode ser escrito como um produto de transposições.* □

Prova. Seja  $\pi$  o ciclo associado ao conjunto  $\{i_1, \dots, i_r\} \subset \{1, \dots, n\}$ :

$$\pi(j) = \begin{cases} j, & \text{se } j \notin \{i_1, \dots, i_r\}, \\ i_{a+1}, & \text{se } j = i_a, \text{ mas } a \neq r, \\ i_1, & \text{se } j = i_r. \end{cases}$$

A prova resume-se em constatar que

$$\pi = t_{i_1, i_r} t_{i_1, i_{r-1}} t_{i_1, i_{r-2}} \cdots t_{i_1, i_3} t_{i_1, i_2}.$$
■

**E. 22.5** Exercício. Complete os detalhes e/ou faça alguns casos particulares para convencer-se. ✱

O seguinte teorema é um corolário imediato dos Teoremas 22.2 e 22.3:

**Teorema 22.4** *Toda permutação diferente da identidade é um produto de transposições.* □

### • Transposições elementares

De particular importância são as transposições de vizinhos  $t_i = t_{i, i+1}$  com  $i = 1, \dots, n-1$ :

$$t_i(j) = \begin{cases} j, & \text{se } j \neq i \text{ e } j \neq i+1, \\ i+1, & \text{se } j = i, \\ i, & \text{se } j = i+1. \end{cases}$$

e que são chamadas *transposições elementares*. A importância das mesmas reside nos dois teoremas abaixo.

**Teorema 22.5** *Toda transposição é um produto de transposições elementares.* □

Prova. Seja  $t_{p,q}$  uma transposição com  $p < q$ . A prova resume-se em constatar que

$$t_{p,q} = t_{q-1,q} \cdots t_{p+1,p+2} t_{p,p+1} t_{p+1,p+2} \cdots t_{q-1,q} = t_{q-1} \cdots t_{p+1} t_p t_{p+1} \cdots t_{q-1}.$$

■

**E. 22.6 Exercício.** Complete os detalhes e/ou faça alguns casos particulares para convencer-se. ✦

O seguinte teorema é um corolário imediato dos Teoremas 22.2, 22.3, 22.4 e 22.5:

**Teorema 22.6** *Toda permutação diferente da identidade é um produto de transposições elementares.* □

O Teorema 22.6 afirma que  $S_n$  é um grupo gerado por transposições elementares, ou seja, todo  $\pi \in S_n$  (distinto da identidade) é da forma

$$\pi = t_{i_1} \cdots t_{i_k}, \quad (22.1)$$

para certas transposições  $t_{i_1}, \dots, t_{i_k}$ .

**E. 22.7 Exercício.** Determine quais dos elementos  $\pi_1, \dots, \pi_6$  do grupo  $S_3$  (página 1028) são transposições elementares e escreva os demais como produtos de tais transposições elementares. ✦

Podemos nos perguntar, essa forma de escrever  $\pi$  é única? A resposta é não, pelas razões que agora expomos.

### • Transposições elementares e suas relações

**Proposição 22.1** *Em  $S_n$  as transposições elementares  $t_i, i = 1, \dots, n-1$  satisfazem as seguintes relações:*

$$(t_i)^2 = id, \quad (22.2)$$

$$t_i t_j = t_j t_i, \quad \text{se } |i-j| \geq 2, \quad (22.3)$$

$$t_i t_{i+1} t_i = t_{i+1} t_i t_{i+1}, \quad \text{se } i = 1, \dots, n-2. \quad (22.4)$$

□

Prova.  $\longleftrightarrow$  Exercício. ■

Essa proposição explica por que a representação (22.1) não é geralmente única: o lado direito de (22.1) pode eventualmente ser reescrito se aplicarmos quaisquer das relações (22.2)-(22.4). Estas, porém, são as únicas relações que as transposições elementares  $t_i$  satisfazem. Dessos fatos extraímos a seguinte conclusão:

**Proposição 22.2** *Todo grupo gerado por  $n-1$  elementos  $t_1, \dots, t_{n-1}$  e que satisfazem as relações (22.2)-(22.4) (e somente elas) é isomorfo a  $S_n$ .* □

Prova.  $\longleftrightarrow$  Exercício.

### • O sinal, ou paridade, de uma permutação

Seja  $\pi \in S_n$ . O *sinal*, ou *paridade*, de  $\pi$  é  $(-1)^k$ , onde  $k$  é o menor número de transposições elementares que geram  $\pi$ . Assim, se  $\pi = t_{i_1} \cdots t_{i_k}$  define-se  $\text{sinal}(id) = +1$  e

$$\text{sinal}(\pi) := (-1)^k, \quad \pi \neq id.$$

O estudante é convidado a constatar que  $\text{sinal}(\pi)$  não depende da particular representação de  $\pi$  em termos de produtos de transposições elementares, pois  $\text{sinal}(\pi)$  não muda por aplicação das relações (22.2)-(22.4).

**E. 22.8** Exercício. Determine o sinal das permutações  $\pi_1, \dots, \pi_6$  do grupo  $S_3$  dadas acima (página 1028). ✱

**E. 22.9** Exercício importante. Mostre que

$$\text{sinal}(\pi\pi') = \text{sinal}(\pi)\text{sinal}(\pi')$$

para todos  $\pi, \pi' \in S_n$ . Mostre daí que  $S_n^+ = \{\pi \in S_n \mid \text{sinal}(\pi) = +1\}$  é um subgrupo de  $S_n$ , o subgrupo das permutações pares. Mostre também que  $S_n^+$  é normal. ✱

$S_n^+$  é também denominado *subgrupo alternante de grau  $n$* .

**E. 22.10** Exercício. Já mencionamos que  $S_n$  tem  $n!$  elementos. Quantos elementos tem  $S_n^+$ ? ✱

### • O grupo de tranças

Há um grupo importante aparentado ao grupo  $S_n$  que é o chamado *grupo de  $n$  tranças*, denotado por  $B_n$  (do inglês *braid* = trança). Este é, por definição, o grupo gerado por  $n - 1$  elementos  $b_1, \dots, b_{n-1}$  que satisfazem as relações

$$b_i b_j = b_j b_i, \quad \text{se } |i - j| \geq 2, \quad (22.5)$$

$$b_i b_{i+1} b_i = b_{i+1} b_i b_{i+1}, \quad \text{se } i = 1, \dots, n - 2, \quad (22.6)$$

de tal forma que para todo  $\beta \in B_n$  existem  $\{b_{i_1}, \dots, b_{i_k}\} \subset \{b_1, \dots, b_{n-1}\}$  e números inteiros  $n_1, \dots, n_k \in \mathbb{Z}$  tais que

$$\beta = (b_{i_1})^{n_1} \dots (b_{i_k})^{n_k}.$$

Note-se que a relação (22.2) não tem análogo em  $B_n$ , ou seja, ao contrário do que ocorre em  $S_n$ , os elementos  $b_i$  não têm a si mesmos como inversa. Por essa razão, elementos como  $(b_i)^n$  para  $n$ 's diferentes são todos distintos entre si. Assim, ao contrário de  $S_n$ ,  $B_n$  é um grupo infinito, apesar de ter um número finito de geradores.

**E. 22.11** Exercício. Seja  $p: \mathbb{Z} \rightarrow \{0, 1\}$  definida por  $p(n) = 0$  se  $n$  for par e  $p(n) = 1$  se  $n$  for ímpar. Mostre que  $\phi: B_n \rightarrow S_n$  definido por  $\phi((b_{i_1})^{n_1} \dots (b_{i_k})^{n_k}) = t_{i_1}^{p(n_1)} \dots t_{i_k}^{p(n_k)}$  é um homomorfismo. ✱

O grupo de tranças foi inventado pelo matemático E. Artin<sup>2</sup> em 1925 e desempenha um papel importante na chamada *teoria dos nós*, um rico capítulo do estudo das propriedades topológicas do espaço tridimensional. Nesse contexto os elementos  $b_i$  têm uma interpretação interessante em termos de transposições de tranças (barbantes) no espaço tridimensional. Por falta de espaço e habilidade em apresentar as figuras correspondentes, não entraremos em mais detalhes aqui e remetemos o estudante à leitura de [183], por exemplo. No final dos anos 80 e nos anos 90 do Século XX encontrou-se aplicações dos grupos de tranças na Física, no contexto das Teorias Quânticas de Campos em dimensões 2 e 3, assim como na Física dos Materiais (problema da Supercondutividade a altas temperaturas).

## 22.2 Alguns Grupos Matriciais

### 22.2.1 Os Grupos GL(n) e SL(n)

Vamos denotar por  $\text{Mat}(n, \mathbb{R})$  ou  $\text{Mat}(\mathbb{R}, n)$  o conjunto de todas as matrizes reais  $n \times n$  e por  $\text{Mat}(n, \mathbb{C})$  ou  $\text{Mat}(\mathbb{C}, n)$  o conjunto de todas as matrizes complexas  $n \times n$ .

$\text{Mat}(n, \mathbb{R})$  e  $\text{Mat}(n, \mathbb{C})$  são naturalmente dois grupos (Abelianos) em relação à operação de soma de matrizes. Não, porém, em relação à operação de produto, pois é bem sabido que nem toda matriz possui uma inversa.

O conjunto de todas as matrizes de  $\text{Mat}(n, \mathbb{R})$  que são invertíveis forma naturalmente um grupo não-Abeliano<sup>3</sup> em relação ao produto usual de matrizes. Esse grupo, denominado *grupo linear real*, é denotado por  $\text{GL}(n, \mathbb{R})$ . Analogamente, o conjunto de todas as matrizes de  $\text{Mat}(n, \mathbb{C})$  invertíveis forma um grupo não-Abeliano<sup>4</sup> que é denominado

<sup>2</sup>Emil Artin (1889–1962).

<sup>3</sup>Exceto no caso  $n = 1$ , onde o grupo é Abeliano, trivialmente.

<sup>4</sup>Idem.

grupo linear complexo e denotado por  $GL(n, \mathbb{C})$ . Em símbolos

$$GL(n, \mathbb{R}) := \{A \in \text{Mat}(n, \mathbb{R}), \det(A) \neq 0\} \quad \text{e} \quad GL(n, \mathbb{C}) := \{A \in \text{Mat}(n, \mathbb{C}), \det(A) \neq 0\}.$$

Devido à propriedade bem conhecida  $\det(AB) = \det(A)\det(B)$ , o produto de duas matrizes com determinante igual a 1 é novamente uma matriz com determinante igual a 1. Assim,

$$SL(n, \mathbb{R}) := \{A \in \text{Mat}(n, \mathbb{R}), \det(A) = 1\} \quad \text{e} \quad SL(n, \mathbb{C}) := \{A \in \text{Mat}(n, \mathbb{C}), \det(A) = 1\}$$

são subgrupos de  $GL(n, \mathbb{R})$  e  $GL(n, \mathbb{C})$ , respectivamente.

**E. 22.12 Exercício.** Para qualquer matriz  $n \times n$  real ou complexa e inversível  $A$  vale que  $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$ . Além disso, para qualquer matriz  $n \times n$  complexa  $A$  vale que  $(A^*)^{-1} = (A^{-1})^*$ . Usando esses fatos, mostre que se  $A \in GL(n, \mathbb{R})$ , então  $A^T \in GL(n, \mathbb{R})$ . Analogamente, mostre que se  $A \in GL(n, \mathbb{C})$ , então  $A^*$  e  $A^T \in GL(n, \mathbb{C})$ . \*

**E. 22.13 Exercício.** Para qualquer matriz  $n \times n$  real ou complexa  $A$  vale que  $\det(A) = \det(A^T)$ . Fora isso, para qualquer matriz  $n \times n$  complexa  $A$  vale que  $\det(A) = \det(A^*)$ . Usando esses fatos, mostre que se  $A \in SL(n, \mathbb{R})$  então  $A^T \in SL(n, \mathbb{R})$ . Analogamente, mostre que se  $A \in SL(n, \mathbb{C})$  então  $A^*$  e  $A^T \in SL(n, \mathbb{C})$ . \*

\*

Os grupos  $GL(n, \mathbb{R})$ ,  $GL(n, \mathbb{C})$ ,  $SL(n, \mathbb{R})$  e  $SL(n, \mathbb{C})$  possuem vários outros subgrupos de interesse. Discutiremos alguns adiante, como os grupos de Borel, os grupos ortogonais, unitários e simpléticos.

### • Os grupos $GL(n, \mathbb{Q})$ , $SL(n, \mathbb{Q})$ e $SL(n, \mathbb{Z})$

Vamos denotar por  $\text{Mat}(n, \mathbb{Z})$  ou  $\text{Mat}(\mathbb{Z}, n)$  o conjunto de todas as matrizes  $n \times n$  cujos elementos de matriz são números inteiros e por  $\text{Mat}(n, \mathbb{Q})$  ou  $\text{Mat}(\mathbb{Q}, n)$  o conjunto de todas as matrizes  $n \times n$  cujos elementos de matriz são números racionais. Analogamente, defina-se

$$GL(n, \mathbb{Z}) := \{A \in \text{Mat}(n, \mathbb{Z}), \det(A) \neq 0\} \quad \text{e} \quad GL(n, \mathbb{Q}) := \{A \in \text{Mat}(n, \mathbb{Q}), \det(A) \neq 0\}$$

e

$$SL(n, \mathbb{Z}) := \{A \in \text{Mat}(n, \mathbb{Z}), \det(A) = 1\} \quad \text{e} \quad SL(n, \mathbb{Q}) := \{A \in \text{Mat}(n, \mathbb{Q}), \det(A) = 1\}.$$

Então, valem as seguintes afirmações:

1.  $GL(n, \mathbb{Q})$  é um grupo em relação à operação de produto usual de matrizes.
2.  $SL(n, \mathbb{Q})$  é um grupo em relação à operação de produto usual de matrizes.
3.  $GL(n, \mathbb{Z})$  **não** é um grupo em relação à operação de produto usual de matrizes, mas sim um monóide.
4.  $SL(n, \mathbb{Z})$  é um grupo em relação à operação de produto usual de matrizes.

Para provar 1, notemos que o produto de matrizes  $n \times n$  com entradas racionais é também uma matriz  $n \times n$  com entradas racionais (por quê?). Assim, a operação de produto é uma operação binária em  $GL(n, \mathbb{Q})$ . O elemento neutro é a matriz identidade, que é elemento de  $GL(n, \mathbb{Q})$  (pois os números 0 e 1 são racionais). Por fim, resta mostrar que a inversa de uma matriz inversível com entradas racionais também tem entradas racionais.

Para mostrar isso, notemos primeiramente que o determinante de uma matriz com entradas racionais é também um número racional, pois o cálculo do determinante de uma matriz  $M$  envolve apenas operações de soma e produto dos elementos de matriz de  $M$ . Além disso, lembremos a chamada “regra de Laplace<sup>5</sup>”), expressão (9.20), página 360, que para qualquer matriz  $A$  o elemento  $ij$  da sua matriz inversa (se houver) é dado por

$$(A^{-1})_{ij} = \frac{(-1)^{i+j}}{\det(A)} \text{Men}(A)_{ji}, \quad (22.7)$$

---

<sup>5</sup>Pierre-Simon Laplace (1749–1827).

onde  $\text{Men}(A)_{ij}$  é o determinante da matriz  $(n-1) \times (n-1)$  obtida eliminando-se a  $i$ -ésima linha e a  $j$ -ésima coluna da matriz  $A$ . (A matriz  $\text{Men}(A)$  é por vezes denominada matriz dos menores de  $A$ ). Vê-se claramente daí que se  $A$  é uma matriz com entradas racionais então os números  $\text{Men}(A)_{ji}$  são também racionais, assim como  $\det(A)$ . Logo,  $(A^{-1})_{ij}$  é um número racional e, portanto, se  $A \in \text{GL}(n, \mathbb{Q})$  então  $A^{-1} \in \text{GL}(n, \mathbb{Q})$ .

O item 2 se prova da mesma maneira.

No caso do item 3, notemos que o produto de matrizes  $n \times n$  com entradas inteiras é também uma matriz  $n \times n$  com entradas inteiras (por quê?). Assim, a operação de produto é uma operação binária em  $\text{GL}(n, \mathbb{Z})$ . O elemento neutro é a matriz identidade, que é elemento de  $\text{GL}(n, \mathbb{Z})$  (pois os números 0 e 1 são inteiros). Com isso,  $\text{GL}(n, \mathbb{Z})$  é um monóide. O problema que faz com que  $\text{GL}(n, \mathbb{Z})$  não seja um grupo reside no fato de que a inversa de uma matriz com entradas inteiras nem sempre é uma matriz com entradas inteiras. Isso se vê claramente no exemplo da matriz  $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$  cuja inversa é  $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix}$ . No entanto, se uma matriz  $A$ , inversível com entradas inteiras, tiver determinante igual a 1, segue imediatamente de (22.7) que  $A^{-1}$  tem também entradas inteiras. Daí, prova-se facilmente a afirmativa 4.

**E. 22.14** *Exercício*. Complete os detalhes das afirmações feitas acima. ✱

**E. 22.15** *Exercício*. Verifique que  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \in \text{SL}(n, \mathbb{Z})$  e que  $A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \in \text{SL}(n, \mathbb{Z})$ . Mais genericamente, se  $a, b, c$  e  $d$  são números inteiros tais que  $ad - bc = 1$ , então  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \text{SL}(n, \mathbb{Z})$  e  $A^{-1} = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \in \text{SL}(n, \mathbb{Z})$ . ✱

**E. 22.16** *Exercício*. Verifique que todas as matrizes da forma  $\begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  com  $b \in \mathbb{Z}$  são elementos de  $\text{SL}(n, \mathbb{Z})$ . Verifique que todas as matrizes da forma  $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ c & c+1 \end{pmatrix}$  com  $c \in \mathbb{Z}$  são elementos de  $\text{SL}(n, \mathbb{Z})$ . ✱

### • Outros subgrupos de $\text{GL}(\mathbb{R}, n)$ e de $\text{GL}(\mathbb{C}, n)$

Há vários outros subgrupos de  $\text{GL}(\mathbb{R}, n)$  e  $\text{GL}(\mathbb{C}, n)$  aos quais eventualmente faremos referência. Deixamos ao estudante provar em cada caso que se trata realmente de grupos. Dois deles são os grupos de matrizes com determinante positivo:

$$\text{GL}(\mathbb{R}, n)^+ := \{A \in \text{Mat}(\mathbb{R}, n), \det(A) > 0\},$$

$$\text{GL}(\mathbb{C}, n)^+ := \{A \in \text{Mat}(\mathbb{C}, n), \det(A) > 0\}.$$

Outro grupo relevante é o chamado *grupo de Weyl*<sup>6</sup> de  $\text{GL}(\mathbb{C}, n)$ :

$$W_n := \left\{ A \in \text{GL}(\mathbb{C}, n), A_{ij} \in \{0, 1\} \forall i, j, \text{ com } \sum_{i=1}^n A_{ij} = 1 = \sum_{j=1}^n A_{ij} \right\}.$$

Em palavras, as matrizes de  $W_n$  são matrizes  $n \times n$  cujas entradas valem 0 ou 1, sendo que exatamente um elemento “1” ocorre em cada linha e em cada coluna.

**E. 22.17** *Exercício*. Mostre que  $W_2$  contém apenas dois elementos, a saber as matrizes  $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  e  $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ . ✱

<sup>6</sup>Hermann Klaus Hugo Weyl (1885–1955).



**E. 22.18** Exercício. Determine os (seis) elementos de  $W_3$ .

✦

**E. 22.19** Exercício. Prove que  $W_n$  é isomorfo ao grupo de permutações de  $n$  elementos  $S_n$  definido à página 1028.

✦

## 22.2.2 O Grupo de Borel e o Grupo de Heisenberg

Uma matriz  $A$ , complexa,  $n \times n$ , é dita ser uma *matriz triangular superior* se seus elementos de matriz  $A_{ij}$  satisfizerem  $A_{ij} = 0$  se  $i > j$ . Tais matrizes têm a forma

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1(n-1)} & A_{1n} \\ 0 & A_{22} & \cdots & A_{2(n-1)} & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & A_{(n-1)(n-1)} & A_{(n-1)n} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & A_{nn} \end{pmatrix},$$

onde os elementos abaixo da diagonal principal são nulos. Aqueles que ficam acima da diagonal principal podem ser nulos ou não.

De acordo com a Proposição 9.29, página 411, o conjunto das matrizes complexas  $n \times n$  triangulares superiores inversíveis forma um grupo, denominado por alguns autores *Grupo de Borel*<sup>7</sup> de ordem  $n$  e denotado por  $GB_n(\mathbb{C})$ .

**E. 22.20** Exercício-exemplo. Para duas matrizes triangulares superiores inversíveis  $2 \times 2$

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{pmatrix} d & e \\ 0 & f \end{pmatrix}$$

verifique que

$$AB = \begin{pmatrix} ad & ae + bf \\ 0 & cf \end{pmatrix},$$

que é novamente uma matriz triangular superior, e verifique que

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{a} & -\frac{b}{ac} \\ 0 & \frac{1}{c} \end{pmatrix}.$$

✦

Um caso particular do grupo de Borel é o grupo de Heisenberg, que agora discutiremos.

### 22.2.2.1 O Grupo de Heisenberg

#### • O grupo de Heisenberg $\text{GH}_3(\mathbb{C})$

O chamado *grupo de Heisenberg*<sup>8</sup>, denotado por  $\text{GH}_3(\mathbb{C})$  (os grupos  $\text{GH}_n(\mathbb{C})$  com  $n \geq 3$  são definidos adiante), é

<sup>7</sup>Armand Borel (1923–2003). A noção de grupo de Borel é mais geral. As matrizes  $n \times n$  triangulares superiores inversíveis compõem o grupo de Borel associado ao grupo  $\text{GL}(\mathbb{C}, n)$ .

<sup>8</sup>Werner Karl Heisenberg (1901–1976).

definido como o grupo formado por todas as matrizes  $3 \times 3$  da forma

$$H(a, b, c) = \begin{pmatrix} 1 & a & c \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

onde  $a, b, c \in \mathbb{C}$ , com o produto usual de matrizes (se  $a, b, c \in \mathbb{R}$  temos o grupo  $\text{GH}_3(\mathbb{R})$ ). A matriz identidade é um elemento de  $\text{GH}_3(\mathbb{C})$  pois  $H(0, 0, 0) = \mathbb{1}$  e tem-se

$$H(a, b, c)H(a', b', c') = H(a + a', b + b', c + c' + ab'). \quad (22.8)$$

Essa relação, em particular, diz que o produto de duas matrizes de  $\text{GH}_3(\mathbb{C})$  é novamente uma matriz de  $\text{GH}_3(\mathbb{C})$ . Tem-se também que

$$H(a, b, c)^{-1} = H(-a, -b, ab - c) = \begin{pmatrix} 1 & -a & ab - c \\ 0 & 1 & -b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (22.9)$$

que mostra que toda matriz de  $\text{GH}_3(\mathbb{C})$  tem inversa e que essa inversa é também uma matriz de  $\text{GH}_3(\mathbb{C})$ . Assim,  $\text{GH}_3(\mathbb{C})$  é um grupo matricial. De (22.8) constata-se facilmente que  $\text{GH}_3(\mathbb{C})$  não é um grupo Abelian.

**E. 22.21** *Exercício.* Verifique essas afirmações. ✱

**E. 22.22** *Exercício.* Mostre que o centro do grupo de Heisenberg é formado pelas matrizes do tipo  $H(0, 0, c)$  com  $c \in \mathbb{C}$ . O conceito de centro de um grupo foi introduzido à página 124. ✱

Como é fácil de ver, o grupo de Heisenberg é um grupo de Lie (grupos de Lie serão tratados no Capítulo 24, página 1218) que, como variedade analítica, é difeomorfo a  $\mathbb{C}^3$ . O exercício seguinte discute três de seus subgrupos uniparamétricos.

**E. 22.23** *Exercício.* Verifique que as matrizes  $H_1(t) := H(t, 0, 0)$ ,  $H_2(t) := H(0, t, 0)$ ,  $H_3(t) := H(0, 0, t)$  satisfazem  $H_j(t)H_j(t') = H_j(t + t')$  e  $H_j(0) = \mathbb{1}$ ,  $j = 1, 2, 3$ . Assim, para cada  $j$ , as matrizes  $H_j(t)$  representam subgrupos uniparamétricos de  $\text{GH}_3(\mathbb{C})$ . Os geradores desses subgrupos são  $\mathbf{h}_j := \frac{d}{dt}H_j(t)|_{t=0}$ . Verifique que

$$\mathbf{h}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{h}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{h}_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

e mostre explicitamente que para todo  $t$  vale

$$H_1(t) = e^{t\mathbf{h}_1}, \quad H_2(t) = e^{t\mathbf{h}_2} \quad \text{e} \quad H_3(t) = e^{t\mathbf{h}_3}.$$

✱

Mostraremos agora que esses geradores formam uma álgebra de Lie, a chamada álgebra de Heisenberg  $\mathfrak{gh}_3(\mathbb{C})$ . Adiante explicaremos por que o nome de Heisenberg é associado ao grupo  $\text{GH}_3(\mathbb{C})$  e à álgebra  $\mathfrak{gh}_3(\mathbb{C})$ .

• **A álgebra de Heisenberg  $\mathfrak{gh}_3(\mathbb{C})$**

Considere matrizes  $h(a, b, c)$  da forma  $a\mathbf{h}_1 + b\mathbf{h}_2 + c\mathbf{h}_3$  ( $\mathbf{h}_k$  são os geradores definidos no Exercício E. 22.23), ou seja,

$$h(a, b, c) = \begin{pmatrix} 0 & a & c \\ 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (22.10)$$

onde  $a, b, c \in \mathbb{C}$ . Calculando-se o comutador de duas de tais matrizes tem-se

$$[h(a, b, c), h(a', b', c')] = h(0, 0, ab' - a'b), \quad (22.11)$$

(verifique!) que é novamente da forma (22.10). Assim, o conjunto de matrizes da forma (22.10) forma uma álgebra de Lie com o produto definido pelo comutador de matrizes. Essa álgebra de Lie, denotada por  $\mathfrak{gh}_3(\mathbb{C})$ , é denominada *álgebra de Heisenberg*.

A razão dessa denominação é a seguinte. Podemos encontrar em  $\mathfrak{gh}_3(\mathbb{C})$  uma base especial formada por três matrizes que, por razões “psicológicas”, denotaremos por  $p, q$  e  $\hbar$ :

$$p = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad q = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \hbar = \begin{pmatrix} 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (22.12)$$

É um exercício fácil (e fortemente recomendado) verificar que essas matrizes satisfazem as seguintes regras de comutação:

$$[p, \hbar] = 0, \quad [q, \hbar] = 0, \quad [p, q] = -i\hbar. \quad (22.13)$$

Para aqueles familiarizados com a Mecânica Quântica as relações acima justificam a denominação dessa álgebra em honra a Heisenberg: as relações de comutação acima são precisamente iguais às relações canônicas de comutação satisfeitas pelos operadores associados ao momento ( $p$ ) e posição ( $q$ ) de uma partícula se movendo em uma dimensão. No caso da Mecânica Quântica,  $p$  é o operador  $-i\hbar \frac{\partial}{\partial x}$ ,  $q = x$  e  $\hbar$  representa um número (a constante de Planck<sup>9</sup>), que obviamente comuta com os operadores  $p$  e  $q$ .

**Nota.** O estudante deve, porém, observar que as matrizes  $p, q$  e  $\hbar$ , acima, não são autoadjuntas, ao contrário dos operadores correspondentes da Mecânica Quântica. Essa observação é relevante, pois é possível provar que as relações canônicas de comutação não podem ser satisfeitas por operadores autoadjuntos agindo em espaços de Hilbert de dimensão finita ou por operadores autoadjuntos limitados agindo em espaços de Hilbert de dimensão infinita. De fato, no espaço de Hilbert  $L^2(\mathbb{R}, dx)$  os operadores  $p = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x}$  e  $q = x$  são autoadjuntos (em um domínio conveniente), mas não são limitados.

A argumentação para tal é a seguinte. Vamos supor que  $p, q$  sejam operadores autoadjuntos e limitados agindo em um espaço de Hilbert e que satisfaçam (22.13), com  $\hbar > 0$ . Então, tem-se  $\hbar = \|[p, q]\| \leq 2\|p\| \|q\|$ . É fácil provar por indução (faça-o!) que vale  $[p, q^n] = -in\hbar q^{n-1}$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Assim, tem-se  $n\hbar \|q^{n-1}\| \leq \|[p, q^n]\| \leq 2\|p\| \|q^n\|$ . Agora, como  $q$  é autoadjunto, vale  $\|q^n\| = \|q\|^n$  para todo  $n \in \mathbb{N}$  (há diversas provas desse fato. Para uma prova geral no contexto de álgebras  $C^*$ , vide Corolário 41.10, página 2113). Assim, temos a desigualdade  $n\hbar \|q\|^{n-1} \leq 2\|p\| \|q\|^n$ . Como, naturalmente, supomos que  $\|q\| \neq 0$ , podemos cancelar um fator  $\|q\|^{n-1}$  de ambos os lados e obter  $n\hbar \leq 2\|p\| \|q\|$ . Ora, essa desigualdade não pode ser satisfeita para todo  $n \in \mathbb{N}$ , a menos que  $\hbar = 0$  (um caso trivial, pois implicaria que as relações (22.13) são comutativas) ou que  $p$  ou  $q$  (ou ambos) seja(m) não-limitado(s), provando o que desejávamos. A referência [35] atribui esse resultado a Wielandt<sup>10</sup>. ♣

O que faz  $\mathfrak{gh}_3(\mathbb{C})$  especial como álgebra de Lie é a propriedade expressa no seguinte exercício:

**E. 22.24** Exercício importante. Verifique que para quaisquer três elementos  $l_1, l_2$  e  $l_3$  da álgebra de Heisenberg  $\mathfrak{gh}_3(\mathbb{C})$  tem-se

$$[l_1, [l_2, l_3]] = 0. \quad (22.14)$$

Sugestão: use as relações de comutação de  $p, q$  e  $\hbar$ , dadas acima ou use diretamente (22.11). A relação (22.14) mostra que  $\mathfrak{gh}_3(\mathbb{C})$  é o que se chama uma álgebra de Lie nilpotente (de grau 2). ♣

<sup>9</sup>Max Karl Ernst Ludwig Planck (1858–1947).

<sup>10</sup>Helmut Wielandt (1910–2001).

Para entender a relação da álgebra de Heisenberg  $\mathfrak{gh}_3(\mathbb{C})$  com o grupo de Heisenberg  $\mathrm{GH}_3(\mathbb{C})$ , façamos o seguinte. Notemos em primeiro lugar que as matrizes  $h(a, b, c)$  são matrizes nilpotentes de grau 3, ou seja,

$$h(a, b, c)^3 = 0.$$

(Mostre isso!). É fácil com isso verificar que se calcularmos a exponencial de  $h(a, b, c)$  teremos

$$\exp(h(a, b, c)) = \mathbb{1} + h(a, b, c) + \frac{1}{2}h(a, b, c)^2 = \begin{pmatrix} 1 & a & c + \frac{ab}{2} \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = H\left(a, b, c + \frac{ab}{2}\right) \quad (22.15)$$

e disso conclui-se que

$$H(a, b, c) = \exp\left(h\left(a, b, c - \frac{ab}{2}\right)\right). \quad (22.16)$$

**E. 22.25** *Exercício.* Escreva  $h(a, b, c - \frac{ab}{2})$  como combinação linear de  $p$ ,  $q$  e  $\hbar$ . ✦

Pelo que vimos, todos os elementos do grupo de Heisenberg  $\mathrm{GH}_3(\mathbb{C})$  são obtidos pela exponenciação de elementos da álgebra de Lie  $\mathfrak{gh}_3(\mathbb{C})$ , ou seja, a exponenciação é uma aplicação sobrejetora de  $\mathfrak{gh}_3(\mathbb{C})$  em seu grupo de Lie  $\mathrm{GH}_3(\mathbb{C})$ . Em verdade, é fácil constatar que essa aplicação é também injetora (faça isso!). A aplicação exponencial é, portanto, uma bijeção de  $\mathfrak{gh}_3(\mathbb{C})$  em  $\mathrm{GH}_3(\mathbb{C})$ .

**E. 22.26** *Exercício importante.* Usando a fórmula de Baker-Campbell-Hausdorff (equações (10.4), página 456, ou (10.60), página 483) e as relações (22.11) e (22.14), mostre que

$$\exp(h(a, b, c)) \exp(h(a', b', c')) = \exp\left(h\left(a + a', b + b', c + c' + \frac{ab' - a'b}{2}\right)\right). \quad (22.17)$$

Usando (22.15) e (22.16), reobtenha de (22.17) a regra de produto (22.8). ✦

*Comentário.* Esse exercício ilustra uma aplicação da fórmula de Baker-Campbell-Hausdorff. Note-se que, devido ao fato de  $\mathfrak{gh}_3(\mathbb{C})$  ser uma álgebra de Lie nilpotente (vide (22.14)), a série de Baker-Campbell-Hausdorff é composta apenas por um número finito de termos e, portanto, converge sempre. ♣

### • O grupo de Heisenberg $\mathrm{GH}_n(\mathbb{C})$ , $n \geq 3$

Vamos agora generalizar o grupo  $\mathrm{GH}_3(\mathbb{C})$ . Para  $n \geq 3$ , os chamados *grupos de Heisenberg*  $\mathrm{GH}_n(\mathbb{C})$  são definidos como sendo os grupos formados por todas as matrizes  $n \times n$  da forma

$$H(a, b, c) = \begin{pmatrix} 1 & a^T & c \\ 0_m & \mathbb{1}_m & b \\ 0 & 0_m^T & 1 \end{pmatrix}$$

com o produto usual de matrizes, sendo  $m = n - 2$ , onde  $a, b \in \mathbb{C}^{n-2}$  e  $c \in \mathbb{C}$ . Acima,  $a$  e  $b$  representam matrizes-coluna com  $m = n - 2$  linhas, enquanto que  $a^T$  e  $b^T$ , as transpostas de  $a$  e  $b$ , respectivamente, representam matrizes-linha com  $m = n - 2$  colunas:

$$a = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_{n-2} \end{pmatrix}, \quad a^T = \begin{pmatrix} a_1 & \cdots & a_{n-2} \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_{n-2} \end{pmatrix}, \quad b^T = \begin{pmatrix} b_1 & \cdots & b_{n-2} \end{pmatrix},$$

sendo  $\mathbb{0}_m = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$  a matriz coluna identicamente nula com  $m = n - 2$  linhas e sendo  $\mathbb{1}_m$  a matriz identidade  $m \times m$ .

Por exemplo, no caso  $n = 4$ , para  $a = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ ,  $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^2$ , a matriz  $H(a, b, c)$  é  $H(a, b, c) = \begin{pmatrix} 1 & a_1 & a_2 & c \\ 0 & 1 & 0 & b_1 \\ 0 & 0 & 1 & b_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ . Para simplificar a notação, iremos doravante escrever  $H(a, b, c)$  na forma

$$H(a, b, c) = \begin{pmatrix} 1 & a^T & c \\ 0 & \mathbb{1} & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

A matriz identidade é um elemento de  $\text{GH}_n(\mathbb{C})$ , pois  $H(0, 0, 0) = \mathbb{1}$  e tem-se

$$H(a, b, c)H(a', b', c') = H(a + a', b + b', c + c' + a^T b'), \quad (22.18)$$

sendo que definimos a forma bilinear  $a^T b' := \langle a, b' \rangle_{\mathbb{R}} = a_1 b'_1 + \cdots + a_{n-2} b'_{n-2}$ . Essa relação, em particular, diz-nos que o produto de duas matrizes de  $\text{GH}_n(\mathbb{C})$  é novamente uma matriz de  $\text{GH}_n(\mathbb{C})$ . Vale também que

$$H(a, b, c)^{-1} = H(-a, -b, a^T b - c) = \begin{pmatrix} 1 & -a & a^T b - c \\ 0 & \mathbb{1}_m & -b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (22.19)$$

que mostra que toda matriz de  $\text{GH}_n(\mathbb{C})$  tem inversa e que essa inversa é também um elemento de  $\text{GH}_n(\mathbb{C})$ . Assim,  $\text{GH}_n(\mathbb{C})$  é um grupo matricial.

### • A álgebra de Heisenberg $\text{gh}_n(\mathbb{C})$ , $n \geq 3$

Para  $n \geq 3$ , considere matrizes de  $\text{Mat}(\mathbb{C}, n)$  da forma

$$h(a, b, c) = \begin{pmatrix} 0 & a^T & c \\ \mathbb{0}_m & \mathbb{0}_{mm} & b \\ 0 & \mathbb{0}_m^T & 0 \end{pmatrix}, \quad (22.20)$$

com  $m = n - 2$ , onde  $\mathbb{0}_{mm}$  é a matriz  $m \times m$  identicamente nula e onde  $a, b \in \mathbb{C}^{n-2}$  e  $c \in \mathbb{C}$ , como acima. Por exemplo, no caso  $n = 4$ , para  $a = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ ,  $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^2$ , a matriz  $h(a, b, c)$  é  $h(a, b, c) = \begin{pmatrix} 0 & a_1 & a_2 & c \\ 0 & 0 & 0 & b_1 \\ 0 & 0 & 0 & b_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ .

Calculando-se o comutador de duas de tais matrizes tem-se

$$[h(a, b, c), h(a', b', c')] = h(0, 0, a^T b' - a'^T b), \quad (22.21)$$

(verifique!) que é novamente da forma (22.20). Assim, o conjunto de matrizes da forma (22.20) forma uma álgebra de Lie com o produto definido pelo comutador de matrizes. Essa álgebra de Lie, denotada por  $\text{gh}_n(\mathbb{C})$ , é igualmente denominada *álgebra de Heisenberg*.

**E. 22.27** Exercício importante. Verifique que para quaisquer três elementos  $h_1, h_2$  e  $h_3$  da álgebra de Heisenberg  $\text{gh}_n(\mathbb{C})$  tem-se

$$[h_1, [h_2, h_3]] = 0. \quad (22.22)$$

A relação (22.22) mostra que  $\text{gh}_n(\mathbb{C})$  é o que se chama uma álgebra de Lie nilpotente (de grau 2).

✱

Podemos encontrar em  $\mathfrak{gh}_n(\mathbb{C})$  uma base especial formada pelas matrizes  $\hbar$  e  $p_k, q_k, k = 1, \dots, n-2$  definidas por

$$p_k = \begin{pmatrix} 0 & e_k^T & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad q_k = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e_k \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \hbar = \begin{pmatrix} 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (22.23)$$

sendo  $e_k, k = 1, \dots, n-2$  as matrizes-coluna definidas por

$$e_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e_2 := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \dots, \quad e_{n-2} := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

ou seja, todas as linhas de  $e_j$  são nulas, exceto a  $j$ -ésima, que vale 1. No caso  $n = 4$ , por exemplo, tem-se

$$p_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad p_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$q_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad q_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \hbar = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Em analogia com o caso do grupo  $\mathrm{GH}_3(\mathbb{C})$ , é fácil constatar que as matrizes  $p_k, q_k$  e  $-i\hbar$  são geradores de subgrupos uniparamétricos de  $\mathrm{GH}_n(\mathbb{C})$ .

**E. 22.28** Exercício. Verifique a afirmação do último parágrafo. Determine os subgrupos uniparamétricos de  $\mathrm{GH}_n(\mathbb{C})$  mencionados.  $\star$

Como  $e_k^T e_l = \delta_{k,l}$  para todos  $k$  e  $l$ , é um exercício fácil (e fortemente recomendado!) verificar que essas matrizes satisfazem as seguintes regras de comutação:

$$[p_k, q_l] = -i\hbar \delta_{k,l}, \quad [p_k, \hbar] = [q_k, \hbar] = [p_k, p_l] = [q_k, q_l] = 0, \quad (22.24)$$

para todos  $k, l = 1, \dots, n-2$ . Como o estudante familiarizado com a Mecânica Quântica percebe, essas são as relações canônicas de comutação de um sistema com  $n-2$  graus de liberdade.

Para entender a relação da álgebra de Heisenberg  $\mathfrak{gh}_n(\mathbb{C})$  com o grupo de Heisenberg  $\mathrm{GH}_n(\mathbb{C})$ , notemos em primeiro lugar que, assim como no caso  $n = 3$ , as matrizes  $h(a, b, c)$  são matrizes nilpotentes de grau 3, ou seja,

$$h(a, b, c)^3 = 0.$$

(Mostre isso!). É fácil com isso verificar que

$$\exp(h(a, b, c)) = \mathbb{1} + h(a, b, c) + \frac{1}{2}h(a, b, c)^2 = \begin{pmatrix} 1 & a^T & c + \frac{a^T b}{2} \\ 0 & \mathbb{1} & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = H\left(a, b, c + \frac{a^T b}{2}\right), \quad (22.25)$$

ou seja,

$$H(a, b, c) = \exp\left(h\left(a, b, c - \frac{a^T b}{2}\right)\right). \quad (22.26)$$

Pelo que vimos, todos os elementos do grupo de Heisenberg  $\text{GH}_n(\mathbb{C})$  são obtidos pela exponenciação de elementos da álgebra de Lie  $\text{gh}_n(\mathbb{C})$ , ou seja, a exponenciação é uma aplicação sobrejetora de  $\text{gh}_n(\mathbb{C})$  em seu grupo de Lie  $\text{GH}_n(\mathbb{C})$ . Em verdade, é fácil constatar que essa aplicação é também injetora (faça isso!). A aplicação exponencial é, portanto, uma bijeção de  $\text{gh}_n(\mathbb{C})$  em  $\text{GH}_n(\mathbb{C})$ .

**E. 22.29** *Exercício importante.* Usando a fórmula de Baker-Campbell-Hausdorff (equações (10.4), página 456, ou (10.60), página 483) e as relações (22.21) e (22.22), mostre que

$$\exp(h(a, b, c)) \exp(h(a', b', c')) = \exp\left(h\left(a + a', b + b', c + c' + \frac{a^T b' - a'^T b}{2}\right)\right). \quad (22.27)$$

Usando (22.25) e (22.26), reobtenha de (22.27) a regra de produto (22.18). ✦

### • As relações de Weyl em $\text{GH}_n(\mathbb{C})$

É evidente pelas definições (22.23) que podemos escrever

$$h(a, b, c) = \sum_{k=1}^{n-2} (a_k p_k + b_k q_k) - ic\hbar. \quad (22.28)$$

Por outro lado, as relações de comutação (22.24) afirmam que  $\hbar$  comuta com cada  $p_k$  e com cada  $q_k$ . Logo, tem-se

$$\exp(h(a, b, c)) = \exp(-ic\hbar) \exp\left(\sum_{k=1}^{n-2} (a_k p_k + b_k q_k)\right).$$

Por (22.28), tem-se  $\sum_{k=1}^{n-2} (a_k p_k + b_k q_k) = h(a, b, 0)$ . Assim, vale a identidade

$$\exp(h(a, b, c)) = \exp(-ic\hbar) \exp(h(a, b, 0)).$$

Usando isso no lado direito da relação (22.27), a mesma fica

$$\exp(h(a, b, c)) \exp(h(a', b', c')) = \exp\left(-i\left(c + c' + \frac{a^T b' - a'^T b}{2}\right)\hbar\right) \exp(h(a + a', b + b', 0)).$$

Efetuada-se nessa expressão as trocas  $a \leftrightarrow a'$ ,  $b \leftrightarrow b'$ ,  $c \leftrightarrow c'$ , obtemos também

$$\exp(h(a', b', c')) \exp(h(a, b, c)) = \exp\left(-i\left(c + c' + \frac{a'^T b - a^T b'}{2}\right)\hbar\right) \exp(h(a + a', b + b', 0)).$$

Comparando-se as duas últimas expressões, conclui-se facilmente que

$$\exp(h(a, b, c)) \exp(h(a', b', c')) = \exp(-i(a^T b' - a'^T b)\hbar) \exp(h(a', b', c')) \exp(h(a, b, c)). \quad (22.29)$$

Essa expressão é denominada *relação de Weyl*<sup>11</sup>, ou *relação de comutação de Weyl*, para  $\text{GH}_n(\mathbb{C})$ .

Definindo-se

$$U(a) := \exp(h(ia, 0, 0)) = \exp\left(i \sum_{k=1}^{n-2} a_k p_k\right) \quad \text{e}$$

$$V(b) := \exp(h(0, ib, 0)) = \exp\left(i \sum_{k=1}^{n-2} b_k q_k\right),$$

é fácil checar por (22.29) (faça-o!) que valem

$$U(a)V(b) = \exp\left(i(a^T b)\hbar\right) V(b)U(a), \quad (22.30)$$

$$U(a)U(a') = U(a')U(a) = U(a+a') \quad \text{e} \quad (22.31)$$

$$V(b)V(b') = V(b')V(b) = V(b+b'). \quad (22.32)$$

A relação (22.30) é também denominada *relação de Weyl*. Não por acaso, as relações (22.30)–(22.32) são essencialmente idênticas às relações (39.48)–(39.50), página 1921, válidas em um espaço de funções (o espaço de Schwartz). De fato, se  $a$  e  $b$  acima forem vetores reais, a expressão  $a^T b$ , que ocorre em (22.30), é o produto escalar usual entre eles.

**E. 22.30 Exercício.** Você sabe explicar o por quê dessa coincidência? ✱

As relações de Weyl na forma (22.30)–(22.32) ou na forma (39.48)–(39.50) são a motivação da definição das chamadas *Álgebras CCR* (vide, e.g., [53]), cujo estudo é relevante tanto na Mecânica Quântica quanto na Teoria Quântica de Campos.

### 22.2.3 Grupos Associados a Formas Bilineares e Sesquilineares

Na corrente seção vamos estudar grupos compostos por operadores lineares que preservam formas bilineares ou sesquilineares. O interesse específico por operadores lineares é consequência de dois resultados, o Lema 22.1 e o Teorema 22.7, abaixo, cujo interesse vai além de nossas pretensões iniciais, como teremos oportunidade de comentar alhures. O Teorema 22.7, por exemplo, é relevante na discussão sobre a invariância do intervalo na Teoria da Relatividade restrita e no estudo do movimento de corpos rígidos na Mecânica Clássica.

**Lema 22.1** *Seja  $V$  um espaço vetorial real dotado de uma forma bilinear simétrica e não-degenerada  $\omega : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ . Seja  $q$  a forma quadrática associada a  $\omega$ , definida por  $q(u) := \omega(u, u)$ , para todo  $u \in V$ . Seja  $R : V \rightarrow V$  uma função sobrejetora. Então,  $R$  satisfaz as condições*

$$R(0) = 0 \quad \text{e} \quad q(R(u) - R(v)) = q(u - v) \quad \text{para todos } u, v \in V \quad (22.33)$$

se e somente se satisfizer

$$\omega(R(u), R(v)) = \omega(u, v), \quad (22.34)$$

também para todos  $u, v \in V$ .

Se  $\omega$  for um produto escalar a condição de  $R : V \rightarrow V$  ser sobrejetora pode ser omitida. □

**Prova do Lema 22.1.** A prova é dividida em duas partes:

**I.** Vamos supor a validade de (22.33). Tomando-se  $v = 0$  na segunda igualdade de (22.33) e usando a primeira ( $R(0) = 0$ ), tem-se  $q(R(u)) = q(u)$  para todo  $u$ . Agora, Por um lado

$$q(R(u)) + q(R(v)) - q(R(u) - R(v)) = q(u) + q(v) - q(u - v) = \omega(u, u) + \omega(v, v) - \omega(u - v, u - v) = \omega(u, v) + \omega(v, u).$$

<sup>11</sup>Hermann Klaus Hugo Weyl (1885–1955).



Por outro lado,

$$\begin{aligned} q(R(u)) + q(R(v)) - q(R(u) - R(v)) &= \omega(R(u), R(u)) + \omega(R(v), R(v)) - \omega(R(u) - R(v), R(u) - R(v)) \\ &= \omega(R(u), R(v)) + \omega(R(v), R(u)) . \end{aligned}$$

Isso estabeleceu que

$$\omega(R(u), R(v)) + \omega(R(v), R(u)) = \omega(u, v) + \omega(v, u) .$$

Se  $\omega$  é simétrica, isso implica

$$\omega(R(u), R(v)) = \omega(u, v) .$$

**II.** Vamos supor a validade de (22.34). Tomando-se nela  $v = 0$ , temos que  $\omega(R(u), R(0)) = 0$  para todo  $u \in V$ , o que implica  $R(0) = 0$  pois  $\omega$  é não-degenerada e  $R$  é sobrejetora (se  $\omega$  for um produto escalar tomamos  $u = v = 0$  e (22.34) diz-nos que  $\omega(R(0), R(0)) = 0$ , o que igualmente implica  $R(0) = 0$ ). Além disso,

$$\begin{aligned} q(R(u) - R(v)) &= \omega(R(u) - R(v), R(u) - R(v)) = \omega(R(u), R(u)) + \omega(R(v), R(v)) - 2\omega(R(u), R(v)) \\ &\stackrel{(22.34)}{=} \omega(u, u) + \omega(v, v) - 2\omega(u, v) = \omega(u - v, u - v) = q(u - v) , \end{aligned} \quad (22.35)$$

estabelecendo a validade de (22.33), completando a prova do Lema 22.1. ■

O Teorema que segue é muito importante no estudo de funções que mantêm formas quadráticas invariantes.

**Teorema 22.7** *Seja  $V$  um espaço vetorial real dotado de uma forma bilinear simétrica e não-degenerada  $\omega : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ . Seja  $q$  a forma quadrática associada a  $\omega$ , definida por  $q(u) := \omega(u, u)$ , para todo  $u \in V$ . Seja  $A : V \rightarrow V$  uma função sobrejetora definida em  $V$  e tal que  $q(A(u) - A(v)) = q(u - v)$  para todos  $u, v \in V$ . Então, existem: um vetor constante  $c \in V$  e um operador linear sobrejetor  $R : V \rightarrow V$  satisfazendo  $\omega(Ru, Rv) = \omega(u, v)$  para todos  $u, v \in V$ , tais que*

$$A(u) = Ru + c$$

para todo  $u \in V$ . O operador linear  $R$  e a constante  $c$  são univocamente determinados.

Se  $\omega$  for um produto escalar a condição de  $A : V \rightarrow V$  ser sobrejetora pode ser omitida. □

**Prova do Teorema 22.7.** Seja  $V$  um espaço vetorial real dotado de uma forma bilinear simétrica e não-degenerada  $\omega : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ . Seja  $q$  a forma quadrática associada a  $\omega$ , definida por  $q(u) := \omega(u, u)$ , para todo  $u \in V$ . Seja  $A : V \rightarrow V$  uma função sobrejetora definida em  $V$  tal que  $q(A(u) - A(v)) = q(u - v)$  para todos  $u, v \in V$ .

Defina-se  $c := A(0) \in V$  e defina-se uma nova função  $R : V \rightarrow V$  dada por  $R(v) := A(v) - c = A(v) - A(0)$  para todo  $v \in V$ . É claro que  $R$  é sobrejetora, por  $A$  o ser. É claro também que  $R(0) = 0$  e que  $q(R(u) - R(v)) = q(u - v)$  para todos  $u, v \in V$ .

Vamos agora mostrar que se  $R : V \rightarrow V$  satisfaz (22.33) (e, portanto, (22.34), pelo Lema 22.1), então  $R$  é linear. Desejamos provar que para todos  $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$  e todos  $u_1, u_2 \in V$  vale  $R(\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2) - \alpha_1 R(u_1) - \alpha_2 R(u_2) = 0$ . Temos que, para  $w \in V$ , arbitrário,

$$\begin{aligned} &\omega(R(w), R(\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2) - \alpha_1 R(u_1) - \alpha_2 R(u_2)) \\ &= \omega(R(w), R(\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2)) - \alpha_1 \omega(R(w), R(u_1)) - \alpha_2 \omega(R(w), R(u_2)) \\ &\stackrel{(22.34)}{=} \omega(w, \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2) - \alpha_1 \omega(w, u_1) - \alpha_2 \omega(w, u_2) \\ &= \omega\left(w, \underbrace{(\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2) - \alpha_1 u_1 - \alpha_2 u_2}_{=0}\right) = 0 . \end{aligned} \quad (22.36)$$

Como  $R$  é sobrejetora e  $w$  é arbitrário, a não-degenerescência de  $\omega$  implica que  $R(\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2) - \alpha_1 R(u_1) - \alpha_2 R(u_2) = 0$  para todos  $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$  e todos  $u_1, u_2 \in V$ , significando que  $R : V \rightarrow V$  é linear.

Se  $\omega$  for um produto escalar, prova-se que  $R(\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2) - \alpha_1 R(u_1) - \alpha_2 R(u_2) = 0$  mostrando-se que

$$\omega\left(R(\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2) - \alpha_1 R(u_1) - \alpha_2 R(u_2), R(\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2) - \alpha_1 R(u_1) - \alpha_2 R(u_2)\right) = 0,$$

o que é feito expandindo-se o lado esquerdo em nove termos do tipo  $\omega(R(x), R(y)) = \omega(x, y)$ , como feito em (22.36), e reagrupando-os para obter  $\omega\left((\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2) - \alpha_1 u_1 - \alpha_2 u_2, (\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2) - \alpha_1 u_1 - \alpha_2 u_2\right) = 0$ .

Resta apenas demonstrar a unicidade de  $R$  e  $c$ . Vamos supor que para todo  $u \in V$  tenhamos  $Ru + c = R'u + c'$ . Tomando-se  $u = 0$  concluiríamos que  $c = c'$ . A relação restante  $Ru = R'u$ , válida para todo  $u \in V$ , significa que  $R = R'$ . Isso completa a prova do Teorema 22.7. ■

Uma generalização do Lema 22.1 e do Teorema 22.7 para o caso complexo pode ser encontrada na Seção 22.A, página 1128.

### • Grupos Associados a Formas Bilineares e Sesquilineares

Seja  $\mathcal{E}$  um espaço vetorial sobre os reais ou sobre os complexos. Vamos denotar por  $\text{GL}(\mathcal{E})$  o conjunto de todos os operadores lineares bijetores (e portanto inversíveis) de  $\mathcal{E}$  em  $\mathcal{E}$ . É bem claro que  $\text{GL}(\mathcal{E})$  forma um grupo, tendo como produto o produto de operadores.

Seja  $\omega : \mathcal{E} \times \mathcal{E} \rightarrow \mathbb{R}$  (ou  $\mathbb{C}$ ) uma função, em princípio arbitrária, definida em  $\mathcal{E} \times \mathcal{E}$  e assumindo valores reais ou complexos. Em palavras mais simples, seja  $\omega$  uma função de duas variáveis que a cada par de vetores  $x, y \in \mathcal{E}$  associa um número real ou complexo  $\omega(x, y)$ .

Denotaremos por  $\Omega(\mathcal{E}, \omega)$  o subconjunto de  $\text{GL}(\mathcal{E})$  formado por todos os operadores lineares  $O : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$ , inversíveis, tais que  $\omega(Ox, Oy) = \omega(x, y)$  para todos  $x, y \in \mathcal{E}$ :

$$\Omega(\mathcal{E}, \omega) := \left\{ O \in \text{GL}(\mathcal{E}) \mid \omega(Ox, Oy) = \omega(x, y) \text{ para todos } x, y \in \mathcal{E} \right\}. \quad (22.37)$$

Dizemos que  $\Omega(\mathcal{E}, \omega)$  é composto pelos operadores lineares inversíveis agindo em  $\mathcal{E}$  que preservam a função  $\omega$ . Vamos mostrar que  $\Omega(\mathcal{E}, \omega)$  é um subgrupo de  $\text{GL}(\mathcal{E})$ , muita vezes denominado o *grupo de invariância associado a  $\omega$* .

Primeiramente, é claro que  $1 \in \Omega(\mathcal{E}, \omega)$ . Em segundo lugar, sejam  $O_1$  e  $O_2$  dois operadores de  $\Omega(\mathcal{E}, \omega)$ . Teremos pelas hipóteses que

$$\omega(O_1 O_2 x, O_1 O_2 y) = \omega(O_2 x, O_2 y) = \omega(x, y)$$

para todos  $x, y \in \mathcal{E}$  e, portanto,  $O_1 O_2 \in \Omega(\mathcal{E}, \omega)$ . Resta mostrar que se  $O \in \Omega(\mathcal{E}, \omega)$  então  $O^{-1} \in \Omega(\mathcal{E}, \omega)$ . De fato,

$$\omega(O^{-1}x, O^{-1}y) = \omega(OO^{-1}x, OO^{-1}y) = \omega(x, y)$$

para todos  $x, y \in \mathcal{E}$ , que é o que queríamos provar.

### • Grupos de invariância de formas bilineares e sesquilineares em um espaço vetorial

Há um grande interesse nos grupos  $\Omega(\mathcal{E}, \omega)$  nos importantes casos particulares (nos quais nos especializaremos logo em seguida) em que  $\omega$  é uma forma bilinear ou sesquilinear definida em  $\mathcal{E}$  (esse último caso se  $\mathcal{E}$  for um espaço vetorial sobre os complexos). As noções de forma bilinear ou sesquilinear foram introduzidas no Capítulo 3, página 195. Também de interesse são as situações em que  $\mathcal{E}$  é um espaço vetorial (real ou complexo) de dimensão finita. Muitos dos grupos clássicos de relevância na Física e na Geometria são grupos de invariância de formas em espaços vetoriais de dimensão finita, como veremos mais adiante.

### • O caso de formas sesquilineares Hermitianas

Uma simplificação relevante na definição de  $\Omega(\mathcal{E}, \omega)$  ocorre no caso de  $\omega$  ser uma forma sesquilinear: podemos identificar o grupo  $\Omega(\mathcal{E}, \omega)$  com o conjunto

$$\Omega(\mathcal{E}, \omega) := \left\{ O \in \text{GL}(\mathcal{E}) \mid \omega(Ox, Ox) = \omega(x, x) \text{ para todo } x \in \mathcal{E} \right\}. \quad (22.38)$$

Compare-se com (22.37). Primeiramente, é evidente que se  $O \in \text{GL}(\mathcal{E})$  e satisfaz  $\omega(Ox, Oy) = \omega(x, y)$  para todo  $x, y \in \mathcal{E}$ , então também satisfaz  $\omega(Ox, Ox) = \omega(x, x)$  para todo  $x \in \mathcal{E}$ . A recíproca, porém, é também verdadeira, para formas sesquilineares, devido à chamada *identidade de polarização*, relação (3.10), página 201, que claramente diz-nos que se  $\omega(Ox, Ox) = \omega(x, x)$  para todo  $x \in \mathcal{E}$ , então  $\omega(Ox, Oy) = \omega(x, y)$  para todos  $x, y \in \mathcal{E}$ , justificando (22.38).

**E. 22.31** *Exercício.* Justifique essas afirmações. ✦

### • O caso de formas bilineares simétricas

Algo semelhante se dá no caso de formas bilineares simétricas. Se  $\omega$  for uma forma bilinear simétrica (ou seja, se valer  $\omega(x, y) = \omega(y, x)$  para todos  $x, y \in \mathcal{E}$ ), então podemos também identificar o grupo  $\Omega(\mathcal{E}, \omega)$  com o conjunto

$$\Omega(\mathcal{E}, \omega) := \left\{ O \in \text{GL}(\mathcal{E}) \mid \omega(Ox, Ox) = \omega(x, x) \text{ para todo } x \in \mathcal{E} \right\}. \quad (22.39)$$

Compare-se com (22.37). A justificativa é análoga ao caso de formas sesquilineares, acima, sendo, porém, que agora a identidade de polarização assume agora a forma da relação (3.3), página 196, a qual claramente diz-nos que se  $\omega(Ox, Ox) = \omega(x, x)$  para todo  $x \in \mathcal{E}$ , então  $\omega(Ox, Oy) = \omega(x, y)$  para todos  $x, y \in \mathcal{E}$ , justificando (22.39).

