# Notas de Aula

## Curso de Eletromagnetismo - Mestrado 2006

Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas - CBPF

# 1 Introdução

As Equações de Maxwell são representadas por 4 equações que descrevem o comportamento dos campos elétricos e magnéticos e suas interações com a matéria. Essas 4 equações expressam, respectivamente:

- Lei de Gauss
- Lei de Ampère
- Ausência de monopólos magnéticos
- Lei de Indução de Faraday

A Lei e Gauss (1) enuncia que cargas elétricas produzem campos elétricos. A Lei de Indução de Faraday (3) diz que variações de campo magnético produzem campos elétricos. Enquanto que a Lei de Ampère (4) enuncia que correntes elétricas geram campos magnéticos. Ainda temos a relação que representa a ausência de monopólos magnéticos (2).

Em 1864, Maxwell foi o primeiro a colocar todas as equações juntas. Elas podem ser encontradas nas formas diferencial e integral. Aqui destacaremos as relações na sa forma diferencial.

## 1.1 Sumário das Equações - forma diferencial - no vácuo

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \tag{1}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \tag{2}$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \tag{3}$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \tag{4}$$

## 2 Potencial vetor e escalar

As equações pode ser formuladas em termos de potenciais. Para definir esses potenciais, vamos trabalhar com as equações (1) e (2). Também sabemos que as seguinte identidades devem ser conhecidas:

$$\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{f}) \equiv 0 \tag{5}$$

$$\nabla \times (\nabla \cdot \mathbf{f}) \equiv 0 \tag{6}$$

A relação $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ sempre será satisfeita desde que não existam monopólos magnéticos. Assim, podemos escrever, usando o chamado vetor potencial para o campo magnético:

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, \mathbf{t}) = \nabla \cdot \mathbf{A} \tag{7}$$

Para o campo elétrico, teremos:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, \mathbf{t}) = -\nabla \cdot \phi(r, t) - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \tag{8}$$

Aqui encontramos o chamado potencial escalar denominado de $\phi$. De acôrdo com o conceito de potenciais, podemos gerar duas outras relações:

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \tag{9}$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = 0 \tag{10}$$

Essas são as chamadas equações homogêneas de Maxwell. As equações homogêneas, vistas através dos potenciais, constituem-se na Identidades de Jacobi. Mas qual das representações $(\mathbf{E}, \mathbf{B}, \phi, \mathbf{A})$ possui significado físico?

O Efeito Aharanov-Bohm mostra que, em Mecânica Quântica, são mensuráveis os efeitos dos potenciais $A$ e $\phi$. Neste curso, em geral, como trabalharemos com o Eletromagnetismo Clássico, consideraremos os potenciais, uma vez que, sabendo que dos potenciais, podemos extrair informações dos campos e, além disso, abrange toda a clássica quanto a quântica.

Lembre-se que existe uma certa liberdade na escolha de $\phi$ e $A$, uma vez que:

$$\phi' = \phi + \frac{\partial f}{\partial t} \tag{11}$$

$$\mathbf{A}' = \mathbf{A} - \nabla \cdot \mathbf{f} \tag{12}$$

Mas:

$$\mathbf{E}' = -\nabla \cdot \phi' - \frac{\partial \mathbf{A}'}{\partial t} = \mathbf{E} \tag{13}$$

$$\mathbf{B}' = \nabla \times \mathbf{A}' = \mathbf{B} \tag{14}$$

e, consequentemente, as energias

$$\mathbf{u} = \frac{1}{2}\epsilon_0|\mathbf{E^2}| + \frac{1}{2\mu_0}|\mathbf{B^2}| \tag{15}$$

$$\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{B} \tag{16}$$

também permanecem invariantes.

# 3 Simetria de Gauge do Eletromagnetismo

O Eletromagnetismo com uma das interações fundamentais é baseado na simetria $U(1)$ e $SO(2)$, isto é, é possível passar de uma família de potenciais para outra , fazendo uso de uma transformação do tipo:

$$\phi' = \phi + \partial_t \alpha(x, t) \tag{17}$$

$$\mathbf{A}' = \mathbf{A} - \nabla \cdot \alpha(x, t) \tag{18}$$

Sabendo que $E' = E$ e $B' = B$.

Note a arbitrariedade na escolha da função de $\alpha$ e, consequentemente, de $\phi$ e $\mathbf{A}$. Tomando as derivadas de (17) e (18), temos:

$$\frac{1}{c^2}\partial_t \phi + \frac{1}{c^2}\partial_t^2 \alpha \tag{19}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \nabla \cdot \mathbf{A} - \nabla^2 \alpha \tag{20}$$

Fazendo (19)+(20), temos:

$$\frac{1}{c^2}\partial_t \phi' + \nabla \cdot \mathbf{A}' = \frac{1}{c^2}\partial_t \phi + \nabla \cdot \mathbf{A} + \Box \alpha \tag{21}$$

Onde $\Box$ é o operador D‘Alembertiano.

## 3.1 Simetria de Gauge residual - Anomalia de Gribov

Fazendo uma segunda transformação de Gauge com um novo parâmetro de gauge denominado de $\beta$, teremos:

$$\phi'' = \phi' + \partial_t \beta \tag{22}$$

$$\mathbf{A}'' = \mathbf{A}' - \nabla \beta \tag{23}$$

e impondo que queremos manter o "gauge fixing"de Lorentz:

$$\frac{1}{c^2}\partial_t \phi'' + \nabla \cdot \mathbf{A}'' = 0, \tag{24}$$

chegamos a uma nova simetria, isto é, uma famnília de funções chamadas funções harmônicas, que satisfazem:

$$\Box \beta = 0 \tag{25}$$

Note que eliminamos completamente a ambiguidade na escolha de $\phi$ e $\mathbf{A}$. Assim:

$$\Box \beta = 0 \tag{26}$$

$$\frac{1}{c^2}\partial_t^2 \beta = \nabla^2 \beta \tag{27}$$

$$\frac{1}{c^2}\partial_t \phi' + \frac{1}{c^2}\partial_t^2 \beta \leftrightarrow \beta = -(\nabla^2)^{-1}\frac{1}{c^2}\partial_t \phi' = \partial_t \phi'' = 0 \tag{28}$$

Lembrando que $\nabla^2 \beta = \frac{1}{c^2}\partial_t^2 \beta$ .

Concluímos que $\phi''$ é um campo independente do tempo, ou seja, estático. Isto quer dizer que $\phi''$ não possui dinâmica e, consequentemente, não é uma coordenada generalizada do sistema. É um grau de liberdade fictício, não físico!!!!
Do calibre de Lorentz:

$$\nabla \cdot \mathbf{A}'' = 0 \leftrightarrow \mathbf{A}'' \tag{29}$$

No vácuo e sem cargas:

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \nabla \cdot \mathbf{E}' = \nabla \cdot \mathbf{E}'' = 0 \tag{30}$$

E daí:

$$\mathbf{E} = -\nabla \phi'' + \partial_t A'' \leftrightarrow \nabla \cdot \mathbf{E} = -\nabla^2 \phi'' - \partial_t \nabla \cdot \mathbf{A}'' = 0 \tag{31}$$

Então $\phi'' = 0$ e $\nabla \cdot \mathbf{A}''$. Este último é chamado de gauge de radiação.
Note que dadas estas condições, só sobram 2 graus de liberdade físicos, que são as componentes transversais do potencial vetor $\mathbf{A}''$ (uma vez que a divergência nula implica que $\mathbf{A}''$ não possui componente longitudinal e o componente escalar pode ser zerado). A simetria de Gauge, portanto, ressalta quais os graus de liberdade físicos do problema (que caiu de 4 para 2).

Por outro lado, na presença de cargas, a passagem de $(\phi; \mathbf{A})$ para $(\phi''; \mathbf{A}'')$, independe de estar ou não, no vácuo; apenas a simetria de Gauge está em jogo. Com a consulta ä Lei de Gauss para $\mathbf{E}$, a discussão de se ter cargas é consequente.

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \leftrightarrow \nabla^2 \phi'' = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \leftrightarrow \phi''(x,t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(x,t)}{|x - x'|} d^3x' \tag{32}$$

Neste caso, note que $\phi''$ mede a distribuição instantânea de cargas, ou seja, não possui a noção de causalidade e, portanto, também não é um grau de liberdade físico do sistema.

No caso do campo eletromagnético livre, a simetria de Gauge nos permite a escolha de uma família de potenciais satisfazendo ao gauge-fixing seguinte:

$$\phi = 0 \tag{33}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = 0 \tag{34}$$

As equações (33) e (34) refere-se ao Gauge de Coulomb (tranversalidade).

Daí:

$$\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \tag{35}$$

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \tag{36}$$

Temos:

$$\Box \mathbf{A} \leftrightarrow \mathbf{A} = \mathbf{A_0} \cdot cos(kx - \omega t) \tag{37}$$

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{A} = 0 \tag{38}$$

$$\omega = |\mathbf{k}| c \tag{39}$$

$$\mathbf{E} \sim \omega \mathbf{A} \tag{40}$$

$$\mathbf{B} \sim \mathbf{k} \times \mathbf{A_0} \tag{41}$$

E assim, recuperamos a tranversalidade.

## 3.2 Operadores de Projeção Vetoriais

Pelo teorema de Helmholtz, um campo vetorial arbitrário pode ser decomposto em uma parte de divergência nula e uma parte rotacional nulo:

$$\mathbf{F} = -\nabla\phi + \nabla \times \mathbf{A} \tag{42}$$

Esta equação, por si só, já possui simetria por causa da ambiguidade na escolha de $\mathbf{A}$, uma vez que é possível fazer a transformação:

$$\mathbf{A}' = \mathbf{A} + \nabla\alpha \tag{43}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{A}' = \nabla \cdot \mathbf{A} + \nabla^2\alpha \leftrightarrow \alpha = -(\nabla^2)^{-1}\nabla \cdot \mathbf{A} \leftrightarrow \nabla \cdot \mathbf{A}' = 0 \leftrightarrow \nabla \cdot \mathbf{A} = 0 \tag{44}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = -\nabla^2\phi \leftrightarrow \phi = -\frac{1}{\nabla^2}\nabla \cdot \mathbf{F} \tag{45}$$

Substituindo $\phi$ em (42), temos:

$$\mathbf{F} = -\frac{\nabla}{\nabla^2}(\nabla \cdot \mathbf{F}) + \mathbf{F_{transverso}} \tag{46}$$

Onde $\mathbf{F_{transverso}}$ é igual a $(\nabla \cdot \mathbf{F_T}) = 0$. Vale lembrar que $(\mathbf{F_T} = \nabla \times \mathbf{A})$. Mas:

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x_i}\widehat{x}_i \tag{47}$$

$$\nabla^2 = \partial_i\partial_i \tag{48}$$

Daí:

$$\mathbf{F} = -\frac{\partial_i}{\nabla^2}\partial_j\mathbf{F_j} + \mathbf{F_i^T} \tag{49}$$

Definindo:

$$\omega_{ij} \equiv \frac{\partial_i\partial_j}{\nabla^2} = \frac{1}{\nabla^2} \tag{50}$$

Temos:

$$\mathbf{F_i} = \omega_{ij}\mathbf{F_j} + \mathbf{A_i^T} \tag{51}$$

Note que:

$$\omega^2 = \omega \tag{52}$$

$$\omega_{ik}\omega_{kj} = (\omega^2)_{ij} \tag{53}$$

$$\frac{\partial_i \partial_k}{\nabla^2}\frac{\partial_k \partial_j}{\nabla^2} = \frac{\partial_i}{\nabla^2}\nabla^2\frac{\partial_j}{\nabla^2} = \omega_{ij} \tag{54}$$

ou seja, teremos o chamado operador de projeção (idempotente)

$$\omega^2 = \omega \tag{55}$$

Daí:

$$\omega_{ij}\mathbf{F_j} = \mathbf{F_i^L} \tag{56}$$

$$\mathbf{F_i^T} = \mathbf{F_i} - \frac{\partial_i \partial_j}{\nabla^2}\mathbf{F_j} = (\delta_{ij} - \omega_{ij})\mathbf{F_j} \tag{57}$$

Onde:

$$\mathbf{F_i} = \delta_{ij}\mathbf{F_j} = \mathbf{F_i} \tag{58}$$

e

$$(\delta_{ij} - \omega_{ij}) = \theta_{ij} \tag{59}$$

Considere que:

$$\theta + \omega = \tag{60}$$

$$\theta_{ij} + \omega_{ij} = \delta_{ij} \tag{61}$$

Ainda é importante saber que:

$$\theta^2 = \theta \tag{62}$$

$$\theta_{ik}\theta_{kj} = \theta_{ij}^2 = \theta_{ij} \tag{63}$$

Vale lembrar que

$$\theta\omega = \omega\theta = 0 \tag{64}$$

portanto:

$$\theta_{ik}\omega_{kj} = \omega_{kj}\theta_{jk} = 0 \tag{65}$$

Concluí-se que:

$$\mathbf{F_i} = \omega_{ij}\mathbf{F_j} + \theta_{ij}\mathbf{F_j} \tag{66}$$

Onde

$$\omega_{ij}\mathbf{F_j} = \mathbf{F_i^T} \tag{67}$$

que provém de $\nabla \cdot \mathbf{F}$ e

$$\theta_{ij}\mathbf{F_j} = \mathbf{F_i^L} \tag{68}$$

que provém de $\nabla \times \mathbf{F}$.

## 3.3 Uma disgressão sobre a Transformada de Fourier

Temos:

$$\mathbf{Q}(\mathbf{x}) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3}\widetilde{\mathbf{Q}}(\mathbf{k})e^{-ikx} \tag{69}$$

$$\widetilde{\mathbf{Q}} = \int d^3x\mathbf{Q}(\mathbf{x})e^{ikx} \tag{70}$$

Temos ainda a identidade:

$$\delta^3(x) = \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3}e^{-ikx} \tag{71}$$

Reescrevendo o campo $\mathbf{F}(\mathbf{x})$:

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3}\widetilde{\mathbf{F}}(\mathbf{k})e^{-ikx} \tag{72}$$

Daí:

$$\nabla\mathbf{e}^{-\mathbf{ikx}} = -\mathbf{ik}e^{-ikx} \tag{73}$$

$$\nabla^2\mathbf{e}^{-\mathbf{ikx}} = -\mathbf{k^2}e^{-ikx} \tag{74}$$

Assim, é possível identificar:

$$\partial_i \to -\mathbf{ik_i} \tag{75}$$

$$\nabla^2 \to -\mathbf{k^2} \tag{76}$$

Logo, poderemos escrever:

$$\omega_{ij} = \frac{\mathbf{k_i k_j}}{\mathbf{k^2}} \tag{77}$$

e assim, não é tão estranho mais tratar os operadores como formas algébricas, uma vez que, se eles forem tratados no espaço de Fourier, este tratamento é usual. Seja:

$$\mathbf{M_{ij}} = \beta\theta_{ij} + \alpha\omega_{ij} \to \mathbf{M} = \alpha\omega + \beta\theta \tag{78}$$

Apesar de, isoladamente, $\omega$ não ser inversível, note que definindo:

$$\mathbf{M^{-1}} = \frac{1}{\alpha}\omega + \frac{1}{\beta}\theta \tag{79}$$

temos:

$$\mathbf{MM^{-1}} = \omega + \theta = \delta \tag{80}$$

Obs: O $\mathbf{M}$ é inversível, bastando inverter os coeficientes dos operadores de projeção.
Seja:

$$\mathbf{M_{ij}S_j} = \mathbf{J_i} \tag{81}$$

$$\nabla^2\mathbf{S_i} + \xi\nabla^2\nabla^2\mathbf{S_i} + \alpha\partial_i\partial_j\mathbf{S_j} = \mathbf{J_i} \tag{82}$$

$$[(\nabla^2 + \xi\nabla^2\nabla^2)\delta_{ij} + \alpha\partial_i\partial_j]\mathbf{S_j}(\mathbf{x}) = \mathbf{J_i} \leftrightarrow \mathbf{M_{ij}S_j} = \mathbf{J_i}(\mathbf{x}) \tag{83}$$

$$\mathbf{M_{ij}S_j} = \mathbf{J_i} \tag{84}$$

$$\mathbf{S} = \mathbf{M^{-1}J} \tag{85}$$

Fazendo a Transformada de Fourier:

$$[(\nabla^2 + \xi\nabla^2\nabla^2)\delta_{ij} + \alpha\partial_i\partial_j]\int\frac{d^3k}{(2\pi)^3}\widetilde{\mathbf{S}}_\mathbf{j}(\mathbf{k})e^{-ikx} = \tag{86}$$

$$\int\frac{d^3k}{(2\pi)^3}\widetilde{\mathbf{J}}(\mathbf{k})e^{-ikx} = [(-k^2 + \xi k^4)\delta_{ij} - \alpha\mathbf{k_i k_j}]\widetilde{\mathbf{S}}_\mathbf{j} = \widetilde{\mathbf{J}}_\mathbf{i} \tag{87}$$

Podemos notar que os operadores podem ser tratados algebricamente.
Usando $\delta_{ij} = \omega_{ij} + \theta_{ij}$ e $\mathbf{k_i k_j} = \mathbf{k^2}$, podemos fatorar o laplaciano.
Assim, temos:

$$\nabla^2[(1 + \xi\nabla^2)(\omega ij + \theta ij) + \alpha\omega_{ij}]\mathbf{S_j} = \mathbf{J_i} \tag{88}$$

$$\nabla^2[(\alpha + (1 + \xi\nabla^2)\omega + (1 + \xi\nabla^2)\theta]\mathbf{S} = \mathbf{J} \tag{89}$$

Vamos obter:

$$\mathbf{S} = \frac{1}{\nabla^2}(\frac{\alpha}{\xi\nabla^2 + \alpha + 1} + \frac{\theta}{\xi\nabla^2 + 1})\mathbf{J} \tag{90}$$

Sabendo que $\omega = \frac{\partial_i\partial_j}{\nabla^2}$ e $\theta = \frac{(\nabla^2\delta_{ij} - \partial_i\partial_j)}{\nabla^2}$

Assim:

$$\mathbf{S_i} = \frac{1}{\nabla^2}\frac{1}{\nabla^2}(\frac{\partial_i\partial_j}{\xi\nabla^2 + \alpha + 1} + \frac{\nabla^2\delta_{ij} - \partial_i\partial_j}{\xi\nabla^2 + 1})\mathbf{J_j} \tag{91}$$

$$[\frac{\delta_{ij}}{\nabla^2(\nabla^2\xi + 1)} - \frac{\alpha\partial_i\partial_j}{\nabla^2\nabla^2(\nabla^2\xi + \alpha + 1)(\xi\nabla^2 + 1)}]\mathbf{J_j} \tag{92}$$

$$\frac{1}{\nabla^2(\xi\nabla^2 + 1)}[\mathbf{J_i} - \frac{\alpha\partial_i\partial_j\mathbf{J_j}}{\nabla^2(\xi\nabla^2 + \alpha + 1)}] \tag{93}$$

Mas:

$$\frac{1}{\xi\nabla^2}\frac{1}{\nabla^2 + \frac{1}{\xi}} = -(\frac{1}{\nabla^2 + \frac{1}{\xi}} - \frac{1}{\nabla^2}) \tag{94}$$

Segue de (93):

$$\mathbf{S} = (\frac{1}{\nabla^2} - \frac{1}{\nabla^2 + \frac{1}{\xi}})\mathbf{J_i} = \tag{95}$$

Lembrando que:

$$\nabla^2 \frac{1}{-4\pi|x-y|} = \delta^3(x-y) \tag{96}$$

e

$$\frac{(\nabla^2+\lambda)\mathbf{e}^{-\sqrt{\lambda}|\mathbf{x}-\mathbf{y}|}}{-4\pi|x-y|} = \delta^3(x-y) \tag{97}$$

Então a relação (95) ficará assim:

$$\vec{\mathbf{S}}(\vec{\mathbf{x}}) = \int d^3\vec{y}\frac{1}{-4\pi|x-y|}\vec{\mathbf{J}}(\vec{\mathbf{y}}) - \int d^3\vec{y}\mathbf{e}^{\frac{-|\vec{\mathbf{x}}-\vec{\mathbf{y}}|}{\sqrt{\xi}}}\mathbf{J}(\vec{\mathbf{y}}) = \tag{98}$$

Continuando....

$$-\frac{\alpha\partial_i\partial_j\mathbf{J_j}}{\xi^2\nabla^2(\nabla^2+\frac{1}{\xi})\nabla^2(\nabla^2+\frac{\alpha+1}{\xi})} = \frac{1}{(\nabla^2)^2} - \frac{1}{\nabla^2(\nabla^2+\frac{\alpha+1}{\xi})} \tag{99}$$

Continuando...

$$-\frac{1}{\nabla^2(\nabla^2+\frac{1}{\xi})} + \frac{1}{\nabla^2+\frac{1}{\xi}}\frac{1}{\nabla^2+\frac{\alpha+1}{\xi}} \tag{100}$$

Escrevendo a transformada de Fourier:

$$(\nabla^2)^2\int\frac{d^3\vec{k}}{(2\pi)^3}\widetilde{\mathbf{G}}(\vec{\mathbf{k}})\mathbf{e}^{-\mathbf{i}\vec{\mathbf{k}}\cdot(\vec{\mathbf{x}}-\vec{\mathbf{y}})} \tag{101}$$

Temos $|\vec{\mathbf{k}}|^4\widetilde{\mathbf{G}}(\vec{\mathbf{x}}) = 1$, assim:

$$\mathbf{G}(\vec{\mathbf{x}}-\vec{\mathbf{y}}) = \int\frac{d^3\vec{k}}{(2\pi)^3}\frac{1}{|\vec{k}|^4}\mathbf{e}^{-\mathbf{i}\vec{\mathbf{k}}\cdot(\vec{\mathbf{x}}-\vec{\mathbf{y}})} \leftrightarrow \int_0^\infty d|\vec{k}|\frac{1}{|\vec{k}|^2}\mathbf{e}^{-\mathbf{i}\vec{\mathbf{k}}\cdot(\vec{\mathbf{x}}-\vec{\mathbf{y}})} \tag{102}$$

## 3.4 Invariância de Gauge

Seja o caso de dois potenciais vetoriais $(\vec{a}, \vec{X})$:

$$\vec{e} = \nabla\times\vec{a} - \partial_t X \tag{103}$$

$$\mathbf{b} = \nabla\cdot X \tag{104}$$

Note que a primeira invariância surge em $X$, pois é possível redefinir:

$$\vec{\mathbf{X}}\prime = \vec{\mathbf{X}} + \vec{\nabla}\times\vec{\alpha} \tag{105}$$

Consequentemente, para manter $\vec{e}$ invariante, temos:

$$\vec{\mathbf{a}} = \vec{\mathbf{a}} - \partial_t\vec{\alpha} \tag{106}$$

E daí:

$$\vec{\nabla} \times \vec{\mathbf{a}'} - \partial_t X' = \vec{\mathbf{e}'} = \vec{\mathbf{e}} \tag{107}$$

$$\vec{\mathbf{b}'} = \mathbf{b} \tag{108}$$

Um segundo par de transformaçõe seria com alteração do termo $\vec{a}$. Assim:

$$\vec{\mathbf{a}'} = \vec{\mathbf{a}} + \nabla \cdot \beta \tag{109}$$

$$\vec{\mathbf{X}'} = \vec{\mathbf{X}} \tag{110}$$

E então:

$$\vec{\mathbf{b}'} = \mathbf{b} \tag{111}$$

$$\vec{\mathbf{e}'} = \vec{\mathbf{e}} \tag{112}$$

Ou seja, esta situação é mais rica em termos de simetria do que o eletromagnetismo usual, uma vez que o eletromagnetismo "gótico"possui dois conjuntos de transformações de Gauge:

$$(i)\vec{\alpha}$$

$$(ii)\beta$$

# 4 Eletrodinâmica Escalar-vetorial

Note que na Eletrodinâmica de Maxwell, toda a informação para descrever o fóton (m=0; s=1) está contida no vetor $\vec{\mathbf{A}}$. Já na Eletrodinâmica de Kalb-Ramond fornece como mediadora uma partícula escalar, sem natureza vetorial, ou seja, (m=0;s=0).
As equações de Maxwell surgem com interferência de $\vec{\mathbf{e}}$ e $\vec{\mathbf{b}}$, nas equações de $\vec{\mathbf{E}}$ e $\vec{\mathbf{B}}$ e vice-versa.

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{\mathbf{E}} + \xi \mathbf{b} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \tag{113}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{\mathbf{B}} + \xi \vec{\mathbf{e}} = \mu_0 \epsilon_0 \partial_t \vec{\mathbf{E}} + \vec{j} \tag{114}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{\mathbf{e}} + \zeta \vec{\mathbf{B}} = \vec{\mathbf{j}} \tag{115}$$

$$\vec{\nabla} \vec{\mathbf{b}} + \zeta \vec{\mathbf{E}} = -\frac{1}{c^2} \partial_t \vec{\mathbf{e}} + \kappa \tag{116}$$

Essas equações vão gerar equações de onda desacopladas e, mais ainda, é uma teoria onde o "fóton"surge com massa (fótão).

## 4.1 Retomando as Equações de Maxwell-Proca

Neste eletromagnetismo, as equações de campo serão:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{\mathbf{E}} + \xi\phi = \frac{\rho}{\epsilon_0} \tag{117}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{\mathbf{E}} = -\partial_t \vec{\mathbf{B}} \tag{118}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{\mathbf{B}} = 0 \tag{119}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{\mathbf{B}} + \xi\vec{\mathbf{A}} = \mu_0\epsilon_0\partial_t\vec{\mathbf{E}} + \mu_0\vec{\mathbf{j}} \tag{120}$$

Tomando a derivada temporal de (117) e a divergência de (120), temos:

$$\frac{1}{c^2}\vec{\nabla} \cdot \partial_t\vec{\mathbf{E}} + \frac{1}{c^2}\partial_t\phi = \tag{121}$$

Continuando....

$$\frac{1}{c^2}\frac{1}{\epsilon_0}\partial_t\rho\xi\vec{\nabla} \cdot \vec{\mathbf{A}} = \frac{1}{c^2}\vec{\nabla} \cdot \partial_t\vec{\mathbf{E}} + \mu_0\nabla \cdot \vec{\mathbf{j}} \tag{122}$$

E daí:

$$\xi(\frac{1}{c^2}\partial_t\vec{\phi} + \vec{\nabla} \cdot \vec{\mathbf{A}}) = \mu_0(\partial_t\rho + \vec{\nabla} \cdot \vec{\mathbf{j}}) = 0 \tag{123}$$

A conservação da carga surge com:

$$\partial_t\rho + \vec{\nabla} \cdot \vec{\mathbf{j}} = 0 \tag{124}$$

E a equação:

$$\frac{1}{c^2}\partial_t\phi + \vec{\nabla} \cdot \vec{\mathbf{A}} = 0 \tag{125}$$

Surge naturalmente como consequência direta da dinâmica, ou seja, é consequência das equações de campo. Note que, no caso da eletrodinâmica, de Maxwell ($\xi = 0$), na equação (125) aparece a fixação de gauge de Lorentz, e não como resultado direto da conservação da carga, isto é, da própria dinâmica do sistema.

