1ª TEMPORADA DE MINICURSOS

MAPLE 13

PET CIVIL UFC

Lívia Braga Sydrião de Alencar

Bergson da Silva Matias

PET Civil

Sumário

1. INTRODUÇÃO **3**

1.1. Histórico 3

1.2. Interface 3

1.3. Comandos Básicos 7

1.3.1. Operações básicas 7

1.4. Alguns detalhes 8

1.4.1. Casas decimais 8

1.4.2. Ajuda 9

1.4.3. Erro 9

1.4.4. Comentários 10

2. EQUAÇÕES ALGÉBRICAS **11**

2.1. Atribuições 11

2.2. Outros comandos 11

2.3. Resolução de Equações Algébricas 13

2.4. Funções Elementares 14

3. CÁLCULO **18**

3.1. Limite 18

3.2. Derivada 20

3.3. Integral 22

4. EDO'S **25**

4.1. Declarando uma EDO 25

4.2. Resolvendo uma EDO 26

5. GRÁFICOS **29**

5.1. Gráficos em duas dimensões 29

5.1.1. Funções 29

5.1.2. Limites 35

5.1.3. Derivadas 35

5.1.4. Integrais 36

5.2. Gráficos em três dimensões 36

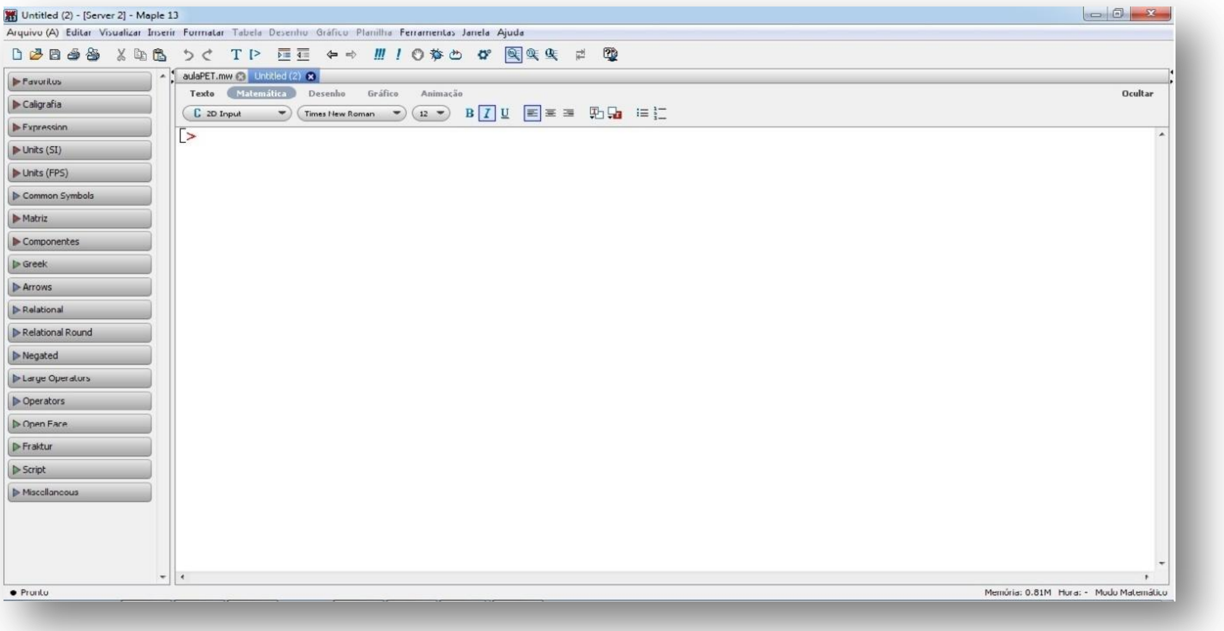
5.3. Gráficos de EDO's 38

1. Introdução

1.1. Histórico

Maple é um sistema algébrico computacional comercial de uso genérico. Constitui um ambiente informático para a computação de expressões algébricas, simbólicas (pode-se usar essa capacidade simbólica para obter-se soluções analíticas exatas para muitos problemas matemáticos como diferenciação, integração e etc), permitindo o desenho de gráficos a duas ou a três dimensões. O seu desenvolvimento começou em 1981 pelo Grupo de Computação Simbólica na Universidade de Waterloo em Waterloo, no Canadá, província de Ontário.

Desde 1988, o Maple tem sido desenvolvido e comercializado pela Maplesoft, uma

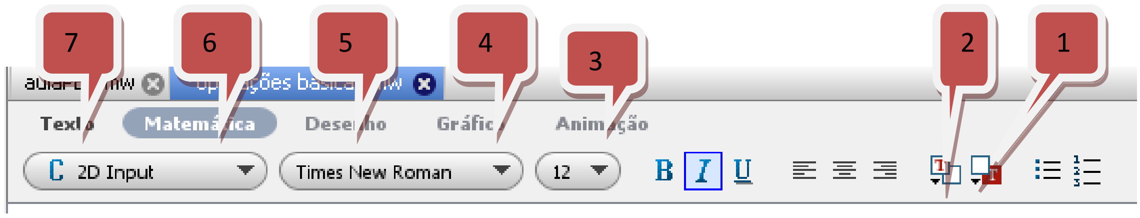


companhia canadense também baseada em Waterloo, Ontário.

1.2. Interface

A versão mais atual é o Maple 15. Porém, nessa apostila, será utilizado o Maple 13. Ao abrir-se o software, essa é a interface que se encontra:

Conhecendo os botões do Maple:



1 – Configura a cor de um intervalo de caracteres selecionado.

2 – Configura a cor da fonte para caracteres selecionados.

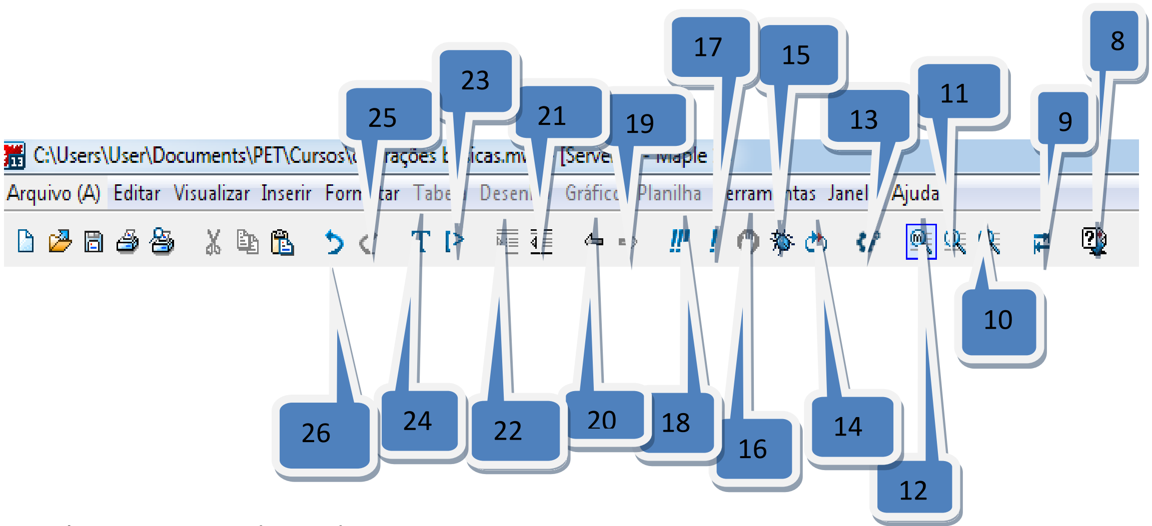
3 – Indica quando o usuário está utilizando uma animação.

4 – Indica quando o usuário está utilizando um gráfico.

5 – Indica quando o usuário está utilizando um desenho.

6 – Indica quando o usuário está utilizando uma operação matemática (ao se utilizar números por exemplo).

7 – Indica quando o usuário está utilizando um texto.



8 – Abre o sistema de ajuda.

9 – Desfaz um comando.

10 – Zoom 200%.

11 – Zoom 150%.

12 – Zoom 100%.

13 – Editar código de iniciação.

14 – Reinicia o servidor Maple.

15 – Depura a operação atual.

16 – Interrompe a operação atual.

17 – Executa todos os grupos selecionados.

18 – Executa todo o conteúdo da folha de trabalho.

19 – Avança para a próxima folha de trabalho.

20 – Volta para a folha de trabalho anterior.

21 – Remove qualquer seção incluída na seleção.