**E. 22.32** *Exercício.* Justifique essas afirmações. ✦

Vamos agora considerar casos particulares em que  $\mathcal{E}$  é o espaço  $\mathbb{R}^n$  ou  $\mathbb{C}^n$ . Esses são os casos mais relevantes de grupos de invariância associados a formas.

### • Grupos de invariância de formas bilineares em dimensão finita

Seja  $\mathcal{E} = \mathbb{R}^n$  e seja  $\omega_A$  uma forma bilinear em  $\mathbb{R}^n$ , que pelas considerações da Seção 3.4 é da forma  $\omega_A(x, y) = \langle x, Ay \rangle_{\mathbb{R}}$  para alguma matriz real  $A$ . Neste caso,  $\Omega(\mathbb{R}^n, \omega_A)$  é o conjunto de todas as matrizes  $M$  inversíveis reais  $n \times n$  tais que

$$\langle Mx, AMy \rangle_{\mathbb{R}} = \langle x, Ay \rangle_{\mathbb{R}}$$

para todos  $x, y \in \mathbb{R}^n$ . Essa relação diz-nos que  $\langle x, M^T AMy \rangle_{\mathbb{R}} = \langle x, Ay \rangle_{\mathbb{R}}$  para todos  $x, y \in \mathbb{R}^n$ , o que implica

$$M^T AM = A.$$

(Por quê?). Assim,

$$\Omega(\mathbb{R}^n, \omega_A) := \left\{ M \in \text{Mat}(\mathbb{R}, n), \det(M) \neq 0 \text{ e } M^T AM = A \right\}.$$

Se a matriz  $A$  for inversível (ou seja, se  $\omega_A$  for não-degenerada), então podemos escrever também

$$\Omega(\mathbb{R}^n, \omega_A) = \left\{ M \in \text{Mat}(\mathbb{R}, n), \det(M) \neq 0 \text{ e } M^{-1} = A^{-1} M^T A \right\}.$$

Se  $A$  possui uma inversa, a relação  $M^T AM = A$  implica que  $\det M = \pm 1$  (justifique!). Nesse caso, o grupo  $\Omega(\mathbb{R}^n, \omega_A)$  possui um subgrupo de particular interesse, composto por suas matrizes de determinante igual a 1:

$$\text{S}\Omega(\mathbb{R}^n, \omega_A) := \left\{ M \in \text{Mat}(\mathbb{R}, n), \det(M) = 1 \text{ e } M^{-1} = A^{-1} M^T A \right\}.$$

### • Grupos de invariância de formas sesquilineares em dimensão finita

Seja  $\mathcal{E} = \mathbb{C}^n$  e seja  $\omega_A$  uma forma sesquilinear em  $\mathbb{C}^n$ , que pelas considerações da Seção 3.4 é da forma  $\omega_A(x, y) = \langle x, Ay \rangle_{\mathbb{C}}$  para alguma matriz complexa  $A$ . Neste caso  $\Omega(\mathbb{C}^n, \omega_A)$  é o conjunto de todas as matrizes  $M$  inversíveis complexas  $n \times n$  tais que

$$\langle Mx, AMy \rangle_{\mathbb{C}} = \langle x, Ay \rangle_{\mathbb{C}}$$

para todos  $x, y \in \mathbb{C}^n$ . Essa relação nos diz que  $\langle x, M^* AMy \rangle_{\mathbb{C}} = \langle x, Ay \rangle_{\mathbb{C}}$  para todos  $x, y \in \mathbb{C}^n$ , o que implica

$$M^* AM = A.$$

Acima  $M^* = \overline{M^T}$ . Assim,

$$\Omega(\mathbb{C}^n, \omega_A) = \left\{ M \in \text{Mat}(\mathbb{C}, n), \det(M) \neq 0 \text{ e } M^* A M = A \right\}.$$

Se a matriz  $A$  for inversível (ou seja, se  $\omega_A$  for não-degenerada), então podemos escrever também

$$\Omega(\mathbb{C}^n, \omega_A) = \left\{ M \in \text{Mat}(\mathbb{C}, n), \det(M) \neq 0 \text{ e } M^{-1} = A^{-1} M^* A \right\}.$$

Se  $A$  possui uma inversa, a relação  $M^* A M = A$  implica que  $|\det M| = 1$  (justifique!). Nesse caso, o grupo  $\Omega(\mathbb{C}^n, \omega_A)$  possui um subgrupo de particular interesse, composto por suas matrizes de determinante igual a 1:

$$\text{S}\Omega(\mathbb{C}^n, \omega_A) := \left\{ M \in \text{Mat}(\mathbb{C}, n), \det(M) = 1 \text{ e } M^{-1} = A^{-1} M^* A \right\}.$$

\* \* \* \*

Vamos no que segue estudar diversos casos particulares dentre os grupos descritos acima, que mantêm invariantes formas bilineares ou sesquilineares, especialmente aqueles mais relevantes em Física e outras áreas, como os grupos ortogonais e os unitários.

## 22.2.4 Os Grupos Ortogonais

### • Os grupos $O(n)$ e $SO(n)$

Um caso de particular interesse é aquele onde  $\mathcal{E} = \mathbb{R}^n$  e  $A = \mathbb{1}$ , ou seja,  $\omega_A(x, y) = \langle x, y \rangle_{\mathbb{R}}$ . Neste caso o grupo  $\Omega(\mathbb{R}^n, \omega_A)$  é denotado por  $O(n)$  e tem-se

$$O(n) := \left\{ M \in \text{Mat}(\mathbb{R}, n), M^{-1} = M^T \right\}.$$

$O(n)$  é o grupo das matrizes ditas ortogonais  $n \times n$ .

Se  $M$  é uma matriz ortogonal, tem-se que  $MM^T = \mathbb{1}$ . Daí,  $1 = \det(\mathbb{1}) = \det(MM^T) = \det(M)\det(M^T) = (\det(M))^2$ . Concluimos que se uma matriz  $M$  é ortogonal, vale  $\det(M) = \pm 1$ .

O grupo  $O(n)$  possui um subgrupo, denominado  $SO(n)$ , que é composto pelas matrizes ortogonais com determinante igual a 1:

$$SO(n) := \left\{ M \in \text{Mat}(\mathbb{R}, n), M^{-1} = M^T \text{ e } \det(M) = 1 \right\}.$$

\*

Os grupos  $SO(n)$  são generalizações do grupo de rotações do espaço tridimensional para o espaço  $n$ -dimensional.

### • Os grupos $O(p, n)$ e $SO(p, n)$

Um outro caso de particular interesse é aquele onde  $\mathcal{E} = \mathbb{R}^{p+n}$ , com  $p, n \in \mathbb{N}_0$ , e  $\omega(x, y) = \langle x, \eta(p, n)y \rangle_{\mathbb{R}}$  onde  $\eta(p, n)$  é a matriz diagonal

$$\eta(p, n) := \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & -1 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & -1 \end{pmatrix}, \quad (22.40)$$

com  $p$  elementos  $+1$  e  $n$  elementos  $-1$ . Neste caso o grupo  $\Omega(\mathbb{R}^{p+n}, \omega)$  é denotado por  $O(p, n)$  e tem-se

$$O(p, n) := \left\{ M \in GL(\mathbb{R}, p+n), M^{-1} = \eta(p, n) M^T \eta(p, n) \right\}.$$

Se  $M \in O(p, n)$ , tem-se que  $M\eta(p, n)M^T\eta(p, n) = \mathbb{1}$ . Daí,

$$1 = \det(\mathbb{1}) = \det(M\eta(p, n)M^T\eta(p, n)) = \det(M)\det(M^T)(\det(\eta(p, n)))^2 = (\det(M))^2.$$

Concluimos que se  $M \in O(p, n)$ , vale  $\det(M) = \pm 1$ .

$O(p, n)$  possui um subgrupo, denominado  $SO(p, n)$ , que é composto pelas matrizes de  $O(p, n)$  com determinante igual a  $+1$ :

$$SO(p, n) := \left\{ M \in GL(\mathbb{R}, p+n), M^{-1} = \eta(p, n)M^T\eta(p, n) \text{ e } \det(M) = 1 \right\}.$$

\*

Certos grupos  $O(p, n)$  e  $SO(p, n)$  desempenham um papel muito importante em Física, estando ligados ao chamado Grupo de Lorentz, o qual tem importância na Teoria da Relatividade Especial. O grupo de Lorentz é detalhadamente discutido na Seção 22.6, página 1095.

## 22.2.5 Os Grupos Unitários

### • Os grupos $U(n)$ e $SU(n)$

Mais um caso importante é aquele onde  $\mathcal{E} = \mathbb{C}^n$  e  $\omega_A$  é a forma sesquilinear associada a  $A = \mathbb{1}$ , ou seja,  $\omega_A(x, y) = \langle x, y \rangle_{\mathbb{C}}$ . Neste caso o grupo  $\Omega(\mathbb{C}^n, \omega_A)$  é denotado por  $U(n)$  e tem-se

$$U(n) := \left\{ M \in \text{Mat}(\mathbb{C}, n), M^{-1} = M^* \right\}.$$

$U(n)$  é o grupo das matrizes ditas *unitárias*  $n \times n$ .

Se  $M$  é uma matriz unitária, tem-se que  $MM^* = \mathbb{1}$ . Daí,

$$1 = \det(\mathbb{1}) = \det(MM^*) = \det(M)\det(M^*) = \det(M)\det(\overline{M^T}) =$$

$$\det(M)\overline{\det(M^T)} = \det(M)\overline{\det(M)} = |\det(M)|^2.$$

Concluimos que se  $M \in U(n)$ , vale  $|\det(M)| = 1$ .

$U(n)$  possui um subgrupo, denominado  $SU(n)$ , que é composto pelas matrizes unitárias com determinante igual a 1:

$$SU(n) := \left\{ M \in \text{Mat}(\mathbb{C}, n), M^{-1} = M^* \text{ e } \det(M) = 1 \right\}.$$

Os grupos  $SO(n)$  e  $SU(n)$  serão estudados com alguma generalidade na Seção 22.4, página 1082. Outras seções anteriores tratarão de grupos de interesse particular, como os grupos  $SO(3)$  e  $SU(2)$ , os quais desempenham um papel muito importante na Mecânica Quântica e na Física das Partículas Elementares. Na Seção 22.4 veremos, por exemplo, que os elementos do grupo  $SO(n)$  são caracterizados por  $n(n-1)/2$  parâmetros reais e os elementos de  $SU(n)$  por  $n^2 - 1$  parâmetros reais. Disso segue que os grupos  $SO(3)$  e  $SU(2)$  são caracterizados pelo mesmo número de parâmetros reais, a saber, 3. Mais adiante entenderemos o porquê dessa coincidência.

### • Os grupos $U(p, n)$ e $SU(p, n)$

Mais um caso é aquele onde  $\mathcal{E} = \mathbb{C}^{p+n}$ ,  $p, n \in \mathbb{N}_0$ , e  $\omega(x, y) = \langle x, \eta(p, n)y \rangle_{\mathbb{C}}$ , onde  $\eta(p, n)$  foi definida em (22.40), sendo  $m = p + n$ . Neste caso o grupo  $\Omega(\mathbb{C}^{p+n}, \omega)$  é denotado por  $U(p, n)$  e tem-se

$$U(p, n) := \left\{ M \in \text{Mat}(\mathbb{C}, p+n), M^{-1} = \eta(p, n)M^*\eta(p, n) \right\}.$$

Se  $M \in U(p, n)$ , tem-se que  $M\eta(p, n)M^*\eta(p, n) = \mathbb{1}$ . Daí,

$$1 = \det(\mathbb{1}) = \det(M\eta(p, n)M^*\eta(p, n)) = \det(M)\det(M^*)(\det(\eta(p, n)))^2 = \\ \det(M)\det(\overline{M^T}) = \det(M)\overline{\det(M^T)} = \det(M)\overline{\det(M)} = |\det(M)|^2.$$

Concluimos que se  $M \in U(p, n)$ , vale  $|\det(M)| = 1$ .

$U(p, n)$  possui um subgrupo, denominado  $SU(p, n)$ , que é composto pelas matrizes de  $U(p, n)$  com determinante igual a 1:

$$SU(p, n) := \left\{ M \in \text{Mat}(\mathbb{C}, p+n), M^{-1} = \eta(p, n)M^*\eta(p, n) \text{ e } \det(M) = 1 \right\}.$$

### • Os grupos ortogonais complexos

Seja o espaço vetorial complexo  $\mathbb{C}^n$  e seja a seguinte forma bilinear em  $\mathbb{C}^n$ :  $\omega(x, y) = \langle x, y \rangle_{\mathbb{R}} = x_1y_1 + \cdots + x_ny_n$  para vetores  $x = (x_1, \dots, x_n)$  e  $y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{C}^n$ . O grupo ortogonal complexo, denotado por  $O(n, \mathbb{C})$ , é o grupo das matrizes *complexas* que mantêm essa forma bilinear invariante:

$$O(n, \mathbb{C}) := \left\{ M \in \text{Mat}(n, \mathbb{C}) \mid \omega(Mx, My) = \omega(x, y), \forall x, y \in \mathbb{C}^n \right\} \\ = \left\{ M \in \text{Mat}(n, \mathbb{C}) \mid M^T = M^{-1} \right\}.$$

$O(n, \mathbb{C})$  não pode ser confundido com o grupo  $U(n)$ . É fácil ver também que se  $M \in O(n, \mathbb{C})$ , então  $\det(M) = \pm 1$ . Daí, define-se

$$SO(n, \mathbb{C}) := \left\{ M \in \text{Mat}(n, \mathbb{C}) \mid M^T = M^{-1} \text{ e } \det(M) = 1 \right\}.$$

Como é fácil de se ver,  $SO(n, \mathbb{C})$  é um subgrupo de  $O(n, \mathbb{C})$ .

## 22.3 Os Grupos $SO(2)$ , $SO(3)$ , $SU(2)$ e $SL(2, \mathbb{C})$

Em função de sua particular importância na Física, em especial na Física Quântica, vamos discutir aqui com algum detalhe os grupos  $SO(3)$  e  $SU(2)$ , os quais, ademais, como veremos, são intimamente relacionados. Por razões pedagógicas, ilustraremos o estudo dos grupos  $SO(3)$  e  $SU(2)$  tratando antes do grupo  $SO(2)$ .

### 22.3.1 Os Grupos $SO(2)$ , $O(2)$ , $SO(1, 1)$ e $O(1, 1)$

#### • Os grupos $SO(2)$ e $O(2)$

Conforme já definimos, o grupo  $SO(2)$  é o grupo das matrizes ortogonais  $2 \times 2$  reais com determinante igual a 1:  $SO(2) = \{R \in \text{Mat}(\mathbb{R}, 2) \mid R^T = R^{-1} \text{ e } \det(R) = 1\}$ . Vamos começar estudando a forma geral de tais matrizes.

Como toda matriz  $2 \times 2$  real, uma matriz genérica  $R \in SO(2)$  é da forma  $R = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ , onde  $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ . Vamos estudar a condição  $R^{-1} = R^T$ . Podemos calcular  $R^{-1}$  usando a regra de Laplace, expressão (9.20), página 360:  $R^{-1}$  é dada pela transposta da matriz dos cofatores de  $R$  dividida pelo determinante de  $R$ , que é 1, neste caso. Ou seja,  $R^{-1} = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$ . Assim,  $R^{-1} = R^T$  significa nesse caso

$$\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix},$$

ou seja,  $c = -b$  e  $d = a$ . Logo,  $R = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$ . A condição  $\det(R) = 1$  implica, portanto,  $a^2 + b^2 = 1$ . Podemos então escrever  $a$  e  $b$  na forma  $a = \cos(\theta)$ ,  $b = -\sin(\theta)$ , com  $\theta \in (-\pi, \pi]$ . Resumindo:

$$\mathrm{SO}(2) = \left\{ \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}, \text{ onde } \theta \in (-\pi, \pi] \right\}.$$

Seja

$$R(\theta) := \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}.$$

Como  $R(\theta) = R(\theta + 2\pi)$  vemos que  $\mathrm{SO}(2)$  é homeomorfo ao círculo unitário  $\mathbb{S}^1$ , que é uma variedade diferenciável. Como o produto e a inversa são contínuos em  $\mathrm{SO}(2)$ , isso diz que  $\mathrm{SO}(2)$  é um grupo de Lie. É fácil constatar que  $R(0) = \mathbb{1}$  e que vale a regra de produto  $R(\theta)R(\theta') = R(\theta + \theta')$  (faça!).  $\mathrm{SO}(2)$  é, portanto, um grupo uniparamétrico homomorfo ao grupo  $(\mathbb{R}, +)$  e isomorfo ao grupo  $(\mathbb{R}, + \bmod 2\pi)$ .

O gerador  $J$  de  $\mathrm{SO}(2)$  é definido por

$$J := \left. \frac{d}{d\theta} R(\theta) \right|_{\theta=0} = \left. \frac{d}{d\theta} \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \right|_{\theta=0} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

É igualmente elementar constatar que  $J^2 = -\mathbb{1}$ . Daí

$$\begin{aligned} \exp(\theta J) &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\theta^m}{m!} J^m \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\theta^{2k}}{(2k)!} J^{2k} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\theta^{2k+1}}{(2k+1)!} J^{2k+1} \\ &= \left( \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \theta^{2k}}{(2k)!} \right) \mathbb{1} + \left( \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \theta^{2k+1}}{(2k+1)!} \right) J \\ &= \cos(\theta) \mathbb{1} + \sin(\theta) J \\ &= R(\theta). \end{aligned}$$

Assim,

$$\mathrm{SO}(2) = \left\{ \exp(\theta J), \text{ onde } \theta \in (-\pi, \pi] \right\}. \quad (22.41)$$

Com isso, (22.41) está nos dizendo que todo elemento de  $\mathrm{SO}(2)$  pode ser escrito como exponencial do seu gerador. Veremos que algo semelhante também se dá nos grupos  $\mathrm{SO}(3)$  e  $\mathrm{SU}(2)$ .

O grupo  $\mathrm{O}(2)$  é o grupo das matrizes ortogonais  $2 \times 2$  reais:  $\mathrm{O}(2) = \{R \in \mathrm{Mat}(\mathbb{R}, 2) \mid R^T = R^{-1}\}$ . Se  $R \in \mathrm{O}(2)$  então  $\det(R) = \pm 1$ . O caso  $\det(R) = 1$  corresponde a  $\mathrm{SO}(2)$ , que tratamos acima. Vamos considerar o caso  $\det(R) = -1$ .

Como toda matriz  $2 \times 2$  real, uma matriz genérica  $R \in \mathrm{O}(2)$  com  $\det(R) = -1$  é da forma  $R = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ , onde  $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ . Neste caso, como  $\det(R) = -1$ , teremos  $R^{-1} = \begin{pmatrix} -d & b \\ c & -a \end{pmatrix}$ . Assim, a condição  $R^{-1} = R^T$  significa nesse caso

$$\begin{pmatrix} -d & b \\ c & -a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix},$$

ou seja,  $c = b$  e  $d = -a$ . Logo,  $R = \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix}$ . A condição  $\det(R) = -1$  implica novamente  $a^2 + b^2 = 1$ . Podemos então escrever  $a$  e  $b$  na forma  $a = \cos \theta$ ,  $b = -\sin \theta$ , com  $\theta \in (-\pi, \pi]$ . Assim,  $R$  é da forma

$$R = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ -\sin \theta & -\cos \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}.$$

Resumindo:

$$\mathrm{O}(2) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}^P \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}, \text{ onde } P \in \{0, 1\} \text{ e } \theta \in (-\pi, \pi] \right\}.$$

### • O grupo $\mathrm{U}(1)$

**E. 22.33** *Exercício.* Mostre que o grupo  $\mathrm{U}(1) := \{z \in \mathbb{C}, |z| = 1\}$  é isomorfo ao grupo  $\mathrm{SO}(2)$ . ✦

### • O grupo $\mathrm{O}(1, 1)$ (o grupo de Lorentz em 1+1 dimensões)

Aqui estudaremos com algum detalhe o grupo  $\mathrm{O}(1, 1)$ , também denominado Grupo de Lorentz em 1+1 dimensões. A leitura deste tópico pode servir de introdução à leitura da Seção 22.6 que tratará do Grupo de Lorentz em 3+1 dimensões.

Seja  $M$  matriz inversível real  $2 \times 2$  na forma  $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ , onde  $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ . Tem-se que,  $M^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$ , onde  $\det(M) = ad - bc$ . Se  $\eta := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ , então  $\eta M^T \eta = \begin{pmatrix} a & -c \\ -b & d \end{pmatrix}$ , como facilmente se vê.

Se  $M \in \mathrm{SO}(1, 1)$ , então  $M^{-1} = \eta M^T \eta$  e  $\det(M) = 1$ . Isso significa que  $\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & -c \\ -b & d \end{pmatrix}$ . Assim, devemos ter  $a = d$  e  $b = c$ . A condição  $\det(M) = 1$  significa  $a^2 - b^2 = 1$ . Logo,

$$\mathrm{SO}(1, 1) = \left\{ M \in \mathrm{Mat}(\mathbb{R}, 2) \mid M = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}, a, b \in \mathbb{R}, \text{ com } a^2 - b^2 = 1 \right\}.$$

Como se vê,  $\mathrm{SO}(1, 1)$  é homeomorfo ao conjunto  $H_+ \cup H_-$  formado por duas hipérboles

$$H_{\pm} := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = \pm \sqrt{1 + y^2}, y \in \mathbb{R}\}.$$

$\mathrm{SO}(1, 1)$  tem, portanto, duas componentes conexas, que denotaremos por  $\mathcal{L}_+^{\uparrow}$  e  $\mathcal{L}_+^{\downarrow}$ :

$$\mathcal{L}_+^{\uparrow} := \left\{ M \in \mathrm{Mat}(\mathbb{R}, 2) \mid M = \begin{pmatrix} \sqrt{1+b^2} & b \\ b & \sqrt{1+b^2} \end{pmatrix}, b \in \mathbb{R} \right\},$$

$$\mathcal{L}_+^{\downarrow} := \left\{ M \in \mathrm{Mat}(\mathbb{R}, 2) \mid M = \begin{pmatrix} -\sqrt{1+b^2} & b \\ b & -\sqrt{1+b^2} \end{pmatrix}, b \in \mathbb{R} \right\}.$$

Note-se que apenas  $\mathcal{L}_+^{\uparrow}$  é conexa à identidade e, portanto, apenas a componente  $\mathcal{L}_+^{\uparrow}$  é um subgrupo de  $\mathrm{SO}(1, 1)$ .

Parametrizando  $b \in \mathbb{R}$  na forma  $b = -\sinh(z)$ , com  $z \in \mathbb{R}$ , constatamos que

$$\mathcal{L}_+^{\uparrow} = \left\{ M \in \mathrm{Mat}(\mathbb{R}, 2) \mid M = \begin{pmatrix} \cosh(z) & -\sinh(z) \\ -\sinh(z) & \cosh(z) \end{pmatrix}, z \in \mathbb{R} \right\},$$

$$\mathcal{L}_+^{\downarrow} = \left\{ M \in \mathrm{Mat}(\mathbb{R}, 2) \mid M = \begin{pmatrix} -\cosh(z) & -\sinh(z) \\ -\sinh(z) & -\cosh(z) \end{pmatrix}, z \in \mathbb{R} \right\}.$$

Os elementos de  $\mathrm{O}(1, 1)$  que não são de  $\mathrm{SO}(1, 1)$  têm determinante  $-1$ . Assim, são matrizes que satisfazem  $\begin{pmatrix} -d & b \\ c & -a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & -c \\ -b & d \end{pmatrix}$  sendo, portanto, da forma  $\begin{pmatrix} a & b \\ -b & -a \end{pmatrix}$  com  $a^2 - b^2 = 1$ . O conjunto de tais matrizes é igualmente homeomorfo ao conjunto  $H_+ \cup H_-$  e consta também de duas componentes conexas, a saber, os conjuntos

$$\mathcal{L}_-^{\uparrow} := \left\{ M \in \mathrm{Mat}(\mathbb{R}, 2) \mid M = \begin{pmatrix} \sqrt{1+b^2} & b \\ -b & -\sqrt{1+b^2} \end{pmatrix}, b \in \mathbb{R} \right\},$$

$$\mathcal{L}_-^{\downarrow} := \left\{ M \in \mathrm{Mat}(\mathbb{R}, 2) \mid M = \begin{pmatrix} -\sqrt{1+b^2} & b \\ -b & \sqrt{1+b^2} \end{pmatrix}, b \in \mathbb{R} \right\}.$$



É claro que nem  $\mathcal{L}_-^\uparrow$  nem  $\mathcal{L}_-^\downarrow$  são subgrupos de  $O(1, 1)$ . Parametrizando  $b \in \mathbb{R}$  novamente na forma  $b = -\sinh(z)$ , com  $z \in \mathbb{R}$ , constatamos que

$$\mathcal{L}_-^\uparrow = \left\{ M \in \text{Mat}(\mathbb{R}, 2) \mid M = \begin{pmatrix} \cosh(z) & -\sinh(z) \\ \sinh(z) & -\cosh(z) \end{pmatrix}, z \in \mathbb{R} \right\},$$

$$\mathcal{L}_-^\downarrow = \left\{ M \in \text{Mat}(\mathbb{R}, 2) \mid M = \begin{pmatrix} -\cosh(z) & -\sinh(z) \\ \sinh(z) & \cosh(z) \end{pmatrix}, z \in \mathbb{R} \right\}.$$

O grupo  $O(1, 1)$  é, portanto, a união de quatro componentes conexas:

$$O(1, 1) = \mathcal{L}_+^\uparrow \cup \mathcal{L}_+^\downarrow \cup \mathcal{L}_-^\uparrow \cup \mathcal{L}_-^\downarrow,$$

sendo cada componente disjunta das demais. Dentre elas apenas  $\mathcal{L}_+^\uparrow$  é um grupo.

Definindo as matrizes  $T := \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{L}_-^\downarrow$  e  $P := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathcal{L}_-^\uparrow$ , podemos escrever

$$\mathcal{L}_+^\downarrow = \left\{ M \in \text{Mat}(\mathbb{R}, 2) \mid M = P \begin{pmatrix} \cosh(z) & -\sinh(z) \\ -\sinh(z) & \cosh(z) \end{pmatrix} T, z \in \mathbb{R} \right\},$$

$$\mathcal{L}_-^\uparrow = \left\{ M \in \text{Mat}(\mathbb{R}, 2) \mid M = P \begin{pmatrix} \cosh(z) & -\sinh(z) \\ -\sinh(z) & \cosh(z) \end{pmatrix}, z \in \mathbb{R} \right\},$$

$$\mathcal{L}_-^\downarrow = \left\{ M \in \text{Mat}(\mathbb{R}, 2) \mid M = \begin{pmatrix} \cosh(z) & -\sinh(z) \\ -\sinh(z) & \cosh(z) \end{pmatrix} T, z \in \mathbb{R} \right\},$$

o que exhibe a relação entre as matrizes dessas três componentes conexas e as matrizes de  $\mathcal{L}_+^\uparrow$ .

**E. 22.34** Exercício importante. Mostre que

$$\mathcal{L}_+^\uparrow = \left\{ M \in \text{Mat}(\mathbb{R}, 2) \mid M = \exp(z\mathcal{M}_1), z \in \mathbb{R} \right\},$$

onde  $\mathcal{M}_1 := \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ .

✱

\*

O grupo  $O(1, 1)$  é por vezes denominado Grupo de Lorentz em 1+1 dimensões.  $\mathcal{L}_+^\uparrow$  é denominado Grupo de Lorentz próprio ortócrono em 1+1 dimensões. O Grupo de Lorentz em 3+1 dimensões será estudado em detalhe na Seção 22.6, página 1095.

Para fazermos contacto com a teoria da relatividade restrita, façamos uma outra parametrização de  $\mathcal{L}_+^\uparrow$ , definindo  $v = c \tanh(z)$ . Com isso  $-c < v < c$ ,  $\cosh(z) = \gamma(v)$  e  $\sinh(z) = \frac{v}{c}\gamma(v)$ , onde  $\gamma(v) := (1 - (v/c)^2)^{-1/2}$ . Assim, definindo

$$B_1(v) := \begin{pmatrix} \gamma(v) & -\frac{v}{c}\gamma(v) \\ -\frac{v}{c}\gamma(v) & \gamma(v) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh(z) & -\sinh(z) \\ -\sinh(z) & \cosh(z) \end{pmatrix}, \quad (22.42)$$

teremos

$$\mathcal{L}_+^\uparrow = \left\{ B_1(v), -c < v < c \right\}.$$

$B_1(v) \in \mathcal{L}_+^\uparrow$  age em um vetor  $\begin{pmatrix} ct \\ x \end{pmatrix}$  como  $B_1(v) \begin{pmatrix} ct \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ct' \\ x' \end{pmatrix}$ , onde

$$t' = \frac{t - \frac{v}{c^2}x}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}},$$

que são as bem conhecidas *transformações de Lorentz* da Teoria da Relatividade Restrita.

**E. 22.35** Exercício. Qual a interpretação física das matrizes  $P$  e  $T$  introduzidas acima?

✱

**E. 22.36** *Exercício.* Constate que para todos  $v, v' \in (-c, c)$  vale

$$B_1(v)B_1(v') = B_1\left(\frac{v+v'}{1+\frac{vv'}{c^2}}\right).$$

Trata-se da bem-conhecida regra relativística de composição de velocidades. ✦

## 22.3.2 O Grupo $\text{SO}(3)$

A presente seção é dedicada ao grupo  $\text{SO}(3)$ , o subgrupo de  $\text{O}(3)$  composto por matrizes de determinante 1. Ao restante do grupo  $\text{O}(3)$  dedicamos a Seção 22.3.3, página 1068.

Conforme já definimos,  $\text{SO}(3)$  é o grupo formado por todas as matrizes  $3 \times 3$  reais  $R$  tais que  $R^T = R^{-1}$  e tais que  $\det(R) = 1$ . Vamos começar seu estudo mostrando que toda a matriz  $R \neq \mathbb{1}$  de  $\text{SO}(3)$  representa uma rotação por algum ângulo em torno de algum eixo que passa pela origem. A essa interpretação seremos conduzidos pelas Proposições 22.3 e 22.4, logo adiante, cujas demonstrações iniciam-se com o seguinte resultado, válido para os grupos  $\text{SO}(n)$  com  $n$  ímpar:

**Lema 22.2** *Seja  $R \in \text{SO}(n)$  com  $n$  ímpar. Então, 1 é um autovalor de  $R$  e, portanto, existe ao menos um vetor não nulo  $v \in \mathbb{R}^n$  tal que  $Rv = v$ .* □

*Prova.* Como  $R \in \text{SO}(n)$ , tem-se  $RR^T = \mathbb{1}$  e  $\det(R) = 1$ . Logo,

$$\det(\mathbb{1} - R) = \det(R(R^T - \mathbb{1})) = \underbrace{\det(R)}_{=1} \det((R - \mathbb{1})^T) = \det(R - \mathbb{1}) = \det(-(\mathbb{1} - R)) = -\det(\mathbb{1} - R),$$

o que implica  $\det(\mathbb{1} - R) = 0$ . Acima, usamos o fato que se  $M$  for uma matriz  $n \times n$  com  $n$  ímpar, então  $\det(-M) = -\det(M)$  (essa afirmação é falsa se  $n$  for par).

O fato que  $\det(\mathbb{1} - R) = 0$  implica que 1 é um autovalor de  $R$  e que  $R - \mathbb{1}$  não possui inversa. Pelo Corolário 9.1, página 359, existe um vetor não-nulo  $v \in \mathbb{R}^n$  que é anulado  $R - \mathbb{1}$ , ou seja, que é tal que  $Rv = v$ . ■

No caso específico de  $\text{SO}(3)$  tem-se a seguinte afirmação:

**Proposição 22.3** *Para cada matriz  $R \in \text{SO}(3)$ ,  $R \neq \mathbb{1}$ , o subespaço  $V \equiv V_R$  de  $\mathbb{R}^3$  formado por vetores que são deixados invariantes por  $R$  (ou seja, que satisfazem  $Rv = v$  para todo  $v \in V$ ) é unidimensional.* □

Note que o subespaço  $V$  pode não ser o mesmo para matrizes  $R$  distintas. Note também que excluímos  $R = \mathbb{1}$  por razões óbvias: todo vetor de  $\mathbb{R}^3$  é invariante por  $\mathbb{1}$  e não apenas um subespaço unidimensional.

*Prova da Proposição 22.3.* Seja  $R \neq \mathbb{1}$  uma matriz qualquer de  $\text{SO}(3)$ , fixa daqui por diante. Seja  $V$  o subespaço de  $\mathbb{R}^3$  formado por todos os vetores  $v$  que são autovetores de  $R$  com autovalor 1:  $V = \{v \in \mathbb{R}^3 \mid Rv = v\}$ . Sabemos pelo Lema 22.2, página 1052, que  $V \neq \{0\}$  e sua dimensão pode, portanto, ser 1, 2 ou 3.

Notemos de passagem que se  $v \in V$  então vale também que  $R^T v = v$ . De fato, se aplicarmos  $R^T$  à esquerda na igualdade  $v = Rv$  e lembrarmos que  $R^T R = \mathbb{1}$ , segue que  $R^T v = v$ . Notemos também que  $V^\perp$ , o subespaço formado por todos os vetores ortogonais a todos os vetores de  $V$ , é também deixado invariante por  $R$ , ou seja, se  $u \in V^\perp$  então  $Ru \in V^\perp$ . De fato, se  $v \in V$  e  $u \in V^\perp$

$$\langle Ru, v \rangle_{\mathbb{R}} = \langle u, R^T v \rangle_{\mathbb{R}} = \langle u, v \rangle_{\mathbb{R}} = 0.$$

Como isso vale para todo  $v \in V$ , concluímos que  $Ru \in V^\perp$ , como queríamos.

Como dissemos, a dimensão de  $V$  pode ser igual a 1, 2 ou 3. Vamos mostrar que os dois últimos casos não são possíveis.

Se a dimensão de  $V$  fosse 3,  $V$  seria idêntico ao espaço  $\mathbb{R}^3$ . Nesse caso então  $Rv = v$  para todo vetor  $v \in \mathbb{R}^3$ , ou seja,  $R = \mathbb{1}$ , situação que excluímos.

Vamos supor, então, que a dimensão de  $V$  é 2. Nesse caso a dimensão de seu complemento ortogonal  $V^\perp$  é 1. Agora, como  $V^\perp$  é unidimensional e é invariante pela ação de  $R$ , teremos para  $u \in V^\perp$  que  $Ru = \lambda u$ , para algum  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Mas isso diz que

$$\langle u, u \rangle_{\mathbb{R}} = \langle Ru, Ru \rangle_{\mathbb{R}} = \langle \lambda u, \lambda u \rangle_{\mathbb{R}} = \lambda^2 \langle u, u \rangle_{\mathbb{R}}$$

e, portanto,  $\lambda = \pm 1$ . O caso  $\lambda = +1$  já está excluído (pois aí  $u \in V$ ). Logo,  $\lambda = -1$  e  $Ru = -u$ . Assim,  $R$  possui um autovalor  $\lambda = +1$  duplamente degenerado e um autovalor  $\lambda = -1$ , simples. Logo,  $\det(R) = -1$ , uma contradição com a hipótese que  $R \in \text{SO}(3)$ . Logo, a dimensão de  $V$  dever ser igual a 1, e isso completa a prova. ■

Seja  $R \neq \mathbb{1}$  um elemento de  $\text{SO}(3)$  e seja  $V_R$  o subespaço unidimensional formado pelos vetores deixados invariantes por  $R$  e cuja existência foi estabelecida na proposição que acabamos de provar. Como também vimos,  $R$  também deixa invariante o subespaço bidimensional  $V_R^\perp$ , que é ortogonal a  $V_R$ .

Isso significa que se escolhermos em  $\mathbb{R}^3$  uma base ortonormal  $v, u_1, u_2$  com  $v \in V_R$  e  $u_i \in V_R^\perp$ , a matriz  $R$  terá a forma

$$R := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{\begin{matrix} r \end{matrix}} \\ 0 & \end{pmatrix}, \quad (22.43)$$

onde  $r$  é uma matriz real  $2 \times 2$ . Que propriedades tem  $r$ ? Como veremos,  $r \in \text{SO}(2)$ . De fato, pela definição de  $R$ , teremos para qualquer vetor  $u$ , que  $\langle u, u \rangle_{\mathbb{R}} = \langle Ru, Ru \rangle_{\mathbb{R}}$ , mas se escolhermos  $u \in V_R^\perp$ , teremos  $Ru = ru$  em  $V_R^\perp$  e a relação acima significa  $\langle u, u \rangle_{\mathbb{R}} = \langle ru, ru \rangle_{\mathbb{R}}$ . Logo,  $r \in \text{O}(2)$ . Fora isso, (22.43) mostra que  $1 = \det(R) = \det(r)$ , provando que  $r \in \text{SO}(2)$ . Como sabemos a forma geral de uma matriz de  $\text{SO}(2)$  é

$$r = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix},$$

com  $\varphi \in (-\pi, \pi]$ . Isso está também dizendo que  $R$  representa uma rotação de  $\varphi$  em torno do eixo (que passa pela origem) representado por  $V_R$ .

Concluimos então o seguinte:

**Proposição 22.4** Para cada  $R \in \text{SO}(3)$  existe uma base ortonormal de  $\mathbb{R}^3$  onde  $R$  é da forma

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \varphi & -\sin \varphi \\ 0 & \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix} \quad (22.44)$$

com  $\varphi \in (-\pi, \pi]$ . □

A discussão precedente nos informa que cada elemento  $R$  de  $\text{SO}(3)$  representa uma rotação de um certo ângulo  $\theta \in (-\pi, \pi]$  em torno de um eixo (que passa pela origem) definido por um vetor  $\vec{\eta} \in \mathbb{R}^3$  (que podemos sempre escolher como tendo norma 1, ou seja,  $\|\vec{\eta}\| = 1$ )<sup>12</sup>. Essa afirmação é por vezes denominada *Teorema da Rotação de Euler*, que o demonstrou pela primeira vez (com outros argumentos) em 1776.

<sup>12</sup>No caso  $R = \mathbb{1}$  tomamos  $\theta = 0$  e  $\vec{\eta}$  arbitrário.

• Os geradores de  $SO(3)$

Pela discussão precedente, se considerarmos os elementos de  $SO(3)$  que correspondem a rotações por um ângulo  $\varphi$  no sentido anti-horário em torno dos eixos canônicos 1, 2 e 3 do espaço tridimensional  $\mathbb{R}^3$  (eixos esses que suporemos orientados positivamente, como usual), teremos que as respectivas matrizes de rotação são dadas por

$$R_1(\varphi) := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \varphi & -\sin \varphi \\ 0 & \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}, \quad R_2(\varphi) := \begin{pmatrix} \cos \varphi & 0 & \sin \varphi \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \varphi & 0 & \cos \varphi \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad R_3(\varphi) := \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (22.45)$$

com  $\varphi \in (-\pi, \pi]$ . O estudante deve convencer-se do fato que a diferença de sinal nos senos entre  $R_2(\phi)$  e as outras duas matrizes em (22.45) se deve ao fato de que as três matrizes representam rotações no sentido anti-horário.

É um exercício elementar (faça-o!) verificar que cada matriz  $R_i(\theta)$  representa um subgrupo uniparamétrico de  $SO(3)$ :  $R_i(0) = 1$  e  $R_i(\theta)R_i(\theta') = R_i(\theta + \theta')$ . Os geradores desses subgrupos são dados por

$$J_1 := \left. \frac{d}{d\varphi} R_1(\varphi) \right|_{\varphi=0} = \left. \frac{d}{d\varphi} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \varphi & -\sin \varphi \\ 0 & \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix} \right|_{\varphi=0} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (22.46)$$

$$J_2 := \left. \frac{d}{d\varphi} R_2(\varphi) \right|_{\varphi=0} = \left. \frac{d}{d\varphi} \begin{pmatrix} \cos \varphi & 0 & \sin \varphi \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \varphi & 0 & \cos \varphi \end{pmatrix} \right|_{\varphi=0} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (22.47)$$

$$J_3 := \left. \frac{d}{d\varphi} R_3(\varphi) \right|_{\varphi=0} = \left. \frac{d}{d\varphi} \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right|_{\varphi=0} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (22.48)$$

Para ilustrar a discussão que faremos na Seção 22.4.2, página 1086, notemos aqui que as três matrizes  $J_k$  compõem uma base no espaço das matrizes  $3 \times 3$  antissimétricas.

É relevante constatar, contemplando (22.46)–(22.48), que os elementos de matriz das matrizes  $J_a$ ,  $a = 1, 2, 3$ , são dados por

$$(J_a)_{bc} = -\varepsilon_{abc}, \quad (22.49)$$

onde  $\varepsilon_{abc}$ , com  $a, b, c = 1, 2, 3$ , é o chamado *símbolo* (ou *tensor*) de Levi-Civita<sup>13</sup>, definido da seguinte forma:

$$\varepsilon_{abc} := \begin{cases} 1, & \text{se } abc \text{ for uma permutação par de } 123, \\ -1, & \text{se } abc \text{ for uma permutação ímpar de } 123, \\ 0, & \text{se quaisquer dois índices forem iguais.} \end{cases} \quad (22.50)$$

O exercício a seguir revela um fato importante sobre as matrizes  $J_k$ :

<sup>13</sup>Tullio Levi-Civita (1873–1941).

**E. 22.37** Exercício importantíssimo. Verifique que as matrizes  $J_1$ ,  $J_2$  e  $J_3$  satisfazem as relações de comutação

$$[J_a, J_b] = \sum_{c=1}^3 \varepsilon_{abc} J_c. \quad (22.51)$$

**Sugestão 1:** use a fórmula explícita das matrizes  $J_k$  dada em (22.46)–(22.48), calcule seus diversos comutadores e constate a validade de (22.51). **Sugestão 2:** use (22.49) e a identidade de Jacobi para os símbolos de Levi-Civita, relação (4.10), página 234. ✱

**E. 22.38** Exercício. Sejam  $\vec{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \in \mathbb{R}^3$  e  $\vec{\beta} = (\beta_1, \beta_2, \beta_3) \in \mathbb{R}^3$ . Usando (22.51), mostre que

$$[\vec{\alpha} \cdot \vec{J}, \vec{\beta} \cdot \vec{J}] = (\vec{\alpha} \times \vec{\beta}) \cdot \vec{J}, \quad (22.52)$$

sendo que “ $\times$ ” denota o produto vetorial em  $\mathbb{R}^3$  e  $\vec{\alpha} \cdot \vec{J}$  é uma abreviação sugestiva para  $\alpha_1 J_1 + \alpha_2 J_2 + \alpha_3 J_3$ . ✱

Os Exercícios E. 22.37 e E. 22.38 dizem-nos que as matrizes  $J_1$ ,  $J_2$  e  $J_3$  geram uma álgebra de Lie, denominada álgebra de Lie  $\mathfrak{so}(3)$  (com letras minúsculas), para lembrar sua associação com o grupo  $\mathrm{SO}(3)$ .

**E. 22.39** Exercício. Verifique que as matrizes  $J_1$ ,  $J_2$  e  $J_3$  satisfazem

$$(J_1)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} =: E_1, \quad (J_2)^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} =: E_2, \quad \text{e} \quad (J_3)^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} =: E_3, \quad (22.53)$$

e que vale

$$(J_1)^2 + (J_2)^2 + (J_3)^2 = -2\mathbb{1}.$$

✱

**E. 22.40** Exercício. Verifique que com as matrizes  $E_1$ ,  $E_2$  e  $E_3$  acima podemos escrever

$$R_a(\varphi) = \mathbb{1} + (1 - \cos(\varphi))E_a + \sin(\varphi)J_a \quad (22.54)$$

para  $a = 1, 2$  e  $3$ . ✱

Com o uso de (22.53) podemos facilmente provar o seguinte fato: para  $a = 1, 2$  ou  $3$  tem-se

$$R_a(\varphi) = \exp(\varphi J_a).$$

Vamos mostrar isso. Por (22.53) é evidente que  $J_a^3 = E_a J_a = -J_a$  (verifique!). Logo,

$$J_a^{2k} = (-1)^{k+1} E_a, \quad \forall k \in \mathbb{N} \quad \text{e} \quad J_a^{2k+1} = (-1)^k J_a, \quad \forall k \in \mathbb{N}_0. \quad (22.55)$$

Assim, temos para  $a = 1, 2$  ou  $3$ ,

$$\begin{aligned} \exp(\varphi J_a) &= \mathbb{1} + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\varphi^m}{m!} J_a^m \\ &= \mathbb{1} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varphi^{2k}}{(2k)!} J_a^{2k} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\varphi^{2k+1}}{(2k+1)!} J_a^{2k+1} \\ &\stackrel{(22.55)}{=} \mathbb{1} + \left( \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1} \varphi^{2k}}{(2k)!} \right) E_a + \left( \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \varphi^{2k+1}}{(2k+1)!} \right) J_a \\ &= \mathbb{1} + (1 - \cos(\varphi))E_a + \sin(\varphi)J_a \\ &\stackrel{(22.54)}{=} R_a(\varphi), \end{aligned}$$

que é o que queríamos mostrar.

\* \* \* \*

**E. 22.41** *Exercício.* Sejam as matrizes de rotação definidas em (22.45). Mostre que vale a relação

$$R_3(-\pi/2)R_1(-\pi/2)R_2(-\pi/2) = R_1(-\pi/2)$$

e interprete-a geometricamente. ✱

### • Os geradores de $SO(3)$ e a aplicação exponencial

Vamos agora mostrar que todo elemento de  $SO(3)$  pode ser escrito como exponencial de uma combinação linear das matrizes  $J_a$ . Antes, porém, precisamos estabelecer uma certa convenção.

Como comentamos anteriormente, cada elemento  $R$  de  $SO(3)$  representa uma rotação de um certo ângulo  $\theta \in (-\pi, \pi]$  em torno de um eixo definido por um vetor  $\vec{\eta} \in \mathbb{R}^3$  (que podemos sempre escolher como tendo norma 1, ou seja,  $\|\vec{\eta}\| = 1$ ). Agora, uma rotação de um ângulo  $\theta$  em sentido anti-horário em relação a  $\vec{\eta}$  corresponde a uma rotação de um ângulo  $\theta$  em sentido horário em torno de  $\eta$  ou a uma rotação de ângulo  $-\theta$  em sentido anti-horário em relação a  $\vec{\eta}$ . Para evitar essas ambiguidades, vamos doravante adotar a convenção de considerar apenas rotações em sentido anti-horário e limitar o ângulo  $\theta$  ao intervalo  $[0, \pi]$ .

Designaremos por  $R(\theta, \vec{\eta})$  a matriz de rotação de um ângulo  $\theta \in [0, \pi]$  em sentido anti-horário em torno de  $\vec{\eta} \in \mathbb{R}^3$  com  $\|\vec{\eta}\| = 1$ . Convencionamos também que a rotação identidade  $\mathbb{1}$  é entendida como uma rotação de um ângulo nulo em torno de um eixo arbitrário:  $\mathbb{1} = R(0, \vec{\eta})$ .

Temos, então, a seguinte proposição:

**Proposição 22.5** *Seja  $R(\theta, \vec{\eta}) \in SO(3)$  uma rotação em sentido anti-horário de um ângulo  $\theta \in [0, \pi]$  em torno de um eixo definido por um vetor  $\vec{\eta} \in \mathbb{R}^3$ ,  $\vec{\eta} = (\eta_1, \eta_2, \eta_3)$ , com  $\|\vec{\eta}\| = 1$ . Então, podemos escrever*

$$R(\theta, \vec{\eta}) = \exp\left(\theta \vec{\eta} \cdot \vec{J}\right), \quad (22.56)$$

onde  $\vec{\eta} \cdot \vec{J} := \eta_1 J_1 + \eta_2 J_2 + \eta_3 J_3$ . Calculando-se a exponencial acima obtém-se

$$R(\theta, \vec{\eta}) = \mathbb{1} + (1 - \cos(\theta)) \left( \vec{\eta} \cdot \vec{J} \right)^2 + \sin(\theta) \left( \vec{\eta} \cdot \vec{J} \right), \quad (22.57)$$

ou seja, escrevendo-se explicitamente,

$$R(\theta, \vec{\eta}) = \begin{pmatrix} (1 - \cos(\theta))\eta_1^2 + \cos(\theta) & (1 - \cos(\theta))\eta_1\eta_2 - \sin(\theta)\eta_3 & (1 - \cos(\theta))\eta_1\eta_3 + \sin(\theta)\eta_2 \\ (1 - \cos(\theta))\eta_1\eta_2 + \sin(\theta)\eta_3 & (1 - \cos(\theta))\eta_2^2 + \cos(\theta) & (1 - \cos(\theta))\eta_3\eta_2 - \sin(\theta)\eta_1 \\ (1 - \cos(\theta))\eta_1\eta_3 - \sin(\theta)\eta_2 & (1 - \cos(\theta))\eta_3\eta_2 + \sin(\theta)\eta_1 & (1 - \cos(\theta))\eta_3^2 + \cos(\theta) \end{pmatrix}.$$

Por fim, para  $\vec{\alpha} \in \mathbb{R}^3$  arbitrário, tem-se que

$$R(\theta, \vec{\eta})\vec{\alpha} = \vec{\alpha} + (1 - \cos(\theta))\left(\vec{\eta} \times (\vec{\eta} \times \vec{\alpha})\right) + \sin(\theta)\vec{\eta} \times \vec{\alpha} \quad (22.58)$$

$$= \cos(\theta)\vec{\alpha} + (1 - \cos(\theta))(\vec{\eta} \cdot \vec{\alpha})\vec{\eta} + \sin(\theta)\vec{\eta} \times \vec{\alpha}. \quad (22.59)$$

As expressões (22.57) e (22.58)–(22.59) são denominadas fórmulas de Rodrigues<sup>14</sup> para o grupo  $SO(3)$ . ■

<sup>14</sup>Benjamin Olinde Rodrigues (1794–1851). Rodrigues foi banqueiro, socialista, e matemático amador, nascido na França, mas de origem judaico-portuguesa. Seu nome é mais conhecido por uma identidade sobre polinômios de Legendre, a equação (15.40), página 690, (vide também Seção 15.1.2, página 687 para generalizações).

Antes da demonstração, façamos alguns

Comentários. A Proposição 22.5 revela-nos que  $R(\theta, \vec{\eta})$  depende do ângulo  $\theta$  e do vetor  $\vec{\eta}$  através da combinação  $\theta\vec{\eta}$ . O vetor  $\theta\vec{\eta}$  é, por isso, denominado *vetor de rotação* associado ao elemento  $R(\theta, \vec{\eta}) \in \text{SO}(3)$ .

A fórmula de Rodrigues (22.57) também pode ser obtida com o uso do Cálculo Funcional (Teorema Espectral). Vide Exercício E. 22.99, página 1126.

Para uma prova mais geométrica de (22.59), siga os passos indicados no Exercício E. 22.100, página 1126. As expressões (22.58)–(22.59) são interessantes por exibirem explicitamente a ação da rotação  $R(\theta, \vec{\eta})$  sobre cada vetor  $\vec{\alpha} \in \mathbb{R}^3$ . ♣

**Prova da Proposição 22.5.** A equação (22.56) é evidente no caso  $\theta = 0$ . Vamos supor  $R(\theta, \vec{\eta}) \neq \mathbb{1}$  e, portanto,  $\theta \neq 0$ . Pela Proposição 22.3, página 1052, existe um subespaço unidimensional  $V_R$  que é deixado invariante por  $R(\theta, \vec{\eta})$ . É óbvio que  $R(\theta, \vec{\eta})\vec{\eta} = \vec{\eta}$ .

O que faremos para demonstrar nossa proposição é mostrar que  $\exp(\theta\vec{\eta} \cdot \vec{J})$  é uma matriz ortogonal, de determinante 1, e que mantém  $\vec{\eta}$  invariante e roda os vetores perpendiculares a  $\vec{\eta}$  de um ângulo  $\theta$  (no sentido anti-horário) em torno do eixo definido por  $\vec{\eta}$ . Com isso, podemos identificar  $R(\theta, \vec{\eta}) = \exp(\theta\vec{\eta} \cdot \vec{J})$ , como queremos.

Vamos abaixo calcular de modo mais explícito o que é a matriz  $\exp(\theta\vec{\eta} \cdot \vec{J})$  mas, antes disso, vamos demonstrar que  $\exp(\theta\vec{\eta} \cdot \vec{J}) \in \text{SO}(3)$ . Para isso, começamos com a observação que

$$\vec{\eta} \cdot \vec{J} := \eta_1 J_1 + \eta_2 J_2 + \eta_3 J_3 = \begin{pmatrix} 0 & -\eta_3 & \eta_2 \\ \eta_3 & 0 & -\eta_1 \\ -\eta_2 & \eta_1 & 0 \end{pmatrix} \quad (22.60)$$

é uma matriz antissimétrica, ou seja,  $(\vec{\eta} \cdot \vec{J})^T = -\vec{\eta} \cdot \vec{J}$ . Note-se que seus elementos de matriz são dados por

$$(\vec{\eta} \cdot \vec{J})_{ij} = -\sum_{k=1}^3 \varepsilon_{ijk} \eta_k. \quad (22.61)$$

Assim,

$$\left[ \exp(\theta\vec{\eta} \cdot \vec{J}) \right]^T = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\theta^m}{m!} \left( [\vec{\eta} \cdot \vec{J}]^T \right)^m = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-\theta)^m}{m!} (\vec{\eta} \cdot \vec{J})^m = \exp(-\theta\vec{\eta} \cdot \vec{J}) = \left[ \exp(\theta\vec{\eta} \cdot \vec{J}) \right]^{-1}.$$

Isso demonstrou que  $\exp(\theta\vec{\eta} \cdot \vec{J})$  é uma matriz ortogonal, ou seja, sua transposta é igual a sua inversa. Resta-nos mostrar que  $\det(\exp(\theta\vec{\eta} \cdot \vec{J})) = 1$ . Como  $\exp(\theta\vec{\eta} \cdot \vec{J})$  é ortogonal, seu determinante é  $\pm 1$ . Assim, como  $\det(\exp(\theta\vec{\eta} \cdot \vec{J}))$  depende continuamente de  $\theta$  (para isso, vide, por exemplo, a expressão (22.64), abaixo), temos que  $\det(\exp(\theta\vec{\eta} \cdot \vec{J}))$  é constante para todo  $\theta \in (-\pi, \pi]$ . Calculando em  $\theta = 0$ , teremos

$$\det(\exp(\theta\vec{\eta} \cdot \vec{J})) = \det(\exp(0\vec{\eta} \cdot \vec{J})) = \det(\mathbb{1}) = 1.$$

Um segundo argumento que pode ser empregado para se provar o mesmo fato é evocar a Proposição 9.14, página 373, segundo a qual vale

$$\det(\exp(\theta\vec{\eta} \cdot \vec{J})) = e^{\theta \text{Tr}(\vec{\eta} \cdot \vec{J})}.$$

Como  $\vec{\eta} \cdot \vec{J}$  é uma matriz antissimétrica, segue que  $\text{Tr}(\vec{\eta} \cdot \vec{J}) = 0$  (evidente por (22.60)) e, portanto,  $\det(\exp(\theta\vec{\eta} \cdot \vec{J})) = 1$ . Estabelecemos, assim,  $\exp(\theta\vec{\eta} \cdot \vec{J}) \in \text{SO}(3)$  para todo  $\theta$  e todo  $\vec{\eta}$ .

Vamos agora expressar de modo mais explícito a matriz  $\exp(\theta\vec{\eta} \cdot \vec{J})$ . Para isso, será importante mostrar que

$$(\vec{\eta} \cdot \vec{J})^3 = -(\vec{\eta} \cdot \vec{J}). \quad (22.62)$$

A maneira pedestre de mostrar isso é por verificação explícita. De fato, por (22.60),

$$\left(\vec{\eta} \cdot \vec{J}\right)^2 = \begin{pmatrix} \eta_1^2 - 1 & \eta_1 \eta_2 & \eta_1 \eta_3 \\ \eta_1 \eta_2 & \eta_2^2 - 1 & \eta_3 \eta_2 \\ \eta_1 \eta_3 & \eta_3 \eta_2 & \eta_3^2 - 1 \end{pmatrix}. \quad (22.63)$$

Multiplicando-se novamente por  $\vec{\eta} \cdot \vec{J}$ , obtém-se (22.62). Temos, então, o seguinte: para todo  $k \in \mathbb{N}$ , vale

$$\left(\vec{\eta} \cdot \vec{J}\right)^{2k} = (-1)^{k+1} \left(\vec{\eta} \cdot \vec{J}\right)^2 \quad \text{e} \quad \left(\vec{\eta} \cdot \vec{J}\right)^{2k+1} = (-1)^k \left(\vec{\eta} \cdot \vec{J}\right).$$

Logo,

$$\begin{aligned} \exp\left(\theta \vec{\eta} \cdot \vec{J}\right) &= \mathbb{1} + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\theta^m}{m!} \left(\vec{\eta} \cdot \vec{J}\right)^m \\ &= \mathbb{1} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\theta^{2k}}{(2k)!} \left(\vec{\eta} \cdot \vec{J}\right)^{2k} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\theta^{2k+1}}{(2k+1)!} \left(\vec{\eta} \cdot \vec{J}\right)^{2k+1} \\ &= \mathbb{1} + \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1} \theta^{2k}}{(2k)!}\right) \left(\vec{\eta} \cdot \vec{J}\right)^2 + \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \theta^{2k+1}}{(2k+1)!}\right) \vec{\eta} \cdot \vec{J} \\ &= \mathbb{1} + (1 - \cos(\theta)) \left(\vec{\eta} \cdot \vec{J}\right)^2 + \sin(\theta) \left(\vec{\eta} \cdot \vec{J}\right). \end{aligned}$$

Resumindo,

$$\exp\left(\theta \vec{\eta} \cdot \vec{J}\right) = \mathbb{1} + (1 - \cos(\theta)) \left(\vec{\eta} \cdot \vec{J}\right)^2 + \sin(\theta) \left(\vec{\eta} \cdot \vec{J}\right). \quad (22.64)$$

Seja agora  $\vec{\alpha} \in \mathbb{R}^3$ , arbitrário. Tem-se que

$$\left(\vec{\eta} \cdot \vec{J}\right) \vec{\alpha} = \vec{\eta} \times \vec{\alpha}. \quad (22.65)$$

**E. 22.42** *Exercício*. Verifique-a usando a forma explícita (22.60) de  $\vec{\eta} \cdot \vec{J}$  ou usando (22.61). ✱

Segue imediatamente de (22.65) que

$$\left(\vec{\eta} \cdot \vec{J}\right)^2 \vec{\alpha} = \vec{\eta} \times (\vec{\eta} \times \vec{\alpha}) \stackrel{(4.14)}{=} (\vec{\eta} \cdot \vec{\alpha}) \vec{\eta} - \vec{\alpha}, \quad (22.66)$$

onde, na segunda igualdade, usou-se a bem-conhecida identidade (4.14), página 235, bem como o fato que  $\|\vec{\eta}\| = 1$ . Retornando com isso a (22.64), temos imediatamente que

$$\exp\left(\theta \vec{\eta} \cdot \vec{J}\right) \vec{\alpha} = \vec{\alpha} + (1 - \cos(\theta)) \left(\vec{\eta} \times (\vec{\eta} \times \vec{\alpha})\right) + \sin(\theta) \vec{\eta} \times \vec{\alpha} \quad (22.67)$$

$$= \cos(\theta) \vec{\alpha} + (1 - \cos(\theta)) (\vec{\eta} \cdot \vec{\alpha}) \vec{\eta} + \sin(\theta) \vec{\eta} \times \vec{\alpha}. \quad (22.68)$$

Vamos agora provar que  $\exp\left(\theta \vec{\eta} \cdot \vec{J}\right)$  mantém o vetor  $\vec{\eta}$  invariante e roda os vetores ortogonais a  $\vec{\eta}$  por um ângulo  $\theta$  no sentido horário, o que nos permite identificar  $R(\theta, \vec{\eta}) = \exp\left(\theta \vec{\eta} \cdot \vec{J}\right)$ .