Além disto, note que as equações de Maxwell-Proca não são todas invariantes pela transformação de Gauge, de modo que, o termo de Proca em (117) e (120) quebra a simetria de calibre (surge nas equações um termo explicitamente dependente de $\alpha$.

$$\phi' = \phi + \partial_t\alpha \tag{126}$$

$$\mathbf{A}' = \vec{\mathbf{A}} - \vec{\nabla}\alpha \tag{127}$$

Onde $\vec{\mathbf{E}} = \vec{\mathbf{E}}'$ e $\vec{\mathbf{B}} = \vec{\mathbf{B}}'$.

Mais ainda, a componente longitudinal de $\vec{A}$ sobrevive, uma vez que:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{\mathbf{A}} = -\frac{1}{c^2}\partial_t \phi \tag{128}$$

$$\vec{\mathbf{A}} = \frac{\partial_i \partial_j}{\nabla^2}\vec{\mathbf{A}}_{\mathbf{j}} + \vec{\mathbf{A}}_{\mathbf{i}}^{\mathbf{T}} \leftrightarrow \frac{1}{c^2}\frac{\partial_i}{\nabla^2}\phi = \mathbf{A}_{\mathbf{i}}^{\mathbf{L}} \tag{129}$$

ou seja, sobrevivem três graus de liberdade físicos: duas componentes independentes do $\vec{\mathbf{A}}_{\mathbf{T}}$, mais uma do potencial de $\phi$, que mede $\vec{\mathbf{A}}_{\mathbf{L}}$; a onda perde a propriedade de transversalidade presente em Maxwell.

No vácuo $\rho = 0$ e $\vec{\mathbf{j}}$, partindo das equações de Maxwell-Proca, surge uma equação de campo para $\vec{\mathbf{E}}$ e uma para $\vec{\mathbf{B}}$:

$$(\Box + \xi)\vec{\mathbf{E}} = \vec{0} \tag{130}$$

$$(\Box + \xi)\vec{\mathbf{B}} = \vec{0} \tag{131}$$

Substituindo os campos pelos potenciais:

$$-\nabla^2\phi - \partial_t\vec{\nabla} \cdot \vec{\mathbf{A}} + \xi\phi = 0 \tag{132}$$

Tomando Ampère-Maxwell com $\vec{\mathbf{E}}$ e $\vec{\mathbf{B}}$ em termos de potenciais e usando a relação subsidiária:

$$(\Box + \xi)\vec{\mathbf{A}} = \vec{0} \tag{133}$$

# 5 Conservação no transporte de Energia-momento

As energias elétrica e magnética acumuladas por um campo eletromagnético estático são, respectivamente:

$$\mathbf{u_e} = \frac{1}{2}\epsilon_0\vec{\mathbf{E}}^{\mathbf{2}} \tag{134}$$

$$\mathbf{u_m} = \frac{1}{2\mu_0}\vec{\mathbf{B}}^{\mathbf{2}} \tag{135}$$

Como será que fica para o caso dinâmico?
Multiplicando (118) escalarmente por $\vec{\mathbf{B}}$ e (120) por $\vec{\mathbf{E}}$, temos:

$$\vec{\mathbf{B}} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{\mathbf{E}}) = -\vec{\mathbf{B}} \cdot \partial_t\vec{\mathbf{B}} = -\frac{1}{2}\partial_t(\vec{\mathbf{B}} \cdot \vec{\mathbf{B}}) \tag{136}$$

$$\vec{\mathbf{E}} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{\mathbf{B}}) + \xi\vec{\mathbf{E}} \cdot \vec{\mathbf{A}} = \frac{\mu_0\epsilon_0}{2}\partial_t(\vec{\mathbf{E}} \cdot \vec{\mathbf{E}}) + \mu_0\vec{\mathbf{E}} \cdot \vec{\mathbf{j}} \tag{137}$$

Dividindo (136) por (137) por $\mu_0$ e fazendo (137)-(136), temos:

$$\partial_t(\frac{1}{2}\epsilon_0\vec{\mathbf{E}} + \frac{1}{2\mu_0}\vec{\mathbf{B}}^{\mathbf{2}}) \tag{138}$$

Continuando....

$$\frac{1}{\mu_0}(\vec{\mathbf{E}} \cdot \nabla \times \vec{\mathbf{B}} - \vec{\mathbf{B}} \cdot \nabla \times \vec{\mathbf{E}}) + \frac{\xi}{\mu_0}\vec{\mathbf{E}} \cdot \vec{\mathbf{A}} - \vec{\mathbf{E}} \cdot \vec{\mathbf{j}} \tag{139}$$

Mas

$$\vec{\nabla}\cdot(\vec{\mathbf{E}}\times\vec{\mathbf{B}}) = \partial_j\epsilon_{ijk}\mathbf{E_j}\mathbf{B_k} = \epsilon_{ijk}(\partial_i\mathbf{E_j})\mathbf{B_k}+\epsilon_{ijk}\mathbf{E_j}(\partial_i\mathbf{B_k}) = (\vec{\nabla}\times\vec{\mathbf{E}})\cdot\vec{\mathbf{B}}-\vec{\mathbf{E}}\cdot(\vec{\nabla}\times\vec{\mathbf{B}}) \tag{140}$$

Usando que:

$$\vec{\mathbf{E}} \cdot \vec{\mathbf{A}} = -(\vec{\nabla}\phi) \cdot \vec{\mathbf{A}} - \frac{1}{2}\partial_t\vec{\mathbf{A}}^2 \tag{141}$$

e também:

$$\vec{\nabla} \cdot (\phi\vec{\mathbf{A}} = \vec{\nabla}\phi \cdot \vec{\mathbf{A}} + \phi\nabla \cdot \vec{\mathbf{A}} \tag{142}$$

Então () fica:

$$\partial_t(\mathbf{u_e} + \mathbf{u_m} + \frac{1}{2}\frac{\xi}{\mu_o}\vec{\mathbf{A}}^2) = -\vec{\nabla}(\frac{1}{\mu_0}\vec{\mathbf{E}} \times \vec{\mathbf{B}} + \frac{\xi}{\mu_0}\phi\vec{\mathbf{A}}) + \frac{\xi}{\mu_0}\phi(\vec{\nabla} \cdot \vec{\mathbf{A}}) - \vec{\mathbf{E}} \cdot \vec{\mathbf{j}} \tag{143}$$

Usando a relação subsidiária, temos a equação da continuidade:

$$\partial_t(\mathbf{u_e} + \mathbf{u_m} + \frac{\xi\epsilon_0}{2}\phi^2 + \frac{\xi}{2\mu_0}\vec{\mathbf{A}}^2) + \vec{\nabla} \cdot \vec{\mathbf{S}} = -\vec{\mathbf{j}} \cdot \vec{\mathbf{E}} \tag{144}$$

Onde $\vec{\mathbf{S}}$ é a densidade de momento, ou seja, o vetor de Poynting:

$$\vec{\mathbf{S}} = \frac{1}{\mu_0}\vec{\mathbf{E}} \times \vec{\mathbf{B}} + \frac{\xi}{\mu_0}\phi\vec{\mathbf{A}} \tag{145}$$

Note que $\xi = 0$ em Maxwell. Lembramos que:

$$\frac{\xi\epsilon_0}{2}\phi^2 + \frac{\xi}{2\mu_0}\vec{\mathbf{A}}^2 \tag{146}$$

representa o efeito da massa do fóton na densidade de energia do campo. E que:

$$-\vec{\mathbf{j}} \cdot \vec{\mathbf{E}} \tag{147}$$

é o termo dissipativo, ou seja, a Lei de Ohm.

Acabamos de ver que o fluxo de energia e o momento estão relacionados por meio da equação de continuidade:

$$\partial_t(energia) + \vec{\nabla} \cdot (momento) = 0 \tag{148}$$

Já o fluxo do vetor de Poynting estará relacionado a um tensor de rank 2:

$$\partial_t \vec{\mathbf{S}} + \vec{\nabla} \cdot (tensor) = 0 \tag{149}$$

Lembrando que:

$$\vec{\mathbf{S}} = \frac{1}{\mu_0}\vec{\mathbf{E}} \times \vec{\mathbf{B}} + \frac{\xi}{\mu_0}\phi\vec{\mathbf{A}} \tag{150}$$

Temos:

$$\partial_t \vec{\mathbf{S}} + \vec{\nabla} cdot(?) = (??) \tag{151}$$

Daí:

$$\partial_t(\frac{1}{\mu_0}\vec{\mathbf{E}} \times \vec{\mathbf{B}} + \frac{\xi}{\mu_0}\phi\vec{\mathbf{A}}) = \frac{1}{\mu_0^2\epsilon_0}\mu_0\epsilon_0\partial_t\vec{\mathbf{E}} \times \vec{\mathbf{B}} + \frac{1}{\mu_0}\vec{\mathbf{E}} \times \partial_t\vec{\mathbf{B}} + \frac{\xi}{\mu_0}\partial_t\phi\vec{\mathbf{A}} + \frac{\xi}{\mu_0}\phi\partial_t\vec{\mathbf{A}} \tag{152}$$

Continuando...

$$\frac{1}{\mu_0^2\epsilon_0}(\vec{\nabla}\times\vec{\mathbf{B}})\times\vec{\mathbf{B}} + \frac{1}{\mu_0^2\epsilon_0}\xi\vec{\mathbf{A}}\times\vec{\mathbf{B}} - \frac{1}{\mu_0^2\epsilon_0}\mu_0\vec{\mathbf{j}}\times\vec{\mathbf{B}} - \frac{1}{\mu_0}\vec{\mathbf{E}}\times(\vec{\nabla}\times\vec{\mathbf{E}}) + -\frac{\xi}{\mu_0}\mathbf{c^2}\vec{\mathbf{A}}(\vec{\nabla}\cdot\vec{\mathbf{A}}) + \frac{\xi}{\mu_0}\phi\partial_t\vec{\mathbf{A}} \tag{153}$$

Mas:

$$[(\vec{\nabla} \times \vec{\mathbf{B}}) \times \vec{\mathbf{B}}]_i = \epsilon_{ijk}(\vec{\nabla} \times \vec{\mathbf{B}})_j\mathbf{B_k} = \epsilon_{ijk}\epsilon_{jmn}(\partial_m\ \mathbf{B_n})\mathbf{B_k} = \tag{154}$$

$$-(\partial_i\mathbf{B_k})\mathbf{B_k} + (\partial_k\mathbf{B_i})\mathbf{B_k} = -\frac{1}{2}\partial_i(\mathbf{B_k^2}) + \mathbf{B_k}(\partial_k\mathbf{B_i}) = -\frac{1}{2}\vec{\nabla}(\vec{\mathbf{B^2}}) + (\vec{\mathbf{B}} \cdot \vec{\nabla})\vec{\mathbf{B}} \tag{155}$$

Analogamente:

$$[(\vec{\nabla}\times\vec{\mathbf{E}}) \times \mathbf{E}]_i = -\frac{1}{2}\partial_i\mathbf{E_k^2} + \mathbf{E_k}(\partial_k\mathbf{E_i}) = -\frac{1}{2}\partial_i\mathbf{E_k^2} + \partial_k(\mathbf{E_i}\mathbf{E_k}) = -\partial_k(\mathbf{E_i}\mathbf{E_k} - \frac{1}{2}\delta_{ik}\vec{\mathbf{E^2}}) \tag{156}$$

## 5.1 Energia e momento do campo de Maxwell-Proca

Temos:

$$\partial_t\vec{\mathbf{S}} =? \tag{157}$$

A expressão auxiliar:

$$[\vec{\mathbf{F}} \times (\vec{\nabla} \times \vec{\mathbf{F}})]_i = \frac{1}{2}\nabla_i(\vec{\mathbf{F}} \cdot \vec{\mathbf{F}}) - \partial_j(\mathbf{F_j}\mathbf{F_i}) + (\vec{\nabla} \cdot \vec{\mathbf{F}})\vec{\mathbf{F_i}} \tag{158}$$

A relação acima será utilizada em $\partial_t\vec{\mathbf{E}} \times \ \vec{\mathbf{B}} + \vec{\mathbf{E}} \times \partial_t\vec{\mathbf{B}}$ quando $\partial_t\vec{\mathbf{E}}$ e $\partial_t\vec{\mathbf{B}}$ forem devidamente substituídas em Maxwell-Proca. Além disto:

$$\partial_t\phi\vec{\mathbf{A}} = -\frac{1}{\mu_0\epsilon_0}(\vec{\nabla} \cdot \vec{\mathbf{A}})\vec{\mathbf{A}} \tag{159}$$

será um termo que ficará congelado, pois será cancelado posteriormente por um termo idêntico, mas com sinal oposto. Analogamente, o termo $\phi\partial_t\vec{\mathbf{A}}$ também será cancelado. Com estes "conselhos", chega-se a expressão sob a forma legítima da equação de continuidade:

$$\partial_t\vec{\mathbf{S}} + \partial_j\theta_{ji} = -\frac{1}{\mu_0\epsilon_0}[\rho\vec{\mathbf{E_i}} + (\vec{\mathbf{j}} \times \vec{\mathbf{B}})_i] \tag{160}$$

Onde $\theta_{ji}$ é um tensor simétrico ($\theta_{ij} = \theta_{ji}$).

$$\theta_{ij} = \frac{1}{\mu_0\epsilon_0}[\delta_{ij}(\frac{1}{2}\epsilon_0\vec{\mathbf{E}}^2 + \frac{1}{2\mu_0}\vec{\mathbf{B}}^{\mathbf{2}} + \xi\frac{\epsilon_0}{2}\phi^2 + \frac{\xi}{2\mu_0}\vec{\mathbf{A}}^{\mathbf{2}}) - \epsilon_0\mathbf{E_i}\mathbf{E_j} - \frac{1}{\mu_0}\mathbf{B_i}\mathbf{B_j} + \frac{\xi}{\mu_0}\mathbf{A_i}\mathbf{A_j}] \tag{161}$$

Esta relação é chamada de "Stress-tensor"ou Tensor de Cisalhamento.

Considerações:

- Densidade de energia - 1 escalar (1 componente)
- Poynting - 1 vetor (3 componentes)
- "Stress-tensor- 1 tensor simétrico (3 componentes)

Total de 10 componentes - número de componentes de um tensor simétrico em 4 D.

Este tensor que possui informações acima é chamado de tensor de Energia-momento e é uma matriz 4x4 de modo que $\theta_{\mu\nu} = \theta_{\nu\mu}$ onde ($\mu, \nu = 0, ....3$).

Como a densidade de energia é um escalar, ela não deve possuir informação espacial, ou seja, não deve ser alterada por rotações no espaço. Logo, ela representa a componente $\theta_{tt}$, que é puramente temporal.

O vetor de Poynting, por sua vez, como é um vetor, deve possuir informações no tempo e no espaço, compondo os elementos $\theta_{\mu\nu}$ de $\theta_{\nu\mu}$. Finalmente, as componentes restantes estão no "Stress-tensor"que são $\theta_{ij} = \theta_{ji}$.

Note que $\theta_{ij}$ não possui traço nulo, mas $\theta_{\mu\nu}$ em $\theta_{\infty} - \theta_{ii} = 0$. Isso quer dizer que (tr $\theta_{\mu\nu} = 0$).

# 6 O espaço de Minkowski

No caso, trabalharemos com o espaço de Minkowski em 4 dimensões, ou seja, $M^{1,3} = M^{t,s}$, onde:

- t = dimensão temporal
- s = dimensão espacial

O espaço de Minkowski é constituído em cima de uma situação física dada: a propagação das ondas eletromagnéticas livres. Para ressaltar a relação entre uma situação física e uma métrica associada, vamos considerar o movimento de uma partícula que se move sobre uma N-esfera:

$$\mathbf{E^{N+1}} : \mathbf{x_1^2} + ... + \mathbf{x_N^2} + \mathbf{x_N^2} + \mathbf{1} = \mathbf{R^2} \tag{162}$$

A Lagrangiana do sistema:

$$\mathbf{L} = \frac{1}{2}\mathbf{m}\vec{\mathbf{v}} \cdot \vec{\mathbf{v}} = \frac{1}{2}\mathbf{m}\dot{\mathbf{x}}_\mathbf{I} \cdot \dot{\mathbf{x}}_\mathbf{I} \tag{163}$$

Onde $(\mathbf{I} = \mathbf{1}, ...., \mathbf{N})$.

Podemos reescrever a Lagrangeana do sistema:

$$\mathbf{L} = \frac{1}{2}\mathbf{m}\dot{\mathbf{x}}_\mathbf{i} \cdot \dot{\mathbf{x}}_\mathbf{i} + \frac{1}{2}\mathbf{m}\dot{\mathbf{x}}_\mathbf{N+1} \cdot \dot{\mathbf{x}}_\mathbf{N+1}.... \tag{164}$$

Onde $i = 1, ....N$ O único vínculo da esfera fornece a relação:

$$\mathbf{x_{N+1}} = \sqrt{\mathbf{R^2} - \mathbf{x_i x_i}} \tag{165}$$

Então:

$$\mathbf{x_{N+1}} = \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{\mathbf{R^2} - \mathbf{x_i x_i}}} \tag{166}$$

Dividindo (166) por $(-2\mathbf{x_i x_i})$, temos:

$$\mathbf{L} = \frac{1}{2}\mathbf{m}\dot{\mathbf{x}}_\mathbf{i}\dot{\mathbf{x}}_\mathbf{i} + \frac{1}{2}\mathbf{m}\frac{(\mathbf{x_i}\dot{\mathbf{x}}_\mathbf{i})(\mathbf{x_j}\dot{\mathbf{x}}_\mathbf{j})}{\mathbf{R^2} - \mathbf{x_i x_i}} = \frac{1}{2}\mathbf{m g_{ij}(x)}\dot{\mathbf{x}}_\mathbf{i}\dot{\mathbf{x}}_\mathbf{j} \tag{167}$$

Onde $i, j = 1, ..., N$ e

$$\mathbf{g_{ij}} = \delta_{ij} + \frac{\mathbf{x_i x_j}}{\mathbf{R^2} - \vec{\mathbf{x}}^\mathbf{2}} = \mathbf{g_{ji}} \tag{168}$$

é a métrica de $\mathbf{S^N}$, em coordenadas cartesianas. Ou seja, conseguimos relacionar uma situação física com uma métrica.

## 6.1 Propagação de sinais eletromagnéticos

Queremos, agora, construir o espaço de Minkowski através de uma métrica que incorpora a propagação de sinal eletromagnético livre: Assim:

$$(ct^2) - \vec{\mathbf{x}}^2 = 0 \tag{169}$$

$$\begin{pmatrix} ct & x & y & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0$$

Definindo:

$$\chi = \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

com componentes $\chi^\mu$, onde $\mu = 0, 1, 2, 3$, podemos reescrever:

$$\chi^t \mathbf{g} \chi = 0 = \chi_0\chi_0 - \chi_1\chi_1 - \chi_2\chi_2 - \chi_3\chi_3 \tag{170}$$

$$||\chi||^2 = 0 \tag{171}$$

A métrica $\eta_\infty = +1$; $\eta_{ij} = -\delta_{ij}$, obteremos $\eta = \eta^{-1}$. E definimos: $\eta_{\mu\nu} \equiv \eta$ e $\eta^{\mu\nu} \equiv \eta^{-1}$. Assim, vamos obter:

$$\eta_{\mu\lambda}\eta^{\lambda\nu} = \delta^\nu_\mu \equiv (MATRIZIDENTIDADE) \tag{172}$$

No espaço dual, o vetor $\widetilde{\chi} = \eta^{-1}\chi$ ou $\chi^\mu = \eta^{\mu\nu}\chi_\nu \rightarrow \chi_\lambda = \eta_{\lambda\nu}\chi^\nu$ e $\eta_{\lambda\mu}\chi^\mu = \eta_{\lambda\mu}\eta^{\mu\nu}\chi_\nu = \delta^\nu_\lambda\chi_\nu = \chi_\lambda$ Também:

$$\chi^\mu \equiv \chi = \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

E sabemos que $\chi^\mu = (\chi^0; \chi^i)$. Onde $\chi^0 \equiv ct; \chi^i \equiv \vec{\mathbf{x}} = (\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z})$ e, consequentemente, temos $\chi_\mu = (\chi_0; \chi_i)$. Onde:

$$\begin{cases} \chi_0 = cnt \\ \chi_i = -\vec{\mathbf{x}} \end{cases}$$

Pois:

$$\chi_\mu = \eta_{\mu\nu}\chi^\nu = \begin{pmatrix} ct \\ -x \\ -y \\ -z \end{pmatrix}$$

O produto escalar, por sua vez, será:

$$\chi^{\mu} \equiv \mathbf{x}^{\mu} = (cnt; \vec{\mathbf{x}}) \tag{173}$$

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{x} = (vetor)(dual) = \mathbf{x}^{\mu}\mathbf{x}_{\mu} = \mathbf{x}^{0}\mathbf{x}_{0} + \mathbf{x}^{1}\mathbf{x}_{1} + \mathbf{x}^{2}\mathbf{x}_{2} + \mathbf{x}^{3}\mathbf{x}_{3} = \tag{174}$$

Continuando...

$$\mathbf{x}^{0}\mathbf{x}^{0} - (\mathbf{x^1})^{\mathbf{2}} - (\mathbf{x^2})^{\mathbf{2}} - (\mathbf{x^3})^{\mathbf{2}} = (cnt)^2 - \vec{\mathbf{x}} \cdot \vec{\mathbf{x}} \tag{175}$$

Daí:

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{x} = 0 \tag{176}$$

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{x} > 0 \tag{177}$$

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{x} < 0 \tag{178}$$

Temos:

Para (176) vetor tipo-luz (ou nulos)

Para (177) vetor tipo-tempo (pois comporta-se como $\mathbf{x}^{\mu} = (cnt; 0)$

Para (178) vetor tipo-espaço (pois comporta-se como $\mathbf{x}^{\mu} = (0; \vec{\mathbf{x}})$

Além disto:

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{x}^{\mu}\mathbf{x}_{\mu} = (\eta^{\mu\nu}\mathbf{x}_{\nu})\mathbf{x}_{\mu} = \eta^{\mu\nu}\mathbf{x}_{\mu}\mathbf{x}_{\nu} = \mathbf{x}^{\mathbf{t}}\eta\mathbf{x} \tag{179}$$

Onde $\mathbf{x}$ é um vetor-coluna.

$$x = \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix}$$

# 7 Transformações de Lorentz

Seja uma transformação de Lorentz geral com velocidade $\vec{\mathbf{V}} = (\mathbf{V_x}, \mathbf{V_y}, \mathbf{V_z})$
Logo

$$\mathbf{t}' = \delta(\mathbf{t} - \frac{\vec{\mathbf{V}}}{\mathbf{c^2}} \cdot \vec{\mathbf{x}}) \tag{180}$$

Onde

$$\vec{\mathbf{x}} = \vec{\mathbf{x}_{/\!/}} + \vec{\mathbf{x}_{\perp}} \tag{181}$$

Ainda $\vec{\mathbf{x}_{//}} = (\vec{\mathbf{x}} \cdot \vec{\mathbf{V}})\widehat{\mathbf{V}} + \vec{\mathbf{x}_{\perp}}$

E dai

$$\begin{cases} \vec{\mathbf{x}'_{//}} = \delta(\vec{\mathbf{x}_{//}} - \vec{\mathbf{V}}\mathbf{t}) \\ \vec{\mathbf{x}'_{\perp}} = \vec{\mathbf{x}_{\perp}} \end{cases}$$

Entao

$$\vec{\mathbf{x}} = \delta\vec{\mathbf{x}} - \delta\vec{\mathbf{V}}\mathbf{t} + (\vec{\mathbf{x}} - \vec{\mathbf{x}_{//}}) = \vec{\mathbf{x}} + (\delta - 1)\vec{\mathbf{x}_{//}} - \delta\vec{\mathbf{V}}\mathbf{t} \tag{182}$$

Assim

$$\vec{\mathbf{x}'} = \vec{\mathbf{x}} + \frac{\delta - 1}{\beta^2}(\vec{\beta} \cdot \vec{\mathbf{x}})\vec{\beta} - \delta\mathbf{c}\vec{\beta}\mathbf{t} \tag{183}$$

E ainda ct'=$\delta(ct - \vec{\beta} \cdot \vec{\mathbf{x}})$

Pode ser expresso na forma matricial:

$$\begin{pmatrix} ct' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \delta & -\delta\beta\mathbf{x} & -\delta\beta\mathbf{y} & -\delta\beta\mathbf{z} \\ -\delta\beta\mathbf{x} & 1 + \frac{\delta-1}{\beta^2}\beta\mathbf{x^2} & \frac{\delta-1}{\beta^2}\beta\mathbf{x}\beta\mathbf{y} & \frac{\delta-1}{\beta^2}\beta\mathbf{x}\beta\mathbf{z} \\ -\delta\beta\mathbf{y} & \frac{\delta-1}{\beta^2}\beta\mathbf{y}\beta\mathbf{x} & 1 + \frac{\delta-1}{\beta^2}\beta\mathbf{y^2} & \frac{\delta-1}{\beta^2}\beta\mathbf{y}\beta\mathbf{z} \\ -\delta\beta\mathbf{z} & \frac{\delta-1}{\beta^2}\beta\mathbf{z}\beta\mathbf{x} & \frac{\delta-1}{\beta^2}\beta\mathbf{z}\beta\mathbf{y} & 1 + \frac{\delta-1}{\beta^2}\beta\mathbf{z^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Ou

$$\vec{\mathbf{x}'} = \Lambda \cdot \mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}^{'\mu} = \Lambda^{\mu}_{\nu}\mathbf{x}^{\nu} = \mathbf{x}^{\mu} = (\Lambda^{-1})^{\mu}_{\nu}\mathbf{x}^{\nu} \tag{184}$$

Lembrando nas rotações no espaço.

Rotação $E^3$, ou seja, SO(3):

$$\vec{\mathbf{u}}, \vec{\mathbf{v}} \rightarrow \mathbf{u}' = \mathbf{R}\mathbf{u} \tag{185}$$

$$\vec{\mathbf{u}}, \vec{\mathbf{v}} \rightarrow \mathbf{v}' = \mathbf{R}\mathbf{v} \tag{186}$$

$$\vec{\mathbf{u}} \cdot \vec{\mathbf{v}} = \mathbf{u^t}\mathbf{v} \rightarrow \mathbf{u'^t}\mathbf{v}' = \mathbf{u}\mathbf{R}^t\mathbf{R}\mathbf{v} = \mathbf{u}\mathbf{v} \tag{187}$$

Podemos observar que as normas são mantidas e o produto escalar é constante. Vemos que as Transformações de Lorentz:

$$\mathbf{x_1} \cdot \mathbf{x_2} = \mathbf{x_1^t}\eta\mathbf{x_2} = \eta_{\mu\nu}\mathbf{x_1^{\mu}}\mathbf{x_2^{\nu}} \tag{188}$$

Com a T.L.:

$$\mathbf{x_1'} \cdot \mathbf{x_2'} = \mathbf{x'^t_1}\eta\mathbf{x_2'} = \mathbf{x_1^t}\Lambda^t\eta\Lambda\mathbf{x_2} = \mathbf{x_1^t}\eta\mathbf{x_2} = \mathbf{x_1} \cdot \mathbf{x_2} \tag{189}$$

Onde $\Lambda^t \eta \Lambda = \eta$.