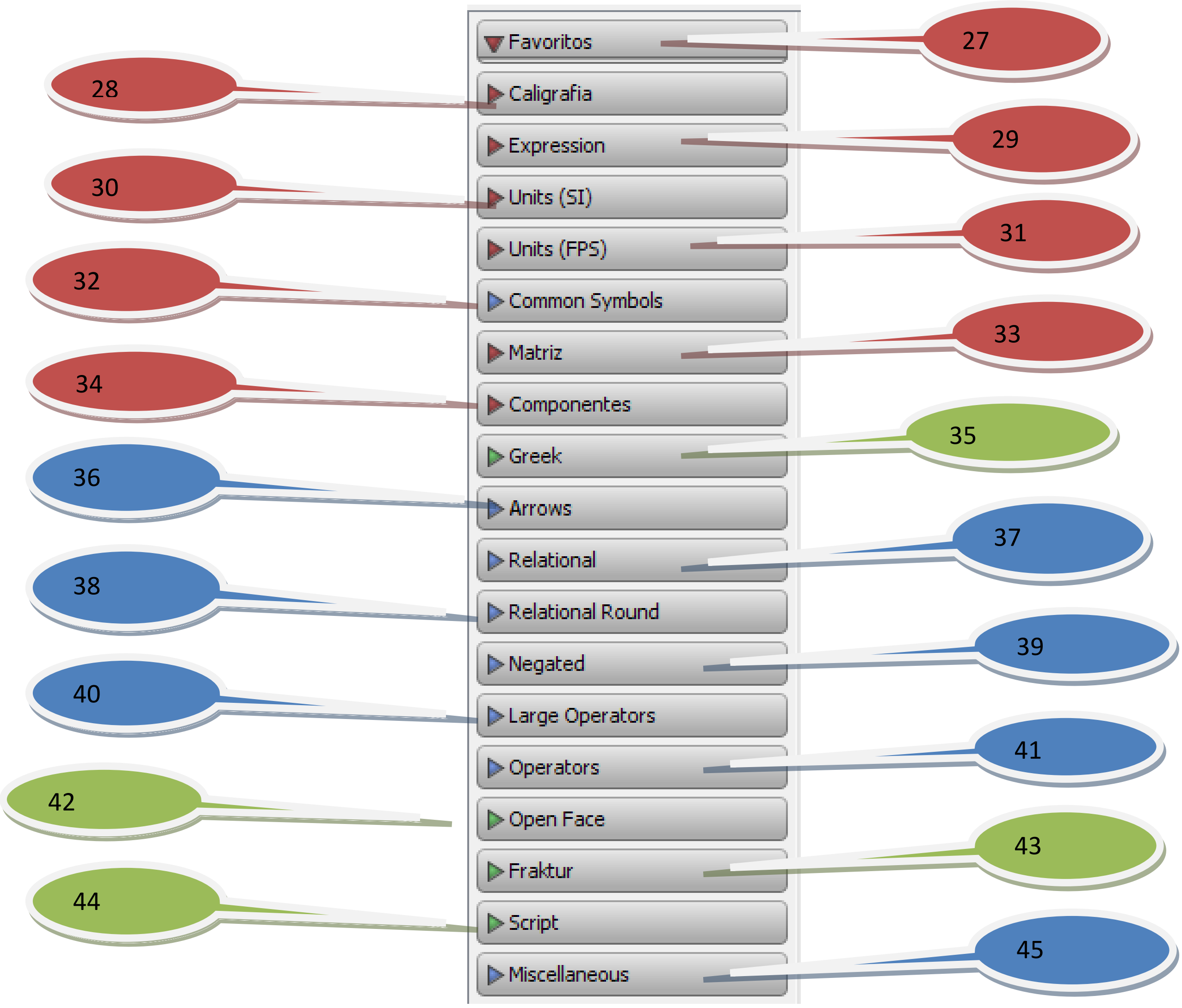
22 – Inclui a seleção em uma subseção.

23 – Insere entrada do Maple depois do grupo de execução atual.

24 – Inserir texto sem formatação após o grupo de execução atual.

25 – Refaz a última operação feita.

26 – Desfaz a última operação feita.



27 – Salva expressões matemáticas elaboradas pelo usuário.

28 – Permite que o usuário escolha a caligrafia de sua preferência.

29 – Expressões já consagradas pelo uso.

30 – Unidades no Sistema Internacional (SI).

31 – Unidades no sistema americano.

32 – Símbolos de uso recorrente na matemática.

33 – Elaboração de matriz.

34 – Componentes como caixa de texto, termômetro e etc.

35 – Caracteres gregos.

36 – Uso de setas.

37 – Símbolos de relação.

38 – Símbolos de relação aproximada.

39 – Símbolos de diferença.

40 – Alguns operadores como o somatório.

41 – Outros operadores.

42 – Caracteres vazados.

43 – Caracteres alternativos.

44 – Caracteres.

45 – Formas.

1.3. Comandos Básicos

A partir do Maple 12, não é mais necessário colocar ";" ao final de cada sentença para que o seu comando possa ser rodado, apesar de que se for colocado, a sentença será lida normalmente.Ao se colocar o ":" o resultado não será mostrado mas será salvo na memória.

```
> 1 + 1
                                                   2
> 1 + 1;
                                                   2
> 1 + 1 :
>
```

1.3.1.Operações básicas

Fatorial	!
Potenciação	^
Divisão	/
Multiplicação	*
Adição	+
Subtração	-

A ordem de preferência é a descrita acima, começando do fatorial até a subtração.

> $3!$

$$6$$

> $2^{\wedge}$

> $2^{\wedge}2$

> 2^2

$$4$$

> $\frac{10}{2}$

$$5$$

> $7 \cdot 8$

$$56$$

> $9 + 3$

$$12$$

> $9 - 3$

$$6$$

> $1 + 1 \cdot 4$

$$5$$

> $4! - \frac{6}{3}$

$$22$$

> $5^2 + 3! - 10 \cdot 6$

$$-29$$

Um detalhe importante quando se deseja escrever uma potenciação é que primeiro coloca-se o símbolo “^” depois o expoente e logo em seguida deve-se apagar o símbolo para que a sentença forneça uma resposta.

Para modificar a ordem de preferência basta utilizar parêntese “( )”.

> $5^2 + 3! - 10 \cdot 6$

$$-29$$

> $5^2 + (3! - 10) \cdot 6$

$$1$$

Exercícios:

Resolva as seguintes sentenças matemáticas:

- Onze elevado a quarta mais nove fatorial vezes cinco; Resp: 1829041;
- Sete vezes quinze virgula três divididos por menos seis; Resp: -17.85000000
- Nove mais 5 dividido por sete ao cubo. Deve-se dar preferência à soma neste caso. Resp:0.04081632653.

1.4. Alguns detalhes

1.4.1. Casas decimais

No caso de se desejar obter resultados de divisões com casas decimais, deve-se colocar um ponto após o número que está no numerador. Caso não se coloque o ponto, o

Maple sempre retorna o resultado na forma simbólica.

Uma forma mais geral de se obter as casas decimais é utilizar o comando *evalf.* O Maple retorna um número com até dez casas decimais. Em combinação com o "%", o comando retorna o último valor.

$> \frac{30}{9}$

$$\frac{10}{3}$$

$> \frac{30.}{9}$

$$3.333333333$$

$> evalf\left(\frac{147}{6}\right)$

$$24.50000000$$

$> evalf(\%)$

$$24.50000000$$

Vários comandos podem ser escritos na mesma linha, desde que sejam separados por ";".

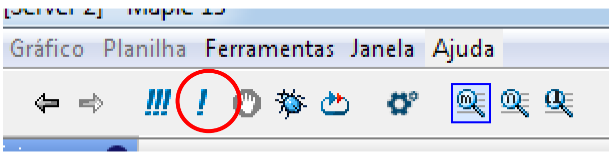
$> 3 + 1;\ 4 \cdot 8;\ 3!\ ;$

$$4$$
$$32$$
$$6$$

$>$

1.4.2.Ajuda

O Maple tem uma ferramenta de ajuda relativamente completa. Pode-se evocá-la pelo botão Ajuda.



1.4.3.Erro

Ao encontrar uma falha, o Maple retorna uma mensagem de erro, especificando o seu tipo. Erros comuns são associados a falhas na digitação, erro no domínio de funções e etc.

1)7/0 R.: Error, numeric exception: division by zero
2) 6*-1; R.: Error, invalid product/quotient
3) tan(Pi/2) R.: Error, (in tan) numeric exception: division by zero
4) 1234567890^9876543210; R.: Error, numeric exception: overflow

1.4.4.Comentários

Quando se deseja fazer um comentário acerca de alguma passagem, utiliza-se o comando "#". O Maple desconsidera o comentário, ficando apenas para futuras consultas dos usuários.

```
2^
                                                        2^
2^2
Error, invalid power
                                                        2^2
2^2
                                                        4
# Quando se deseja fazer a potenciação, deve-se utilizar o símbolo "^" para, em seguida escrever-se o expoente.
#O usuário deve apagar o símbolo para a expressão retornar um resultado.
```

Simplify: Simplifica uma expressão que tem um fator em comum entre seu numerador e denominador.