De (22.67) segue imediatamente que

$$\exp\left(\theta \vec{\eta} \cdot \vec{J}\right) \vec{\eta} = \vec{\eta},$$



ou seja, tal como  $R(\theta, \vec{\eta})$ , a matriz  $\exp(\theta \vec{\eta} \cdot \vec{J})$  mantém  $\vec{\eta}$  invariante para qualquer  $\theta$ . Tomemos agora um vetor unitário  $\vec{\zeta}$  que seja ortogonal a  $\vec{\eta}$ . Os vetores  $\vec{\zeta}$  e  $\vec{\eta} \times \vec{\zeta}$  são ambos unitários e formam uma base ortonormal no subespaço ortogonal a  $\vec{\eta}$ . Evocando (22.68), e usando que  $\vec{\eta} \cdot \vec{\zeta} = 0$ , que  $\vec{\eta} \cdot (\vec{\eta} \times \vec{\zeta}) = 0$  e que  $\vec{\eta} \times (\vec{\eta} \times \vec{\zeta}) = -\vec{\zeta}$ , temos

$$\begin{aligned}\exp(\theta \vec{\eta} \cdot \vec{J}) \vec{\zeta} &= \cos(\theta) \vec{\zeta} + \sin(\theta) (\vec{\eta} \times \vec{\zeta}), \\ \exp(\theta \vec{\eta} \cdot \vec{J}) (\vec{\eta} \times \vec{\zeta}) &= -\sin(\theta) \vec{\zeta} + \cos(\theta) (\vec{\eta} \times \vec{\zeta}),\end{aligned}$$

como facilmente se constata (faça-o!). Essas relações mostram-nos claramente que  $\exp(\theta \vec{\eta} \cdot \vec{J})$  age no subespaço gerado por  $\vec{\zeta}$  e  $\vec{\eta} \times \vec{\zeta}$  como uma rotação de um ângulo  $\theta$  no sentido anti-horário. Assim, podemos identificar  $R(\theta, \vec{\eta}) = \exp(\theta \vec{\eta} \cdot \vec{J})$ , o que completa a demonstração da Proposição 22.5. ■

Resumindo nossas conclusões,

$$\text{SO}(3) = \left\{ \exp(\theta \vec{\eta} \cdot \vec{J}), \quad \theta \in [0, \pi], \quad \vec{\eta} \in \mathbb{R}^3 \quad \text{com} \quad \|\vec{\eta}\| = 1 \right\}.$$

O leitor deve atentar para o fato que alguns elementos listados no conjunto à direita podem ser idênticos, vide comentário adiante.

A Proposição 22.5, página 1056, está dizendo-nos que todo elemento de  $\text{SO}(3)$  pode ser escrito como a exponencial de um elemento de sua álgebra de Lie. Isso constata um teorema geral (vide, por exemplo, [296]) que diz que se um grupo de Lie é compacto<sup>15</sup> e conexo e sua álgebra de Lie é semi-simples, a aplicação exponencial da sua álgebra de Lie é sobrejetora no grupo. De fato,  $\text{SO}(3)$  é compacto, conexo e  $\mathfrak{so}(3)$  é semi-simples.

Finalizamos com uma breve observação, um tanto evidente, mas que será evocada mais adiante:

**Proposição 22.6** *Seja  $\vec{\eta} \in \mathbb{R}^3$ ,  $\vec{\eta} = (\eta_1, \eta_2, \eta_3)$ . Então, a matriz  $\exp(\theta \vec{\eta} \cdot \vec{J})$  é igual à matriz identidade se e somente se  $\theta = 2\pi n$  para  $n \in \mathbb{Z}$ .* □

*Prova.* De (22.57) vemos que  $\exp(\theta \vec{\eta} \cdot \vec{J}) = \mathbb{1}$  se e somente se  $(1 - \cos(\theta)) (\vec{\eta} \cdot \vec{J})^2 + \sin(\theta) (\vec{\eta} \cdot \vec{J}) = 0$ . Agora, vemos por (22.60) e (22.63) que as matrizes  $\vec{\eta} \cdot \vec{J}$  e  $(\vec{\eta} \cdot \vec{J})^2$  são linearmente independentes (observe que  $\vec{\eta} \cdot \vec{J}$  tem apenas zeros na diagonal, ao contrário de  $(\vec{\eta} \cdot \vec{J})^2$ ). Logo, devemos ter  $\cos(\theta) = 1$  e  $\sin(\theta) = 0$ , o que se dá se e somente se  $\theta = 2\pi n$  para  $n \in \mathbb{Z}$ . ■

### • O espaço dos parâmetros do grupo $\text{SO}(3)$

Para continuar esta exposição sobre o grupo  $\text{SO}(3)$ , vamos descrever sua estrutura enquanto variedade. Como vimos, os elementos de  $\text{SO}(3)$  são parametrizados por pontos  $\theta \vec{\eta}$  de  $\mathbb{R}^3$ , sendo que  $\theta \in [0, \pi]$  e  $\|\vec{\eta}\| = 1$ . O conjunto de todos os pontos desse tipo compreende a esfera fechada de raio  $\pi$  centrada na origem. Para cada  $\vec{\eta}$  fixo, os dois pontos antípodas da superfície dessa esfera que estão na direção definida por  $\vec{\eta}$  são  $\pm \pi \vec{\eta}$ . É claro, porém, que tais pontos correspondem à mesma rotação: uma rotação de  $\pi$  em torno de um  $\vec{\eta}$  é o mesmo que uma rotação de  $\pi$  em torno de  $-\vec{\eta}$ . De fato, é trivial verificar por (22.64) que  $\exp(\pi \vec{\eta} \cdot \vec{J}) = \exp(-\pi \vec{\eta} \cdot \vec{J})$ . Assim,  $\text{SO}(3)$  corresponde nessa imagem ao espaço obtido tomando-se uma esfera fechada e identificando-se todos os pares de pontos antípodas de sua superfície.

Na linguagem da topologia e das variedades, o conjunto obtido por essa construção coincide com o chamado *espaço projetivo real*, denotado por  $\mathbb{RP}^3$ , que é definido como o conjunto de todas as linhas retas em  $\mathbb{R}^4$  que passam pela origem. Com mais generalidade, o conjunto  $\mathbb{RP}^n$  é a variedade topológica (diferenciável)  $n$ -dimensional formada pelo conjunto de todas as linhas retas de  $\mathbb{R}^{n+1}$  que passam pela origem. O espaço projetivo real  $\mathbb{RP}^n$  é definido e analisado na Seção 35.4.6, página 1697. À página 1699 esclarecemos por que  $\mathbb{RP}^n$  pode ser também entendido como o conjunto obtido tomando-se uma bola fechada em  $\mathbb{R}^{n+1}$  e identificando-se os pontos antípodas de sua superfície.

<sup>15</sup>Para a definição da noção de compacidade e suas propriedades, vide Seção 34.3, página 1579.

$SO(3)$  é homeomorfo, enquanto variedade, ao espaço projetivo  $\mathbb{RP}^3$ . Como veremos na próxima seção, o grupo  $SU(2)$ , que é fortemente aparentado a  $SO(3)$ , tem outra estrutura:  $SU(2)$  é homeomorfo a  $S^3$ , a superfície da bola de raio 1 em  $\mathbb{R}^4$ . Para uma introdução ao estudo de variedades, vide Capítulo 35, página 1642, e outras referências lá citadas.

### 22.3.2.1 Mais Propriedades das Matrizes de $SO(3)$

As fórmulas de Rodrigues (22.57) e (22.58)–(22.59) permitem a obtenção de outros resultados relevantes sobre as matrizes que compõem o grupo  $SO(3)$ . Nesta seção exibiremos alguns deles.

**Proposição 22.7** *Sejam  $\vec{\eta}_1$  e  $\vec{\eta}_2$  dois vetores unitários de  $\mathbb{R}^3$ . Então, existe  $R_{12} \equiv R_{12}(\theta_{12}, \vec{\eta}_{12}) \in SO(3)$  tal que  $R_{12}\vec{\eta}_1 = \vec{\eta}_2$ , ou seja, existe uma matriz de  $SO(3)$  que leva  $\vec{\eta}_1$  em  $\vec{\eta}_2$ .*

1. No caso em que  $\vec{\eta}_1 = \vec{\eta}_2$  podemos escolher (evidentemente)  $R_{12} = \mathbb{1}$ , ou seja,  $\theta_{12} = 0$  e  $\vec{\eta}_{12}$  arbitrário.
2. No caso em que  $\vec{\eta}_1 = -\vec{\eta}_2$  podemos escolher  $\theta_{12} = \pi$  e  $\vec{\eta}_{12}$  qualquer vetor que seja ortogonal a  $\vec{\eta}_1$  (e, portanto, a  $\vec{\eta}_2$ ).
3. No caso em que  $\vec{\eta}_1 \neq \vec{\eta}_2$  e  $\vec{\eta}_1 \neq -\vec{\eta}_2$ , podemos escolher

$$R_{12} = R(\theta_{12}, \vec{\eta}_{12}), \quad \text{com } \theta_{12} = \arccos(\vec{\eta}_1 \cdot \vec{\eta}_2) \in [0, \pi] \quad \text{e} \quad \vec{\eta}_{12} = \frac{\vec{\eta}_1 \times \vec{\eta}_2}{\|\vec{\eta}_1 \times \vec{\eta}_2\|}.$$

□

*Prova.* O caso em que  $\vec{\eta}_1 = \vec{\eta}_2$  é trivial. No caso em que  $\vec{\eta}_1 = -\vec{\eta}_2$  a escolha  $\theta_{12} = \pi$  fornece por (22.59)

$$R(\theta_{12}, \vec{\eta}_{12})\vec{\eta}_1 = -\vec{\eta}_1 + 2(\vec{\eta}_{12} \cdot \vec{\eta}_1)\vec{\eta}_{12},$$

que vale  $-\vec{\eta}_1 = \vec{\eta}_2$  se tivermos  $\vec{\eta}_{12} \cdot \vec{\eta}_1 = 0$ , ou seja, se  $\vec{\eta}_{12}$  for ortogonal a  $\vec{\eta}_1$  (e, portanto, a  $\vec{\eta}_2$ ).

O único caso que realmente requer algum esforço de demonstração é o caso em que  $\vec{\eta}_1 \neq \vec{\eta}_2$  e  $\vec{\eta}_1 \neq -\vec{\eta}_2$ . A escolha  $\theta_{12} = \arccos(\vec{\eta}_1 \cdot \vec{\eta}_2) \in [0, \pi]$  significa que  $\theta_{12}$  é o ângulo formado entre  $\vec{\eta}_1$  e  $\vec{\eta}_2$ . Logo,  $\cos \theta_{12} = \vec{\eta}_1 \cdot \vec{\eta}_2$  e  $\sin \theta_{12} = \|\vec{\eta}_1 \times \vec{\eta}_2\|$ . Portanto, por (22.59), temos

$$R(\theta_{12}, \vec{\eta}_{12})\vec{\eta}_1 \stackrel{(22.59)}{=} (\vec{\eta}_1 \cdot \vec{\eta}_2)\vec{\eta}_1 + (\vec{\eta}_1 \times \vec{\eta}_2) \times \vec{\eta}_1 \stackrel{(4.14)}{=} (\vec{\eta}_1 \cdot \vec{\eta}_2)\vec{\eta}_1 - (\vec{\eta}_1 \cdot \vec{\eta}_2)\vec{\eta}_1 + \vec{\eta}_2 = \vec{\eta}_2,$$

onde na primeira igualdade usamos também que  $\vec{\eta}_{12} \cdot \vec{\eta}_1 = 0$  (por ambos os vetores serem mutuamente ortogonais) e na penúltima usamos também o fato que  $\|\vec{\eta}_1\| = 1$ . ■

O que essa proposição diz é que  $SO(3)$  age transitivamente na esfera de raio 1 de  $\mathbb{R}^3$ : qualquer vetor unitário pode ser levado a qualquer outro vetor unitário por meio da ação de algum elemento de  $SO(3)$ .

O resultado a seguir é óbvio sob vários aspectos, mas ainda assim apresentamos uma prova do mesmo.

**Lema 22.3** *Se  $R \in SO(3)$ , vale*

$$R(\vec{\alpha} \times \vec{\beta}) = (R\vec{\alpha}) \times (R\vec{\beta}), \tag{22.69}$$

para todos  $\vec{\alpha}, \vec{\beta} \in \mathbb{R}^3$ . □

*Prova.* Seja  $R \equiv R(\theta, \vec{\eta})$  para algum vetor unitário  $\vec{\eta}$  e algum  $\theta \in [0, \pi]$ . Usando a bem conhecida identidade (4.14), página 235, é fácil ver que

$$\begin{aligned} (R(\vec{\alpha} \times \vec{\beta})) \times ((R\vec{\alpha}) \times (R\vec{\beta})) &\stackrel{(4.14)}{=} \left( (R(\vec{\alpha} \times \vec{\beta})) \cdot R\vec{\beta} \right) R\vec{\alpha} - \left( (R(\vec{\alpha} \times \vec{\beta})) \cdot R\vec{\alpha} \right) R\vec{\beta} \\ &= \left( (\vec{\alpha} \times \vec{\beta}) \cdot \vec{\beta} \right) R\vec{\alpha} - \left( (\vec{\alpha} \times \vec{\beta}) \cdot \vec{\alpha} \right) R\vec{\beta} = 0. \end{aligned}$$

Na segunda igualdade usamos o fato que  $R$  preserva produtos escalares e na terceira igualdade usamos o fato que  $\vec{\alpha} \times \vec{\beta}$  é ortogonal a  $\vec{\alpha}$  e a  $\vec{\beta}$ . Isso mostrou que  $R(\vec{\alpha} \times \vec{\beta}) = \lambda \left( (R\vec{\alpha}) \times (R\vec{\beta}) \right)$  para alguma constante  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

Como  $R$  preserva a norma dos vetores, temos

$$\|R(\vec{\alpha} \times \vec{\beta})\| = \|\vec{\alpha} \times \vec{\beta}\| = \|\vec{\alpha}\| \|\vec{\beta}\| \sin \varphi ,$$

onde  $\varphi$  é o ângulo entre  $\vec{\alpha}$  e  $\vec{\beta}$ . Temos também

$$\|(R\vec{\alpha}) \times (R\vec{\beta})\| = \|R\vec{\alpha}\| \|R\vec{\beta}\| \sin \varphi' = \|\vec{\alpha}\| \|\vec{\beta}\| \sin \varphi' ,$$

onde  $\varphi'$  é o ângulo entre  $R\vec{\alpha}$  e  $R\vec{\beta}$ . Como  $R$  também preserva o ângulo entre dois vetores (pois preserva suas normas e seu produto escalar), tem-se  $\varphi' = \varphi$ . Disso segue imediatamente que  $\lambda = \pm 1$ . A matriz  $R \equiv R(\theta, \vec{\eta})$  é contínua em  $\theta$ . Como  $\lambda$  pode assumir apenas dois valores, a continuidade diz-nos que  $\lambda$  não se altera em uma vizinhança aberta de  $\theta = 0$  (em verdade em parte alguma, pela compacidade e conexidade do grupo). Para  $\theta = 0$  temos  $R = \mathbb{1}$ , em cujo caso vale evidentemente  $\lambda = 1$ . Esse valor de  $\lambda$ , portanto, é o mesmo para todo  $\theta$  e, assim, estabeleceu-se que  $R(\vec{\alpha} \times \vec{\beta}) = (R\vec{\alpha}) \times (R\vec{\beta})$ . ■

**E. 22.43** *Exercício.* Há outras provas do Lema 22.3. Prove-o, por exemplo, usando diretamente (22.58)–(22.59). Vide também Exercício E. 22.45, página 1062. ✱

Uma consequência do Lema 22.3 é a seguinte proposição importante:

**Proposição 22.8** *Se  $R_0 \in \text{SO}(3)$  vale*

$$R_0 R(\theta, \vec{\eta}) R_0^{-1} = R(\theta, R_0 \vec{\eta}) \quad (22.70)$$

*para todo vetor unitário  $\vec{\eta} \in \mathbb{R}^3$  e todo  $\theta \in [0, \pi]$ . Assim, tem-se*

$$\exp \left( \theta \left( R_0 \vec{\eta} \right) \cdot \vec{J} \right) = R_0 \exp \left( \theta \vec{\eta} \cdot \vec{J} \right) R_0^{-1} = \exp \left( \theta \vec{\eta} \cdot \left( R_0 \vec{J} R_0^{-1} \right) \right) . \quad (22.71)$$

□

**Prova.** Seja  $\vec{\alpha} \in \mathbb{R}^3$ . Temos por (22.59)

$$\begin{aligned} R(\theta, R_0 \vec{\eta}) R_0 \vec{\alpha} &\stackrel{(22.59)}{=} \cos(\theta) (R_0 \vec{\alpha}) + (1 - \cos(\theta)) \left( (R_0 \vec{\eta}) \cdot (R_0 \vec{\alpha}) \right) R_0 \vec{\eta} + \sin(\theta) \left( (R_0 \vec{\eta}) \times (R_0 \vec{\alpha}) \right) \\ &= \cos(\theta) R_0 \vec{\alpha} + (1 - \cos(\theta)) (\vec{\eta} \cdot \vec{\alpha}) R_0 \vec{\eta} + \sin(\theta) R_0 (\vec{\eta} \times \vec{\alpha}) \\ &= R_0 \left[ \cos(\theta) (\vec{\alpha}) + (1 - \cos(\theta)) (\vec{\eta} \cdot \vec{\alpha}) \vec{\eta} + \sin(\theta) (\vec{\eta} \times \vec{\alpha}) \right] \\ &\stackrel{(22.59)}{=} R_0 R(\theta, \vec{\eta}) \vec{\alpha} . \end{aligned}$$

sendo que na segunda igualdade usamos que  $R_0$  preserva produtos escalares e usamos (22.69). Como isso vale para todo  $\vec{\alpha} \in \mathbb{R}^3$ , estabelecemos que  $R(\theta, R_0 \vec{\eta}) R_0 = R_0 R(\theta, \vec{\eta})$ , completando a demonstração de (22.70). A relação (22.71) segue disso e do fato provado alhures que  $P \exp(A) P^{-1} = \exp(P A P^{-1})$  para quaisquer matrizes quadradas  $A$  e  $P$  de mesma ordem ( $P$  inversível). ■

As Proposições 22.7 e 22.8 têm o seguinte corolário evidente:

**Corolário 22.1** *Sejam  $\vec{\eta}_1$  e  $\vec{\eta}_2$  dois vetores unitários de  $\mathbb{R}^3$ . Então, existe  $R_{12} \in \text{SO}(3)$  tal que*

$$R(\theta, \vec{\eta}_2) = R_{12} R(\theta, \vec{\eta}_1) R_{12}^{-1} .$$

*A expressão para a matriz  $R_{12} \in \text{SO}(3)$  é a mesma descrita na Proposição 22.7.* □

Outra consequência útil da Proposição 22.8 é a identidade

$$(R_0 \vec{\eta}) \cdot \vec{J} = R_0(\vec{\eta} \cdot \vec{J})R_0^{-1} = \vec{\eta} \cdot (R_0 \vec{J} R_0^{-1}), \quad (22.72)$$

que pode ser provada diferenciando-se os termos da igualdade (22.71) em relação a  $\theta$  e tomando-se  $\theta = 0$ . A relação (22.72) é válida para qualquer  $R_0 \in \text{SO}(3)$  e qualquer  $\vec{\eta} \in \mathbb{R}^3$  (aqui não é necessário impor  $\|\vec{\eta}\| = 1$ , por razões óbvias).

**E. 22.44 Exercício.** A relação (22.72) diz-nos que  $R(\theta, \vec{\eta})(\vec{\alpha} \cdot \vec{J})R(-\theta, \vec{\eta}) = (R(\theta, \vec{\eta})\vec{\alpha}) \cdot \vec{J}$ . Usando a fórmula de Rodrigues (22.59), obtenha a relação

$$R(\theta, \vec{\eta})(\vec{\alpha} \cdot \vec{J})R(-\theta, \vec{\eta}) = \cos(\theta)(\vec{\alpha} \cdot \vec{J}) + (1 - \cos(\theta))(\vec{\eta} \cdot \vec{\alpha})(\vec{\eta} \cdot \vec{J}) + \sin(\theta)(\vec{\eta} \times \vec{\alpha}) \cdot \vec{J}. \quad (22.73)$$

Essa relação é particularmente útil no caso em que  $\vec{\alpha}$  e  $\vec{\eta}$  são vetores da base canônica  $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$  de  $\mathbb{R}^3$ . Mostre que

$$R_k(\theta)J_l R_k(-\theta) = \left(\delta_{k,l} + (1 - \delta_{k,l})\cos(\theta)\right)J_l + \sin(\theta)\sum_{m=1}^3 \varepsilon_{klm}J_m, \quad (22.74)$$

tomando  $\vec{\eta} = \mathbf{e}_k$  e  $\vec{\alpha} = \mathbf{e}_l$  na relação (22.73), com  $k, l \in \{1, 2, 3\}$ . ✱

**E. 22.45 Exercício.** Demonstre a relação (22.69) usando (22.72) e as relações de comutação (22.52). ✱

### • Fixando rotações com pares de vetores ortonormais

Vamos denotar por  $\mathbf{e}_k$ ,  $k = 1, 2, 3$ , os vetores da base canônica de  $\mathbb{R}^3$ :  $\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ,  $\mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$  e  $\mathbf{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ . Naturalmente,  $(\mathbf{e}_k)_l = \delta_{kl}$ .

Se  $R \in \text{SO}(3)$ , suas colunas são as imagens da base canônica por  $R$ : se

$$R = \begin{pmatrix} R_{11} & R_{12} & R_{13} \\ R_{21} & R_{22} & R_{23} \\ R_{31} & R_{32} & R_{33} \end{pmatrix}, \quad \text{então} \quad \begin{pmatrix} R_{1k} \\ R_{2k} \\ R_{3k} \end{pmatrix} = R\mathbf{e}_k.$$

Assim, a imagem de  $R$  nos três vetores da base canônica fixa  $R$  univocamente. Em verdade, é suficiente considerar a ação em apenas dois desses vetores pois tem-se, por exemplo,  $R\mathbf{e}_3 = R(\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2) = (R\mathbf{e}_1) \times (R\mathbf{e}_2)$  (pelo Lema 22.3, página 1060). A recíproca dessa afirmação é também verdadeira:

**Proposição 22.9** *Sejam  $\mathbf{e}'_1$  e  $\mathbf{e}'_2$  dois vetores ortonormais, ou seja, satisfazendo  $\mathbf{e}'_a \cdot \mathbf{e}'_b = \delta_{ab}$ . Então, existe uma matriz  $R \in \text{SO}(3)$ , única, tal que  $R\mathbf{e}_1 = \mathbf{e}'_1$ ,  $R\mathbf{e}_2 = \mathbf{e}'_2$  e  $R\mathbf{e}_3 = \mathbf{e}'_1 \times \mathbf{e}'_2$ .* □

*Prova.* Seja  $\mathbf{e}'_3 := \mathbf{e}'_1 \times \mathbf{e}'_2$ . Como  $\mathcal{E} \equiv \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$  e  $\mathcal{E}' \equiv \{\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3\}$  são bases em  $\mathbb{R}^3$  podemos expandir qualquer vetor  $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$  em ambas:  $\vec{x} = x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + x_3\mathbf{e}_3 = x'_1\mathbf{e}'_1 + x'_2\mathbf{e}'_2 + x'_3\mathbf{e}'_3$ , com  $x_k = \vec{x} \cdot \mathbf{e}_k$  e  $x'_k = \vec{x} \cdot \mathbf{e}'_k$ ,  $k = 1, 2, 3$ .

Afirmamos que a matriz  $R$  procurada tem elementos de matriz dados por

$$R_{ij} = \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}'_j, \quad i, j = 1, 2, 3. \quad (22.75)$$

Antes de provarmos que a mesma pertence a  $\text{SO}(3)$ , calculemos sua ação sobre os vetores da base canônica. Teremos

$$(R\mathbf{e}_k)_i = \sum_{j=1}^3 R_{ij}(\mathbf{e}_k)_j = \sum_{j=1}^3 R_{ij}\delta_{jk} = R_{ik} = \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}'_k.$$

Logo,

$$R\mathbf{e}_k = \sum_{i=1}^3 (R\mathbf{e}_k)_i \mathbf{e}_i = \sum_{i=1}^3 (\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}'_k) \mathbf{e}_i = \mathbf{e}'_k, \quad k = 1, 2, 3.$$

Como  $\mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2$ , o fato que  $R\mathbf{e}_3 = \mathbf{e}'_3$  já seguiria diretamente do Lema 22.3, página 1060.

Da definição vê-se que a  $k$ -ésima coluna de  $R$  é o vetor  $\mathbf{e}'_k$  (na base  $\mathcal{E}$ ). Com isso, a condição de ortogonalidade  $RR^T = \mathbb{1}$  segue da ortonormalidade dos elementos de  $\mathcal{E}'$ . A condição  $\det(R) = 1$  segue do fato de  $\mathcal{E}'$  ser positivamente orientado. ■

A Proposição 22.9 será relevante para nossa discussão sobre os ângulos de Euler, a ser feita mais abaixo.

Resumimos a discussão acima da seguinte forma:

**Corolário 22.2** *O grupo  $\text{SO}(3)$  pode ser bijetivamente associado ao conjunto de todos pares ordenados  $(\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$  com  $\mathbf{e}'_i \cdot \mathbf{e}'_j = \delta_{ij}$ ,  $i, j = 1, 2$ .* □

Os vetores unitários  $\mathbf{e}'_1$  podem ser associados bijetivamente a pontos da esfera unitária  $\mathbb{S}^2$ . Para cada  $\mathbf{e}'_1$ , os vetores  $\mathbf{e}'_2$  que são ortogonais a  $\mathbf{e}'_1$  podem ser bijetivamente associados ao círculo unitário  $\mathbb{S}^1$ . Assim, concluímos que  $\text{SO}(3) \simeq \mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1$ .

### 22.3.2.2 $\text{SO}(3)$ e os Ângulos de Euler

Nesta seção expomos mais uma forma de expressar as matrizes de rotação  $R \in \text{SO}(3)$ , desta vez em termos dos chamados *ângulos de Euler*. Essa nova forma é relevante na descrição do movimento de corpos rígidos na Mecânica Clássica, na Astronomia (Dinâmica Planetária) e também surge no contexto da Mecânica Quântica. Algumas dessas aplicações à Mecânica Clássica serão discutidas na Seção 23.4, página 1174. Usaremos diversos resultados anteriores, especialmente da Seção 22.3.2.1, página 1060, mas começamos com mais alguns resultados preparatórios.

#### • Mais alguns resultados úteis sobre rotações

**Proposição 22.10** *Sejam  $\vec{\alpha}$  e  $\vec{\beta}$  dois vetores unitários de  $\mathbb{R}^3$  e seja  $R(\theta, \vec{\eta}) \in \text{SO}(3)$  a matriz de rotação por um ângulo  $\theta$  em torno de um terceiro vetor unitário  $\vec{\eta}$ . Então, existirá um ângulo  $\theta_0$  tal que  $R(\theta_0, \vec{\eta})\vec{\alpha}$  é ortogonal a  $\vec{\beta}$ , ou seja,  $\langle R(\theta_0, \vec{\eta})\vec{\alpha}, \vec{\beta} \rangle_{\mathbb{R}} = 0$ , se e somente se a condição*

$$(\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta})^2 - 2(\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta})(\vec{\eta} \cdot \vec{\alpha})(\vec{\eta} \cdot \vec{\beta}) + ((\vec{\alpha} \times \vec{\beta}) \cdot \vec{\eta})^2 \geq 0 \quad (22.76)$$

for satisfeita. □

Prova. Por (22.59) tem-se

$$\langle R(\theta, \vec{\eta})\vec{\alpha}, \vec{\beta} \rangle_{\mathbb{R}} = \cos(\theta)\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} + (1 - \cos(\theta))(\vec{\eta} \cdot \vec{\alpha})(\vec{\eta} \cdot \vec{\beta}) + \sin(\theta)(\vec{\alpha} \times \vec{\beta}) \cdot \vec{\eta}.$$

(Acima usamos que  $(\vec{\eta} \times \vec{\alpha}) \cdot \vec{\beta} = (\vec{\alpha} \times \vec{\beta}) \cdot \vec{\eta}$ , identidade (4.13), página 235). Desejamos, portanto, saber se existe um ângulo  $\theta$  tal que

$$\cos(\theta)[\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} - (\vec{\eta} \cdot \vec{\alpha})(\vec{\eta} \cdot \vec{\beta})] + \sin(\theta)[(\vec{\alpha} \times \vec{\beta}) \cdot \vec{\eta}] = -(\vec{\eta} \cdot \vec{\alpha})(\vec{\eta} \cdot \vec{\beta}). \quad (22.77)$$

Afirmamos que, para  $A$  e  $B$  constantes reais, a imagem da função

$$f(\theta) = A \cos(\theta) + B \sin(\theta), \quad \theta \in \mathbb{R},$$

é o intervalo fechado  $\left[-\sqrt{A^2 + B^2}, \sqrt{A^2 + B^2}\right]$ . Se  $\sqrt{A^2 + B^2} = 0$  essa afirmação é óbvia (pois aí  $A = B = 0$  e  $f$  é identicamente nula). Se  $\sqrt{A^2 + B^2} \neq 0$ , defina-se  $\sin(\delta) := A/\sqrt{A^2 + B^2}$  e  $\cos(\delta) := B/\sqrt{A^2 + B^2}$  e teremos

$$f(\theta) = \sqrt{A^2 + B^2}(\cos(\theta)\sin(\delta) + \sin(\theta)\cos(\delta)) = \sqrt{A^2 + B^2}\sin(\theta + \delta),$$

o que torna a afirmação evidente.

Adotando-se  $A = \vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} - (\vec{\eta} \cdot \vec{\alpha})(\vec{\eta} \cdot \vec{\beta})$  e  $B = (\vec{\alpha} \times \vec{\beta}) \cdot \vec{\eta}$ , a equação (22.77) será satisfeita para algum ângulo  $\theta_0$  se e somente se

$$-(\vec{\eta} \cdot \vec{\alpha})(\vec{\eta} \cdot \vec{\beta}) \in \left[-\sqrt{A^2 + B^2}, \sqrt{A^2 + B^2}\right],$$

ou seja, se e somente se  $(\vec{\eta} \cdot \vec{\alpha})^2 (\vec{\eta} \cdot \vec{\beta})^2 \leq A^2 + B^2$ . Expandindo-se o lado direito, vê-se facilmente que essa condição é idêntica à condição (22.76) ■

O corolário a seguir será usado quando da nossa discussão sobre a parametrização de  $\text{SO}(3)$  em termos dos chamados *ângulos de Euler*.

**Corolário 22.3** *Sejam  $\vec{\alpha}$  e  $\vec{\beta}$  dois vetores unitários de  $\mathbb{R}^3$  e seja  $R(\theta, \vec{\eta}) \in \text{SO}(3)$  a matriz de rotação por um ângulo  $\theta$  em torno de um terceiro vetor unitário  $\vec{\eta}$ . Assuma que  $\vec{\eta}$  é ortogonal a  $\vec{\alpha}$ . Então, existirá um ângulo  $\theta_0$  tal que  $R(\theta_0, \vec{\eta})\vec{\alpha}$  é ortogonal a  $\vec{\beta}$ , ou seja,  $\langle R(\theta_0, \vec{\eta})\vec{\alpha}, \vec{\beta} \rangle_{\mathbb{R}} = 0$ . □*

**Prova.** Sob a hipótese que  $\vec{\eta} \cdot \vec{\alpha} = 0$  a condição (22.76) fica  $(\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta})^2 + ((\vec{\alpha} \times \vec{\beta}) \cdot \vec{\eta})^2 \geq 0$ , a qual, evidentemente, é sempre satisfeita. ■

O Corolário 22.3 é geometricamente intuitivo, mas é preciso destacar que a condição  $\vec{\eta} \cdot \vec{\alpha} = 0$  é importante. Se os três vetores  $\vec{\eta}$ ,  $\vec{\alpha}$  e  $\vec{\beta}$  forem próximos, ou seja, quase-paralelos, então  $R(\theta, \vec{\eta})\vec{\alpha}$  pode nunca ser ortogonal a  $\vec{\beta}$ : nesse caso, o cone descrito por  $R(\theta, \vec{\eta})\vec{\alpha}$  quando  $\theta$  varia pode nunca interceptar o plano ortogonal a  $\vec{\beta}$  que passa pela origem.

### • Parametrização de rotações em termos de ângulos de Euler

Vamos agora apresentar o resultado principal da presente seção: a parametrização de rotações em  $\mathbb{R}^3$  em termos dos chamados *ângulos de Euler*.

Seja  $R \in \text{SO}(3)$ , sejam  $\mathbf{e}_k$ ,  $k = 1, 2, 3$ , os vetores da base canônica de  $\mathbb{R}^3$ . No que segue, denotaremos por  $\mathbf{e}'_k$  o vetor unitário obtido após a ação de  $R$  sobre  $\mathbf{e}_k$ , ou seja,  $\mathbf{e}'_k := R\mathbf{e}_k$ ,  $k = 1, 2, 3$ . Os vetores  $\{\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3\}$  compõem também, evidentemente, uma base ortonormal em  $\mathbb{R}^3$ . Para o acompanhamento do que segue a Figura 22.1, página 1066, deve ser de utilidade.

**Teorema 22.8 (Parametrização de Rotações em Termos dos Ângulos de Euler)** *Seja  $R \in \text{SO}(3)$  e sejam  $\mathbf{e}_k$ ,  $k = 1, 2, 3$ , os vetores da base canônica de  $\mathbb{R}^3$  e vamos assumir que  $\mathbf{e}'_3 = R\mathbf{e}_3 \neq \pm\mathbf{e}_3$ .*

*Então, existem três ângulos  $\theta \in (0, \pi)$ ,  $\varphi \in [0, 2\pi)$  e  $\psi \in [0, 2\pi)$ , denominados ângulos de Euler, tais que  $R$  pode ser escrita na forma*

$$R = R(\varphi, \mathbf{e}_3)R(\theta, \mathbf{e}_1)R(\psi, \mathbf{e}_3) = R_3(\varphi)R_1(\theta)R_3(\psi), \quad (22.78)$$

(na segunda igualdade apenas empregamos a notação de (22.45), página 1054). A expressão (22.78) afirma que  $R$  é um produto de três rotações sucessivas: uma rotação de um ângulo  $\psi$  em torno do eixo 3 seguida de uma rotação de um ângulo  $\theta$  em torno do eixo 1 e, finalmente, seguida de uma rotação de um ângulo  $\varphi$  em torno do eixo 3.

Além disso,  $R$  também pode ser escrita na forma

$$R = R(\psi, \mathbf{e}'_3)R(\theta, \vec{\mathbf{n}})R(\varphi, \mathbf{e}_3), \quad (22.79)$$

onde  $\mathbf{e}'_3 := R\mathbf{e}_3 = R(\theta, \vec{\mathbf{n}})\mathbf{e}_3$  e onde

$$\vec{\mathbf{n}} := R(\varphi, \mathbf{e}_3)\mathbf{e}_1 = R(-\psi, \mathbf{e}'_3)\mathbf{e}'_1 \quad (22.80)$$

com  $\mathbf{e}'_1 := R\mathbf{e}_1$ . A parametrização (22.79) afirma que  $R$  pode ser escrita como o produto de três rotações sucessivas: uma rotação de um ângulo  $\varphi$  em torno do eixo canônico 3 seguida de uma rotação de um ângulo  $\theta$  em torno de um certo vetor unitário  $\vec{\mathbf{n}}$  situado no plano definido por  $\mathbf{e}_1$  e  $\mathbf{e}_2$  e seguida, finalmente, por uma rotação de um ângulo  $\psi$  em torno do eixo definido pelo vetor  $\mathbf{e}'_3 = R\mathbf{e}_3$ . Vide Figura 22.1, página 1066.

No caso em que  $\mathbf{e}'_3 = R\mathbf{e}_3 = +\mathbf{e}_3$ , podemos escrever  $R$  na forma

$$R = R(\varphi, \mathbf{e}_3), \quad (22.81)$$

com  $\varphi \in [0, 2\pi)$ , e no caso em que  $\mathbf{e}'_3 = R\mathbf{e}_3 = -\mathbf{e}_3$ , podemos escrever  $R$  na forma

$$R = R(\varphi, \mathbf{e}_3)R(\pi, \mathbf{e}_1), \quad (22.82)$$

com  $\varphi \in [0, \pi)$ . □

Antes de apresentarmos a demonstração desse teorema, façamos alguns comentários.

1. A forma explícita da matriz  $R$  em termos dos ângulos de Euler  $\theta$ ,  $\varphi$  e  $\psi$  fornecida pela relação (22.78) é exibida na expressão (22.90), página 1067.
2. Os três ângulos de Euler que surgem em (22.78) e (22.79) têm denominações especiais na Mecânica Clássica e na Dinâmica Planetária. O ângulo  $\theta$  é denominado *ângulo de nutação*, o ângulo  $\varphi$  é denominado *ângulo de precessão* e o ângulo  $\psi$  é denominado *ângulo de rotação (intrínseca)*. Vide [201], [15] ou [122] para o emprego dessa nomenclatura na Mecânica Clássica.
3. O vetor unitário  $\vec{n}$  que surge em (22.79) é denominado *vetor nodal*. Ele está situado na intersecção do plano definido por  $\mathbf{e}_1$  e  $\mathbf{e}_2$  com o plano definido por  $\mathbf{e}'_1 := R\mathbf{e}_1$  e  $\mathbf{e}'_2 := R\mathbf{e}_2$ . O vetor unitário  $\vec{n}$  pode ser obtido rodando o vetor  $\mathbf{e}_1$  por um ângulo  $\varphi$  em torno do eixo canônico 3 (vide a definição (22.80) e vide Figura 22.1, página 1066.) ou rodando o vetor  $\mathbf{e}'_1$  de um ângulo  $-\psi$  em torno do eixo  $\mathbf{e}'_3$  (vide a demonstração do Teorema 22.8, logo adiante, e vide Figura 22.1).
4. Na demonstração do Teorema 22.8, logo adiante, provaremos primeiramente a validade da parametrização (22.79) e dela obteremos a parametrização (22.78).
5. A parametrização (22.78) de uma rotação em termos de três rotações sucessivas em torno dos eixos 3, 1 e 3 pode ser estendida a quaisquer outros dois eixos canônicos distintos: se  $a, b \in \{1, 2, 3\}$  e  $a \neq b$ , então existem ângulos  $\theta_{ab}$ ,  $\varphi_{ab}$  e  $\psi_{ab}$  tais

$$R = R(\varphi_{ab}, \mathbf{e}_a)R(\theta_{ab}, \mathbf{e}_b)R(\psi_{ab}, \mathbf{e}_a), \quad (22.83)$$

Os ângulos  $\theta_{ab}$ ,  $\varphi_{ab}$  e  $\psi_{ab}$  são também denominados ângulos de Euler, mas é importante não confundí-los. A relação (22.79) também se generaliza analogamente. Há ao todo seis convenções distintas possíveis para as escolhas dos dois eixos distintos. Adiante demonstraremos apenas a validade da parametrização (22.78) (eixos 3–1–3) e a extensão a outros pares de eixos distintos ficará óbvia.

6. A convenção que adotamos, com os ângulos de Euler  $\theta$ ,  $\varphi$  e  $\psi$  e rotações nos eixos sucessivos 3–1–3 é a mais comum em textos de Mecânica Clássica, sendo adotada, por exemplo em [201], em [15] e em [122] (assim como em alguns textos de Teoria de Grupos, como [248]). Na Mecânica Quântica e na Física Nuclear a convenção mais adotada parece ser a 3–2–3. Áreas específicas da Engenharia adotam outras convenções que não a convenção 3–1–3. A referência [122] discute diversas convenções em um apêndice.
7. É também possível representar  $R \in \text{SO}(3)$  utilizando rotações sucessivas em torno de três eixos canônicos distintos, como por exemplo

$$R = R(\phi_1, \mathbf{e}_1)R(\phi_2, \mathbf{e}_2)R(\phi_3, \mathbf{e}_3).$$

Nesse caso, os ângulos de rotação são denominados *ângulos de Tait-Bryan*<sup>16</sup> e há seis convenções possíveis para a ordem dos três eixos ( $6 = 3!$ ). Seu emprego é mais comum nas Engenharias Naval, Aeronáutica, Aeroespacial e de Satélites. Muito confusamente, porém, na Engenharia Aeroespacial os ângulos de Tait-Bryan são denominados ângulos de Euler.

Não trataremos aqui dessa parametrização diretamente no caso do grupo  $\text{SO}(3)$ , mas na página 1075, apresentaremos essa parametrização para o grupo  $\text{SU}(2)$  (vide Exercício E. 22.53, página 1075, e, em particular, a relação (22.113)). Dada relação entre  $\text{SO}(3)$  e  $\text{SU}(2)$  a ser discutida na Seção 22.3.5, página 1076, a validade dessa parametrização no caso de  $\text{SU}(2)$  implica sua validade no caso de  $\text{SO}(3)$ .

8. Os ângulos de Euler  $(\theta, \varphi, \psi)$ , com  $\theta \in (0, \pi)$ ,  $\varphi \in [0, 2\pi)$  e  $\psi \in [0, 2\pi)$ , provêm  $\text{SO}(3)$  de uma carta local de coordenadas, mas para  $\theta = 0$  ou  $\theta = \pi$  os demais ângulos  $\varphi$  e  $\psi$  não estão definidos (tal “singularidade” do sistema de coordenadas composto pelos ângulos de Euler é similar ao que ocorre nos pólos com o familiar sistema de coordenadas esféricas no espaço tridimensional). Essa indefinição de  $\varphi$  e  $\psi$  quando  $\theta = 0$  ou  $\theta = \pi$  é a razão de assumirmos  $\mathbf{e}'_3 = R\mathbf{e}_3 \neq \pm\mathbf{e}_3$  no início do enunciado do Teorema 22.8.

**Prova do Teorema 22.8.** Seja  $R \in \text{SO}(3)$ , sejam  $\mathbf{e}_k$ ,  $k = 1, 2, 3$ , os vetores da base canônica de  $\mathbb{R}^3$  e sejam  $\mathbf{e}'_k := R\mathbf{e}_k$ ,  $k = 1, 2, 3$ , os vetores da base obtida após a ação de  $R$ . Para o acompanhamento do que segue a Figura 22.1, página 1066, deve ser de utilidade.

<sup>16</sup>Peter Guthrie Tait (1831–1901). George Hartley Bryan (1864–1928).

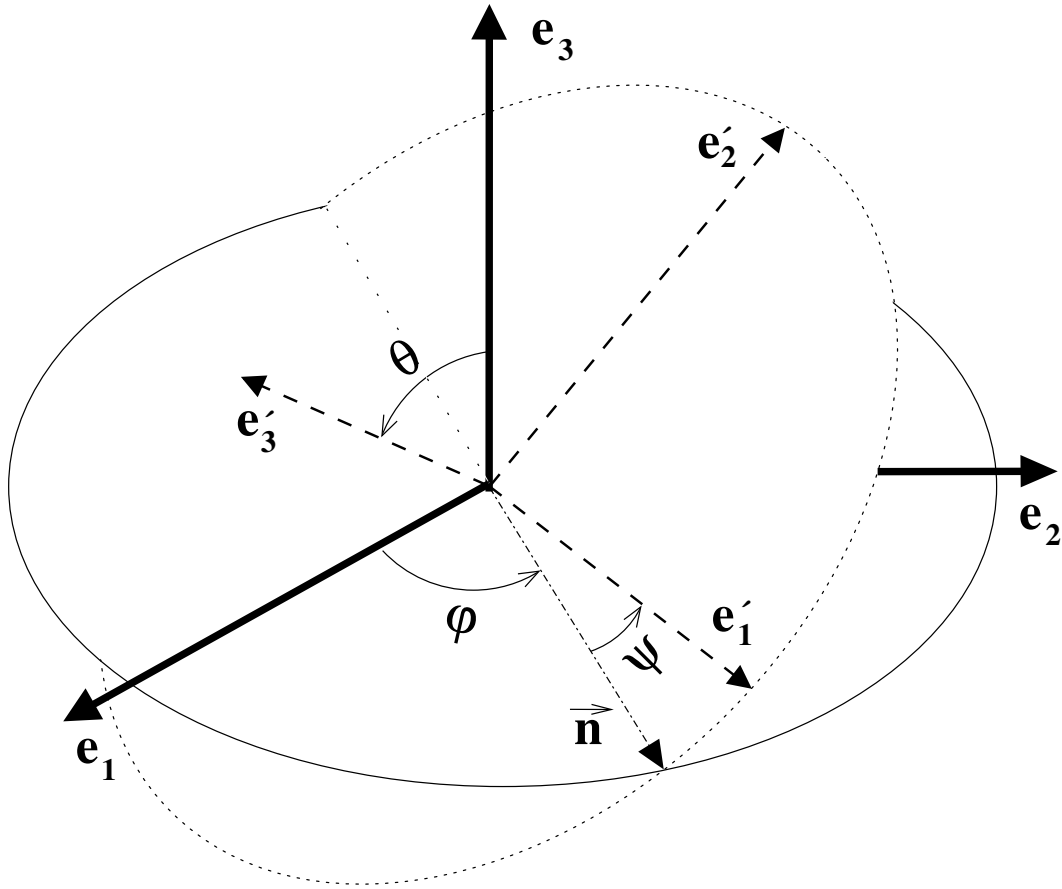


Figura 22.1: Esquema dos Ângulos de Euler. São indicados na figura os vetores unitários ortogonais  $\mathbf{e}_1$ ,  $\mathbf{e}_2$ ,  $\mathbf{e}_3$ , os correspondentes vetores “rodados” (por  $R$ )  $\mathbf{e}'_1$ ,  $\mathbf{e}'_2$ ,  $\mathbf{e}'_3$ , o vetor nodal  $\vec{n}$  e os ângulos de Euler  $\theta$  (ângulo de nutação),  $\varphi$  (ângulo de precessão) e  $\psi$  (ângulo de rotação (intrínseca)). Os diversos vetores unitários não estão desenhados na mesma escala. O vetor nodal  $\vec{n}$  está localizado na intersecção do plano gerado por  $\mathbf{e}_1$  e  $\mathbf{e}_2$  com o plano gerado por  $\mathbf{e}'_1$  e  $\mathbf{e}'_2$ . O ângulo  $\theta$  é formado entre  $\mathbf{e}_3$  e  $\mathbf{e}'_3$ . O ângulo  $\varphi$  é formado entre  $\mathbf{e}_1$  e  $\vec{n}$ . O ângulo  $\psi$  é formado entre  $\vec{n}$  e  $\mathbf{e}'_1$ .

Vamos primeiramente assumir que  $\mathbf{e}'_3 = R\mathbf{e}_3 \neq \pm\mathbf{e}_3$  e deixar os casos  $\mathbf{e}'_3 = R\mathbf{e}_3 = \pm\mathbf{e}_3$  para o final.

Como  $\mathbf{e}'_3$  e  $\mathbf{e}'_1$  são ortogonais, podemos evocar o Corolário 22.3, página 1064, (adotando-se  $\vec{\eta} \equiv \mathbf{e}'_3$ ,  $\vec{\alpha} \equiv \mathbf{e}'_1$  e  $\vec{\beta} \equiv \mathbf{e}_3$ ) e afirmar que existe algum ângulo  $-\psi$  tal que  $R(-\psi, \mathbf{e}'_3)\mathbf{e}'_1$  é ortogonal a  $\mathbf{e}_3$ . Se assim for, o vetor  $R(-\psi, \mathbf{e}'_3)\mathbf{e}'_1$  está no plano gerado por  $\mathbf{e}_1$  e  $\mathbf{e}_2$  e, portanto, pode ser alcançado a partir de  $\mathbf{e}_1$  por uma rotação de algum ângulo  $\varphi$  em torno de  $\mathbf{e}_3$ . Vale, portanto,

$$R(-\psi, \mathbf{e}'_3)\mathbf{e}'_1 = R(\varphi, \mathbf{e}_3)\mathbf{e}_1. \quad (22.84)$$

É fácil ao leitor convencer-se (vide Figura 22.1, página 1066) que podemos limitar  $\varphi$  e  $\psi$  aos domínios  $\varphi \in [0, 2\pi)$  e  $\psi \in [0, 2\pi)$  ou definí-los módulo  $2\pi$ .

Vamos definir  $\vec{n} \in \mathbb{R}^3$ , denominado *vetor nodal*, como sendo o vetor unitário dado por

$$\vec{n} := R(-\psi, \mathbf{e}'_3)\mathbf{e}'_1 = R(\varphi, \mathbf{e}_3)\mathbf{e}_1. \quad (22.85)$$

Afirmamos que  $\vec{n}$  é ortogonal a  $\mathbf{e}_3$  e a  $\mathbf{e}'_3$ . De fato,

$$\langle \vec{n}, \mathbf{e}_3 \rangle_{\mathbb{R}} = \langle R(\varphi, \mathbf{e}_3)\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_3 \rangle_{\mathbb{R}} = \langle \mathbf{e}_1, R(-\varphi, \mathbf{e}_3)\mathbf{e}_3 \rangle_{\mathbb{R}} = \langle \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_3 \rangle_{\mathbb{R}} = 0$$

e

$$\langle \vec{n}, \mathbf{e}'_3 \rangle_{\mathbb{R}} = \langle R(-\psi, \mathbf{e}'_3)\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_3 \rangle_{\mathbb{R}} = \langle \mathbf{e}'_1, R(\psi, \mathbf{e}'_3)\mathbf{e}'_3 \rangle_{\mathbb{R}} = \langle \mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_3 \rangle_{\mathbb{R}} = 0.$$



Acima, usamos os fatos evidentes que  $R(-\varphi, \mathbf{e}_3)\mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_3$ , e  $R(\psi, \mathbf{e}'_3)\mathbf{e}'_3 = \mathbf{e}'_3$ , por serem rotações de vetores em torno de seus próprios eixos.

Agora, se  $\vec{n}$  é ortogonal a  $\mathbf{e}_3$  e a  $\mathbf{e}'_3$ , então é possível rodar o vetor  $\mathbf{e}_3$  de um certo ângulo  $\theta$  em torno de  $\vec{n}$  de modo a alcançar  $\mathbf{e}'_3$ , ou seja, existe um ângulo  $\theta$  tal que

$$\mathbf{e}'_3 = R(\theta, \vec{n})\mathbf{e}_3. \quad (22.86)$$

É fácil ao leitor convencer-se (vide Figura 22.1, página 1066) que podemos limitar  $\theta$  ao domínio  $\theta \in (0, \pi)$ .

Seja agora  $S \in \text{SO}(3)$  dada por

$$S := R(\psi, \mathbf{e}'_3)R(\theta, \vec{n})R(\varphi, \mathbf{e}_3)$$

e calculemos sua ação nos vetores  $\mathbf{e}_1$  e  $\mathbf{e}_3$ . Temos

$$S\mathbf{e}_1 = R(\psi, \mathbf{e}'_3)R(\theta, \vec{n})R(\varphi, \mathbf{e}_3)\mathbf{e}_1 \stackrel{(22.85)}{=} R(\psi, \mathbf{e}'_3)R(\theta, \vec{n})\vec{n} = R(\psi, \mathbf{e}'_3)\vec{n} \stackrel{(22.85)}{=} R(\psi, \mathbf{e}'_3)R(-\psi, \mathbf{e}'_3)\mathbf{e}'_1 = \mathbf{e}'_1$$

e temos

$$S\mathbf{e}_3 = R(\psi, \mathbf{e}'_3)R(\theta, \vec{n})R(\varphi, \mathbf{e}_3)\mathbf{e}_3 = R(\psi, \mathbf{e}'_3)R(\theta, \vec{n})\mathbf{e}_3 \stackrel{(22.86)}{=} R(\psi, \mathbf{e}'_3)\mathbf{e}'_3 = \mathbf{e}'_3.$$

Isso estabeleceu que  $S\mathbf{e}_1 = \mathbf{e}'_1 = R\mathbf{e}_1$  e  $S\mathbf{e}_3 = \mathbf{e}'_3 = R\mathbf{e}_3$ . Segue também que  $S\mathbf{e}_2 = \mathbf{e}'_2$ , pois  $S\mathbf{e}_2 = S(\mathbf{e}_3 \times \mathbf{e}_1) \stackrel{(22.69)}{=} (S\mathbf{e}_3) \times (S\mathbf{e}_1) = \mathbf{e}'_3 \times \mathbf{e}'_1 = \mathbf{e}'_2$ . Pela Proposição 22.9, página 1062, e pelo Corolário 22.2, página 1063, concluímos disso que  $S = R$ . Provamos, portanto, que

$$R = R(\psi, \mathbf{e}'_3)R(\theta, \vec{n})R(\varphi, \mathbf{e}_3). \quad (22.87)$$

O lado direito de (22.87) pode ainda ser escrito de uma forma mais limpa, envolvendo apenas rotações em torno de  $\mathbf{e}_1$  e  $\mathbf{e}_3$ . Por (22.86)  $\mathbf{e}'_3 = R(\theta, \vec{n})\mathbf{e}_3$ . Assim, usando-se (22.70), temos

$$R(\psi, \mathbf{e}'_3) = R(\psi, R(\theta, \vec{n})\mathbf{e}_3) \stackrel{(22.70)}{=} R(\theta, \vec{n})R(\psi, \mathbf{e}_3)R(-\theta, \vec{n}).$$

Substituindo isso no primeiro fator do lado direito de (22.87), temos

$$R = R(\theta, \vec{n})R(\varphi + \psi, \mathbf{e}_3). \quad (22.88)$$

Agora, por (22.85) temos  $\vec{n} = R(\varphi, \mathbf{e}_3)\mathbf{e}_1$  e, novamente por (22.70), obtemos

$$R(\theta, \vec{n}) = R(\theta, R(\varphi, \mathbf{e}_3)\mathbf{e}_1) \stackrel{(22.70)}{=} R(\varphi, \mathbf{e}_3)R(\theta, \mathbf{e}_1)R(-\varphi, \mathbf{e}_3).$$

Substituindo isso no primeiro fator do lado direito de (22.88), temos

$$R = R(\varphi, \mathbf{e}_3)R(\theta, \mathbf{e}_1)R(\psi, \mathbf{e}_3). \quad (22.89)$$

As afirmações (22.81) e (22.82) para os casos em que  $\mathbf{e}'_3 = R\mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_3$  e  $\mathbf{e}'_3 = R\mathbf{e}_3 = -\mathbf{e}_3$ , respectivamente, são a esta altura evidentes. Isso completa a demonstração do Teorema 22.8. ■

### • Forma explícita de uma rotação em termos de ângulos de Euler

Na notação das matrizes de rotação de (22.45) obtivemos em (22.89)

$$\begin{aligned} R &= R_3(\varphi)R_1(\theta)R_3(\psi) = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \psi & -\sin \psi & 0 \\ \sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos \varphi \cos \psi - \cos \theta \sin \varphi \sin \psi & -\cos \varphi \sin \psi - \cos \theta \sin \varphi \cos \psi & \sin \varphi \sin \theta \\ \sin \varphi \cos \psi + \cos \theta \cos \varphi \sin \psi & \sin \varphi \sin \psi + \cos \theta \cos \varphi \cos \psi & -\cos \varphi \sin \theta \\ \sin \psi \sin \theta & \cos \psi \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (22.90)$$

**E. 22.46** *Exercício*. Verifique!

✱

A expressão (22.90) fornece uma fórmula explícita para os elementos de  $\text{SO}(3)$  em termos dos ângulos de Euler.

**22.3.3 O Grupo  $\text{O}(3)$** 

O grupo  $\text{O}(3)$ , das matrizes ortogonais reais de ordem 3, contém o subgrupo  $\text{SO}(3)$ , de matrizes ortogonais reais de ordem 3 e de determinante 1, estudado na Seção 22.3.2, página 1052, acima, assim como contém o conjunto complementar  $\text{O}(3) \setminus \text{SO}(3)$  das matrizes ortogonais de determinante  $-1$ . Na maior parte desta seção vamos tentar caracterizar os elementos de  $\text{O}(3) \setminus \text{SO}(3)$ , e tentar descrever sua ação sobre vetores do espaço tridimensional  $\mathbb{R}^3$ .

Conforme vimos na Seção 22.3.2,  $\text{SO}(3)$  é o grupo das rotações puras em  $\mathbb{R}^3$  e, como veremos na presente seção, os elementos de  $\text{O}(3) \setminus \text{SO}(3)$  são composições de rotações puras e de reflexões puras em  $\mathbb{R}^3$ .

**• Reflexões sobre planos e sobre a origem**

Dentre os elementos de  $\text{O}(3) \setminus \text{SO}(3)$  encontram-se as seguintes matrizes:

$$P_1 := \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad P_2 := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad P_3 := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad (22.91)$$

$$P_0 := P_1 P_2 P_3 := \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = -\mathbb{1}. \quad (22.92)$$

É trivial verificar que se trata, de fato, de matrizes ortogonais de determinante  $-1$ . A matriz  $P_1$  implementa uma reflexão sobre o plano 2-3, a matriz  $P_2$  implementa uma reflexão sobre o plano 3-1, a matriz  $P_3$  implementa uma reflexão sobre o plano 1-2 e a matriz  $P_0 \equiv -\mathbb{1}$  implementa uma reflexão sobre a origem.

A ideia pode ser generalizada. Seja  $\vec{\zeta} \in \mathbb{R}^3$  um vetor unitário e seja  $\{\vec{\zeta}\}^\perp$  o subespaço bidimensional ortogonal a  $\vec{\zeta}$ . Pelo Teorema da Decomposição Ortogonal, todo  $\vec{v} \in \mathbb{R}^3$  pode ser escrito de forma única como  $\vec{v} = v_1 \vec{\zeta} + \vec{v}_2$ , com  $v_1 \in \mathbb{R}$  e  $\vec{v}_2 \in \{\vec{\zeta}\}^\perp$ . Defina-se o operador linear  $P_{\vec{\zeta}} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  por

$$P_{\vec{\zeta}} \vec{v} = P_{\vec{\zeta}}(v_1 \vec{\zeta} + \vec{v}_2) := -v_1 \vec{\zeta} + \vec{v}_2. \quad (22.93)$$

Claro está que  $\vec{\zeta}$  é um autovetor de  $P_{\vec{\zeta}}$  com autovalor  $-1$  e que o subespaço bidimensional  $\{\vec{\zeta}\}^\perp$  é o subespaço dos autovetores com autovalor  $+1$ . Logo,  $\det(P_{\vec{\zeta}}) = -1$ . Além disso é um exercício elementar (faça-o!) provar que para quaisquer  $\vec{v}, \vec{u} \in \mathbb{R}^3$  vale  $\langle P_{\vec{\zeta}} \vec{v}, P_{\vec{\zeta}} \vec{u} \rangle_{\mathbb{R}} = \langle \vec{v}, \vec{u} \rangle_{\mathbb{R}}$ , mostrando que  $P_{\vec{\zeta}}$  é ortogonal. Logo,  $P_{\vec{\zeta}}$  é um elemento de  $\text{O}(3)$  com determinante  $-1$  e que representa uma reflexão sobre o plano  $\{\vec{\zeta}\}^\perp$ .

Claro está que  $P_k = P_{\mathbf{e}_k}$  para cada  $k = 1, 2, 3$ . Claro está também que  $P_0$  não coincide com nenhum  $P_{\vec{\zeta}}$ , pois para  $P_0$  o autovalor  $-1$  é triplamente degenerado, enquanto que para as matrizes  $P_{\vec{\zeta}}$  é simplesmente degenerado. Por fim, é evidente da definição que  $(P_{\vec{\zeta}})^2 = \mathbb{1}$ . Chamamos também a atenção para o fato que  $P_{\vec{\zeta}} = P_{-\vec{\zeta}}$  (verifique!).