A condição da ortogonalidade no espaço de Minkowski:

$$\Lambda^t \eta \Lambda = \eta \tag{190}$$

e a condição de especialidade será $det\Lambda = +1$, determinam que uma matriz $\Lambda \equiv T.L \in SO(1,3)$.

Na forma covariante:

$$\mathbf{x}'^{\mu} = \Lambda^{\mu}_{\nu}\mathbf{x}^{\nu} \tag{191}$$

Onde:

$$\mathbf{x}_{\mu} = \eta_{\mu\nu}\mathbf{x}^{\nu} \tag{192}$$

que é igual a seguinte notação concisa:

$$\mathbf{x}_{\cdot} = \eta \mathbf{x}^{\cdot} \tag{193}$$

e

$$(\Lambda^t)^{\alpha}_{\mu}\eta_{\alpha\beta}\Lambda^{\beta}_{\nu} = \eta_{\mu\nu} \tag{194}$$

Agora, queremos encontrar a forma de $\mathbf{M}$, tal que:

$$\mathbf{x}'_{..} = \mathbf{M}\mathbf{x}_{.} \tag{195}$$

Onde $\mathbf{x}_{.} = \eta_{..}\mathbf{x}^{.}$. Assim:

$$\mathbf{x}'_{.} = \eta \mathbf{x}^{.'} = \eta \Lambda \mathbf{x}^{.} = \Lambda^{-1t}\mathbf{x}^{.} = \Lambda^{-1t}\mathbf{x}_{.} \tag{196}$$

Chegamos a $\mathbf{M} = \Lambda^{-1t}$. E daí:

$$\mathbf{x}^{'}_{\mu} = (\Lambda^{-1t})^{\nu}_{\mu}\mathbf{x}_{\nu} \tag{197}$$

## 7.1 Operadores diferenciais no espaço de Minkowski

Como fica $\frac{\partial}{\partial_t}$ e $\vec{\nabla}$ em $M^{1,3}$?
Temos:

$$\frac{\partial}{\partial x^0} = \frac{\partial}{\partial x_0} = \frac{1}{c}\partial_t \tag{198}$$

e

$$\vec{\nabla} \equiv (\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}) = (\frac{\partial}{\partial x^1}, \frac{\partial}{\partial x^2}, \frac{\partial}{\partial x^3}) \tag{199}$$

Isto é $\frac{\partial}{\partial x^\mu}$ ou $\frac{\partial}{\partial x_\mu} = (\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial_t}; -\frac{\partial}{\partial x}; -\frac{\partial}{\partial y}; -\frac{\partial}{\partial z})$

Aplicando a Transformação de Lorentz:

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu}\underline{\Lambda}\frac{\partial}{\partial x'^\mu} = \frac{\partial}{\partial x^\nu}\frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu} \rightarrow \frac{\partial}{\partial x'^\mu} = (\Lambda^{-1t})^\nu_\mu\frac{\partial}{\partial x^\nu} \tag{200}$$

Pois $\mathbf{x}' = \Lambda\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}'^\mu = \Lambda^\mu_\nu\mathbf{x}^\nu$. Note então que $\frac{\partial}{\partial x'^{\cdot}} = (\Lambda^{-1t})\frac{\partial}{\partial x^{\cdot}}$

Ou seja $\frac{\partial}{\partial x^\mu} \equiv \partial_\mu$.

Trata-se de um objeto covariante, pois transforma-se com $\Lambda$ e não com $\Lambda^{-1t}$.

Definimos:

$$\partial_\mu \equiv \frac{\partial}{\partial x^\mu} = (\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial_t}; \vec{\nabla}) \tag{201}$$

E consequentemente:

$$\frac{\partial}{\partial x_\mu} = (\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial_t}; -\vec{\nabla}) \sim \partial^\mu \tag{202}$$

Pois

$$\frac{\partial}{\partial x_\mu}\underline{\Lambda}\frac{\partial}{\partial x'_\mu} = \frac{\partial}{\partial x_\nu}\frac{\partial x_\nu}{\partial x'_\mu} = (\Lambda^t)^\mu_\nu\frac{\partial}{\partial x_n u} = \Lambda^\mu_\nu\frac{\partial}{\partial x_\nu} \tag{203}$$

é um objeto contravariante por causa da lei de transformação.

Um escalar sob as Transformações de Lorentz é definido como:

$$\zeta(t;\vec{x}) \rightarrow \zeta'(t';\vec{x'}) = \zeta(t;\vec{x}) \tag{204}$$

ou seja, possui uma forma funcional diferente, mas é um mesmo objeto. Note que:

$$\partial\zeta(t;\vec{x})\underline{\Lambda}\partial'_\mu\zeta'(t';\vec{x'}) = (\Lambda^{-1t})^\nu_\mu\partial_\nu\zeta(t;\vec{x}) \tag{205}$$

ou seja, a diferenciação de um escalar comporta-se como um 4-vetor, pela lei de transformação. Assim $\partial_\mu\zeta(x) \equiv \mathbf{V}_\mu(x)$. Onde

$$\mathbf{V}_\mu(x) = (\frac{1}{c}\frac{\partial\zeta}{\partial_t}; \vec{\nabla}\zeta) \tag{206}$$

Observe portanto que a confecção de um vetor demanda a introdução de um parceiro escalar na sua construção.

$$\vec{\mathbf{A}} \rightarrow \mathbf{A}^\mu = (\mathbf{A}^0; \vec{\mathbf{A}}) \tag{207}$$

e

$$\mathbf{A}_\mu = (\mathbf{A}_\mu = (\mathbf{A}_0; -\vec{\mathbf{A}}) \tag{208}$$

A divergênvia:

$$\vec{\nabla}\vec{\mathbf{A}} \rightarrow \partial_\mu \mathbf{A}^\mu = \frac{\partial \mathbf{A}^0}{\partial x^0} + \frac{\partial A^i}{\partial x^i} = \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{A}^0}{\partial_t} + \vec{\nabla}\cdot\vec{\mathbf{A}} \tag{209}$$

Note que:

$$\partial_\mu \mathbf{A}^\mu = \eta_{\mu\alpha}\partial^\alpha \eta^{\mu\beta}\mathbf{A}_\beta = \eta_{\mu\alpha}\eta^{\mu\beta}\partial^\alpha \mathbf{A}_\beta = \delta^\beta_\alpha \partial^\alpha \mathbf{A}_\beta = \partial^\alpha \mathbf{A}_\alpha = \partial^\mu \mathbf{A}_\mu \tag{210}$$

Fazendo a Trasnformação de Lorentz, temos:

$$\partial_\mu \mathbf{A}^\mu \underline{\Lambda} \partial'_\mu \mathbf{A}'^\mu = (\Lambda^{-1t})^\alpha_\mu \partial_\alpha \Lambda^\mu_\beta \mathbf{A}^\beta = (\Lambda^{-1})^\alpha_\mu \Lambda^\mu_\beta \partial_\alpha \mathbf{A}^\beta = \delta^\alpha_\beta \partial_\alpha \mathbf{A}^\beta = \partial^\alpha \mathbf{A}_\alpha \tag{211}$$

ou seja $(\partial_\mu \mathbf{A}^\mu)' = \partial_\mu \mathbf{A}^\mu$, o que nos leva ao fato de que o divergente é um escalar do ponto de vista das transformações de Lorentz. Finalmente, o rotacional:

$$\vec{\nabla}\times\vec{\mathbf{A}} \rightarrow (\vec{\nabla}\times\vec{\mathbf{A}})_x = \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} = \frac{\partial A^3}{\partial x^2} - \frac{\partial A^2}{\partial x^3} = -\frac{\partial A_3}{\partial x^2} + \frac{\partial A_2}{\partial x^3} = -(\partial_2 \mathbf{A}_3 - \partial_3 \mathbf{A}_2) \tag{212}$$

forma objetos $\partial i \mathbf{A}_j - \partial j \mathbf{A}_i$, onde $i, j = 1, 2, 3$, no espaço euclidiano. No entanto, devemos incluir o tempo, uma vez que no espaço de Minkowski, tempo e espaço são "equivalentes", em importÂncia. Deste modo, o rotacional é um objeto de 6 componentes e 4 dimensões. Associamos, então, o ratotacional a um vetor antissimétrico:

$$\mathbf{R}_{\mu\nu} = \partial_\mu \mathbf{A}_\nu - \partial_\nu \mathbf{A}_\mu = -\mathbf{R}_{\nu\mu} \tag{213}$$

cujas componentes são:

$$\mathbf{R}_{0i} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{\mathbf{A}}}{\partial t} - \vec{\nabla}\mathbf{A}^0 \tag{214}$$

Essa relação é igual a:

$$\partial_0 \mathbf{A}_i - \partial_i - \mathbf{A}_0 = -\frac{1}{c}\frac{\partial A^i}{\partial t} - \partial_i \mathbf{A}^0 \tag{215}$$

Temos ainda:

$$\mathbf{R}_{ij} = -\epsilon_{ijk}(\vec{\nabla}\times\vec{\mathbf{A}})_k \tag{216}$$

Essa relação será igual a:

$$\mathbf{R}_{ij} = \partial_i \mathbf{A}_j - \partial_j \mathbf{A}_i = -\partial_i \mathbf{A}^j + \partial_j \mathbf{A}^i = -(\partial_i \mathbf{A}^j - \partial_j \mathbf{A}^i) = -\epsilon_{ijk}(\vec{\nabla}\times\mathbf{A})_k \tag{217}$$

Isto é, o rotacional em $M^{1,3}$ é um tensor de rank 2 antissimétrico (6 componentes). Aplicando a transformação de Lorentz:

$$\mathbf{R'}_{\mu\nu} = \partial'_{\mu}\mathbf{A'}_{\nu} - \partial'_{\nu}\mathbf{A'}_{\mu} = (\Lambda^{-1t})^{\alpha}_{\mu}(\Lambda^{-1t})^{\beta}_{\nu}\partial_{\alpha}\mathbf{A}_{\beta} - (\Lambda^{-1t})^{\beta}_{\nu}(\Lambda^{-1t})^{\beta}_{\mu}\partial_{\alpha}\mathbf{A}_{\beta} = \tag{218}$$

Continuando....

$$(\Lambda^{-1t})^{\alpha}_{\mu}(\Lambda^{-1t})^{\beta}_{\nu}\mathbf{R}_{\alpha\beta} = (\Lambda^{-1t})^{\alpha}_{\mu}\mathbf{R}_{\alpha\beta} = (\Lambda^{-1t})^{\alpha}_{\mu}\mathbf{R}_{\alpha\beta}(\Lambda^{-1})^{\beta}_{\nu} \tag{219}$$

Ou seja, $\mathbf{R'}_{\mu\nu} = (\Lambda^{-1t})^{\alpha}_{\mu}\mathbf{R}_{\alpha\beta}(\Lambda^{-1})^{\beta}_{\nu}$

## 7.2 Recapitulando....

Seja $\forall \mathbf{V}^{\mu} \in M^{1,3}$, temos:

$$\mathbf{V}^{\mu}\underline{\Lambda}\mathbf{V'}^{\mu}(x') = \Lambda^{\mu}_{\nu}\mathbf{V}^{\nu}(x) \tag{220}$$

e

$$\mathbf{V'}_{\mu}(x') = (\Lambda^{-1t})^{\nu}_{\mu}\mathbf{V}_{\nu}(x) \tag{221}$$

Onde

$$\mathbf{V}^{\mu} = (\mathbf{V}^{0}; \mathbf{V}^{i} = -\mathbf{V}_{i} \equiv \vec{\mathbf{V}}) \tag{222}$$

e também

$$\mathbf{V}^{\mu} = (\mathbf{V}_{0} = \mathbf{V}^{0}; \mathbf{V}_{i} = -\vec{\mathbf{V}}) \tag{223}$$

A partir dos vetores, é possível construir novos objetos, tais que:

$$\mathbf{T}_{\mu\nu} = \mathbf{V}_{\mu}\mathbf{W}_{\nu} \tag{224}$$

$$\mathbf{T}^{\nu\mathbf{k}} = \partial_{\mu}\partial^{\nu}\mathbf{V}^{k} \tag{225}$$

Como se transformarão por Lorentz estes novos objetos? Lembrando que $\frac{\partial}{\partial x^{\mu}} \equiv \partial_{\mu}$ e $\partial'_{\mu} = (\Lambda^{-1t})^{\nu}_{\mu}\partial_{\nu}$. Ainda, temos $\frac{\partial}{\partial x_{\mu}} \equiv \partial^{\mu}$ e $\partial'^{\mu} = \Lambda^{\mu}_{\nu}\partial^{\nu}$. Então se $\partial_{\mu}\mathbf{V}^{\nu} \equiv \mathbf{T}^{\nu}_{\mu}$, temos:

$$\partial_{\mu}\mathbf{V}^{\nu}\underline{\Lambda}\partial'\mathbf{V'}^{\nu} = (\Lambda^{-1t})^{\mathbf{k}}_{\mu}\Lambda^{\nu}_{\lambda}\partial_{k}\mathbf{V}^{\lambda} \tag{226}$$

e este novo objeto, que possui a transformação típica de Lorentz, é dito um tensor, ou seja:

$$\mathbf{T}^{k\lambda}_{\mu\nu}\rho\underline{\Lambda}\mathbf{T'}^{k\lambda}_{\mu\nu}\rho = (\Lambda^{-1t})^{\alpha}_{\mu}(\Lambda^{-1t})^{\beta}_{\nu}\Lambda^{k}_{\gamma}\Lambda^{\lambda}_{d}elta(\Lambda^{-1t})^{\epsilon}_{\rho}\mathbf{T}_{\alpha\beta} \tag{227}$$

Note que:

- Invariância: Princípio de Simetria $\phi(x) \to \phi'(x') = \phi$
- Tensores garantem a covariância de uma dada equação ou relação

Isto é, uma equação é covariante quando ela pode ser escrita na forma de tensores que pertencen a um dado grupo de transformações exclusivamente. A equação de Schrodinger, por exemplo, não é uma relação covariante, pois um dos lados está relacionado a um escalar e o outro, a um vetor de Lorentz.

$$-\frac{\hbar}{2m}\nabla^2\psi = i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} \tag{228}$$

Em geral, euqções só são covariantes se possuirem a mesma potência de derivadas temporais e espaciais (já que tempo e espaço em Minkowski possuem a mesma importância). Por exemplo, seja:

$$\partial_\mu\zeta = \mathbf{A}^\nu\mathbf{A}_\nu\mathbf{W}_\mu \tag{229}$$

Transformando, por partes, teremos:

$$\zeta'(x') = \zeta(x) \tag{230}$$

$$\mathbf{W'}_\mu(x') = (\Lambda^{-1t})^\nu_\mu\mathbf{W}_\nu(x) \tag{231}$$

Daí:

$$\partial'_\mu\zeta' = \mathbf{A'}^\nu\mathbf{A'}_\nu\mathbf{W'}_\mu \tag{232}$$

Então, teremos:

$$(\Lambda^{-1t})^\alpha_\mu\partial_\alpha\zeta = \Lambda^\nu_{\alpha\mathbf{k}}\mathbf{A}^k(\Lambda^{-1t})^\lambda_\nu\mathbf{A}_\lambda(\Lambda^{-1t})^\beta_\mu\mathbf{W}_\beta = .... \tag{233}$$

Continuando.....

$$(\Lambda^{-1t})^{\alpha\mathbf{k}}_\mu(\mathbf{A}^\nu\mathbf{A}_\nu)\mathbf{W}_\alpha(\Lambda^{-1t})^\alpha_\mu(\partial_\alpha\zeta - \mathbf{A}^\nu\mathbf{A}_\nu\mathbf{W}_\alpha) = 0 \tag{234}$$

A condição de Gauge de Lorentz:

$$\frac{1}{\mathbf{c^2}}\frac{\partial\phi}{\partial t} + \vec{\nabla}\cdot\vec{\mathbf{A}} = 0 \tag{235}$$

pode ser escrita na forma covariante definindo o 4-vetor:

$$\mathbf{A}^\mu \equiv (\frac{1}{c}\phi; \vec{\mathbf{A}}) \tag{236}$$

$$\partial_\mu \equiv (\frac{1}{c}\partial_t; \vec{\nabla}) \tag{237}$$

E assim:

$$\partial_\mu \mathbf{A}^\mu = 0 \tag{238}$$

Já o gauge de radiação (ou gauge de Coulomb) não é covariante, pois:

$$\phi = 0 = \mathbf{A^0} \tag{239}$$

$$\vec{\nabla} \cdot mat\vec{h}bfA = 0 \tag{240}$$

mas por Transformações de Lorentz:

$$\mathbf{A'^0} = \delta(\mathbf{A^0} - \beta\mathbf{A_x})\mathbf{A'_x} = \delta(\mathbf{A_x} - \beta\mathbf{A^0})\mathbf{A'_y} = \mathbf{A_y}\mathbf{A'_z} = \mathbf{A_z} \tag{241}$$

Sendo $\mathbf{A'^0} \neq 0$. Ou seja, a transformação de Lorentz ressuscita uma componente de $\mathbf{A}^\mu$ que no antigo referencial era nula. Isso não pode, pois para que uma relação seja covariante, se uma grandeza é nula , em um referencial, ela deve ser nula em qualquer referencial.

## 7.3 Invariância relativística no Grupo de Lorentz SO(1,3)

SO (3): $\Lambda$ que possui 1 componente e $\mathbf{s} = 0$ SU (2): $\vec{\mathbf{A}}$ que possui 3 componentes e $\mathbf{s} = 1$ Da Mecânica quântica $\mathbf{T_{ij}} = -\mathbf{T_{ji}}$ que possui 3 componentes e $\mathbf{s} = 1$ que possui dualidade $\mathbf{T_{ij}} = \epsilon_{ijk}\mathbf{V_k}$. E ainda $\mathbf{G_{ij}}$ que possui $\mathbf{s} = 0$ e 6 componentes. Analogamente:

$$\mathbf{A}^\mu : \mathbf{A^0}, \mathbf{A^i} \equiv \vec{\mathbf{A}} \tag{242}$$

Onde $\mathbf{A^0} = \phi; \mathbf{s} = 0$. E $\mathbf{A}^\mu \ni 0$ e $\mathbf{A}^\mu \ni 1$. Uma matriz $\mathbf{M}$ pode ser decomposta em uma parte simétrica e uma anti-simétrica:

$$\mathbf{M} = \frac{\mathbf{M} + \mathbf{M^t}}{2} + \frac{\mathbf{M} - \mathbf{M^t}}{2} \tag{243}$$

Onde $\mathbf{S} : \mathbf{S^t} = \mathbf{S}$ e $\mathbf{A} : \mathbf{A^t} = -\mathbf{A}$. Assim, uma matriz anti-simética: $\mathbf{H}_{\mu\nu} = -\mathbf{H}_{\nu\mu}$. Temos que $\mathbf{H_{00}} = 0$ e $\mathbf{H_{ii}} = 0$, lembrando que não há soma sobre i. E ainda $\mathbf{H}_{\mu\nu} : \mathbf{H_{0i}} \sim \vec{\mathbf{H}}$ Onde $\mathbf{H_{ij}} = -\mathbf{H_{ji}} = \epsilon_{ijk}\mathbf{h_k}$. Daí $\mathbf{H}_{\mu\nu} = -\mathbf{H}_{\nu\mu} \ni \vec{\mathbf{H}} \equiv \mathbf{H_{0i}}$ e $\mathbf{h} \equiv \mathbf{H_{ij}}$. Temos que no primeiro $\mathbf{s} = 1 \equiv \vec{\mathbf{H}}$ e no segundo, $\mathbf{s} = 1 \equiv \vec{\mathbf{h}}$. Agora, uma matriz simétrica: $\mathbf{H}_{\mu\nu} = \mathbf{H}_{\nu\mu}$. Atenção em $\mathbf{H_{00}}$ possui $\mathbf{s} = 0$, não possuindo nada espacial, e é genuíno escalar. Temos ainda $\mathbf{H_{0i}} = \mathbf{H_{i0}}$, possuindo $\mathbf{s} = 1$ e por último, $\mathbf{H_{ij}} = \mathbf{H_{ji}}$, possuindo $\mathbf{s} = 2$ e $\mathbf{s} = 0$. Mas:

$$\mathbf{H_{ij}} = \widetilde{\mathbf{H}}_{ij} + \frac{1}{3}\delta_{ij}(trH) \tag{244}$$

Onde $tr\widetilde{H} = 0$. Uma matriz de traço nulo e simétrica possui 5 componentes (s=2). Além disso, o traço é uma invariante sob-rotações (s=0). Assim, uma matriz simétrica possui 5 graus de excitação, sendo 1 com spin 2, 1 com spin 1 e 2 com spin zero.

### 7.4 Grupo de Lorentz

Como sempre $\mathbf{x}^\mu \equiv (\mathbf{x^0} = ct; \mathbf{x})$. Então:

$$\mathbf{x^2} = \mathbf{xx} = \eta_{\mu\nu}\mathbf{x}^\mu\mathbf{x}^\nu = \eta^{\mu\nu}\mathbf{x}_\mu\mathbf{x}_\nu = \mathbf{x}_\mu\mathbf{x}^\mu = \mathbf{x}^\mu\mathbf{x}_\mu \tag{245}$$

Aplicando a Transformação de Lorentz:

$$\mathbf{x}^\mu \longmapsto \mathbf{x}'^\mu = \Lambda^\mu_\nu\mathbf{x}^\nu\mathbf{x'^2} = \mathbf{x^2}\mathbf{x}'\mathbf{x}' = \mathbf{x'^t}\eta\mathbf{x}' \tag{246}$$

Daí $\Lambda^t\eta\Lambda = \eta$ e $det\Lambda = +1$. Se $\Lambda_1^t\eta\Lambda_1 = \eta$ e $\Lambda_2^t\eta\Lambda_2 = \eta$ e $det\Lambda_1 = +1$ e $det\Lambda_2 = +1$, então:

$$\Lambda_3 = \Lambda_1 \cdot \Lambda_2 \tag{247}$$

É tal que $\Lambda_3^t\eta\Lambda_3 = \eta$ e $det\Lambda_3 = +1$.

Além disto $\mathbf{I} \in (conj.)$ e $\Lambda^-1 \in (conj.)$.

Portanto, $\Lambda \in SO_0(1,3)$.

E ainda:

$$(\Lambda^t\eta\Lambda)_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}(\Lambda^t)^\beta_\mu\eta_{\alpha\beta}\Lambda^\beta_\nu = \eta_{\mu\nu} = \tag{248}$$

Continuando....

$$(\Lambda^t)^0_0\eta_{00}\Lambda^0_0 - (\Lambda^t)^i_0\delta_{ij}\Lambda^j_0 = (\Lambda^0_0)^2 - (\Lambda^i_0)^2 = +1 \tag{249}$$

Assim:

$$\Lambda^0_0 = +\sqrt{1 + (\Lambda^i_0)^2} \tag{250}$$

O termo acima é chamado de ortócrono.
Diz o Princípio da Simetria que $det\Lambda = +1$ e que:

$$\Lambda^{-1}\eta\Lambda = \eta \tag{251}$$

Temos aqui, o grupo SO (1,3). Uma transformação:

$$\mathbf{e^\Omega} = (\mathbf{I} + \frac{\Omega}{\mathbf{N}})^\mathbf{N} \tag{252}$$

Lembrando que $\mathbf{N} \mapsto \infty$. Assim:

$$\mathbf{x}'^\mu = \Lambda^\mu_\nu\mathbf{x}^\nu(\delta^\mu_\nu + \Omega^\mu_\nu)\mathbf{x}^\nu + 0(\Omega^2) \tag{253}$$

Trata-se de uma transformação infinitesimal: $\Lambda \sim \mathbf{I} + \Omega$. Onde $\Lambda^t \eta \Lambda = \eta$. Daí que $\Omega^t \eta + \eta \Omega = 0$ o que implica que $\eta \Omega = -\Omega^t \eta$. Seja de modo geral:

$$\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ \alpha & \beta & \xi & \delta \\ \tau & \pi & \eta & \rho \\ \upsilon & \theta & \psi & \zeta \end{pmatrix}$$

Então $\eta \Omega = -\Omega^t \eta$ fica:

$$\Omega = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ -\alpha & -\beta & -\xi & -\delta \\ -\tau & -\pi & -\eta & -\rho \\ -\upsilon & -\theta & -\psi & -\zeta \end{pmatrix}$$

A matriz acima será igual a:

$$\begin{pmatrix} -a & \alpha & \tau & \upsilon \\ -b & \beta & \pi & \theta \\ -c & \xi & \eta & \psi \\ -d & \delta & \rho & \zeta \end{pmatrix}$$

Daí:

$$\begin{pmatrix} 0 & b & c & d \\ b & 0 & \xi & \delta \\ c & -\xi & 0 & \rho \\ d & -\delta & -\rho & 0 \end{pmatrix}$$

Daí os termos b, c e d misturam t com x, y e z (boosts). Enquanto os termos $\xi$, $\delta$ e $\rho$ misturam os eixos espaciais (rotações). Assim teremos $\Lambda \in$ grupo SO (1,3) e $\Lambda = \mathbf{e^{\Omega}}$. Ainda temos $\Omega \in$ Álgebra de Lie do grupo de Lie (SO(1,3)). Além disso, se escrevermos:

$$\Omega = \begin{pmatrix} 0 & a & b & c \\ a & 0 & \alpha & -\beta \\ b & -\alpha & 0 & \xi \\ c & \beta & -\xi & 0 \end{pmatrix}$$

a matriz pode ser escrita em termos de matrizes constantes chamadas de matrizes geradoras. Assim, temos:

$$\Omega = a \begin{pmatrix} 0 & 1 & . & . \\ 1 & 0 & . & . \\ . & . & . & . \\ . & . & . & . \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & . & . & . \\ 1 & . & . & . \\ 0 & . & . & . \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & . & . & . \\ 0 & . & . & . \\ 1 & . & . & . \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} 0 & . & . & . \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ . & . & . & . \end{pmatrix}$$

....

$$+\beta \begin{pmatrix} . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & . & . & . \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \xi \begin{pmatrix} 0 & . & . & . \\ 0 & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & . & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Note que $dim_{\Re}$ SO(1,3) = 6 que é igual ao número de parâmetros que definem a álgebra. Os parâmetros a, b e c e suas correspondentes matrizes geradoras $\Omega_{tx}$; $\Omega_{ty}$ e $\Omega_{tz}$ efinem os boosts encontrados nas transformações de Lorentz ao longo de um único eixo, encontradas em Física 4. Já $\alpha$, $\beta$ e $\xi$ e suas matrizes $\Omega_{xy}$, $\Omega_{zx}$ e $\Omega_{yz}$, respectivamente, correspondem às rotações dno espaço. Note que, nestas matrizes tem exatamente a mesma forma das matrizes de rotação no 3-espaço para $\alpha \sim 0$.