$A := B$

$$B$$

$x := 5$

$$5$$

$y := x^2 + 2 \cdot x - 10$

$$25$$

2. Equações Algébricas

2.1. Atribuições

Quando se deseja atribuir um valor a alguma letra, uma função a alguma variável, enfim, atribuir alguma identidade a algo, usa-se o símbolo ":=". Portanto, no exemplo abaixo, o valor de B é atribuído a A, x tem o valor de cinco e quando a expressão em função de x é atribuída a y, automaticamente o valor de x é substituído à função e o valor final é dado.

$A := B$

$$B$$

$x := 5$

$$5$$

$y := x^2 + 2 \cdot x - 10$

$$25$$

2.2. Outros comandos

Simplify: Simplifica uma expressão que tem um fator em comum entre seu numerador e denominador.

> $A := \dfrac{(x^3 \cdot y + x^3 - y^4 - y^3)}{(y+1)}$

$$A := \frac{x^3 y + x^3 - y^4 - y^3}{y+1}$$

> $simplify(A)$

$$-y^3 + x^3$$

Factor: Fatora uma expressão.

> $A := \dfrac{(x^3 \cdot y + x^3 - y^4 - y^3)}{(y+1)}$

$$A := \frac{x^3 y + x^3 - y^4 - y^3}{y+1}$$

> $simplify(A)$

$$-y^3 + x^3$$

> $B := factor(A)$

$$B := (x - y)\left(x^2 + x y + y^2\right)$$

>

Expand: Expande uma expressão que está fatorada.

> $A := \dfrac{(x^3 \cdot y + x^3 - y^4 - y^3)}{(y+1)}$

$$A := \frac{x^3\,y + x^3 - y^4 - y^3}{y+1}$$

> $simplify(A)$

$$-y^3 + x^3$$

> $B := factor(A)$

$$B := (x - y)\,(x^2 + x\,y + y^2)$$

> $C := expand(B)$

$$C := -y^3 + x^3$$

>

Exercícios:

- Expandir $(x+y)^4$. Resp: $x^4 + 4x^3y + 6x^2y^2 + 4xy^3 + y^4$
- Fatorar $xy-x^2y+y^3x^2-x$. Resp: $x(y-1)(xy^2+xy+1)$
- Simplificar $\frac{(x2-9)}{(x-3)}$. Resp: $x+3$

2.3. Resolução de Equações Algébricas

Para se resolver uma equação, utiliza-se o comando *solve.*

> $eq := x^2 + 3 \cdot x - 10$

$$eq := x^2 + 3x - 10$$

> $solve(eq)$

$$2, -5$$

> $eq1 := y^3 - 6 \cdot y - 24 = 0$

$$eq1 := y^3 - 6y - 24 = 0$$

> $solve(eq1)$

$$\left(12+2\sqrt{34}\right)^{1/3} + \frac{2}{\left(12+2\sqrt{34}\right)^{1/3}}, -\frac{1}{2}\left(12+2\sqrt{34}\right)^{1/3} - \frac{1}{\left(12+2\sqrt{34}\right)^{1/3}} + \frac{1}{2} I\sqrt{3}\left(\left(12+2\sqrt{34}\right)^{1/3} - \frac{2}{\left(12+2\sqrt{34}\right)^{1/3}}\right), -\frac{1}{2}\left(12+2\sqrt{34}\right)^{1/3} - \frac{1}{\left(12+2\sqrt{34}\right)^{1/3}} - \frac{1}{2} I\sqrt{3}\left(\left(12+2\sqrt{34}\right)^{1/3} - \frac{2}{\left(12+2\sqrt{34}\right)^{1/3}}\right)$$

>

Quando se tem uma função de mais de uma variável, deve-se especificar em função de que variável se deseja ter a resolução.

> $w := x^2 \cdot y - 3 \cdot y + x + 1$

$$w := x^2 y - 3y + x + 1$$

> $solve(w, x)$

$$\frac{1}{2}\,\frac{-1+\sqrt{1+12y^2-4y}}{y}, -\frac{1}{2}\,\frac{1+\sqrt{1+12y^2-4y}}{y}$$

> $solve(w, y)$

$$-\frac{x+1}{x^2-3}$$

>

Para se construir uma função, deve-se primeiro "batizá-la" com um nome ou letra que a represente, em seguida, usa-se o símbolo da atribuição ":=", o nome da variável , o comando de transformação "->" e a expressão da própria função.

> $f := x \rightarrow x^2 + 5 \cdot x - 6$

$$f := x \rightarrow x^2 + 5x - 6$$

> $g := y \rightarrow \frac{y^3}{10} - 7$

$$g := y \rightarrow \frac{1}{10}y^3 - 7$$

Depois de declaradas, as funções ficam gravadas na memória do programa e basta escrevê-las pelo “nome de batismo” para chamá-las novamente. Podem-se especificar os pontos nos quais se deseja saber o valor da função. Vale a pena ressaltar que se o mesmo nome for dado a diferentes funções, a mais atual será mantida e a antiga será apagada da memória do Maple.

```
> f(1)
                                         0
> g(1.28)
                                   -6.790284800
```

Exercícios:

Resolva as seguintes equações:

- Y = x^2 -10x-24. Resp: $12, -2$
- Encontre o valor de y para x=233455,2323. Resp: 5.44990109210^{10}
- Y = xy-x^2y+y^3x^2-x , em função de x. Resp: $0, -\frac{1}{y\,(y+1)}$

2.4. Funções Elementares

1. Função exponencial:
2. Função seno:
3. Função cosseno:
4. Função tangente:
5. Função secante:
6. Função cossecante:
7. Função cotangente:
8. Função arcoseno:
9. Função arcocosseno:
10. Função logarítma:
11. Função logaritmo neperiano:

> $\exp(x)$

$$e^x$$

> $\sin(x)$

$$\sin(x)$$

> $\cos(x)$

$$\cos(x)$$

> $\tan(x)$

$$\tan(x)$$

> $\sec(x)$

$$\sec(x)$$

> $\csc(x)$

$$\csc(x)$$

> $\cot(x)$

$$\cot(x)$$

> $\arcsin(x)$

$$\arcsin(x)$$

> $\arccos(x)$

$$\arccos(x)$$

> $\log10(x)$

$$\frac{\ln(x)}{\ln(10)}$$

> $\ln(x)$

$$\ln(x)$$

Alguns exemplos:

> $f := x \rightarrow \cos(x)$

$$f := x \rightarrow \cos(x)$$

> $solve(y)$

$$\frac{1}{2}\pi$$

> $f(\mathrm{Pi})$

$$-1$$

> $\cos(\mathrm{Pi})$

$$-1$$

> $\cos\left(\frac{\mathrm{Pi}}{3}\right)$

$$\frac{1}{2}$$

> $f := x \rightarrow \sin(x)$

$$f := x \rightarrow \sin(x)$$

> *solve*(y)

$$\frac{1}{2}\pi$$

> $f(\mathrm{Pi})$

$$0$$

> $\sin(\mathrm{Pi})$

$$0$$

> $\sin\left(\frac{\mathrm{Pi}}{3}\right)$

$$\frac{1}{2}\sqrt{3}$$

> $f := x \rightarrow \tan(x)$

$$f := x \rightarrow \tan(x)$$

> *solve*(y)

$$\frac{1}{2}\pi$$

> $f(\mathrm{Pi})$

$$0$$

> $\tan(\mathrm{Pi})$

$$0$$

> $\tan\left(\frac{\mathrm{Pi}}{3}\right)$

$$\sqrt{3}$$

> $\tan\left(\frac{\mathrm{Pi}}{2}\right)$ *#não existe tangente de 90 graus.*

```
Error, (in tan) numeric exception: division by zero
```

> $f := x \rightarrow \exp(x)$

$$f := x \rightarrow e^x$$

> $\exp(2)$

$$e^2$$

> *solve*(f)

$$0$$

> $f := x \rightarrow \log10(x)$

$$f := x \rightarrow \log10(x)$$

> $solve(f)$

$$0$$

> $\log10(10)$

$$1$$

> $\log10(4)$

$$\frac{2\ln(2)}{\ln(10)}$$

> $\ln(x)$

$$\ln(x)$$

> $\ln(1)$

$$0$$

> $\ln(1.28)$

$$0.2468600779$$

Exercícios:

Resolva as seguintes equações de funções elementares:

- Y=sen(x)+cos(x). Resp: $-\frac{1}{4}\pi$
- Y = $\frac{\tan(x)}{\cot(x)} - 1$ .Resp: $\frac{1}{4}\pi, -\frac{1}{4}\pi, \frac{3}{4}\pi, -\frac{3}{4}\pi$
- Y = $\log_{10}(x)+e^2$ .Resp: $e^{-e^2 \ln(10)}$

3. Cálculo

Agora veremos alguns tópicos de cálculo diferencial e integral, começando por Limite e depois Derivada e Integral. O Maple possui comandos pré-estabelecidos que facilitam a resolução dessas funções.

3.1. Limite

Para a resolução de limites, podemos usar dois comandos bem parecidos: o **limit** e o **Limit.**

O comando **limit**(L minúsculo) retorna o limite de uma função f(x) quando x tende ao valor “a”.