Elementos de  $\text{O}(3) \setminus \text{SO}(3)$  como  $P_0$  ou como as matrizes  $P_{\vec{\zeta}}$  são denominados *reflexões puras* em  $\mathbb{R}^3$ . Vamos agora encontrar a forma geral dos elementos de  $\text{O}(3) \setminus \text{SO}(3)$  e entender como eles agem em  $\mathbb{R}^3$ .

**• Os elementos gerais de  $\text{O}(3) \setminus \text{SO}(3)$** 

O primeiro fato de constatação elementar é que todo elemento de  $\text{O}(3) \setminus \text{SO}(3)$  é obtido pelo produto de qualquer uma das matrizes  $P_{\vec{\zeta}}$  ou  $P_0$  acima com uma matriz de  $\text{SO}(3)$ . De fato, se  $P \in \text{O}(3) \setminus \text{SO}(3)$ , então  $P_{\vec{\zeta}} P$  é também um elemento

de  $O(3)$ , por ser igualmente ortogonal, e ser tal que  $\det(P_{\vec{\zeta}}P) = \det(P_{\vec{\zeta}})\det(P) = (-1)^2 = 1$ . Logo,  $P_{\vec{\zeta}}P \in SO(3)$  e, dado que  $(P_{\vec{\zeta}})^2 = \mathbb{1}$ , segue que  $P = P_{\vec{\zeta}}R$  para alguma  $R \in SO(3)$ . Note-se que a associação entre  $P$  e  $R$  é unívoca, pois se  $P = P_{\vec{\zeta}}R = P_{\vec{\zeta}}R_2$ , valerá  $R = R_2$ , pois  $(P_{\vec{\zeta}})^2 = \mathbb{1}$ . Note-se também que, *ipso facto*,  $PP_{\vec{\zeta}}$  é também um elemento de  $O(3)$  e, portanto, também podemos escrever  $P = R'P_{\vec{\zeta}}$  para algum  $R' \in SO(3)$ , único (mas não necessariamente igual a  $R$ ). Os mesmos raciocínios aplicam-se a  $P_0$ .

Concluimos disso que os elementos de  $O(3) \setminus SO(3)$  representam rotações de algum ângulo em torno de um eixo que passa pela origem, seguidas por reflexões sobre algum plano bidimensional ou sobre a origem (ou na ordem reversa). Provamos, assim, as seguintes afirmações:

**Proposição 22.11** *Seja  $P \in O(3) \setminus SO(3)$ . Então, para qualquer  $\vec{\zeta}$  unitário em  $\mathbb{R}^3$  existem  $R$  e  $R' \in SO(3)$  tais que*

$$P = P_{\vec{\zeta}}R = R'P_{\vec{\zeta}},$$

*assim como existem  $R_0$  e  $R'_0 \in SO(3)$  tais que  $P = P_0R_0 = R'_0P_0$ .*

*Para cada vetor unitário  $\vec{\zeta} \in \mathbb{R}^3$ , as aplicações de  $SO(3)$  em  $O(3) \setminus SO(3)$  dadas por*

$$SO(3) \ni R \mapsto P_{\vec{\zeta}}R \in O(3) \setminus SO(3) \quad e \quad SO(3) \ni R' \mapsto R'P_{\vec{\zeta}} \in O(3) \setminus SO(3)$$

*são bijetoras, com inversas dadas por  $O(3) \setminus SO(3) \ni P \mapsto P_{\vec{\zeta}}P \in SO(3)$  e  $O(3) \setminus SO(3) \ni P \mapsto PP_{\vec{\zeta}} \in SO(3)$ , respectivamente. Ambas as aplicações são contínuas e com inversa contínua e, portanto, são homeomorfismos entre  $SO(3)$  e  $O(3) \setminus SO(3)$ . As mesmas afirmações valem para as aplicações  $SO(3) \ni R_0 \mapsto P_0R_0 \in O(3) \setminus SO(3)$  e  $SO(3) \ni R'_0 \mapsto R'_0P_0 \in O(3) \setminus SO(3)$ .  $\square$*

As afirmações sobre continuidade, acima, são óbvias e não requerem demonstração. A Proposição 22.11 mostra que  $SO(3)$  e  $O(3) \setminus SO(3)$  são homeomorfos e, com a discussão da página 1059 sobre o espaço de parâmetros de  $SO(3)$ , podemos afirmar que também  $O(3) \setminus SO(3)$  pode ser identificado com o espaço projetivo tridimensional  $\mathbb{RP}^3$  (para a definição deste, vide Seção 35.4.6, página 1697).

Reunindo alguns fatos previamente apresentados temos a seguinte afirmação sobre grupo  $O(3)$  como um todo:

**Proposição 22.12** *O grupo  $O(3)$  é composto por duas componentes conexas,  $SO(3)$  e  $O(3) \setminus SO(3)$ , ambas homeomorfas ao espaço projetivo tridimensional real  $\mathbb{RP}^3$ .  $\square$*

**E. 22.47 Exercício.** Sejam  $\vec{\zeta}_1$  e  $\vec{\zeta}_2$ , dois vetores unitários de  $\mathbb{R}^3$ . Determine explicitamente em função de  $\vec{\zeta}_1$  e  $\vec{\zeta}_2$  as matrizes  $R(\vec{\zeta}_1, \vec{\zeta}_2)$  e  $R'(\vec{\zeta}_1, \vec{\zeta}_2)$  de  $SO(3)$  que satisfazem  $P_{\vec{\zeta}_1} = P_{\vec{\zeta}_2}R(\vec{\zeta}_1, \vec{\zeta}_2)$  e  $P_{\vec{\zeta}_1} = R'(\vec{\zeta}_1, \vec{\zeta}_2)P_{\vec{\zeta}_2}$ , respectivamente.

**Sugestões:** No caso em que  $\vec{\zeta}_1$  e  $\vec{\zeta}_2$  são vetores linearmente dependentes não há o que provar pois, evidentemente,  $R(\vec{\zeta}_1, \vec{\zeta}_2) = R'(\vec{\zeta}_1, \vec{\zeta}_2) = \mathbb{1}$ . Considere, então, que  $\vec{\zeta}_1$  e  $\vec{\zeta}_2$  são vetores linearmente independentes. Expresse um vetor geral  $\vec{v}$  de  $\mathbb{R}^3$  na base  $\{\vec{\zeta}_1, \vec{\zeta}_2, \vec{\zeta}_1 \times \vec{\zeta}_2\}$  (que não é necessariamente uma base ortogonal!) e, usando (22.93), expresse  $P_{\vec{\zeta}_1}P_{\vec{\zeta}_2}$  e  $P_{\vec{\zeta}_2}P_{\vec{\zeta}_1}$ . Convença-se que ambas  $P_{\vec{\zeta}_1}P_{\vec{\zeta}_2}$  e  $P_{\vec{\zeta}_2}P_{\vec{\zeta}_1}$  representam rotações em torno do eixo  $\vec{\zeta}_1 \times \vec{\zeta}_2$  (pois a componente de  $\vec{v}$  na direção  $\vec{\zeta}_1 \times \vec{\zeta}_2$  é mantida invariante por  $P_{\vec{\zeta}_1}$  e por  $P_{\vec{\zeta}_2}$ ) e, usando (22.58)–(22.59), determine os ângulos de rotação a que  $R(\vec{\zeta}_1, \vec{\zeta}_2)$  e  $R'(\vec{\zeta}_1, \vec{\zeta}_2)$  correspondem.  $\star$

### • Mais sobre os elementos de $O(3) \setminus SO(3)$

As Proposições 22.13 e 22.14, a seguir, fornecem uma visão talvez mais precisa de  $O(3) \setminus SO(3)$  e da ação dos seus elementos.

**Proposição 22.13** *Se  $P \in O(3) \setminus SO(3)$  com  $P \neq -\mathbb{1}$ , então podemos encontrar um vetor unitário  $\vec{\eta}$  e um ângulo  $\theta \in (-\pi, \pi]$  tais que valem*

$$P = R(\theta, \vec{\eta})P_{\vec{\eta}} = P_{\vec{\eta}}R(\theta, \vec{\eta}) = R(-\theta, -\vec{\eta})P_{-\vec{\eta}} = P_{-\vec{\eta}}R(-\theta, -\vec{\eta}). \quad (22.94)$$

*Para cada  $P \in O(3) \setminus SO(3)$ , o ângulo  $\theta$  e o vetor  $\vec{\eta}$  são únicos a menos das identificações indicadas em (22.94). Assim tais elementos  $P \in O(3) \setminus SO(3)$  com  $P \neq -\mathbb{1}$  representam uma reflexão sobre um plano bidimensional específico seguida de uma rotação sobre o eixo ortogonal a esse plano (ou na ordem reversa).*

Para o elemento  $-\mathbb{1}$  temos as representações  $-\mathbb{1} = R(\pm\pi, \vec{\eta})P_{\vec{\eta}} = P_{\vec{\eta}}R(\pm\pi, \vec{\eta})$ , com  $\vec{\eta} \in \mathbb{R}^3$  unitário qualquer. Assim, a reflexão sobre a origem também pode ser vista como uma reflexão sobre um plano bidimensional qualquer seguida de uma rotação de  $\pm\pi$  sobre o eixo ortogonal a esse plano (ou na ordem reversa).  $\square$

**Prova da Proposição 22.13.** Seja  $P \in O(3) \setminus SO(3)$ . Seja  $p(x) = \det(x\mathbb{1} - P)$  seu polinômio característico. O polinômio  $p(x)$  é de grau 3 e o termo de maior grau é  $+x^3$ . Logo,  $\lim_{x \rightarrow -\infty} p(x) = -\infty$ . Por outro lado,  $p(0) = \det(-P) = (-1)^3 \det(P) = 1$ . Como  $p$  é contínuo, positivo em  $x = 0$  e vai a  $-\infty$  quando  $x \rightarrow -\infty$ , segue que  $P$  deve ter um autovalor  $\lambda$  (uma raiz de  $p$ ) que seja negativo. Seja  $\vec{\eta}$  um autovetor desse autovalor negativo, i.e.,  $P\vec{\eta} = \lambda\vec{\eta}$  e escolhamos  $\|\vec{\eta}\| = 1$ . Como  $P$  é ortogonal, ela preserva o comprimento de  $\vec{\eta}$  e, portanto,  $\lambda = -1$  e temos  $P\vec{\eta} = -\vec{\eta}$ .

Para esse  $\vec{\eta}$ , seja a matriz  $P_{\vec{\eta}}$  como definida acima, que reflete vetores sobre o plano  $\{\vec{\eta}\}^\perp$ . O produto  $PP_{\vec{\eta}}$  é um elemento  $R$  de  $SO(3)$ , como já observamos. Logo,  $P = RP_{\vec{\eta}}$ . Agora, sabemos que  $P\vec{\eta} = -\vec{\eta}$  e que  $P_{\vec{\eta}}\vec{\eta} = -\vec{\eta}$ . Logo,  $R\vec{\eta} = PP_{\vec{\eta}}\vec{\eta} = \vec{\eta}$ . Portanto,  $R = R(\theta, \vec{\eta})$  para algum  $\theta \in (-\pi, \pi]$ .

No caso em que  $P = -\mathbb{1}$  temos  $R(\theta, \vec{\eta}) = -P_{\vec{\eta}}$ . Segundo a definição (22.93), se  $\vec{v}$  é um vetor arbitrário de  $\mathbb{R}^3$  escrito na forma  $\vec{v} = v_1\vec{\eta} + \vec{v}_2$ , com  $v_1 \in \mathbb{R}$  e  $\vec{v}_2 \in \{\vec{\eta}\}^\perp$ , então  $R(\theta, \vec{\eta})\vec{v} = -P_{\vec{\eta}}(v_1\vec{\eta} + \vec{v}_2) = v_1\vec{\eta} - \vec{v}_2$ . Isso mostra que  $R(\theta, \vec{\eta})$  é uma rotação de  $\pm\pi$  em torno de  $\vec{\eta}$ , e concluímos que  $-\mathbb{1} = R(\pm\pi, \vec{\eta})P_{\vec{\eta}}$ . Ainda sobre o caso  $P = -\mathbb{1}$  é importante notar que a escolha de  $\vec{\eta}$  entre os vetores unitários de  $\mathbb{R}^3$  é totalmente arbitrária, pois são todos autovetores de  $-\mathbb{1}$  com autovalor  $-1$ , obviamente.

Retornando ao caso geral, a igualdade  $R(\theta, \vec{\eta})P_{\vec{\eta}} = P_{\vec{\eta}}R(\theta, \vec{\eta})$  que ocorre no lado direito de (22.96) pode ser facilmente constatada geometricamente, mas uma prova formal pode ser obtida com uso de (22.59), segundo a qual, valem para todo  $\vec{\alpha} \in \mathbb{R}^3$

$$\begin{aligned} R(\theta, \vec{\eta})P_{\vec{\eta}}\vec{\alpha} &= \cos(\theta)P_{\vec{\eta}}\vec{\alpha} + (1 - \cos(\theta))(\vec{\eta} \cdot (P_{\vec{\eta}}\vec{\alpha}))\vec{\eta} + \sin(\theta)\vec{\eta} \times (P_{\vec{\eta}}\vec{\alpha}) \\ &= \cos(\theta)P_{\vec{\eta}}\vec{\alpha} - (1 - \cos(\theta))(\vec{\eta} \cdot \vec{\alpha})\vec{\eta} + \sin(\theta)\vec{\eta} \times \vec{\alpha} \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} P_{\vec{\eta}}R(\theta, \vec{\eta})\vec{\alpha} &= \cos(\theta)P_{\vec{\eta}}\vec{\alpha} + (1 - \cos(\theta))(\vec{\eta} \cdot \vec{\alpha})P_{\vec{\eta}}\vec{\eta} + \sin(\theta)P_{\vec{\eta}}(\vec{\eta} \times \vec{\alpha}) \\ &= \cos(\theta)P_{\vec{\eta}}\vec{\alpha} - (1 - \cos(\theta))(\vec{\eta} \cdot \vec{\alpha})\vec{\eta} + \sin(\theta)\vec{\eta} \times \vec{\alpha}. \end{aligned}$$

Acima, além de alguns fatos óbvios, usamos que  $P_{\vec{\eta}}(\vec{\eta} \times \vec{\alpha}) = \vec{\eta} \times \vec{\alpha}$ , pois  $\vec{\eta} \times \vec{\alpha}$  é um vetor de  $\{\vec{\eta}\}^\perp$ . Comparando, vemos que  $R(\theta, \vec{\eta})P_{\vec{\eta}} = P_{\vec{\eta}}R(\theta, \vec{\eta})$ , como queríamos mostrar.

Concluímos disso, em particular, que temos

$$-\mathbb{1} = R(\pm\pi, \vec{\eta})P_{\vec{\eta}} = P_{\vec{\eta}}R(\pm\pi, \vec{\eta})$$

com os dois sinais independentes e para qualquer  $\vec{\eta} \in \mathbb{R}^3$  unitário.

No caso geral há ainda algumas identificações a se fazer. Notemos que  $-\vec{\eta}$  também é autovetor de  $P$  com autovalor  $-1$ . Logo, temos também

$$P = R(\theta', -\vec{\eta})P_{-\vec{\eta}} = P_{-\vec{\eta}}R(\theta', -\vec{\eta})$$

para algum  $\theta' \in (\pi, \pi]$ . Como  $P_{\vec{\eta}} = P_{-\vec{\eta}}$  e  $R(\theta', -\vec{\eta}) = R(-\theta', \vec{\eta})$ , conclui-se facilmente que  $R(-\theta', \vec{\eta}) = R(\theta, \vec{\eta})$ . Logo,  $R(\theta + \theta', \vec{\eta}) = \mathbb{1}$ , o que implica que  $\theta' + \theta \equiv 0 \pmod{2\pi}$ . Para  $\theta, \theta' \in (-\pi, \pi]$  isso implica  $\theta' = -\theta$ .

Com isso estabelecemos que todo  $P \in O(3) \setminus SO(3)$  se deixa escrever na forma

$$P = R(\theta, \vec{\eta})P_{\vec{\eta}} = P_{\vec{\eta}}R(\theta, \vec{\eta}) = R(-\theta, -\vec{\eta})P_{-\vec{\eta}} = P_{-\vec{\eta}}R(-\theta, -\vec{\eta}), \quad (22.95)$$

para ao menos um par  $(\theta, \vec{\eta}) \in [-\pi, \pi] \times \mathbb{S}^2$ . Aqui,  $\mathbb{S}^2$  é a esfera unitária de  $\mathbb{R}^3$ : o conjunto de todos os vetores  $\vec{\eta} \in \mathbb{R}^3$  com  $\|\vec{\eta}\| = 1$ .

Vamos agora estabelecer que se  $P \in O(3) \setminus SO(3)$  e  $P \neq P_0 = -\mathbb{1}$ , então o vetor  $\vec{\eta}$  acima é único a menos de um sinal.

Suponhamos que  $P \in O(3) \setminus SO(3)$  seja tal que haja dois vetores unitários linearmente independentes  $\vec{\eta}_1$  e  $\vec{\eta}_2 \in \mathbb{R}^3$  tais que  $P = R(\theta_1, \vec{\eta}_1)P_{\vec{\eta}_1} = R(\theta_2, \vec{\eta}_2)P_{\vec{\eta}_2}$ , com  $\theta_1, \theta_2 \in [-\pi, \pi)$ . Mas isso informa que  $\vec{\eta}_1$  e  $\vec{\eta}_2$  são ambos autovetores

de  $P$  com autovalor  $-1$ . Como  $P$  é uma matriz ortogonal,  $P$  mantém invariantes os subespaços  $\{\vec{\eta}_1\}^\perp$  e  $\{\vec{\eta}_2\}^\perp$ , e portanto, mantém invariante o subespaço unidimensional  $\{\vec{\eta}_1\}^\perp \cap \{\vec{\eta}_2\}^\perp$ , que é o subespaço gerado por  $\vec{\eta}_1 \times \vec{\eta}_2$ . Logo,  $P(\vec{\eta}_1 \times \vec{\eta}_2) = \lambda \vec{\eta}_1 \times \vec{\eta}_2$ . Como  $P$  preserva os comprimentos de vetores (por ser uma matriz ortogonal), devemos ter  $\lambda = \pm 1$ . Assim,  $\vec{\eta}_1$ ,  $\vec{\eta}_2$  e  $\vec{\eta}_1 \times \vec{\eta}_2$  são três autovetores linearmente independentes de  $P$  com autovalores  $-1$ ,  $-1$  e  $\lambda = \pm 1$ . Logo, como  $\det(P) = -1$ , devemos ter  $\lambda = -1$ , e como  $\vec{\eta}_1$ ,  $\vec{\eta}_2$  e  $\vec{\eta}_1 \times \vec{\eta}_2$  formam uma base em  $\mathbb{R}^3$  isso implicaria que  $P = -1$ . Portanto, como  $P \neq -1$ , concluímos que  $\vec{\eta}_1$  e  $\vec{\eta}_2$  não podem ser linearmente independentes e, portanto,  $\vec{\eta}_2 = -\vec{\eta}_1$ . Em (22.95) vemos que a troca  $\vec{\eta} \rightarrow -\vec{\eta}$  tem de ser acompanhada pela troca de  $\theta$  por  $-\theta$  no intervalo  $[-\pi, \pi]$ . Isso completa a demonstração. ■

A Proposição 22.13, pode ser reformulada em termos um tanto mais sucintos com uso de algumas noções topológicas, como faremos na Proposição 22.14, logo abaixo. Para enunciá-la precisamos de uma definição. Alguma familiaridade com a construção de espaços quociente, como discutido na Seção 35.1.1, página 1648, será útil ao leitor para o que segue.

Considere-se o conjunto  $[-\pi, \pi] \times \mathbb{S}^2$  e vamos introduzir no mesmo a seguinte relação de equivalência:

1. Todo elemento  $(\theta, \vec{\eta}) \in [-\pi, \pi] \times \mathbb{S}^2$  é declarado equivalente a si mesmo.
2. Dois pares  $(\theta_1, \vec{\eta}_1)$  e  $(\theta_2, \vec{\eta}_2)$  são equivalentes para quaisquer  $\vec{\eta}_1$  e  $\vec{\eta}_2 \in \mathbb{S}^2$  se  $|\theta_1| = |\theta_2| = \pi$ .
3. Cada elemento  $(\theta, \vec{\eta}) \in [-\pi, \pi] \times \mathbb{S}^2$  é declarado equivalente ao elemento  $(-\theta, -\vec{\eta}) \in [-\pi, \pi] \times \mathbb{S}^2$ .

Denotaremos por  $[(\theta, \vec{\eta})]$  a classe de equivalência de  $[-\pi, \pi] \times \mathbb{S}^2$  pela relação de equivalência acima. Temos,

$$[(\theta, \vec{\eta})] = \begin{cases} \{(\theta, \vec{\eta}), (-\theta, -\vec{\eta})\}, & \text{caso } \theta \neq \pm\pi, \\ \{(-\pi, \vec{\eta}'), \vec{\eta}' \in \mathbb{S}^2\} \cup \{(\pi, \vec{\eta}'), \vec{\eta}' \in \mathbb{S}^2\}, & \text{caso } \theta = \pm\pi. \end{cases}$$

Seja  $\mathbb{L}^3 := ([-\pi, \pi] \times \mathbb{S}^2)/\sim$  a coleção de todas as classes de equivalência acima. Com alguma ginástica mental é possível perceber que  $\mathbb{L}^3$  pode ser compreendido como o espaço obtido tomando-se a bola fechada de raio  $\pi$  e identificando-se os pontos antípodas de sua superfície. Essa foi precisamente a descrição que fizemos de  $\text{SO}(3)$  o qual, como já comentamos, identifica-se também com o espaço projetivo real tridimensional  $\mathbb{RP}^3$ .

**Proposição 22.14** A aplicação  $P : \mathbb{L}^3 \rightarrow \text{O}(3) \setminus (\text{SO}(3) \cup \{-1\})$  dada por

$$P([( \theta, \vec{\eta} )]) := R(\theta, \vec{\eta})P_{\vec{\eta}} = P_{\vec{\eta}}R(\theta, \vec{\eta}) \quad (22.96)$$

é uma aplicação bijetora entre  $\mathbb{L}^3$  e  $\text{O}(3) \setminus \text{SO}(3)$ . □

A prova da Proposição 22.14 é uma mera releitura das afirmações da Proposição 22.13. Comentemos também que, como  $\mathbb{L}^3$  pode ser identificado com  $\mathbb{RP}^3$  e com  $\text{SO}(3)$ , reobtemos com a Proposição 22.14 a afirmação já feita na Proposição 22.11, e comentários que se lhe seguem, sobre a identificação de  $\text{O}(3) \setminus \text{SO}(3)$  com esses espaços.

## 22.3.4 O Grupo $\text{SU}(2)$

Esta seção é dedicada ao grupo  $\text{SU}(2)$ , de grande relevância na Mecânica Quântica, na Física Nuclear, na Mecânica Quântica Relativística, na Teoria Quântica de Campos e na Física das Partículas Elementares.

### • As matrizes de Pauli

De grande importância no estudo do grupo  $\text{SU}(2)$  são as chamadas *matrizes de Pauli*<sup>17</sup>, definidas como

$$\sigma_1 := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 := \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \sigma_3 := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (22.97)$$

<sup>17</sup>Wolfgang Ernst Pauli (1900–1958).

As matrizes de Pauli satisfazem as seguintes relações algébricas: para todos  $a, b = 1, 2, 3$  valem

$$[\sigma_a, \sigma_b] := \sigma_a \sigma_b - \sigma_b \sigma_a = 2i \sum_{c=1}^3 \varepsilon_{abc} \sigma_c, \quad (22.98)$$

$$\{\sigma_a, \sigma_b\} := \sigma_a \sigma_b + \sigma_b \sigma_a = 2\delta_{ab} \mathbb{1}, \quad (22.99)$$

$$\sigma_a \sigma_b = \delta_{ab} \mathbb{1} + i \sum_{c=1}^3 \varepsilon_{abc} \sigma_c. \quad (22.100)$$

**E. 22.48** *Exercício importantíssimo (todo estudante deve fazê-lo pelo menos uma vez na vida).* Verifique as relações algébricas acima. Note que (22.100) segue diretamente de (22.99) e (22.98).  $\clubsuit$

Note também que as matrizes de Pauli são autoadjuntas:  $\sigma_i^* = \sigma_i$ . Note ainda que as quatro matrizes  $\mathbb{1}, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  formam uma base em  $\text{Mat}(\mathbb{C}, 2)$ : toda matriz complexa  $2 \times 2$  pode ser escrita como uma combinação linear das mesmas.

**E. 22.49** *Exercício.* Mostre que as matrizes  $\mathbb{1}, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  são ortonormais em relação ao seguinte produto escalar definido em  $\text{Mat}(\mathbb{C}, 2)$ :  $\langle A, B \rangle := \frac{1}{2} \text{Tr}(A^* B)$ .  $\clubsuit$

As matrizes de Pauli desempenham um papel importante na Mecânica Quântica, estando associadas ao operador de spin para partículas de spin  $1/2$ , tais como o elétron, o próton, o neutron, os quarks e outras.

### • A forma geral das matrizes de SU(2)

Conforme já definimos, o grupo  $\text{SU}(2)$  é o grupo das matrizes unitárias complexas  $2 \times 2$  com determinante igual a 1:  $\text{SU}(2) = \{U \in \text{Mat}(\mathbb{C}, 2) \mid U^* = U^{-1} \text{ e } \det(U) = 1\}$ . Vamos começar estudando a forma geral de tais matrizes, procurando uma parametrização conveniente para as mesmas que permitirá estudar as propriedades de  $\text{SU}(2)$  como um grupo de Lie.

Como toda matriz  $2 \times 2$  complexa, uma matriz genérica  $U \in \text{SU}(2)$  é da forma  $U = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ , onde  $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ . Vamos estudar a condição  $U^{-1} = U^*$ . Podemos calcular  $U^{-1}$  usando a regra de Laplace, expressão (9.20), página 360:  $U^{-1}$  é dada pela transposta da matriz dos cofatores de  $U$  dividida pelo determinante de  $U$ , que é 1, neste caso. Ou seja,  $U^{-1} = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$ . Assim,  $U^{-1} = U^*$  significa nesse caso

$$\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{a} & \bar{c} \\ \bar{b} & \bar{d} \end{pmatrix},$$

ou seja,  $c = -\bar{b}$  e  $d = \bar{a}$ . Logo,  $U = \begin{pmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix}$ . A condição  $\det(U) = 1$  implica, portanto,  $|a|^2 + |b|^2 = 1$ .

Resumindo:

$$\text{SU}(2) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix}, \text{ onde } a, b \in \mathbb{C} \text{ com } |a|^2 + |b|^2 = 1 \right\}.$$

Escrevendo os números complexos  $a$  e  $b$  como soma de suas partes real e imaginária:  $a = a_1 + ia_2$  e  $b = b_1 + ib_2$ , com  $a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbb{R}$ , poderemos escrever  $U$  como uma combinação linear de matrizes de Pauli (e da unidade):

$$U = \begin{pmatrix} a_1 + ia_2 & b_1 + ib_2 \\ -b_1 + ib_2 & a_1 - ia_2 \end{pmatrix} = a_1 \mathbb{1} + i(b_2 \sigma_1 + b_1 \sigma_2 + a_2 \sigma_3). \quad (22.101)$$

Essa expressão será usada adiante.

Vamos agora nos voltar para a condição  $|a|^2 + |b|^2 = 1$ . A mesma significa  $a_1^2 + a_2^2 + b_1^2 + b_2^2 = 1$ . Temos então,

$$\mathrm{SU}(2) = \left\{ \begin{pmatrix} a_1 + ia_2 & b_1 + ib_2 \\ -b_1 + ib_2 & a_1 - ia_2 \end{pmatrix}, \text{ onde } (a_1, a_2, b_1, b_2) \in \mathbb{R}^4 \text{ com } a_1^2 + a_2^2 + b_1^2 + b_2^2 = 1 \right\}. \quad (22.102)$$

Lembremos que para todo inteiro  $n \geq 1$ , o conjunto de pontos

$$\mathbb{S}^n := \left\{ (x_1, \dots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \text{ com } x_1^2 + \dots + x_{n+1}^2 = 1 \right\} \subset \mathbb{R}^{n+1}$$

designa a superfície da esfera unitária de  $\mathbb{R}^{n+1}$ . Assim, vemos que  $\mathrm{SU}(2)$  é homeomorfo a  $\mathbb{S}^3$ , a superfície da esfera unitária do espaço quadridimensional  $\mathbb{R}^4$ . Isso ilustra o fato que  $\mathrm{SU}(2)$  é uma variedade diferenciável. Como o produto e a inversa são contínuos em  $\mathrm{SU}(2)$ , o mesmo é um grupo de Lie.

Comentário. Conforme discutimos à página 193, (22.101) e (22.102) permitem ver que o grupo  $\mathrm{SU}(2)$  é isomorfo ao grupo  $\mathbb{H}_1$ , o grupo dos quatérnios unitários. Por essa razão, (22.101) é por vezes denominada *representação quaterniônica das matrizes do grupo  $\mathrm{SU}(2)$* . ♣

Vamos tentar agora parametrizar de outra forma o vetor  $(a_1, a_2, b_1, b_2) \in \mathbb{S}^3$  que aparece do lado direito de (22.102). Claramente, a condição  $a_1^2 + a_2^2 + b_1^2 + b_2^2 = 1$  diz que  $a_1, a_2, b_1$  e  $b_2$  são números reais contidos no intervalo  $[-1, 1]$ . Podemos assim definir um ângulo  $\theta \in [-\pi, \pi]$  de forma que

$$a_1 = \cos \theta.$$

Fora isso, para  $\cos(\theta) \neq \pm 1$ , podemos definir

$$\eta_1 := \frac{b_2}{\sin \theta}, \quad \eta_2 := \frac{b_1}{\sin \theta}, \quad \eta_3 := \frac{a_2}{\sin \theta}.$$

A condição  $a_1^2 + a_2^2 + b_1^2 + b_2^2 = 1$  implica então (verifique!) que  $\eta_1^2 + \eta_2^2 + \eta_3^2 = 1$ . Assim, o vetor  $\vec{\eta} := (\eta_1, \eta_2, \eta_3)$  de  $\mathbb{R}^3$  é um vetor de comprimento 1. Com esses novos parâmetros  $\theta$  e  $\vec{\eta}$  podemos reescrever (22.101) como

$$U = \cos(\theta)\mathbb{1} + i \sin(\theta)\vec{\eta} \cdot \vec{\sigma},$$

onde

$$\vec{\eta} \cdot \vec{\sigma} := \eta_1 \sigma_1 + \eta_2 \sigma_2 + \eta_3 \sigma_3 = \begin{pmatrix} \eta_3 & \eta_1 - i\eta_2 \\ \eta_1 + i\eta_2 & -\eta_3 \end{pmatrix}.$$

Assim,

$$\mathrm{SU}(2) = \left\{ \cos(\theta)\mathbb{1} + i \sin(\theta)\vec{\eta} \cdot \vec{\sigma}, \text{ onde } \theta \in [-\pi, \pi] \text{ e } \vec{\eta} \in \mathbb{R}^3 \text{ com } \|\vec{\eta}\| = 1 \right\}.$$

A importância de se expressar  $U \in \mathrm{SU}(2)$  dessa forma, em termos de  $\theta$  e  $\vec{\eta}$ , provém da seguinte identidade:

$$\cos(\theta)\mathbb{1} + i \sin(\theta)\vec{\eta} \cdot \vec{\sigma} = \exp(i\theta\vec{\eta} \cdot \vec{\sigma}).$$

Vamos provar isso expandindo o lado direito e verificando que é igual ao lado esquerdo. De fato, pela definição da exponencial de matrizes,

$$\exp(i\theta\vec{\eta} \cdot \vec{\sigma}) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(i\theta)^m}{m!} (\vec{\eta} \cdot \vec{\sigma})^m = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(i\theta)^{2k}}{(2k)!} (\vec{\eta} \cdot \vec{\sigma})^{2k} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(i\theta)^{2k+1}}{(2k+1)!} (\vec{\eta} \cdot \vec{\sigma})^{2k+1},$$

onde, na última linha, apenas fizemos separar a soma em  $m$  da primeira linha nos casos  $m$  par e  $m$  ímpar. É um exercício muito fácil (faça!) verificar que

$$(\vec{\eta} \cdot \vec{\sigma})^2 = \begin{pmatrix} \eta_3 & \eta_1 - i\eta_2 \\ \eta_1 + i\eta_2 & -\eta_3 \end{pmatrix}^2 = \mathbb{1}.$$

Portanto,  $(\vec{\eta} \cdot \vec{\sigma})^{2k} = \mathbb{1}$  e  $(\vec{\eta} \cdot \vec{\sigma})^{2k+1} = \vec{\eta} \cdot \vec{\sigma}$ . Logo,

$$\begin{aligned} \exp(i\theta \vec{\eta} \cdot \vec{\sigma}) &= \left( \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(i\theta)^{2k}}{(2k)!} \right) \mathbb{1} + \left( \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(i\theta)^{2k+1}}{(2k+1)!} \right) \vec{\eta} \cdot \vec{\sigma} \\ &= \cos(\theta) \mathbb{1} + i \sin(\theta) \vec{\eta} \cdot \vec{\sigma}, \end{aligned} \quad (22.103)$$

que é o que queríamos mostrar.

Resumindo nossas conclusões,

$$\text{SU}(2) = \left\{ \exp(i\theta \vec{\eta} \cdot \vec{\sigma}) \text{ onde } \theta \in [-\pi, \pi] \text{ e } \vec{\eta} \in \mathbb{R}^3 \text{ com } \|\vec{\eta}\| = 1 \right\}. \quad (22.104)$$

Se tomarmos  $\vec{\eta}_1 = (1, 0, 0)$ ,  $\vec{\eta}_2 = (0, 1, 0)$  ou  $\vec{\eta}_3 = (0, 0, 1)$ , obtemos três subgrupos uniparamétricos distintos de  $\text{SU}(2)$ :

$$U_1(\theta) := \exp(i\theta \sigma_1) = \begin{pmatrix} \cos \theta & i \sin \theta \\ i \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}, \quad (22.105)$$

$$U_2(\theta) := \exp(i\theta \sigma_2) = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}, \quad (22.106)$$

$$U_3(\theta) := \exp(i\theta \sigma_3) = \begin{pmatrix} e^{i\theta} & 0 \\ 0 & e^{-i\theta} \end{pmatrix}, \quad (22.107)$$

respectivamente. Isso nos permite identificar as matrizes  $i\sigma_1$ ,  $i\sigma_2$  e  $i\sigma_3$  como os geradores desses subgrupos uniparamétricos. As relações (22.98) são as relações de comutação satisfeitas por essas matrizes, como elementos de uma álgebra de Lie, que é denominada álgebra de Lie  $\mathfrak{su}(2)$ .

Com isso, (22.104) está nos dizendo que todo elemento de  $\text{SU}(2)$  pode ser escrito como exponencial de um elemento de sua álgebra de Lie. Isso constata um teorema geral (vide, por exemplo, [296]) que diz que se um grupo de Lie é compacto e sua álgebra de Lie é semi-simples, a aplicação exponencial da sua álgebra de Lie é sobrejetora no grupo. De fato, tal como  $\text{SO}(3)$ ,  $\text{SU}(2)$  é compacto e  $\mathfrak{su}(2)$  é semi-simples.

**E. 22.50** *Exercício.* Mostre que

$$\text{U}(2) = \left\{ \exp(i\alpha \mathbb{1} + i\theta \vec{\eta} \cdot \vec{\sigma}) \text{ onde } \alpha, \theta \in [-\pi, \pi] \text{ e } \vec{\eta} \in \mathbb{R}^3 \text{ com } \|\vec{\eta}\| = 1 \right\}.$$

✦

### • Parametrização de elementos de $\text{SU}(2)$ em termos de ângulos de Euler

Sabemos que o grupo  $\text{SU}(2)$  é formado por matrizes da forma  $U = \begin{pmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix}$  com  $a, b \in \mathbb{C}$  satisfazendo  $|a|^2 + |b|^2 = 1$ . Vamos escrever  $a = a_1 + ia_2$  e  $b = b_1 + ib_2$ , com  $a_k$  e  $b_k$  reais. A condição  $|a|^2 + |b|^2 = 1$  equivale a podermos escrever  $|a| = \cos(\theta)$  e  $|b| = \sin(\theta)$  para algum  $\theta \in [0, \pi/2]$ . Assim, podemos escrever  $a = \cos(\theta)e^{i\alpha}$  e  $b = i \sin(\theta)e^{i\beta}$ , com  $\alpha$  e  $\beta \in (-\pi, \pi]$  sendo as fases de  $a$  e  $-ib$ , respectivamente. Definamos  $\varphi = (\alpha + \beta)/2 \mod 2\pi$  e  $\psi = (\alpha - \beta)/2 \mod 2\pi$ . Então, temos  $\varphi, \psi \in (-\pi, \pi]$  e podemos escrever  $a = \cos(\theta)e^{i(\varphi+\psi)}$  e  $b = i \sin(\theta)e^{i(\varphi-\psi)}$ . Com isso, podemos escrever  $U = \begin{pmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix}$  na forma

$$U \equiv U(\varphi, \theta, \psi) := \begin{pmatrix} \cos(\theta)e^{i(\varphi+\psi)} & i \sin(\theta)e^{i(\varphi-\psi)} \\ i \sin(\theta)e^{-i(\varphi-\psi)} & \cos(\theta)e^{-i(\varphi+\psi)} \end{pmatrix}. \quad (22.108)$$



Temos, por (22.108),

$$\begin{aligned}
 U(\varphi, 0, 0) &= \begin{pmatrix} e^{i\varphi} & 0 \\ 0 & e^{-i\varphi} \end{pmatrix} \stackrel{(22.107)}{=} \exp(i\varphi\sigma_3), \\
 U(0, \theta, 0) &= \begin{pmatrix} \cos(\theta) & i\sin(\theta) \\ i\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \stackrel{(22.105)}{=} \exp(i\theta\sigma_1), \\
 U(0, 0, \psi) &= \begin{pmatrix} e^{i\psi} & 0 \\ 0 & e^{-i\psi} \end{pmatrix} \stackrel{(22.107)}{=} \exp(i\psi\sigma_3).
 \end{aligned}$$

É claro disso que  $\{U(\varphi, 0, 0), \varphi \in (-\pi, \pi]\}$ ,  $\{U(0, \theta, 0), \theta \in [0, \pi]\}$  e  $\{U(0, 0, \psi), \psi \in (-\pi, \pi]\}$  são três subgrupos uniparamétricos de  $SU(2)$ . Importante, para nós, porém, é notar que podemos escrever

$$U(\varphi, \theta, \psi) = \exp(i\varphi\sigma_3) \exp(i\theta\sigma_1) \exp(i\psi\sigma_3). \quad (22.109)$$

**E. 22.51** *Exercício.* Verifique! ✦

A equação (22.109) é a versão para o grupo  $SU(2)$  da parametrização em termos de *ângulos de Euler* que discutimos com detalhe, no caso do grupo  $SO(3)$ , na Seção 22.3.2.2, página 1063. A forma explícita da parametrização (22.109) é dada em (22.108).

Outras parametrizações também são possíveis. Se tivéssemos escrito  $a = \cos(\theta)e^{i(\varphi+\psi)}$  e  $b = \sin(\theta)e^{i(\varphi-\psi)}$  obteríamos a parametrização

$$U(\varphi, \theta, \psi) = \exp(i\varphi\sigma_3) \exp(i\theta\sigma_2) \exp(i\psi\sigma_3). \quad (22.110)$$

**E. 22.52** *Exercício.* Verifique! ✦

Essas várias parametrizações foram discutidas no caso do grupo  $SO(3)$  na Seção 22.3.2.2, página 1063. O fato de tanto  $SO(3)$  quanto  $SU(2)$  possuírem parametrizações em termos de ângulos de Euler deve-se à relação próxima entre esses dois grupos, a ser precisada na Seção 22.3.5, página 1076.

### • Parametrização de elementos de $SU(2)$ em termos de ângulos de Tait-Bryan

No exercício que segue vamos provar que todo elemento de  $SU(2)$  pode também ser escrito na forma de um produto do tipo  $\exp(i\phi_1\sigma_1) \exp(i\phi_2\sigma_2) \exp(i\phi_3\sigma_3)$ . Essa parametrização é denominada *parametrização de Tait-Bryan de  $SU(2)$* <sup>18</sup>. A forma explícita dessa parametrização é dada em (22.112), abaixo.

**E. 22.53** *Exercício dirigido.* Sabemos que o grupo  $SU(2)$  é formado por matrizes da forma  $U = \begin{pmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix}$  com  $a, b \in \mathbb{C}$  satisfazendo  $|a|^2 + |b|^2 = 1$ . Mostre que escolhendo

$$a = (\cos(\phi_1)\cos(\phi_2) - i\sin(\phi_1)\sin(\phi_2))e^{i\phi_3} \quad \text{e} \quad b = (\cos(\phi_1)\sin(\phi_2) + i\sin(\phi_1)\cos(\phi_2))e^{-i\phi_3} \quad (22.111)$$

com  $\phi_j \in (-\pi, \pi]$ , a condição  $|a|^2 + |b|^2 = 1$  é satisfeita.

Com isso, podemos parametrizar os elementos de  $SU(2)$  como

$$U(\phi_1, \phi_2, \phi_3) = \begin{pmatrix} (\cos(\phi_1)\cos(\phi_2) - i\sin(\phi_1)\sin(\phi_2))e^{i\phi_3} & (\cos(\phi_1)\sin(\phi_2) + i\sin(\phi_1)\cos(\phi_2))e^{-i\phi_3} \\ (-\cos(\phi_1)\sin(\phi_2) + i\sin(\phi_1)\cos(\phi_2))e^{i\phi_3} & (\cos(\phi_1)\cos(\phi_2) + i\sin(\phi_1)\sin(\phi_2))e^{-i\phi_3} \end{pmatrix}, \quad (22.112)$$

<sup>18</sup>Peter Guthrie Tait (1831–1901). George Hartley Bryan (1864–1928).

com  $\phi_j \in (-\pi, \pi]$ .

Em seguida, mostre que  $\{U(\phi_1, 0, 0), \phi_1 \in (-\pi, \pi]\}$ ,  $\{U(0, \phi_2, 0), \phi_2 \in (-\pi, \pi]\}$  e  $\{U(0, 0, \phi_3), \phi_3 \in (-\pi, \pi]\}$  são três subgrupos uniparamétricos de  $SU(2)$ .

Mostre que os geradores desses subgrupos uniparamétricos são  $i\sigma_1$ ,  $i\sigma_2$  e  $i\sigma_3$ , respectivamente.

Por fim, mostre que

$$U(\phi_1, \phi_2, \phi_3) = \exp(i\phi_1\sigma_1) \exp(i\phi_2\sigma_2) \exp(i\phi_3\sigma_3) \quad (22.113)$$

usando (22.105)–(22.107) e calculando explicitamente o produto do lado direito.

A justificação da parametrização (22.111) se dá como segue. Escrevamos  $a = a_1 + ia_2$  e  $b = b_1 + ib_2$ , com  $a_k$  e  $b_k$  reais. Definamos  $a'$ ,  $b' \in \mathbb{C}$  por  $a' = ae^{-i\phi_3}$  e  $b' = be^{i\phi_3}$ , com  $\phi_3 \in \mathbb{R}$  a ser fixado adiante. Com isso, escrevemos

$$a = (a'_1 + ia'_2)e^{i\phi_3} \quad \text{e} \quad b = (b'_1 + ib'_2)e^{-i\phi_3}. \quad (22.114)$$

É claro que  $|a|^2 + |b|^2 = 1$  se e somente se  $|a'|^2 + |b'|^2 = 1$ . Escrevamos  $a' = a'_1 + ia'_2$  e  $b' = b'_1 + ib'_2$  com  $a'_k$  e  $b'_k$  reais para todo  $k$ . A condição  $|a|^2 + |b|^2 = 1$  equivale à condição  $(a'_1)^2 + (a'_2)^2 + (b'_1)^2 + (b'_2)^2 = 1$ . Definamos  $c, d \in \mathbb{C}$  por  $c = a'_1 + ib'_1$  e  $d = b'_2 - ia'_2$ .

Vamos agora fixar  $\phi_3$  através da imposição que  $c$  e  $d$  tenham a mesma fase:  $b'_1/a'_1 = -a'_2/b'_2$ , ou seja, que  $b'_1b'_2 = -a'_1a'_2$ . Escrevendo  $a'_1, a'_2, b'_1$  e  $b'_2$  em termos de  $a_1, a_2, b_1$  e  $b_2$  e  $\phi_3$ , mostre que a condição  $b'_1b'_2 = -a'_1a'_2$  equivale a

$$(a_1a_2 + b_1b_2)\cos(2\phi_3) + (a_1^2 + b_1^2 - a_2^2 - b_2^2)\sin(2\phi_3) = 0.$$

Constate que essa condição sempre pode ser satisfeita para algum  $\phi_3 \in \mathbb{R}$ .

Se a condição  $(a'_1)^2 + (a'_2)^2 + (b'_1)^2 + (b'_2)^2 = 1$  for satisfeita, podemos escrever  $(a'_1)^2 + (b'_1)^2 = (\cos(\phi_1))^2$  e  $(a'_2)^2 + (b'_2)^2 = (\sin(\phi_1))^2$  para algum ângulo  $\phi_1$ . Se a condição  $(a'_1)^2 + (b'_1)^2 = (\cos(\phi_1))^2$  for satisfeita, podemos escrever

$$a'_1 = \cos(\phi_1)\cos(\phi_2) \quad \text{e} \quad b'_1 = \cos(\phi_1)\sin(\phi_2)$$

para algum ângulo  $\phi_2$ . Se a condição  $(a'_2)^2 + (b'_2)^2 = (\sin(\phi_1))^2$  for satisfeita, então podemos escrever

$$a'_2 = -\sin(\phi_1)\sin(\phi_4) \quad \text{e} \quad b'_2 = \sin(\phi_1)\cos(\phi_4)$$

para algum ângulo  $\phi_4$ . Agora, a escolha de  $\phi_3$  impõe a condição  $b'_1b'_2 = -a'_1a'_2$ , ou seja,  $\cos(\phi_1)\sin(\phi_2)\sin(\phi_1)\cos(\phi_4) = \cos(\phi_1)\cos(\phi_2)\sin(\phi_1)$ , isto é,  $\sin(\phi_2)\cos(\phi_4) = \cos(\phi_2)\sin(\phi_4)$ . Isso implica que devemos ter  $\phi_4 = \phi_2$  e, portanto,

$$a'_1 = \cos(\phi_1)\cos(\phi_2), \quad a'_2 = -\sin(\phi_1)\sin(\phi_2), \quad b'_1 = \cos(\phi_1)\sin(\phi_2), \quad b'_2 = \sin(\phi_1)\cos(\phi_2).$$

Retornando com isso a (22.114), temos a parametrização (22.111). ✦

### 22.3.5 A Relação Entre $SO(3)$ e $SU(2)$

O leitor que acompanhou com atenção as exposições precedentes sobre os grupos  $SO(3)$  e  $SU(2)$  certamente apercebeu-se da existência de uma série de semelhanças entre ambos. Vamos agora precisá-las.

Em primeiro lugar, note-se que os geradores de  $SO(3)$  são matrizes  $3 \times 3$  satisfazendo as relações algébricas  $[J_a, J_b] = \sum_{c=1}^3 \varepsilon_{abc} J_c$ , enquanto que geradores de  $SU(2)$  são matrizes  $2 \times 2$  satisfazendo as relações algébricas  $[\sigma_a, \sigma_b] = 2i \sum_{c=1}^3 \varepsilon_{abc} \sigma_c$ . Se, porém, definirmos  $j_a := -i\sigma_a/2$ , obtemos  $[j_a, j_b] = \sum_{c=1}^3 \varepsilon_{abc} j_c$ , as mesmas relações de comutação dos geradores de  $SO(3)$ .

Seja

$$\mathfrak{so}(3) := \left\{ L \in \text{Mat}(\mathbb{R}, 3) : L = \alpha_1 J_1 + \alpha_2 J_2 + \alpha_3 J_3, \alpha_k \in \mathbb{R}, k = 1, 2, 3 \right\}$$

a álgebra de Lie (real) associada aos geradores de  $SO(3)$  e seja

$$\mathfrak{su}(2) := \left\{ l \in \text{Mat}(\mathbb{C}, 2) : l = \alpha_1 j_1 + \alpha_2 j_2 + \alpha_3 j_3, \alpha_k \in \mathbb{R}, k = 1, 2, 3 \right\}$$

a álgebra de Lie (real) associada aos geradores de  $SU(2)$ .

**E. 22.54 Exercício.** Mostre que  $\mathfrak{so}(3)$  coincide com a álgebra de Lie de todas as matrizes reais  $3 \times 3$  antissimétricas. (Vide exercício à página 101). ✦

**E. 22.55** *Exercício.* Mostre que  $\mathfrak{su}(2)$  coincide com a álgebra de Lie de todas as matrizes complexas  $2 \times 2$  antiautoadjuntas e de traço nulo. (Vide exercício à página 101). \*

É muito fácil constatar que a aplicação linear  $\varphi : \mathfrak{su}(2) \rightarrow \mathfrak{so}(3)$  dada por

$$\varphi(\alpha_1 j_1 + \alpha_2 j_2 + \alpha_3 j_3) = \alpha_1 J_1 + \alpha_2 J_2 + \alpha_3 J_3$$

é um *isomorfismo de álgebras de Lie*, ou seja, é bijetora e satisfaz

$$\varphi([l_a, l_b]) = [\varphi(l_a), \varphi(l_b)] \quad (22.115)$$

para todos  $l_a, l_b \in \mathfrak{su}(2)$ .

**E. 22.56** *Exercício importante.* Prove as afirmativas acima. \*

Assim, as álgebras de Lie  $\mathfrak{so}(3)$  e  $\mathfrak{su}(2)$  são isomorfas. Discutiremos agora que implicações isso traz sobre a relação entre os grupos  $\mathrm{SO}(3)$  e  $\mathrm{SU}(2)$ .

O isomorfismo  $\varphi$  definido acima sugere considerar-se a seguinte aplicação  $\phi : \mathrm{SU}(2) \rightarrow \mathrm{SO}(3)$  dada por

$$\phi(\exp(l)) := \exp(\varphi(l)), \quad \forall l \in \mathfrak{su}(2),$$

ou seja,

$$\phi(\exp(\theta \vec{\eta} \cdot \vec{j})) := \exp(\theta \vec{\eta} \cdot \vec{J}), \quad (22.116)$$

para todos  $\theta \in (-2\pi, 2\pi]$ , e  $\vec{\eta} \in \mathbb{R}^3$  com  $\|\vec{\eta}\| = 1$ . Antes de estudarmos as propriedades da aplicação (22.116) é preciso mostrar que a mesma está bem definida enquanto aplicação de  $\mathrm{SU}(2)$  em  $\mathrm{SO}(3)$ , no seguinte sentido: se  $\exp(\theta \vec{\eta} \cdot \vec{j})$  e  $\exp(\theta' \vec{\eta}' \cdot \vec{j})$  representarem um mesmo elemento de  $\mathrm{SU}(2)$  então a imagem de ambos por  $\phi$  é a mesma, ou seja, se

$$\exp(\theta \vec{\eta} \cdot \vec{j}) = \exp(\theta' \vec{\eta}' \cdot \vec{j}), \quad \text{então} \quad \exp(\theta \vec{\eta} \cdot \vec{J}) = \exp(\theta' \vec{\eta}' \cdot \vec{J}).$$

Sabemos por (22.103) que  $\exp(\theta \vec{\eta} \cdot \vec{j}) = \exp(-i \frac{\theta}{2} \vec{\eta} \cdot \vec{\sigma}) = \cos(\frac{\theta}{2}) \mathbb{1} - i \sin(\frac{\theta}{2}) \vec{\eta} \cdot \vec{\sigma}$ . Assim,  $\exp(\theta \vec{\eta} \cdot \vec{j}) = \exp(\theta' \vec{\eta}' \cdot \vec{j})$  ocorre se e somente se

$$\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) = \cos\left(\frac{\theta'}{2}\right) \quad \text{e} \quad \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \vec{\eta} = \sin\left(\frac{\theta'}{2}\right) \vec{\eta}', \quad (22.117)$$

pois as matrizes  $\mathbb{1}$ ,  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$  e  $\sigma_3$  compõem uma base em  $\mathrm{Mat}(\mathbb{C}, 2)$ . A primeira relação em (22.117) garante que  $\sin(\frac{\theta}{2}) = \pm \sin(\frac{\theta'}{2})$  e, portanto, temos pela segunda relação que  $\vec{\eta} = \pm \vec{\eta}'$ .

Agora, pela fórmula de Rodrigues (22.57), temos

$$\begin{aligned} \exp(\theta \vec{\eta} \cdot \vec{J}) &\stackrel{(22.57)}{=} \mathbb{1} + (1 - \cos(\theta)) (\vec{\eta} \cdot \vec{J})^2 + \sin(\theta) (\vec{\eta} \cdot \vec{J}) \\ &= \mathbb{1} + 2 \left[ \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) (\vec{\eta} \cdot \vec{J}) \right]^2 + 2 \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) (\vec{\eta} \cdot \vec{J}) \\ &\stackrel{(22.117)}{=} \mathbb{1} + 2 \left[ \sin\left(\frac{\theta'}{2}\right) (\vec{\eta}' \cdot \vec{J}) \right]^2 + 2 \cos\left(\frac{\theta'}{2}\right) \sin\left(\frac{\theta'}{2}\right) (\vec{\eta}' \cdot \vec{J}) \\ &= \mathbb{1} + (1 - \cos(\theta')) (\vec{\eta}' \cdot \vec{J})^2 + \sin(\theta') (\vec{\eta}' \cdot \vec{J}) \\ &\stackrel{(22.57)}{=} \exp(\theta' \vec{\eta}' \cdot \vec{J}). \end{aligned}$$

Na segunda (e na quarta) igualdade, acima, usamos identidades trigonométricas bem-conhecidas e na terceira igualdade usamos as relações (22.117).

Assim, provamos que se  $\exp(\theta \vec{\eta} \cdot \vec{j}) = \exp(\theta' \vec{\eta}' \cdot \vec{j})$ , então  $\exp(\theta \vec{\eta} \cdot \vec{J}) = \exp(\theta' \vec{\eta}' \cdot \vec{J})$  e vemos com isso que  $\phi$  dada em (22.116) está realmente bem-definida como aplicação de  $SU(2)$  em  $SO(3)$ . Vamos agora estudar suas propriedades objetivando provar que  $\phi$  é um homomorfismo.

Em primeiro lugar, é fácil ver que  $\phi$  é sobrejetora (por que?), mas não é injetora, pois para  $U_1 := \exp(-i\frac{0}{2}\vec{\eta} \cdot \vec{\sigma}) = \mathbb{1}$  e  $U_2 := \exp(-i\frac{2\pi}{2}\vec{\eta} \cdot \vec{\sigma}) = -\mathbb{1}$  tem-se  $\phi(U_1) = \phi(U_2) = \mathbb{1}$ . Verifique!<sup>19</sup> A questão agora é: como se comporta  $\phi$  em relação ao produto dos elementos do grupo? A resposta encontra-se na afirmativa da proposição seguinte.

**Proposição 22.15** *A aplicação  $\phi : SU(2) \rightarrow SO(3)$  definida em (22.116) é um homomorfismo do grupo  $SU(2)$  no grupo  $SO(3)$ , ou seja,  $\phi(\mathbb{1}) = \mathbb{1}$  e para todos  $U_a, U_b \in SU(2)$  vale  $\phi(U_a)\phi(U_b) = \phi(U_a U_b)$ .  $\square$*

Como  $\phi$  é sobrejetora, a Proposição 22.15 estabelece que  $\phi$  é um *epimorfismo* de  $SU(2)$  em  $SO(3)$ . Vide definição à página 112. Para um homomorfismo alternativo de  $SU(2)$  em  $SO(3)$ , vide Exercício E. 22.102, página 1127.

**Prova da Proposição 22.15.** Que  $\phi(\mathbb{1}) = \mathbb{1}$  é trivial. Provemos que  $\phi(U_a)\phi(U_b) = \phi(U_a U_b)$  para todos  $U_a, U_b \in SU(2)$ . Sejam  $U_a$  e  $U_b$  da forma

$$U_a = \exp\left(\sum_{k=1}^3 \alpha_k j_k\right), \quad U_b = \exp\left(\sum_{k=1}^3 \beta_k j_k\right),$$

com  $\alpha_k, \beta_k \in \mathbb{R}$ ,  $k = 1, 2, 3$ , e limitemos provisoriamente os valores dos  $\alpha_k$ 's e  $\beta_k$ 's a uma vizinhança  $\mathcal{O}$  suficientemente pequena de zero de modo que as matrizes  $a = \sum_{k=1}^3 \alpha_k j_k$  e  $b = \sum_{k=1}^3 \beta_k j_k$  tenham ambas normas menores que  $\frac{1}{2} \ln\left(2 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ . Essa restrição provisória às normas de  $a$  e  $b$  é útil pois coloca-nos no domínio de validade da fórmula de Baker-Campbell-Hausdorff (eq. (10.60) à página 483. Vide também (10.61)). Isso justifica, então, escrevermos

$$U_a U_b = e^a e^b = \exp(a * b),$$

onde  $a * b$  está definida em (10.60). Como a série que define  $a * b$  é convergente e envolve comutadores múltiplos de elementos da álgebra de Lie  $\mathfrak{su}(2)$ , é evidente que  $a * b$  é também um elemento de  $\mathfrak{su}(2)$  e, mais que isso, tem-se

$$a * b = \sum_{k=1}^3 \gamma_k j_k = \sum_{k=1}^3 \gamma_k(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1, \beta_2, \beta_3) j_k, \quad (22.118)$$

onde cada  $\gamma_k$  é uma função analítica das variáveis  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1, \beta_2, \beta_3$  em um aberto suficientemente pequeno próximo a zero. A analiticidade se deve ao fato de que a série que define  $a * b$  é absolutamente convergente e envolve, em cada termo, polinômios nas variáveis  $\alpha$  e  $\beta$ .

**E. 22.57 Exercício.** Lance um olhar meditativo sobre a fórmula de Baker-Campbell-Hausdorff (10.60) e convença-se da veracidade das afirmações feitas no último parágrafo sobre a analiticidade das funções  $\gamma_k$ . De modo mais iluminante, mostre usando (10.61) e as relações de comutação (22.52), que os primeiros termos de  $\vec{\gamma} = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$  são

$$\vec{\gamma} = \vec{\alpha} + \vec{\beta} + \frac{1}{2}(\vec{\alpha} \times \vec{\beta}) + \frac{1}{12}(\vec{\alpha} \times (\vec{\alpha} \times \vec{\beta}) + \vec{\beta} \times (\vec{\beta} \times \vec{\alpha})) + \dots,$$

onde  $\vec{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$  e  $\vec{\beta} = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)$ . ✦

Retomando, sejam agora

$$\phi(U_a) = \exp\left(\sum_{k=1}^3 \alpha_k J_k\right), \quad \phi(U_b) = \exp\left(\sum_{k=1}^3 \beta_k J_k\right),$$

e  $A = \varphi(a)$ ,  $B = \varphi(b)$ , ou seja,  $A = \sum_{k=1}^3 \alpha_k J_k$  e  $B = \sum_{k=1}^3 \beta_k J_k$ . Novamente, tem-se que

$$\phi(U_a)\phi(U_b) = e^A e^B = \exp(A * B).$$

<sup>19</sup>Por essa razão, não podemos definir uma aplicação  $\phi' : SO(3) \rightarrow SU(2)$  por  $\phi'(\exp(\theta \vec{\eta} \cdot \vec{J})) := \exp(\theta \vec{\eta} \cdot \vec{j})$ , revertendo (22.116). Tal aplicação não é bem-definida.