## 7.5 Covariância das Equações de Maxwell

Temos que Covariância $\mapsto$ invariância de forma. Seja, por exemplo, uma relação $\mathbf{A}'^{\mu} = \mathbf{B}'^{\mu}$. Aplicando a transformação de Lorentz, temos:

$$\Lambda^{\mu}_{\nu}\mathbf{A}^{\nu} = \Lambda^{\mu}_{\nu}\mathbf{B}^{\nu} \mapsto \Lambda^{\mu}_{\nu}(\mathbf{A}^{\nu} - \mathbf{B}^{\nu}) = 0 \mapsto \Lambda^{\alpha}_{\mu}\Lambda^{\mu}_{\nu}(\mathbf{A}^{\nu} - \mathbf{B}^{\nu}) = 0 \tag{254}$$

$$\delta^{\alpha}_{\nu}(\mathbf{A}^{\nu} - \mathbf{B}^{\nu}) = 0 \mapsto \mathbf{A}^{\alpha} = \mathbf{B}^{\alpha} \tag{255}$$

Assim temos $\mathbf{A}^{\mu} = \mathbf{B}^{\mu}$. Ou seja, a forma da relação se manteve invariante, ou seja, a relação está escrita de modo covariante. A motivação para escrever as eq's de Maxwell na forma covariante é manter sua forma para qualquer classe de refereciais (do grupo de Lorentz). Vamos trabalhar, inicialmente, o vácuo e com fontes (não confundir vácuo com falta de fontes) no sistema de Heaviside-Lorentz, com c=1 (somem todas as constantes). Além disso, notamos que não é possível escrever as eq's na forma covariante individualmente. Isto se dá pois, covariantemente, deve ser definido um novo campo que possua as informações do campo elétrico e magnético.

Sejam então as eq's de Maxwell:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{\mathbf{E}} = \rho \tag{256}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{\mathbf{E}} + \frac{\partial \vec{\mathbf{B}}}{\partial t} = \vec{0} \tag{257}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{\mathbf{B}} = 0 \tag{258}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{\mathbf{B}} - \frac{\partial \vec{\mathbf{E}}}{\partial t} = \vec{\mathbf{j}} \tag{259}$$

Para compor um objeto que possua as informações dos campos elétricos e magnético devemos encontrar algo que tenha 6 componentes independentes (3 para cada vetor). Este objeto será um tensor antissimétrico de rank-2.

$$\mathbf{F}^{\mu\nu} = -\mathbf{F}^{\nu\mu} \tag{260}$$

Onde $\mathbf{F}^{\mu\nu} = \partial^{\mu}\mathbf{A}^{\nu} - \partial^{\nu}\mathbf{A}^{\mu}$ e $\mathbf{A}^{\mu} = (\phi, \vec{\mathbf{A}})$. Tomando as eq's de Maxwell (257) e (258), temos:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{\mathbf{B}} = 0 \mapsto \vec{\mathbf{B}} = \vec{\nabla} \times \vec{\mathbf{A}} \tag{261}$$

E daí:

$$\vec{\nabla} \times \vec{\mathbf{E}} + \frac{\partial \vec{\mathbf{B}}}{\partial t} = 0 \mapsto \vec{\nabla} \times (\vec{\mathbf{E}} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}) = 0 \mapsto \vec{\mathbf{E}} + \frac{\partial \vec{\mathbf{A}}}{\partial t} = -\vec{\nabla}\phi \tag{262}$$

Assim, chegamos à seguinte relação:

$$\vec{\mathbf{E}} = -\vec{\nabla}\phi - \frac{\partial \vec{\mathbf{A}}}{\partial t} \tag{263}$$

Mas $\mathbf{F^{0i}} = \partial^0 \mathbf{A^i} - \partial^i \mathbf{A^0} = \partial_t \mathbf{A^i} + \partial_i \phi = -\mathbf{E^i}$. E também $\mathbf{F^{ij}} = \partial^i \mathbf{A^j} - \partial^j \mathbf{A^i}$.

Sendo i=1 e j=2, temos:

$$\mathbf{F^{12}} = \partial^1 \mathbf{A^2} - \partial^2 \mathbf{A^1} = -\partial_x \mathbf{A_y} + \partial_y \mathbf{A_x} = -(\vec{\nabla} \times \vec{\mathbf{A}})_z = -\mathbf{B_z} = -\mathbf{B^3} \tag{264}$$

Ou de forma simplificada $\mathbf{F^{ij}} = \epsilon^{ij}_{k} \mathbf{B^k}$. Ou seja $\mathbf{F^{13}} = \epsilon^{13}_{2} \mathbf{B^2} = -\epsilon^{132} \mathbf{B_y} = \mathbf{B_y}$. Assim, o tensor $\mathbf{F}^{\mu\nu}$ tem a forma:

$$\mathbf{F}^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -\mathbf{E_x} & -\mathbf{E_y} & -\mathbf{E_z} \\ \mathbf{E_x} & 0 & -\mathbf{B_z} & \mathbf{B_y} \\ \mathbf{E_y} & \mathbf{B_z} & 0 & -\mathbf{B_x} \\ \mathbf{E_z} & -\mathbf{B_y} & \mathbf{B_x} & 0 \end{pmatrix}$$

Definindo $\mathbf{j}^{\mu} = (\rho, \vec{\mathbf{j}})$ podemos escrever (256), sa seguinte forma:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{\mathbf{E}} = \rho \mapsto \partial_i \mathbf{E^i} = \mathbf{j^0} \mapsto \partial_i(-\mathbf{F^{0i}}) = \mathbf{j^0} \mapsto \partial_i \mathbf{F^{i0}} = \mathbf{j^0} \tag{265}$$

Chegamos em $\partial_{\mu}\mathbf{F}^{\mu\mathbf{0}} = \mathbf{j^0}$, pois $\mathbf{F^{00}} = 0$. Analogamente em (259), tomando somente a componente x, temos:

$$(\vec{\nabla} \times \vec{\mathbf{B}})_x - \partial_t \mathbf{E_x} = \mathbf{j_x} \mapsto (\partial_y \mathbf{B_z} - \partial_z \mathbf{B_y}) + \partial_t \mathbf{F^{01}} = \mathbf{j_x} \tag{266}$$

Continuando....

$$\partial_2(-\mathbf{F^{12}}) - \partial_3\mathbf{F^{13}} + \partial_0\mathbf{F^{01}} = \mathbf{j^1} \mapsto \partial_0\mathbf{F^{01}} + \partial_2\mathbf{F^{21}} + \partial_3\mathbf{F^{31}} = \mathbf{j^1} \tag{267}$$

Isso indica que:

$$\partial_\mu\mathbf{F}^{\mu\mathrm{i}} = \mathbf{j^i} \tag{268}$$

Unindo $\partial_\mu\mathbf{F}^{\mu\mathbf{0}} = \mathbf{j^0}$ e $\partial_\mu\mathbf{F}^{\mu\mathrm{i}} = \mathbf{j^i}$, chegamos a $\partial_\mu\mathbf{F}^{\mu\nu} = \mathbf{j}^\nu$ Daí $\mathbf{F}^{\mu\nu} \mapsto$ Eletromagnetic Field Tensor. Partindo agora para as equações geométricas:

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{\mathbf{B}} = 0 \tag{269}$$

e

$$\vec{\nabla}\times\vec{\mathbf{E}} + \frac{\partial\vec{\mathbf{B}}}{\partial t} = \vec{0} \tag{270}$$

Isso leva a $\mathbf{F}_{\mu\nu,\lambda} + \mathbf{F}_{\lambda\mu,\nu} + \mathbf{F}_{\nu\lambda,\mu} = 0$ ou $\mathbf{F}_{[\mu\nu,\lambda]} = 0$.

## 7.6 Solução da Equação de onda em forma covariante e Função de Green Invariante

Da equação de Maxwell

$$\partial_\mu\mathbf{F}^{\mu\nu} = \mathbf{j}^\nu \tag{271}$$

temos:

$$\partial_\mu(\partial^\mu\mathbf{A}^\nu - \partial^\nu\mathbf{A}^\mu) = \mathbf{j}^\nu \mapsto \Box\mathbf{A}^\nu - \partial_\mu\partial^\nu\mathbf{A}^\mu = \mathbf{j}^\nu \tag{272}$$

Lembrando que as Transformações de Gauge $\mathbf{A}^\mu \mapsto \mathbf{A}'^\mu = \mathbf{A}^\mu - \partial^\mu\Lambda$ e que no Gauge de Lorentz teremos $\partial_\mu\mathbf{A}^\mu = 0$. Reescreveremos a (272):

$$\Box\mathbf{A}^\nu = \mathbf{j}^\nu \tag{273}$$

A equação (273) é linear inomogênea. A solução para ela é a solução geral de $\Box\mathbf{A}^\nu = 0$ somada a uma solução particular de $\Box\mathbf{A}^\nu = \mathbf{j}^\nu$. Uma solução particular:

$$\Box\mathbf{G}(\mathbf{x},\mathbf{x}') = \delta^4(\mathbf{x}-\mathbf{x}') \tag{274}$$

E daí:

$$\Box\mathbf{G}(\mathbf{x}-\mathbf{x}) = \delta^4(\mathbf{x}-\mathbf{x}') \tag{275}$$

Assim:

$$\mathbf{A}^\mu(\mathbf{x}) = \int \mathbf{d^4x'G(x-x')j}^\mu(\mathbf{x}') \tag{276}$$

Essa relação será solução para (273), pois:

$$\Box\mathbf{A}^\mu(\mathbf{x}) = \int \mathbf{d^4x'}[\Box\mathbf{G}(\mathbf{x}-\mathbf{x}')]\mathbf{j}^\mu(\mathbf{x}') = \mathbf{j}^\mu(\mathbf{x}) \tag{277}$$

Assim:

$$\Box \mathbf{G}(\mathbf{z}) = \delta^4(\mathbf{z}) \tag{278}$$

Onde:

$$\mathbf{G}(\mathbf{z}) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int \mathbf{d^4 k e^{-ikz}} \widetilde{G}(\mathbf{k}) \tag{279}$$

Logo:

$$\frac{1}{(2\pi)^4} \Box \int \mathbf{d^4 k e^{-ikz}} \widetilde{G}(\mathbf{k}) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int \mathbf{d^4 k e^{-ikz}} - \mathbf{k^2} \widetilde{G}(\mathbf{k}) = 1 \tag{280}$$

Portanto:

$$\widetilde{G}(\mathbf{k}) = -\frac{1}{\mathbf{k^2}} \tag{281}$$

Assim:

$$\mathbf{G}(\mathbf{z}) = -\frac{1}{(2\pi)^4} \int \mathbf{d^4 k} \frac{\mathbf{e^{-ikz}}}{\mathbf{k^2}} \tag{282}$$

Mas a relação (282) é uma integral singular, ou seja, ambígua, dependendo a forma de como resolvermos contornar os pólos. Assim, especificando-se a maneira de contornar os pólos e, desta forma, definindo-se um problema físico, torna-se possível resolvê-la. Lembrete: A causalidade diz que a causa precede o efeito. Neste caso, devemos contornar o problema de modo que $(\mathbf{z_0} = \mathbf{t} - \mathbf{t'})$. Temos assim, duas condições:

$$\mathbf{t} < \mathbf{t'} \mapsto \mathbf{G}(\mathbf{z}) = 0 \tag{283}$$

e

$$\mathbf{t} > \mathbf{t'} \mapsto \mathbf{G}(\mathbf{z}) \neq 0 \tag{284}$$

Onde reescrevemos:

$$\mathbf{G}(\mathbf{z}) = -\frac{1}{(2\pi)^4} \int \mathbf{d^3 \vec{k} e^{i\vec{k}\vec{z}}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathbf{e^{-ik_0 z_0}}}{\mathbf{k^2}} \mathbf{dk_0} \tag{285}$$

Onde $\mathbf{k^2} = \mathbf{k_0^2} - \mathbf{\vec{k}_0^2}$.

Vamos tentar resolver a integral temporal, escolhendo um caminho no plano complexo. Assim, no expoente $-\mathbf{ik_0 z_0} = -\mathbf{ik_0}(\mathbf{t} - \mathbf{t'})$. Temos $\mathbf{t} < \mathbf{t'}$ e $(\mathbf{t} - \mathbf{t'} < 0)$. Aqui $-\mathbf{i}(\pm\mathbf{i}\infty) \cdot (-) = -\infty \mapsto \mathbf{e}^{-\infty} = +\infty$. Aqui, escolhemos um caminho, tal que quando o contorno explode para $\pm\mathbf{i}\infty$, a integral seja finita, no caso de $+\mathbf{i}\infty$.

## 7.7 Retomando a discussão sobre o grupo de Lorentz (SO(1,3))

A transformação, em SO(1,3), é dada por:

$$\mathbf{x}^{\mu} \mapsto \mathbf{x}'^{\mu} = \Lambda^{\mu}_{\nu}\mathbf{x}^{\nu} \mapsto \mathbf{x}' = \Lambda\mathbf{x} \tag{286}$$

Queremos manter a invariância de $\mathbf{x^2}$:

$$\mathbf{x'^2} = \mathbf{x'^t}\eta\mathbf{x}' = \mathbf{x'^t}\Lambda^t\eta\Lambda\mathbf{x} \mapsto \mathbf{x^2} = \mathbf{x^t}\eta\mathbf{x} \tag{287}$$

Então $\Lambda \in$ SO(1,3), e assim, $\Lambda^t\eta\Lambda = \eta$ será a ortogonalidade e implica em $det\Lambda = \pm 1$. Impõe-se $det\Lambda = +1$.

Transformações infinitesimais:

$$\mathbf{x}'^{\mu} = \mathbf{x}^{\mu} + \delta\mathbf{x}^{\mu}\delta\mathbf{x}^{\mu} = \Omega^{\mu}_{\nu}\mathbf{x}^{\nu} \tag{288}$$

Daí que $\mathbf{x}' = (\mathbf{I} + \Omega)\mathbf{x} + 0(\Omega^2)$. Ou seja, $\mathbf{x}' = \mathbf{e^{\Omega}}\mathbf{x} = \Lambda\mathbf{x} \mapsto \Lambda = \mathbf{e^{\Omega}}$. Esta é uma relação mais geral associada a grupos de Lie, onde temos $\mathbf{g} = \mathbf{e^{w}}$, na qual $\mathbf{g}$ é o grupo e $\mathbf{w}$ será a álgebra. A relação de ortogonalidade dos elementos de grupo de Lie pode ser escrita em termos de álgebra. Assim, teremos $\Lambda^t\eta\Lambda \mapsto \Omega^t\eta = \eta\Omega$ que é a Álgebra de Lie do Grupo de Lorentz. Lembrando que:

$$\Lambda = \mathbf{e^{\Omega}} = \sum_{\mathbf{n=0}}^{\infty} \frac{\Omega^{\mathbf{n}}}{\mathbf{n}!} \tag{289}$$

Viu-se que:

$$\Omega = \begin{pmatrix} 0 & a & b & c \\ a & 0 & \alpha & -\beta \\ b & -\alpha & 0 & \xi \\ c & \beta & -\xi & 0 \end{pmatrix}$$

Temos que $\Omega \in$ SO (1,3).

Intermezzo: $\mathbf{E^3}$ - Rotações no espaço e $\mathbf{v}' = \mathbf{R}\mathbf{v}$, mantendo o módulo invariante:

$$\mathbf{v}' \cdot \mathbf{v}' = \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} \mapsto \mathbf{R^t}\mathbf{R} = \mathbf{I} \tag{290}$$

Temos que o $det\mathbf{R} = +1$. Pertencem a SO(3). A álgebra $\mathbf{R} = \mathbf{e^{\Omega}}$ e $\mathbf{w} \in$ SO(3). Isso implica que $\mathbf{w^t} = -\mathbf{w}$, ou seja, a álgebra do grupo de rotações no espaço está relacionada à álgebra das matrizes antissimétricas. Assim:

$$\mathbf{w} = \begin{pmatrix} 0 & \alpha & -\beta \\ -\alpha & 0 & \xi \\ \beta & -\xi & 0 \end{pmatrix}$$

Este é o setor espacial da Transformação de Lorentz. A matriz $\Omega \in$ SO(1,3) pode ser escrita como uma combinação linear de 6 matrizes constantes, a que nos referimos como geradores e, portanto, dim SO(1,3)=6.

$$\Omega = a\begin{pmatrix} 0 & 1 & . & . \\ 1 & 0 & . & . \\ . & . & . & . \\ . & . & . & . \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & . & . & . \\ 1 & . & . & . \\ 0 & . & . & . \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & . & . & . \\ 0 & . & . & . \\ 1 & . & . & . \end{pmatrix} + \alpha\begin{pmatrix} 0 & . & . & . \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ . & . & . & . \end{pmatrix}$$

....

$$+\beta\begin{pmatrix} . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & . & . & . \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \xi\begin{pmatrix} 0 & . & . & . \\ 0 & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & . & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Seja a transformação infinitesimal $\delta\mathbf{x} = \Omega\mathbf{x}$. Considere o caso particular em que $\mathbf{a} \neq 0$ e que $\mathbf{b} = \mathbf{c} = \alpha = \beta = \xi = 0$. Nesta situação note que a transformação altera somente as coordenadas $\mathbf{t}$ e $\mathbf{x}$, mantendo $\mathbf{y}$ e $\mathbf{z}$ invariantes. Assim, identificaremos $\mathbf{w} \equiv \mathbf{w_{01}}$. Sucessivamente, teremos:

$$b \equiv \mathbf{w_{02}}, c \equiv \mathbf{w_{03}}, \alpha \equiv \mathbf{w_{12}}, \beta \equiv \mathbf{w_{31}}, \xi \equiv \mathbf{w_{23}} \tag{291}$$

Daí, poderemos escrever de forma mais compacta:

$$\Omega = \mathbf{w_{0i}} \sum_{0i} \mathbf{w_{ij}} \sum_{ij} \tag{292}$$

Ou então:

$$\Omega = \frac{1}{2}\mathbf{w}^{\mu\nu} \sum_{\mu\nu} \tag{293}$$

Onde $\mathbf{w}^{\mu\nu} = -\mathbf{w}^{\nu\mu}$ e $\sum_{\mu\nu} = -\sum_{\nu\mu}$. Assim, a transformação infinitesimal:

$$\delta\mathbf{x}^{\mathbf{k}} = \Omega^{\mathbf{k}}_{\lambda}\mathbf{x}^{\lambda} \mapsto \delta\mathbf{x}^{\mathbf{k}} = \frac{1}{2}\mathbf{w}^{\mu\nu}(\sum_{\mu\nu})^{\mathbf{k}}_{\lambda}\mathbf{x}^{\lambda} \tag{294}$$

Deste modo:

$$\Lambda = \mathbf{e}^{\frac{1}{2}\mathbf{w}^{\mathbf{k}\lambda}\sum_{\mathbf{k}\lambda}} \tag{295}$$

E assim:

$$\mathbf{x}'^{\mu} = \Lambda^{\mu}_{\nu}\mathbf{x}^{\nu} \tag{296}$$

onde o elemento:

$$\Lambda^{\mu}_{\nu} = (\mathbf{e}^{\frac{1}{2}\mathbf{w}^{\mathbf{k}\lambda}\sum_{\mathbf{k}\lambda}})^{\mu}_{\nu} \tag{297}$$

Note que:

$$(\sum_{k\lambda})^{\mu}_{\nu} = -(\delta^{\mu}_{\mathbf{k}}\eta_{\lambda\nu} - \eta_{\nu\mathbf{k}}\delta^{\mu}_{\lambda}) \tag{298}$$

A expressão (298) é chamada de expressão geral dos elementos de matriz de um gerador qualquer da álgebra de Lie do grupo de Lorentz, no espaço de Minkowski. Pode-se mostrar a partir de (298) que o comutador é dado como uma combinação linear dos próprios geradores:

$$[\sum_{\mu\nu}, \sum_{\rho\sigma}] = \eta_{\mu\sigma}\sum_{\nu\rho} + \eta_{\nu\rho}\sum_{\mu\sigma} - \eta_{\mu\rho}\sum_{\nu\sigma} - \eta_{\nu\sigma}\sum_{\mu\rho} \tag{299}$$

Como obter:

$$[\sum_{\mu\nu}, \sum_{\rho\sigma}] = (\sum_{\mu\nu})^{\mathbf{k}}_{\phi}(\sum_{\rho\sigma})^{\phi}_{\lambda} - (\mu\nu \mapsto \rho\sigma) \tag{300}$$

Concluímos então que uma transformação de Lorentz é escrita como $\Lambda = \mathbf{e}^{\mathbf{\Omega}}$, onde $\Omega = \frac{1}{2}\mathbf{w}^{\mu\nu}\sum_{\mu\nu}$.

Seja, agora, a transformação particular $\mathbf{w^{01}} = \alpha; \mathbf{w^{02}} = \mathbf{w^{03}} = \mathbf{w^{ij}} = 0$.

Daí:

$$\Omega = \frac{1}{2}\mathbf{w^{01}}\sum_{01} + \frac{1}{2}\mathbf{w^{10}}\sum_{10} = \alpha\sum_{01} \tag{301}$$

Onde

$$\sum_{01} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Logo:

$$\Lambda = \mathbf{e}^{\alpha\sum_{\mathbf{01}}} = \mathbf{I} + \alpha\sum_{01} + \frac{\alpha}{2!}(\sum_{01})^2 + .... \tag{302}$$

Mas:

$$(\sum_{01})^{par} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

e

$$(\sum_{01})^{impar} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Assim, reescrevendo (302):

$$\Lambda = \mathbf{I} + (\alpha + \frac{\alpha^3}{3!} + \frac{\alpha^5}{5!} + .....) \times \begin{matrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix} + (\alpha + \frac{\alpha^2}{2!} + \frac{\alpha^4}{4!} + ...) \times \begin{matrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix} \tag{303}$$

Sendo a matriz par

$$(\sum_{01})^{par} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

e a matriz ímpar

$$(\sum_{01})^{impar} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

sendo $(\alpha + \frac{\alpha^3}{3!} + \frac{\alpha^5}{5!} + ...) = senh\alpha$ e $(\alpha + \frac{\alpha^2}{2!} + \frac{\alpha^4}{4!} + ...) = cosh\alpha - 1$. Ou seja:

$$\Lambda = \begin{pmatrix} cosh\alpha & senh\alpha & 0 & 0 \\ senh\alpha & cosh\alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & & 1 \end{pmatrix}$$

Essa matriz é igual a $\Lambda = \mathbf{e}^{\alpha \sum_{\mathbf{01}}}$. Então:

$$\begin{pmatrix} ct' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \Lambda \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Temos $\mathbf{y}' = \mathbf{y}$ e $\mathbf{z}' = \mathbf{z}$. E ainda $ct' = (cosh\alpha)ct + (senh\alpha)x$ e $\mathbf{x}' = (senh\alpha)ct + (cosh\alpha)x$. Reescrevendo $ct' = (cosh\alpha)(ct + (tgh\alpha)x)$, $x' = (cosh\alpha)(x + (tgh\alpha)x)$, $y' = y$ e $z' = z$.

Sendo uma relação física e não apenas matemática, identificamos que $tgh\alpha \equiv -\frac{v}{c} = -\beta$, pois $\mathbf{v} < \mathbf{c}$. Assim:

$$\alpha = arctgh(\frac{-v}{c}) \mapsto \cosh\alpha = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \equiv \xi > 1 \tag{304}$$

e relacionamos, assim, os elementos do grupo de Lorentz com a transformação de Lorentz entre os referenciais com velocidade relativa $\mathbf{v}$.

Os parâmetros relacionados aos boosts varrem de $-\infty$ ao $+\infty$ e, portanto, o grupo de Lorentz é não compacto devido aeste setor. No setor espacial, os parâmetros sÃo genuínos ângulos de rotação e, portanto, são limitados no intervalo $[0, 2\pi]$. O que está ficando claro pelos nossos estudos é que um objeto vetorial, no espaço de Minkowski $\mathbf{A}^\mu(\mathbf{x})$, engloba duas partes que comportam-se diferentemente, ou seja, uma componente temporal $\mathbf{A^0}$, que é um escalar $\phi$ e portanto, possui spin 0 e um objeto de 3 componentes $\vec{\mathbf{A}}$, associado ao spin 1. Lembrando que:

$$\mathbf{F}_{\mu\nu} = \partial_\mu \mathbf{A}_\nu - \partial_\nu \mathbf{A}_\mu \tag{305}$$

e da euqção de Maxwell:

$$\partial_\mu \mathbf{F}^{\mu\nu} = \mathbf{j}^\nu = 0 \tag{306}$$

Segue que:

$$\partial_\mu(\partial^\mu \mathbf{A}^\nu - \partial^\nu \mathbf{A}^\mu) = 0 \mapsto \Box \mathbf{A}^\nu - \partial^\nu \partial_\mu \mathbf{A}^\mu = 0 \tag{307}$$

Chegamos em:

$$(\Box \delta^\nu_\mu - \partial^\nu \partial_\mu)\mathbf{A}^\mu = 0 \tag{308}$$

Mas, os operadores de projeção:

$$\theta^\nu_\mu = \delta^\nu_\mu - \frac{\partial_\mu \partial^\nu}{\Box} \tag{309}$$

e

$$\mathbf{w}^\nu_\mu \equiv \frac{\partial_\mu \partial^\nu}{\Box} \tag{310}$$

e, portanto, a equação (308) ficará assim:

$$\Box \theta^\nu_\mu \mathbf{A}^\mu = 0 \mapsto \theta^\nu_\mu \mathbf{A}^\mu = \mathbf{A^\nu_T} \tag{311}$$

Daí:

$$\Box \mathbf{A^\nu_T} = 0 \mapsto \mathbf{p^2} \widetilde{A}^\nu_T(\mathbf{p}) = 0 \tag{312}$$

que impõe a relação de dispersão $\mathbf{p^2} = 0 \mapsto \mathbf{E} = |\vec{\mathbf{p}}|\mathbf{c}$, onde $m = 0$. Ou seja, note que a equação de Maxwell, por si só seleciona naturalmente a parte com spin 1 e massa de repouso nula. Compondo objetos tensoriais a partir de 4-vetores, obeservamos que só conseguimos descrever partículas de spin inteiro.