$limit(f(x), x = a)$

Onde:

f(x) é uma função de x

x = a é o mesmo que x → a, ou seja, x tende a “a”

OBS: se o limite não existir o Maple dá como resposta *undefined*.

Exemplo: Calcular o limite da função abaixo, quando x tende a 1:

$$f := x \rightarrow \left(x^{\frac{1}{2}} - 4 \cdot x\right)$$

$$x \rightarrow \sqrt{x} - 4\,x$$

Usando o comando **limit**, temos:

$$f := x \rightarrow \left(x^{\frac{1}{2}} - 4 \cdot x\right)$$

$$x \rightarrow \sqrt{x} - 4\,x$$

$limit(f(x), x = 1)$

$$-3$$

Também é possível obter os valores do limite de função pela direita e pela esquerda (limites laterais). Para isso, basta acrescentar mais um parâmetro ao comando anterior: ***left***ou ***right***.

$limit(f(x), x = a, right)$

$limit(f(x), x = a, left)$

Onde:

right significa que o limite é pela direita

leftsignifica que o limite é pela esquerda

Exemplo: Calcular o limite da função abaixo, quando x tende a 3 pela direita:

$f := piecewise(x < 3, x^2 - 6, 3 \le x, 2\,x - 1)$

$$\begin{cases} x^2 - 6 & x < 3 \\ 2\,x - 1 & 3 \le x \end{cases}$$

Usando o comando **limit**, temos:

$f := piecewise(x < 3, x^2 - 6, 3 \le x, 2\,x - 1)$

$$\begin{cases} x^2 - 6 & x < 3 \\ 2\,x - 1 & 3 \le x \end{cases}$$

$limit(f, x = 3, right)$

$$5$$

Podemos também definir limites no infinito.

Exemplo:

$f := x \to \frac{1}{x}$

$$x \to \frac{1}{x}$$

$limit(f(x), x = \infty)$

$$0$$

O comando **Limit**(L maiúsculo) mostra a expressão de limites que é utilizada usualmente sem calculá-lo.

$Limit(f(x), x = a)$

$$\lim_{x \to a} \frac{1}{x}$$

Exemplo:

$Limit(x - 4^x, x = 4)$

$$\lim_{x \to 4} (x - 4^x)$$

Exercício:

Calcule os seguintes limites, utilizando o comando **limit**.

a. $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$
b. $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}$
c. $\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}$
d. $\lim_{x\to -\infty}\ln\left(x^2\right)$

3.2. Derivada

Para a resolução de derivadas, o Maple oferece os comandos **diff**e **Diff**.

O comando **diff**(F minúsculo) retorna a derivada da função f em relação a x.

$diff(f(x), x)$

Onde:

f(x) é uma função de x

x é a variável a que se deseja derivar

Exemplo: Calcular a derivada da função abaixo:

$f := x \to x^3 - 4 \cdot x^2 + 2 \cdot x$

$$x \to x^3 - 4\,x^2 + 2\,x$$

Usando o comando **diff**, temos:

$f := x \to x^3 - 4 \cdot x^2 + 2 \cdot x$

$$x \to x^3 - 4\,x^2 + 2\,x$$

$diff(f(x), x)$

$$3\,x^2 - 8\,x + 2$$

Outros exemplos de derivadas:

Derivada de uma função trigonométrica

$g := tgx \cdot \sec(\text{pi} \cdot x)$

$$tgx \sec(\pi x)$$

$diff(g, x)$

$$tgx \sec(\pi x) \tan(\pi x) \pi$$

Derivada parcial

$> g := tanx \cdot secx(\text{pi} \cdot x)$

$$tanx\ secx(\pi x)$$

$diff(g, x)$

$$tanx\ \mathrm{D}(secx)(\pi x)\ \pi$$

$h := 5x^2 + 2x^2 y + 3xy^2 + 12yx + \frac{3y^3}{x}$

$$5x^2 + 2x^2 y + 3xy^2 + 12yx + \frac{3y^3}{x}$$

$diff(h, x)$

$$10x + 4yx + 3y^2 + 12y - \frac{3y^3}{x^2}$$

Também podemos calcular derivadas de ordem superior. Para isso se usa a seguinte sintaxe:

$diff(f(x), x\$n)$

Onde:

f(x) é a função que se deseja derivar

x é a variável a ser derivada

\$n é a ordem da derivada

Exemplos:

$diff(2 \cdot x - x^3, x\$2)$

$$-6x$$

$diff(2 \cdot x^2 + 2 \cdot \cos(x), x\$2)$

$$4 - 2\cos(x)$$

$diff(x^{2-tgx}, x\$3)$

$$\frac{x^{2-tgx}(2-tgx)^3}{x^3} - \frac{3x^{2-tgx}(2-tgx)^2}{x^3} + \frac{2x^{2-tgx}(2-tgx)}{x^3}$$

O comando **Diff**(D maiúsculo) mostra a expressão de derivada que é utilizada usualmente sem calculá-la.

$Diff(f(x), x)$

$$\frac{d}{dx} f(x)$$

Exemplo:

$Diff(x^2 - 3 \cdot x^3, x)$

$$\frac{d}{dx}(x^2 - 3x^3)$$

Exercício:

Calcule as derivadas das seguintes funções usando o comando **diff**.

a. $y = x^2 - senx + \mathrm{tg}(\mathrm{x})$, 1ª derivada em relação a x
b. $h = xy - 4x^y + 3sen(xy)$, 2ª derivada em relação a y
c. $h = \left(\frac{1-x}{x-1}\right) y^2.x$, 3ª derivada em relação a x
d. $y = senxtgx^{e^x}$, 4ª derivada em relação a x

3.3. Integral

Para a resolução de integrais, o Maple oferece os comandos **int**e **Int**.

O comando **int**(I minúsculo) retorna a integral da função f em relação a x. Podemos calcular uma integral indefinida ou definida.

$int(f(x), x)$

$$\int f(x)\,dx$$

$int(f(x), x = a..b)$

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

Onde:

f(x) é uma função de x

x é a variável a que se deseja integrar

x=a..b é o intervalo de integração

Exemplo: Calcular a integral definida de x = 2 a x = 3 da função abaixo:

$f := x \to x^3 - 4 \cdot x^2 + 2 \cdot x$

$$x \to x^3 - 4\,x^2 + 2\,x$$

Usando o comando **int**, temos:

$f := x \to x^3 - 4 \cdot x^2 + 2 \cdot x$

$$x \to x^3 - 4\,x^2 + 2\,x$$

$int(f(x), x = 2\,..4)$

$$-\frac{8}{3}$$

Outros exemplos de integrais:

Integral de uma função trigonométrica

$g := x \to 2 \cdot x \cdot cosx \cdot senx$

$$x \to 2\,x\,cosx\,senx$$

$int(2\,g(x), x = 0\,..\mathrm{pi})$

$$2\,cosx\,senx\,\pi^2$$

Integral com limite no infinito:

$int\left(\exp\left(-x^2\right) \cdot \ln(x), x = 0\,..infinity\right)$

$$-\frac{1}{4}\sqrt{\pi}\,\gamma - \frac{1}{2}\sqrt{\pi}\,\ln(2)$$

O comando **Int**(I maiúsculo) mostra a expressão da integral que é utilizada usualmente sem calculá-la.

$Int(h(x), x = a\,..b)$

$$\int_a^b h(x)\,dx$$

Exemplo:

$$\mathrm{Int}\left(\mathrm{senx} - \mathrm{cosx}, \mathrm{x} = 0 .. \frac{\mathrm{pi}}{34}\right)$$

$$\int_{0}^{\frac{1}{34}\pi} (senx - cosx)\, dx$$

Exercício:

Calcule as integrais das seguintes funções usando o comando **int**.

a. $y = x^2 - senx + \mathrm{tg(x)}$, de –π a 0
b. $h = x - 4x^3 + 3senx$, de π/2 a 2π
c. $h = \left(\frac{1-x}{x-1}\right)x$, de 4 a 6
d. $y = senxtgx^2$, de –π a 0

4. EDO's

4.1. Declarando uma EDO

O comando que define Equações Diferenciais Ordinárias no Maple é o **ODE.**

Para declarar uma EDO basta somente digitar o comando **ODE** e a Equação da forma correta.

Exemplo:

$$ode := \frac{d^2}{dx^2}\,y(x) = 2\,y(x) + 1$$

$$\frac{d^2}{dx^2}\,y(x) = 2\,y(x) + 1$$

Os cuidados necessários são sempre colocar as funções de y na forma y(x), pois y é uma função de x.

Veja o exemplo errado:

$$ode := \frac{d^2}{dx^2}\,y = 2\,y + 1$$

$$0 = 2\,y + 1$$

Observe que no exemplo errado acima, ao invés de y(x), foi colocado y, causando um resultado não esperado no comando.