Como  $\varphi$  é um isomorfismo entre  $\mathfrak{su}(2)$  e  $\mathfrak{so}(3)$ , tem-se  $\varphi(a * b) = \varphi(a) * \varphi(b)$ , já que o produto “ $*$ ” envolve apenas combinações lineares de comutadores (múltiplos) de elementos de  $\mathfrak{su}(2)$  (vide (22.115)). Logo, segue que

$$\begin{aligned} A * B &= \varphi(a) * \varphi(b) = \varphi(a * b) = \varphi\left(\sum_{k=1}^3 \gamma_k(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1, \beta_2, \beta_3) j_k\right) \\ &= \sum_{k=1}^3 \gamma_k(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1, \beta_2, \beta_3) \varphi(j_k) = \sum_{k=1}^3 \gamma_k(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1, \beta_2, \beta_3) J_k. \end{aligned}$$

Isso concluiu que, pelo menos quando  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1, \beta_2, \beta_3$  são suficientemente próximos de zero, vale

$$\phi(U_a)\phi(U_b) = \exp(\varphi(a * b)) = \phi(\exp(a * b)) = \phi(U_a U_b).$$

O que nos falta agora é um argumento que justifique que essa igualdade vale não apenas para  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1, \beta_2, \beta_3$  suficientemente próximos de zero, mas para quaisquer valores desses parâmetros. Esse argumento é a analiticidade.

Cada elemento de matriz de  $\exp\left(\sum_{k=1}^3 \alpha_k J_k\right)$  é uma função analítica (inteira) de  $\alpha_1, \alpha_2$  e  $\alpha_3$  (pois a série que define a exponencial converge absolutamente em toda parte). O mesmo vale para os elementos de matriz de  $\exp\left(\sum_{k=1}^3 \beta_k J_k\right)$ . Assim, cada elemento de matriz do produto  $\exp\left(\sum_{k=1}^3 \alpha_k J_k\right) \exp\left(\sum_{k=1}^3 \beta_k J_k\right)$  é uma função analítica (inteira) de  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1, \beta_2$  e  $\beta_3$ . Igualmente, cada elemento de matriz de  $\exp\left(\sum_{k=1}^3 \gamma_k J_k\right)$  é uma função analítica das variáveis  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1, \beta_2$  e  $\beta_3$  quando estas estão próximas a zero (pois a composição de funções analíticas é também uma função analítica). Portanto, provamos acima que as funções analíticas  $\exp\left(\sum_{k=1}^3 \alpha_k J_k\right) \exp\left(\sum_{k=1}^3 \beta_k J_k\right)$  e  $\exp\left(\sum_{k=1}^3 \gamma_k J_k\right)$  coincidem em um aberto suficientemente pequeno. Por um teorema geral da teoria de funções de variáveis complexas, isso implica que essas funções são iguais em toda parte. Assim, vale para todos  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1, \beta_2$  e  $\beta_3$  reais ou complexos que  $\phi(U_a)\phi(U_b) = \phi(U_a U_b)$ , completando a prova. ■

Note que a aplicação  $\phi$  não pode ser um isomorfismo de grupos pois, como vimos, não é bijetora. Vale, no entanto, o seguinte resultado, importante, por exemplo, na Mecânica Quântica:

**Proposição 22.16** *Os grupos  $\mathrm{SU}(2)/\{\mathbb{1}, -\mathbb{1}\}$  e  $\mathrm{SO}(3)$  são isomorfos.* □

**Prova.** Coloquemos a seguinte questão: qual é o núcleo<sup>20</sup>  $\mathrm{Ker}(\phi)$  do homomorfismo  $\phi : \mathrm{SU}(2) \rightarrow \mathrm{SO}(3)$  definido em (2.39), ou seja, quais elementos de  $\mathrm{SU}(2)$  são mapeados na identidade de  $\mathrm{SO}(3)$  por  $\phi$ ? De acordo com (22.116) e com a Proposição 22.6, página 1059, esses são exatamente os elementos da forma  $\exp(\theta \vec{\eta} \cdot \vec{j}) = \exp(-i \frac{\theta}{2} \vec{\eta} \cdot \vec{\sigma})$  com  $\theta = 2\pi n$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ . Agora, por (22.103) temos que  $\exp(-i \frac{2\pi n}{2} \vec{\eta} \cdot \vec{\sigma}) = \cos(n\pi) \mathbb{1} - i \sin(n\pi) \vec{\eta} \cdot \vec{\sigma} = (-1)^n \mathbb{1}$ . Logo, concluímos que  $\mathrm{Ker}(\phi) = \{\mathbb{1}, -\mathbb{1}\}$ .

Como  $\phi$  é sobrejetora tem-se que sua imagem é  $\mathrm{Ran}(\phi) = \mathrm{SO}(3)$ . Assim, evocando o Teorema 2.5, página 122, para o homomorfismo  $\phi : \mathrm{SU}(2) \rightarrow \mathrm{SO}(3)$  dado em (22.116), concluímos imediatamente que  $\mathrm{SU}(2)/\{\mathbb{1}, -\mathbb{1}\}$  e  $\mathrm{SO}(3)$  são grupos isomorfos. ■

\*

As considerações acima sobre a relação entre os grupos  $\mathrm{SO}(3)$  e  $\mathrm{SU}(2)$  são de importância na Física Quântica, particularmente no que concerne à parametrização do grupo de rotações  $\mathrm{SO}(3)$  para partículas de spin 1/2. Ainda mais profunda é a relação entre o grupo  $\mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$  e o grupo de Lorentz, relação essa que discutiremos na Seção 26.1, página 1280.

<sup>20</sup>A noção de núcleo de um homomorfismo foi definida em (2.39), página 119.

• **Mais alguns resultados sobre o grupo SU(2)**

A proposição que segue estende ao grupo SU(2) resultados estabelecidos para o grupo SO(3) na Proposição 22.8, página 1061. Ela pode ser demonstrada usando-se o isomorfismo acima, mas apresentamos uma demonstração que faz uso instrutivo da série de Lie, expressão (10.52)–(10.53), página 479.

**Proposição 22.17** *Valem as relações*

$$\exp\left(-i\frac{\theta}{2}\vec{\eta}\cdot\vec{\sigma}\right)(\vec{\xi}\cdot\vec{\sigma})\exp\left(i\frac{\theta}{2}\vec{\eta}\cdot\vec{\sigma}\right) = \left(R(\theta, \vec{\eta})\vec{\xi}\right)\cdot\vec{\sigma} \quad (22.119)$$

e

$$\exp\left(-i\frac{\theta}{2}\vec{\eta}\cdot\vec{\sigma}\right)\exp\left(-i\frac{\theta'}{2}\vec{\xi}\cdot\vec{\sigma}\right)\exp\left(i\frac{\theta}{2}\vec{\eta}\cdot\vec{\sigma}\right) = \exp\left(-i\frac{\theta'}{2}\left(R(\theta, \vec{\eta})\vec{\xi}\right)\cdot\vec{\sigma}\right), \quad (22.120)$$

para  $\theta, \theta' \in \mathbb{R}$  e para dois vetores unitários  $\vec{\eta} = (\eta_1, \eta_2, \eta_3) \in \mathbb{R}^3$  e  $\vec{\xi} = (\xi_1, \xi_2, \xi_3) \in \mathbb{R}^3$ .  $\square$

*Prova.* A relação (22.120) segue diretamente de (22.119), pois  $A \exp\left(-i\frac{\theta'}{2}\vec{\xi}\cdot\vec{\sigma}\right)A^{-1} = \exp\left(-i\frac{\theta'}{2}A(\vec{\xi}\cdot\vec{\sigma})A^{-1}\right)$  para qualquer matriz invertível  $A$ . Resta-nos demonstrar (22.119).

Definamos  $j_a := -i\sigma_a/2$ . Valem, portanto, relações de comutação  $[j_a, j_b] = \varepsilon_{abc}j_c$  (aqui e no restante desta demonstração usaremos a convenção de implicitamente somarmos (de 1 a 3) sobre índices repetidos). O lado esquerdo de (22.119) fica

$$2i\xi_j e^{\theta\vec{\eta}\cdot\vec{j}} j_j e^{-\theta\vec{\eta}\cdot\vec{j}}.$$

Pela *série de Lie*, expressão (10.52)–(10.53), página 479, temos

$$e^{\theta\vec{\eta}\cdot\vec{j}} j_j e^{-\theta\vec{\eta}\cdot\vec{j}} = j_j + \sum_{a=1}^{\infty} \frac{\theta^a}{a!} \underbrace{\left[ \vec{\eta}\cdot\vec{j}, [\vec{\eta}\cdot\vec{j}, \dots, [\vec{\eta}\cdot\vec{j}, j_j] \dots] \right]}_{a \text{ vezes}}.$$

Para o primeiro comutador, temos

$$[\vec{\eta}\cdot\vec{j}, j_j] = \eta_i [j_i, j_j] = \eta_i \varepsilon_{ijk} j_k.$$

Para o segundo comutador, teremos

$$[\vec{\eta}\cdot\vec{j}, [\vec{\eta}\cdot\vec{j}, j_j]] = \eta_l \eta_i \varepsilon_{ijk} [j_l, j_k] = \eta_l \eta_i \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{lkm} j_m \stackrel{(4.7)}{=} \eta_l \eta_i (\delta_{im} \delta_{jl} - \delta_{il} \delta_{jm}) j_m = \eta_j (\vec{\eta}\cdot\vec{j}) - j_j.$$

Assim, o terceiro comutador será igual a  $[\vec{\eta}\cdot\vec{j}, \eta_j (\vec{\eta}\cdot\vec{j}) - j_j]$ . Agora, o primeiro termo é

$$[\vec{\eta}\cdot\vec{j}, \eta_j (\vec{\eta}\cdot\vec{j})] = \eta_l \eta_j \eta_k [\vec{\eta}\cdot\vec{j}, j_k] = \eta_l \eta_j \eta_k \varepsilon_{lkn} j_n = 0,$$

devido à antissimetria de  $\varepsilon_{lkn}$ . Logo, o terceiro comutador será igual a  $-\eta_i \varepsilon_{ijk} j_k$  por ser igual ao primeiro comutador, mas com o sinal trocado.

Segue disso uma expressão geral para os comutadores múltiplos:

$$\underbrace{[\vec{\eta}\cdot\vec{j}, [\vec{\eta}\cdot\vec{j}, \dots, [\vec{\eta}\cdot\vec{j}, j_j] \dots]]}_{a \text{ vezes}} = \begin{cases} (-1)^{a/2} (\eta_j (\vec{\eta}\cdot\vec{j}) - j_j), & a \text{ par}, \\ (-1)^{(a-1)/2} \eta_i \varepsilon_{ijk} j_k, & a \text{ ímpar}, \end{cases}$$

a qual pode ser facilmente provada por indução (faça-o!).

Assim,

$$\begin{aligned} \exp(\theta\vec{\eta}\cdot\vec{j}) j_j \exp(-\theta\vec{\eta}\cdot\vec{j}) &= j_j + \left( \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \theta^{2k+1}}{(2k+1)!} \right) \eta_i \varepsilon_{ijk} j_k + \left( \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k \theta^{2k}}{(2k)!} \right) (\eta_j (\vec{\eta}\cdot\vec{j}) - j_j) \\ &= j_j + \sin(\theta) \eta_i \varepsilon_{ijk} j_k + (1 - \cos(\theta)) (\eta_j (\vec{\eta}\cdot\vec{j}) - j_j). \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}
 \exp(\theta \vec{\eta} \cdot \vec{j}) (\vec{\alpha} \cdot \vec{j}) \exp(-\theta \vec{\eta} \cdot \vec{j}) &= \vec{\alpha} \cdot \vec{j} + \sin(\theta)(\vec{\eta} \times \vec{\alpha}) \cdot \vec{j} + (1 - \cos(\theta))((\vec{\eta} \cdot \vec{\alpha})(\vec{\eta} \cdot \vec{j}) - (\vec{\alpha} \cdot \vec{j})) \\
 &= \left( \vec{\alpha} + \sin(\theta)(\vec{\eta} \times \vec{\alpha}) + (1 - \cos(\theta))((\vec{\eta} \cdot \vec{\alpha})\vec{\eta} - \vec{\alpha}) \right) \cdot \vec{j} \\
 &= \left( \cos(\theta)\vec{\alpha} + \sin(\theta)(\vec{\eta} \times \vec{\alpha}) + (1 - \cos(\theta))(\vec{\eta} \cdot \vec{\alpha})\vec{\eta} \right) \cdot \vec{j} \\
 &\stackrel{(22.59)}{=} \left( R(\theta, \vec{\eta})\vec{\alpha} \right) \cdot \vec{j} .
 \end{aligned}$$

Isso completa a demonstração de (22.119). ■

### 22.3.6 O Grupo $SL(2, \mathbb{C})$

Vamos aqui tratar de um grupo fortemente aparentado ao grupo  $SU(2)$  e ao grupo de Lorentz, cujo estudo é importante na teoria dos spinores, particularmente no estudo de representações do grupo de Lorentz para partículas de spin  $1/2$ . Trata-se do grupo  $SL(2, \mathbb{C})$ . Mais sobre o grupo  $SL(2, \mathbb{C})$ , em especial, sua relação com o grupo de Lorentz, será visto na Seção 26.1, página 1280.

O grupo  $SL(2, \mathbb{C})$  é definido como o grupo formado pelas matrizes complexas  $2 \times 2$  de determinante igual a 1. Como as matrizes  $\mathbb{1}, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  formam uma base em  $\text{Mat}(\mathbb{C}, 2)$ , podemos escrever toda matriz  $A \in SL(2, \mathbb{C})$  na forma

$$A = a_0 \mathbb{1} + a_1 \sigma_1 + a_2 \sigma_2 + a_3 \sigma_3 = \begin{pmatrix} a_0 + a_3 & a_1 - ia_2 \\ a_1 + ia_2 & a_0 - a_3 \end{pmatrix},$$

com  $a_0, a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{C}$ . A condição  $\det(A) = 1$  implica  $a_0^2 - a_1^2 - a_2^2 - a_3^2 = 1$ . Assim,

$$SL(2, \mathbb{C}) = \left\{ \begin{pmatrix} a_0 + a_3 & a_1 - ia_2 \\ a_1 + ia_2 & a_0 - a_3 \end{pmatrix} \text{ com } a_0, a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{C} \text{ e } a_0^2 - a_1^2 - a_2^2 - a_3^2 = 1 \right\}. \quad (22.121)$$

Como  $a_0$  é um número complexo arbitrário, podemos escrever

$$a_0 = \cosh z,$$

para algum  $z \in \mathbb{C}$ , pois a função  $\cosh : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  é sobrejetora. Fora isso, para  $z \neq in\pi, n \in \mathbb{Z}$ , podemos definir três números complexos  $\eta_1, \eta_2, \eta_3$  por

$$\eta_1 := \frac{a_1}{\sinh z}, \quad \eta_2 := \frac{a_2}{\sinh z}, \quad \eta_3 := \frac{a_3}{\sinh z}.$$

A condição  $a_0^2 - a_1^2 - a_2^2 - a_3^2 = 1$  implica (verifique!) que os números complexos  $\eta_1, \eta_2, \eta_3$  satisfazem  $\eta_1^2 + \eta_2^2 + \eta_3^2 = 1$ . Com isso vemos que

$$SL(2, \mathbb{C}) = \left\{ \cosh(z)\mathbb{1} + \sinh(z)(\vec{\eta} \cdot \vec{\sigma}), \text{ onde } z \in \mathbb{C} \text{ e } \vec{\eta} \in \mathbb{C}^3 \text{ com } \eta_1^2 + \eta_2^2 + \eta_3^2 = 1 \right\}. \quad (22.122)$$

Note-se que a parametrização usada em (22.122) para os elementos de  $SL(2, \mathbb{C})$  não é unívoca, pois  $\cosh(z) = \cosh(z')$  e  $\sinh(z) = \sinh(z')$  caso  $z - z' = 2\pi mi$ , com  $m \in \mathbb{Z}$ .

Como vimos anteriormente quando tratamos de  $SU(2)$ , a condição  $\eta_1^2 + \eta_2^2 + \eta_3^2 = 1$  implica que  $(\vec{\eta} \cdot \vec{\sigma})^2 = \mathbb{1}$  (mesmo para vetores  $\vec{\eta}$  complexos!). Portanto,

$$\begin{aligned} \exp(z \vec{\eta} \cdot \vec{\sigma}) &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{z^m}{m!} (\vec{\eta} \cdot \vec{\sigma})^m \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k}}{(2k)!} (\vec{\eta} \cdot \vec{\sigma})^{2k} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!} (\vec{\eta} \cdot \vec{\sigma})^{2k+1} \\ &= \left( \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k}}{(2k)!} \right) \mathbb{1} + \left( \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!} \right) (\vec{\eta} \cdot \vec{\sigma}) \\ &= \cosh(z) \mathbb{1} + \sinh(z) (\vec{\eta} \cdot \vec{\sigma}). \end{aligned}$$

Assim, todo elemento  $A \in SL(2, \mathbb{C})$  é da forma  $\exp(z \vec{\eta} \cdot \vec{\sigma})$ . Em resumo,

$$SL(2, \mathbb{C}) = \left\{ \exp(z \vec{\eta} \cdot \vec{\sigma}), \text{ onde } z \in \mathbb{C} \text{ e } \vec{\eta} \in \mathbb{C}^3 \text{ com } \eta_1^2 + \eta_2^2 + \eta_3^2 = 1 \right\}. \quad (22.123)$$

Como já observamos logo após (22.122), a parametrização usada em (22.123) para os elementos de  $SL(2, \mathbb{C})$  não é unívoca.

Como já vimos, o subgrupo  $SU(2)$  de  $SL(2, \mathbb{C})$  corresponde a  $z = i\theta$ ,  $\theta \in \mathbb{R}$ , e  $\vec{\eta} \in \mathbb{R}^3$ . Como vemos,  $SU(2)$  e  $SL(2, \mathbb{C})$  têm ambas álgebras de Lie geradas pelas matrizes de Pauli, mas em  $SU(2)$  essa álgebra de Lie é uma álgebra sobre o corpo dos *reais*, enquanto que em  $SL(2, \mathbb{C})$  é sobre o corpo dos *complexos*.

Mais material sobre o grupo  $SL(2, \mathbb{C})$ , em especial, sobre sua relação com o grupo de Lorentz, será apresentado na Seção 26.1, página 1280.

## 22.4 Generalidades Sobre os Grupos $SU(n)$ e $SO(n)$

Nesta seção discutiremos algumas qualidades gerais dos grupos  $SU(n)$  e  $SO(n)$ . Para esta seção recomenda-se a leitura prévia de partes do Capítulo 24, página 1218. Começaremos com os grupos  $SU(n)$  pois seu tratamento é ligeiramente mais simples que o dos grupos  $SO(n)$ . O caso fisicamente importante do grupo  $SU(3)$  será brevemente discutido na Seção 22.4.1.1, página 1085.

### 22.4.1 Os Grupos $SU(n)$

Após termos adquirido algum conhecimento sobre o grupo  $SU(2)$ , vamos estudar alguns aspectos gerais dos grupos  $SU(n)$ ,  $n \geq 2$ . Vimos acima de modo explícito que os elementos de  $SU(2)$  podem ser escritos como exponenciais de elementos de sua álgebra de Lie. Veremos que esse fato é também válido para  $SU(n)$ .

Lembremos a definição: para  $n \geq 1$ ,

$$SU(n) := \left\{ U \in \text{Mat}(\mathbb{C}, n) \mid U^* = U^{-1} \text{ e } \det(U) = 1 \right\}.$$

Começemos com a seguinte observação.

**Proposição 22.18**  $SU(n)$  é um subgrupo compacto de  $GL(\mathbb{C}, n)$ . □

**Prova.** Provemos primeiramente que  $SU(n)$  é um subconjunto (topologicamente) fechado de  $GL(\mathbb{C}, n)$ .

Seja  $U_n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , uma sequência de matrizes de  $SU(n)$  que converge em norma a uma matriz  $U \in \text{Mat}(\mathbb{C}, n)$ , ou seja,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \|U_n - U\|_{\mathbb{C}} = 0$ , onde  $\|\cdot\|_{\mathbb{C}}$  é a norma operatorial de matrizes. Desejamos provar que  $U \in SU(n)$ .



Em primeiro lugar, notemos que podemos escrever

$$U^*U = (U - U_n + U_n)^*(U - U_n + U_n) = (U - U_n)^*(U - U_n) + U_n^*(U - U_n) + (U - U_n)^*U_n + U_n^*U_n.$$

Como os  $U_n$  são unitários,  $U_n^*U_n = \mathbb{1}$  e conclui-se que  $U^*U - \mathbb{1} = (U - U_n)^*(U - U_n) + U_n^*(U - U_n) + (U - U_n)^*U_n$ . Assim

$$\begin{aligned} \|U^*U - \mathbb{1}\|_{\mathbb{C}} &= \left\| (U - U_n)^*(U - U_n) + U_n^*(U - U_n) + (U - U_n)^*U_n \right\|_{\mathbb{C}} \\ &\leq \| (U - U_n)^*(U - U_n) \|_{\mathbb{C}} + \| U_n^*(U - U_n) \|_{\mathbb{C}} + \| (U - U_n)^*U_n \|_{\mathbb{C}} \\ &\leq \| (U - U_n)^* \|_{\mathbb{C}} \| U - U_n \|_{\mathbb{C}} + \| U_n^* \|_{\mathbb{C}} \| U - U_n \|_{\mathbb{C}} + \| (U - U_n)^* \|_{\mathbb{C}} \| U_n \|_{\mathbb{C}} \\ &\leq \| U - U_n \|_{\mathbb{C}}^2 + 2 \| U - U_n \|_{\mathbb{C}}. \end{aligned} \quad (22.124)$$

(Ao estudante deve ser claro que acima usamos os fatos que, para quaisquer matrizes  $A, B$ , complexas  $n \times n$ , valem  $\|A + B\|_{\mathbb{C}} \leq \|A\|_{\mathbb{C}} + \|B\|_{\mathbb{C}}$ ,  $\|AB\|_{\mathbb{C}} \leq \|A\|_{\mathbb{C}}\|B\|_{\mathbb{C}}$ ,  $\|A\|_{\mathbb{C}} = \|A^*\|_{\mathbb{C}}$  e que  $\|A\|_{\mathbb{C}} = 1$  se  $A$  é unitária. Se não for claro, justifique esses fatos como exercício ou leia o Capítulo 41).

Agora, como o extremo direito da sequência de desigualdades (22.124) pode ser feito arbitrariamente pequeno para  $n \rightarrow \infty$ , concluímos que o extremo esquerdo é nulo, ou seja,  $U^*U = \mathbb{1}$ . Analogamente, prova-se que  $UU^* = \mathbb{1}$ . Isso estabelece que  $U$  é unitário.

Para provar que o determinante de  $U$  vale 1, notemos que o fato de  $U_n$  convergir a  $U$  na norma operatorial implica que os elementos de matriz da sequência de matrizes  $U_n$  convergem aos elementos de matriz de  $U$  (por que?). Como o determinante de uma matriz depende continuamente de seus elementos de matriz (por que?), segue que  $\det(U) = \lim_{n \rightarrow \infty} \det(U_n) = 1$ . Isso estabelece que  $U \in \text{SU}(n)$  e isso prova que  $\text{SU}(n)$  é um subconjunto topologicamente fechado de  $\text{GL}(\mathbb{C}, n)$ , como queríamos.

Para provarmos que  $\text{SU}(n)$  é compacto, resta apenas provar que  $\text{SU}(n)$  é um conjunto limitado<sup>21</sup>. A condição  $U^*U = \mathbb{1}$  implica  $\text{Tr}(U^*U) = n$ . Assim, vale

$$\sum_{a,b=1}^n |U_{ab}|^2 = n,$$

para todo  $U \in \text{SU}(n)$ . Isso mostra que  $\text{SU}(n)$  é limitado e, portanto, compacto. ■

Seja agora  $\{U(t) \in \text{SU}(n), t \in \mathbb{R}\}$ , um subgrupo uniparamétrico de  $\text{SU}(n)$  (ou seja,  $U(0) = \mathbb{1}$  e  $U(t)U(t') = U(t+t')$ , sendo  $t \mapsto U(t)$  contínua). Pela Proposição 24.6, página 1226,  $U(t) = \exp(tA)$  para alguma matriz  $A$ . Agora, sejam  $u, v$  dois vetores arbitrários de  $\mathbb{C}^n$ . Temos que, para todo  $t$  vale  $\langle u, v \rangle_{\mathbb{C}} = \langle U(t)u, U(t)v \rangle_{\mathbb{C}}$ . Diferenciando essa igualdade em relação a  $t$ , escrevendo-se  $U(t) = \exp(tA)$  e calculando a derivada em  $t = 0$ , tem-se  $0 = \langle Au, v \rangle_{\mathbb{C}} + \langle u, Av \rangle_{\mathbb{C}}$ , ou seja,  $\langle u, (A + A^*)v \rangle_{\mathbb{C}} = 0$ . Como isso vale para todo  $u, v$  em  $\mathbb{C}^n$ , segue que  $A^* = -A$ . Fora isso<sup>22</sup>, como  $1 = \det(\exp(tA)) = \exp(t\text{Tr}(A))$ , segue que  $A$  tem traço nulo.

Assim, vimos que os geradores dos subgrupos uniparamétricos de  $\text{SU}(n)$  são antiautoadjuntos e têm traço nulo. Podemos nos perguntar se a recíproca é válida, ou seja, se todas as matrizes antiautoadjuntas e de traço nulo são geradoras de subgrupos uniparamétricos de  $\text{SU}(n)$ . Para responder isso, precisamos da seguinte proposição:

**Proposição 22.19** *Se  $A \in \text{Mat}(\mathbb{C}, n)$  é antiautoadjunta (ou seja,  $A^* = -A$ ) satisfazendo também  $\text{Tr}(A) = 0$ , então a matriz  $\exp(A)$  é um elemento de  $\text{SU}(n)$ .* □

**Prova.** Precisamos provar que  $\exp(A)$  é unitária e que seu determinante é igual a 1. Pela definição da exponencial de matrizes em termos de uma série de potências (a série de Taylor da função exponencial), sabe-se que  $\exp(M)^* = \exp(M^*)$  para qualquer matriz  $n \times n$  complexa  $M$ . Assim,  $\exp(A)^* = \exp(A^*) = \exp(-A) = \exp(A)^{-1}$ , provando que  $\exp(A)$  é unitária. Além disso, para nossa matriz  $A$ , tem-se (pela Proposição 9.14, página 373)  $\det(\exp(A)) = \exp(\text{Tr}(A)) = \exp(0) = 1$ , o que prova que  $\exp(A) \in \text{SU}(n)$ , como queríamos. ■

<sup>21</sup>Para a definição da noção de compacidade e suas propriedades, vide Seção 34.3, página 1579.

<sup>22</sup>Aqui usamos a Proposição 9.14, página 373, ou a Proposição 10.7, página 466.

Essa proposição diz-nos que, se  $A \in \text{Mat}(\mathbb{C}, n)$  é antiautoadjunta e tem traço nulo, então  $U(t) = \exp(tA)$ ,  $t \in \mathbb{R}$  é um subgrupo uniparamétrico de  $\text{SU}(n)$ . Em resumo, concluímos que o conjunto de todas as matrizes  $n \times n$  complexas antiautoadjuntas e de traço nulo é idêntico ao conjunto de todos os geradores de subgrupos uniparamétricos de  $\text{SU}(n)$ .

Como  $\text{SU}(n)$  é um subgrupo fechado de  $\text{GL}(\mathbb{C}, n)$ , segue do Teorema 24.1 que o conjunto de seus geradores é uma álgebra de Lie. Essa álgebra de Lie é dita ser a álgebra de Lie de  $\text{SU}(n)$ , e é denotada por  $\mathfrak{su}(n)$  (assim, com letras minúsculas). Como vimos,  $\mathfrak{su}(n)$  coincide com o conjunto de todas as matrizes  $n \times n$  complexas antiautoadjuntas de traço nulo.

De passagem, notemos que o conjunto de todas as matrizes  $n \times n$  complexas antiautoadjuntas de traço nulo forma uma álgebra de Lie real, fato já visto independentemente nos exercícios da página 101.

Provemos agora uma outra proposição, a qual essencialmente diz-nos que todo elemento de  $\text{SU}(n)$  pode ser obtido como exponencial de um elemento de  $\mathfrak{su}(n)$ . No caso de  $\text{SU}(2)$  isso foi provado explicitamente, quando mostramos que todo elemento de  $\text{SU}(2)$  é da forma  $\exp(i\theta\vec{\eta} \cdot \vec{\sigma})$ .

**Proposição 22.20** *Todo elemento  $U$  de  $\text{SU}(n)$  pode ser escrito na forma  $U = e^A$ , onde  $A \in \text{Mat}(\mathbb{C}, n)$  é antiautoadjunta (ou seja,  $A^* = -A$ ) e de traço nulo (ou seja,  $\text{Tr}(A) = 0$ ). Segue disso que  $\text{SU}(n)$  é um grupo a  $n^2 - 1$  parâmetros reais.*  $\square$

*Prova.* Seja  $U \in \text{SU}(n)$ . Como toda matriz unitária,  $U$  é normal, pois vale  $UU^* = U^*U (= \mathbb{1})$ . Uma das consequências do Teorema Espectral para matrizes diz-nos que toda matriz normal pode ser diagonalizada por uma matriz unitária (vide Teorema 9.16 e as páginas que o antecedem).

Assim, existe  $V$ , matriz unitária, tal que  $U = VDV^*$ , onde  $D = \text{diag}(u_1, \dots, u_n)$ , e onde os  $u_k$  são números complexos (os autovalores de  $U$ ). Da condição  $UU^* = \mathbb{1}$  segue imediatamente que  $DD^* = \mathbb{1}$ , o que implica que cada  $u_k$  é um número complexo de módulo 1:  $|u_k|^2 = 1$ . Assim, podemos escrever  $u_k = e^{i\lambda_k}$ , onde  $\lambda_k \in \mathbb{R}$ , sendo que cada  $\lambda_k$  é determinado a menos de um termo  $2\pi m$ , com  $m$  inteiro.

Note-se que, como  $U$  tem determinante 1, segue que  $1 = \det(U) = \det(VDV^*) = \det(D) = \exp(i \sum_{k=1}^n \lambda_k)$ . Assim,  $\sum_{k=1}^n \lambda_k = 2\pi m_0$ , com  $m_0$  inteiro. Podemos redefinir, digamos,  $\lambda_n$ , subtraindo-lhe  $2\pi m_0$ . Com essa nova escolha teremos

$$\sum_{k=1}^n \lambda_k = 0. \quad (22.125)$$

Definamos agora a matriz  $L = \text{diag}(i\lambda_1, \dots, i\lambda_n)$ . Note-se que, como os  $\lambda_k$  são reais, vale  $L^* = -L$ . É claro que  $D = e^L$  e também que  $U = \exp(A)$ , onde  $A = VLV^*$ . É agora elementar constatar que  $A^* = -A$ . Fora isso, por (22.125) segue que  $\text{Tr}(A) = \text{Tr}(VLV^*) = \text{Tr}(L) = i \sum_{k=1}^n \lambda_k = 0$ .

O número de parâmetros reais que determina os elementos de  $\text{SU}(n)$  é, naturalmente, a dimensão (real) do espaço das matrizes antiautoadjuntas de traço nulo. Os elementos independentes de tais matrizes podem ser contados da seguinte forma. Para uma matriz antiautoadjunta  $A$  temos  $A_{ij} = -\overline{A_{ji}}$  para  $i \neq j$  e  $A_{jj} = -\overline{A_{jj}}$ . Assim, são independentes os elementos complexos acima da diagonal principal e os elementos imaginários puros da diagonal principal. Acima da diagonal principal há  $1 + \dots + n - 1 = n(n - 1)/2$  elementos complexos e, portanto, os mesmos são determinados por  $n(n - 1)$  parâmetros reais. Na diagonal há mais  $n$  parâmetros reais independentes, mas a condição de traço nulo reduz esse número para  $n - 1$ . Assim, o número total de parâmetros reais independentes é  $n(n - 1) + n - 1 = n^2 - 1$ . Isso completa a prova.  $\blacksquare$

A Proposição 22.20 tem o seguinte corolário simples:

**Corolário 22.4** *O grupo  $\text{SU}(n)$  é conexo por caminhos e, portanto, é um espaço conexo.*  $\square$

*Prova.* Pelo que vimos, se  $U \in \text{SU}(n)$ , então  $U$  é da forma  $U = e^A$ , para alguma  $A \in \mathfrak{su}(n)$ . Logo,  $U$  pertence ao subgrupo uniparamétrico de  $\text{SU}(n)$  gerado por  $A$ :  $\{\exp(tA), t \in \mathbb{R}\}$ . Esse subgrupo conecta continuamente  $U$  à identidade  $\mathbb{1}$  (que corresponde a  $t = 0$ ).  $\blacksquare$

A Proposição 22.20 diz-nos que a exponenciação é uma aplicação sobrejetora de  $\mathfrak{su}(n)$  em  $\text{SU}(n)$ . Isso é um caso particular de um teorema mais geral que diz que isso é válido para qualquer grupo de Lie compacto, conexo e cuja álgebra de Lie seja de dimensão finita.

**E. 22.58** *Exercício.* Pelo que vimos  $\mathfrak{su}(2)$  coincide com a álgebra de Lie real de todas as matrizes complexas  $2 \times 2$ , antiautoadjuntas e de traço zero. Mostre que as matrizes  $i\sigma_1$ ,  $i\sigma_2$  e  $i\sigma_3$  formam uma base nesse espaço de matrizes. Conclua que todo elemento de  $\mathrm{SU}(2)$  é da forma  $\exp(i\alpha_1\sigma_1 + i\alpha_2\sigma_2 + i\alpha_3\sigma_3)$  com  $\alpha_k \in \mathbb{R}$ , fato esse que já estabelecemos por outros meios (vide (22.104), página 1074).  $\clubsuit$

### 22.4.1.1 Um Pouco Sobre o Grupo $\mathrm{SU}(3)$

O grupo  $\mathrm{SU}(3)$  é de grande importância na Física das Partículas Elementares, estando associado à uma simetria aproximada, dita de “sabor”, e a uma simetria exata, dita de “cor”. Não nos deteremos nesses aspectos aqui, e remetemos o estudante aos bons livros sobre Física das Partículas Elementares e Teoria Quântica de Campos (por exemplo, [350]-[351]).

O grupo  $\mathrm{SU}(3)$  é um grupo a  $3^2 - 1 = 8$  parâmetros reais. Pelo que vimos,  $\mathfrak{su}(3)$  coincide com o espaço das matrizes complexas  $3 \times 3$ , antiautoadjuntas e de traço zero. Para o estudo do grupo  $\mathrm{SU}(3)$  no contexto da Física das Partículas Elementares é conveniente introduzir-se uma base explícita nesse espaço. Como toda matriz antiautoadjunta pode ser escrita como  $i\lambda$ , onde  $\lambda$  é autoadjunta, basta-nos procurar uma base no espaço das matrizes autoadjuntas de traço zero.

Comummente adota-se as chamadas *Matrizes de Gell-Mann*<sup>23</sup>  $\lambda_i$ ,  $i = 1, \dots, 8$ , que são as seguintes matrizes:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & \lambda_2 &= \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & \lambda_3 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ \lambda_4 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & \lambda_5 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix}, & \lambda_6 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \\ \lambda_7 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}, & \lambda_8 &= \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Note que todas as matrizes  $\lambda_i$  são autoadjuntas e de traço zero, formando uma base no espaço das matrizes complexas autoadjuntas e de traço nulo (mostre isso!). As mesmas são normalizadas de modo que  $\mathrm{Tr}(\lambda_a \lambda_b) = 2\delta_{ab}$ .

**E. 22.59** *Exercício.* Prove as afirmativas do último parágrafo.  $\clubsuit$

A álgebra de Lie de  $\mathfrak{su}(3)$  pode ser expressa para as matrizes de Gell-Mann da seguinte forma:

$$[\lambda_a, \lambda_b] = 2i \sum_{c=1}^8 f_{abc} \lambda_c,$$

onde  $f_{abc}$ , as chamadas *constantes de estrutura*<sup>24</sup> de  $\mathfrak{su}(3)$ , são totalmente antissimétricas, ou seja,

$$f_{abc} = f_{bca} = f_{cab} = -f_{bac} = -f_{acb} = -f_{cba},$$

<sup>23</sup>Murray Gell-Mann (1929–).

<sup>24</sup>A noção geral de “constante de estrutura” de uma álgebra de dimensão finita foi introduzida à página 98.

sendo

$$f_{123} = 1,$$

$$f_{147} = -f_{156} = f_{246} = f_{257} = f_{345} = -f_{367} = \frac{1}{2},$$

$$f_{458} = f_{678} = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

e as demais constantes independentes são nulas.

**E. 22.60** *Exercício.* Verifique isso. *Sugestão:* tire uma tarde livre.

✦

Pelo que aprendemos da nossa discussão geral sobre grupos  $SU(n)$ , todo elemento  $U$  de  $SU(3)$  pode ser escrito na forma

$$U = \exp \left( i \sum_{k=1}^8 \alpha_k \lambda_k \right),$$

onde os  $\alpha_k$ 's são números reais.

## 22.4.2 Os Grupos $SO(n)$

Primeiramente lembremos a definição: para  $n \geq 2$ ,

$$SO(n) := \left\{ R \in \text{Mat}(\mathbb{R}, n) \mid R^T = R^{-1} \text{ e } \det(R) = 1 \right\}.$$

Sob vários aspectos os grupos  $SO(n)$  podem ser tratados de modo semelhante aos grupos  $SU(n)$ , exceto por um ponto importante: por agirem em um espaço vetorial real  $(\mathbb{R}^n)$ , não podemos aplicar o teorema espectral às matrizes ortogonais, tal como fizemos na prova da Proposição 22.20. Por isso, um desvio mais longo deverá ser seguido, ainda que as conclusões sejam as mesmas, em essência.

Analogamente ao que fizemos no caso  $SU(n)$ , comecemos com a seguinte observação.

**Proposição 22.21**  $SO(n)$  é um subgrupo compacto de  $GL(\mathbb{R}, n)$ .

□

**Prova.** A prova é uma mera imitação da demonstração correspondente no caso  $SU(n)$  e poupamo-nos de reproduzi-la. ■

Seja agora  $\{R(t) \in SO(n), t \in \mathbb{R}\}$ , um subgrupo uniparamétrico contínuo de  $SO(n)$  (ou seja,  $R(0) = \mathbb{1}$  e  $R(t)R(t') = R(t+t')$ ). Pela Proposição 24.6, página 1226,  $R(t) = \exp(tA)$  para alguma matriz  $A$ . Agora, sejam  $u, v$  dois vetores arbitrários de  $\mathbb{R}^n$ . Temos que, para todo  $t$  vale  $\langle u, v \rangle_{\mathbb{R}} = \langle R(t)u, R(t)v \rangle_{\mathbb{R}}$ . Diferenciando essa igualdade em relação a  $t$ , escrevendo-se  $R(t) = \exp(tA)$  e calculando a derivada em  $t = 0$ , tem-se  $0 = \langle Au, v \rangle_{\mathbb{R}} + \langle u, Av \rangle_{\mathbb{R}}$ , ou seja,  $\langle u, (A+A^T)v \rangle_{\mathbb{R}} = 0$ . Como isso vale para todo  $u, v$  em  $\mathbb{R}^n$ , segue que  $A^T = -A$ . Assim,  $A$  é uma matriz antissimétrica, o que implica que seus elementos diagonais são nulos. Assim, é automático que  $\text{Tr}(A) = 0$ .

Assim, vimos que os geradores dos subgrupos uniparamétricos de  $SO(n)$  são antissimétricos. Podemos nos perguntar se a recíproca é válida, ou seja, se todas as matrizes antissimétricas são geradores de subgrupos uniparamétricos de  $SU(n)$ . Para responder isso, precisamos da seguinte proposição:

**Proposição 22.22** Se  $A \in \text{Mat}(\mathbb{R}, n)$  é antissimétrica (ou seja,  $A^T = -A$ ), então a matriz  $\exp(A)$  é um elemento de  $SO(n)$ .

□

**Prova.** Precisamos provar que  $\exp(A)$  é ortogonal e que seu determinante é igual a 1. Pela definição da exponencial de matrizes em termos de uma série de potências (a série de Taylor da função exponencial), sabe-se que  $\exp(M)^T = \exp(M^T)$  para qualquer matriz  $n \times n$  real ou complexa  $M$ . Assim,  $\exp(A)^T = \exp(A^T) = \exp(-A) = \exp(A)^{-1}$ , provando que  $\exp(A)$  é ortogonal.

Como observamos,  $\text{Tr}(A) = 0$ . Logo, para nossa matriz  $A$ , tem-se  $\det(\exp(A)) = \exp(\text{Tr}(A)) = \exp(0) = 1$ , o que prova que  $\exp(A) \in \text{SO}(n)$ , como queríamos. ■

Essa proposição diz-nos que, se  $A \in \text{Mat}(\mathbb{R}, n)$  é antissimétrica, então  $R(t) = \exp(tA)$ ,  $t \in \mathbb{R}$  é um subgrupo uniparamétrico de  $\text{SO}(n)$ . Em resumo, concluímos que o conjunto de todas as matrizes  $n \times n$  reais antissimétricas é idêntico ao conjunto de todos os geradores de subgrupos uniparamétricos de  $\text{SO}(n)$ .

Como  $\text{SO}(n)$  é um subgrupo fechado de  $\text{GL}(\mathbb{R}, n)$ , segue do Teorema 24.1 que o conjunto de seus geradores é uma álgebra de Lie. Essa álgebra de Lie é dita ser a álgebra de Lie de  $\text{SO}(n)$ , e é denotada por  $\mathfrak{so}(n)$ . Como vimos,  $\mathfrak{so}(n)$  coincide com o conjunto de todas as matrizes  $n \times n$  reais antissimétricas.

De passagem, notemos que o fato de o conjunto de todas as matrizes  $n \times n$  reais antissimétricas formar uma álgebra de Lie real já fora visto independentemente nos exercícios da página 101.

Provemos agora uma outra proposição, a qual essencialmente diz-nos que todo elemento de  $\text{SO}(n)$  pode ser obtido como exponencial de um elemento de  $\mathfrak{so}(n)$ . Nos casos de  $\text{SO}(2)$  e  $\text{SO}(3)$  isso foi provado explicitamente nas páginas acima.

**Proposição 22.23** *Toda elemento  $R$  de  $\text{SO}(n)$  pode ser escrito na forma  $R = e^A$ , onde  $A \in \text{Mat}(\mathbb{R}, n)$  é antissimétrica (ou seja,  $A^T = -A$ ). Segue disso que  $\text{SO}(n)$  é um grupo a  $n(n-1)/2$  parâmetros reais.* □

**Prova.** Como dissemos não podemos aqui seguir exatamente os passos da prova da Proposição 22.20, pois o teorema espectral não se aplica de modo direto a matrizes reais.

Seja  $R \in \text{SO}(n)$ , com elementos de matriz reais  $R_{ij}$ . Normalmente  $R$  age no espaço real  $\mathbb{R}^n$ , mas podemos fazê-la agir em  $\mathbb{C}^n$  da maneira usual: para um vetor  $u \in \mathbb{C}^n$  com componentes  $u_i \in \mathbb{C}$ , tem-se  $(Ru)_i = \sum_{j=1}^n R_{ij}u_j$ . Como tal,  $R$  é uma matriz unitária de determinante 1, ou seja, um elemento de  $\text{SU}(n)$ , pois  $(R^*)_{ij} = \overline{(R)_{ji}} = (R)_{ji} = (R^T)_{ij} = (R^{-1})_{ij}$ . Aqui usamos que os  $R_{ij}$  são reais e o fato óbvio (por que?) que a inversa de  $R$  em  $\mathbb{C}^n$  é a mesma que em  $\mathbb{R}^n$ .

Dado que  $R$  é unitária, seus autovalores são números eventualmente complexos mas de módulo 1. Notemos, porém, que os autovalores são raízes do polinômio característico  $p(x) = \det(x\mathbb{1} - R)$ ,  $x \in \mathbb{C}$ . Como os  $R_{ij}$  são reais, esse polinômio tem coeficientes reais. É um fato elementar e bem conhecido que se  $x$  é raiz de um polinômio com coeficientes reais, então seu complexo conjugado  $\bar{x}$  também o é.

Se  $n$  é par, os autovalores são, portanto, pares de números complexos de módulo 1 complexo-conjugados:  $e^{i\theta}$  e  $e^{-i\theta}$ . Como o determinante de  $R$  é o produto de seus autovalores, isso automaticamente garante que  $\det(R) = 1$  desde que  $-1$ , se for autovalor, o seja com multiplicidade algébrica par.

Se  $n$  é ímpar, os autovalores são pares de números complexos de módulo 1 complexo-conjugados:  $e^{\pm i\theta}$ , mas um deles pode ser real, podendo, portanto, ser  $\pm 1$ . Como o determinante de  $R$  é o produto de seus autovalores, a condição  $\det(R) = 1$  implica que um dos autovalores deve ser  $+1$  e que  $-1$ , se for autovalor, o é com multiplicidade algébrica par.

Em resumo:

1. Se  $n$  é par, o conjunto de autovalores de  $R$  é do tipo  $\{e^{\pm i\theta_k}, k = 1, \dots, n/2, \text{ sendo } \theta_k \in \mathbb{R}\}$ .
2. Se  $n$  é ímpar, o conjunto de autovalores de  $R$  é do tipo  $\{1\} \cup \{e^{\pm i\theta_k}, k = 1, \dots, (n-1)/2, \text{ sendo } \theta_k \in \mathbb{R}\}$ .

Em ambos os casos  $-1$  pode ser autovalor e, se o for, o é com multiplicidade algébrica par.

Seja o autovalor  $e^{i\theta_k}$ . Há dois casos a considerar.

**Caso I.**  $e^{i\theta_k} \neq \pm 1$ , de modo que  $e^{i\theta_k}$  é não-real e, portanto, distinto de  $e^{-i\theta_k}$ .

Seja  $\mathbf{v}^k \in \mathbb{C}^n$  um autovetor de  $R$  com autovalor  $e^{i\theta_k}$ :  $R\mathbf{v}^k = e^{i\theta_k}\mathbf{v}^k$ , normalizado de modo que  $\|\mathbf{v}^k\|_{\mathbb{C}}^2 = \langle \mathbf{v}^k, \mathbf{v}^k \rangle_{\mathbb{C}} = 1$ . Segue que  $R\overline{\mathbf{v}^k} = e^{-i\theta_k}\overline{\mathbf{v}^k}$ , ou seja,  $\overline{\mathbf{v}^k}$  é um autovetor de  $R$  com autovalor  $e^{-i\theta_k}$ . Como  $R$  é unitária, segue que autovetores que correspondem a autovalores distintos são ortogonais (em  $\mathbb{C}^n$ ). Logo,

$$\langle \overline{\mathbf{v}^k}, \mathbf{v}^k \rangle_{\mathbb{C}} = 0 \quad \text{e, portanto,} \quad \langle \mathbf{v}^k, \mathbf{v}^k \rangle_{\mathbb{R}} = \langle \overline{\mathbf{v}^k}, \mathbf{v}^k \rangle_{\mathbb{C}} = 0. \quad (22.126)$$

Escrevamos  $\mathbf{v}^k$  separando componente a componente suas partes real e imaginária:  $\mathbf{v}^k = \mathbf{a}^k + i\mathbf{b}^k$ , com  $\mathbf{a}^k, \mathbf{b}^k \in \mathbb{R}^n$ .

As relações  $R\mathbf{v}^k = e^{i\theta_k}\mathbf{v}^k$  e  $R\overline{\mathbf{v}^k} = e^{-i\theta_k}\overline{\mathbf{v}^k}$  tornam-se

$$R\mathbf{a}^k = (\cos \theta_k)\mathbf{a}^k - (\sin \theta_k)\mathbf{b}^k,$$

$$R\mathbf{b}^k = (\sin \theta_k)\mathbf{a}^k + (\cos \theta_k)\mathbf{b}^k.$$

Note-se que, como  $\sin \theta_k \neq 0$ , essas duas relações implicam que não se pode ter  $\mathbf{a}^k = 0$ , pois isso implicaria  $\mathbf{b}^k = 0$  e vice-versa. Porém,  $\mathbf{a}^k$  e  $\mathbf{b}^k$  são vetores ortogonais em  $\mathbb{R}^n$ . De fato,

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{a}^k, \mathbf{b}^k \rangle_{\mathbb{R}} &= \frac{1}{4} \langle (\mathbf{v}^k + \overline{\mathbf{v}^k}), (\mathbf{v}^k - \overline{\mathbf{v}^k}) \rangle_{\mathbb{R}} \\ &= \frac{1}{4} \left( \langle \mathbf{v}^k, \mathbf{v}^k \rangle_{\mathbb{R}} - \langle \mathbf{v}^k, \overline{\mathbf{v}^k} \rangle_{\mathbb{R}} + \langle \overline{\mathbf{v}^k}, \mathbf{v}^k \rangle_{\mathbb{R}} - \langle \overline{\mathbf{v}^k}, \overline{\mathbf{v}^k} \rangle_{\mathbb{R}} \right) \\ &= \frac{1}{4} \left( \langle \overline{\mathbf{v}^k}, \mathbf{v}^k \rangle_{\mathbb{C}} - \langle \overline{\mathbf{v}^k}, \overline{\mathbf{v}^k} \rangle_{\mathbb{C}} + \langle \mathbf{v}^k, \mathbf{v}^k \rangle_{\mathbb{C}} - \langle \mathbf{v}^k, \overline{\mathbf{v}^k} \rangle_{\mathbb{C}} \right) \\ &\stackrel{\text{por (22.126)}}{=} \frac{1}{4} (0 - 1 + 1 - 0) = 0. \end{aligned}$$

Assim, concluímos que no subespaço real gerado pelos vetores ortogonais não-nulos  $\mathbf{a}^k$  e  $\mathbf{b}^k$ , a matriz  $R$  age (na base gerada por  $\mathbf{a}^k$  e  $\mathbf{b}^k$ , como a matriz  $\begin{pmatrix} \cos \theta_k & \sin \theta_k \\ -\sin \theta_k & \cos \theta_k \end{pmatrix}$ , elemento de  $\text{SO}(2)$ .

É importante notar também que os vetores  $\mathbf{a}^k$  e  $\mathbf{b}^k$  são também ortogonais entre si para  $k$ 's diferentes. Isso é mostrado na proposição seguinte.

**Proposição 22.24** *Se  $\mathbf{v}^j = \mathbf{a}^j + i\mathbf{b}^j$  e  $\mathbf{v}^k = \mathbf{a}^k + i\mathbf{b}^k$  são vetores de  $\mathbb{C}^n$  com  $\mathbf{a}^j, \mathbf{a}^k, \mathbf{b}^j, \mathbf{b}^k \in \mathbb{R}^n$  e se valerem  $\langle \mathbf{v}^j, \mathbf{v}^k \rangle_{\mathbb{C}} = 0$  e  $\langle \overline{\mathbf{v}^j}, \mathbf{v}^k \rangle_{\mathbb{C}} = 0$ , então tem-se*

$$\langle \mathbf{a}^j, \mathbf{a}^k \rangle_{\mathbb{R}} = \langle \mathbf{a}^j, \mathbf{b}^k \rangle_{\mathbb{R}} = \langle \mathbf{b}^j, \mathbf{a}^k \rangle_{\mathbb{R}} = \langle \mathbf{b}^j, \mathbf{b}^k \rangle_{\mathbb{R}} = 0.$$

□

Prova. De  $\langle \mathbf{v}^j, \mathbf{v}^k \rangle_{\mathbb{C}} = 0$  segue facilmente que

$$\langle \mathbf{a}^j, \mathbf{a}^k \rangle_{\mathbb{R}} + \langle \mathbf{b}^j, \mathbf{b}^k \rangle_{\mathbb{R}} = 0 \quad \text{e} \quad \langle \mathbf{b}^j, \mathbf{a}^k \rangle_{\mathbb{R}} - \langle \mathbf{a}^j, \mathbf{b}^k \rangle_{\mathbb{R}} = 0.$$

Como  $\overline{\mathbf{v}^j} = \mathbf{a}^j - i\mathbf{b}^j$ , tem-se de  $\langle \overline{\mathbf{v}^j}, \mathbf{v}^k \rangle_{\mathbb{C}} = 0$  que

$$\langle \mathbf{a}^j, \mathbf{a}^k \rangle_{\mathbb{R}} - \langle \mathbf{b}^j, \mathbf{b}^k \rangle_{\mathbb{R}} = 0 \quad \text{e} \quad \langle \mathbf{b}^j, \mathbf{a}^k \rangle_{\mathbb{R}} + \langle \mathbf{a}^j, \mathbf{b}^k \rangle_{\mathbb{R}} = 0.$$

Disso, o resultado desejado segue imediatamente. ■

O número de parâmetros reais que determina os elementos de  $\text{SO}(n)$  é, naturalmente, a dimensão (real) do espaço das matrizes antissimétricas reais. Os elementos independentes de tais matrizes podem ser contados da seguinte forma. Para uma matriz antissimétrica  $A$  temos  $A_{ij} = -A_{ji}$  para  $i \neq j$  e  $A_{jj} = 0$ . Assim, são independentes os elementos reais acima da diagonal principal, que são em número  $1 + \dots + n - 1 = n(n-1)/2$ , este sendo, portanto, o número de parâmetros reais independentes que determina os elementos de  $\text{SO}(n)$ .

O fato demonstrado nessa proposição acima mostra que os subespaços gerados por pares  $\mathbf{a}^j, \mathbf{b}^j$  são ortogonais em  $\mathbb{R}^n$ . Na base formada por esses vetores,  $R$  tem a forma de blocos diagonais  $\begin{pmatrix} \cos \theta_j & \sin \theta_j \\ -\sin \theta_j & \cos \theta_j \end{pmatrix}$ . Resta-nos ainda discutir o que se passa com os autovalores reais.

**Caso II.**  $e^{i\theta_k} = \pm 1$ .

Como comentamos, o autovalor  $-1$  tem multiplicidade algébrica par em  $\mathbb{C}^n$ . Como  $R$  é unitária em  $\mathbb{C}^n$ ,  $R$  é simples (vide definição à página 370), concluímos que a multiplicidade geométrica desse autovalor em  $\mathbb{C}^n$  é igualmente par. Os autovalores reais de  $R$  correspondem a autovetores reais (por que?). Assim, há um subespaço real de dimensão par onde  $R$  age como  $-1$ . Como a dimensão é par, podemos escrever  $R$  nesse subespaço como uma série de blocos diagonais como  $\begin{pmatrix} \cos \theta_j & \text{sen} \theta_j \\ -\text{sen} \theta_j & \cos \theta_j \end{pmatrix}$ , mas para  $\theta_j = \pi$ .

Para o autovalor  $+1$  a conclusão é a mesma, exceto que se  $n$  for ímpar a multiplicidade geométrica é ímpar. Assim,  $R$  age nesse subespaço como uma série de blocos diagonais como  $\begin{pmatrix} \cos \theta_j & \text{sen} \theta_j \\ -\text{sen} \theta_j & \cos \theta_j \end{pmatrix}$ , mas para  $\theta_j = 0$  e um bloco  $1 \times 1$  com elemento de matriz 1.

A conclusão é a seguinte: para  $R \in \text{SO}(n)$  existe uma matriz ortogonal<sup>25</sup>  $V$  tal que  $R = VBV^{-1}$ , onde  $B$  é a seguinte matriz: quando  $n$  é par, ou seja,  $n = 2m$ , para algum  $m > 0$  inteiro,  $B$  é a matriz bloco-diagonal dada por

$$B = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} \cos \theta_1 & \text{sen} \theta_1 \\ -\text{sen} \theta_1 & \cos \theta_1 \end{matrix}} & & 0 & \cdots & 0 \\ & & & & \\ & & 0 & & \boxed{\begin{matrix} \cos \theta_2 & \text{sen} \theta_2 \\ -\text{sen} \theta_2 & \cos \theta_2 \end{matrix}} & & 0 \\ & & & & & & \\ & & \vdots & & & \ddots & \\ & & & & & & \boxed{\begin{matrix} \cos \theta_m & \text{sen} \theta_m \\ -\text{sen} \theta_m & \cos \theta_m \end{matrix}} \\ & & 0 & & 0 & & \end{pmatrix}, \quad (22.127)$$

que é formada por  $m = n/2$  blocos  $2 \times 2$ , como indicado acima, sendo os demais elementos de matriz nulos. Quando  $n$  é

<sup>25</sup>A matriz é ortogonal pois faz a mudança de base para a base dos vetores  $\mathbf{a}^j$ ,  $\mathbf{b}^j$  e dos autovetores de autovalor  $\pm 1$ , os quais são todos ortogonais entre si, como provamos acima. Um fato crucial, como se vê.

ímpar, ou seja,  $n = 2m + 1$ , para algum  $m > 0$  inteiro,  $B$  é a matriz bloco-diagonal dada por

$$B = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} \cos \theta_1 & \sin \theta_1 \\ -\sin \theta_1 & \cos \theta_1 \end{matrix}} & & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ & \boxed{\begin{matrix} \cos \theta_2 & \sin \theta_2 \\ -\sin \theta_2 & \cos \theta_2 \end{matrix}} & & & 0 & 0 \\ & & \ddots & & & \vdots \\ & & & \boxed{\begin{matrix} \cos \theta_m & \sin \theta_m \\ -\sin \theta_m & \cos \theta_m \end{matrix}} & & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (22.128)$$

que é formada por  $m = (n - 1)/2$  blocos  $2 \times 2$ , como indicado acima, sendo o elemento  $B_{nn}$  igual a 1, e os demais elementos de são matriz nulos.

Definamos agora (tanto para o caso em que  $n$  é par ou ímpar)

$$J_k := \left. \frac{\partial}{\partial \theta_k} R \right|_{\theta_1 = \cdots = \theta_m = 0}.$$

É claro que cada  $J_k$  é a matriz antissimétrica composta pelo bloco  $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$  colocado na  $k$ -ésima posição, os demais elementos de matriz sendo iguais a zero. Deve ser também claro que  $J_k J_l = J_l J_k$  para todos  $k, l = 1, \dots, m$  e que

$$B = \exp(\theta_1 J_1 + \cdots + \theta_m J_m).$$

**E. 22.61** *Exercício.* Complete os detalhes. ✱

Do comentado acima, temos, então, que  $R = V B V^{-1} = \exp(A)$ , onde

$$A := V(\theta_1 J_1 + \cdots + \theta_m J_m) V^{-1}.$$

Agora, como  $V$  é ortogonal e as  $J_k$  são antissimétricas, é elementar verificar que  $A^T = -A$ . Isso completa a prova da Proposição 22.23. ■

A Proposição 22.23 diz-nos que a exponenciação é uma aplicação sobrejetora de  $\mathfrak{so}(n)$  em  $\mathrm{SO}(n)$ . Isso é um caso particular de um teorema mais geral que diz que isso é válido para qualquer grupo de Lie compacto, conexo e cuja álgebra de Lie seja de dimensão finita.

A Proposição 22.23 tem os dois seguintes corolários simples:



**Corolário 22.5** Para  $n$  ímpar existe para cada  $R \in \text{SO}(n)$  um vetor  $\vec{\eta} \in \mathbb{R}^n$  tal que  $R\vec{\eta} = \vec{\eta}$ . □

O vetor  $\vec{\eta}$  é o autovetor com autovalor 1. Se  $n$  é par pode não haver um tal vetor invariante. Esse corolário, junto com a Proposição 22.23, generaliza a Proposição 22.5, página 1056, que era restrita ao caso  $\text{SO}(3)$ .