## 7.8 Como introduzir uma equação relativística para s=1/2?

Sabemos que:

$$\mathbf{E^2} = \mathbf{\vec{p}c^2} + \mathbf{m^2c^4} \tag{313}$$

Fazendo a relação com os operadores pela relação de correspondência:

$$\mathbf{E^2} \mapsto -\hbar\frac{\partial^2}{\partial \mathbf{t^2}} \tag{314}$$

e

$$\mathbf{\vec{p^2}} \mapsto -\hbar^2\mathbf{c^2}\nabla^2 \tag{315}$$

Segue:

$$\hbar^2\mathbf{c^2}(\frac{1}{\mathbf{c^2}}\frac{\partial^2}{\partial \mathbf{t^2}} - \nabla^2 + \frac{\mathbf{m^2c^2}}{\hbar^2}) = 0 \tag{316}$$

Chegamos a:

$$(\Box + \frac{\mathbf{m^2c^4}}{\hbar^2})\psi(\mathbf{\vec{x}};\mathbf{t}) = 0 \tag{317}$$

Essa equação que, por construção, descreve uma partícula de spin 0 e massa de repouso não nula. Se agora, queremos uma equação que descreva a partícula de spin 1 e massa de repouso nula temos $\mathbf{A}^\mu \ni 0, 1$. Mas:

$$\mathbf{A_T} \equiv \theta\mathbf{A} \mapsto \mathbf{A_T^\mu} = \theta^\mu_\nu\mathbf{A}^\nu \tag{318}$$

Daí:

$$\Box\mathbf{A_T^\mu} = 0 \mapsto \Box\theta^\mu_\nu\mathbf{A_T^\nu} = 0 \mapsto \Box(\delta^\mu_\nu - \frac{\partial^\mu\partial_\nu}{\Box})\mathbf{A}^\nu = 0 \tag{319}$$

E então:

$$\Box\mathbf{A}^\mu - \partial^\mu\partial_\nu\mathbf{A}^\nu = 0 \mapsto \partial_\nu(\partial_\nu\mathbf{A}^\mu - \partial^\mu\mathbf{A}^\nu) = 0 \mapsto \partial_\nu\mathbf{F}^{\nu\mu} = 0 \tag{320}$$

que é a equação de Maxwell, com fóton de spin igual a 1 e massa igual a zero.

Numa terceira relação, queremos agora descrever uma partícula de spin 1 e massa não nula. Assim, teremos:

$$(\Box + \mathbf{m^2c^2})\mathbf{A_T^\mu} = 0 \mapsto \partial_\mu\mathbf{F}^{\mu\nu} + \mathbf{m^2c^2}\mathbf{A_T^\nu} = 0 \tag{321}$$

Temos aqui, Proca!!!!!!!

Mas de (321) decorre:

$$\partial_\mu\mathbf{F}^{\mu\nu} + \mu^2\mathbf{A}^\nu = 0 \tag{322}$$

que implica naturalmente na relação subsidiária $\mathbf{A}_{\mathbf{L}}^{\mu} =$, ou seja, a equação de Maxwell-Proca surge naturalmente da necessidade de descrevermos uma partícula de spin 1 e de massa de repouso não nula de forma relativística. Suponha, agora, que nosso problema é descrever uma partícula relativística de massa igual a 0 e spin $\frac{1}{2}$. A multiplicidade $2s + 1 \mapsto$2componentes. Ou seja, é um objeto de 2 componentes que vai descrever tal partícula. Mas, no espaço de Minkowski, não encontramos tal objeto. Daí, definiremos:

$$\psi \equiv \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix}$$

Onde $\psi_\alpha \in \mathbb{C}$, e onde $\alpha = 1, 2$. Como ele deve obedecer à relação de dispersão:

$$\mathbf{E^2} = \vec{\mathbf{p^2}}\mathbf{c^2} \tag{323}$$

e

$$-\hbar^2 \frac{\partial^2}{\partial \mathbf{t^2}} + \hbar^2 \mathbf{c^2} \nabla^2 = 0 \mapsto \Box \psi_\alpha = 0 \tag{324}$$

Logo, nessa primeita proposta seria $\Box \psi_\alpha = 0$, tendo $\alpha = 1, 2$. que é um problema de Cauchy para $\psi$ e, portanto, precisa de condições iniciais que são: $\psi_1(t = 0; \vec{\mathbf{x}}) = \mathbf{F}(\vec{\mathbf{x}})$, $\psi_1(t = 0; \vec{\mathbf{x}}) = \mathbf{G}(\vec{\mathbf{x}})$, $\psi_2(t = 0; \vec{\mathbf{x}}) = \mathbf{H}(\vec{\mathbf{x}})$ e $\psi_2(t = 0; \vec{\mathbf{x}}) = \mathbf{J}(\vec{\mathbf{x}})$. Elas estão associadas a 8 coordenadas reais (duas para cada número complexo) e, portanto, 4 graus de liberdade físico. Mas como???

Terema de Wigner: Uma partícula relativística de massa igual a 0 e spin $\mathbf{s}$ só pode aparecer com dois estados de polarização que são $+\mathbf{s}$ e $-\mathbf{s}$. Veja que se o campo fosse real, este problema de **overcounting** seria resolvido. Mas isso não é possível, poiso neutrino e o elétron possuem parceiros (antípartículas) e além disso, o número leptônico. Um campo real não descreveria todas as informações que acompanham estas partículas.

Então, como reduzir o número de graus de liberdade de 4 para 2? E por que 2?

Definimos a helicidade:

$$\mathbf{H} = \vec{\mathbf{S}} \cdot \hat{\mathbf{p}} \tag{325}$$

Temos duas condições: $\mathbf{m} \neq 0$, não é invariante de Lorentz e $\mathbf{m} = \mathbf{0}$, quando é invariante de Lorentz. Temos a projeção do spin na direção do momento da partícula. O neutrino é uma partícula tal que ela caminha sempre na mesma direção de seu spin, enquanto o anti-neutrino sempre aparece com o spin no sentido contrário de seu movimento. Isto explica porque 2 graus de liberdade.

Da relação de dispersão:

$$\mathbf{E^2} = |\vec{\mathbf{p^2}}|\mathbf{c^2} \tag{326}$$

como é uma equação de segunda ordem, precisa de 2 condições iniciais, mas se reduzirmos para primeira ordem:

$$\mathbf{E} = |\vec{\mathbf{p}}|\mathbf{c} \tag{327}$$

só é necessária a condição inicial de $\psi(t = 0; \vec{\mathbf{x}})$, pois $\psi$ já é a própria equação. Deste modo, uma equação de primeira ordem:

$$\frac{\partial}{\partial_t} \tag{328}$$

Onde $\psi_1(t = 0; \vec{\mathbf{x}}$ e $\psi_2(t = 0; \vec{\mathbf{x}}$. e, consequentemente, 4 coordenadas reais e, finalmente, 2 graus de liberdade. Como queremos descrever o neutrino, por meio desta nova equacão, além das relações de dispersão, vamos incluir a informação do spin.

$$\vec{\mathbf{S}} \cdot \hat{\mathbf{p}} = \frac{1}{2}\hbar \tag{329}$$

Assim:

$$\vec{\mathbf{S}} \cdot \frac{\vec{\mathbf{p}}}{|\vec{\mathbf{p}}|} = \frac{1}{2}\hbar \mapsto \vec{\mathbf{S}} \cdot \vec{\mathbf{p}} = \frac{1}{2}\hbar|\vec{\mathbf{p}}| = \frac{1}{2}\frac{\hbar}{\mathbf{c}}\mathbf{E} \tag{330}$$

Elevando (330) ao quadrado e lembrando que a partícula de spin 1/2:

$$\vec{\mathbf{S}} = \frac{1}{2}\hbar\vec{\sigma} \tag{331}$$

Onde $\sigma$ é a matriz de Pauli. E também $\sigma_i, \sigma_j = 2\delta_{ij}\mathbf{I}$ e $[\sigma_i, \sigma_j] = 2\mathbf{i}\epsilon_{ijk}\sigma_k$. E assim:

$$\vec{\sigma} \cdot \vec{\mathbf{p}} = \frac{\mathbf{E}}{\mathbf{c}}\mathbf{I} \tag{332}$$

Temos:

$$(\vec{\sigma} \cdot \vec{\mathbf{p}})^2 = \frac{\mathbf{E^2}}{\mathbf{c^2}}\mathbf{I} \tag{333}$$

E daí:

$$\vec{\mathbf{p^2}}\mathbf{I} = \frac{\mathbf{E^2}}{\mathbf{c^2}}\mathbf{I} \tag{334}$$

Lembrando que $\mathbf{I}$ é igual a identidade. A relação de Helicidade reforça o fato de que trata-se de uma partícula de massa de repouso nula. Reescrevendo (332), na forma de operadores:

$$-\mathbf{i}\hbar\vec{\sigma} \cdot \nabla = \frac{1}{\mathbf{c}}\mathbf{i}\hbar\frac{\partial}{\partial_t} \mapsto \mathbf{i}\hbar(\frac{1}{\mathbf{c}}\Lambda\frac{\partial}{\partial_t} + \vec{\sigma} \cdot \nabla)\psi = 0 \tag{335}$$

$\Lambda = \mathbf{I}$

Definindo $\sigma^\mu \equiv (\sigma^0 \equiv \mathbf{I}; \sigma^\mathbf{i} \equiv \vec{\sigma})$. Temos:

$$\mathbf{i}\hbar(\sigma^0 \frac{\partial}{\partial \mathbf{x^0}} + \sigma^i \frac{\partial}{\partial \mathbf{x^i}})\psi = 0 \tag{336}$$

e então $\mathbf{i}\hbar\sigma^\mu\partial_\mu\psi = 0$ que é a equação de Pauli. A equação de Pauli descreve, portanto, uma partícula de massa igual a 0, com spin igual a 1/2 e $\mathbf{H} = \frac{1}{2}\hbar$. Note que foi possível, partindo da helicidade, escrever uma equação covariante e invariante de Lorentz.

No caso de uma antí-partícula (helicidade negativa):

$$\vec{\mathbf{S}} \cdot \vec{\mathbf{p}} = -\frac{1}{2}\hbar\frac{\mathbf{E}}{\mathbf{c}} \tag{337}$$

Chegamos em:

$$\mathbf{i}\hbar(\frac{1}{\mathbf{c}}\Lambda\frac{\partial}{\partial \mathbf{t}} - \vec{\sigma} \cdot \vec{\nabla})\chi = 0 \tag{338}$$

Onde $\Lambda = \mathbf{I}$

Definindo $\overline{\sigma}^\mu \equiv (\overline{\sigma}^0 = \Lambda; \overline{\sigma}^i = -\vec{\sigma})$. Mais uma vez: $\Lambda = \mathbf{I}$

E daí

$$\mathbf{i}\hbar\overline{\sigma}^\mu\partial_\mu\chi = 0 \tag{339}$$

que é a equação de Pauli do anti-neutrino, onde foi definida a nova grandeza: $\overline{\sigma}^\mu \equiv (\Lambda; -\vec{\sigma})$. Importante ressaltar que $\Lambda$=Matriz identidade. Note que, apesar de a equação de Pauli descrever duas componentes complexas, uma delas pode ser escrita em termos de outra. Assim

$$\begin{pmatrix} \mathbf{E} - \mathbf{p_z} & -\mathbf{p_x} + \mathbf{i}\mathbf{p_y} \\ -\mathbf{p_x} - \mathbf{i}\mathbf{p_y} & \mathbf{E} + \mathbf{p_z} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \widetilde{\psi}_1 \\ \widetilde{\psi}_2 \end{pmatrix} = 0$$

E ainda:

$$\widetilde{\psi}_2 = \frac{\mathbf{p_x} + \mathbf{i}\mathbf{p_y}}{\mathbf{E} + \mathbf{p_z}}\widetilde{\psi}_1 \tag{340}$$

Os objetos $\psi$ e $\chi$ são chamados de espinores. Pela helicidade, os espinores que obedecem a equação de Pauli são chamados de left-handed e os espinores $\chi$, que obedecem a equação de Pauli para o anti-neutrino é chamado de right-handed.

Campos relativísticos são funções tensoriais das coordenadas $\mathbf{x}^\mu$ e sujeitas a determinadas equações que devem expressar a(s) componente(s) de spin propagadas e a relação de disperção da qual se extrai informação sobre a(s) massa(s) associada(s). Além disto, vimos que os tensores SO (1,3) trazem spins inteiros $0, 1, 2, .....$ Para spin 0, teremos $\sigma, \mathbf{A}^\mu, \mathbf{h}^{\mu\nu} = \mathbf{h}^{\nu\mu}$. Para spin igual a 1, teremos $\mathbf{A}^\mu, \mathbf{B}^{\mu\nu} = -\mathbf{B}^{\nu\mu}, \mathbf{h}^{\mu\nu} = \mathbf{h}^{\nu\mu}$. E por último, para spin igual a 2, teremos $\mathbf{h}^{\mu\nu} = \mathbf{h}^{\nu\mu}$. Introduzimos spinssemi-inteiros. Assim, $\mathbf{s} = \frac{1}{2}$, com massa igual a 0. Para esse sistema, teremos $\mathbf{H} = +\frac{1}{2}\hbar$ e ainda teremos, $\mathbf{H} = -\frac{1}{2}\hbar$. Para férmions quirais $\mathbf{h}$ e férmions quirais $\mathbf{R}$, respectivamente. Vimos ainda que $\mathbf{i}\hbar\sigma^\mu\partial_\mu\psi = 0$ para left e $\mathbf{i}\hbar\overline{\sigma}^\mu\partial_\mu\chi = 0$ para right. Onde $\sigma^\mu = (\sigma^0 \equiv \Lambda; \sigma^i \equiv \vec{\sigma})$ e $\overline{\sigma}^\mu = (\sigma^0 \equiv \Lambda; \overline{\sigma}^i \equiv -\vec{\sigma})$. De modo que teremos:

$$\sigma^\mu\sigma^\nu + \sigma^\nu\sigma^{-\mu} = 2\eta^{\mu\nu}\Lambda \tag{341}$$

e

$$\overline{\sigma}^\mu\sigma^\nu + \overline{\sigma}^\nu\sigma^\mu = 2\eta^{\mu\nu}\Lambda \tag{342}$$

Lembrando que $\Lambda$ é a matriz identidade. Denominamos:

$$\psi_\alpha(\alpha = 1, 2) \tag{343}$$

e

$$\psi_{\dot\alpha}(\dot\alpha = 1, 2) \tag{344}$$

A relação (343) para left e (344) para right. Esses são os chamados espinores de Weye, que descrevem cada um grau de liberdade físico, uma vez que, pela equação de Pauli, $\psi_2$ pode ser escrito em função de $\psi_1$ e $\chi_2$ pode ser escrito em função de $\chi_1$.

A composição $\psi_\alpha \oplus \mathbf{A}^\mu \equiv \Gamma^\mu_\alpha \ni \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}$. Onde $\Gamma^\mu_\nu$ é o chamado campo de Rarita-Schwinger. Analogamente, para o espinor right, teremos $\chi_{\dot\alpha} \oplus \mathbf{B} \equiv \delta^\mu_{\dot\alpha} \ni \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}$.

E se quisermos introduzir a massa para o spin $\frac{1}{2}$? Note que queremos encontrar uma equação que esteja relacionada a $\mathbf{p^2} = \mathbf{m^2} \mapsto (\Box + \mathbf{m^2}) = 0$ e spin igual a $\frac{1}{2}$. Defina uma matriz 4x4, tal que:

$$\delta^\mu \equiv \begin{pmatrix} 0 & \overline{\sigma}^\mu \\ \sigma^\mu & 0 \end{pmatrix}$$

Onde

$$\delta^0 \equiv \begin{pmatrix} 0 & \Lambda \\ \Lambda & 0 \end{pmatrix}$$

e

$$\delta^i = \begin{pmatrix} 0 & -\vec{\sigma} \\ +\vec{\sigma} & 0 \end{pmatrix}$$

Onde $\Lambda$ é a matriz identidade. Note que $\delta^\mu, \delta^\nu = 2\eta^{\mu\nu}\Lambda_4$ sai naturalmente; é chamada Álgebra de Clifford das matrizes $-\delta$. Ao fazer esta construção, note que as duas equações de Weye se resumem a uma só:

$$\mathbf{i}\hbar\delta^\mu\partial_\mu\psi = 0 \tag{345}$$

onde colocamos os dois (espinores) férmions left e right em um único objeto:

$$\sigma^\mu, \overline{\sigma}^\mu \mapsto \delta^\mu \tag{346}$$

e

$$\psi, \chi \mapsto \psi \equiv \begin{pmatrix} \psi \\ \chi \end{pmatrix}$$

A equação (345) já é a equação de Dirac sem massa. Quadrado de (345):

$$(\mathbf{i}\hbar\delta^\nu\partial_\nu)(\mathbf{i}\hbar\delta^\mu\partial_\mu)\psi = 0 \tag{347}$$

Queremos chegar a $(\Box + \mathbf{m^2}) = 0$. Notamos que $(\delta^\mu\partial_\mu)^2 = \Box \mapsto \delta^\mu\partial_\mu \sim \sqrt{\Box} \mapsto ()\sqrt{\Box + \mathbf{m^2}}$. Se propusermos:

$$(\delta^\mu\partial_\mu + \mathbf{m}\Lambda)^2 = (\delta^\mu\partial_\mu)^2 + 2\mathbf{m}\delta^\mu\partial_\mu + \mathbf{m^2} \tag{348}$$

Não ficou legal !!!!!!!!! E se:

$$(\mathbf{i}\delta^\nu\partial_\nu - \mathbf{m})(\mathbf{i}\delta^\mu\partial_\mu + \mathbf{m}) = -(\delta^\nu\partial_\nu)(\delta^\mu\partial_\mu) + \mathbf{im}\delta^\nu\partial_\nu - \mathbf{im}\delta^\mu\partial_\mu - \mathbf{m^2} = -(\Box + \mathbf{m^2}) \tag{349}$$

Daí,a proposta da equação para descrever a massa do férmion será:

$$(\mathbf{i}\hbar\delta^\mu\partial_\mu + \mathbf{m})\psi = 0 \tag{350}$$

Mas:

$$-\mathbf{p^2} + \frac{\mathbf{m^2}}{\hbar^2} = 0 \mapsto \mathbf{p^2} = \frac{\mathbf{m^2}}{\hbar^2} \tag{351}$$

daí:

$$\frac{\mathbf{E^2}}{\mathbf{c^2}} - \vec{\mathbf{p}} = \frac{\mathbf{m^2}}{\hbar^2} \mapsto \mathbf{E} = \vec{\mathbf{p^2}}\mathbf{c^2} + \frac{\mathbf{m^2}}{\mathbf{c^2}}\hbar^2 \tag{352}$$

então

$$\frac{\mathbf{m^2}}{\mathbf{c^2}}\hbar^2 \equiv \mu^2\mathbf{c^4} \mapsto \mathbf{m} = \mu\hbar\mathbf{c} \tag{353}$$

onde $\mathbf{m}$ é um parâmetro de massa e $\mu$ é, de fato, pela relação entre energia e momento, a massa física da partícula relativística.

A forma padrão da equação de Dirac:

$$\mathbf{i}\hbar\delta^{\mu}\partial_{\mu} - \mathbf{m})\psi = 0 \tag{354}$$

Onde $\delta^{\mu}$ são as chamadas matrizes de Dirac. Note que $(\delta^0)^2 = \Lambda$ e $(\delta^i)^2 = -\Lambda$. Assim $\delta^0\delta^i = -\delta^i\delta^0$ e $\delta^i\delta^j = \delta^j\delta^i$, sendo $i \neq j$.

A forma:

$$\delta^{\mu} = \begin{pmatrix} 0 & \overline{\sigma}^{\mu} \\ \sigma^{\mu} & 0 \end{pmatrix}$$

onde

$$\delta^0 = \begin{pmatrix} 0 & \Lambda \\ \Lambda & 0 \end{pmatrix}$$

Onde $\Lambda$ é a matriz identidade, e

$$\delta^i = \begin{pmatrix} 0 & \vec{\sigma} \\ \vec{\sigma} & 0 \end{pmatrix}$$

é chamada representação de Weye das matrizes de Dirac. Esta representação não é única. Uma outra representação, que é mais usada para cálculos com a equação de Dirac e na QED, é chamada representação de Dirac:

$$\delta^0 = \begin{pmatrix} \Lambda & 0 \\ 0 & -\Lambda \end{pmatrix}$$

e

$$\delta^0 = \begin{pmatrix} 0 & \vec{\sigma} \\ -\vec{\sigma} & 0 \end{pmatrix}$$

Onde $\Lambda$ é a matriz identidade. Note que $\delta^{0+} = \delta^0$ e $\delta^{i+} = -\delta^i$.

Outra representação (representação de Majorana), na qual todas as $\delta' s$ são puramente imaginárias

$$\delta^0 = \begin{pmatrix} \sigma_y & 0 \\ 0 & -\sigma_y \end{pmatrix}$$

$$\delta' = \begin{pmatrix} i\sigma_x & 0 \\ 0 & -i\sigma_x \end{pmatrix}$$

$$\delta^2 = \begin{pmatrix} 0 & i\Lambda \\ i\Lambda & 0 \end{pmatrix}$$

$$\delta^3 = \begin{pmatrix} i\sigma_z & 0 \\ 0 & -i\sigma_z \end{pmatrix}$$

É importante ressaltar que, independente da representação, a Álgebra de Clifford e as propriedades de hermiticidade são válidas e devem ser!!!! Mas afinal de contas, como a termo de massa relaciona as 2 componentes de quiralidade?

Seja a equação de Dirac, com a $\delta$ na representação de Weye:

$$(\mathbf{i}\delta^{\mu}\partial_{\mu} - \mathbf{m})\begin{pmatrix} \psi_L \\ \chi_R \end{pmatrix} = 0$$

Daí:

$$\mathbf{i}\overline{\sigma}^{\mu}\partial_{\mu}\chi_R - \mathbf{m}\psi_L = 0 \tag{355}$$

e

$$\mathbf{i}\sigma^{\mu}\partial_{\mu}\psi_L - \mathbf{m}\chi_R = 0 \tag{356}$$

ou seja, o papel de massa é acoplar as duas quiralidades. Ou seja, se a massa é igual a 0, $\chi_R$ e $\psi_L$ aparecem desacoplados. Caso m$\neq$0, observe:

$$\chi_R = \frac{1}{\mathbf{m}}\mathbf{i}\sigma^{\mu}\partial_{\mu}\psi_L \tag{357}$$

e assim

$$\mathbf{i}\overline{\sigma}^{\mu}\partial_{\mu}\frac{\mathbf{i}}{\mathbf{m}}\sigma^{\nu}\partial_{\nu}\psi_L - \mathbf{m}\psi_L = 0 \tag{358}$$

Continuando....

$$(\overline{\sigma}^{\mu}\sigma^{\nu}\partial_{\mu}\partial_{\nu} + \mathbf{m^2})\psi_L = 0 \mapsto (\Box + \mathbf{m^2})\psi_L = 0 \tag{359}$$

e do mesmo modo:

$$\psi_L = \frac{1}{\mathbf{m}}\mathbf{i}\overline{\sigma}^{\mu}\partial_{\mu}\chi_R \mapsto (\Box + \mathbf{m^2})\chi_R = 0 \tag{360}$$

Isto é, pela equação de Dirac, $\chi_R$ é fixado por $\psi_L$. Cada um deles descreve uma partícula massiva, mas não é possível desacoplá-las!! A estrutura do férmion de Dirac, na representação de Weye, é dada por um único objeto que contém estas duas informações:

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_L \\ \chi_R \end{pmatrix}$$

Agora, quantos e quais são os graus de liberdade descritos na equação de Dirac?

Temos:

$$(\mathbf{i}\delta^{\mu}\partial_{\mu} - \mathbf{m})\psi = 0 \tag{361}$$

No espaço de $\mathbf{p}^{\mu}$:

$$\psi(\mathbf{x}) = \int \frac{\mathbf{d^4}}{(2\pi)^4}\widetilde{\psi}(\mathbf{p})\mathbf{e}^{-\mathbf{ip}\cdot\mathbf{x}} \tag{362}$$

onde $\mathbf{x}^{\mu} = (\frac{\omega}{\mathbf{c}}; \vec{\mathbf{k}})$. temos

$$(\delta^{\mu}\mathbf{p}_{\mu} - \mathbf{m})\widetilde{\psi}(\mathbf{p}) = 0 \tag{363}$$

Ainda

$$\delta^0\mathbf{E} + \delta^i\mathbf{p_i} - \mathbf{m}\Lambda = \delta^0\mathbf{E} - \delta^i\mathbf{p^i} - \mathbf{m}\Lambda = \delta^0\mathbf{E} - \delta^i\vec{\mathbf{p}} - \mathbf{m}\Lambda \tag{364}$$

Lembrando que $\Lambda$ é a matriz identidade. Assim, teremos:

$$\begin{pmatrix} (\mathbf{E}-\mathbf{m})\Lambda & -\vec{\sigma}\cdot\vec{\mathbf{p}} \\ \vec{\sigma}\cdot\vec{\mathbf{p}} & -(\mathbf{E}+\mathbf{m})\Lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \widetilde{\psi} \\ \widetilde{\chi} \end{pmatrix} = 0$$

Temos ainda $\vec{\sigma}\cdot\vec{\mathbf{p}}\widetilde{\chi} = (\mathbf{E}-\mathbf{m})\widetilde{\psi}$ e $\vec{\sigma}\cdot\vec{\mathbf{p}}\widetilde{\psi} = (\mathbf{E}+\mathbf{m})\widetilde{\chi}$. Isso implica que:

$$\widetilde{\chi} = \frac{\vec{\sigma\cdot}\vec{\mathbf{p}}}{\mathbf{E}+\mathbf{m}}\widetilde{\psi} \tag{365}$$

No regime intensamente relativístico:

$$\frac{|\vec{\mathbf{p}}|}{\mathbf{c}} >> \mathbf{m} \tag{366}$$

Assim

$$\mathbf{E} = \sqrt{\vec{\mathbf{p}}^2\mathbf{c^2} + \mathbf{m^2c^4}} \tag{367}$$

No limite ultra-relativístico:

$$\widetilde{\chi}\ 0(\frac{\mathbf{v}}{\mathbf{c}})\widetilde{\psi} \tag{368}$$

onde $\mathbf{E}+\mathbf{m}\ \mathbf{E}$ e $\frac{\vec{\mathbf{p}}}{\mathbf{E}} = \frac{\vec{\mathbf{v}}}{\mathbf{c}}$. e no limite não-relativístico $\widetilde{\chi} \mapsto 0$.