Também se pode escrever de outra maneira, lembrando sempre que as funções "y" dependentes de uma variável "x" devem estar na forma y(x):

$$ode := \mathrm{diff}(y(x), x\$2) = 2\,y + 1$$

$$\frac{d^2}{dx^2}\,y(x) = 2\,y + 1$$

Outro exemplo:

$$ode := E \cdot I \cdot \frac{d^4}{d\,x^4}\,v(x) - q = 0;$$

$$I\,E\left(\frac{d^4}{dx^4}\,v(x)\right) - q = 0$$

Neste caso, temos E e I constantes e *v* variando em função de *x*.

Exercício:

Declare, com a ajuda do comando **ODE**, as seguintes EDO's:

a. $xy'' = 2y'$
b. $y^{'} = 2xy$
c. $\frac{dy}{dx} = -4xy^2$
d. $y^3dx + 3xy^2dy = 0$

4.2. Resolvendo uma EDO

Para resolver uma EDO, o Maple dispõe de muitos comandos eficazes, trataremos aqui do comando **DSOLVE**.

$dsolve(ode)$

O comando **DSOLVE** pode resolver uma EDO desconsiderando as condições iniciais do problema e também pode resolver considerando as condições iniciais.

Vejamos um exemplo:

$ode := \frac{d}{dx}\frac{d}{dx}y(x) = 3 \cdot y(x) + 1$

$$\frac{d^2}{dx^2}y(x) = 3\,y(x) + 1$$

$dsolve(ode)$

$$y(x) = e^{\sqrt{3}\,x}\_C2 + e^{-\sqrt{3}\,x}\_C1 - \frac{1}{3}$$

Observe que, como não foram dadas condições iniciais, y(x) ficou com duas constantes a serem determinadas, C1 e C2.

Para considerarmos as condições iniciais e assim eliminarmos as constantes, devemos acrescentar mais um parâmetro ao comando **ODE**.

É aí que surge o parâmetro **ics**, que são as condições iniciais do problema.

Vejamos o mesmo exemplo anterior, agora sujeito às seguintes condições iniciais:

y(0) = 1 e y'(0) = 0

Desta forma:

$ode := \frac{d}{dx}\frac{d}{dx}y(x) = 3 \cdot y(x) + 1$

$$\frac{d^2}{dx^2}y(x) = 3\,y(x) + 1$$

$ics := y(0) = 1, D(y)(0) = 0$

$$y(0) = 1, D(y)(0) = 0$$

$dsolve(\{ode, ics\})$

$$y(x) = \frac{2}{3}e^{\sqrt{3}\,x} + \frac{2}{3}e^{-\sqrt{3}\,x} - \frac{1}{3}$$

Aqui também é preciso ter cuidado, pois a segunda condição inicial é que a derivada da função em zero é igual a zero. Esta condição deve sempre ser escrita da forma como está: D(y)(0)=0.

Outros exemplos:

$ode := \frac{d}{dx}y(x) = (y(x))^2 - 4$

$$\frac{d}{dx}y(x) = y(x)^2 - 4$$

$dsolve(ode)$

$$y(x) = -\frac{2\left(e^{4x}\,\_C1 + 1\right)}{-1 + e^{4x}\,\_C1}$$

$ode := \frac{d}{dh}v(h) = 2 \cdot h \cdot e^{-v(h)}$

$$\frac{d}{dh}v(h) = 2\,h\,e^{-v(h)}$$

$dsolve(ode)$

$$v(h) = \frac{\ln\left(h^2\ln(e) + 2\,\_C1\,\ln(e)\right)}{\ln(e)}$$

$ode := \frac{d}{dx}y(x) + y(x) \cdot \tan(x) = \sin(2 \cdot x)$

$$\frac{d}{dx}y(x) + y(x)\tan(x) = \sin(2\,x)$$

$dsolve(ode)$

$$y(x) = -2\cos(x)^2 + \cos(x)\,\_C1$$

$ICs := y(0) = 1$

$$y(0) = 1$$

$dsolve(\{ode, ICs\})$

$$y(x) = -2\cos(x)^2 + 3\cos(x)$$

Exercício:

Resolva as EDO's abaixo:

a. $y' = 2y, \quad y(0) = 1$

b. $y'' - 4y = 0, \quad y(0) = 2\ ey'(0) = 4$

c. $x^2y'' + xy' - 0{,}25y = 0, \quad y(1) = 2\ ey'(1) = 1$

d. $y^3dx + 3xy^2dy = 0$

5. Gráficos

Quando se deseja fazer um gráfico de uma função y= f(x), por exemplo, usa-se geralmente o comando *plot.* A sintaxe básica é:

Plot (f, h, v, ops), em que:

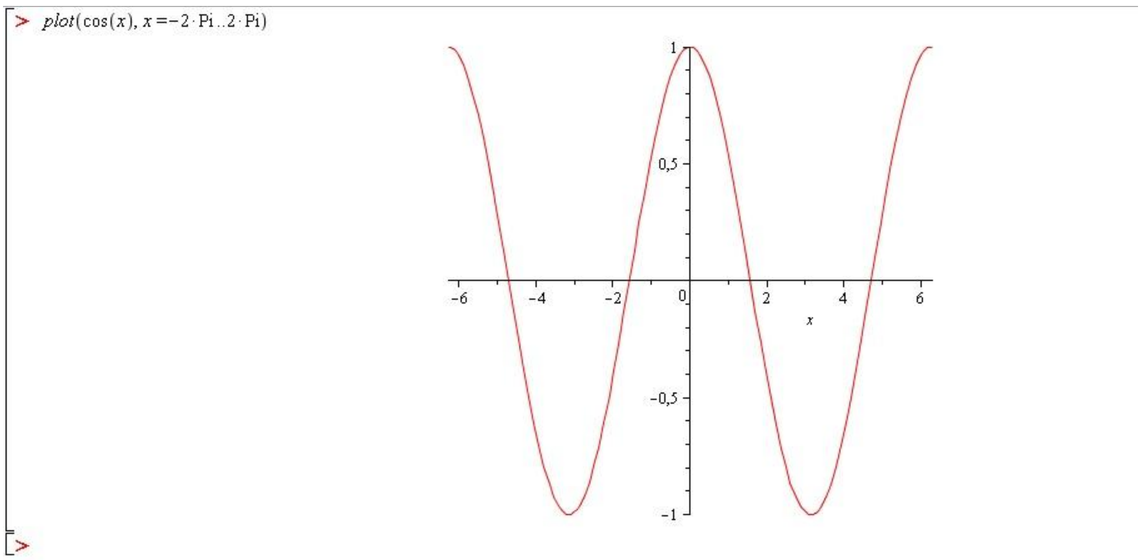
- F = Nome da função;
- H = intervalo em que se deseja que o gráfico seja definido no eixo das abscissas (eixo x). Separa-se os dois valores por dois pontos finais seguidos "..";
- V = intervalo em que se deseja que o gráfico seja definido no eixo das ordenadas (eixo y). Separam-se os dois valores por dois pontos finais seguidos "..";
- Ops = opções de formatação.

A declaração de **v** e **ops**são opcionais e a de **f** e **h** é obrigatória. O parâmetro v funciona como um *zoom* sobre a área do gráfico em que se está estudando.

5.1. Gráficos em duas dimensões

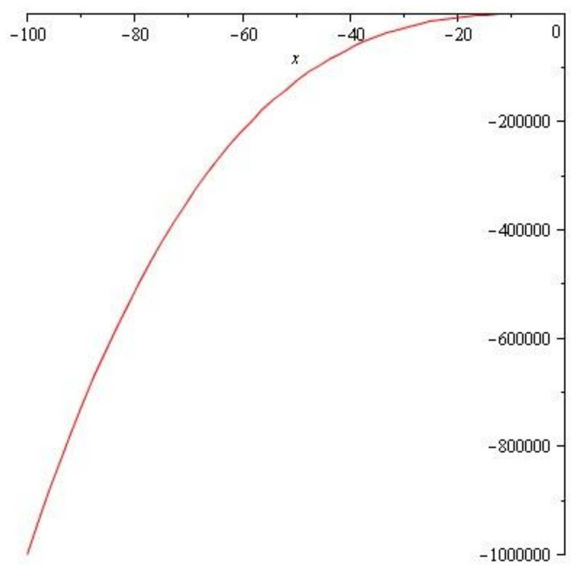
5.1.1. Funções

Exemplo: $plot(\cos(x), x=-2\cdot \mathrm{Pi}..2\cdot \mathrm{Pi})$



Exemplo 2: $plot(x^3, x=-100..0)$

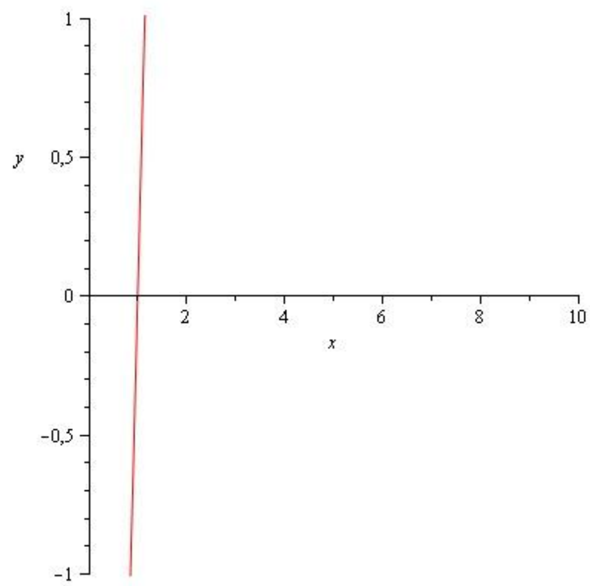
$plot(x^3, x = -100\,..0)$



Exemplo 3: Utilizando o eixo y.