**Corolário 22.6** O grupo  $\text{SO}(n)$  é conexo por caminhos e, portanto, é conexo. □

**Prova.** Pelo que vimos, se  $R \in \text{SO}(n)$ ,  $R$  é da forma  $R = e^A$ , para alguma  $A \in \mathfrak{so}(n)$ . Logo,  $R$  pertence ao subgrupo uniparamétrico de  $\text{SO}(n)$  gerado por  $A$ :  $\{\exp(tA), t \in \mathbb{R}\}$ . Esse subgrupo conecta continuamente  $U$  à identidade  $\mathbb{1}$  (que corresponde a  $t = 0$ ). ■

## 22.5 O Grupo Afim e o Grupo Euclidiano

Seja  $V$  um espaço vetorial (que, lembremos, é um grupo Abelian em relação à operação de adição de vetores). Vamos denotar por  $\text{GL}(V)$  o conjunto dos operadores lineares bijetores (e, portanto, inversíveis) de  $V$  em  $V$ . Também sabemos que  $\text{GL}(V)$  é um grupo.

Existe uma ação à esquerda natural de  $\text{GL}(V)$  em  $V$ , a saber  $\alpha : \text{GL}(V) \times V \rightarrow V$  dada por  $\alpha(M, v) := Mv$  onde  $M \in \text{GL}(V)$  e  $v \in V$ . (Mostre que isso define uma ação à esquerda).

Dessa forma podemos definir o produto semi-direto de  $\text{GL}(V)$  e  $V$ , denotado por  $\text{GL}(V) \otimes_{\alpha} V$ , ou simplesmente por  $\text{GL}(V) \otimes V$ , definindo em  $\text{GL}(V) \times V$  o produto

$$(M, u) \cdot (M', u') := (MM', Mu' + u),$$

onde  $M, M' \in \text{GL}(V)$  e  $u, u' \in V$ . (A noção de produto semi-direto de dois grupos foi definida na Seção 2.2.4.2, página 128).

$\text{GL}(V) \otimes V$  é denominado o *grupo afim* do espaço vetorial  $V$ .

Se  $G$  for um subgrupo de  $\text{GL}(V)$ , o produto semi-direto  $G \otimes V$  é definido analogamente  $(M, u) \cdot (M', u') := (MM', Mu' + u)$ , onde  $M, M' \in G$  e  $u, u' \in V$ . É evidente que  $G \otimes V$  é um subgrupo de  $\text{GL}(V) \otimes V$ .

**E. 22.62 Exercício.** Mostre que o conjunto de translações puras formado pelos pares  $(\mathbb{1}, v)$ ,  $v \in V$  é um subgrupo normal de  $\text{GL}(V) \otimes V$ . Sugestão: basta mostrar que trata-se de um subgrupo Abelian. ✦

**E. 22.63 Exercício.** Se  $G$  é um subgrupo normal de  $\text{GL}(V)$ , mostre que  $G \otimes V$  é um subgrupo normal de  $\text{GL}(V) \otimes V$ . ✦

**E. 22.64 Exercício.** Se  $G$  é um subgrupo de  $\text{GL}(V)$ , mostre que  $V \ni u \mapsto Ru + v$ , para  $(R, v) \in G \otimes V$ , define uma ação à esquerda de  $G \otimes V$  em  $V$ . ✦

Consideraremos dois exemplos importantes, o grupo Euclidiano<sup>26</sup> e o grupo de Poincaré<sup>27</sup> o qual será tratado na Seção 22.7.

### • O grupo Euclidiano

O chamado *grupo Euclidiano em dimensão  $n$*  é definido como sendo o grupo  $\mathbf{E}_n := \text{O}(n) \otimes \mathbb{R}^n$ .

O grupo  $\mathbf{E}_n$  tem uma ação natural em  $\mathbb{R}^n$  dada por  $\mathbb{R}^n \ni y \mapsto Ry + x$ , para cada elemento  $(R, x) \in \mathbf{E}_n$ . Assim,  $\mathbf{E}_n$  implementa em  $\mathbb{R}^n$  translações, rotações e reflexões, as chamadas *transformações Euclidianas* de  $\mathbb{R}^n$ . Essa é, em verdade, a própria motivação da definição de  $\mathbf{E}_n$ .

**E. 22.65 Exercício.** Mostre que  $\mathbb{R}^n \ni y \mapsto Ry + x$ , para  $(R, x) \in \mathbf{E}_n$ , define uma ação à esquerda de  $\mathbf{E}_n$  em  $\mathbb{R}^n$ . ✦

<sup>26</sup>Euclides de Alexandria (ci. 325 A.C. – ci. 265 A.C.).

<sup>27</sup>Jules Henri Poincaré (1854–1912).

Há um subgrupo de  $\text{GL}(n+1, \mathbb{R})$  que é isomorfo a  $\mathbf{E}_n$ . Sejam as matrizes reais  $(n+1) \times (n+1)$

$$E(R, x) := \begin{pmatrix} \boxed{R} & \boxed{x} \\ \boxed{0} & \boxed{1} \end{pmatrix}, \quad \text{com } R \in \text{O}(n) \text{ e } x \in \mathbb{R}^n.$$

Então, tem-se

$$E(R, x) E(R', x') = E(RR', Rx' + x).$$

**E. 22.66** Exercício importante. Mostre isso. ✱

Assim, o conjunto de matrizes  $\{E(R, x) \in \text{GL}(n+1, \mathbb{R}), \text{ com } R \in \text{O}(n) \text{ e } x \in \mathbb{R}^n\}$  forma um subgrupo de  $\text{GL}(n+1, \mathbb{R})$  que é isomorfo a  $\mathbf{E}_n$ . Também denotaremos esse grupo por  $\mathbf{E}_n$ .

**E. 22.67** Exercício. Prove essa última afirmativa. ✱

### • Os geradores do grupo Euclidiano $\mathbf{E}_3$

De particular interesse é o caso  $n = 3$ . É possível identificar os seguintes subgrupos uniparamétricos de  $\mathbf{E}_3$ , aqueles gerados pelas matrizes  $E(R_j, 0)$ ,  $j = 1, 2, 3$ , onde  $R_j$  são as matrizes introduzidas em (22.45) e que geram subgrupos uniparamétricos de  $\text{SO}(3)$  e aqueles gerados pelas matrizes  $E(\mathbf{1}, x_k)$ ,  $k = 1, 2, 3$ , onde  $x_1 = (x, 0, 0)$ ,  $x_2 = (0, x, 0)$  e  $x_3 = (0, 0, x)$  com  $x \in \mathbb{R}$ . Esses últimos subgrupos geram translações nas direções  $k = 1, 2, 3$ .

**E. 22.68** Exercício importante. Mostre que esses seis subgrupos são subgrupos uniparamétricos. ✱

Como facilmente se verifica, os geradores desses subgrupos são as seguintes matrizes:

$$j_1 := \begin{pmatrix} \boxed{J_1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad j_2 := \begin{pmatrix} \boxed{J_2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad j_3 := \begin{pmatrix} \boxed{J_3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

e

$$p_1 := \begin{pmatrix} \boxed{0} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad p_2 := \begin{pmatrix} \boxed{0} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad p_3 := \begin{pmatrix} \boxed{0} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

sendo que  $J_1$ ,  $J_2$  e  $J_3$  são os geradores de  $\text{SO}(3)$ , definidos em (22.46)-(22.48), página 1054. Usando a forma das matrizes

$J_k$  dada em (22.46)-(22.48), é fácil constatar as seguintes relações de comutação entre os geradores acima:

$$[j_a, j_b] = \sum_{c=1}^3 \varepsilon_{abc} j_c, \quad [p_a, p_b] = 0, \quad [j_a, p_b] = \sum_{c=1}^3 \varepsilon_{abc} p_c. \quad (22.129)$$

**E. 22.69** *Exercício.* Verifique!

✦

As relações (22.129) representam as relações de comutação da álgebra de Lie  $\mathfrak{e}_3$  do grupo  $\mathbf{E}_3$ . Note que  $p_1, p_2$  e  $p_3$  formam uma subálgebra Abeliana de  $\mathfrak{e}_3$  e que essa subálgebra é um ideal de  $\mathfrak{e}_3$ . Esse fato reflete a propriedade que o subgrupo de translações é um subgrupo normal de  $\mathbf{E}_3$ .

• **Os geradores do grupo Euclidiano  $\mathbf{E}_2$**

De maneira análoga podemos tratar o caso (mais simples) do grupo  $\mathbf{E}_2$ . Os elementos de  $\text{SO}(2) \otimes \mathbb{R}^2$  podem ser parametrizados na forma

$$\begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & x_1 \\ \sin \theta & \cos \theta & x_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \theta \in (-\pi, \pi], \quad x_1, x_2 \in \mathbb{R}.$$

Seus geradores serão

$$j_1 := \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad p_1 := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad p_2 := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Como é fácil de verificar, as relações de comutação entre esses geradores são

$$[j_1, p_1] = p_2, \quad [j_1, p_2] = -p_1, \quad [p_1, p_2] = 0.$$

Um elemento genérico dessa álgebra de Lie é da forma

$$I(\mathcal{J}, t) := \begin{pmatrix} \boxed{\mathcal{J}} & \boxed{t} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{onde} \quad \mathcal{J} = \begin{pmatrix} 0 & -\theta \\ \theta & 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad t = \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \end{pmatrix},$$

com  $-\pi < \theta \leq \pi$  e  $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$ . É um exercício fácil (faça-o!) constatar que para todo  $k \in \mathbb{N}$ , tem-se

$$I(\mathcal{J}, t)^k = I(\mathcal{J}^k, \mathcal{J}^{k-1}t).$$

Consequentemente, vale que

$$\exp(I(\mathcal{J}, t)) = \mathbb{1} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} I(\mathcal{J}, t)^k = \mathbb{1} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} I(\mathcal{J}^k, \mathcal{J}^{k-1}t) = \begin{pmatrix} \boxed{R} & \boxed{t'} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

onde

$$R := e^{\mathcal{J}} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\operatorname{sen} \theta \\ \operatorname{sen} \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad t' = f(\mathcal{J})t,$$

sendo  $f$  a função analítica inteira definida pela série de Taylor

$$f(w) := 1 + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k!} w^{k-1}, \quad w \in \mathbb{C}. \quad (22.130)$$

É fácil constatar que

$$f(w) = \begin{cases} \frac{e^w - 1}{w}, & w \neq 0, \\ 1, & w = 0. \end{cases}$$

A matriz  $f(\mathcal{J})$  pode ser calculada facilmente usando-se o fato que, para  $M = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ , valem  $M^{2k} = (-1)^k \mathbb{1}$  e  $M^{2k+1} = (-1)^k M$ ,  $k \in \mathbb{N}_0$ , de onde se extrai

$$\begin{aligned} f(\mathcal{J}) &:= \mathbb{1} + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k!} \mathcal{J}^{k-1} = \mathbb{1} + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{(2m)!} \mathcal{J}^{2m-1} + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{(2m+1)!} \mathcal{J}^{2m} \\ &= \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m \theta^{2m-1}}{(2m)!} M + \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m \theta^{2m}}{(2m+1)!} \mathbb{1} = \frac{\cos \theta - 1}{\theta} M + \frac{\operatorname{sen} \theta}{\theta} \mathbb{1} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{\operatorname{sen} \theta}{\theta} & -\frac{\cos \theta - 1}{\theta} \\ \frac{\cos \theta - 1}{\theta} & \frac{\operatorname{sen} \theta}{\theta} \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (22.131)$$

Notemos que  $\det f(\mathcal{J}) = 2 \left( \frac{1 - \cos \theta}{\theta^2} \right) \neq 0$  para  $-\pi < \theta \leq \pi$ . Assim,  $f(\mathcal{J})$  é inversível e se escolhermos  $t = f(\mathcal{J})^{-1}x$ , para qualquer  $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ , teremos

$$\exp(I(\mathcal{J}, f(\mathcal{J})^{-1}x)) = \begin{pmatrix} \boxed{R} & \boxed{x} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\operatorname{sen} \theta & x_1 \\ \operatorname{sen} \theta & \cos \theta & x_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Isso prova que todo elemento do grupo  $SO(2) \otimes \mathbb{R}^2$  pode ser escrito como exponencial de um elemento da sua própria álgebra de Lie. Essa afirmação é igualmente válida para todos os grupos  $SO(n) \otimes \mathbb{R}^n$ . A demonstração segue passos análogos aos acima pois, como observamos na Seção 22.4.2, página 1086, os elementos de  $SO(n)$  podem ser escritos em uma base conveniente na forma de blocos de matrizes de  $SO(2)$ . Isso implicará que também no caso geral a matriz  $f(\mathcal{J})$  é inversível. Deixamos os detalhes da demonstração como exercício ao leitor.

## 22.6 O Grupo de Lorentz em 3 + 1-Dimensões

Para a leitura desta seção uma certa familiaridade com rudimentos da teoria da relatividade restrita é recomendável, mas não totalmente indispensável.

### 22.6.1 O Espaço-Tempo, a Noção de Intervalo e a Estrutura Causal

É um fato elementar da natureza ser possível descrever qualquer evento idealmente pontual e de duração instantânea por uma coleção de quatro números que especificam sua posição espacial e seu instante de tempo, medidos em algum sistema de referência. A coleção de todos os eventos pontuais de duração instantânea é denominada *espaço-tempo*, noção introduzida por Minkowski<sup>28</sup>. Assim, é natural (pelo menos na ausência de campos gravitacionais, que podem alterar a topologia global do espaço-tempo) identificar o mesmo com o espaço matemático  $\mathbb{R}^4$ . Assim descrito, cada evento pode ser especificado em um sistema de referência que adote coordenadas espaciais Cartesianas, por uma quádrupla ordenada  $(x_0, x_1, x_2, x_3)$ , onde convencionamos que os três últimos números são coordenadas espaciais do evento e o primeiro sua coordenada temporal. O leitor deve ser advertido que muitos autores convencionam escrever as coordenadas espaço-temporais de um evento na forma  $(x_1, x_2, x_3, x_4)$ , onde  $x_4$  é a coordenada temporal. Isso alteraria a forma das matrizes que serão manuseadas abaixo, mas não a essência dos resultados que apresentaremos.

Na Mecânica Clássica, a primeira lei de Newton<sup>29</sup> afirma existirem certos sistemas de referência dotados da seguinte propriedade: se um corpo encontra-se isolado do restante do universo, ou seja, se sobre ele não atuam forças externas, então em relação a esse sistema de referência esse corpo se move com velocidade constante. Tais sistemas de referência são denominados *sistemas de referência inerciais*, pois neles vale o princípio de inércia. É muito fácil concluir que se um sistema de referência se move com velocidade constante em relação a um sistema de referência inercial, então ele é também um sistema de referência inercial.

Sistemas de referência inerciais desempenham um papel central, pois neles as Leis da Física assumem um carácter universal. É um postulado fundamental da Física que suas leis básicas são as mesmas em todos os sistemas de referência inerciais. Na mesma linha, é um postulado fundamental da Física que também suas constantes fundamentais, tais como a velocidade da luz  $c$ , a constante de Planck<sup>30</sup>  $\hbar$ , a constante de gravitação universal  $G$  e outras tenham também o mesmo valor em todos os sistemas de referência inerciais. Mais que isso, os sistemas de referência inerciais concordam quanto às relações de causa e efeito entre todos os eventos ocorridos no espaço-tempo. Essa série de princípios aqui mal-delineados é por vezes denominada *princípio da relatividade*. O princípio da relatividade tem sua origem nos trabalhos de Galilei<sup>31</sup> sobre Dinâmica, mas foi com a Teoria da Relatividade de Einstein<sup>32</sup> que suas reais consequências foram exploradas em sua máxima extensão.

Ao realizarmos transformações entre sistemas de coordenadas inerciais, as coordenadas dos eventos transformam-se linearmente<sup>33</sup>. Esse postulado é familiar se nos lembramos da ação do grupo de translações, da ação do grupo de

<sup>28</sup>Hermann Minkowski (1864–1909). A expressão “espaço-tempo” provém do Alemão “Raumzeit”.

<sup>29</sup>Sir Isaac Newton (1643–1727).

<sup>30</sup>Max Karl Ernst Ludwig Planck (1858–1947).

<sup>31</sup>Galileo Galilei (1564–1642).

<sup>32</sup>Albert Einstein (1879–1955).

<sup>33</sup>Transformações que preservam a estrutura causal (vide discussão adiante) no espaço-tempo de Minkowski são necessariamente lineares. Essa afirmação foi demonstrada por diversos autores de forma independente. Citamos ao estudante interessado as seguintes referências:

1. A. D. Alexandrov, “On Lorentz Transformations”, Uspehi Mat. Nauk. **5**, 187 (1950).
2. A. D. Alexandrov, “Mappings of Spaces with Families of Cones and Space-Time Transformations”, Annali di Mat. Pura Appl. **103**, 229–257 (1975).
3. E. C. Zeeman, “Causality Implies the Lorentz Group”, J. Math. Phys. **5**, 490–493 (1964).
4. H.-J. Borchers and G. C. Hegerfelt, “The Structure of Space-Time Transformations”, Commun. Math. Phys. **28**, 259–266 (1972).

rotações no espaço tridimensional ou das transformações de Galilei da Mecânica Clássica (não-relativista). Assim, cada transformação entre sistemas de coordenadas inerciais deve ser representada na forma  $Lx + t$ , onde  $L$  é uma matriz real  $4 \times 4$  e  $x$  e  $t$  são vetores de  $\mathbb{R}^4$ . Aqui,  $x$  e  $t$  são representados na forma de um vetor coluna, como  $x \equiv \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ .

O vetor  $t$  representa uma translação (tanto no espaço quanto no tempo) entre os sistemas de coordenadas. Cada matriz  $L \in \text{Mat}(\mathbb{R}, 4)$  deve depender das velocidades relativas entre os sistemas inerciais cuja transformação descreve, da direção dessas velocidades e dos ângulos relativos entre os eixos Cartesianos espaciais dos dois sistemas.  $L$  deve também conter informação sobre se os eixos Cartesianos espaciais dos dois sistemas têm a mesma orientação (positiva ou negativa) e sobre se os relógios dos dois sistemas correm na mesma direção.

Dados dois eventos quaisquer  $x, y$  no espaço-tempo (que doravante identificaremos com  $\mathbb{R}^4$ ) e cujas coordenadas sejam  $x = (x_0, x_1, x_2, x_3)$  e  $y = (y_0, y_1, y_2, y_3)$  em um determinado sistema de referência inercial, define-se o *intervalo* entre ambos como sendo a quantidade<sup>34</sup>

$$I(x, y) := I(x - y) := c^2(x_0 - y_0)^2 - (x_1 - y_1)^2 - (x_2 - y_2)^2 - (x_3 - y_3)^2,$$

onde  $c$  é a velocidade da luz no sistema de referência inercial em questão.

A noção de intervalo entre eventos é de grande importância. Para começar a explicar isso consideremos a situação na qual dois eventos distintos de coordenadas  $x$  e  $y$  representam a produção e a absorção de um mesmo raio luminoso, respectivamente. Se em um determinado sistema de referência inercial as coordenadas desses eventos são  $x = (x_0, x_1, x_2, x_3)$  e  $y = (y_0, y_1, y_2, y_3)$ , então a velocidade de propagação da luz entre  $x$  e  $y$  satisfaz

$$c^2 = \frac{(y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2 + (y_3 - x_3)^2}{(y_0 - x_0)^2}$$

e, portanto,  $I(y, x) = I(y - x) = 0$ . Um dos postulados fundamentais da Teoria da Relatividade Restrita é a afirmação que a velocidade de propagação da luz no vácuo é a mesma para qualquer sistema de referência inercial. Portanto, se em um outro sistema de referência inercial as coordenadas de  $x$  e  $y$  fossem  $x' = (x'_0, x'_1, x'_2, x'_3)$  e  $y' = (y'_0, y'_1, y'_2, y'_3)$  teríamos igualmente

$$c^2 = \frac{(y'_1 - x'_1)^2 + (y'_2 - x'_2)^2 + (y'_3 - x'_3)^2}{(y'_0 - x'_0)^2}$$

e, portanto, tem-se igualmente  $I(y', x') = I(y' - x') = 0$  com o mesmo valor  $c$  para a velocidade de propagação da luz.

Compreendemos, então, que o postulado da constância da velocidade da luz pode ser traduzido matematicamente da seguinte forma: *se o intervalo entre dois eventos é nulo em um sistema de referência inercial, então é também nulo em todos os demais sistemas de referência inerciais*. Mais adiante provaremos que, sob certas hipóteses físicas adicionais, esse fato implica uma condição ainda mais geral de invariância: o intervalo entre dois eventos quaisquer é o mesmo em qualquer sistema de referência inercial, mesmo quando não é nulo.

**Nota.** Independente de ser um postulado teórico, a constância da velocidade da luz é um fato experimental que tem sofrido sucessivas confirmações ao longo de várias décadas. Para uma lista seguramente parcial de referências recentes (das últimas quatro décadas) contendo testes experimentais da constância da velocidade da luz e testes da velocidade da luz como velocidade limite, vide:

1. T. S. Jaseja, A. Javan, J. Murray and C. H. Townes. “Test of Special Relativity or of the Isotropy of Space by Use of Infrared Masers”. Phys. Rev. **A133**, A1221–A1125 (1964).
2. T. Alväger, F. J. M. Farley, J. Kjellman and I. Wallin. “Test of the Second Postulate of Special Relativity in the GeV Region”. Phys. Lett. **12**, 260–263 (1964).
3. D. I. Blokhintsev. “Basis for Special Relativity Theory Provided by Experiments in High Energy Physics”. Sov. Phys. Uspekhi, **9**, 405 (1966).
4. Z. G. T. Guiragossian, G. B. Rothbart, M. R. Yearian, R. A. Gearhart and J. J. Murray. “Relative Velocity Measurements of Electrons and Gamma Rays at 15 GeV”. Phys. Rev. Lett. **34**, 335–338 (1975).
5. K. Brecher. “Is the Speed of Light Independent of the Velocity of the Source?”. Phys. Rev. Lett. **39**, 1051–1054, 1236(E) (1977).
6. D. Newman, G. W. Ford, A. Rich and E. Sweetman. “Precision Experimental Verification of Special Relativity”. Phys. Rev. Lett. **40**, 1355–1358 (1978).
7. K. M. Baird, D. S. Smith and B. G. Whitford. “Confirmation of the Currently Accepted Value 299 792 458 Metres per Second for the Speed of Light”. Opt. Comm. **31**, 367–368 (1979).

No comentário à página 1102 provaremos com base no Teorema 22.7, página 1043, que transformações que mantêm invariantes os intervalos entre todos os pares de eventos são necessariamente lineares.

<sup>34</sup>Novamente supomos a ausência de campos gravitacionais, em cuja presença a definição de intervalo tem de ser modificada.

8. G. L. Greene, M. Scott Dewey, E. G. Kessler, Jr. and E. Fischbach. “Test of Special Relativity by a Determination of the Lorentz Limiting Velocity: Does  $E = mc^2$ ?”. Phys. Rev. D **44**, R2216–R2219 (1991).
9. Bradley E. Schaefer. “Severe Limits on Variations of the Speed of Light with Frequency”. Phys. Rev. Lett. **82**, 4964 (1999).

Para um texto recente, vide [365]<sup>35</sup>.



Notemos que o intervalo depende da diferença  $x - y$ . Assim, translações entre sistemas de referência automaticamente mantêm invariantes os intervalos entre eventos. Por essa razão vamos por ora nos interessar apenas por transformações entre sistemas de referência que sejam do tipo  $Lx$ , com  $L \in \text{Mat}(\mathbb{R}, 4)$ .

Para prosseguirmos precisamos introduzir uma importante classificação de intervalos.

### • Intervalos de tipo luz, de tipo tempo e de tipo espaço

Em um sistema de referência, dois eventos distintos  $x$  e  $y$  são ditos ser<sup>36</sup>

1. do *tipo luz* se  $I(x, y) = 0$ ,
2. do *tipo tempo* se  $I(x, y) > 0$ ,
3. do *tipo espaço* se  $I(x, y) < 0$ .

Se dois eventos distintos  $x = (x_0, x_1, x_2, x_3)$  e  $y = (y_0, y_1, y_2, y_3)$  são do tipo luz, então

$$\frac{(y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2 + (y_3 - x_3)^2}{(y_0 - x_0)^2} = c^2.$$

Se dois eventos distintos  $x = (x_0, x_1, x_2, x_3)$  e  $y = (y_0, y_1, y_2, y_3)$  são do tipo tempo, então

$$\frac{(y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2 + (y_3 - x_3)^2}{(y_0 - x_0)^2} < c^2.$$

Se dois eventos distintos  $x = (x_0, x_1, x_2, x_3)$  e  $y = (y_0, y_1, y_2, y_3)$  são do tipo espaço, então

$$\frac{(y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2 + (y_3 - x_3)^2}{(y_0 - x_0)^2} > c^2.$$

Com isso, entendemos que

1. Se dois eventos são separados por um intervalo do tipo luz pode haver um sinal físico conectando ambos e que se propagaria com a velocidade da luz.
2. Se dois eventos são separados por um intervalo do tipo tempo pode haver um sinal físico conectando ambos e que se propagaria com velocidade menor que a da luz.
3. Se dois eventos são separados por um intervalo do tipo espaço não pode haver um sinal físico conectando ambos, pois o mesmo se propagaria com velocidade maior que a da luz.

A importância dessas considerações é a seguinte. É uma crença da Física atual que as partículas elementares que compõem toda a matéria conhecida do universo não podem mover-se com velocidade maior que a da luz. Consequentemente, se dois eventos são separados por um intervalo do tipo espaço não pode haver nenhum processo físico que, iniciando-se em um evento, influencie o outro. Diz-se, então, que esses eventos são *causalmente desconectados*, ou seja, não pode haver nenhuma *relação causal* (isto é, de causa e efeito) entre ambos. Por outro lado, se dois eventos são separados por um intervalo do tipo tempo então pode haver alguma influência causal entre ambos, por exemplo, através de uma partícula ou corpo material que, movendo-se no espaço-tempo com velocidades inferiores à da luz, parta de um evento e influencie o outro. No caso de intervalos do tipo luz a situação é a mesma mas, então, a eventual influência de um no outro deve propagar-se com a velocidade da luz.

<sup>35</sup> Agradecemos à Profa. Renata Zukanovich Funchal pelas referências acima.

<sup>36</sup> As expressões em Inglês são “light-like”, “time-like” e “space-like”, respectivamente. Essa nomenclatura provém do Alemão: “lichtartig”, “zeitartig” e “raumartig”.

**E. 22.70** *Exercício.* Passe vários dias meditando sobre os parágrafos acima.

✦

• **A estrutura causal. Transformações que preservam a estrutura causal**

Como se percebe, se aceitarmos a ideia que processos físicos não podem propagar-se com velocidades superiores à da luz, a noção de intervalo estabelece as possíveis relações de causalidade entre todos os eventos do espaço-tempo, ao dizer quais eventos podem eventualmente influenciar-se (aqueles que são do tipo tempo ou do tipo luz um em relação ao outro) e quais não podem de forma alguma influenciar-se (aqueles que são do tipo espaço um em relação ao outro).

É uma crença da Física atual que essas relações de causalidade devem ser as mesmas para todos os sistemas de referência inerciais, pois os mesmos descrevem as mesmas Leis Físicas e devem perceber as mesmas relações de causa e efeito entre os eventos que compõem o universo.

**E. 22.71** *Exercício.* Mais alguns dias de meditação.

✦

Com isso, podemos introduzir a seguinte definição: dizemos que uma transformação linear  $L$ , que representa uma transformação entre dois sistemas de referência, *preserva a estrutura causal do espaço-tempo* se a mesma satisfizer todas as três condições seguintes:

1.  $I(Lx, Ly) = 0$  sempre que  $I(x, y) = 0$ ,
2.  $I(Lx, Ly) > 0$  sempre que  $I(x, y) > 0$ ,
3.  $I(Lx, Ly) < 0$  sempre que  $I(x, y) < 0$ .

Em palavras,  $L$  preserva o tipo de intervalo que separa todos os eventos do espaço-tempo, levando todos os intervalos do tipo luz em intervalos do tipo luz, levando todos os intervalos do tipo tempo em intervalos do tipo tempo e levando todos os intervalos do tipo espaço em intervalos do tipo espaço.

Notemos que a condição que impõe que  $I(Lx, Ly) = 0$  sempre que  $I(x, y) = 0$  é a condição da invariância da velocidade da luz (já mencionada acima), mas as demais representam algo diferente: a invariância das relações de causalidade por mudança de sistemas de referência inerciais.

Um pouco mais abaixo exploraremos as consequências matemáticas que essas imposições têm sobre as transformações  $L$  e concluiremos que, sob as hipóteses acima (e sob uma hipótese adicional de ausência de dilatações), vale uma consequência mais forte, a saber, que  $I(Lx, Ly) = I(x, y)$  para todos os eventos  $x$  e  $y$ . Assim, transformações que preservam a estrutura causal e não envolvem dilatações preservam o valor do intervalo entre dois eventos quaisquer do espaço-tempo.

Por fim, apenas a título de ilustração, exemplifiquemos como seria uma transformação que preserva os intervalos de tipo luz mas não os demais, preservando, portanto, a velocidade da luz mas violando a estrutura causal. Consideremos um espaço-tempo bidimensional, onde cada evento é descrito por uma coordenada espacial  $x_1$  e uma temporal  $t$ . Seja a matriz  $L = \begin{pmatrix} 0 & c^{-1} \\ c & 0 \end{pmatrix}$ . O intervalo entre os eventos  $x = \begin{pmatrix} t \\ x_1 \end{pmatrix}$  e  $0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$  seria  $I(x, 0) = c^2 t^2 - x_1^2$ . Porém, pela transformação  $L$  teríamos  $\begin{pmatrix} t' \\ x'_1 \end{pmatrix} = L \begin{pmatrix} t \\ x_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c^{-1} x_1 \\ ct \end{pmatrix}$ . Assim,

$$I(Lx, L0) = c^2 (t')^2 - (x'_1)^2 = x_1^2 - c^2 t^2 = -I(x, 0).$$

Logo, como os intervalos  $I(Lx, L0)$  e  $I(x, 0)$  diferem por um sinal, teríamos para quaisquer eventos  $x$  e  $y$

1.  $I(Lx, Ly) = 0$  sempre que  $I(x, y) = 0$ ,
2.  $I(Lx, Ly) > 0$  sempre que  $I(x, y) < 0$ ,
3.  $I(Lx, Ly) < 0$  sempre que  $I(x, y) > 0$ .

Portanto, intervalos tipo luz seriam levados em intervalos tipo luz, mas intervalos tipo espaço seriam levados em intervalos tipo tempo e vice-versa. Como se vê por esse exemplo, em transformações que violam a estrutura causal deve haver algo como uma permutação entre coordenadas espaciais e temporais.

**E. 22.72** *Exercício.* São tais transformações fisicamente aceitáveis?

✦



## • Dilatações

Vamos agora discutir uma classe de transformações que preservam a estrutura causal: as dilatações.

Para  $\lambda \in \mathbb{R}$ ,  $\lambda \neq 0$ , a matriz  $D(\lambda) := \lambda \mathbb{1}$  simplesmente transforma cada  $x \in \mathbb{R}^4$  em  $\lambda x$ , ou seja,  $D(\lambda)$  representa uma *dilatação* ou mudança de escala das coordenadas espaço-temporais de eventos. É evidente que  $I(D(\lambda)x, D(\lambda)y) = \lambda^2 I(x, y)$ , de modo que dilatações são transformações lineares que preservam a estrutura causal.

São as dilatações aceitáveis enquanto mudanças de sistemas de referência inerciais? Essa é uma questão muito interessante e sutil e demanda uma certa discussão.

Claramente, mudanças de escala podem ocorrer naturalmente no caso de tratarmos de dois sistemas de referência que adotam sistemas métricos diferentes, como no caso em que um sistema mede distâncias em metros e um outro em jardas (mas de modo que as medidas de tempo em um e outro sejam tais que ambos atribuam o mesmo valor numérico para  $c$ ). Essas situações são triviais e poderiam ser contornadas se ambos os sistemas de referência concordassem no uso de uma mesma escala de distâncias. Mas para que isso seja possível é preciso que haja objetos físicos, em repouso em ambos os sistemas de referência, que possuam as mesmas dimensões. Poderíamos, por exemplo, adotar como unidade de distância o “tamanho médio” do átomo de Hidrogênio<sup>37</sup>, ou o comprimento de onda de uma linha de emissão de um certo átomo ou molécula, fixos em cada sistema de referência.

Mas o que garante que o tamanho médio de um átomo de hidrogênio parado na Terra é o mesmo que o de um átomo de hidrogênio parado em uma galáxia distante que se move em relação a nós com uma certa velocidade? A princípio, nada garante, mas a crença que sistemas de referência inerciais descrevem a mesma física envolve também a crença que certas escalas básicas de distância e de tempo, como o tamanho médio de um átomo em repouso, são as mesmas em todos os sistemas de referência inerciais. Por exemplo, o tamanho médio do átomo de hidrogênio em repouso depende de propriedades físicas que regem a interação entre o próton e o elétron que o constituem (a lei de Coulomb<sup>38</sup>), das leis da Mecânica que regem seus movimentos (as leis da Mecânica Quântica), assim como dos valores das cargas elétricas e das massas de repouso dessas partículas. Essas grandezas e leis devem ser as mesmas em quaisquer sistemas de referência inerciais.

Intimamente associada a isso está a questão dos valores das massas de repouso das partículas elementares. Isso se deve ao fato seguinte. A Física Quântica ensina-nos que se  $m_0$  é a massa de repouso de uma partícula elementar, digamos um elétron, então a quantidade  $\hbar/(m_0 c)$  tem dimensão de comprimento (verifique!). Esse é o chamado *comprimento de onda Compton*<sup>39</sup> da partícula de massa de repouso  $m_0$ . Assim, para qualquer partícula de massa de repouso  $m_0$  há uma escala de distância a ela associada.

É parte da crença associada ao princípio da relatividade que as massas em repouso das partículas elementares, como elétrons, quarks etc., são as mesmas quer na Terra quer em uma galáxia distante que se move em relação a nós com velocidade constante. Até onde se sabe, essa hipótese tem corroboração experimental, pois sua violação levaria a consequências observacionais em relação ao comportamento da matéria que nunca foram verificadas quer em observações astronômicas quer em experimentos com aceleradores de partículas feitos na Terra. Como  $\hbar$  e  $c$  são constantes físicas, devem também ser as mesmas em quaisquer sistemas de referência inerciais e, portanto, o comprimento de onda Compton de, digamos, um elétron em repouso deve ser o mesmo em qualquer sistema de referência inercial e com ele poderíamos estabelecer uma escala de distâncias universal.

Em um universo em que não houvessem escalas de distância ou de massa naturais, como por exemplo no caso de universos em que todas as partículas elementares têm massa nula e não formam estados ligados (como átomos) que possuam alguma escala de distância típica, não haveria maneira de sistemas de referência inerciais concordarem com escalas espaciais e temporais e, aí, a inclusão de dilatações seria inevitável nas transformações entre sistemas de referência. Esse não é o caso do universo em que vivemos, pois nele sabidamente habitam partículas massivas.

Assim, apesar de as dilatações satisfazerem a condição de não violarem a estrutura causal do espaço-tempo, as mesmas não devem ser consideradas como transformações legítimas de coordenadas espaço-temporais entre sistemas de referência inerciais no nosso universo, pois partimos da crença que esses sistemas podem sempre concordar quanto a certas escalas básicas de certos objetos físicos em repouso, tais como as massas de repouso de certas partículas elementares e seus comprimentos de onda Compton.

### E. 22.73 *Exercício.* Mais meditação.

✱

<sup>37</sup>A noção de “tamanho médio” de um átomo pode ser definida na Mecânica Quântica, mas não entraremos em detalhes aqui.

<sup>38</sup>Charles Augustin de Coulomb (1736–1806).

<sup>39</sup>Arthur Holly Compton (1892–1962). Compton recebeu o prêmio Nobel de Física de 1927 “for his discovery of the effect named after him”.

- **A convenção que  $c = 1$**

Daqui por diante adotaremos a convenção simplificadora que  $c = 1$ . Isso pode ser obtido pela escolha de um sistema de unidades métricas conveniente. Essa convenção, muito empregada atualmente em textos de Física Teórica<sup>40</sup>, tem a vantagem de “limpar” as expressões matemáticas de fatores que dependam de  $c$ . Admitidamente, há uma certa “preguiça” na adoção dessa convenção, mas a mesma traz vantagens. De qualquer forma, os fatores  $c$  omitidos podem ser facilmente recuperados por considerações de análise dimensional.

- **Convenção sobre a notação matricial**

Nesta seção sobre o grupo de Lorentz convençionamos que índices matriciais e vetoriais variam de 0 a 3. Assim, representaremos uma matriz  $M \in \text{Mat}(\mathbb{R}, 4)$  na forma

$$M = \begin{pmatrix} M_{00} & M_{01} & M_{02} & M_{03} \\ M_{10} & M_{11} & M_{12} & M_{13} \\ M_{20} & M_{21} & M_{22} & M_{23} \\ M_{30} & M_{31} & M_{32} & M_{33} \end{pmatrix}. \quad (22.132)$$

- **A métrica de Minkowski**

É muito conveniente escrever o intervalo entre dois eventos  $x$  e  $y$  com uso da seguinte notação matricial:

$$I(x - y) = (x_0 - y_0)^2 - (x_1 - y_1)^2 - (x_2 - y_2)^2 - (x_3 - y_3)^2 = \langle (x - y), \eta(x - y) \rangle_{\mathbb{R}},$$

onde

$$\eta := \eta(1, 3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{-\mathbb{1}} \\ 0 & & & \\ 0 & & & \end{pmatrix}. \quad (22.133)$$

**E. 22.74** *Exercício.* Verifique!

✱

A matriz  $\eta$  é frequentemente denominada *métrica de Minkowski*.

## 22.6.2 A Invariância do Intervalo

Aprendemos acima que o postulado da invariância da velocidade de propagação da luz, visto como uma transformação linear entre sistemas de referência inerciais, implica que se  $x$  e  $y$  são dois eventos tais que

$$I(x, y) = \langle (x - y), \eta(x - y) \rangle_{\mathbb{R}} = 0, \quad (22.134)$$

então tem-se também

$$I(Lx, Ly) = \langle L(x - y), \eta L(x - y) \rangle_{\mathbb{R}} = 0 \quad (22.135)$$

para qualquer transformação linear  $L \in \text{Mat}(\mathbb{R}, 4)$  que represente uma mudança entre sistemas de referência inerciais.

<sup>40</sup>Em textos teóricos de Mecânica Quântica e Teoria Quântica de Campos, adota-se também  $\hbar = 1$ .

Nesta seção iremos provar uma afirmação, o Teorema 22.9, adiante, que generaliza ainda mais o descrito no último parágrafo, a saber, provaremos que se  $L \in \text{Mat}(\mathbb{R}, 4)$  representa uma mudança entre sistemas de referência inerciais que *preserva a estrutura causal* e *não envolve dilatações* (definições adiante), então  $I(x, y) = I(Lx, Ly)$  para quaisquer eventos  $x$  e  $y$ , mesmo aqueles para os quais  $I(x, y) \neq 0$ . Esse fato releva a importância da noção de intervalo na teoria da relatividade: o mesmo representa uma grandeza invariante por transformações de sistemas de referência do tipo descrito acima. Dessa propriedade de invariância extrairemos todas as informações importantes sobre as transformações de Lorentz.

### • Transformações lineares e a estrutura causal

Vamos aqui provar um teorema de importância central no entendimento da relação entre transformações  $L \in \text{Mat}(\mathbb{R}, 4)$  e sua relação com a estrutura causal do espaço-tempo.

**Teorema 22.9** *Seja  $L$  um elemento inversível de  $\text{Mat}(\mathbb{R}, 4)$  que representa uma mudança entre sistemas de referência inerciais que preserva os intervalos de tipo luz. Então,*

$$\eta L^T \eta L = (L^T \eta L)_{00} \mathbb{1} = \pm |\det(L)|^{1/2} \mathbb{1}. \quad (22.136)$$

Se além disso  $L$  preserva a estrutura causal, então,

$$\eta L^T \eta L = (L^T \eta L)_{00} \mathbb{1} = |\det(L)|^{1/2} \mathbb{1}. \quad (22.137)$$

Por fim, se  $L$  preserva a estrutura causal e não envolve dilatações, então

$$\eta L^T \eta L = \mathbb{1}. \quad (22.138)$$

Uma consequência imediata dessa relação é que  $I(Lx, Ly) = I(x, y)$  para todos  $x, y \in \mathbb{R}^4$ .  $\square$

**Prova.** Para  $x \in \mathbb{R}^4$ , sejam as formas quadráticas

$$I(x) := \langle x, \eta x \rangle_{\mathbb{R}} \quad \text{e} \quad J(x) := \langle Lx, \eta Lx \rangle_{\mathbb{R}} = \langle x, L^T \eta Lx \rangle_{\mathbb{R}}.$$

É bastante claro que

$$I(x) = (x_0)^2 - \|\vec{x}\|^2 = [x_0 - \|\vec{x}\|] [x_0 + \|\vec{x}\|], \quad (22.139)$$

onde  $\vec{x} \equiv (x_1, x_2, x_3)$  e  $\|\vec{x}\| := \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$ . Por outro lado,

$$J(x) = (L^T \eta L)_{00} (x_0)^2 + a(\vec{x})x_0 + b(\vec{x}), \quad (22.140)$$

onde<sup>41</sup>

$$a(\vec{x}) := 2 \sum_{a=1}^3 (L^T \eta L)_{0a} x_a \quad \text{e} \quad b(\vec{x}) := \sum_{a,b=1}^3 (L^T \eta L)_{ab} x_a x_b. \quad (22.141)$$

A partir daqui há dois casos a se considerar<sup>42</sup>:  $(L^T \eta L)_{00} = 0$  e  $(L^T \eta L)_{00} \neq 0$ .

**I. Caso  $(L^T \eta L)_{00} = 0$ .** Sabemos por (22.134)-(22.135) (tomando  $y = 0$ ) que se  $L$  preserva intervalos tipo luz, então se tivermos  $I(x) = 0$  para algum  $x \in \mathbb{R}^4$ , valerá também  $J(x) = 0$ . A condição  $I(x) = 0$  se dá caso  $x_0 = \|\vec{x}\|$  e se  $x_0 = -\|\vec{x}\|$ . Nesses casos a condição  $J(x) = 0$  significa,

$$a(\vec{x})\|\vec{x}\| + b(\vec{x}) = 0 \quad \text{e} \quad -a(\vec{x})\|\vec{x}\| + b(\vec{x}) = 0,$$

respectivamente. Subtraindo-se a segunda relação da primeira, obtemos que  $a(\vec{x})\|\vec{x}\| = 0$ , o que implica  $a(\vec{x}) = 0$ , sendo  $\vec{x}$  arbitrário. Segue de (22.141) que  $(L^T \eta L)_{0a} = 0$  para cada  $a = 1, 2, 3$ . Ora, junto com a hipótese  $(L^T \eta L)_{00} = 0$ , isso estabeleceu que  $(L^T \eta L)_{0a} = 0$  para cada  $a = 0, 1, 2, 3$ , ou seja, que a primeira linha da matriz  $L^T \eta L$  é nula, implicando que  $0 = \det(L^T \eta L) = -\det(L)^2$ . Isso provou que  $L$  não possui inversa, estabelecendo, por contradição com as hipóteses, que o caso  $(L^T \eta L)_{00} = 0$  não é possível.

<sup>41</sup>Aqui usou-se que  $(L^T \eta L)_{0a} = (L^T \eta L)_{a0}$  pois  $L^T \eta L$  é simétrica, ou seja,  $(L^T \eta L)^T = L^T \eta L$ .

<sup>42</sup>Agradecemos a Bruno Hideki Kimura por apontar-nos a existência de dois casos (e não de apenas um) e pelo tratamento do primeiro.

**II. Caso**  $(L^T \eta L)_{00} \neq 0$ . Neste caso  $J(x)$  é um polinômio de grau dois em  $x_0$  e, devido a (22.140), podemos escrever

$$J(x) = (L^T \eta L)_{00} [x_0 - y_1(\vec{x})] [x_0 - y_2(\vec{x})],$$

sendo  $y_1(\vec{x})$  e  $y_2(\vec{x})$  tais que

$$-(L^T \eta L)_{00} (y_1(\vec{x}) + y_2(\vec{x})) = a(\vec{x}) \quad \text{e} \quad (L^T \eta L)_{00} y_1(\vec{x}) y_2(\vec{x}) = b(\vec{x}).$$

As expressões  $y_1(\vec{x})$  e  $y_2(\vec{x})$ , porém, podem ser determinadas independentemente dessas relações, por serem as raízes de  $J(x)$  como função de  $x_0$ . Sabemos por (22.134)-(22.135) (tomando  $y = 0$ ) que se  $L$  preserva intervalos tipo luz, então se tivermos  $I(x) = 0$  para algum  $x \in \mathbb{R}^4$ , valerá também  $J(x) = 0$ . Para  $\vec{x}$  fixo qualquer, vemos por (22.139) e (22.140) que tanto  $I(x)$  quanto  $J(x)$  são polinômios de segundo grau em  $x_0$  e, pelo que acabamos de comentar, têm os mesmos zeros. Dessa forma, também por (22.139) e (22.140), podemos escolher  $y_1(\vec{x}) = \|\vec{x}\|$  e  $y_2(\vec{x}) = -\|\vec{x}\|$ .

Com isso e com (22.139), teremos que

$$J(x) = (L^T \eta L)_{00} (x_0 - \|\vec{x}\|)(x_0 + \|\vec{x}\|) = (L^T \eta L)_{00} I(x)$$

para todo  $x \in \mathbb{R}^4$ . Pela definição de  $I(x)$  e  $J(x)$ , segue disso que

$$\langle Lx, \eta Lx \rangle_{\mathbb{R}} = (L^T \eta L)_{00} \langle x, \eta x \rangle_{\mathbb{R}} \quad (22.142)$$

para todo  $x \in \mathbb{R}^4$ , ou seja,

$$\langle x, [L^T \eta L - (L^T \eta L)_{00} \eta] x \rangle_{\mathbb{R}} = 0$$

para todo  $x \in \mathbb{R}^4$ . Como  $L^T \eta L - (L^T \eta L)_{00} \eta$  é uma matriz simétrica (verifique!), a Proposição 3.4, página 212, implica  $L^T \eta L - (L^T \eta L)_{00} \eta = 0$ . Como  $\eta^2 = \mathbb{1}$ , segue que

$$\eta L^T \eta L = (L^T \eta L)_{00} \mathbb{1}. \quad (22.143)$$

Como  $\det(\eta) = -1$  e  $\det(L) = \det(L^T)$ , obtemos ao tomar o determinante de ambos os lados da igualdade acima que

$$\det(L)^2 = \left[ (L^T \eta L)_{00} \right]^4,$$

de onde extraímos que

$$(L^T \eta L)_{00} = \pm |\det(L)|^{1/2}. \quad (22.144)$$

Com (22.143), isso prova (22.136).

Inserindo (22.144) em (22.142) teríamos  $\langle Lx, \eta Lx \rangle_{\mathbb{R}} = \pm |\det(L)|^{1/2} \langle x, \eta x \rangle_{\mathbb{R}}$  para todo  $x \in \mathbb{R}^4$ . Portanto, se  $L$  preserva a estrutura causal, apenas o sinal positivo é aceitável. Assim, por (22.143), temos nesse caso  $L^T \eta L \eta = |\det(L)|^{1/2} \mathbb{1}$  e isso completa a prova de (22.137).

Seja agora  $\mathcal{L}$  o conjunto de todas as matrizes  $L_0 \in \text{Mat}(\mathbb{R}, 4)$  que satisfazem  $\eta L_0^T \eta L_0 = \mathbb{1}$ . Afirmamos que se  $L$  satisfaz (22.137), então  $L$  é da forma  $L = \lambda L_0$  com  $\lambda \in \mathbb{R}_+$  e  $L_0 \in \mathcal{L}$ . De fato, se  $L \neq 0$  satisfaz (22.137), teremos para qualquer  $\lambda > 0$  que  $\eta(\lambda^{-1} L)^T \eta(\lambda^{-1} L) = \lambda^{-2} |\det(L)|^{1/2} \mathbb{1}$  e, escolhendo  $\lambda = |\det(L)|^{1/4}$ , concluímos que  $\lambda^{-1} L \in \mathcal{L}$ .

Assim, se  $L$  satisfaz (22.137),  $L$  é produto de uma transformação de  $\mathcal{L}$  com uma transformação  $D(\lambda) = \lambda \mathbb{1}$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}_+$ ,  $\lambda \neq 0$ . Se  $L$  não envolve dilatações, então  $L \in \mathcal{L}$ . Isso prova (22.138). ■

## • Comentário sobre a linearidade

*Comentário.* Como vimos, as transformações lineares de  $\mathcal{L}$  têm a propriedade de manterem invariantes os intervalos entre eventos, ou seja, são tais que  $I(Lx, Ly) = I(x, y)$  para todos  $x, y \in \mathbb{R}^4$ . Podemos nos colocar a questão: qual a forma mais geral de uma transformação sobrejetora  $A: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$  que tenha a mesma propriedade, ou seja, que seja tal que  $I(A(x), A(y)) = I(x, y)$  para todos  $x, y \in \mathbb{R}^4$ , sem que tenhamos de assumir *a priori* que  $A$  seja linear? A resposta é dada por uma simples aplicação do Lema 22.1 e do Teorema 22.7, páginas 1042 e 1043, respectivamente.

De fato, notando-se que  $\omega(x, y) := \langle x, \eta y \rangle_{\mathbb{R}}$  define uma forma bilinear simétrica e não-degenerada em  $\mathbb{R}^4$ , concluímos do Teorema 22.7 que existem um vetor constante  $c$  e um operador linear  $L: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$  satisfazendo  $\langle Lx, \eta Ly \rangle_{\mathbb{R}} = \langle x, \eta y \rangle_{\mathbb{R}}$  para todos  $x, y \in \mathbb{R}^4$ , tais que vale para todo  $x \in \mathbb{R}^4$  a relação  $A(x) = Lx + c$ .

Assim, concluímos que a transformação mais geral no espaço-tempo que preserva os intervalos entre eventos é uma combinação de uma transformação de Lorentz com uma translação. Como discutiremos mais adiante, essas transformações formam um grupo, denominado *grupo de Poincaré*. ♣

\* \* \*

Como vemos, um papel especial é desempenhado pelas matrizes de  $\mathcal{L}$ . Por toda nossa discussão, tais matrizes representam as transformações entre sistemas de referência inerciais que respeitam a imposição física de preservar a estrutura causal e ignoram dilatações e translações. Daqui por diante vamos nos concentrar exclusivamente em tais transformações. Como veremos, o conjunto  $\mathcal{L}$ , introduzido acima, tem a estrutura de um grupo, um fato de grande importância. Trata-se do chamado *grupo de Lorentz*, um objeto de importância central na teoria da relatividade especial.

### 22.6.3 O Grupo de Lorentz

O Teorema 22.9, acima, diz-nos que se  $L \in \text{Mat}(\mathbb{R}, 4)$  representa uma transformação linear entre sistemas de referência inerciais que preserva a estrutura causal e não envolve dilatações e translações, então  $\eta L^T \eta L = \mathbb{1}$ , o que equivale a dizer que  $L^{-1} = \eta L^T \eta$ . Isso também equivale a dizer que

$$\langle Lx, \eta Ly \rangle_{\mathbb{R}} = \langle x, \eta y \rangle_{\mathbb{R}}$$

para todos  $x, y \in \mathbb{R}^4$ . Esse fato e a particular forma da matriz  $\eta$  mostram que o conjunto de tais matrizes  $L$  coincide com o **grupo**  $O(1, 3)$ , que previamente definimos (vide página 1046).

Devido à sua grande importância na Física Relativística, o grupo  $O(1, 3)$  recebe denominação especial, a saber, é denominado *grupo de Lorentz*<sup>43</sup>, em honra ao grande físico holandês, pioneiro nos estudos da teoria da relatividade. O grupo  $O(1, 3)$  é também denotado pelo símbolo  $\mathcal{L}$ . Os elementos de  $\mathcal{L}$  são denominados *transformações de Lorentz*.

Equivalentemente, o grupo de Lorentz  $\mathcal{L} = O(1, 3)$  é o grupo de todas as matrizes  $4 \times 4$  que satisfazem

$$L^{-1} = \eta L^T \eta. \quad (22.145)$$

Como todo elemento  $L$  do grupo de Lorentz satisfaz  $L\eta L^T \eta = \mathbb{1}$ , tem-se  $\det(L\eta L^T \eta) = 1$ , ou seja,  $\det(L)^2 = 1$ , pois  $\det(L\eta L^T \eta) = \det(L) \det(\eta)^2 \det(L^T)$ ,  $\det(\eta) = -1$  e  $\det(L) = \det(L^T)$ . Assim,  $\det(L) = \pm 1$ . O subconjunto  $SO(1, 3)$  de  $O(1, 3)$ , formado pelas matrizes  $L$  que satisfazem  $\det(L) = +1$  é um subgrupo, denotado por  $\mathcal{L}_+$ .

A seguinte proposição sobre o grupo de Lorentz será usada adiante:

**Proposição 22.25** *Se  $L \in \mathcal{L}$ , então  $L^T \in \mathcal{L}$ .* □

*Prova.* Sabemos que para qualquer matriz  $M$  vale  $(M^T)^T = M$  e que para qualquer matriz inversível  $M$  vale  $(M^T)^{-1} = (M^{-1})^T$ . Se  $L \in \mathcal{L}$ , tem-se, por definição, que  $L^{-1} = \eta L^T \eta$ . Assim, como  $\eta^T = \eta$ , segue que  $(L^{-1})^T = \eta L \eta$ , ou seja,  $(L^T)^{-1} = \eta (L^T)^T \eta$ , significando que  $L^T \in \mathcal{L}$ , que é o que se queria provar. ■

#### • O grupo de Poincaré

Retornemos brevemente às transformações afins gerais que preservam intervalos e que, como vimos, são da forma  $Lx + t$ , com  $t \in \mathbb{R}^4$  sendo uma translação e  $L \in \mathcal{L}$ . A composição de duas de tais transformações  $L'x + t'$  e  $Lx + t$ , é a transformação  $L'(Lx + t) + t' = L'Lx + L't + t'$ .

Essa última expressão naturalmente conduz ao seguinte. Seja  $\mathcal{P} := \mathcal{L} \times \mathbb{R}^4$  o conjunto de todos os pares ordenados  $(L, t)$  com  $L \in \mathcal{L}$  e  $t \in \mathbb{R}^4$ . Então,  $\mathcal{P}$  é um grupo com o produto definido por

$$(L', t') \cdot (L, t) := (L'L, L't + t').$$

Como se vê, esse produto faz de  $\mathcal{P}$  o produto semi-direto  $\mathcal{L} \ltimes \mathbb{R}^4$ . O produto semi-direto de grupos foi definido na Seção 2.2.4.2, página 128.

<sup>43</sup>Hendrik Antoon Lorentz (1853–1928).

**E. 22.75** *Exercício.* Verifique que o produto acima é de fato associativo. Identifique o elemento neutro e determine a inversa de cada par  $(L, t) \in \mathcal{P}$ . ✱

Esse grupo, que combina transformações de Lorentz e translações, é denominado *grupo de Poincaré*<sup>44</sup> em homenagem ao eminente matemático francês que também foi um dos pioneiros da teoria da relatividade<sup>45</sup>. O grupo de Poincaré é o grupo mais geral de transformações afins do espaço-tempo que mantêm os intervalos invariantes.

Mais adiante (página 1120) vamos retornar ao grupo de Poincaré para analisar sua estrutura enquanto grupo de Lie. Antes, porém, precisamos nos concentrar plenamente no grupo de Lorentz.

## 22.6.4 Alguns Subgrupos do Grupo de Lorentz

Antes de e com o propósito de estudarmos a estrutura do grupo de Lorentz, vamos identificar alguns de seus subgrupos mais importantes.

### • Troca de paridade e reversão temporal

As seguintes matrizes são elementos do grupo de Lorentz

$$P_1 := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad P_2 := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad P_3 := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (22.146)$$

e

$$P := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad T := \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (22.147)$$

**E. 22.76** *Exercício importante.* Verifique que as cinco matrizes acima são membros do grupo de Lorentz, ou seja, satisfazem  $L\eta L^T\eta = \mathbb{1}$ . ✱

As matrizes  $P$ ,  $P_1$ ,  $P_2$  e  $P_3$  implementam *trocas de paridade*, ou seja, reversão da orientação dos eixos de coordenadas espaciais de pontos de  $\mathbb{R}^4$ . A matriz  $T$  implementa uma *reversão temporal*, ou seja, inversão da coordenada temporal de pontos de  $\mathbb{R}^4$ .

É bastante evidente que  $(T)^2 = (P)^2 = (P_1)^2 = (P_2)^2 = (P_3)^2 = \mathbb{1}$  e que  $P = P_1 P_2 P_3$ . As matrizes  $\mathbb{1}$ ,  $T$ ,  $P_1$ ,  $P_2$ ,  $P_3$  geram um subgrupo do grupo de Lorentz que implementa reversões temporais e de paridade.

<sup>44</sup>Jules Henri Poincaré (1854–1912).

<sup>45</sup>Vários historiadores da Ciência apontaram para o fato que Poincaré, assim como Lorentz, antecedeu Einstein em alguns aspectos. Poincaré foi o primeiro (em 1905, o ano da publicação do trabalho seminal de Einstein, mas independente deste) a estudar o caráter de grupo das transformações de Lorentz, tendo provado que toda transformação de Lorentz é combinação de rotações com um “*boost*”, fato que estabeleceremos no Teorema 22.10, mais adiante.

• **Os subgrupos Rot e SRot**

Se  $R$  é uma matriz  $4 \times 4$  da forma

$$R := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{r_0} \\ 0 & & & \\ 0 & & & \end{pmatrix},$$

onde  $r_0$  é uma matriz  $3 \times 3$  pertencente a  $O(3)$ , então é fácil verificar que  $R$  é um elemento do grupo de Lorentz, ou seja, satisfaz  $R\eta R^T = \mathbb{1}$ .

**E. 22.77** *Exercício.* Verifique isso, usando os fatos que  $r_0 r_0^T = \mathbb{1}$  e que

$$R^T := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{(r_0)^T} \\ 0 & & & \\ 0 & & & \end{pmatrix} = R^{-1}.$$

✱

É fácil constatar que o conjunto das matrizes da forma de  $R$  acima forma um subgrupo do grupo de Lorentz. Esse subgrupo será designado aqui<sup>46</sup> por Rot.

**E. 22.78** *Exercício.* Mostre que Rot é isomorfo ao grupo  $O(3)$ :  $\text{Rot} \simeq O(3)$ .

✱

Se  $R$  é da forma acima, é evidente também que  $\det(R) = \det(r_0)$ . Logo, Rot tem um subgrupo SRot de matrizes  $R$  com  $\det(R) = 1$  da forma

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{r_0} \\ 0 & & & \\ 0 & & & \end{pmatrix},$$

onde  $r_0$  é uma matriz  $3 \times 3$  pertencente a  $SO(3)$ .

**E. 22.79** *Exercício.* Mostre que SRot é isomorfo ao grupo  $SO(3)$ :  $\text{SRot} \simeq SO(3)$ .

✱

**E. 22.80** *Exercício.* Mostre que se  $R \in \text{Rot}$  mas  $R \notin \text{SRot}$ , então existe uma matriz  $R' \in \text{SRot}$  com  $R = PR'$ .

✱

**E. 22.81** *Exercício.* Mostre que se  $R \in \text{Rot}$  mas  $R \notin \text{SRot}$ , então existe uma matriz  $R'' \in \text{SRot}$  com  $R = P_1 R''$ .