## 7.9 Rodando um espinor

Vimos que 6 geradores da SO(1,3):

$$(\sum_{\mu\nu})^{\mathbf{k}}_{\lambda} = \delta^{\mathbf{k}}_{\lambda}\eta_{\nu}\lambda - \eta_{\mu}\lambda\delta^{\mathbf{k}}_{\nu} \tag{369}$$

e a Álgebra de Lie

$$[\sum_{\mu\nu},\sum_{\rho\sigma}] = \eta_{\mu\sigma}\sum_{\nu\rho} + \eta_{\nu\rho}\sum_{\mu\sigma} - \eta_{\mu\rho}\sum_{\nu\sigma} - \eta_{\nu\sigma}\sum_{\mu\rho} \tag{370}$$

Mas tudo isso ocorre no $\mathbf{M^{1,3}}$. Os férmions, descritos pelos espinores, são definidos no espaço 4-dimensional das matrizes $-\delta$. Sabemos que $\psi_\alpha \in \mathbb{C}; \alpha = 1, 2, 3, 4.$ tal que

$$(\mathbf{i}\delta^\mu \partial_\mu - \mathbf{m})\psi = 0 \tag{371}$$

A conexão entre o espaço tempo-tempo de base, o espaço de Minkowski, e este espaço dos férmions é feita pela Álgebra de Clifford:

$$\delta^\mu, \delta^\nu = 2\eta^{\mu\nu}\Lambda \tag{372}$$

onde $\Lambda$ é a matriz identidade. Assim:

$$(\delta^\mu)_{\alpha\beta}(\delta^\nu)_{\beta\delta} + (\delta^\nu)_{\alpha\beta}(\delta^\mu)_{\beta\delta} = 2\eta^{\mu\nu}\Delta_{\alpha\delta} \tag{373}$$

Para $\mu, \nu = 0, 1, 2, 3$ e $\alpha, \beta, \delta = 1, 2, 3, 4$. É possível verificar:

$$\mathbf{M}_{\mu\nu} \equiv -\frac{1}{4}[\delta_\mu, \delta_\nu] \tag{374}$$

de modo que

$$[\mathbf{M}_{\mu\nu}, \mathbf{M}_{\rho\sigma}] = \eta_{\mu\sigma}\mathbf{M}_{\nu\rho} + \eta_{\nu\rho} + \mathbf{M}_{\mu\sigma} - \eta_{\mu\rho}\mathbf{M}_{\nu\sigma} - \eta_{\nu\sigma}\mathbf{M}_{\mu\rho} \tag{375}$$

ou seja, é possível, em termos de matrizes $-\delta$, escrever os geradores da Álgebra de Lie do grupo de Lorentz e, consequentemente,trazer para oespaço fermiônico a transformação e Lorentz. Deste modo, descobrimos como fazer para rodar um espinor.

# 8 Função de Green

São na verdade funções impróprias (distribuições). Partindo de Gauge e de Lorentz:

$$\partial_\mu \mathbf{A}^\mu = 0 \tag{376}$$

chegamos a uma equação diferencial parcial linear e inomogênea, a equação de onda:

$$\Box \mathbf{A}^\mu = \mathbf{j}^\mu \tag{377}$$

Sua solução geral:

$$\mathbf{A}^\mu(\mathbf{x}) = \mathbf{A}^\mu_\mathbf{0}(\mathbf{x}) + \mathbf{A}^\mu{}_\mathbf{i}(\mathbf{x}) \tag{378}$$

onde $\Box \mathbf{A}^\mu_\mathbf{0} = 0$ e $\Box \mathbf{A}^\mu_\mathbf{i}(\mathbf{x}) = \mathbf{j}^\mu$. Em princípio, estamos buscando uma solução da equação inomogênea. Supondo invariância por translação, ou seja, que haja no espaço nada além da fonte, então:

$$\Box \mathbf{G}(\mathbf{x} - \mathbf{x}') = \delta^4(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \tag{379}$$

e a solução descoberta de olho seria:

$$\mathbf{A_i^\mu(x)} = \int \mathbf{d^4x'G(x-x')j^\mu(x')} \tag{380}$$

Assim, a solução geral:

$$\mathbf{A^\mu(x)} = \mathbf{A_0^\mu(x)} + \int \mathbf{d^4x'G(x-x')j^\mu(x')} \tag{381}$$

O que é portanto, a função de Green???

É um truque para encontrar uma solução particular da equação inomogênea. Assim, buscamos resolver:

$$\Box \mathbf{G(x-x')} = \delta^4(\mathbf{x-x'}) \tag{382}$$

ou

$$\Box \mathbf{G(z)} = \delta^4(\mathbf{z}) \tag{383}$$

Como a equação é linear, podemos apela para a Transformada de Fourier:

$$\mathbf{G(z)} = \frac{1}{(2\pi)^4} \int \mathbf{d^4k e^{-ikz}} \widetilde{G}(\mathbf{k}) \tag{384}$$

Aplicando (383) em (384):

$$-\mathbf{k^2}\widetilde{\mathbf{G}}(\mathbf{k}) = 1 \tag{385}$$

Mas $\mathbf{k^2} = \mathbf{k}^\mu \mathbf{k}_\mu$ só pode ser passado para o lado direito da equação se ela for não nulo. Mas o ineterssante é justamente quando $\mathbf{k^2} = 0$ e $\mathbf{k_0^2} - \vec{\mathbf{k}}^2 = 0$ que é uma equação sobre o cone de luz, que é onde caminha o fóton. No entanto, como $\widetilde{\mathbf{G}}$ é uma distribuição, vamos escrever:

$$\widetilde{\mathbf{G}}(\mathbf{k}) = -\frac{1}{\mathbf{k^2}} \tag{386}$$

mas sem perder de vista a relevância de caso em que $\mathbf{k^2} = 0$.

Deste modo,a equação pode ser escrita:

$$\mathbf{A^\mu(x)} = \mathbf{A_0^\mu(x)} - \frac{1}{(2\pi)^4} \int \mathbf{d^4 d^4x'} \frac{\mathbf{d^4k}}{\mathbf{k^2}} \mathbf{e^{-ikz}} \mathbf{j^\mu(x')} \tag{387}$$

## 8.1 Função de Green Causal ou Retadada

A expressão geral da função de Green:

$$\mathbf{G}(\mathbf{z}) = -\frac{1}{(2\pi)^4}\int \mathbf{d^3\vec{k}e^{i\vec{k}\vec{z}}}\int_{-\infty}^{\infty}\mathbf{dk_0}\frac{e^{-\mathbf{ik_0z_0}}}{\mathbf{k^2}} \tag{388}$$

A cada maneira de resolver a parte temporal da integral, ou seja, distiguindo-se a maneira de contornar os pólos, associamos uma diferente função de Green. Seja:

$$\mathbf{k_0} = \mathbf{k_0^R} + \mathbf{ik_0^I} \tag{389}$$

e daí

$$\mathbf{e^{-ik_0z_0}} = \mathbf{e^{-ik_0^Rz_0}e^{k_0^Iz_0}} \tag{390}$$

Respeitando a causalidade:

$$\mathbf{z_0} = \mathbf{x_0} - \mathbf{x_0'} = \mathbf{t} - \mathbf{t'} < 0 \tag{391}$$

ou seja, fecha-se o contorno (contorno do dente) neste caso por cima (que quando $\mathbf{t} - \mathbf{t'}$, a integral é igual a 0), antes da fonte.

Daí: ENTRAM GRAVURAS

São três maneiras diferentes de fazer este caminho. Destes três, o mais simples de se resolver é o caso (a). Assim:ENTRAM GRAVURAS

Note que em (ii), o sinal é o contrário pelo sentido de $\mathbf{C_r}$, daí:

$$\int_{\mathbf{C_r}} = -\frac{\pi}{|\vec{\mathbf{k}}|}sen(|\vec{\mathbf{k}}|\mathbf{z_0}) \tag{392}$$

A função de Green:

$$\mathbf{G}(\mathbf{z}) = +\frac{1}{(2\pi)^3}\int \mathbf{d^3\vec{k}}\frac{\mathbf{e^{-i\vec{k}\vec{z}}}}{|\vec{\mathbf{k}}|}sen(|\vec{\mathbf{k}}|\mathbf{z_0}) \tag{393}$$

Note que a integral (393) não possui simetria esférica, mas poemos escolher um sistemade coordenadas de modo a poder usar as coordenadas esféricas. E daí reescrevemos (393):

$$\mathbf{G}(\mathbf{z}) = \frac{1}{(2\pi)^3}2\pi\int_0^{\infty}\mathbf{d}|\vec{\mathbf{k}}|\frac{|\vec{\mathbf{k}}^2|}{|\vec{\mathbf{k}}|}\int_0^{\pi}\mathbf{e^{-i|\vec{k}||\vec{z}|\cos\theta}}sen\theta sen(|\vec{\mathbf{k}}|\mathbf{z_0}) = ... \tag{394}$$

Continuando...

$$\frac{1}{(2\pi)^2}\int_0^\infty |\vec{\mathbf{k}}|\mathbf{d}\vec{\mathbf{k}} sen(|\vec{\mathbf{k}}|\mathbf{z_0})\int_{-1}^{1}\mathbf{e^{-i|\vec{k}||\vec{z}|x}dx} \tag{395}$$

Mas:

$$(I)=\frac{e^{-i|\vec{\mathbf{k}}||\vec{\mathbf{z}}|\mathbf{x}}}{-i|\vec{\mathbf{k}}||\vec{\mathbf{z}}|}|_{-1}^{+1}=\frac{e^{i|\vec{k}||\vec{z}|}-e^{-i|\vec{k}||\vec{z}|}}{2i|\vec{k}||\vec{z}|}=\frac{2}{|\vec{k}||\vec{z}|}sen(|\vec{k}||\vec{z}|) \tag{396}$$

Daí:

$$\mathbf{G}(\mathbf{z})=\frac{2}{(2\pi)^4\mathbf{R}}\int_0^\infty \mathbf{d}|\vec{\mathbf{k}}|sen(|\vec{\mathbf{k}}|\mathbf{z_0})sen(|\vec{\mathbf{k}}|\mathbf{R}) \tag{397}$$

Note que:

$$\mathbf{sen}a\mathbf{sen}b=\frac{e^{ia}-e^{-ia}}{2i}\frac{e^{ib}-e^{-ib}}{2i}=-\frac{1}{4}[e^{(a+b)i}-e^{(a-b)i}-e^{(b-a)i}+e^{-i(a+b)}] \tag{398}$$

Fazendo a mudança de variáveis em (397):

$$\mathbf{G}(\mathbf{z})=\frac{1}{(2\pi)^2}\int_{-\infty}^{+\infty}dy\mathbf{sen(yz_0)sen(yR)} \tag{399}$$

Além disto:

$$\int_{-\infty}^{\infty}e^{(a+b)ix}dx=-\int_{+\infty}^{-\infty}e^{-(a+b)ix}=\int_{-\infty}^{\infty}e^{-(a+b)ix}dx \tag{400}$$

Usando (398) e (400) em (399):

$$\mathbf{G}(\mathbf{z})=\frac{1}{(2\pi)^2\mathbf{R}}\int_{-\infty}^{\infty}(\frac{-2}{4})dy[e^{i(\mathbf{z_0}+\mathbf{R})y}-e^{i(\mathbf{z_0}+\mathbf{R})y}]=... \tag{401}$$

Continuando....

$$\frac{1}{(2\pi)^2\mathbf{R}}\frac{2\pi}{2}[\delta(\mathbf{z_0}-\mathbf{R})-\delta(\mathbf{z_0}+\mathbf{R})]=\frac{\delta(\mathbf{z_0}-\mathbf{R})}{4\pi\mathbf{R}}=0 \tag{402}$$

Assim:

$$\mathbf{G}(\mathbf{z})=\frac{\delta(\mathbf{z_0}-\mathbf{R})}{4\pi\mathbf{R}} \tag{403}$$

Para englobar os dois casos, incluímos uma função de grau:

$$\mathbf{G}(\mathbf{z})=\theta(\mathbf{z_0})\frac{\delta(\mathbf{z_0}-\mathbf{R})}{4\pi\mathbf{R}} \tag{404}$$

## 8.2 Função de Green Avançada

Neste caso, queremos uma coisa doida, o contrário da causalidade; queremos que no futuro da fonte, a contribuição seja nula. Ou seja, vamos contornar os pólos colocando os dentes para baixo:

Chupinhando a função de Green do resultado antererior:

$$\mathbf{G_a}(\mathbf{x}-\mathbf{x}') = \theta(\mathbf{x}-\mathbf{x}')\frac{[\delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}')+\mathbf{R}]}{4\pi\mathbf{R}} \tag{405}$$

Vamos agora, analisar a forma covariante:

Escrevendo

$$\delta[(\mathbf{x}-\mathbf{x}')^2] = \delta[(\mathbf{x}-\mathbf{x}')^2-(\vec{\mathbf{x}}-\vec{\mathbf{x}'})^2] = \delta[(\mathbf{x_0}-\mathbf{x_0'}-\mathbf{R})(\mathbf{x_0}-\mathbf{x_0'}+\mathbf{R}) \tag{406}$$

Lembrando que o delta de uma função cheia de zeros pode ser escrito:

$$\delta[\mathbf{f}(\mathbf{x})] = \sum_i \frac{\delta(\mathbf{x}-\mathbf{x_i})}{|(\frac{df}{dx})_{x=x_i}|} \tag{407}$$

onde $\mathbf{x_i}$ é cada uma das raízes de $\mathbf{f}(\mathbf{x})$. Assim:

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = (\mathbf{x_0}-\mathbf{x_0'}-\mathbf{R})(\mathbf{x_0}-\mathbf{x_0'}+\mathbf{R}) \tag{408}$$

cujas raízes $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = 0 \mapsto \mathbf{x_0} = \mathbf{x_0'}+\mathbf{R}$ e $\mathbf{x_0} = \mathbf{x_0'}-\mathbf{R}$.

As derivadas:

$$\frac{d}{dx_0}\mathbf{f}(\mathbf{x}) = (\mathbf{x_0}-\mathbf{x_0'}-\mathbf{R})+(\mathbf{x_0}-\mathbf{x_0'}+\mathbf{R}) = 2(\mathbf{x_0}-\mathbf{x_0'}) \tag{409}$$

tomadas as raízes:

$$\frac{d}{dx_0}\mathbf{f}(\mathbf{x_0})|_{\mathbf{x_0}=\mathbf{x_0'}+\mathbf{R}} = 2\mathbf{R} \tag{410}$$

e

$$\frac{d}{dx_0}\mathbf{f}(\mathbf{x_0})|_{\mathbf{x_0}=\mathbf{x_0'}-\mathbf{R}} = -2\mathbf{R} \tag{411}$$

Daí:

$$\delta[(\mathbf{x}-\mathbf{x}')^2] = \frac{1}{2\mathbf{R}}[\delta(\mathbf{x_0}-\mathbf{x_0'}-\mathbf{R})+\delta(\mathbf{x_0}-\mathbf{x_0'}+\mathbf{R})] \tag{412}$$

Assim, as funções de Green escritas de forma covariante:

$$\mathbf{G_r}\mathbf{x}')^{\mathbf{2}}]2\pi \tag{413}$$

e

$$\mathbf{G_a} = \frac{\theta(\mathbf{x_0} - \mathbf{x'_0})\delta[(\mathbf{x} - \mathbf{x'})^2]}{2\pi} \tag{414}$$

Qual é a interpretação física da birosca? Note que a função dela só é não nula quando o argumento é nulo, ou seja:

$$\delta[(\mathbf{x} - \mathbf{x'})^2] \mapsto (\mathbf{x} - \mathbf{x'})^2 = 0 \mapsto \mathbf{x} - \mathbf{x'} \tag{415}$$

veja que o termo acima é um vetor do tipo luz. Ou seja, nos dois casos, tanto a função de Green retardada, quanto a avançada estão sobre o cone de luz, pois $\mathbf{x} - \mathbf{x'}$ é um vetor do tipo luz. Isto é, o suporte de $\mathbf{G_r}$ é o cone de luz futuro da fonte; o suporte de $\mathbf{G_a}$ é o cone de luz passado da fonte.

## 8.3 Mudando de assunto.....

Seja uma densidade de Lagrangiana:

$$\mathbf{L} = \mathbf{L}(\phi, \partial_\mu \phi) \tag{416}$$

cuja ação em Minkowski:

$$\mathbf{S} = \int \mathbf{d^4 x L}(\phi, \partial_\mu \phi) \tag{417}$$

Suponha que a medida de integração e a região de integração sejam mantidas fixas; a variância na ação é dada por:

$$\delta\mathbf{S} \int \mathbf{d^4 x}\delta\mathbf{L}(\phi, \partial_\mu \phi) = \int \mathbf{d^4 x}[\frac{\partial \mathbf{L}}{\partial \phi} - \partial_\mu \frac{\partial \mathbf{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)}]\delta\phi = 0 \tag{418}$$

chegando a Euler-Lagrange:

$$\frac{\partial \mathbf{L}}{\partial \phi} - \partial_\mu \frac{\partial \mathbf{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} = 0 \tag{419}$$

Note que o termo entre colchetes em (418) é a própria equação do movimento. Assim, conhecendo-se uma equação de movimento é possível fazer o caminho inverso e encontrar a Langrangiana. Temos a equação de Klein-Gordon (bósons escalares):

$$(\Box + \mathbf{m^2})\phi(\mathbf{x}) = 0 \tag{420}$$

Daí

$$\delta\mathbf{S} = \int \mathbf{d^4 x}[\Box\phi + \mathbf{m^2}\phi]\delta\phi \tag{421}$$

Mas:

$$\Box\phi\delta\phi = \partial_\mu\partial^\mu\phi\delta\phi = \partial_\mu(\partial^\mu\phi\delta\phi) - \partial^\mu\phi\delta(\partial_\mu\phi) - \partial^\mu\phi\delta\partial_\mu\phi = -\frac{\delta(\partial^\mu\phi\partial_\mu\phi)}{2} \tag{422}$$

Daí:

$$\delta\mathbf{S} = \int \mathbf{d^4x}[-\delta(\frac{\partial^\mu\phi\partial_\mu\phi}{2}) + \delta(\frac{\mathbf{m^2}\phi^{\mathbf{2}}}{2})] = \int \mathbf{d^4x}\delta[-\frac{\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi}{2} + \frac{\mathbf{m^2}\phi^{\mathbf{2}}}{2}] \tag{423}$$

e a Langrangiana:

$$\mathbf{L}(\phi, \partial_\mu\phi) = \frac{\mathbf{m^2}\phi^{\mathbf{2}}}{2} - \frac{\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi}{2} \tag{424}$$

Em Maxwell:

$$\partial_\mu\mathbf{F}^{\mu\nu} = \mathbf{j}^\nu \mapsto \partial_\mu\mathbf{F}^{\mu\nu} - \mathbf{j}^\nu = 0 \tag{425}$$

Daí:

$$\delta\mathbf{S} = \int \mathbf{d^4x}[\partial_\mu\mathbf{F}^{\mu\nu} - \mathbf{j}^\nu]\delta\mathbf{A}_\nu \tag{426}$$

Mas:

$$\partial_\mu(\mathbf{F}^{\mu\nu}\delta\mathbf{A}_\nu) = \partial_\mu\mathbf{F}^{\mu\nu}\partial_\mu\delta\mathbf{A}_\nu + \mathbf{F}^{\mu\nu}\partial_\mu\delta\mathbf{A}_\nu = \partial_\mu\mathbf{F}^{\mu\nu}\partial_\mu\delta\mathbf{A}_\nu + \mathbf{F}^{\mu\nu}\delta(\partial_\mu\mathbf{A}_\nu) \tag{427}$$

E ainda:

$$\partial_\mu\mathbf{F}^{\mu\nu}\delta\mathbf{A}_\nu = \partial_\mu(\mathbf{F}^{\mu\nu}\delta\mathbf{A}_\nu) - \mathbf{F}^{\mu\nu}\delta(\partial_\mu\mathbf{A}_\nu) \tag{428}$$

Continuando.....

$$-\mathbf{F}^{\mu\nu}\delta\partial_\mu\mathbf{A}_\nu = -\frac{\mathbf{F}^{\mu\nu}}{2}\delta(\partial_\mu\mathbf{A}_\nu - \partial_\nu\mathbf{A}_\mu) = -\frac{\mathbf{F}^{\mu\nu}}{2}\delta\mathbf{F}_{\mu\nu} = -\frac{\delta(\mathbf{F}^{\mu\nu}\mathbf{F}_{\mu\nu})}{4} \tag{429}$$

Ainda:

$$\mathbf{j}^\nu\delta\mathbf{A}_\nu = \delta(\mathbf{j}^\nu\mathbf{A}_\nu) \tag{430}$$

Note que o termo $\mathbf{j}^\nu$ não varia. Assim:

$$\delta\mathbf{S} = \int \mathbf{d^4x}\delta[-\frac{\mathbf{F}_{\mu\nu}\mathbf{F}^{\mu\nu}}{4} - \mathbf{j}^\nu\mathbf{A}_\nu] \tag{431}$$

onde

$$\mathbf{L} = -\frac{\mathbf{F}_{\mu\nu}\mathbf{F}_{\mu\nu}}{4} - \mathbf{j}^\nu\mathbf{A}_\nu \tag{432}$$

## 8.4 Voltando à equação de Dirac

Tínhamos visto que a equação que descreve uma partícula de spin igual a 1/2 e massa diferente de 0 é dada por:

$$(\mathbf{i}\delta^{\mu}\partial_{\mu} - \mathbf{m})\psi(\mathbf{x}) = 0 \tag{433}$$

onde $\delta^{\mu}, \delta^{\nu} = 2\eta_{\mu\nu}\mathbf{I_4}$.

Na representação de Weye:

$$\delta^{\mu} = \begin{pmatrix} 0 & \overline{\sigma}^{\mu} \\ \sigma^{\mu} & 0 \end{pmatrix}$$

onde $\sigma^{\mu} = (\mathbf{I_2}; \vec{\sigma})$ e $\overline{\sigma}^{\mu} = (\mathbf{I_2}; -\vec{\sigma})$. Lembrando que $\mathbf{I}$ é a matriz identidade. Sendo:

$$\psi = \begin{pmatrix} \chi_L \\ \xi_R \end{pmatrix}$$

de modo que a equação de Dirac:

$$\begin{pmatrix} -\mathbf{m} & \mathbf{i}\overline{\sigma}^{\mu}\partial_{\mu} \\ \mathbf{i}\sigma^{\mu}\partial_{\mu} & -\mathbf{m} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \chi_L \\ \xi_R \end{pmatrix} = 0$$

que leva a encontrar $\mathbf{i}\overline{\sigma}^{\mu}\partial_{\mu}\xi_R - \mathbf{m}\chi_L = 0$ e $\mathbf{i}\sigma^{\mu}\partial_{\mu}\chi_L - \mathbf{m}\xi_R = 0$.

Na representação de Dirac:

$$\delta^{0} = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix}$$

e

$$\delta^{i} = \begin{pmatrix} 0 & \vec{\sigma} \\ -\vec{\sigma} & 0 \end{pmatrix}$$

Neste caso, o 4-espinor (agora não mais relacionado com a quiralidade) é dado como:

$$\psi = \begin{pmatrix} \chi \\ \xi \end{pmatrix}$$

de modo que:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{i}\partial_t - \mathbf{m} & \mathbf{i}\sigma^{i}\partial_i \\ -\mathbf{i}\sigma^{i}\partial_i & -\mathbf{i}\partial_t - \mathbf{m} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \chi \\ \xi \end{pmatrix} = 0$$

Os espinores $\psi$ são os tensores do grupo de Lorentz que carregam a representação de spin semi-inteiro. A equação de Dirac, portanto, é escrita em um outro espaço de 4 dimenões que não é o espaço-tempo. Ou seja, o setor de spins semi-inteiros do grupo de Lorentz constitui-se num espaço 4-dimensional onde se tem uma representação da Álgebra de Clifford do espaço e Minkowski em termos das matrizes $\delta$. A conexão entre férmions e o espaço-tempo é dada pela relação:

$$\delta^{\mu}, \delta^{\nu} = 2\eta^{\mu\nu}\mathbf{I} \tag{434}$$

e ainda

$$(\delta^{\mu})_{\alpha\delta}(\delta^{\nu})_{\delta\beta} + (\delta^{\nu})_{\alpha\delta}(\delta^{\mu})_{\delta\beta} = 2\eta^{\mu\nu}\delta_{\alpha\beta} \tag{435}$$

O espaço-tempo, de dimensão $\mathbf{D}$, através da métrica a este imposta, define uma álgebra de Clifford a ele associada, através da relação:

$$\Gamma^{\mu}, \Gamma^{\nu} = 2\eta^{\mu\nu}\mathbf{I} \tag{436}$$

onde as matrizes $\Lambda^{\mu}$ (demosntra-se nas teoria das álgebras de Clifford) são matrizes complexas comdimensões $2^{\frac{\mathbf{D}}{2}}$. Logo quando $\mathbf{D} = 2, 3 : \Gamma$ são 2x2; $\mathbf{D} = 4, 5 : \Gamma$ são 4x4 e $\mathbf{D} = 10, 11 : \Gamma$ são 32x32. Seja, por exemplo, o espaço euclidiano $\mathbf{E^3}$, onde a métrica é a própria identidade:

$$\eta^{\mu\nu} \mapsto \delta_{\mathbf{ij}} \tag{437}$$

onde $\mathbf{i}, \mathbf{j} = 1, ...3.$ e ainda

$$\Gamma^{\mu} \mapsto \delta^{\mathbf{i}} \tag{438}$$

onde temos (2x2) que pela Álgebra de Clifford:

$$\delta^{\mathbf{i}}, \delta^{\mathbf{j}} = 2\delta^{\mu\nu}\mathbf{I_2} \tag{439}$$

Onde $(\delta^0)^2 = \mathbf{I}$, $(\delta^1)^2 = \mathbf{I}$ e $(\delta^2)^2 = \mathbf{I}$. Note que as matrizes que satisfazem estas condições são as matrizes de Pauli:

$$\delta^1 \mapsto \sigma_x \tag{440}$$

e

$$\delta^2 \mapsto \sigma_y \tag{441}$$

e

$$\delta^3 \mapsto \sigma_z \tag{442}$$

Isto é a Álgebra de Clifford de $\mathbf{E^3}$ é a das matrizes de Pauli.