$plot(x^2 + 5 \cdot x - 6, x = 0\,..10, y = 1\,..-1)$

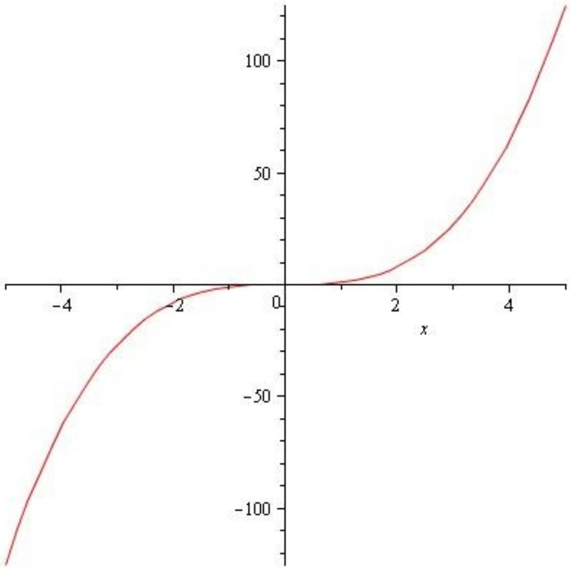
> $plot(x^2 + 5 \cdot x - 6, x = 0\,..10, y = 1\,..-1)$



Exemplo 4: Aumentando a escala, utilizando uma espécie de *zoom*.

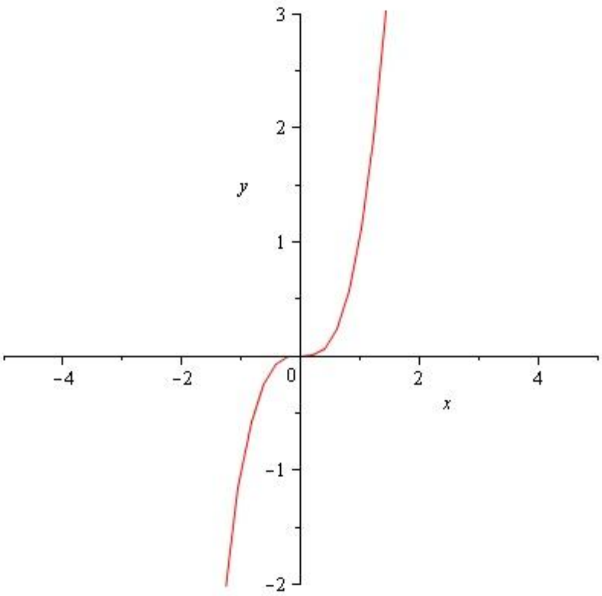
Antes... $plot(x^3, x = 5\,..-5)$

> $plot(x^3, x = 5..-5)$



Depois... $plot(x^3, x = 5..-5, y = 3..-2)$

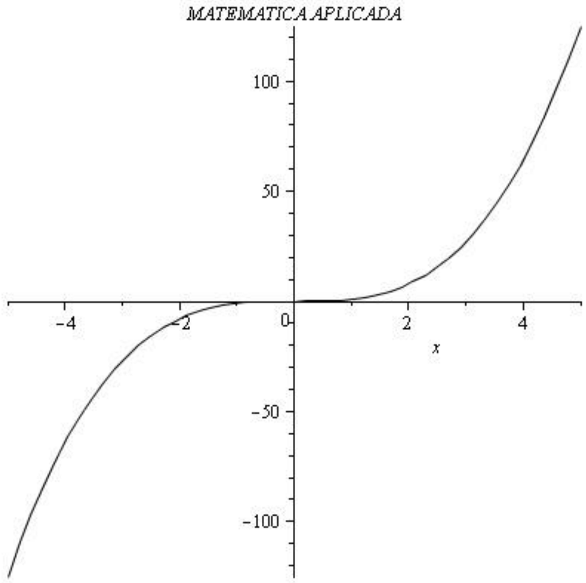
$plot(x^3, x = 5..-5, y = 3..-2)$



Exemplo 5: Mudando a cor do gráfico ou dando um título ao gráfico.

$$plot(x^3, x = 5..-5, color = BLACK, title = MATEMATICA\ APLICADA)$$

$plot(x^3, x = 5..-5, color = BLACK, title = MATEMATICA\ APLICADA)$



Para mudar a cor do gráfico ou o nome, basta seguir o procedimento mostrado no exemplo, os comandos devem sempre estar separados por vírgula e não se deve utilizar preposições e pontuações para o título do gráfico. A linguagem utilizada deve ser o inglês.

Outra maneira de declarar uma função para ser feito seu gráfico é separar a declaração da função do comando *plot*.

Exemplo 6: Primeiro, declara-se a função e depois se usa o comando *plot.*

>> $plot(f1, x = 1..-1, color = blue, tilte = GRAFICO\ AZUL)$

```
Error, (in plot) unexpected option: tilte = GRAFICO*AZUL
```

>

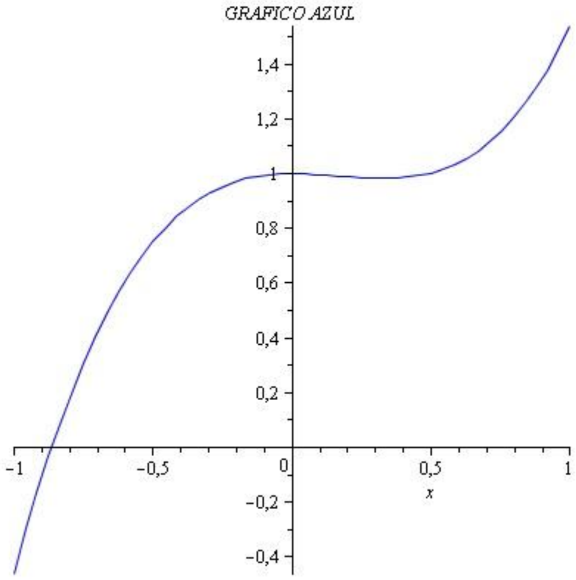
Primeiro um erro de escrita bastante comum (escreveu-se a palavra *title* da maneira errada).

Depois, a escrita correta e o gráfico:

$fl := x^3 + \cos(x)$

$plot(fl, x = 1..-1, color = blue, title = GRAFICO\ AZUL)$

$$fl := x^3 + \cos(x)$$



>

Dessa forma, o usuário pode colocar vários gráficos em um mesmo plano cartesiano. Essa ferramenta é bastante útil para a comparação de gráficos.

Utiliza-se os colchetes “[ ]“ para separar a declaração das funções do resto do comando.

$f := x$

$$f := x$$

$g := x + 1$

$$g := x + 1$$

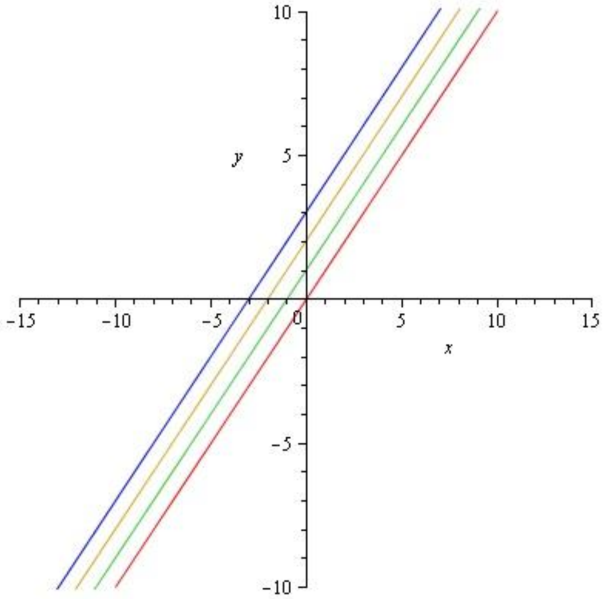
$t := x + 2$

$$t := x + 2$$

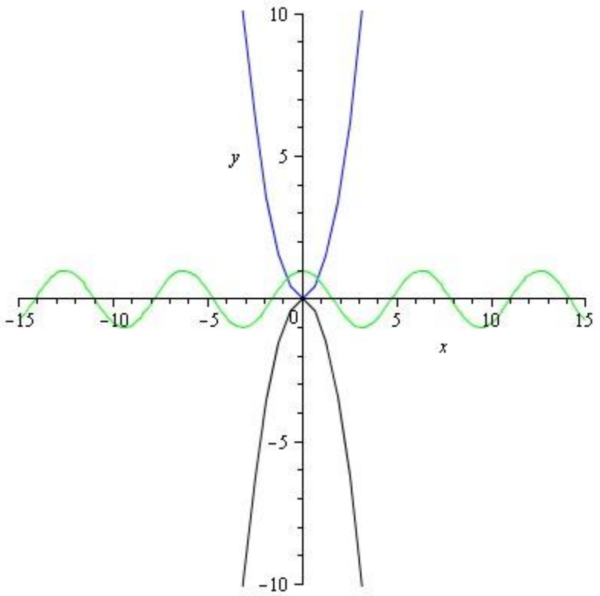
$r := x + 3$

$$r := x + 3$$

$plot([f, g, t, r], x = 15..-15, y = 10..-10)$



$plot([f1, g1, t1, r1], x = 15..-15, y = 10..-10, color = [blue, green, red, black])$