✱

As matrizes de SRot implementam rotações puras (sem troca de paridade) nas coordenadas espaciais de  $\mathbb{R}^4$ .

---

<sup>46</sup>Essa notação não é uniforme na literatura.

• **Os “boosts” de Lorentz**

Um conjunto muito importante de matrizes de Lorentz é formado pelos chamados “boosts”<sup>47</sup> de Lorentz na direção 1. Tais matrizes são da forma

$$B_1(v) := \begin{pmatrix} \gamma(v) & -v\gamma(v) & 0 & 0 \\ -v\gamma(v) & \gamma(v) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (22.148)$$

onde

$$\gamma(v) := \frac{1}{\sqrt{1-v^2}}$$

e  $v \in (-1, 1)$  (lembrar que adotamos a convenção  $c = 1$ ). O estudante deve aperceber-se que as matrizes  $B_1(v)$  são o equivalente em  $3 + 1$  dimensões dos “boosts” de Lorentz (22.42), em  $1 + 1$  dimensões, que encontramos em nosso estudo do grupo  $O(1, 1)$  (vide página 1050 e seguintes).

**E. 22.82** Exercício muito importante. Verifique que as matrizes  $B_1(v)$  acima são membros do grupo de Lorentz, ou seja, satisfazem  $B_1(v)\eta B_1(v)^T \eta = \mathbb{1}$  para todo  $v \in (-1, 1)$ . \*

Outro fato de grande importância é o seguinte: o conjunto de todas as matrizes  $B_1(v)$  com  $v \in (-1, 1)$  forma um subgrupo do grupo de Lorentz, denominado *subgrupo dos boosts de Lorentz* (na direção 1) e que designaremos aqui por  $B_1$ . Isso decorre do seguinte:

1. Para  $v = 0$

$$B_1(0) = \mathbb{1}.$$

2. Para todo  $v \in (-1, 1)$

$$B_1(v)^{-1} = B_1(-v).$$

3. Para todos  $v, v' \in (-1, 1)$

$$B_1(v')B_1(v) = B_1\left(\frac{v' + v}{1 + v'v}\right). \quad (22.149)$$

**E. 22.83** Exercício muito importante. Verifique essas três afirmações. \*

Observe-se que o item 3, acima, está intimamente associado à regra relativista de composição de velocidades.

Segue também de (22.149) que  $B_1$  é um subgrupo Abelian:  $B_1(v')B_1(v) = B_1(v)B_1(v')$  para todos  $v', v \in (-1, 1)$ .

**E. 22.84** Exercício. Mostre que  $\det(B_1(v)) = 1$  para todo  $v \in (-1, 1)$  e, portanto,  $B_1 \subset \text{SO}(1, 3)$ . \*

De forma geral, um *boost* de Lorentz é um elemento do grupo de Lorentz que seja da forma  $RB_1(v)R^{-1}$  para algum  $v \in (-1, 1)$  e algum  $R \in \text{SRot}$ . O conjunto de todos os *boosts* de Lorentz é

$$B := \left\{ RB_1(v)R^{-1}, \ v \in (-1, 1) \text{ e } R \in \text{SRot} \right\}. \quad (22.150)$$

Como discutiremos mais adiante, esse conjunto  $B$  **não** é um subgrupo do grupo de Lorentz. No entanto, para cada  $R \in \text{SRot}$  fixo, o conjunto

$$B_R := \left\{ RB_1(v)R^{-1}, \ v \in (-1, 1) \right\}$$

<sup>47</sup>Do inglês *to boost*: impulsionar, propelar, impelir, empurrar. Esse vocábulo é geralmente usado em Física para denominar transformações entre sistemas de coordenadas inerciais que envolvam apenas mudanças de velocidades.



é um subgrupo do grupo de Lorentz que contém *boosts* em uma determinada direção, fixada por  $R$ . De fato, para cada  $R \in \text{SRot}$  fixo, o produto  $(RB_1(v)R^{-1})(RB_1(v')R^{-1}) = RB_1((v+v')/(1+vv'))R^{-1}$  é novamente um elemento de  $B_R$  e as demais propriedades de um grupo são trivialmente verificáveis.

Analogamente aos *boosts* de Lorentz na direção 1, há os *boosts* de Lorentz nas direções 2 e 3, representados por matrizes como

$$B_2(v) := \begin{pmatrix} \gamma(v) & 0 & -v\gamma(v) & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -v\gamma(v) & 0 & \gamma(v) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad B_3(v) := \begin{pmatrix} \gamma(v) & 0 & 0 & -v\gamma(v) \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -v\gamma(v) & 0 & 0 & \gamma(v) \end{pmatrix}. \quad (22.151)$$

Todas as afirmações feitas sobre as matrizes  $B_1$  têm seu correspondente análogo para as matrizes  $B_2$  e  $B_3$ . Os respectivos subgrupos são aqui denotados por  $B_2$  e  $B_3$ .

Geometricamente as matrizes  $B_2(v)$  e  $B_1(v)$  estão relacionadas por uma matriz de rotação de  $\text{SRot}$  que implementa uma rotação de  $\pi/2$  em torno do eixo 3:

$$B_2(v) = RB_1(v)R^{-1},$$

onde

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \text{SRot}.$$

**E. 22.85** *Exercício*. Verifique! ✱

Analogamente, é possível obter a matriz  $B_3(v)$  a partir de  $B_1(v)$  ou de  $B_2(v)$  através de rotações.

**E. 22.86** *Exercício importante*. Uma propriedade de significado profundo na Teoria da Relatividade é o fato que *boosts* de Lorentz em direções distintas não comutam! Mostre explicitamente, por exemplo, que  $B_1(v)B_2(v') \neq B_2(v')B_1(v)$ , exceto se  $v = 0$  ou  $v' = 0$ .

Esse é um fenômeno puramente relativístico: *boosts* de Galilei em direções distintas comutam! Verifique! ✱

Adiante, em nosso estudo da estrutura geral do grupo de Lorentz, mostraremos o quão importantes os *boosts* de Lorentz são. A saber, mostraremos que toda matriz de Lorentz é obtida por uma sucessão de uma rotação, um *boost* (na direção 1, por exemplo) e eventualmente uma outra rotação. Eventualmente, trocas de paridade e inversões temporais podem ocorrer também. A afirmação precisa está no Teorema 22.10.

## 22.6.5 A Estrutura do Grupo de Lorentz

Antes de iniciarmos esta seção, sugerimos ao leitor apreciar o estudo do grupo  $O(1, 1)$  iniciado à página 1050.

Vamos aqui tentar caracterizar a forma geral de um elemento do grupo de Lorentz  $O(1, 3)$ . Como já observamos,

$O(1, 3)$  possui um subgrupo  $\text{SRot} \simeq \text{SO}(3)$  formado por matrizes da forma

$$R := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{r_0} \\ 0 & & & \\ 0 & & & \end{pmatrix},$$

onde  $r_0$  é uma matriz  $3 \times 3$  pertencente a  $\text{SO}(3)$ .

Vamos no que segue demonstrar o seguinte teorema, que nos fornece a forma geral de toda matriz  $L \in \mathcal{L}$  e que é de importância em todo estudo detalhado do grupo de Lorentz.

**Teorema 22.10** *Seja  $L$  um elemento do grupo de Lorentz  $O(1, 3)$ . Então, vale uma das quatro afirmações seguintes:*

**Ia.**  $\det(L) = +1$ ,  $L_{00} \geq +1$  e  $L$  é da forma

$$L = R_a B_1(v) R_b, \quad (22.152)$$

para algum  $v \in (-1, 1)$  e para  $R_a, R_b \in \text{SRot}$ .

**Ib.**  $\det(L) = +1$ ,  $L_{00} \leq -1$  e  $L$  é da forma

$$L = T P R_a B_1(v) R_b, \quad (22.153)$$

para algum  $v \in (-1, 1)$  e para  $R_a, R_b \in \text{SRot}$ .

**IIa.**  $\det(L) = -1$ ,  $L_{00} \leq -1$  e  $L$  é da forma

$$L = T R_a B_1(v) R_b, \quad (22.154)$$

para algum  $v \in (-1, 1)$  e para  $R_a, R_b \in \text{SRot}$ .

**IIb.**  $\det(L) = -1$ ,  $L_{00} \geq +1$  e  $L$  é da forma

$$L = P R_a B_1(v) R_b, \quad (22.155)$$

para algum  $v \in (-1, 1)$  e para  $R_a, R_b \in \text{SRot}$ .

Fazemos notar que as representações (22.152)–(22.155) não são unívocas. □

A demonstração detalhada deste teorema encontra-se na Seção 22.B, página 1130.

### • Dois resultados sobre o grupo de Lorentz

**Proposição 22.26** *Se  $L$  é um elemento do grupo de Lorentz  $O(1, 3)$  e  $L^{-1}$  é sua inversa, então tem-se que  $(L^{-1})_{00} = L_{00}$ .* □

*Prova.* A prova é simples, pois sabemos que  $L^{-1} = \eta L^T \eta$ . Então, usando-se a representação (22.B.10) e calculando-se

explicitamente, tem-se

$$\begin{aligned}
 L^{-1} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{\phantom{0000}} \\ 0 & \phantom{0000} -\mathbb{1} \\ 0 & \phantom{0000} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} L_{00} & \boxed{a^T} \\ \boxed{b} & \boxed{l^T} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{\phantom{0000}} \\ 0 & \phantom{0000} -\mathbb{1} \\ 0 & \phantom{0000} \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} L_{00} & \boxed{-a^T} \\ \boxed{-b} & \boxed{l^T} \end{pmatrix},
 \end{aligned}$$

o que leva à constatação que  $(L^{-1})_{00} = L_{00}$ . ■

**Proposição 22.27** *Se  $L$  e  $L'$  são dois elementos quaisquer do grupo de Lorentz  $O(1, 3)$ , então tem-se que*

$$\text{senal}((LL')_{00}) = \text{senal}(L_{00}) \text{senal}(L'_{00}).$$

□

*Prova.* Sejam  $L$  e  $L'$  duas transformações de Lorentz que, como em (22.B.10), representamos na forma de blocos

$$L = \begin{pmatrix} L_{00} & \boxed{b^T} \\ \boxed{a} & \boxed{l} \end{pmatrix}, \quad L' = \begin{pmatrix} L'_{00} & \boxed{b'^T} \\ \boxed{a'} & \boxed{l'} \end{pmatrix}. \quad (22.156)$$

Vamos formar o produto  $L'' = LL'$  e estudar o sinal do elemento  $L''_{00}$  da matriz resultante. Pela regra de produto de matrizes teremos (verifique!)  $L''_{00} = L_{00}L'_{00} + b^T a'$ . O produto de matrizes  $b^T a'$  é idêntico ao produto escalar  $b \cdot a'$  dos vetores  $b$  e  $a'$  de  $\mathbb{R}^3$  (por que?). Assim,

$$L''_{00} = L_{00}L'_{00} + b \cdot a'. \quad (22.157)$$

Há dois casos a considerar: o caso em que  $\text{senal}(L_{00}) = \text{senal}(L'_{00})$  e o caso em que  $\text{senal}(L_{00}) \neq \text{senal}(L'_{00})$ .

**1. Caso em que  $\text{senal}(L_{00}) = \text{senal}(L'_{00})$ .**

Nessa situação tem-se por (22.157) que

$$L''_{00} \geq L_{00}L'_{00} - |b \cdot a'|.$$

Sabemos que  $b \cdot a' = \|b\| \|a'\| \cos \theta$ , onde  $\|b\|$  é o comprimento de  $b$ ,  $\|a'\|$  é o comprimento de  $a'$  e  $\theta$  é o ângulo que esses dois vetores formam entre si. É óbvio, portanto, que  $|b \cdot a'| \leq \|b\| \|a'\|$  (desigualdade de Cauchy). Assim,

$$L''_{00} \geq L_{00}L'_{00} - \|b\| \|a'\|. \quad (22.158)$$

Pela Proposição 22.32, página 1134, valem  $\|b\| = \|a\|$  e  $\|b'\| = \|a'\|$ , assim como  $L_{00} = \pm\sqrt{1+\|a\|^2}$  e  $L'_{00} = \pm\sqrt{1+\|a'\|^2}$ . Assim, por (22.158),

$$L''_{00} \geq \sqrt{1+\|a\|^2}\sqrt{1+\|a'\|^2} - \|a\| \|a'\| > 0.$$

Portanto,  $\text{sinal}(L''_{00}) = +1 = \text{sinal}(L_{00}) \text{sinal}(L'_{00})$ , como queríamos provar.

## 2. Caso em que $\text{sinal}(L_{00}) \neq \text{sinal}(L'_{00})$ .

Por (22.157) tem-se

$$L''_{00} \leq L_{00}L'_{00} + |b \cdot a'|.$$

Sabemos que  $b \cdot a' = \|b\| \|a'\| \cos \theta$ , onde  $\|b\|$  é o comprimento de  $b$ ,  $\|a'\|$  é o comprimento de  $a'$  e  $\theta$  é o ângulo que esses dois vetores formam entre si. É óbvio, portanto, que  $|b \cdot a'| \leq \|b\| \|a'\|$  (desigualdade de Cauchy). Assim,

$$L''_{00} \leq L_{00}L'_{00} + \|b\| \|a'\|. \quad (22.159)$$

Pela Proposição 22.32, valem  $\|b\| = \|a\|$  e  $\|b'\| = \|a'\|$ , assim como  $L_{00} = \pm\sqrt{1+\|a\|^2}$  e  $L'_{00} = \mp\sqrt{1+\|a'\|^2}$  (pois  $\text{sinal}(L_{00}) \neq \text{sinal}(L'_{00})$ ). Assim, por (22.159),

$$L''_{00} \leq -\sqrt{1+\|a\|^2}\sqrt{1+\|a'\|^2} + \|a\| \|a'\| < 0.$$

Portanto,  $\text{sinal}(L''_{00}) = -1 = \text{sinal}(L_{00}) \text{sinal}(L'_{00})$ , como queríamos provar. ■

## • Os subgrupos próprio, ortócrono e restrito do grupo de Lorentz

Os conjuntos de transformações de Lorentz que satisfazem as condições Ia, Ib, IIa ou IIb acima são obviamente conjuntos disjuntos. Não é difícil mostrar (mas não o faremos aqui) que cada um é um conjunto conexo. Portanto, o grupo de Lorentz  $\mathcal{L} = O(1, 3)$  possui quatro componentes conexas. Seguindo a convenção, denotaremos essas quatro componentes da seguinte forma:

1.  $\mathcal{L}_+^\uparrow := \left\{ L \in \mathcal{L} \mid \det(L) = +1 \text{ e } \text{sinal}(L_{00}) = +1 \right\},$
2.  $\mathcal{L}_-^\uparrow := \left\{ L \in \mathcal{L} \mid \det(L) = -1 \text{ e } \text{sinal}(L_{00}) = +1 \right\},$
3.  $\mathcal{L}_+^\downarrow := \left\{ L \in \mathcal{L} \mid \det(L) = +1 \text{ e } \text{sinal}(L_{00}) = -1 \right\},$
4.  $\mathcal{L}_-^\downarrow := \left\{ L \in \mathcal{L} \mid \det(L) = -1 \text{ e } \text{sinal}(L_{00}) = -1 \right\}.$

Note-se também que apenas  $\mathcal{L}_+^\uparrow$  contém a identidade  $\mathbb{1}$ .  $\mathcal{L}_-^\uparrow$  contém a operação de troca de paridade  $P$ .  $\mathcal{L}_+^\downarrow$  contém a operação de troca de paridade e inversão temporal  $PT$ .  $\mathcal{L}_-^\downarrow$  contém a operação de inversão temporal  $T$ .

Os conjuntos  $\mathcal{L}_+^\uparrow$ ,  $\mathcal{L}_+^\downarrow$  e  $\mathcal{L}_-^\downarrow$  não são subgrupos de  $\mathcal{L}$ . Porém, pelas Proposições 22.26 e 22.27, é muito fácil constatar as seguintes afirmações:

1.  $\mathcal{L}_+^\uparrow$  é um subgrupo de  $\mathcal{L}$ , denominado *grupo de Lorentz próprio ortócrono* ou *grupo de Lorentz restrito*.
2.  $\mathcal{L}^\uparrow := \mathcal{L}_+^\uparrow \cup \mathcal{L}_-^\uparrow$  é um subgrupo de  $\mathcal{L}$ , denominado *grupo de Lorentz ortócrono*.
3.  $\mathcal{L}_+ := \mathcal{L}_+^\uparrow \cup \mathcal{L}_+^\downarrow$  é um subgrupo de  $\mathcal{L}$ , denominado *grupo de Lorentz próprio*.
4.  $\mathcal{L}_0 := \mathcal{L}_+^\uparrow \cup \mathcal{L}_-^\downarrow$  é um subgrupo de  $\mathcal{L}$ , denominado *grupo de Lorentz ortócoro*<sup>48</sup>.

<sup>48</sup>Essa denominação, “ortócoro”, é raramente usada.

No grupo de Lorentz ortócrono  $\mathcal{L}^\uparrow := \mathcal{L}_+^\uparrow \cup \mathcal{L}_-^\uparrow$  não ocorrem reversões temporais<sup>49</sup>. Apenas os elementos de ambos os conjuntos  $\mathcal{L}_+^\uparrow$  e  $\mathcal{L}_+^\downarrow$  satisfazem  $\det(L) = 1$  e, portanto, o grupo de Lorentz próprio  $\mathcal{L}_+ := \mathcal{L}_+^\uparrow \cup \mathcal{L}_+^\downarrow$  coincide com  $\text{SO}(1, 3)$ . O grupo de Lorentz próprio ortócrono  $\mathcal{L}_+^\uparrow$  é também por vezes denotado por  $\text{SO}_0(1, 3)$ , pois o subíndice “0” é amiúde usado na literatura matemática para designar a componente conexa de um grupo (no caso, do grupo  $\text{SO}(1, 3)$ ) que contém a identidade. Note também que  $\text{SRot}$  é um subgrupo de  $\mathcal{L}_+^\uparrow$ .

### • A importância de $\mathcal{L}_+$ , $\mathcal{L}^\uparrow$ e $\mathcal{L}_+^\uparrow$ na Física

É uma crença da Física atual que  $\mathcal{L}_+^\uparrow$  representa uma simetria da Natureza (na ausência de campos gravitacionais). Essa crença não se estende aos grupos  $\mathcal{L}_+$  e  $\mathcal{L}^\uparrow$ . O problema com esses últimos grupos é que os mesmos envolvem operações de troca de paridade (representada pela matriz  $P$ ) ou de reversão temporal (representada pela matriz  $T$ ).

É um fato bem estabelecido experimentalmente que nas chamadas interações fracas da Física das Partículas Elementares a troca de paridade (representada por matrizes como  $P$  ou  $P_1$ ) não é uma transformação de simetria da natureza<sup>50</sup>.

No contexto da Teoria Quântica de Campos Relativística, é um fato teórico bem estabelecido<sup>51</sup> que a chamada transformação  $CPT$ <sup>52</sup> é uma transformação de simetria. Violações dessa simetria não foram empiricamente observadas na Física das Partículas Elementares. Por isso, a descoberta experimental, realizada em 1964, que a simetria  $CP$  é violada em certos processos de decaimento de partículas<sup>53</sup> indica fortemente que a reversão temporal também não seria uma simetria da natureza. Entretanto, evidências experimentais diretas de que a simetria de reversão temporal é violada não foram ainda encontradas, por serem de difícil constatação. Para mais informações a respeito de simetrias e suas violações na Física das Partículas Elementares, vide por exemplo [210], [127], [260], ou outros livros introdutórios sobre o assunto.

### • $\mathcal{L}_+^\uparrow$ é um subgrupo normal de $\mathcal{L}$

Vamos aqui provar a seguinte proposição sobre  $\mathcal{L}_+^\uparrow$ :

**Proposição 22.28**  $\mathcal{L}_+^\uparrow$  é um subgrupo normal do grupo de Lorentz. □

**Prova.** Tudo o que temos que fazer é provar que se  $L \in \mathcal{L}_+^\uparrow$  e  $G \in \mathcal{L}$ , então  $G^{-1}LG \in \mathcal{L}_+^\uparrow$ . Isso equivale a provar que  $\det(G^{-1}LG) = 1$  e que  $\text{sin}((G^{-1}LG)_{00}) = 1$ .

Como  $\det(L) = 1$ , tem-se obviamente que

$$\det(G^{-1}LG) = \det(G^{-1})\det(L)\det(G) = \det(G^{-1})\det(G) = \det(G^{-1}G) = \det(\mathbb{1}) = 1.$$

Analogamente, pela Proposição 22.27 vale

$$\begin{aligned} \text{sin}((G^{-1}LG)_{00}) &= \text{sin}((G^{-1}L)_{00}) \text{sin}(G_{00}) = \text{sin}((G^{-1})_{00}) \text{sin}(L_{00}) \text{sin}(G_{00}) \\ &= \text{sin}((G^{-1})_{00}) \text{sin}(G_{00}) = (\text{sin}(G_{00}))^2 = 1. \end{aligned}$$

<sup>49</sup>Esse é o significado da flecha apontando para cima nos símbolos  $\mathcal{L}_\pm^\uparrow$ , indicando que o tempo corre na mesma direção nos sistemas de referência inerciais transformados por  $\mathcal{L}_\pm^\uparrow$ . Analogamente, a flecha para baixo nos símbolos  $\mathcal{L}_\pm^\downarrow$  indica que a direção temporal dos sistemas de referência inerciais transformados por  $\mathcal{L}_\pm^\downarrow$  é invertida.

<sup>50</sup>Essa descoberta foi realizada em experimentos de decaimento de neutrons publicados 1957, realizados pela física Chien-Shiung Wu (1912–1997) e colaboradores, baseados em previsão teórica feita por Tsung-Dao Lee (1926–) e Chen Ning Yang (1922–). Esses dois últimos foram agraciados com o Prêmio Nobel de Física de 1957 “for their penetrating investigation of the so-called parity laws which has led to important discoveries regarding the elementary particles”. A Profa. Chien-Shiung Wu foi agraciada com o Prêmio Wolf de Física de 1978.

A referência ao trabalho original de Lee e Yang é: T. D. Lee and C. N. Yang, “Question of Parity Conservation in Weak Interactions”. Phys. Rev. **104** (1), 254–258 (1956). A referência ao trabalho original de Wu e colaboradores é: C. S. Wu, E. Ambler, R. W. Hayward, D. D. Hoppes and R. P. Hudson, “Experimental Test of Parity Conservation in Beta Decay”. Phys. Rev. **105** (4), 1413–1415 (1957). A referência [360] contém uma compilação de várias referências originais desses e outros autores sobre o tema.

<sup>51</sup>Vide, e.g., [320] ou [175].

<sup>52</sup>A chamada transformação  $CPT$  envolve as operações sucessivas de troca de carga, ou partícula-antipartícula, (denotada por  $C$ ), de paridade (denotada por  $P$ ) e de reversão temporal (denotada por  $T$ ).

<sup>53</sup>Esta descoberta, realizada em experimentos datados de 1964 sobre o decaimento de mésons  $K$ , rendeu o Prêmio Nobel de Física de 1980 a James Watson Cronin (1931–) e Val Logsdon Fitch (1923–), “for the discovery of violations of fundamental symmetry principles in the decay of neutral  $K$ -mesons”. A referência [360] contém uma compilação de várias referências originais desses e outros autores sobre o tema.

Acima, usamos a Proposição 22.26 na penúltima igualdade. Isso completa a prova. ■

**E. 22.87** *Exercício.* Mostre que o grupo quociente  $\mathcal{L}/\mathcal{L}_+^\uparrow$  é isomorfo ao grupo gerado por  $P_1$  e  $T$ . ✦

## 22.6.6 Os Geradores do Grupo de Lorentz

### • Os geradores dos *boosts* de Lorentz

Vamos reparametrizar os *boosts* de Lorentz  $B_1$ ,  $B_2$  e  $B_3$ , introduzindo um novo parâmetro  $z = \operatorname{arctanh} v$ , ou seja,  $v = \tanh z$ , com  $-\infty < z < \infty$ . Na literatura física,  $z$  é por vezes denominado “*rapidez*”. Definindo  $\mathcal{B}_a(z) := B_a(\tanh z)$ ,  $a = 1, 2, 3$ , temos, explicitamente

$$\mathcal{B}_1(z) := \begin{pmatrix} \cosh z & -\sinh z & 0 & 0 \\ -\sinh z & \cosh z & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{B}_2(z) := \begin{pmatrix} \cosh z & 0 & -\sinh z & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sinh z & 0 & \cosh z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\mathcal{B}_3(z) := \begin{pmatrix} \cosh z & 0 & 0 & -\sinh z \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\sinh z & 0 & 0 & \cosh z \end{pmatrix}.$$

As relações de composição (22.149) ficam

$$\mathcal{B}_a(z)\mathcal{B}_a(z') = \mathcal{B}_a(z+z'), \quad a = 1, 2, 3.$$

**E. 22.88** *Exercício.* Mostre isso usando (22.149) e a identidade bem conhecida  $\tanh(x+y) = \frac{\tanh(x)+\tanh(y)}{1+\tanh(x)\tanh(y)}$ . Alternativamente, use a forma explícita das matrizes  $\mathcal{B}_a(z)$  dada acima. ✦

Como  $\mathcal{B}_a(0) = \mathbb{1}$ , constatamos que  $\{\mathcal{B}_a(z), -\infty < z < \infty\}$ ,  $a = 1, 2, 3$ , são três subgrupos uniparamétricos do grupo de Lorentz. Seus geradores são definidos por

$$\mathcal{M}_a := \left. \frac{d}{dz} \mathcal{B}_a(z) \right|_{z=0}, \quad a = 1, 2, 3,$$

e são explicitamente dados por

$$\mathcal{M}_1 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{M}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{M}_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (22.160)$$

É também importante notar que

$$\mathcal{B}_a(z) = \exp(z\mathcal{M}_a)$$

para  $a = 1, 2, 3$ .

**E. 22.89** *Exercício.* Verifique isso usando as formas explícitas dos geradores  $\mathcal{M}_a$  dadas acima.

✦

### • Os geradores de SRot

Além dos *boosts* de Lorentz, consideremos também os três subgrupos uniparamétricos de SRot dados por

$$\mathcal{R}_1(\phi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \phi & -\sin \phi \\ 0 & 0 & \sin \phi & \cos \phi \end{pmatrix}, \quad \mathcal{R}_2(\phi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \phi & 0 & \sin \phi \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\sin \phi & 0 & \cos \phi \end{pmatrix},$$

$$\mathcal{R}_3(\phi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \phi & -\sin \phi & 0 \\ 0 & \sin \phi & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

que representam rotações por um ângulo  $\phi \in (-\pi, \pi]$  no sentido anti-horário<sup>54</sup> em torno dos eixos espaciais 1, 2 e 3, respectivamente. Em completa analogia com o grupo  $\text{SO}(3)$ , seus geradores são

$$\mathcal{J}_a := \left. \frac{d}{d\phi} \mathcal{R}_a(\phi) \right|_{\phi=0}, \quad a = 1, 2, 3.$$

É óbvio que

$$\mathcal{J}_a = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{J_a} \\ 0 & & & \\ 0 & & & \end{pmatrix},$$

onde  $J_a$  são os geradores de  $\text{SO}(3)$  dados em (22.46)-(22.48), página 1054. Explicitamente, tem-se

$$\mathcal{J}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{J}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{J}_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (22.161)$$

<sup>54</sup>Dá a diferença de sinal nos senos entre  $\mathcal{R}_2(\phi)$  e as outras duas matrizes.

**E. 22.90** *Exercício muito importante..* Mostre que os geradores,  $\mathcal{M}_a$  e  $\mathcal{J}_b$ , com  $a, b = 1, 2, 3$ , satisfazem as seguintes relações de comutação:

$$[\mathcal{J}_a, \mathcal{J}_b] = \sum_{c=1}^3 \varepsilon_{abc} \mathcal{J}_c, \quad (22.162)$$

$$[\mathcal{M}_a, \mathcal{M}_b] = -\sum_{c=1}^3 \varepsilon_{abc} \mathcal{J}_c, \quad (22.163)$$

$$[\mathcal{J}_a, \mathcal{M}_b] = \sum_{c=1}^3 \varepsilon_{abc} \mathcal{M}_c. \quad (22.164)$$

Mostre também que de (22.162)–(22.164) segue que

$$[\vec{\alpha} \cdot \vec{\mathcal{M}} + \vec{\beta} \cdot \vec{\mathcal{J}}, \vec{\gamma} \cdot \vec{\mathcal{M}} + \vec{\delta} \cdot \vec{\mathcal{J}}] = (\vec{\beta} \times \vec{\gamma} - \vec{\alpha} \times \vec{\delta}) \cdot \vec{\mathcal{M}} + (\vec{\beta} \times \vec{\delta} - \vec{\alpha} \times \vec{\gamma}) \cdot \vec{\mathcal{J}}. \quad (22.165)$$

Acima,  $\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}$  e  $\vec{\delta}$  são vetores em  $\mathbb{R}^3$  e expressões como  $\vec{\alpha} \cdot \vec{\mathcal{M}}$  e  $\vec{\alpha} \cdot \vec{\mathcal{J}}$  denotam  $\vec{\alpha} \cdot \vec{\mathcal{M}} \equiv \sum_{c=1}^3 \alpha_c \mathcal{M}_c$  e  $\vec{\alpha} \cdot \vec{\mathcal{J}} \equiv \sum_{c=1}^3 \alpha_c \mathcal{J}_c$ .  $\star$

É claro de (22.162)–(22.164), e especialmente de (22.165), que o espaço vetorial real composto por todas as combinações lineares reais dos seis geradores  $\mathcal{M}_a$  e  $\mathcal{J}_b$  formam uma álgebra de Lie real, a *álgebra de Lie do grupo de Lorentz*  $\mathcal{L}_+^\uparrow$ , a qual é por vezes denotada por  $\ell_+^\uparrow$ . Sabemos que não há mais geradores independentes pois, como provamos, todo elemento do grupo de Lorentz  $\mathcal{L}_+^\uparrow$  é produto de *boosts* e rotações.

De (22.163) percebemos o fato notável que os três geradores dos subgrupos de *boost* por si só não formam uma álgebra de Lie! Para tal, é preciso incluir os geradores dos subgrupos de rotação! Isso releva uma relação insuspeita, mas profunda, entre os *boosts* (que fisicamente representam transformações entre sistemas de referência inerciais com velocidades relativas não-nulas) e as rotações espaciais, pois indica que as rotações espaciais podem ser geradas a partir de *boosts*. Isso é uma característica especial da Física Relativista (vide a comparação com o grupo de Galilei, abaixo) e está relacionada a alguns fenômenos físicos, como a chamada *precessão de Thomas*<sup>55</sup>, importante na discussão do chamado *fator giromagnético* do elétron. Vide qualquer bom livro sobre Mecânica Quântica Relativista (por ex. [279]).

### • Revisitando o Teorema 22.10. Mais sobre *boosts* e rotações

Como vimos no Teorema 22.10, página 1108, toda  $L \in \mathcal{L}_+^\uparrow$  é da forma  $L = R_a B_1(v) R_b$ , com  $R_a, R_b \in \text{SRot}$ . Podemos escrever  $L = (R_a B_1(v) R_a^{-1}) R$ , onde  $R := R_a R_b$ . Note-se que  $B := R_a B_1(v) R_a^{-1}$  é um *boost* de Lorentz em uma certa direção (determinada por  $v$  e por  $R_a$ ), ou seja, é um elemento do conjunto  $B$  definido em (22.150), página 1106. De maneira análoga, podemos escrever  $L = R_a B_1(v) R_b = R'(R_b^{-1} B_1(v) R_b) = R' B'$  com  $R' = R_a R_b \in \text{SRot}$  e  $B' = R_b^{-1} B_1(v) R_b \in B$ . Em resumo, temos a

**Proposição 22.29** *Toda transformação de Lorentz  $L \in \mathcal{L}_+^\uparrow$  é da forma  $L = BR = R'B'$ , para certos  $B, B' \in B$  e  $R, R' \in \text{SRot}$ . Ou seja, toda transformação de Lorentz  $L \in \mathcal{L}_+^\uparrow$  é o produto de uma rotação por um boost de Lorentz.  $\square$*

Escrevendo  $v \equiv \tanh z$ , ficamos com  $B = R_a \mathcal{B}_1(z) R_a^{-1}$  ou, usando o gerador  $\mathcal{M}_1$ ,  $B = R_a \exp(z \mathcal{M}_1) R_a^{-1}$ . Isso, por sua vez pode ser reescrito como  $B = R_a \exp(z \mathcal{M}_1) R_a^{-1} = \exp(z R_a \mathcal{M}_1 R_a^{-1})$ . Vamos agora escrever  $R_a$  na forma  $R_a = \exp(J)$ , onde  $J = \sum_{k=1}^3 \alpha_k \mathcal{J}_k \equiv \vec{\alpha} \cdot \vec{\mathcal{J}}$  para certos  $\alpha_k$ 's reais. Pela *série de Lie*, expressão (10.52)–(10.53), página 479, teremos

$$R_a \mathcal{M}_1 R_a^{-1} = \exp(J) \mathcal{M}_1 \exp(-J) = \mathcal{M}_1 + [J, \mathcal{M}_1] + \frac{1}{2!} [J, [J, \mathcal{M}_1]] + \frac{1}{3!} [J, [J, [J, \mathcal{M}_1]]] + \cdots,$$

sendo a série do lado direito convergente. O fato importante a notar é que, por (22.164), os comutadores múltiplos  $[J, \cdots [J, \mathcal{M}_1]]$  são combinações lineares de  $\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2$  e  $\mathcal{M}_3$  (para mais detalhes, vide a demonstração da Proposição 22.30, página 1115). Concluímos disso que todos os elementos de  $R$  são da forma  $\exp(\vec{\gamma} \cdot \vec{\mathcal{M}})$  com  $\vec{\gamma} \in \mathbb{R}^3$ .

<sup>55</sup>Llewellyn Hilleth Thomas (1903–1992). Thomas é também autor, junto com Fermi (Enrico Fermi, 1901–1954.), do chamado *modelo de Thomas-Fermi*, amplamente empregado na Física Atômica.



Provaremos adiante que a recíproca é igualmente verdadeira: todos os elementos da forma  $\exp(\vec{\gamma} \cdot \vec{M})$  com  $\vec{\gamma} \in \mathbb{R}^3$  são *boosts* de Lorentz. Mais especificamente, mostraremos (no Corolário 22.7) que um elemento de  $\mathcal{L}_+^\uparrow$  que seja da forma  $\exp(\vec{\gamma} \cdot \vec{M})$ , com  $\vec{\gamma} \in \mathbb{R}^3$  não-nulo, representa um *boost* de Lorentz com “rapidez”  $\|\vec{\gamma}\|$  (e, portanto, com velocidade  $\tanh(\|\vec{\gamma}\|)$ ) na direção definida pelo vetor unitário  $\vec{\gamma}/\|\vec{\gamma}\|$ .

Os dois resultados a seguir, a Proposição 22.30 e o Corolário 22.7, tornam mais precisa a relação entre *boosts* arbitrários e rotações.

**Proposição 22.30** *Seja  $r(\theta, \vec{\eta}) \in \text{SO}(3)$  a rotação de  $\theta$  em torno do vetor unitário  $\vec{\eta}$  e seja  $R(\theta, \vec{\eta})$  o elemento correspondente de  $\text{SRot}$ . Seja  $\mathcal{B}(\vec{\alpha})$  com  $\vec{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \in \mathbb{R}^3$  o boost de Lorentz dado por*

$$\mathcal{B}(\vec{\alpha}) := \exp(\vec{\alpha} \cdot \vec{M}) ,$$

onde  $\vec{\alpha} \cdot \vec{M} := \sum_{k=1}^3 \alpha_k \mathcal{M}_k$ , sendo  $\mathcal{M}_k$  os geradores dos boosts de  $\mathcal{L}_+^\uparrow$ . Então, vale

$$R(\theta, \vec{\eta}) \mathcal{B}(\vec{\alpha}) R(-\theta, \vec{\eta}) = \mathcal{B}(R(\theta, \vec{\eta}) \vec{\alpha}) . \quad (22.166)$$

□

**Prova.** Nesta demonstração, seguiremos a convenção de implicitamente somar (de 1 a 3) sobre índices repetidos. Temos,

$$R(\theta, \vec{\eta}) \mathcal{B}(\vec{\alpha}) R(-\theta, \vec{\eta}) = \exp(\theta \vec{\eta} \cdot \vec{J}) \exp(\vec{\alpha} \cdot \vec{M}) \exp(-\theta \vec{\eta} \cdot \vec{J}) = \exp\left(\alpha_j \exp(\theta \vec{\eta} \cdot \vec{J}) \mathcal{M}_j \exp(-\theta \vec{\eta} \cdot \vec{J})\right) .$$

Pela *série de Lie*, expressão (10.52)–(10.53), página 479, temos

$$\exp(\theta \vec{\eta} \cdot \vec{J}) \mathcal{M}_j \exp(-\theta \vec{\eta} \cdot \vec{J}) = \mathcal{M}_j + \sum_{a=1}^{\infty} \frac{\theta^a}{a!} \left[ \underbrace{[\vec{\eta} \cdot \vec{J}, [\vec{\eta} \cdot \vec{J}, \dots, [\vec{\eta} \cdot \vec{J}, \mathcal{M}_j] \dots]}_a \text{ vezes} \right] .$$

Para o primeiro comutador, temos

$$[\vec{\eta} \cdot \vec{J}, \mathcal{M}_j] = \eta_i [\mathcal{J}_i, \mathcal{M}_j] \stackrel{(22.164)}{=} \eta_i \varepsilon_{ijk} \mathcal{M}_k .$$

Para o segundo comutador, teremos

$$[\vec{\eta} \cdot \vec{J}, [\vec{\eta} \cdot \vec{J}, \mathcal{M}_j]] = \eta_l \eta_i \varepsilon_{ijk} [\mathcal{J}_l, \mathcal{M}_k] \stackrel{(22.164)}{=} \eta_l \eta_i \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{lkm} \mathcal{M}_m \stackrel{(4.7)}{=} \eta_l \eta_i (\delta_{im} \delta_{jl} - \delta_{il} \delta_{jm}) \mathcal{M}_m = \eta_j (\vec{\eta} \cdot \vec{M}) - \mathcal{M}_j .$$

Assim, o terceiro comutador será igual a  $[\vec{\eta} \cdot \vec{J}, \eta_j (\vec{\eta} \cdot \vec{M}) - \mathcal{M}_j]$ . Agora, o primeiro termo é

$$[\vec{\eta} \cdot \vec{J}, \eta_j (\vec{\eta} \cdot \vec{M})] = \eta_l \eta_j \eta_k [\mathcal{J}_l, \mathcal{M}_k] \stackrel{(22.164)}{=} \eta_l \eta_j \eta_k \varepsilon_{lkn} \mathcal{M}_n = 0 ,$$

devido à antissimetria de  $\varepsilon_{lkn}$ . Logo, o terceiro comutador será igual a

$$-[\vec{\eta} \cdot \vec{J}, \mathcal{M}_j] = -\eta_i \varepsilon_{ijk} \mathcal{M}_k$$

por ser igual ao primeiro comutador, mas com o sinal trocado.

Segue disso uma expressão geral para os comutadores múltiplos:

$$\left[ \underbrace{[\vec{\eta} \cdot \vec{J}, [\vec{\eta} \cdot \vec{J}, \dots, [\vec{\eta} \cdot \vec{J}, \mathcal{M}_j] \dots]}_a \text{ vezes} \right] = \begin{cases} (-1)^{a/2} (\eta_j (\vec{\eta} \cdot \vec{M}) - \mathcal{M}_j) , & a \text{ par}, \\ (-1)^{(a-1)/2} \eta_i \varepsilon_{ijk} \mathcal{M}_k , & a \text{ ímpar}, \end{cases}$$

a qual pode ser facilmente provada por indução (faça-o!). Assim,

$$\begin{aligned} \exp(\theta \vec{\eta} \cdot \vec{\mathcal{J}}) \mathcal{M}_j \exp(-\theta \vec{\eta} \cdot \vec{\mathcal{J}}) &= \mathcal{M}_j + \left( \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \theta^{2k+1}}{(2k+1)!} \right) \eta_i \varepsilon_{ijk} \mathcal{M}_k + \left( \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k \theta^{2k}}{(2k)!} \right) (\eta_j (\vec{\eta} \cdot \vec{\mathcal{M}}) - \mathcal{M}_j) \\ &= \mathcal{M}_j + \sin(\theta) \eta_i \varepsilon_{ijk} \mathcal{M}_k + (1 - \cos(\theta)) (\eta_j (\vec{\eta} \cdot \vec{\mathcal{M}}) - \mathcal{M}_j) \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} \exp(\theta \vec{\eta} \cdot \vec{\mathcal{J}}) (\vec{\alpha} \cdot \vec{\mathcal{M}}) \exp(-\theta \vec{\eta} \cdot \vec{\mathcal{J}}) &= \vec{\alpha} \cdot \vec{\mathcal{M}} + \sin(\theta) (\vec{\eta} \times \vec{\alpha}) \cdot \vec{\mathcal{M}} + (1 - \cos(\theta)) ((\vec{\eta} \cdot \vec{\alpha}) (\vec{\eta} \cdot \vec{\mathcal{M}}) - (\vec{\alpha} \cdot \vec{\mathcal{M}})) \\ &= \left( \vec{\alpha} + \sin(\theta) (\vec{\eta} \times \vec{\alpha}) + (1 - \cos(\theta)) ((\vec{\eta} \cdot \vec{\alpha}) \vec{\eta} - \vec{\alpha}) \right) \cdot \vec{\mathcal{M}} \\ &= \left( \cos(\theta) \vec{\alpha} + \sin(\theta) (\vec{\eta} \times \vec{\alpha}) + (1 - \cos(\theta)) (\vec{\eta} \cdot \vec{\alpha}) \vec{\eta} \right) \cdot \vec{\mathcal{M}} \\ &\stackrel{(22.59)}{=} \left( R(\theta, \vec{\eta}) \vec{\alpha} \right) \cdot \vec{\mathcal{M}} \quad , \end{aligned}$$

completando a prova. ■

Da Proposição 22.30, página 1115, e da Proposição 22.7, página 1060, segue a seguinte afirmação, que dispensa demonstração:

**Corolário 22.7** *Seja*

$$\mathcal{B}(z, \vec{\xi}) := \exp(z \vec{\xi} \cdot \vec{\mathcal{M}}) \quad ,$$

onde  $z \in \mathbb{R}$ ,  $\vec{\xi} = (\xi_1, \xi_2, \xi_3) \in \mathbb{R}^3$  com  $\|\vec{\xi}\| = 1$  e  $\vec{\xi} \cdot \vec{\mathcal{M}} := \sum_{k=1}^3 \xi_k \mathcal{M}_k$ , sendo  $\mathcal{M}_k$  os geradores dos boosts de  $\mathcal{L}_+^\uparrow$ . Então, existe  $R(\theta, \vec{\eta}) \in \text{SRot}$  tal que

$$\mathcal{B}(z, \vec{\xi}) = R(\theta, \vec{\eta}) \mathcal{B}_1(z) R(\theta, \vec{\eta})^{-1} \quad ,$$

onde  $\mathcal{B}_1(z)$  é o boost na direção 1 e  $R(\theta, \vec{\eta}) \in \text{SRot}$  é o elemento de  $\text{SRot}$  obtido a partir da rotação  $r(\theta, \vec{\eta}) \in \text{SO}(3)$  que leva o vetor unitário na direção 1,  $\mathbf{e}_1$ , no vetor unitário  $\vec{\xi}$ , ou seja, tal que  $r(\theta, \vec{\eta}) \mathbf{e}_1 = \vec{\xi}$ .

É claro por isso que um elemento do grupo  $\mathcal{L}_+^\uparrow$  que seja da forma  $\exp(\vec{\alpha} \cdot \vec{\mathcal{M}})$ , com  $\vec{\alpha} \in \mathbb{R}^3$  não-nulo, representa um boost de Lorentz com “rapidez”  $\|\vec{\alpha}\|$  (e, portanto, com velocidade  $\tanh(\|\vec{\alpha}\|)$ ) na direção definida pelo vetor espacial unitário  $\vec{\alpha}/\|\vec{\alpha}\|$ . □

Dentre as nossas conclusões acima temos também:

**Proposição 22.31** *O conjunto de boosts de Lorentz  $\mathcal{B}$  coincide com o conjunto das matrizes da forma  $\exp\left(\sum_{k=1}^3 \gamma_k \mathcal{M}_k\right)$ , com  $\gamma_k$ ’s sendo números reais:*

$$\mathcal{B} = \left\{ \exp(\vec{\gamma} \cdot \vec{\mathcal{M}}) \quad , \quad \vec{\gamma} \in \mathbb{R}^3 \right\} \quad .$$

Toda  $L \in \mathcal{L}_+^\uparrow$  é da forma  $L = \exp(\mathcal{M}) \exp(\mathcal{J})$ , onde  $\mathcal{J} = \vec{\beta} \cdot \vec{\mathcal{J}}$  e  $\mathcal{M} = \vec{\gamma} \cdot \vec{\mathcal{M}}$ , sendo que os  $\vec{\beta}$ ’s e  $\vec{\gamma}$  são elementos de  $\mathbb{R}^3$ . Alternativamente, podemos escrever  $L = \exp(\mathcal{J}') \exp(\mathcal{M}')$ , onde  $\mathcal{J}' = \vec{\beta}' \cdot \vec{\mathcal{J}}$  e  $\mathcal{M}' = \vec{\gamma}' \cdot \vec{\mathcal{M}}$ , sendo também  $\vec{\beta}'$  e  $\vec{\gamma}' \in \mathbb{R}^3$ . □

Um outro reconhecimento importante é o de que as matrizes  $\mathcal{M}_k$  são simétricas, ou seja, satisfazem  $\mathcal{M}_k^T = \mathcal{M}_k$ , enquanto que as matrizes  $\mathcal{J}_k$  são antissimétricas. Daí segue que as matrizes  $\exp(\vec{\alpha} \cdot \vec{\mathcal{M}})$ ,  $\vec{\alpha} \in \mathbb{R}^3$ , que implementam boosts de Lorentz, são simétricas, enquanto que as matrizes  $\exp(\vec{\beta} \cdot \vec{\mathcal{J}})$ ,  $\vec{\beta} \in \mathbb{R}^3$ ,  $\|\vec{\beta}\| \leq \pi$ , que implementam rotações, são matrizes ortogonais.

## 22.6.7 O Grupo de Galilei

Para diversos propósitos é interessante comparar o grupo  $\mathcal{L}_+^\uparrow$  com seu correspondente não-relativístico: o *grupo de Galilei*<sup>56</sup>. Excluindo-se a reversão temporal e as reflexões espaciais, as bem-conhecidas transformações de Galilei da Mecânica Clássica são fornecidas por matrizes reais  $4 \times 4$ , da forma

$$G(r, \vec{v}) := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -v_1 & \boxed{\phantom{r}} \\ -v_2 & \phantom{\boxed{\phantom{r}}} \\ -v_3 & \phantom{\boxed{\phantom{r}}} \end{pmatrix},$$

onde  $r$  é uma matriz  $3 \times 3$  pertencente a  $SO(3)$  e  $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3) \in \mathbb{R}^3$  é um vetor com componentes  $v_j \in (-\infty, \infty)$ ,  $j = 1, 2, 3$ . As matrizes  $G(r, \vec{v})$  transformam da seguinte forma um vetor com 4 componentes  $\begin{pmatrix} t \\ \vec{x} \end{pmatrix}$ :

$$G(r, \vec{v}) \begin{pmatrix} t \\ \vec{x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ r\vec{x} - \vec{v}t \end{pmatrix}.$$

A interpretação física-geométrica dessa transformação é que ela transforma sistemas de referência inerciais, rodando os eixos espaciais coordenados de  $r \in SO(3)$  e em seguida aplicando um *boost* não-relativístico de velocidade  $\vec{v} \in \mathbb{R}^3$ , sem alterar intervalos de tempo. Transformações entre sistemas de referência na Mecânica Clássica são estudadas na Seção 23.1, página 1142. Vide, em particular a Proposição 23.2, página 1150.

**E. 22.91** *Exercício*. Mostre que o conjunto de matrizes

$$\mathcal{G}_+^\uparrow := \left\{ G(r, \vec{v}), r \in SO(3) \text{ e } \vec{v} \in \mathbb{R}^3 \right\}$$

forma um grupo pelo produto usual de matrizes: mostre que vale a regra de produto

$$G(r_1, \vec{v}_1)G(r_2, \vec{v}_2) = G(r_1 r_2, \vec{v}_1 + r_1 \vec{v}_2), \quad (22.167)$$

mostre que o elemento neutro é  $G(\mathbb{1}_3, \vec{0}) = \mathbb{1}_4$  e mostre que  $G(r, \vec{v})^{-1} = G(r^{-1}, -r^{-1}\vec{v})$ . Esse grupo  $\mathcal{G}_+^\uparrow$  é denominado *Grupo de Galilei* em  $(3+1)$ -dimensões.  $\star$

As matrizes  $G(\vec{v}) \equiv G(\mathbb{1}_3, \vec{v})$ , ou seja,

$$G(\vec{v}) := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -v_1 & 1 & 0 & 0 \\ -v_2 & 0 & 1 & 0 \\ -v_3 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

com  $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3) \in \mathbb{R}^3$ , fornecem os chamados *boosts de Galilei* com velocidade  $\vec{v}$ . É evidente por (22.167) que

$$G(\vec{v}_1)G(\vec{v}_2) = G(\vec{v}_1 + \vec{v}_2) = G(\vec{v}_2)G(\vec{v}_1).$$

Disso, vê-se que  $\{G(\vec{v}), \vec{v} \in \mathbb{R}^3\}$  é um subgrupo Abelian do grupo de Galilei, denominado *grupo dos boosts de Galilei*. Ao contrário do que ocorre com os *boosts* de Lorentz, os *boosts* de Galilei formam por si só um grupo e esse grupo é Abelian (e isomorfo ao grupo aditivo  $\mathbb{R}^3$ ). Esses fatos compõem uma marcante diferença entre  $\mathcal{L}_+^\uparrow$  e  $\mathcal{G}_+^\uparrow$ .

<sup>56</sup>Galileo Galilei (1564–1642).

De (22.167) é fácil constatar que o grupo de Galilei  $\mathcal{G}_+^\uparrow$  é isomorfo ao grupo obtido pelo produto semidireto  $\text{SO}(3) \ltimes \mathbb{R}^3$ , com  $\text{SO}(3)$  representando rotações e  $\mathbb{R}^3$  representando *boosts* de Galilei.

O conjunto de matrizes  $\text{SRot} = \{G(r, \vec{0}), r \in \text{SO}(3)\}$  também compõe um subgrupo de  $\mathcal{G}_+^\uparrow$ , o subgrupo das rotações. Usando (22.167), é fácil ver que para todos  $\vec{v} \in \mathbb{R}^3$  e  $r \in \text{SO}(3)$  vale

$$G(r, \vec{v}) = G(\vec{v})G(r, \vec{0}) = G(r, \vec{0})G(r^{-1}\vec{v}), \quad (22.168)$$

ou seja, todo elemento de  $\mathcal{G}_+^\uparrow$  pode ser escrito como o produto de uma rotação seguida de um *boost* de Galilei (ou na ordem oposta). Compare-se com a afirmativa da Proposição 22.29, página 1114, e comentários que se lhe seguem.

Vamos agora estudar os geradores do grupo de Galilei.

**E. 22.92 Exercício.** Mostre que os geradores dos *boosts* de Galilei são as matrizes

$$\mathcal{M}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{M}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{M}_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (22.169)$$

Compare-os aos geradores dos *boosts* do grupo  $\mathcal{L}_+^\uparrow$  dados em (22.160), página 1112. Mostre que os geradores das rotações no grupo de Galilei são as matrizes

$$\mathcal{J}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{J}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{J}_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (22.170)$$

Constate que (sem nenhuma surpresa) eles são idênticos aos geradores do subgrupo de rotações do grupo  $\mathcal{L}_+^\uparrow$  dados em (22.161), página 1113.

Mostre que os geradores,  $\mathcal{M}_a$  e  $\mathcal{J}_b$ , com  $a, b = 1, 2, 3$ , acima, satisfazem as seguintes relações de comutação:

$$[\mathcal{J}_a, \mathcal{J}_b] = \sum_{c=1}^3 \varepsilon_{abc} \mathcal{J}_c, \quad (22.171)$$

$$[\mathcal{M}_a, \mathcal{M}_b] = 0, \quad (22.172)$$

$$[\mathcal{J}_a, \mathcal{M}_b] = \sum_{c=1}^3 \varepsilon_{abc} \mathcal{M}_c. \quad (22.173)$$

Mostre também que de (22.171)–(22.173) segue que

$$[\vec{\alpha} \cdot \vec{\mathcal{M}} + \vec{\beta} \cdot \vec{\mathcal{J}}, \vec{\gamma} \cdot \vec{\mathcal{M}} + \vec{\delta} \cdot \vec{\mathcal{J}}] = (\vec{\beta} \times \vec{\gamma} - \vec{\alpha} \times \vec{\delta}) \cdot \vec{\mathcal{M}} + (\vec{\beta} \times \vec{\delta}) \cdot \vec{\mathcal{J}}. \quad (22.174)$$

Acima,  $\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}$  e  $\vec{\delta}$  são vetores em  $\mathbb{R}^3$ . É claro de (22.171)–(22.173), e especialmente de (22.174), que o espaço vetorial real composto por todas as combinações lineares reais dos seis geradores  $\mathcal{M}_a$  e  $\mathcal{J}_b$  formam uma álgebra de Lie real, a *álgebra de Lie do grupo de Galilei*  $\mathcal{G}_+^\uparrow$ . Compare essa álgebra de Lie com a álgebra de Lie do grupo  $\mathcal{L}_+^\uparrow$ , tal como exibida em (22.162)–(22.164) e (22.165), página 1114.

Mostre também que  $G(\vec{v}) = \exp(\vec{v} \cdot \vec{\mathcal{M}})$ , para todo  $\vec{v} \in \mathbb{R}^3$ , calculando explicitamente a exponencial do lado direito (isso é fácil, pois as matrizes  $\vec{v} \cdot \vec{\mathcal{M}}$  são nilpotentes).

Juntando isso à afirmação de (22.168) e ao fato de todo elemento  $r \in \text{SO}(3)$  ser da forma  $\exp(\theta \vec{\eta} \cdot \vec{\mathcal{J}})$ , com  $\vec{\mathcal{J}}$  sendo os geradores de  $\text{SO}(3)$ ,  $\theta \in [0, \pi]$  e  $\vec{\eta} \in \mathbb{R}^3$  com  $\|\vec{\eta}\| = 1$  (vide Seção 22.3.2, página 1052), conclua que todo elemento de  $\mathcal{G}_+^\uparrow$  é da forma

$$G(\exp(\theta \vec{\eta} \cdot \vec{\mathcal{J}}), \vec{v}) = \exp(\vec{v} \cdot \vec{\mathcal{M}}) \exp(\theta \vec{\eta} \cdot \vec{\mathcal{J}}).$$

Compare com a afirmação do Teorema 22.31, página 1116. ✦

*Nota.* Para um estudo mais aprofundado do grupo de Galilei, de suas representações irredutíveis, da álgebra de Lie dos seus geradores e das aplicações desses temas à Mecânica Quântica Não-Relativística, vide:

1. Jean–Marc Lévy–Leblond, “Galilei group and Galilean invariance”, em [222], vol. 2. páginas 221–296.
2. Jean–Marc Lévy–Leblond, “Galilei Group and Nonrelativistic Quantum Mechanics”, J. Math. Phys. **4**, 776–789 (1963). **Doi:** 10.1063/1.1724319.
3. H. Bacry and J.–M. Lévy–Leblond, “Possible kinematics”, J. Math. Phys. **9**, 1605–1614 (1968).
4. J.–M. Lévy–Leblond, “Une nouvelle limite non-relativiste du groupe de Poincaré”, Ann. Inst. H. Poincaré, Sect. A **3**, 1–12 (1965).  
Vide também:
5. E. İnönü, E. P. Wigner, “On the Contraction of Groups and Their Representations”. Proc. Nat. Acad. Sci. **39** (6), 510–524 (1953).  
**Doi:** 10.1073/pnas.39.6.510.

Para uma leitura extremamente interessante e que contém comentários sobre as contribuições supralistadas de Lévy–Leblond<sup>57</sup>, İnönü<sup>58</sup> e Wigner<sup>59</sup>, vide: Freeman J. Dyson<sup>60</sup>, “Missed opportunities”. Bull. Amer. Math. Soc. **78**, Number 5, 635–652 (1972). ♣

## 22.7 O Grupo de Poincaré

O chamado grupo de Poincaré<sup>61</sup> (em 3+1 dimensões) é definido como sendo o grupo obtido do produto semi-direto<sup>62</sup> de  $O(1, 3)$  e do grupo aditivo de translações  $\mathbb{R}^4$ , ou seja,  $\mathcal{P} := O(1, 3) \ltimes \mathbb{R}^4$ . Seus elementos são, portanto, pares ordenados  $(L, a)$  com  $L \in O(1, 3)$  e  $a \in \mathbb{R}^4$ , sendo o produto dado por  $(L, a) \cdot (L', a') = (LL', La' + a)$ . Sua ação no espaço-tempo  $\mathbb{R}^4$  é interpretada como uma transformação de Lorentz  $L$  seguida de uma translação por  $a \in \mathbb{R}^4$ .

Há um subgrupo de  $GL(\mathbb{R}, 5)$  que é isomorfo a  $\mathcal{P}$ . Sejam as matrizes reais  $5 \times 5$  da forma

$$P(L, a) := \begin{pmatrix} \boxed{L} & \boxed{a} \\ \boxed{0} & \boxed{1} \end{pmatrix}, \quad \text{com } L \in O(1, 3) \text{ e } a \in \mathbb{R}^4.$$

Então, tem-se

$$P(L, a) P(L', a') = P(LL', La' + a).$$

**E. 22.93** *Exercício importante.* Verifique isso e verifique que o conjunto de matrizes

$$\{P(L, a) \in GL(\mathbb{R}, 5), \text{ com } L \in O(1, 3) \text{ e } a \in \mathbb{R}^4\}$$

forma um subgrupo de  $GL(\mathbb{R}, 5)$ . Mostre que a aplicação  $\mathcal{P} \ni (L, a) \mapsto P(L, a)$  é um isomorfismo. ✦

Assim, o conjunto de matrizes  $\{P(L, a) \in GL(\mathbb{R}, 5), \text{ com } L \in O(1, 3) \text{ e } a \in \mathbb{R}^4\}$  forma um subgrupo de  $GL(\mathbb{R}, 5)$  que é isomorfo a  $\mathcal{P}$ . Também denotaremos esse grupo por  $\mathcal{P}$ .

A representação do grupo de Poincaré pelas matrizes  $P(L, a)$  serve basicamente à visualização de sua ação. Para tal, pontos do espaço tempo com coordenadas  $x \equiv \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4$  são representados em  $\mathbb{R}^5$  pelos pontos  $\begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ 1 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} \boxed{x} \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^5$ .

<sup>57</sup>Jean–Marc Lévy–Leblond (1940–).

<sup>58</sup>Erdal İnönü (1926–2007).

<sup>59</sup>Eugene Paul Wigner (1902–1995).

<sup>60</sup>Freeman John Dyson (1923–).

<sup>61</sup>Jules Henri Poincaré (1854–1912).

<sup>62</sup>A noção geral de produto semi-direto de grupos encontra-se definida na Seção 2.2.4.2, página 128.