Seja agora $\mathbf{M^{1,2}}$. Neste caso:

$$\eta^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} +1 & & \\ & -1 & \\ & & -1 \end{pmatrix}$$

Temos $\mathbf{x}^\mu = (\mathbf{x^0} = ct, \mathbf{x^1} = \mathbf{x}; \mathbf{x^2} = \mathbf{y})$. E $\mathbf{x}_\nu = \mathbf{x}^\mu \eta_{\mu\nu} = (\mathbf{x_0} = ct; \mathbf{x_1} = -\mathbf{x}; \mathbf{x_2} = -\mathbf{y})$. Daí:

$$\delta^\mu \ 2x2 \tag{443}$$

tais que:

$$\delta^\mu, \delta^\nu = 2\eta^{\mu\nu}\mathbf{I_2} \tag{444}$$

Onde $(\delta^0)^2 = \mathbf{I}$, $(\delta^1)^2 = -\mathbf{I}$ e $(\delta^2)^2 = -\mathbf{I}$. e também:

$$\delta^\mu \delta^\nu = -\delta^\nu \delta^\mu \tag{445}$$

onde $\mu \neq \nu$. Note que podemos associar $\delta^0 \equiv \sigma_x$, $\delta^1 \equiv \mathbf{i}\sigma_y$ e $\delta^0 \equiv \mathbf{i}\sigma_z$. e daí, a equação de Dirac (1+2), ou seja, a equação que descreve o elétron:

$$(\mathbf{i}\delta^\mu \partial_\mu - \mathbf{m})\psi = 0 \tag{446}$$

onde $\psi$ é igual a

$$\begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix}$$

e assim

$$\begin{pmatrix} -\partial_y - \mathbf{m} & \mathbf{i}\partial_t + \mathbf{i}\partial_x \\ \mathbf{i}\partial_t - \mathbf{i}\partial_x & \partial_y - \mathbf{m} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} = 0$$

Seja, finalmente, um espaço de 5 dimensões $\mathbf{M^{1,4}}$. A métrica é dada por:

$$\eta^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} +1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix}$$

onde $\mu\nu = 0, ...., 4$. E $\Gamma^\mu : 4x4$ com $\delta^0$, $\delta^1$, $\delta^2$, $\delta^3$ e $\delta^4$. de modo que:

$$\delta^\mu, \delta^\nu = 2\eta^{\mu\nu}\mathbf{I_4} \tag{447}$$

De $\mathbf{M^{1,3}}$ já temos:

$$\delta^0 = \begin{pmatrix} \mathbf{I} & 0 \\ 0 & \mathbf{I} \end{pmatrix}$$

e

$$\delta^{1,2,3} = \begin{pmatrix} 0 & \vec{\sigma} \\ -\vec{\sigma} & 0 \end{pmatrix}$$

e queremos uma matriz $\delta^4$ tal que $(\delta^4)^2 = -\mathbf{I}$ e $\delta^4, \delta^{0,1,2,3} = 0$. Chutando que $\delta^4 \equiv \delta^0\delta^1\delta^2\delta^3$. Note que $(\delta^4)^2 = -\mathbf{I_4}$. E de fato:

$$\delta^4 \delta^0 = -\delta^0 \delta^4 \tag{448}$$

$$\delta^4\delta^1 = -\delta^1\delta^4 \tag{449}$$
$$\delta^4\delta^2 = -\delta^2\delta^4 \tag{450}$$
$$\delta^4\delta^3 = -\delta^3\delta^4 \tag{451}$$

Esta matriz $\delta^4$ é escrita como:

$$\delta^4 = \delta^0\delta^1\delta^2\delta^3 = -\mathbf{i}\begin{pmatrix} 0 & \mathbf{I} \\ \mathbf{I} & 0 \end{pmatrix}$$

No caso de termos $\mathbf{M^{1,5}}$ temos, analogamente:

$$\eta^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} +1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix}$$

onde $\mu, \nu = 0, ...., 5.$ e $\Gamma^\mu : 2^{[\frac{\mathbf{D2}}{}]} = 8$, tal que $\Gamma^\mu, \Gamma^\nu = 2\eta^{\mu\nu}\mathbf{I_8}$. Suponha então:

$$\Gamma^\mu(\mu = 0, 1, 2, 3, 4) = \begin{pmatrix} \delta^\mu & 0 \\ 0 & -\delta^\mu \end{pmatrix}$$

onde $\delta^\mu$ são as anteriores de (1+4). Note que:

$$\Gamma^\mu, \Gamma^\nu = \begin{pmatrix} \delta^\mu, \delta^\nu & 0 \\ 0 & \delta^\mu, \delta^\nu \end{pmatrix} = 2\eta^{\mu\nu}\mathbf{I_8}$$

O que isso significa?????? Falta uma matriz $\Lambda^5$ da sexta dimensão espacial. Como uma matriz diagonal em blocos como $\Lambda^\mu$ acima anti-comutatam com a matriz da forma:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{A} & 0 \\ 0 & \mathbf{A} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{I} \\ \mathbf{I} & 0 \end{pmatrix} = 0$$

Mas como $(\Gamma^5)^2 = -\mathbf{I}$, então multiplicando por $\mathbf{i}$, temos:

$$\Gamma^5 = \mathbf{i}\begin{pmatrix} 0 & \mathbf{I} \\ \mathbf{I} & 0 \end{pmatrix} = 0$$

e finalmente em:

$$\mathbf{M^{1,5}} : \Gamma^\mu = \begin{pmatrix} \delta^\mu & 0 \\ 0 & -\delta^\mu \end{pmatrix}$$

onde $\mu = 0, ...., 4.$ E ainda:

$$\Gamma^5 = \mathbf{i}\begin{pmatrix} 0 & \mathbf{I} \\ \delta\kappa\kappa\mathbf{I} & 0 \end{pmatrix}$$

## 8.5 O elo perdido

Queremos agora, saber como os espinores reagem às transformações de Lorentz. Respondendo a esta questão, teremos finalmente categorizados os espinores como legítimos portadores de uma representação SO (1,3). Os espinores não podem transformar-se pelas matrizes $\Lambda$, pois elas sã matrizes 4x4no espaço-tempo ($\Lambda^{\mu}_{\nu}$), enquanto os espinores são objetos de 4 componentes, mas no espaço de representação da álgebra de Clifford. Assim, queremos encontrar a conexão:

$$\mathbf{x}' = \Lambda^{\mu}_{\nu}\mathbf{x}^{\nu} \mapsto (\psi(\mathbf{x}'))' = \psi_{\alpha}(\mathbf{x}') = \mathbf{L}_{\alpha\beta}(\Lambda)\psi_{\beta}(\mathbf{x}) \tag{452}$$

Então:

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \delta & -\delta\beta & 0 & 0 \\ -\delta\beta & \delta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

e daí $\psi(\mathbf{x}) : (\mathbf{i}\delta^{\mu}\partial_{\mu} - \mathbf{m})\psi(\mathbf{x}) = 0$. Com a $\Lambda$:

$$\psi'(\mathbf{x}') = \mathbf{L}_{\alpha\beta}\psi_{\beta}(\mathbf{x}) \tag{453}$$

Como relacionar **L** com $\Lambda$????

Nossa hipótese de trabalho:

A equação de Dirac é covariante sob as transformações de Lorentz, ou seja, num sistema de coordenadas **S**:

$$(\mathbf{i}\delta^{\mu}\partial_{\mu} - \mathbf{m})\psi = 0 \tag{454}$$

Passando para um sistema $\mathbf{S}'$ por uma transformação de Lorentz:

$$\mathbf{S}' = (\mathbf{i}\delta^{\mu}\partial'_{\mu} - \mathbf{m})\psi'(\mathbf{x}') = 0 \tag{455}$$

onde:

$$\partial'_{\mu} = (\Lambda^{-1t})^{\nu}_{\mu}\partial_{\nu} \tag{456}$$

e

$$\mathbf{x}'^{\mu} = \Lambda^{\mu}_{\nu}\mathbf{x}^{\nu} \tag{457}$$

e ainda

$$\delta^{\mu}, \delta^{\nu} = 2\eta^{\mu\nu}\mathbf{I_4} \tag{458}$$

Assim,partindo da afirmação da covariância da equação e Dirac sob transformações de Lorentz:

$$(\mathbf{i}\delta^{\mu}\partial'_{\mu} - \mathbf{m})\psi'(\mathbf{x}') = 0 \tag{459}$$

Aplicando $(\Lambda^{-1t})_\mu \partial_\nu$, chegamos em:

$$\mathbf{i}\delta^\mu (\Lambda^{1t})^\nu_\mu \partial_\nu \mathbf{L}\psi(x) - \mathbf{mL}\psi(x) = 0 \tag{460}$$

Dizendo que $\mathbf{L}\psi(x) = \psi'(x')$, chegamos a:

$$(\mathbf{i}\delta^\mu \mathbf{L}(\Lambda^{-1t})^\nu_\mu \partial_\nu - \mathbf{mL})\psi(x) = 0 \tag{461}$$

Multiplicando por $\mathbf{L^{-1}}$:

$$(\mathbf{iL^{-1}}\partial^\mu \mathbf{L}(\Lambda^{-1t})^\nu_\mu \partial_\nu - \mathbf{m})\psi(x) = 0 \tag{462}$$

temos que:

$$\mathbf{L^{-1}}\delta^\mu \mathbf{L}(\Lambda^{-1t})^\nu_\mu = \delta^\nu \tag{463}$$

Continuando....

$$\mathbf{L^{-1}}\delta^\mu \mathbf{L}(\Lambda^{-1t})^\nu_\mu = \delta^\nu \tag{464}$$

$$(\Lambda^{-1})^\nu_\mu \mathbf{L^{-1}}\delta^\mu \mathbf{L} = \delta^\nu \tag{465}$$

Chegamos em:

$$\delta^k_\mu \mathbf{L^{-1}}\delta^\mu \mathbf{L} = \Lambda^k_\nu \delta^\nu \tag{466}$$

e daí:

$$\mathbf{L^{-1}}\delta^k \mathbf{L} = \Lambda^k_\nu \delta^\nu \tag{467}$$

Lembrando que:

$$\Lambda = e^{\sum} = e^{\frac{1}{2}\omega^{k\lambda}\sum_{k\lambda}} \tag{468}$$

temos:

$$\mathbf{L}(\omega) = e^{\Omega} = e^{\frac{1}{2}\omega^{k\lambda}\mathbf{S}_{k\lambda}} \tag{469}$$

Assim:

$$\mathbf{L}(\omega)_{\alpha\beta} = (e^{\frac{1}{2}\omega^{k\lambda}\mathbf{S}_{k\lambda}})_{\alpha\beta} \tag{470}$$

Ao fim da discussão, devemos ser capazes de expressar os geradores $\mathbf{S_{k\lambda}}$ (espinoriais) em função das matrizes $\delta$. Assim em (467):

$$e^{-\frac{1}{2}\omega^{k\lambda}\mathbf{S}_{k\lambda}} e^{\frac{1}{2}\omega^{k\lambda}\mathbf{S}_{k\lambda}} \delta^\mu = (e^{\frac{1}{2}}\omega^{k\lambda}\sum_{k\lambda})^\mu_\nu \delta^\nu \tag{471}$$

A primeira parcela com $e^{-\frac{1}{2}}$ é igual a:

$$\mathbf{I} - \frac{1}{2}\omega^{k\lambda}\mathbf{S}^{k\lambda} + \mathbf{C}(\omega^2) \tag{472}$$

e a segunda parcela que está entre parênteses:

$$\delta^\mu_\nu + \frac{1}{2}\omega^{k\lambda}(\sum_{k\lambda})^\mu_\nu + 0(\omega) \tag{473}$$

Para transformações infinitesimais $0(\omega^2) \mapsto 0$):

$$-\frac{1}{2}\omega^{k\lambda}\mathbf{S}_{k\lambda}\delta^{\mu} + \frac{1}{2}\omega^{k\lambda}\delta^{\mu}\mathbf{S}_{k\lambda} = \frac{1}{2}\omega^{k\lambda}(\sum_{k\lambda})^{\mu}_{\nu}\delta^{\nu} \tag{474}$$

Continuando....

$$[\delta^{\mu}, \mathbf{S}_{k\lambda}] = (\sum_{k\lambda})^{\mu}_{\nu}\delta^{\nu} = -\zeta^{\mu}_{k}\delta_{\lambda} + \zeta^{\mu}_{\lambda}\delta_{k} \tag{475}$$

Sendo $(\sum_{k\lambda}) = -\eta_{\lambda\nu}\zeta^{\mu}_{\nu} + \eta_{k\lambda}\zeta^{\mu}_{\lambda}$.

Sugestão:

$$[\delta^{\mu}, \delta_k\delta_\lambda] = \delta^{\mu}\delta_k\delta_\lambda - \delta_k\delta_\lambda\delta^{\mu} + \delta_k\delta^{\mu}\delta_\lambda - \delta_k\delta^{\mu}\delta_\lambda = (\delta^{\mu}, \delta_k)\delta_\lambda - \delta_k(\delta_\lambda, \delta^{\mu}) \tag{476}$$

Chegamos em:

$$2\zeta^{\mu}_{k}\delta_{\lambda} - 2\zeta^{\mu}_{\lambda}\delta_{k} \tag{477}$$

Como $\sum_{k\lambda} = -\sum_{\lambda k}$ então

$$\mathbf{S}_{k\lambda} = -\mathbf{S}_{\lambda k} \tag{478}$$

e podemos chutar que além de $\mathbf{S}_{k\lambda}$ ser um produto de $\delta$ (por causa de 2) ele deve ser antissimétrico, de modo que:

$$\mathbf{S}_{k\lambda} = k(\delta_k\delta_\lambda - \delta_\lambda\delta_k) \tag{479}$$

De (474) e (475), temos:

$$[\delta^{\mu}, \delta_k\delta_\lambda - \delta_\lambda\delta_k] = -\zeta^{\mu}_{k}\delta_\lambda + \zeta^{\mu}_{\lambda}\delta_k = 2k\zeta^{\mu}_{k}\delta_\lambda - 2k\zeta^{\mu}_{\lambda}\delta_k - 2k\zeta^{\mu}_{\lambda}\delta_k + 2k\zeta^{\mu}_{k}\delta_\lambda \tag{480}$$

Chegamos em:

$$-\zeta^{\mu}_{k}\delta_{\lambda} + \zeta^{\mu}_{\lambda}\delta^{k} \tag{481}$$

Chegamos em:

$$4k = -1 \mapsto -\frac{1}{4} \tag{482}$$

Acabamos de concluir que 6 geradores de SO(1,3) no espaço espinorial são dadas por:

$$\mathbf{S}_{k\lambda} = -\frac{1}{4}[\delta_k, \delta_\lambda] \tag{483}$$

e daí:

$$\mathbf{x}' = \Lambda(\omega)\mathbf{x} \tag{484}$$

e

$$\psi'(\mathbf{x}') = e^{-\frac{1}{8}\omega^{k\lambda}[\delta_k,\delta_\lambda]}\psi(\mathbf{x}) \tag{485}$$

Seja, por exemplo, o boost ao longo do eixo x, temos $\omega^{01} \equiv \alpha$.

E

$$\mathbf{t}' = \delta(\mathbf{t} - \frac{\beta}{\mathbf{c}}\mathbf{x}) \tag{486}$$

$$\mathbf{x}' = \delta(\mathbf{x} - \beta\mathbf{ct}) \tag{487}$$

$$\mathbf{y}' = \mathbf{y} \tag{488}$$

$$\mathbf{z}' = \mathbf{z} \tag{489}$$

Aplicando ao férmion, temos:

$$\psi'(\mathbf{x}') = exp(\frac{1}{2}\alpha\delta^0\delta^1)\psi(\mathbf{x}) \tag{490}$$

como:

$$\delta^0 = \begin{pmatrix} \mathbf{I} & 0 \\ 0 & -\mathbf{I} \end{pmatrix}$$

e

$$\delta^1 = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_x \\ -\sigma_x & 0 \end{pmatrix}$$

temos:

$$\delta^0\delta^1 = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_x \\ \sigma_x & 0 \end{pmatrix}$$

Sendo $(\delta^0\delta^1)^2 = \mathbf{I}$ e $(\delta^0\delta^1)^3 = \delta^0\delta^1$.....

E finalmente:

$$\psi'(\mathbf{x}') = [(cosh\frac{\alpha}{2})\mathbf{I} + (senh\frac{\alpha}{2})\delta^0\delta^1]\psi(\mathbf{x}) \tag{491}$$

que na representação matricial:

$$\psi'(\mathbf{x}') = \begin{pmatrix} (cosh\frac{\alpha}{2})\mathbf{I} & (senh\frac{\alpha}{2})\sigma_x \\ (senh\frac{\alpha}{2})\sigma_x & (cosh\frac{\alpha}{2})\mathbf{I} \end{pmatrix} \psi(\mathbf{x})$$

Mostramos, então, que os geradores de transformação de Lorentz, no espaço espinorial, são comutadores de matrizes $\delta$.

## 8.6 Recapitulando...

Já tínhamos visto a equação de Dirac, que descreve uma partícula de massa $\mathbf{m}$ e spin $\frac{1}{2}$, dada por:

$$(\mathbf{i}\delta^\mu\partial_\mu - \mathbf{m})\psi(\mathbf{x}) = 0 \tag{492}$$

Aplicando a transformação de Lorentz:

$$\mathbf{x}'^{\mu} = \Lambda^{\mu}_{\nu}(\omega)\mathbf{x}^{\nu} \tag{493}$$

e

$$\partial'_{\mu} = (\Lambda^{-1t})^{\nu}_{\mu}\partial_{\nu} \tag{494}$$

e também sob transformação de Lorentz:

$$\psi(\mathbf{x}) \mapsto [\psi(\mathbf{x})]' = \psi'(\mathbf{x}') = \mathbf{S}(\omega)\psi(\mathbf{x}) \tag{495}$$

de modo que:

$$\mathbf{S}\delta^{\mu}\mathbf{S^{-1}} = \Lambda^{\mu}_{\nu}(\omega)\delta^{\nu} \tag{496}$$

que leva (e origina-se) à invariância da equação de Dirac:

$$(\mathbf{i}\delta^{\mu}\partial'_{\mu} - \mathbf{m})\psi'(\mathbf{x}') = 0 \tag{497}$$

Daí, concluímos:

$$\mathbf{S}(\omega) = e^{\frac{1}{2}\omega^{\mu\nu}\sum_{\mu\nu}} \tag{498}$$

onde:

$$\sum^{\mu\nu} = -\frac{1}{4}[\delta^{\mu}, \delta^{\nu}] \tag{499}$$

Finalmente:

$$\psi(\mathbf{x}) \mapsto \psi'(\mathbf{x}') = e^{-\frac{1}{8}\omega^{\mu\nu}[\delta_{\mu},\delta_{\nu}]} \tag{500}$$

## 8.7 Espinores em D dimensões

Seja um espaço de Minkowski geral com **t** dimensões temporais e **s** dimensões espaciais, onde teremos $\mathbf{M^{t,s}}$, de modo que sua métrica é dada por:

$$\eta^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} +1 & s \end{pmatrix}$$

Espinores do espaço $\mathbf{M^{t,s}}$ são os "vetores" em termos dos quais dá-se uma representação unitária de dimensão $2^{[\frac{\mathbf{D}}{2}]}$ para a Álgebra de Clifford das matrizes $\Gamma$.

$$[\Gamma^{\mu}, \Gamma^{\nu}] = 2\eta^{\mu\nu}\mathbf{I} \tag{501}$$

onde $\Gamma^{\mu} : 2^{[\frac{\mathbf{D}}{2}]} \times 2^{[\frac{\mathbf{D}}{2}]}$ e $\psi$ são vetores coluna desse espaço. Assim o grupo de Lorentz de $\mathbf{M^{t,s}}$ : $SO(t, s)$ de forma que:

$$\mathbf{x}'^{\mu} = \Lambda^{\mu}_{\nu}\mathbf{x}^{\nu} \tag{502}$$

Aplicando SO (t,s):

$$\Lambda^{t}\eta\Lambda = \eta \tag{503}$$

onde det$\Lambda = +1$.

A matriz $\Lambda(\omega)$ no espaço-tempo é representada pela matriz:

$$\mathbf{S} = e^{-\frac{1}{8}\omega^{\mu\nu}[\Gamma_\mu,\Gamma_\nu]} \tag{504}$$

e no espaço dos espinores:

$$\psi'(\mathbf{x}') = \mathbf{S}(\omega)_{\alpha\beta}\psi_\beta(\mathbf{x}) \tag{505}$$

OBS: É fundamental escrever o férmion e saber como operá-lo, poi ele é o elemento fundamental do espaço-tempo; a partir da composição de spin $\frac{1}{2}$ é possível compor spins inteiros, enquanto o inverso não é verdade.

Lembrando que na representação de Dirac:

$$\delta^0 = \begin{pmatrix} \mathbf{I} & 0 \\ 0 & \mathbf{I} \end{pmatrix}$$

e

$$\delta^i = \begin{pmatrix} 0 & \vec{\sigma} \\ -\vec{\sigma} & 0 \end{pmatrix}$$

Seja um boost ao longo do eixo x:

$$\mathbf{x'^0} = \delta(\mathbf{x^0} - \beta\mathbf{x}) \tag{506}$$

$$\mathbf{x}' = \delta(\mathbf{x} - \beta\mathbf{x^0}) \tag{507}$$

$$\mathbf{y}' = \mathbf{y} \tag{508}$$

$$\mathbf{z}' = \mathbf{z} \tag{509}$$

cuja matriz que representa a transformação de Lorentz:

$$\Lambda(\omega)^\mu_\nu = \begin{pmatrix} \delta & -\delta\beta & . & . \\ -\delta\beta & \delta & . & . \\ . & . & 1 & . \\ . & . & . & 1 \end{pmatrix}$$

é o único parâmetro em jogo é $\omega^{01} = arctg\frac{\mathbf{v}}{\mathbf{c}}$.

Como um espinor reage a este boost? A matriz que fez a transformação de Lorentz sobre o férmion é dada por:

$$\mathbf{S} = e^{-\frac{1}{8}\omega^{\mu\nu}[\delta_\mu,\delta_\nu]} \tag{510}$$

Assim:

$$\psi'(\mathbf{x}') = e^{\frac{1}{2}\omega^{01}\delta^0\delta^1}\psi(\mathbf{x}) \tag{511}$$

onde usaremos as matrizes $\delta$ na representação de Dirac. Deste modo:

$$\mathbf{S} = \mathbf{I} + \frac{1}{2}\omega^{01}(\delta^0\delta^1) + \frac{1}{2!}(\frac{1}{2}\omega^{01})^2\mathbf{I} + \frac{1}{3!}(\frac{1}{2}\omega^{01})^3(\delta^0\delta^1) + ... \tag{512}$$

Isso leva:

$$(cosh\frac{\omega^{01}}{2})\mathbf{I} + (senh\frac{\omega^{01}}{2}) \times \Pi \tag{513}$$

onde $\Pi$ será:

$$\Pi = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_x \\ \sigma_x & 0 \end{pmatrix}$$

Identificando:

$$\frac{\omega^{01}}{2} \equiv \alpha \tag{514}$$

temos:

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} cosh\alpha & 0 & 0 & senh\alpha \\ 0 & cosh\alpha & senh\alpha & 0 \\ 0 & senh\alpha & cosh\alpha & 0 \\ senh\alpha & 0 & 0 & cosh\alpha \end{pmatrix}$$

e, por exemplo:

$$\psi_1'(\mathbf{x}') = (cosh\frac{\omega^{01}}{2})\psi_1(\mathbf{x}) + (senh\frac{\omega^{01}}{2})\psi_4(\mathbf{x}) \tag{515}$$

Seja agora uma rotação espacial em torno do eixo z. Neste caso, o parâmetro em jogo é $\omega^{12} = \theta$.

E daí:

$$\mathbf{S} = e^{-\frac{1}{8}\omega^{\mu\nu}[\delta_\mu,\delta_\nu]} = e^{-\frac{1}{4}\theta[\delta_1,\delta_2]} = e^{-\frac{1}{2}\theta\delta_1\delta_2} = e^{-\frac{1}{2}\theta\delta^1\delta^2} \tag{516}$$

Assim:

$$\delta^1\delta^2 = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_x \\ -\sigma_x & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & \sigma_y \\ -\sigma_y & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\mathbf{i}\sigma_z & 0 \\ 0 & -\mathbf{i}\sigma_z \end{pmatrix} = (-\mathbf{i})\begin{pmatrix} \sigma_z & 0 \\ 0 & \sigma_z \end{pmatrix}$$

Isso é igual a $-\mathbf{i}\sum$.

Note que $(\delta^1\delta^2) = -\mathbf{I}$; $(\delta^1\delta^2)^3 = -(\delta^1\delta^2)$ e $(\delta^1\delta^2)^4 = +\mathbf{I}$. Temos, portanto $\sum^2 = \sum$ e $\sum^3 = \sum$. e chegamos à série alternada:

$$\mathbf{S} = \mathbf{I} + \frac{1}{2}\theta\sum - \frac{1}{2!}(\frac{\theta}{2})^2\mathbf{I} + \frac{1}{3!}(\frac{\mathbf{i}\theta}{2})^3\sum + .... \tag{517}$$

Chegamos em:
$$(cos\frac{\theta}{2})\mathbf{I}+\mathbf{i}(sen\frac{\theta}{2})\times\Pi \tag{518}$$
onde $\Pi$ é igual:
$$\Pi=\begin{pmatrix}\sigma_z & 0\\ 0 & \sigma_z\end{pmatrix}$$
Finalmente:
$$\psi'(\mathbf{x}')=\begin{pmatrix} e^{\mathbf{i}\frac{\theta}{2}} & 0 & 0 & 0\\ 0 & e^{-\mathbf{i}\frac{\theta}{2}} & 0 & 0\\ 0 & 0 & e^{\mathbf{i}\frac{\theta}{2}} & 0\\ 0 & 0 & 0 & e^{-\mathbf{i}\frac{\theta}{2}}\end{pmatrix}\psi(\mathbf{x})$$
Note que, por uma rotação completa ($\theta = 2\pi$), um vetor vai nele mesmo $\vec{\mathbf{v}'}=\vec{\mathbf{v}}$, enquanto, o férmion vai no seu oposto:
$$\psi'(\mathbf{x}')=-\psi(\mathbf{x}) \tag{519}$$
A questão é agora, como a partir dos espinores, poemos construir os tensores do espaço-tempo?? Já sabemos que os espinores são elementos algébricos relacionados à partículas de spin 1/2, 3/2, etc....

Sabemos também que:
$$\psi_\alpha\otimes\mathbf{A}^\mu=\chi^\mu_\alpha \tag{520}$$
e ainda que
$$\frac{1}{2}\otimes 1=\frac{1}{2}\oplus\frac{3}{2} \tag{521}$$
ou seja:
$$\chi^\mu_\alpha\ni\frac{1}{2},\frac{3}{2} \tag{522}$$
A (522) é chamada de Espinor vetorial ou Rarita-Schwinger.

Onde $\chi^0_\alpha,\chi^1\alpha,\chi^2\alpha,\chi^3\alpha$, tem ($\alpha = 1, ..., 4$) e se transforma:
$$\chi^\mu_\alpha(\mathbf{x})\mapsto\chi'^\mu_\alpha(\mathbf{x}')=\Lambda^\mu_\nu(\mathbf{x})\mathbf{S}_{\alpha\beta}(\omega)\chi^\nu_b eta(\mathbf{x}) \tag{523}$$
ou seja
$$\chi'(\mathbf{x}')=\Lambda\otimes\mathbf{S}\chi(\mathbf{x}) \tag{524}$$
Daí:
$$\chi'(\mathbf{x}')=e^{\frac{1}{2}\omega^{k\lambda}\Omega_{k\lambda}}e^{-\frac{1}{8}\omega^{\rho\sigma}[\delta_r ho,\delta_\sigma]}\chi(\mathbf{x}) \tag{525}$$

Considerando a transformação de ordem infinitesimal, ou seja, tomando os termos só até a primeira ordem:

$$\chi'^{\mu}_{\alpha}(\mathbf{x}') = (\zeta^{\mu}_{\nu} + \frac{1}{2}\omega^{k\lambda}(\Omega_{k\lambda})^{\mu}_{\nu})(\zeta_{\alpha\beta} - \frac{1}{8}\omega^{\rho\sigma}[\delta_{\rho},\delta_{\sigma}]_{\alpha\beta})\chi^{\nu}_{\beta}(\mathbf{x}) = \tag{526}$$

Continuando....

$$\chi^{\mu}_{\alpha}(\mathbf{x}) - \omega^{\mu}_{\nu}\chi^{\nu}_{\alpha}(\mathbf{x}) - \frac{1}{8}\omega^{\rho\sigma}[\delta_{\rho},\delta_{\sigma}]_{\alpha\beta}\chi^{\mu}_{\beta}(\mathbf{x}) + 0(\omega^{2}) \tag{527}$$

Note que, para a transformação infinitesimal, cada índice é retirado individualmente!!!!