Exercícios:

Trace o gráfico de:

- $Cos^2(x)$
- e^{100}
- $log_5(x)$
- $x^2 - 10 \cdot x - 24$

5.1.2.Limites

Na verdade, limites, derivadas e integrais podem ser estudadas a partir do gráfico da função de origem.

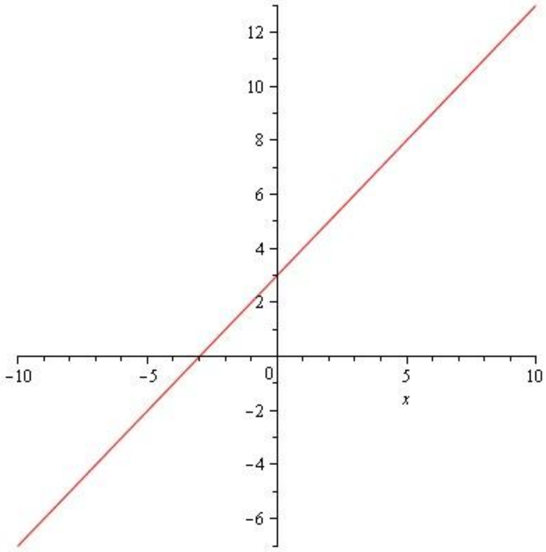
> $y := \frac{(x^2-9)}{x-3}$

$$y := \frac{x^2-9}{x-3}$$

> $limit(y, x = 3)$

$$6$$

> $plot(y, x = 10..-10)$



5.1.3.Derivadas

É interessante comparar os gráficos das diversas derivadas que uma função pode ter.

> $f1 := x^4$

$$f1 := x^4$$

> $diff(f1, x\$1)$

$$4\,x^3$$

> $diff(f1, x\$2)$

$$12\,x^2$$

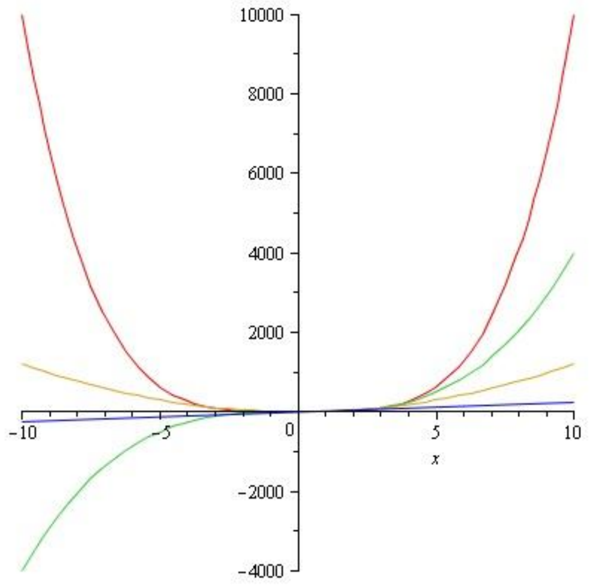
> $diff(f1, x\$3)$

$$24\,x$$

> $diff(f1, x\$4)$

$$24$$

$plot([x^4, 4x^3, 12x^2, 24x, 24], x = 10..-10)$



5.1.4.Integrais

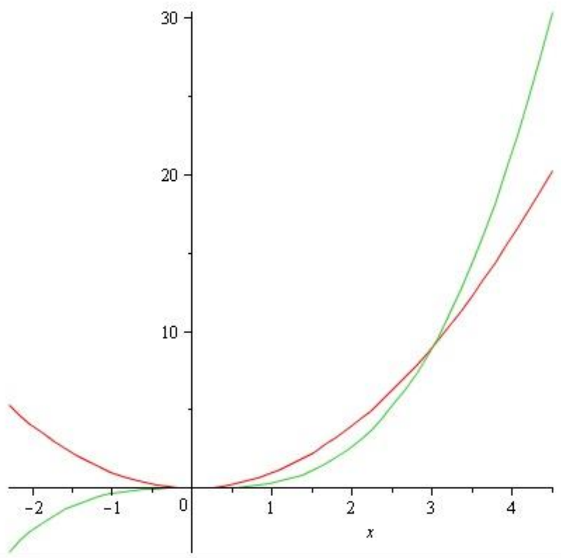
> $int(2x, x)$

$$x^2$$

> $int(x^2, x)$

$$\frac{1}{3}x^3$$

> $plot\left(\left[x^2, \frac{1}{3}x^3\right], x = 4.5..-2.3\right)$



5.2. Gráficos em três dimensões

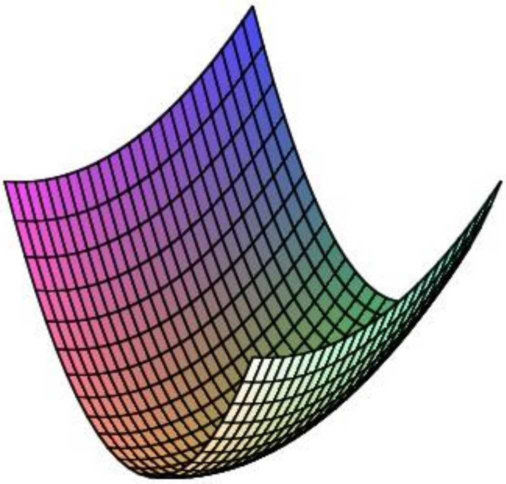
Há uma pequena diferença no comando de gráfico em 2D e 3D. Para o gráfico de três dimensões, tem-se:

Plot3d(f(x,y),x=a..b,y=c..d,ops1,ops2…opsn)

Onde f(x,y) é uma função real que pode ser plotada em 3D, como um cone.

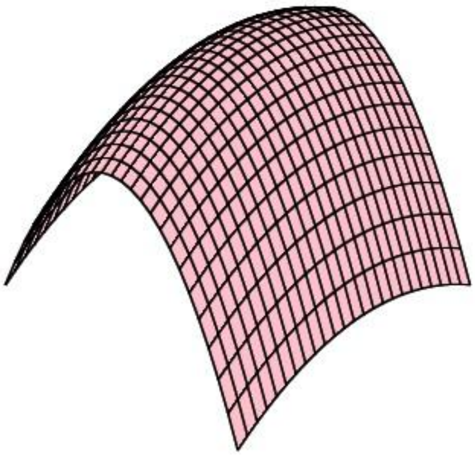
Alguns exemplos serão dados a seguir:

> $plot3d(x^2 + y^2, x = 5..-5, y = 10..-10)$

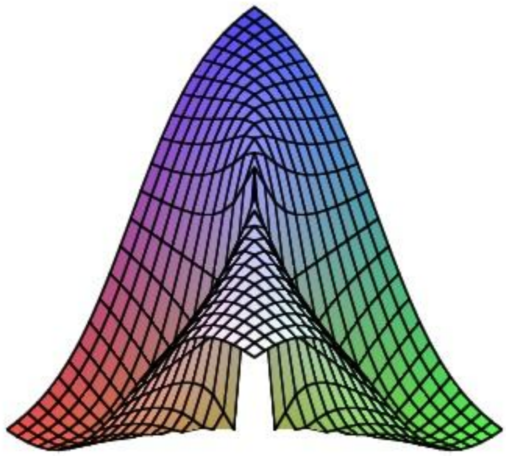


> $plot3d(-x^2-y^2, x = 5..-5, y = 10..-10, color = pink, title = GRAFICO\ ROSA)$

GRAFICO ROSA

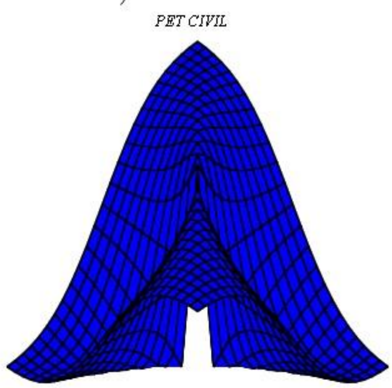


$$> plot3d\left(\left(\frac{x \cdot y}{x^2+y^2}\right), x = 5 \ldots -5, y = 5 \,..\, -5\right)$$



Apenas mudando a cor...

$$plot3d\left(\left(\frac{x \cdot y}{x^2+y^2}\right), x = 5 \ldots -5, y = 5 \,..\, -5, color = blue, title = PET\ CIVIL\right)$$



5.3. Gráficos de EDO's

Para fazer um gráfico de uma Equação Diferencial Ordinária (EDO), deve-se:

- Declarar a EDO como aprendido no quarto tópico;
- Declarar as condições de contorno;
- Baixar um conjunto de ferramentas, pelo comando $with(DEtools)$;
- Utilizar o comando DEplot para elaborar o gráfico.