**E. 22.94** *Exercício.* Mostre que

$$P(L, a) \begin{pmatrix} \boxed{x} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boxed{Lx+a} \\ 1 \end{pmatrix}.$$

✱

• **Os geradores do grupo de Poincaré**

O chamado *grupo de Poincaré próprio ortócrono*, denotado por  $\mathcal{P}_+^\uparrow$  é o grupo  $\mathcal{P}_+^\uparrow := \mathcal{L}_+^\uparrow \otimes \mathbb{R}^4$ .

De maneira totalmente análoga ao que fizemos no grupo Euclidiano, podemos determinar os geradores do grupo  $\mathcal{P}_+^\uparrow$ . Este possui 10 geradores. Seis da forma

$$\mathbf{m}_k := \begin{pmatrix} \boxed{\mathcal{M}_k} & \boxed{0} \\ \boxed{0} & \boxed{0} \end{pmatrix} \quad \text{ou} \quad \mathbf{j}_k := \begin{pmatrix} \boxed{\mathcal{J}_k} & \boxed{0} \\ \boxed{0} & \boxed{0} \end{pmatrix}, \quad \text{com } k = 1, 2, 3,$$

onde  $\mathcal{M}_k$  e  $\mathcal{J}_k$  são as matrizes  $4 \times 4$  definidas em (22.160) e (22.161), respectivamente, e quatro da forma

$$\mathbf{p}_k := \begin{pmatrix} \boxed{0} & \boxed{\mathbf{x}_k} \\ \boxed{0} & \boxed{0} \end{pmatrix} \quad \text{com } k = 0, \dots, 3,$$

onde

$$\mathbf{x}_0 := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}_1 := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}_2 := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}_3 := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

As relações de comutação associadas ao grupo de Poincaré são:

$$[\mathbf{j}_a, \mathbf{j}_b] = \sum_{c=1}^3 \varepsilon_{abc} \mathbf{j}_c, \quad (22.175)$$

$$[\mathbf{m}_a, \mathbf{m}_b] = -\sum_{c=1}^3 \varepsilon_{abc} \mathbf{j}_c, \quad (22.176)$$

$$[\mathbf{j}_a, \mathbf{m}_b] = \sum_{c=1}^3 \varepsilon_{abc} \mathbf{m}_c, \quad (22.177)$$

$$[\mathbf{p}_a, \mathbf{p}_b] = 0, \quad (22.178)$$

$$[\mathbf{j}_a, \mathbf{p}_b] = (1 - \delta_{b0}) \sum_{c=1}^3 \varepsilon_{abc} \mathbf{p}_c, \quad (22.179)$$

$$[\mathbf{m}_a, \mathbf{p}_b] = -(\delta_{ab} \mathbf{p}_0 + \delta_{b0} \mathbf{p}_a). \quad (22.180)$$

Aqui, os índices dos  $\mathbf{m}$ 's e  $\mathbf{j}$ 's variam de 1 a 3 e os índices dos  $\mathbf{p}$ 's variam de 0 a 3.

**E. 22.95** *Exercício importante. Todo estudante deve fazê-lo uma vez na vida.* Verifique isso.  $\star$

As três primeiras relações acima seguem de (22.162)-(22.164), página 1114. A relação (22.179) diz que os  $\mathbf{j}$ 's comutam com  $\mathbf{p}_0$  e, nos demais casos, tem-se a última relação de (22.129).

Novamente constatamos que a subálgebra gerada pelos  $\mathbf{p}$ 's é um ideal de álgebra de Lie do grupo de Poincaré.

### • O grupo $\mathcal{P}_+^\uparrow$ em 1+1-dimensões

Com base nas considerações acima e no nosso estudo do grupo  $O(1, 1)$  (vide Seção 22.3.1, em especial, página 1050), sabemos que o grupo  $\mathcal{P}_+^\uparrow$  em 1+1-dimensões é isomorfo ao grupo de matrizes da forma

$$\begin{pmatrix} \cosh z & -\sinh z & a_0 \\ -\sinh z & \cosh z & a_1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

com  $z, a_0, a_1 \in \mathbb{R}$ . Seus geradores serão

$$m_1 := \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad p_0 := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad p_1 := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Como é fácil de verificar, as relações de comutação entre esses geradores são

$$[m_1, p_0] = -p_1, \quad [m_1, p_1] = -p_0, \quad [p_0, p_1] = 0.$$

Um elemento genérico dessa álgebra de Lie é da forma

$$I(\mathcal{M}, t) := \left( \begin{array}{cc|c} \boxed{\mathcal{M}} & \boxed{t} & \\ \hline 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

onde

$$\mathcal{M} = zm_1 = \begin{pmatrix} 0 & -z \\ -z & 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad t = t_0p_0 + t_1p_1 = \begin{pmatrix} t_0 \\ t_1 \end{pmatrix}$$

com  $z, t_0, t_1 \in \mathbb{R}$ . É um exercício fácil (faça-o!) constatar que para todo  $k \in \mathbb{N}$ , tem-se

$$I(\mathcal{M}, t)^k = I(\mathcal{M}^k, \mathcal{M}^{k-1}t) .$$

Consequentemente, vale que

$$\exp(I(\mathcal{M}, t)) = \mathbb{1} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} I(\mathcal{M}, t)^k = \mathbb{1} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} I(\mathcal{M}^k, \mathcal{M}^{k-1}t) = \left( \begin{array}{cc|c} \boxed{L} & \boxed{t'} & \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array} \right) ,$$

onde

$$L := e^{\mathcal{M}} = \begin{pmatrix} \cosh z & -\sinh z \\ -\sinh z & \cosh z \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad t' = f(\mathcal{M})t ,$$

sendo  $f$  a função analítica inteira definida em (22.130), página 1094. A matriz  $f(\mathcal{M})$  pode ser calculada facilmente usando-se o fato que

$$\mathcal{M}^{2k} = \mathbb{1} \quad \text{e} \quad \mathcal{M}^{2k+1} = \mathcal{M} , \quad k \in \mathbb{N}_0 ,$$



de onde se extrai

$$\begin{aligned}
 f(\mathcal{M}) &:= \mathbb{1} + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k!} \mathcal{M}^{k-1} = \mathbb{1} + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{(2m)!} \mathcal{M}^{2m-1} + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{(2m+1)!} \mathcal{M}^{2m} \\
 &= \left( \sum_{m=1}^{\infty} \frac{z^{2m-1}}{(2m)!} \right) \mathcal{M} + \left( \sum_{m=0}^{\infty} \frac{z^{2m}}{(2m+1)!} \right) \mathbb{1} \\
 &= \frac{\cosh z - 1}{z} \mathcal{M} + \frac{\sinh z}{z} \mathbb{1} \\
 &= \begin{pmatrix} \frac{\sinh z}{z} & -\frac{\cosh z - 1}{z} \\ -\frac{\cosh z - 1}{z} & \frac{\sinh z}{z} \end{pmatrix}.
 \end{aligned}$$

Notemos que

$$\det(f(\mathcal{M})) = 2 \left( \frac{\cosh z - 1}{z^2} \right) \neq 0$$

para  $z \in \mathbb{R}$ . Assim,  $f(\mathcal{M})$  é inversível e se escolhermos  $t = f(\mathcal{M})^{-1}a$ , para qualquer  $a = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ , teremos

$$\exp \left( I(\mathcal{M}, f(\mathcal{M})^{-1}a) \right) = \begin{pmatrix} \boxed{L} & \boxed{a} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh z & -\sinh z & a_0 \\ -\sinh z & \cosh z & a_1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Isso prova que todo elemento do grupo  $\mathcal{P}_+^\uparrow$  em 1+1 dimensões pode ser escrito como exponencial de um elemento da sua própria álgebra de Lie.

## 22.8 Ações de Grupos em Espaços de Funções

Nosso estudo sobre usos de grupos contínuos e suas representações, em Física, não poderia estar completo sem que gastássemos algumas palavras apresentando alguns fatos elementares ligados à ação de certos grupos de maior interesse em espaços de funções. Esse tema é relevante na Mecânica Quântica, onde essas ações são amplamente usadas, mas também na Mecânica Clássica, na discussão da ação de grupos de simetria e da evolução temporal no espaço de fase.

### • O grupo de translações em $\mathbb{R}$ e $\mathbb{R}^n$

Seja  $f$  uma função definida em  $\mathbb{R}$  assumindo valores em  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ . Em  $\mathbb{R}$  age naturalmente o grupo de translações  $(\mathbb{R}, +)$ , o grupo aditivo dos reais. Segundo a definição geral (vide Seção 2.1.9.1, página 106), uma ação desse grupo sobre  $f$  é dada por  $(T_a f)(x) := f(x - a)$ ,  $a \in \mathbb{R}$ . Afirmamos que, ao menos para funções diferenciáveis, o operador  $-\frac{d}{dx}$  é o gerador das translações. De fato,  $\lim_{a \rightarrow 0} a^{-1}((T_a f)(x) - f(x)) \Big|_{a=0} = -f'(x)$ .

Se  $f$  satisfizer condições adequadas, como a de ser real-analítica, ela pode ser expandida em série de Taylor e, assim,  $f(x - a) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x)}{n!} (-a)^n$ . Com isso, podemos escrever de forma simbólica

$$(T_a f)(x) = f(x - a) = \left( \left( \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-a)^n}{n!} \frac{d^n}{dx^n} \right) f \right)(x) = \left( e^{-a \frac{d}{dx}} f \right)(x).$$

Não vamos aqui atribuir um significado preciso à exponenciação do operador de diferenciação  $\frac{d}{dx}$ , ou seja, não vamos discutir de forma precisa em que sentido a série que define essa exponencial é convergente, em quais tipos de funções ela age etc. Isso pode ser feito de diversas formas, em espaços de funções diferentes, e trataremos desse tipo de questão em outros capítulos. O ponto que queremos destacar é que essa relação é consistente com a noção de que o operador diferencial  $-\frac{d}{dx}$  é o *gerador* das translações no espaço de funções considerado, pois ela nos mostra que  $T_a$  é obido pela exponenciação de  $a$  vezes o gerador  $-\frac{d}{dx}$ .

Essa caracterização de  $-\frac{d}{dx}$  como o gerador de translações é de grande relevância, por exemplo, na Mecânica Quântica.

### • O grupo $SO(2)$ agindo em funções de $\mathbb{R}^2$

Seja  $f$  uma função definida em  $\mathbb{R}^2$  assumindo valores em  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ . Denotaremos os vetores de  $\mathbb{R}^2$  por  $\vec{x}$  ou diretamente em termos de suas componentes pelo par ordenado  $(x, y) \equiv \vec{x}$ . O grupo  $SO(2)$  age no domínio de definição dessa função e seja um elemento de  $SO(2)$  da forma  $R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$ . Por convenção,  $R(\theta)$  roda cada vetor  $\vec{x}$  de  $\mathbb{R}^2$  de um ângulo  $\theta \in (-\pi, \pi]$  no sentido anti-horário em torno da origem.

Sua ação na função  $f$  é, por definição, dada por  $(T_\theta f)(\vec{x}) := f(R(-\theta)\vec{x})$ . Escrevendo em termos de componentes,  $(T_\theta f)(x, y) = f((\cos \theta)x + (\sin \theta)y, -(\sin \theta)x + (\cos \theta)y)$ . O gerador associado à ação  $T_\theta$  é definido por

$$\begin{aligned} (Jf)(x, y) &:= \left. \frac{d}{d\theta} (T_\theta f)(x, y) \right|_{\theta=0} \\ &= \left[ \left( -(\sin \theta)x + (\cos \theta)y \right) \frac{\partial f}{\partial x} \left( (\cos \theta)x + (\sin \theta)y, -(\sin \theta)x + (\cos \theta)y \right) \right. \\ &\quad \left. + \left( -(\cos \theta)x - (\sin \theta)y \right) \frac{\partial f}{\partial y} \left( (\cos \theta)x + (\sin \theta)y, -(\sin \theta)x + (\cos \theta)y \right) \right] \Big|_{\theta=0} \\ &= \left( \left[ y \frac{\partial}{\partial x} - x \frac{\partial}{\partial y} \right] f \right) (x, y), \end{aligned}$$

ou seja,  $J = y \frac{\partial}{\partial x} - x \frac{\partial}{\partial y}$  e, por conseguinte,

$$(e^{\theta J} f)(\vec{x}) = f(R(-\theta)\vec{x}).$$

Essa relação decorre da afirmação, já utilizada várias vezes, que todo grupo uniparamétrico pode ser escrito como exponencial de seu gerador (vide, por exemplo a Proposição 24.6, página 1226), mas pode também ser obtida formalmente da expansão em série de Taylor de  $(T_\theta f)(x, y)$  como função da variável  $\theta$  em torno de  $\theta = 0$ .

**E. 22.96** Exercício. Mostre isso! ✱

Novamente omitiremos a discussão sobre a convergência da série que define a exponencial do operador diferencial  $J$ .

### • O grupo $SO(3)$ agindo em funções de $\mathbb{R}^3$

Seja  $f$  uma função definida em  $\mathbb{R}^3$  assumindo valores em  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ . A ação de uma rotação anti-horária de um ângulo  $\theta$  em torno do eixo definido por um versor  $\vec{\eta}$  é

$$(T_{\theta, \vec{\eta}} f)(\vec{x}) := f(e^{-\theta \vec{\eta} \cdot \vec{J}} \vec{x}) = f\left(\vec{x} + (1 - \cos(\theta))(\vec{\eta} \times (\vec{\eta} \times \vec{x})) - \sin(\theta) \vec{\eta} \times \vec{x}\right)$$

onde, na última igualdade, usamos a fórmula de Rodrigues (22.58), página 1056. A derivada da expressão do lado direito em relação a  $\theta$  é

$$\left( \sin(\theta) (\vec{\eta} \times (\vec{\eta} \times \vec{x})) - \cos(\theta) \vec{\eta} \times \vec{x} \right) \cdot (\vec{\nabla} f) \left( \vec{x} + (1 - \cos(\theta))(\vec{\eta} \times (\vec{\eta} \times \vec{x})) - \sin(\theta) \vec{\eta} \times \vec{x} \right)$$

e essa expressão, quando calculada em  $\theta = 0$ , torna-se  $-(\vec{\eta} \times \vec{x}) \cdot (\vec{\nabla} f)(\vec{x}) \stackrel{(4.13)}{=} \vec{\eta} \cdot (\vec{x} \times \vec{\nabla} f)(\vec{x})$ . Notemos *en passant* que  $(\vec{x} \times \vec{\nabla} f)(\vec{x}) = -\vec{\nabla} \times (f(\vec{x}) \vec{x})$ , pela identidade (4.21), página 236.

Concluimos disso que, para cada versor  $\vec{\eta}$ , o gerador das rotações é  $J_{\vec{\eta}} := \vec{\eta} \cdot (\vec{x} \times \vec{\nabla})$ . Portanto,

$$\left(e^{\theta J_{\vec{\eta}}} f\right)(\vec{x}) = f\left(e^{-\theta \vec{\eta} \cdot \vec{J}} \vec{x}\right) = f\left(R(-\theta, \vec{\eta}) \vec{x}\right).$$

**E. 22.97** *Exercício.* Verifique a validade das seguintes relações de comutação formais:

$$\left[\vec{\alpha} \cdot (\vec{x} \times \vec{\nabla}), \vec{\beta} \cdot (\vec{x} \times \vec{\nabla})\right] = -(\vec{\alpha} \times \vec{\beta}) \cdot (\vec{x} \times \vec{\nabla}),$$

onde  $\vec{\alpha}$  e  $\vec{\beta}$  são vetores constantes de  $\mathbb{R}^3$ .

✦

## 22.9 Exercícios Adicionais

**E. 22.98** *Exercício.* a. Usando (22.17), página 1038, verifique a validade da fórmula de Lie-Trotter (relação (10.33), página 470):

$$\exp(A + B) = \lim_{m \rightarrow \infty} \left[ \exp\left(\frac{1}{m}A\right) \exp\left(\frac{1}{m}B\right) \right]^m$$

para quando  $A$  e  $B$  são elementos da álgebra de Heisenberg  $\mathfrak{gh}_3(\mathbb{C})$ , ou seja,  $A = h(a, b, c)$  e  $B = h(a', b', c')$ .

b. Nas mesmas circunstâncias, e também usando (22.17), verifique a fórmula do comutador (relação (10.34), página 470):

$$\exp([A, B]) = \lim_{m \rightarrow \infty} \left[ \exp\left(\frac{1}{m}A\right) \exp\left(\frac{1}{m}B\right) \exp\left(-\frac{1}{m}A\right) \exp\left(-\frac{1}{m}B\right) \right]^{m^2}.$$

✱

**E. 22.99** *Exercício.* A fórmula de Rodrigues (22.57) também pode ser obtida com o uso do Cálculo Funcional (Teorema Espectral). Seja  $M \equiv \vec{\eta} \cdot \vec{J}$ , com  $\vec{\eta}$  sendo um vetor unitário de  $\mathbb{R}^3$ . Obtenha explicitamente o polinômio característico de  $M$  e mostre que seus autovalores são  $\alpha_1 = 0$ ,  $\alpha_2 = i$  e  $\alpha_3 = -i$ . Por serem distintos, conclua que  $M$  é diagonalizável e que, portanto, vale para a mesma o Teorema Espectral, Teorema 9.6, página 384. Usando (9.56), página 386, mostre que seus respectivos projetores espectrais são

$$E_1 = M^2 + \mathbb{1}, \quad E_2 = -\frac{1}{2}(M^2 + iM) \quad \text{e} \quad E_3 = -\frac{1}{2}(M^2 - iM).$$

Constata que  $\mathbb{1} = \sum_{k=1}^3 E_k$  e que  $M = \sum_{k=1}^3 \alpha_k E_k = i(E_2 - E_3)$ . Conclua também que

$$e^{\theta M} = \sum_{k=1}^3 e^{\alpha_k \theta} E_k = E_1 + e^{i\theta} E_2 + e^{-i\theta} E_3 = \mathbb{1} + \sin(\theta)M + (1 - \cos(\theta))M^2,$$

que é a fórmula de Rodrigues (22.57).

✱

**E. 22.100** *Exercício.* Usando apenas considerações geométricas, deduza que o efeito de  $R(\theta, \vec{\eta})$  (uma rotação de um ângulo  $\theta$  em torno de um eixo definido por um vetor unitário  $\vec{\eta} \in \mathbb{R}^3$ ) em um vetor qualquer  $\vec{\alpha} \in \mathbb{R}^3$  é, de fato, dado por (22.59).

*Sugestão:* Suponha primeiramente que  $\vec{\alpha}$  e  $\vec{\eta}$  não sejam paralelos e defina uma base ortogonal em  $\mathbb{R}^3$  constituída pelos vetores  $\vec{\eta}$ ,  $\vec{\eta} \times \vec{\alpha}$  e  $\vec{\eta} \times (\vec{\eta} \times \vec{\alpha})$ . Normaliza esses vetores e exprima  $\vec{\alpha}$  em termos dessa base ortonormalizada. Efetue a rotação de um ângulo  $\theta$  do vetor  $\vec{\alpha}$  em torno de  $\vec{\eta}$  observando que a componente de  $\vec{\alpha}$  na direção de  $\vec{\eta}$  permanece invariante, enquanto que as componentes ao longo de  $\vec{\eta} \times (\vec{\eta} \times \vec{\alpha})$  e  $\vec{\eta} \times \vec{\alpha}$  são rodadas de  $\theta$ . Por fim, convença-se que (22.59) é trivialmente válida caso  $\vec{\alpha}$  e  $\vec{\eta}$  sejam paralelos. ✱

**E. 22.101** *Exercício.* Uma forma alternativa de se escrever a álgebra de Lie do grupo  $\text{SO}(3)$  é obtida definindo-se

$$J_{k\ell} := \sum_{m=1}^3 \varepsilon_{k\ell m} J_m = \varepsilon_{k\ell m} J_m$$

como o gerador de rotação no plano  $k$ - $\ell$ . Acima,  $\varepsilon_{k\ell m}$  é o símbolo totalmente antissimétrico de Levi-Civita,  $J_m$  representa o gerador usual de rotação em torno do eixo  $m$  e, na última igualdade, empregou-se a convenção de soma para índices repetidos. Mostre que, em termos dos geradores  $J_{k\ell}$ , a álgebra de Lie de  $\text{SO}(3)$ ,  $[J_k, J_\ell] = \varepsilon_{k\ell m} J_m$ , pode ser escrita como

$$[J_{k\ell}, J_{mn}] = \delta_{km} J_{\ell n} - \delta_{kn} J_{\ell m} - \delta_{\ell m} J_{kn} + \delta_{\ell n} J_{km},$$

onde  $\delta_{km}$  é o delta de Kronecker. (*Sugestão:* É desaconselhável, embora possível, verificar as relações de comutação explicitamente caso-a-caso. O mais prático é explorar as bem-conhecidas propriedades (4.4)–(4.10) do símbolo de Levi-Civita  $\varepsilon_{k\ell m}$  obtidas na Seção 4.1, página 233.

**Observação.** A utilidade de se escrever a álgebra de  $\text{SO}(3)$  em termos dos geradores  $J_{k\ell}$  está no fato de podermos generalizá-la para dimensões maiores de uma forma direta. Por exemplo, a álgebra de Lie do grupo de Lorentz próprio ortócrono  $\mathcal{L}_+^\uparrow \subset \text{SO}(1, 3)$  pode ser escrita como

$$[J_{\mu\nu}, J_{\lambda\sigma}] = -\eta_{\mu\lambda} J_{\nu\sigma} + \eta_{\mu\sigma} J_{\nu\lambda} + \eta_{\nu\lambda} J_{\mu\sigma} - \eta_{\nu\sigma} J_{\mu\lambda},$$

com  $\mu, \nu, \lambda, \sigma \in \{0, 1, 2, 3\}$ , onde  $\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$  é o tensor métrico de Minkowski e onde, adicionalmente,  $J_{00} = 0$  e  $J_{0k} = -J_{k0} = \mathcal{M}_k$ ,  $k = 1, 2, 3$ . Note que, assim, um *boost* na direção  $k$  “equivale” à uma “rotação” no plano formado pela direção (espacial)  $k$  e pela direção temporal 0.

✱

**E. 22.102 Exercício.** Adaptado de [248]. Este exercício fornece uma alternativa ao homomorfismo dado em (22.116). Já vimos que um elemento genérico de  $SU(2)$  é da forma  $U = \begin{pmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix}$ , sendo  $a, b \in \mathbb{C}$  com  $|a|^2 + |b|^2 = 1$ . Mostre que a aplicação  $\phi'$  definida por

$$\phi' \left( \begin{pmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix} \right) := \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(\bar{a}^2 - \bar{b}^2 + a^2 - b^2) & \frac{i}{2}(\bar{a}^2 + \bar{b}^2 - a^2 - b^2) & -\bar{a}\bar{b} - ab \\ \frac{i}{2}(-a^2 + b^2 + \bar{a}^2 - \bar{b}^2) & \frac{1}{2}(\bar{a}^2 + \bar{b}^2 + a^2 + b^2) & i(ab - \bar{a}\bar{b}) \\ a\bar{b} + \bar{a}b & i(a\bar{b} - \bar{a}b) & a\bar{a} - b\bar{b} \end{pmatrix}$$

é um epimorfismo (um homomorfismo sobrejetor) de  $SU(2)$  em  $SO(3)$  e mostre que  $\text{Ker } \phi' = \{\mathbb{1}, -\mathbb{1}\}$ .  $\clubsuit$

**E. 22.103 Exercício.** Sejam  $\mathcal{B} := \{B(t) \in GL(\mathbb{C}, n), t \in \mathbb{R}\}$  e  $\mathcal{C} := \{C(s) \in GL(\mathbb{C}, n), s \in \mathbb{R}\}$  dois subgrupos uniparamétricos de matrizes  $n \times n$  e suponha que valha

$$B(t)C(s) = C(e^{\lambda t}s)B(t), \quad (22.181)$$

para todos  $t, s \in \mathbb{R}$ , com  $\lambda \in \mathbb{R}$  sendo uma constante. Mostre que o conjunto  $\mathcal{A} := \{B(t)C(s), t, s \in \mathbb{R}\}$ , composto por todos os possíveis produtos de elementos de  $\mathcal{B}$  e de  $\mathcal{C}$  (nesta ordem), forma um subgrupo de  $GL(\mathbb{C}, n)$ .

O grupo  $\mathcal{A}$ , acima, é denominado *grupo de Anosov*<sup>63</sup> e está relacionado a uma classe importante de sistemas dinâmicos hiperbólicos, denominados *sistemas de Anosov* ou *fluxos de Anosov*. A relação (22.181) é por vezes denominada *relação de Anosov*. A constante  $\lambda$  é denominada *constante de Lyapunov*<sup>64</sup>, nesse contexto.

Um exemplo concreto (com  $\lambda = 1$ ) é fornecido pelas matrizes  $3 \times 3$

$$B(t) = \begin{pmatrix} \cosh t & 0 & -\sinh t \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sinh t & 0 & \cosh t \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad C(s) = \begin{pmatrix} 1 + \frac{s^2}{2} & s & \frac{s^2}{2} \\ s & 1 & s \\ -\frac{s^2}{2} & -s & 1 - \frac{s^2}{2} \end{pmatrix}.$$

Verifique que  $B(t)B(t') = B(t+t')$ , que  $C(s)C(s') = C(s+s')$ , que  $B(0) = C(0) = \mathbb{1}$  e, mais importante, verifique que a propriedade (22.181) é satisfeita nesse caso, na forma  $B(t)C(s) = C(e^t s)B(t)$ , para todos  $t, s \in \mathbb{R}$ .

As matrizes  $B(t)$  e  $C(s)$ , acima, são elementos do grupo de Lorentz em  $2+1$  dimensões. As matrizes  $B(t)$  implementam um “boost” de Lorentz na direção 2 e as matrizes  $C(s)$  implementam as chamadas *translações horosféricas*, que são transformações de Lorentz que mantêm invariante um raio de luz, no caso, o raio de luz que aponta na direção  $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ . Vide também o Exercício E. 10.28, página 494. Naquele exercício as translações horosféricas mantêm invariante o raio de luz que aponta na direção  $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ .

Um outro exemplo com matrizes  $2 \times 2$ , também com  $\lambda = 1$ , é  $B(t) = \begin{pmatrix} e^{-t/2} & 0 \\ 0 & e^{t/2} \end{pmatrix}$  e  $C(s) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ s & 1 \end{pmatrix}$ . Verifique!  $\clubsuit$

<sup>63</sup>Dmitri Victorovich Anosov (1936–).

<sup>64</sup>Aleksandr Mikhailovich Lyapunov (1857–1918).

# Apêndices

## 22.A Extensão do Lema 22.1 e do Teorema 22.7 ao Caso Complexo

O Lema 22.1 e o Teorema 22.7, páginas 1042 e 1043, respectivamente, possuem versões para formas sesquilineares não-degeneradas em espaços vetoriais complexos. Trataremos disso na seção corrente.

**Lema 22.4** *Seja  $V$  um espaço vetorial complexo dotado de uma forma sesquilinear e não-degenerada  $\omega : V \times V \rightarrow \mathbb{C}$ . Seja  $q$  a forma quadrática associada a  $\omega$ , definida por  $q(u) := \omega(u, u)$ , para todo  $u \in V$ . Seja  $R : V \rightarrow V$  uma função sobrejetora satisfazendo  $R(iv) = \pm iR(v)$ . Então,  $R$  satisfaz as condições*

$$R(0) = 0 \quad e \quad q(R(u) - R(v)) = q(u - v) \quad \text{para todos } u, v \in V \quad (22.A.1)$$

se e somente se satisfizer a condição (caso “+”)

$$\omega(R(u), R(v)) = \omega(u, v) \quad (22.A.2)$$

para todos  $u, v \in V$ , ou a condição (caso “−”)

$$\omega(R(u), R(v)) = \omega(v, u), \quad (22.A.3)$$

também para todos  $u, v \in V$ . □

**Prova do Lema 22.4.** A prova é dividida em duas partes

**I.** Vamos supor a validade de qualquer um dos dois casos (22.A.2) ou (22.A.3). Tomando-se nela  $v = 0$ , temos que  $\omega(R(u), R(0)) = 0$  para todo  $u \in V$ , o que implica  $R(0) = 0$  pois  $\omega$  é não-degenerada e  $R$  é sobrejetora. Além disso,

$$\begin{aligned} q(R(u) - R(v)) &= \omega(R(u) - R(v), R(u) - R(v)) = \omega(R(u), R(u)) + \omega(R(v), R(v)) - \omega(R(u), R(v)) - \omega(R(v), R(u)) \\ &\stackrel{(22.A.2) \text{ ou } (22.A.3)}{=} \omega(u, u) + \omega(v, v) - \omega(u, v) - \omega(v, u) = \omega(u - v, u - v) = q(u - v), \end{aligned} \quad (22.A.4)$$

que estabelece (22.A.1).

**II.** Vamos supor a validade de (22.A.1). Tomando-se  $v = 0$  na segunda igualdade de (22.A.1) e usando a primeira ( $R(0) = 0$ ), tem-se  $q(R(u)) = q(u)$  para todo  $u$ . Agora, por um lado

$$q(R(u)) + q(R(v)) - q(R(u) - R(v)) = q(u) + q(v) - q(u - v) = \omega(u, u) + \omega(v, v) - \omega(u - v, u - v) = \omega(u, v) + \omega(v, u).$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} q(R(u)) + q(R(v)) - q(R(u) - R(v)) &= \omega(R(u), R(u)) + \omega(R(v), R(v)) - \omega(R(u) - R(v), R(u) - R(v)) \\ &= \omega(R(u), R(v)) + \omega(R(v), R(u)). \end{aligned}$$

Isso estabeleceu que

$$\omega(R(u), R(v)) + \omega(R(v), R(u)) = \omega(u, v) + \omega(v, u). \quad (22.A.5)$$

Trocando-se  $v$  por  $iv$  em (22.A.5) e adicionando-se o resultado à própria (22.A.5), obtemos

$$2\omega(u, v) = \omega(R(u), R(v)) + \omega(R(v), R(u)) - i[\omega(R(u), R(iv)) + \omega(R(iv), R(u))] \quad (22.A.6)$$

Se tivermos válida a condição  $R(iv) = +iR(v)$ , (22.A.6) implica

$$\omega(u, v) = \omega(R(u), R(v)).$$

Se tivermos válida a condição  $R(iv) = -iR(v)$ , (22.A.6) implica

$$\omega(u, v) = \omega(R(v), R(u)) .$$

Isso provou a validade de (22.A.2) ou de (22.A.3), completando a prova do Lema 22.4. ■

**Teorema 22.11** *Seja  $V$  um espaço vetorial complexo dotado de uma forma sesquilinear e não-degenerada  $\omega : V \times V \rightarrow \mathbb{C}$ . Seja  $q$  a forma quadrática associada a  $\omega$ , definida por  $q(u) := \omega(u, u)$ , para todo  $u \in V$ . Seja  $A : V \rightarrow V$  uma função sobrejetora definida em  $V$  e tal que  $q(A(u) - A(v)) = q(u - v)$  para todos  $u, v \in V$  e satisfazendo  $A(iu) - A(iv) = \pm i(A(u) - A(v))$  também para todos  $u, v \in V$ . Então, existem: 1<sup>o</sup> um vetor constante  $c \in V$  e, 2<sup>o</sup> um operador sobrejetor  $R : V \rightarrow V$  satisfazendo*

- (caso “+”):  $R : V \rightarrow V$  é linear e  $\omega(Ru, Rv) = \omega(u, v)$  para todos  $u, v \in V$ ;
- (caso “−”):  $R : V \rightarrow V$  é antilinear e  $\omega(Ru, Rv) = \omega(v, u)$  para todos  $u, v \in V$ .

e tais que

$$A(u) = Ru + c$$

para todo  $u \in V$ . O operador  $R$  e a constante  $c$  são univocamente determinados. □

**Prova do Teorema 22.11.** Seja  $V$  um espaço vetorial real dotado de uma forma bilinear simétrica e não-degenerada  $\omega : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ . Seja  $q$  a forma quadrática associada a  $\omega$ , definida por  $q(u) := \omega(u, u)$ , para todo  $u \in V$ . Seja  $A : V \rightarrow V$  uma função sobrejetora definida em  $V$  tal que  $q(A(u) - A(v)) = q(u - v)$  para todos  $u, v \in V$ .

Defina-se  $c := A(0) \in V$  e defina-se uma nova função  $R : V \rightarrow V$  dada por  $R(v) := A(v) - c = A(v) - A(0)$  para todo  $v \in V$ . É claro que  $R$  é sobrejetora, por  $A$  o ser. É claro também que  $R(0) = 0$  e que  $q(R(u) - R(v)) = q(u - v)$  para todos  $u, v \in V$ . Além disso,  $R(iu) = A(iu) - A(i0) = \pm i(A(u) - A(0)) = \pm iR(u)$ , para todo  $u \in V$ .

Vamos agora mostrar que se  $R : V \rightarrow V$  satisfaz (22.A.1) (e, portanto, (22.A.2) ou (22.A.3), pelo Lema 22.4) e as demais hipóteses então  $R$  é linear ou antilinear. Temos que, para  $w \in V$ , arbitrário, e assumindo o caso  $R(iv) = +iR(v)$ ,

$$\begin{aligned} & \omega(R(w), R(\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2) - \alpha_1 R(u_1) - \alpha_2 R(u_2)) \\ &= \omega(R(w), R(\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2)) - \alpha_1 \omega(R(w), R(u_1)) - \alpha_2 \omega(R(w), R(u_2)) \\ & \stackrel{(22.A.2)}{=} \omega(w, \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2) - \alpha_1 \omega(w, u_1) - \alpha_2 \omega(w, u_2) \\ &= \omega\left(w, \underbrace{(\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2) - \alpha_1 u_1 - \alpha_2 u_2}_{=0}\right) = 0 . \quad (22.A.7) \end{aligned}$$

Como  $R$  é sobrejetora e  $w$  é arbitrário, a não-degenerescência de  $\omega$  implica que  $R(\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2) - \alpha_1 R(u_1) - \alpha_2 R(u_2) = 0$  para todos  $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{C}$  e todos  $u_1, u_2 \in V$ , significando que  $R : V \rightarrow V$  é linear.

Analogamente, assumindo o caso  $R(iv) = -iR(v)$ ,

$$\begin{aligned}
 & \omega\left(R(w), R(\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2) - \overline{\alpha_1} R(u_1) - \overline{\alpha_2} R(u_2)\right) \\
 &= \omega\left(R(w), R(\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2)\right) - \overline{\alpha_1} \omega\left(R(w), R(u_1)\right) - \overline{\alpha_2} \omega\left(R(w), R(u_2)\right) \\
 &\stackrel{(22.A.3)}{=} \omega\left(\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2, w\right) - \overline{\alpha_1} \omega(u_1, w) - \overline{\alpha_2} \omega(u_2, w) \\
 &= \omega\left(\underbrace{(\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2) - \alpha_1 u_1 - \alpha_2 u_2}_{=0}, w\right) = 0. \quad (22.A.8)
 \end{aligned}$$

Como  $R$  é sobrejetora e  $w$  é arbitrário, a não-degenerescência de  $\omega$  implica que  $R(\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2) - \overline{\alpha_1} R(u_1) - \overline{\alpha_2} R(u_2) = 0$  para todos  $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{C}$  e todos  $u_1, u_2 \in V$ , significando que  $R: V \rightarrow V$  é antilinear.

Resta apenas demonstrar a unicidade de  $R$  e  $c$ . Vamos supor que para todo  $u \in V$  tenhamos  $Ru + c = R'u + c'$ . Tomando-se  $u = 0$ , concluiríamos que  $c = c'$ . A relação restante  $Ru = R'u$ , válida para todo  $u \in V$ , significa que  $R = R'$ . Isso completa a prova do Teorema 22.11. ■

## 22.B Prova do Teorema 22.10

Nesta seção será apresentada a demonstração do Teorema 22.10, página 1108.

Seja  $L$  um elemento do grupo de Lorentz  $O(1, 3)$ , representada como matriz  $4 \times 4$  na forma

$$L = \begin{pmatrix} L_{00} & L_{01} & L_{02} & L_{03} \\ L_{10} & L_{11} & L_{12} & L_{13} \\ L_{20} & L_{21} & L_{22} & L_{23} \\ L_{30} & L_{31} & L_{32} & L_{33} \end{pmatrix}. \quad (22.B.9)$$

Vamos definir vetores coluna (ou seja, matrizes  $3 \times 1$ )  $a$  e  $b$  por

$$a := \begin{pmatrix} L_{10} \\ L_{20} \\ L_{30} \end{pmatrix}, \quad b := \begin{pmatrix} L_{01} \\ L_{02} \\ L_{03} \end{pmatrix}.$$

É evidente que podemos representar  $L$  na forma de blocos

$$L = \begin{pmatrix} L_{00} & \boxed{b^T} \\ \boxed{a} & \boxed{l} \end{pmatrix}, \quad (22.B.10)$$



onde  $b^T$ , a transposta de  $b$ , é o vetor linha (matriz  $1 \times 3$ ) dado por  $b^T = \begin{pmatrix} L_{01}, & L_{02}, & L_{03} \end{pmatrix}$  e  $l$  é a matriz  $3 \times 3$  dada por

$$l := \begin{pmatrix} L_{11} & L_{12} & L_{13} \\ L_{21} & L_{22} & L_{23} \\ L_{31} & L_{32} & L_{33} \end{pmatrix}.$$

Vamos agora considerar duas matrizes  $R_a$  e  $R_b$  pertencentes a SRot, ou seja,

$$R_a := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{\phantom{r_a}} \\ 0 & & & \\ 0 & & & \end{pmatrix}, \quad R_b := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{\phantom{r_b}} \\ 0 & & & \\ 0 & & & \end{pmatrix},$$

com  $r_a$  e  $r_b$  matrizes  $3 \times 3$  pertencentes a  $SO(3)$ . Precisamos estudar a forma da matriz  $R_a L R_b^T$ . A regra de produto de matrizes diz-nos que

$$R_a L R_b^T = \begin{pmatrix} L_{00} & \boxed{(r_b b)^T} \\ \boxed{r_a a} & \boxed{r_a l r_b^T} \end{pmatrix}. \quad (22.B.11)$$

#### E. 22.104 Exercício importante. Verifique!

✱

A expressão acima é válida de modo bastante geral, para quaisquer que sejam as matrizes de rotação  $r_a$  e  $r_b$ . Vamos agora, porém, considerar matrizes de rotação  $r_a$  e  $r_b$  particulares. Escolhemos  $r_a$  da forma  $r_a = s^a t^a$ , onde  $t^a \in SO(3)$  é a matriz de rotação que roda o vetor  $a$  de modo que apenas a primeira componente do vetor resultante seja não-nula:

$$t^a a = \begin{pmatrix} \alpha \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (22.B.12)$$

A matriz  $s^a \in SO(3)$ , por sua vez, é uma matriz de rotação em torno do eixo 1, e que, portanto, deixa o vetor  $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$  invariante.  $s^a$  é da forma

$$s^a = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & s_{22}^a & s_{23}^a \\ 0 & s_{32}^a & s_{33}^a \end{pmatrix} =: \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{s^{a'}} \\ 0 & & \end{pmatrix}, \quad (22.B.13)$$

com

$$s^{a'} := \begin{pmatrix} s_{22}^a & s_{23}^a \\ s_{32}^a & s_{33}^a \end{pmatrix} \in \text{SO}(2) .$$

Assim, temos também

$$s^a t^a a = \begin{pmatrix} \alpha \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} .$$

Analogamente, escolhemos  $r_b$  da forma  $r_b = s^b t^b$ , onde  $t^b \in \text{SO}(3)$  é a matriz de rotação que roda o vetor  $b$  de modo que apenas a primeira componente do vetor resultante seja não-nula:

$$t^b b = \begin{pmatrix} \beta \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} . \quad (22.B.14)$$

A matriz  $s^b \in \text{SO}(3)$ , por sua vez, é uma matriz de rotação em torno do eixo 1, e que, portanto, deixa o vetor  $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$  invariante.  $s^b$  é da forma

$$s^b = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & s_{22}^b & s_{23}^b \\ 0 & s_{32}^b & s_{33}^b \end{pmatrix} =: \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{s^{b'}} \\ 0 & \boxed{\phantom{s^{b'}}} \end{pmatrix} , \quad (22.B.15)$$

com

$$s^{b'} := \begin{pmatrix} s_{22}^b & s_{23}^b \\ s_{32}^b & s_{33}^b \end{pmatrix} \in \text{SO}(2) .$$

Pela definição de  $s^b$  acima, também temos

$$s^b t^b b = \begin{pmatrix} \beta \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} .$$

Daqui por diante as matrizes  $t^a$  e  $t^b$  estarão fixas. As matrizes  $s^a$  e  $s^b$  são ainda arbitrárias, mas serão fixadas mais adiante. Com essas escolhas temos agora

$$R_a L R_b^T = \begin{pmatrix} L_{00} & \beta & 0 & 0 \\ \alpha & \boxed{s^a t_t (s^b)^T} \\ 0 & \boxed{\phantom{s^a t_t (s^b)^T}} \\ 0 & \boxed{\phantom{s^a t_t (s^b)^T}} \end{pmatrix} , \quad (22.B.16)$$

onde  $l_t := t^a l(t^b)^T$ .

A matriz  $L' := R_a L R_b^T$  é certamente um elemento do grupo de Lorentz  $O(1, 3)$ , pois  $R_a$ ,  $L$  e  $R_b^T$  o são. Assim,  $L'$  satisfaz  $L' \eta (L')^T \eta = \mathbb{1}$ . Calculemos o lado esquerdo dessa igualdade:

$$\begin{aligned}
 L' \eta (L')^T \eta &= \begin{pmatrix} L_{00} & \beta & 0 & 0 \\ \alpha & \boxed{\phantom{0000}} \\ 0 & s^a l_t (s^b)^T \\ 0 & \boxed{\phantom{0000}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{\phantom{0000}} \\ 0 & -\mathbb{1} \\ 0 & \boxed{\phantom{0000}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} L_{00} & \alpha & 0 & 0 \\ \beta & \boxed{\phantom{0000}} \\ 0 & s^b l_t^T (s^a)^T \\ 0 & \boxed{\phantom{0000}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{\phantom{0000}} \\ 0 & -\mathbb{1} \\ 0 & \boxed{\phantom{0000}} \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} L_{00} & -\beta & 0 & 0 \\ \alpha & \boxed{\phantom{0000}} \\ 0 & -s^a l_t (s^b)^T \\ 0 & \boxed{\phantom{0000}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} L_{00} & -\alpha & 0 & 0 \\ \beta & \boxed{\phantom{0000}} \\ 0 & -s^b l_t^T (s^a)^T \\ 0 & \boxed{\phantom{0000}} \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} L_{00}^2 - \beta^2 & \boxed{-g^T} \\ \boxed{g} & \boxed{f} \end{pmatrix},
 \end{aligned}$$

onde

$$f := s^a l_t (l_t)^T (s^a)^T - \alpha^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad g := -\beta s^a l_t (s^b)^T \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + L_{00} \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Na expressão para  $f$  usamos o fato que  $(s^b)^T s^b = \mathbb{1}$ , pois  $s^b$  é uma matriz ortogonal.

**E. 22.105** Exercício importante. Verifique as expressões acima. Sugestão: exerça a virtude da Paciência. ✱

Como mencionamos,  $L' \eta (L')^T \eta = \mathbb{1}$ . Portanto, devemos ter

$$f = \mathbb{1}, \tag{22.B.17}$$

$$g = 0 \quad \text{e} \tag{22.B.18}$$

$$L_{00}^2 - \beta^2 = 1 \tag{22.B.19}$$

Logo,

$$s^a l_t (l_t)^T (s^a)^T = \begin{pmatrix} 1 + \alpha^2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (22.B.20)$$

e

$$\beta s^a l_t (s^b)^T = L_{00} \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (22.B.21)$$

Devido à forma de  $s^a$  e  $s^b$  em (22.B.13) e (22.B.15) essas relações implicam

$$l_t (l_t)^T = \begin{pmatrix} 1 + \alpha^2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (22.B.22)$$

e

$$\beta l_t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = L_{00} \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (22.B.23)$$

respectivamente

**E. 22.106** Exercício. Verifique! ✦

Com as relações acima temos em mãos algumas conclusões sobre a estrutura do grupo de Lorentz. A primeira é a seguinte proposição:

**Proposição 22.32** *Para qualquer transformação de Lorentz  $L$  vale*

$$L_{00}^2 - \beta^2 = 1, \quad (22.B.24)$$

$$L_{00}^2 - \alpha^2 = 1 \quad (22.B.25)$$

e, consequentemente,

$$\alpha^2 = \beta^2. \quad (22.B.26)$$

Fora isso,

$$\|a\|^2 = \alpha^2 = \beta^2 = \|b\|^2,$$

onde  $\|a\|$  e  $\|b\|$  são os módulos dos vetores  $a$  e  $b$ , respectivamente, ou seja,

$$\|a\|^2 = (L_{10})^2 + (L_{20})^2 + (L_{30})^2 \quad e \quad \|b\|^2 = (L_{01})^2 + (L_{02})^2 + (L_{03})^2.$$

Portanto,

$$L_{00}^2 = 1 + (L_{10})^2 + (L_{20})^2 + (L_{30})^2 = 1 + (L_{01})^2 + (L_{02})^2 + (L_{03})^2.$$

□

**Prova.** (22.B.24) é o mesmo que (22.B.19). Para provar (22.B.25), notemos que, pela Proposição 22.25,  $L^T$  é também uma transformação de Lorentz. Logo, para  $L^T$  a relação (22.B.24) significa  $L_{00}^2 - \alpha^2 = 1$ , pois ao passarmos de  $L$  para  $L^T$  o elemento  $L_{00}$  não muda, mas ocorre a troca  $\alpha \leftrightarrow \beta$ . (22.B.26) segue de (22.B.24) e (22.B.25). Para provar que  $\|a\|^2 = \alpha^2$ , notemos que, por (22.B.12), o vetor  $\begin{pmatrix} \alpha \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$  é obtido de  $a$  por uma rotação  $t^a \in \text{SO}(3)$ , que não altera o comprimento de vetores. De modo análogo prova-se que  $\|b\|^2 = \beta^2$ . ■

Segue dessa proposição que, para prosseguirmos, teremos que considerar dois casos: o caso  $\alpha = \beta = 0$  e o caso em que  $\alpha \neq 0$  e  $\beta \neq 0$ .

**Caso  $\alpha = \beta = 0$ .**

Como comentamos, nesse caso temos  $a = b = 0$ . Podemos adotar  $s^a = s^b = t^a = t^b = \mathbb{1}$  e, portanto,  $L$  é simplesmente da forma

$$L = \begin{pmatrix} L_{00} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{\phantom{0000}} \\ 0 & & l \\ 0 & & \end{pmatrix}.$$

Com  $\alpha = 0$  e  $s^a = s^b = t^a = t^b = \mathbb{1}$ , a relação (22.B.22) reduz-se a  $l^T = \mathbb{1}$ , ou seja,  $l \in \text{O}(3)$ . Como  $\det(L) = \pm 1$  e  $\det(l) = \pm 1$  há quatro situações a considerar:

**Ia.**  $\det(L) = 1$  e  $\det(l) = 1$ .

Nessa situação tem-se  $l \in \text{SO}(3)$  e  $L_{00} = 1$ . Portanto,  $L \in \text{SRot}$ .

**Ib.**  $\det(L) = 1$  e  $\det(l) = -1$ .

Nessa situação  $l \in \text{O}(3)$  mas  $l \notin \text{SO}(3)$  e  $L_{00} = -1$ . Assim  $L$  é da forma  $L = P_1 T R$  com  $R \in \text{SRot}$ .

**IIa.**  $\det(L) = -1$  e  $\det(l) = 1$ .

Nessa situação  $l \in \text{SO}(3)$  e  $L_{00} = -1$ . Assim  $L$  é da forma  $L = T R$  com  $R \in \text{SRot}$ .

**IIb.**  $\det(L) = -1$  e  $\det(l) = -1$ .

Nessa situação  $l \in \text{O}(3)$  mas  $l \notin \text{SO}(3)$  e  $L_{00} = 1$ . Assim  $L$  é da forma  $L = P_1 R$  com  $R \in \text{SRot}$ .

**E. 22.107** *Exercício.* Justifique as afirmações acima. ✱

Resumindo, vimos para o caso  $a = b = 0$  que nas quatro situações possíveis  $L$  consiste apenas de uma simples rotação, seguida eventualmente de uma inversão de paridade (Ib e IIb) e/ou de uma reversão temporal (Ib e IIa.). Como veremos, o caso  $\alpha \neq 0$  e  $\beta \neq 0$  envolve também um “boost de Lorentz”, ou seja, uma mudança entre dois sistemas de referência inerciais com uma velocidade relativa eventualmente não-nula.

**Caso  $\alpha \neq 0$  e  $\beta \neq 0$ .**

Como  $\beta \neq 0$ , (22.B.23) pode ser escrita como

$$l_t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{L_{00}\alpha}{\beta} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (22.B.27)$$

ou seja,  $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$  é um autovetor de  $l_t$  com autovalor  $\omega := \frac{L_{00}\alpha}{\beta}$ . Escrevendo  $l_t$  na sua forma explícita como

$$l_t = \begin{pmatrix} (l_t)_{11} & (l_t)_{12} & (l_t)_{13} \\ (l_t)_{21} & (l_t)_{22} & (l_t)_{23} \\ (l_t)_{31} & (l_t)_{32} & (l_t)_{33} \end{pmatrix},$$

a relação (22.B.27) fica

$$\begin{pmatrix} (l_t)_{11} & (l_t)_{12} & (l_t)_{13} \\ (l_t)_{21} & (l_t)_{22} & (l_t)_{23} \\ (l_t)_{31} & (l_t)_{32} & (l_t)_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \omega \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

o que implica  $(l_t)_{11} = \omega$  e  $(l_t)_{21} = (l_t)_{31} = 0$ . Assim,

$$l_t = \begin{pmatrix} \omega & (l_t)_{12} & (l_t)_{13} \\ 0 & (l_t)_{22} & (l_t)_{23} \\ 0 & (l_t)_{32} & (l_t)_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \omega & \boxed{\phi^T} \\ 0 & \boxed{l'_t} \\ 0 & \end{pmatrix},$$

onde  $\phi$  é o vetor coluna  $\phi = \begin{pmatrix} (l_t)_{12} \\ (l_t)_{13} \end{pmatrix}$  e  $l'_t$  é a matriz  $2 \times 2$  dada por  $l'_t := \begin{pmatrix} (l_t)_{22} & (l_t)_{23} \\ (l_t)_{32} & (l_t)_{33} \end{pmatrix}$ . Ocorre que também

vale que  $\phi = 0$ . Para ver isso, notemos que (22.B.22) diz-nos que

$$l_t(l_t)^T = \begin{pmatrix} \omega & \boxed{\phi^T} \\ 0 & \boxed{l'^T_t} \\ 0 & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega & \boxed{0 \ 0} \\ \boxed{\phi} & \boxed{l'_t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + \alpha^2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

ou seja,

$$\begin{pmatrix} \omega^2 + \phi^T \phi & \boxed{(l'_t \phi)^T} \\ \boxed{l'_t \phi} & \boxed{l'_t (l'_t)^T} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + \alpha^2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Logo,

$$l'_t (l'_t)^T = \mathbb{1}, \quad (22.B.28)$$

$$l'_t \phi = 0 \quad (22.B.29)$$

e

$$\omega^2 + \phi^T \phi = 1 + \alpha^2. \quad (22.B.30)$$

Agora, (22.B.28) afirma que  $l'_t$  é uma matriz ortogonal:  $(l'_t)^{-1} = (l'_t)^T$ . Aplicando, portanto,  $(l'_t)^{-1}$  à esquerda em (22.B.29) segue que  $\phi = 0$ . Chegamos assim à conclusão que

$$l_t = \begin{pmatrix} \omega & 0 & 0 \\ 0 & (l_t)_{22} & (l_t)_{23} \\ 0 & (l_t)_{32} & (l_t)_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \omega & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{l'_t} \\ 0 & \end{pmatrix},$$

com  $\omega^2 = 1 + \alpha^2$  (por (22.B.30)). Segue daí que

$$s^a l_t (s^b)^T = \begin{pmatrix} \omega & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{s^{a'} l'_t (s^{b'})^T} \\ 0 & \end{pmatrix},$$

( $s^{a'}$  e  $s^{b'}$  estão definidos em (22.B.13) e (22.B.15)). Neste momento vamos fixar  $s^a$  e  $s^b$ , adotando

$$s^{a'} = s^{b'} (l'_t)^{-1} = s^{b'} (l'_t)^T.$$

Com isso, obviamente

$$s^{a'} l'_t (s^{b'})^T = \mathbb{1}.$$

Logo,

$$s^a l_t (s^b)^T = \begin{pmatrix} \omega & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Retornando a (22.B.16)

$$R_a L R_b^T = \begin{pmatrix} L_{00} & \beta & 0 & 0 \\ \alpha & \omega & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (22.B.31)$$

onde, recordando,

$$\omega = \frac{L_{00}\alpha}{\beta} \quad \text{e} \quad \omega^2 = 1 + \alpha^2. \quad (22.B.32)$$

Resta-nos mostrar que a matriz do lado direito de (22.B.31) tem a forma de um *boost* de Lorentz, acompanhado eventualmente de uma operação de troca de paridade e/ou reversão temporal. É o que faremos agora.

Como  $R_a L R_b^T$  é um elemento do grupo de Lorentz  $O(1, 3)$ , tem-se que  $\det(R_a L R_b^T) = \pm 1$ . Calculando o determinante da matriz do lado direito (22.B.31) tem-se, então,  $\omega L_{00} - \alpha\beta = \pm 1$ . Multiplicando-se por  $\alpha/\beta$  teremos  $\omega \frac{L_{00}\alpha}{\beta} - \alpha^2 = \pm \frac{\alpha}{\beta}$ , ou seja,

$$\omega^2 - \alpha^2 = \pm \frac{\alpha}{\beta}.$$

Pela segunda equação em (22.B.32) isso implica

$$\beta = \pm \alpha \quad \text{e} \quad L_{00} = \pm \omega,$$

os dois sinais  $\pm$  acima sendo iguais ao sinal de  $\det(R_a L R_b^T)$ . Porém,  $\omega$  é dado por  $\pm\sqrt{1+\alpha^2}$  (vide (22.B.32)), mas a escolha do sinal dessa raiz quadrada é independente do sinal de  $\det(R_a L R_b^T)$ . Há, portanto, quatro situações possíveis que deveremos considerar separadamente:

**Ia.** Escolhendo  $\det(R_a L R_b^T) = +1$  e  $\omega = +\sqrt{1+\alpha^2}$ , (22.B.31) fica

$$L = (R_a)^T \begin{pmatrix} \sqrt{1+\alpha^2} & \alpha & 0 & 0 \\ \alpha & \sqrt{1+\alpha^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} R_b. \quad (22.B.33)$$

$R_a$  e  $R_b$  são elementos de  $\text{SRot} \simeq \text{SO}(3)$ , temos  $\det(R_a) = \det(R_b) = 1$ . Logo, neste caso temos  $\det(L) = 1$ . Fora isso  $L_{00} \geq 1$ .

É conveniente escrever (22.B.33) de outra forma. Como  $\alpha$  é um número real arbitrário, vamos definir  $v \in (-1, 1)$  por

$$v := -\frac{\alpha}{\sqrt{1+\alpha^2}}, \quad \text{de modo que} \quad \alpha = -\frac{v}{\sqrt{1-v^2}}. \quad (22.B.34)$$

Teremos

$$\begin{pmatrix} \sqrt{1+\alpha^2} & \alpha & 0 & 0 \\ \alpha & \sqrt{1+\alpha^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma(v) & -v\gamma(v) & 0 & 0 \\ -v\gamma(v) & \gamma(v) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =: B_1(v),$$

onde

$$\gamma(v) := \frac{1}{\sqrt{1-v^2}}.$$

Como se vê, chegamos dessa forma aos *boosts* de Lorentz  $B_1(v)$  utilizando apenas as propriedades definidoras do grupo de Lorentz. Compare com o estudo do grupo  $O(1, 1)$ , página 1050.

Com essa parametrização, (22.B.33) fica

$$L = (R_a)^T B_1(v) R_b, \quad (22.B.35)$$

para  $R_a, R_b \in \text{SRot}$ .

**Ib.** Escolhendo  $\det(R_a L R_b^T) = +1$  e  $\omega = -\sqrt{1+\alpha^2}$ , (22.B.31) fica

$$R_a L R_b^T = \begin{pmatrix} -\sqrt{1+\alpha^2} & \alpha & 0 & 0 \\ \alpha & -\sqrt{1+\alpha^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (22.B.36)$$



Logo, usando-se as matrizes  $P_1$  e  $T$  definidas em (22.146) e (22.147), segue

$$P_1 R_a L R_b^T T = \begin{pmatrix} \sqrt{1+\alpha^2} & \alpha & 0 & 0 \\ \alpha & \sqrt{1+\alpha^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (22.B.37)$$

como facilmente se verifica. Daí, notando que  $T$  e  $R_b$  comutam (por que?), conclui-se que nesse caso temos

$$L = (P_1 R_a)^T \begin{pmatrix} \sqrt{1+\alpha^2} & \alpha & 0 & 0 \\ \alpha & \sqrt{1+\alpha^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} R_b T. \quad (22.B.38)$$

Assim, com a parametrização (22.B.34),

$$L = (P_1 R_a)^T B_1(v) R_b T, \quad (22.B.39)$$

para  $R_a, R_b \in \text{SRot}$ . Note-se que neste caso temos  $\det(L) = 1$  com  $L_{00} \leq -1$ .

**IIa.** Escolhendo  $\det(R_a L R_b^T) = -1$  e  $\omega = +\sqrt{1+\alpha^2}$ , (22.B.31) fica

$$R_a L R_b^T = \begin{pmatrix} -\sqrt{1+\alpha^2} & -\alpha & 0 & 0 \\ \alpha & \sqrt{1+\alpha^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (22.B.40)$$

Assim,

$$T R_a L R_b^T = \begin{pmatrix} \sqrt{1+\alpha^2} & \alpha & 0 & 0 \\ \alpha & \sqrt{1+\alpha^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (22.B.41)$$

como facilmente se verifica. Nesse caso, então,

$$L = T(R_a)^T \begin{pmatrix} \sqrt{1+\alpha^2} & \alpha & 0 & 0 \\ \alpha & \sqrt{1+\alpha^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} R_b. \quad (22.B.42)$$

Assim, com a parametrização (22.B.34),

$$L = T(R_a)^T B_1(v) R_b, \quad (22.B.43)$$

para  $R_a, R_b \in \text{SRot}$ . Note-se que neste caso temos  $\det(L) = -1$  com  $L_{00} \leq -1$ .

**IIb.** Escolhendo  $\det(R_a L R_b^T) = -1$  e  $\omega = -\sqrt{1 + \alpha^2}$ , (22.B.31) fica

$$R_a L R_b^T = \begin{pmatrix} \sqrt{1 + \alpha^2} & -\alpha & 0 & 0 \\ \alpha & -\sqrt{1 + \alpha^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (22.B.44)$$

Assim,

$$R_a L R_b^T P_1 = \begin{pmatrix} \sqrt{1 + \alpha^2} & \alpha & 0 & 0 \\ \alpha & \sqrt{1 + \alpha^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (22.B.45)$$

como facilmente se verifica. Nesse caso, então,

$$L = (R_a)^T \begin{pmatrix} \sqrt{1 + \alpha^2} & \alpha & 0 & 0 \\ \alpha & \sqrt{1 + \alpha^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} P_1 R_b. \quad (22.B.46)$$

Assim, com a parametrização (22.B.34),

$$L = (R_a)^T B_1(v) P_1 R_b, \quad (22.B.47)$$

para  $R_a, R_b \in \text{SRot}$ . Note-se que neste caso temos  $\det(L) = -1$  e  $L_{00} \geq 1$ .

A demonstração do Teorema 22.10 está assim completa. ■