Exemplo:

> $EDO := \frac{d}{dx}\,\frac{d}{dx}\,y(x) = 3 \cdot y(x) + 1$

$$EDO := \frac{d^2}{dx^2}\,y(x) = 3\,y(x) + 1$$

> $ics := y(0) = 1, D(y)(0) = 0$

$$ics := y(0) = 1, D(y)(0) = 0$$

> $dsolve(\{EDO, ics\})$

$$y(x) = \frac{2}{3}\,e^{\sqrt{3}\,x} + \frac{2}{3}\,e^{-\sqrt{3}\,x} - \frac{1}{3}$$

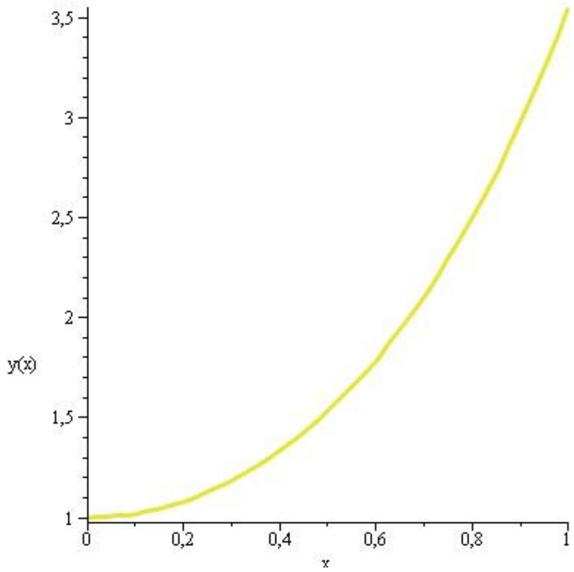
No caso acima, a EDO foi resolvida, mas isso não era necessário. Continuando com a elaboração do gráfico...

> with(DEtools)

[AreSimilar, DEnormal, DEplot, DEplot3d, DEplot_polygon, DFactor, DFactorLCLM, DFactorsols, Dchangevar, FunctionDecomposition, GCRD, Gosper, Heunsols, Homomorphisms, IVPsol, IsHyperexponential, LCLM, MeijerGsols, MultiplicativeDecomposition, ODEInvariants, PDEchangecoords, PolynomialNormalForm, RationalCanonicalForm, ReduceHyperexp, RiemannPsols, Xchange, Xcommutator, Xgauge, Zeilberger, abelsol, adjoint, autonomous, bernoullisol, buildsol, buildsym, canoni, caseplot, casesplit, checkrank, chinisol, clairautsol, constcoeffsols, convertAlg, convertsys, dalembertsol, dcoeffs, de2diffop, dfieldplot, diff_table, diffop2de, dperiodic_sols, dpolyform, dsubs, eigenring, endomorphism_charpoly, equinv, eta_k, eulersols, exactsol, expsols, exterior_power, firint, firtest, formal_sol, gen_exp, generate_ic, genhomosol, gensys, hamilton_eqs, hypergeomsols, hyperode, indicialeq, infgen, initialdata, integrate_sols, intfactor, invariants, kovacicsols, leftdivision, liesol, line_int, linearsol, matrixDE, matrix_riccati, maxdimsystems, moser_reduce, muchange, mult, mutest, newton_polygon, normalG2, ode_int_y, ode_y1, odeadvisor, odepde, parametricsol, particularsol, phaseportrait, poincare, polysols, power_equivalent, rational_equivalent, ratsols, redode, reduceOrder, reduce_order, regular_parts, regularsp, remove_RootOf, riccati_system, riccatisol, rifread, rifsimp, rightdivision, rtaylor, separablesol, singularities, solve_group, super_reduce, symgen, symmetric_power, symmetric_product, symtest, transinv, translate, untranslate, varparam, zoom]

É essencial que se baixe as ferramentas de gráfico com o comando with(DEtools).

> $DEplot(EDO, y(x), x = 0..1, [[ics]])$



A estrutura da declaração de gráfico para EDOs é a seguinte:

DEplot (nome dado à EDO, função, variável= ponto inicial..ponto final,[[nome dado às condições de contorno]], opções)

> $EDO := \frac{d}{dx}\, y(x) = y(x)$

$$EDO := \frac{d}{dx}\, y(x) = y(x)$$

> $CC1 := y(0) = 1$

$$CC1 := y(0) = 1$$

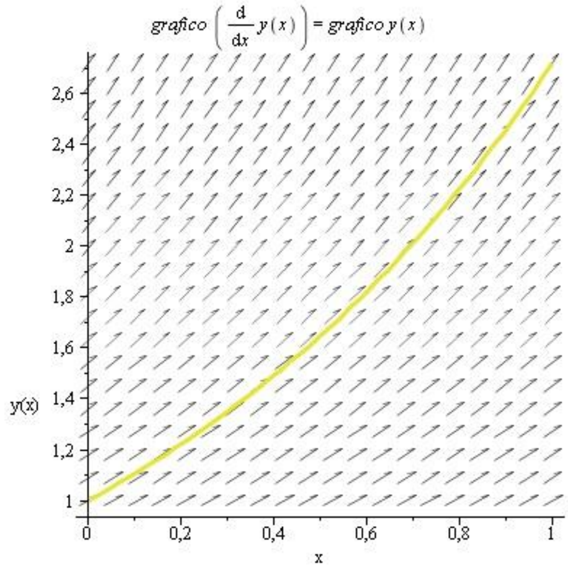
> $dsolve(\{EDO, CC1\})$

$$y(x) = e^{x}$$

> with(DEtools)

[AreSimilar, DEnormal, DEplot, DEplot3d, DEplot_polygon, DFactor, DFactorLCLM, DFactorsols, Dchangevar, FunctionDecomposition, GCRD, Gosper, Heunsols, Homomorphisms, IVPsol, IsHyperexponential, LCLM, MeijerGsols, MultiplicativeDecomposition, ODEInvariants, PDEchangecoords, PolynomialNormalForm, RationalCanonicalForm, ReduceHyperexp, RiemannPsols, Xchange, Xcommutator, Xgauge, Zeilberger, abelsol, adjoint, autonomous, bernoullisol, buildsol, buildsym, canoni, caseplot, casesplit, checkrank, chinisol, clairautsol, constcoeffsols, convertAlg, convertsys, dalembertsol, dcoeffs, de2diffop, dfieldplot, diff_table, diffop2de, dperiodic_sols, dpolyform, dsubs, eigenring, endomorphism_charpoly, equinv, eta_k, eulersols, exactsol, expsols, exterior_power, firint, firtest, formal_sol, gen_exp, generate_ic, genhomosol, gensys, hamilton_eqs, hypergeomsols, hyperode, indicialeq, infgen, initialdata, integrate_sols, intfactor, invariants, kovacicsols, leftdivision, liesol, line_int, linearsol, matrixDE, matrix_riccati, maxdimsystems, moser_reduce, muchange, mult, mutest, newton_polygon, normalG2, ode_int_y, ode_y1, odeadvisor, odepde, parametricsol, particularsol, phaseportrait, poincare, polysols, power_equivalent, rational_equivalent, ratsols, redode, reduceOrder, reduce_order, regular_parts, regularsp, remove_RootOf, riccati_system, riccatisol, rifread, rifsimp, rightdivision, rtaylor, separablesol, singularities, solve_group, super_reduce, symgen, symmetric_power, symmetric_product, symtest, transinv, translate, untranslate, varparam, zoom]

> $DEplot(EDO, y(x), x = 0..1, [[CC1]], color = black, title = grafico\ EDO)$



Exercícios:

Faça o gráfico de:

a. $y' = 2y, \quad y(0) = 1$
b. $y'' - 4y = 0, \quad y(0) = 2\ e y'(0) = 4$
c. $x^2y'' + xy' - 0{,}25y = 0, \quad y(1) = 2\ e y'(1) = 1$
d. $EDO1 := \frac{d^2}{dx^2}\, y(x) - 8\,x^2 = 0$, $CC2 := (y(1) = 0, D(y)(2) = 0);$