Seja, por exemplo, um tensor genérico $\mathbf{T}^{\mu\nu}$. Daí:

$$\mathbf{T}'^{\mu\nu}_{\mathbf{k}\alpha\beta}(\mathbf{x}') \sim \mathbf{T}^{\mu\nu}_{\mathbf{k}\alpha\beta}(\mathbf{x}) + \zeta\mathbf{T}^{\mu\nu}_{\mathbf{k}\alpha\beta} \tag{528}$$

onde:

$$\zeta\mathbf{T}^{\mu\nu}_{\mathbf{k}\alpha\beta} = \omega^{\mu}_{\rho}\mathbf{T}^{\rho\nu}_{\mathbf{k}\alpha\beta} + \omega^{\nu}_{\rho}\mathbf{T}^{\mu\rho}_{\mathbf{k}\alpha\beta} - \omega^{0}_{k}\mathbf{T}^{\mu\nu}_{\rho\alpha\beta}... \tag{529}$$

Continuando....

$$-\frac{1}{8}\omega^{\rho\sigma}[\delta_{\rho},\delta_{\sigma}]_{\alpha\zeta}\mathbf{T}^{\mu\nu}_{\mathbf{k}\zeta\beta} - \frac{1}{8}\omega^{\rho\sigma}[\delta_{\rho},\delta_{\sigma}]_{\zeta\beta}\mathbf{T}^{\mu\nu}_{\mathbf{k}\alpha\zeta} \tag{530}$$

representa o termo de transformação infinitesimal.

## 8.8 Construção dos bilineares (ou condensadas) fermiônicos

Como podemos, a partir de um espinor, formar, por exemplo, um escalar?? A pergunta procede, pois da composição de dois objetos de spin 1/2 formamos objetos de spin 0 e 1. Seja então:

$$\psi_{\alpha}\chi_{\beta} \equiv \mathbf{T}_{\alpha\beta} \ni 0, 1 \tag{531}$$

Aplicando a Transformação de Lorentz:

$$\mathbf{T}'_{\alpha\beta} = \psi'_{\alpha}\chi'_{\beta} = \mathbf{S}_{\alpha\delta}\mathbf{S}_{\beta\zeta}\psi_{\delta}\chi_{z}eta \tag{532}$$

Observe que se $\mathbf{T}'_{\alpha\beta}$ é um escalar, então, $\mathbf{T}'_{\alpha\beta}(\mathbf{x}') = \mathbf{T}_{\alpha\beta}(\mathbf{x})$ e consequentemente, o produto das matrizes deve ser a identidade de alguma forma.

Como ilustração, tomemos $\mathbf{E^3}$, cujo grupo de rotação associado é o conhecido SO(3). Neste caso, sabemos que $\delta_i \equiv \sigma_i$, ou seja, a Álgebra de Clifford associada ao grupo "coincide"com as matrizes de Pauli. Assim, $\mathbf{x}' = \Lambda_{ij}\mathbf{x_j}$ e

$\Lambda^t\Lambda = \mathbf{I}$. Além de det$\Lambda$=1.

As rotações SO(3) nos espinores é dada pela matriz:

$$\mathbf{S} = e^{-\frac{1}{8}\omega_{ij}[\delta_i,\delta_j]} \tag{533}$$

e daí:

$$\psi'(\mathbf{x'}) = e^{-\frac{1}{8}\omega_{ij}[\delta_i,\delta_j]}\psi(\mathbf{x}) \tag{534}$$

Note que, como $\delta_i^+ = \delta_i$, temos:

$$\mathbf{S}^+ = e^{\frac{1}{8}\omega_{ij}[\delta_i,\delta_j]} = \mathbf{S^{-1}} \tag{535}$$

ou seja $\mathbf{S}^+\mathbf{S} = \mathbf{I}$.

a matriz que representa as rotações dos espinores é unitária. Isto é, rorações de SO(3) são unitariamente implementadas no espaço espinorial. Na verdade, isto ocorrerá para todo SO(N) (espaço euclidiano de qualquer dimensão).

Assim:

$$\psi'(\mathbf{x'}) = \mathbf{S}\psi(\mathbf{x}) \tag{536}$$

e

$$\chi'(\mathbf{x'}) = \mathbf{S}\chi(\mathbf{x}) \tag{537}$$

e construir o produto:

$$\chi^+\psi = \chi_1^*\psi' + \chi_2^*\psi_2 \tag{538}$$

Note que:

$$(\chi^+\psi)' = \chi'^+\psi' = \chi^+\mathbf{S}^+\mathbf{S}\psi \tag{539}$$

ou seja, a partir de dois espinores em 3 D espaciais, construímos um escalar. Daí:

$$\chi^+\psi = \chi_\alpha^*\psi_\alpha \tag{540}$$

e então:

$$\chi_\alpha'^*\psi_\alpha' = \mathbf{S}_{\alpha\beta}^*\chi_\beta\mathbf{S}_{\alpha\delta}\psi_\delta = \mathbf{S^*}_{\alpha\beta}\mathbf{S}_{\alpha\delta}\chi_\beta^*\psi_\delta \tag{541}$$

Assim:

$$(\chi_\alpha^*\psi_\alpha)' = \mathbf{S^*}_{\alpha\beta}\mathbf{S}_{\alpha\delta}\chi_\beta^*\psi_\delta = (\mathbf{S}^+\mathbf{S})_{\beta\delta}\chi_\beta^*\psi_\delta = \chi_\beta^*\psi_\beta \tag{542}$$

onde o termo $(\mathbf{S^{*t}})_{\beta\alpha} = (\mathbf{S}^+)_{\beta\alpha}$.

Ou seja, $\chi^+\psi$ é a combinação que produz o s=0 (escalar) , a partir de dois espinores. A questão agora é: é possível trazer este procedimento para o espaço de Minkowski??? Isto é, em $\mathbf{M^{1,3}}$, sendo $\psi' = \mathbf{S}\psi$, $(\chi^+\psi)' = (\chi^+\psi)$.

## 8.9 Construindo tensores a partir dos espinores

Tínhamos visto que, em SO(3):

$$\psi(\vec{\mathbf{x}}) \mapsto \psi'(\vec{\mathbf{x'}}) = \mathbf{S}(\theta)\psi\vec{\mathbf{x'}} \tag{543}$$

daí

$$\mathbf{S}^{+}\mathbf{S} = \mathbf{I_2} \mapsto (\psi^{+}\psi)' = \psi^{+}\psi \tag{544}$$

que é escalar. Transportando a discussão para o espaço de Minkowski, $\psi^{+}\psi$ é invariante de Lorentz????

A transformação é dada por:

$$\mathbf{x}'^{\mu} = \Lambda^{\mu}_{\nu}(\omega)\mathbf{x}^{\nu} \tag{545}$$

ou

$$\psi'(\mathbf{x}') = \mathbf{S}(\omega)\psi(\mathbf{x}) \tag{546}$$

onde

$$\mathbf{S}(\omega) = e^{-\frac{1}{8}\omega^{\mu\nu}[\delta_{\mu},\delta_{\nu}]} \tag{547}$$

e chegamos em

$$\mathbf{S}\delta^{\mu}\mathbf{S^{-1}} = (\Lambda^{-1})^{\mu}_{\nu}\delta^{\nu} \tag{548}$$

esta seria a condição de covariância da equação de Dirac sob SO (1,3).

Da Teoria de Grupos o grupo SO (1,3) é um grupo não compacto. De acordo com o o Teorema dos Grupos de Lie, será uma representação de dimensão finita de um grupo (não) compacto (não) são unitárias.

No espaço de Minkowski, portanto, temos:

$$(\psi^{+}\psi)' = \psi'^{+}\psi' = \psi^{+}\mathbf{S}^{+}\mathbf{S}\psi = \psi^{+}\delta^{0}\mathbf{S^{-1}}\delta^{0}\mathbf{S}\psi = (\psi^{+}\delta^{0})\mathbf{S^{-1}}\delta^{0}\mathbf{S}\psi \tag{549}$$

Esta discussão justifica a introdução de um conjunto Hermiteano modificado no espaço dos espinores de Minkowski:

$$\psi^{+} \mapsto \overline{\psi} \equiv \psi^{+}\delta^{0} \tag{550}$$

Este é o chamado conjunto de Dirac.

Assim, seja $\Gamma$ uma matriz genérica ativando nos $\psi'$:

$$\overline{\Gamma} \equiv \delta^{0}\Gamma^{+}\delta^{0} \tag{551}$$

e daí

$$\overline{\Gamma\psi} = (\Gamma\psi)^{+}\delta^{0} = \psi^{+}\Gamma^{+}\delta^{0} = \overline{\psi}\overline{\Gamma} \tag{552}$$

ou seja:

$$\overline{\Gamma_1\Gamma_2} \equiv \delta^{0}(\Gamma_1\Gamma_2)^{+}\delta^{0} = \delta^{0}\Gamma_2^{+}\Gamma_1^{+}\delta^{0} = \overline{\Gamma_2\Gamma_1} \tag{553}$$

Além disto $\mathbf{C}$ $\in$complexos.

$$\overline{\mathbf{C}\psi} = \mathbf{C}^{*}\overline{\psi} \tag{554}$$

e

$$\overline{\mathbf{C}\Gamma} = \mathbf{C}^{*}\overline{\Gamma} \tag{555}$$

E, para qualquer ágebra de Clifford (independente de ser o espaço de Minkowski):

$$\mathbf{S^{-1}} = \overline{\mathbf{S}} \mapsto \overline{\mathbf{S}}\mathbf{S} = \mathbf{I} \tag{556}$$

Assim:

$$\psi^{+}\psi \mapsto \overline{\psi}\psi \tag{557}$$

Note que $(\overline{\psi}\psi)$ é um escalar de Lorentz (independente do referencial), mas não é um escalar positivo definido:

$$\psi' = \mathbf{S}\psi \tag{558}$$

e

$$\psi'^{+} = \psi^{+}\mathbf{S}^{+} \tag{559}$$

daí:

$$\psi'^{+}\delta^{0} = \overline{\psi}' = \psi^{+}\mathbf{S}^{+}\delta^{0} = \overline{\psi}\overline{\mathbf{S}} = \overline{\psi}\mathbf{S^{-1}} \tag{560}$$

Chegamos em

$$\overline{\psi}'\psi' = \overline{\psi}\mathbf{S^{-1}}\mathbf{S}\psi = \overline{\psi}\psi \tag{561}$$

Mas, o que é $\psi^{+}\psi$???

Note que:

$$\psi^{+}\psi = \psi^{+}\delta^{0}\delta^{0}\psi = \overline{\psi}\delta^{0}\psi \equiv \mathbf{v^0} \tag{562}$$

Mas, identificaremos:

$$\mathbf{v^0} \oplus \mathbf{v^i} \equiv \mathbf{v}^{\mu} \tag{563}$$

onde

$$\psi^{+}\psi \equiv \overline{\psi}\delta^{0}\psi \in \overline{\psi}\delta^{\mu}\psi \tag{564}$$

de modo que

$$\mathbf{v}^{\mu} \equiv \overline{\psi}\delta^{\mu}\psi \tag{565}$$

Aqui são 4 números $\mathbf{v^0}$, $\mathbf{v^1}$, $\mathbf{v^2}$ e $\mathbf{v^3}$. Estes números $\mathbf{v^0}$, $\mathbf{v^1}$, $\mathbf{v^2}$ e $\mathbf{v^3}$ são as componentes de um 4-vetor se nós assegurarmos que se relacionam devidamente sob a ação de uma transformação de Lorentz geral, ou seja, $\psi^+\psi = \overline{\psi}\delta^0\psi \mapsto \overline{\psi}\delta^\mu\psi$ e $\overline{\psi}\delta^i\psi$.

Aplicando a transformação de Lorentz:

$$(\overline{\psi}\delta^\mu\psi)' = \overline{\psi}'\delta^\mu\psi' = \overline{\psi}\mathbf{S^{-1}}\delta^\mu\mathbf{S}\psi = \Lambda^\mu_\nu\overline{\psi}\delta^\nu\psi \tag{566}$$

ou seja:

$$\mathbf{v}'^\mu = \Lambda^\mu_\nu\mathbf{v}^\nu \tag{567}$$

Temos, consequentemente, $\overline{\psi}\delta^\mu\psi$ que constitui um 4-vetor do espaço tempo. Então, temos $\overline{\psi}\psi \equiv \Phi$ que é escalar e $\overline{\psi}\delta^\mu\psi \equiv \mathbf{v}^\mu$ que é 4-vetor.

Seja agora:

$$\sum^{\mu\nu} \equiv -\frac{1}{4}[\delta^\mu, \delta^\nu] \tag{568}$$

então

$$(\overline{\psi}\sum^{\mu\nu}\psi)' = \overline{\psi}'\sum^{\mu\nu}\psi' = \overline{\psi}\mathbf{S^{-1}}\sum^{\mu\nu}\mathbf{S}\psi = \tag{569}$$

Continuando, teremos:

$$(\overline{\psi}\sum^{\mu\nu}\psi)' = \Lambda^\mu_k\Lambda^\nu_\lambda(\overline{\psi}\sum^{k\lambda}\psi) \tag{570}$$

ou

$$\mathbf{T}'^{\mu\nu} = \Lambda^\mu_k\Lambda^\nu_\lambda\mathbf{T^{k\lambda}} \tag{571}$$

Achamos o tensor !!!!!!!!! Começamos assim, a nos convencer que todas as estruturas fundamentais do espaço-tempo a partir de espinores.

## 8.10 Significado físico da grandeza $\overline{\psi}\delta^\mu\psi$

Com base na equação de Dirac:

$$\mathbf{i}\delta^\mu\partial_\mu\psi - \mathbf{m}\psi = 0 \tag{572}$$

ou

$$\mathbf{i}(\delta^\mu)_{\alpha\beta}\partial_\mu\psi_\beta - \mathbf{m}\psi_\alpha = 0 \tag{573}$$

Multiplicando o termo da esquerda por $\psi$, temos:

$$\mathbf{i}\overline{\psi}\delta^\mu\partial_\mu\psi - \mathbf{m}\overline{\psi}\psi = 0 \tag{574}$$

é uma equação invariante por Lorentz. Daí:

$$\overline{\mathbf{i}\delta^\mu\partial_\mu\psi} - \mathbf{m}\psi = 0 \tag{575}$$

que leva

$$-\mathbf{i}(\partial_\mu\overline{\psi})\overline{\delta^\mu} - \mathbf{m}\overline{\psi} = 0 \tag{576}$$

Mas:

$$\delta^{0+} = \delta^0 = \overline{\delta}^0 \equiv \delta^0\delta^{0+}\delta^0 = \delta^0 \tag{577}$$

e

$$\delta^{i+} = -\delta^i = \overline{\delta}^i \equiv \delta^0\delta^{i+}\delta^0 = -\delta^0\delta^i\delta^0 = \delta^0\delta^0\delta^i = \delta^i = \overline{\delta}^\mu = \delta^\mu \tag{578}$$

Usando (574), (576) e (578), segue que:

$$\mathbf{i}\overline{\psi}\delta^\mu\partial_\mu\psi - \mathbf{m}\overline{\psi}\psi = 0 \tag{579}$$

consequentemente

$$\mathbf{i}(\partial_\mu\overline{\psi})\delta^\mu + \mathbf{m}\overline{\psi} = 0 \tag{580}$$

Chegamos em

$$\mathbf{i}(\partial_\mu\overline{\psi})\delta^\mu\psi + \mathbf{m}\overline{\psi}\psi = 0 \tag{581}$$

Prosseguindo

$$(\partial_\mu\overline{\psi})\delta^\mu\psi + \overline{\psi}\delta^\mu(\partial_\mu\psi) = 0 \mapsto \partial_\mu(\overline{\psi}\delta^\mu\psi) = 0 \tag{582}$$

ou seja:

$$\partial_\mu\overline{\psi}\delta^\mu\psi = 0 \mapsto \partial_0\overline{\psi}\delta^0\psi + \partial_i\overline{\psi}\delta^i\psi = 0 \mapsto \frac{1}{c}\partial_t(\overline{\psi}\delta^0\psi) + \vec{\nabla}\cdot(\overline{\psi}\vec{\delta}\psi) = 0 \tag{583}$$

que é uma lei de "conservação".

Além disto:

$$(\overline{\psi}\delta^\mu\psi)^* = (\overline{\psi}\delta^\mu\psi)^+ = \overline{\overline{\psi}\delta^\mu\psi} = \overline{\psi}\delta^\mu\overline{\overline{\psi}} = \overline{\psi}\delta^\mu\psi \tag{584}$$

pois

$$\overline{\overline{\psi}} = \delta^0(\overline{\psi})^+ = \delta^0(\psi^+\delta^0)^+ = \delta^0\delta^0\psi = \psi \tag{585}$$

ou seja

$$\overline{\overline{\psi}} = \psi \tag{586}$$

e

$$\overline{\overline{\Gamma}} = \Gamma \tag{587}$$

Daí, concluímos que $\overline{\psi}\delta^\mu\psi$, além de ser um 4-vetor de Lorentz, também é uma grandeza real e conservada:

$$\overline{\psi}\delta^\mu\psi \equiv \mathbf{j}^\mu \mapsto \partial_\mu\mathbf{j}^\mu = 0 \tag{588}$$

Então

$$\frac{1}{c}\partial_t\overline{\psi}\delta^0\psi + \partial_i\overline{\psi}\delta^i\psi = 0 \tag{589}$$

Assim

$$\frac{1}{c}\frac{d}{dt}\int \mathbf{d^3}\vec{\mathbf{x}}\overline{\psi}\delta^0\psi = -\int \mathbf{d^3}\vec{\mathbf{x}}\vec{\nabla}\cdot(\overline{\psi}\vec{\delta}\psi) = \oint_{\Sigma} \mathbf{d}\vec{\sum}\cdot\vec{\mathbf{j}} \tag{590}$$

ou

$$\frac{1}{c}\dot{\mathbf{Q}} = \oint_{\Sigma_v} d\vec{\sum}\cdot\vec{\mathbf{j}} \tag{591}$$

Como interpretar esta carga que se conserva????????

## 8.11 Stress-tensor canônico

Suponha uma Lagrangeana invariante por transformação no espaço-tempo, isto é, as coordenadas $\mathbf{x}^\mu$ não aparecem explicitamente:

$$\mathbf{L} = \mathbf{L}(\phi, \partial_\mu\phi) \tag{592}$$

Fazendo a transformação infinitesiamal:

$$\mathbf{x}^\mu \mapsto \mathbf{x}^\mu + \mathbf{a}^\mu \tag{593}$$

de modo que o campo:

$$\phi \mapsto \phi(\mathbf{x}+\mathbf{a}) \tag{594}$$

ou seja

$$\delta\phi = \phi(\mathbf{x}+\mathbf{a}) - \phi(\mathbf{x}) = \phi(\mathbf{x}) + \mathbf{a}^\mu\partial_\mu\phi(\mathbf{x}) - \phi(\mathbf{x}) = \mathbf{a}^\mu\partial_\mu\phi(\mathbf{x}) \tag{595}$$

e também

$$\delta\partial_\mu\phi = \partial_\mu\delta\phi = \mathbf{a}^\nu\partial_\mu\partial_\nu\phi \tag{596}$$

A variação na Lagrangeana

$$\delta\mathbf{L} = \mathbf{a}^\mu\partial_\mu\mathbf{L} = \frac{\delta\mathbf{L}}{\delta\phi}\delta\phi + \frac{\delta\mathbf{L}}{\delta\partial_\mu\phi}\delta\partial_\mu\phi \tag{597}$$

continuando.....

$$\partial_\mu(\frac{\delta\mathbf{L}}{\delta\partial_\mu\phi})\mathbf{a}^\nu\partial_\nu\phi + \frac{\delta\mathbf{L}}{\delta\partial_\mu\phi}\mathbf{a}^\nu\partial_\nu\partial_\mu\phi = ... \tag{598}$$

continuando....

$$\mathbf{a}^\nu[(\partial_\mu\frac{\delta\mathbf{L}}{\delta\partial_\mu\phi})\partial_\nu\phi + \frac{\delta\mathbf{L}}{\delta\partial_\mu\phi}\partial_\mu\partial_\nu\phi] = \mathbf{a}^\nu\partial_\mu[\frac{\delta\mathbf{L}}{\delta\partial_\mu\phi}\partial_\nu\phi] \tag{599}$$

Assim

$$\mathbf{a}^\nu \partial_\mu [\frac{\delta \mathbf{L}}{\delta \partial_\mu \phi} \partial_\nu \phi] - \mathbf{a}^\nu \partial_\nu \mathbf{L} = 0 \tag{600}$$

e

$$\mathbf{a}^\nu [\partial_\mu (\frac{\delta \mathbf{L}}{\delta \partial_\mu \phi} \partial_\nu \phi) - \delta^\mu_\nu \partial_\mu \mathbf{L}] = 0 \tag{601}$$

Como $\mathbf{a}^\nu$ é uma variação arbitrária:

$$\partial_\mu [\frac{\delta \mathbf{L}}{\delta \partial_\mu \phi} \partial_\nu \phi - \delta^\mu_\nu \mathbf{L}] = 0 \tag{602}$$

e definimos:

$$\mathbf{T}^\mu_\nu = \frac{\delta \mathbf{L}}{\delta \partial_\mu \phi} \partial_\nu \phi - \delta^\mu_\nu \mathbf{L} \tag{603}$$

ou

$$\mathbf{T}^{\mu\nu} = \frac{\delta \mathbf{L}}{\delta \partial_\mu \phi} \partial^\nu \phi - \eta^{\mu\nu} \mathbf{L} \tag{604}$$

A equação (604) é chamada de Tensor de Stress-canônico.

Note que $\mathbf{T}^{\mu\nu} \neq \mathbf{T}^{\nu\mu}$, ou seja, o tensor de Stress-canônico, em geral, não é simétrico (exceto, caso de Klein-Gordon). Note ainda que ele se conserva, por construção, somente com relação a um dos índices, neste caso o íncice $\mu$.

## 8.12 EXERCÍCIO

Mostre que $\mathbf{T}^{\mu\nu}$ é definido por $\mathbf{T}^{\mu\nu} = \frac{\delta \mathbf{L}}{\delta \partial_\mu \phi} \partial^\nu \phi - \eta^{\mu\nu} \mathbf{L}$ é tal que $\partial_\mu \mathbf{T}^{\mu\nu} = 0$.

Tomando a expressão $\partial_\mu \mathbf{T}^{\mu\nu} = 0$, e integrando, segue-se:

$$\int \partial_\mu \mathbf{T}^{\mu\nu} \mathbf{d^3}\vec{\mathbf{x}} = 0 \mapsto \int \partial_t \mathbf{T}^{\mathbf{0}\nu} \mathbf{d^3}\vec{\mathbf{x}} + \int \partial_i \mathbf{T}^{\mathbf{i}\nu} \mathbf{d^3}\vec{\mathbf{x}} = ... \tag{605}$$

continuando....

$$\frac{\mathbf{d}}{\mathbf{dt}} \int \mathbf{T}^{\mathbf{0}\nu} \mathbf{d^3}\vec{\mathbf{x}} + \int_S \mathbf{T}^{\mathbf{i}\nu} \mathbf{S_i} = \tag{606}$$

Chegamos em

$$\frac{\mathbf{d}}{\mathbf{dt}} \int \mathbf{T}^{\mathbf{o}\nu} \mathbf{d^3}\vec{\mathbf{x}} = 0 \tag{607}$$

ou seja

$$\mathbf{P}^\mu = (\mathbf{E}, \vec{\mathbf{P}}) \equiv \int \mathbf{T}^{\mathbf{o}\mu} \mathbf{d^3}\vec{\mathbf{x}} \tag{608}$$

pois

$$\frac{\mathbf{dP}^{\mu}}{\mathbf{dt}} = 0 \tag{609}$$

temos $\frac{\mathbf{dE}}{\mathbf{dt}} = 0$ e $\frac{\mathbf{d\vec{P}}}{\mathbf{dt}} = 0$.

Na eletrodinâmica de Maxwell, a Lagrangeana é dada por:

$$\mathbf{L} = -\frac{1}{4}\mathbf{F}_{\mu\nu}\mathbf{F}^{\mu\nu} = -\frac{1}{4}[(\partial_{\mu}\mathbf{A}_{\nu} - \partial_{\nu}\mathbf{A}_{\mu})(\partial^{\mu}\mathbf{A}^{\nu} - \partial^{\nu}\mathbf{A}^{\mu})] = ... \tag{610}$$

continuando...

$$-\frac{1}{2}(\partial_{\mu}\mathbf{A}_{\nu}\partial^{\mu}\mathbf{A}^{\nu} - \partial_{\mu}\mathbf{A}_{\nu}\partial^{\nu}\mathbf{A}^{\mu}) \tag{611}$$

o stress tensor canônico:

$$\mathbf{T}^{\alpha\beta} = \frac{\delta\mathbf{L}}{\delta\partial_{\alpha}\mathbf{A}_{\lambda}}\partial^{\beta}\mathbf{A}_{\lambda} - \eta^{\alpha\beta}\mathbf{L} \tag{612}$$

Chegamos em

$$(-\delta^{\alpha}_{\mu}\delta^{\lambda}_{\nu}\partial^{\mu}\mathbf{A}^{\nu} + \frac{1}{2}\delta^{\alpha}_{\mu}\delta^{\lambda}_{\nu}\partial^{\nu}\mathbf{A}^{\mu} + \frac{1}{2}\partial^{\mu}\mathbf{A}^{\nu}\delta^{\alpha}_{\nu}\delta^{\lambda}_{\mu})\partial^{\beta}\mathbf{A}_{\lambda} - \eta^{\alpha\beta}\mathbf{L} \tag{613}$$

Ao fazer estes cálculos, o tensor de stress canônico, além de não ser simétrico, também surge dependendo explicitamente do campo $\mathbf{A}_{\mu}$. Isto leva a um $\mathbf{T}^{\alpha\beta}$ diferente para cada gauge fixado, ou seja, ele não é invariante de gauge. E para terminar de "desgraça-lo", o tensor de stress canônico não possui traço nulo para partículas de massa nula.

## 8.13 Razões para um tensor de energia-momento simétrico

Razão 1: Temos na Gravitação, a seguinte relação:

$$\mathbf{G}^{\mu\nu} = -\delta\pi\mathbf{G}\theta^{\mu\nu} \tag{614}$$

O termo da esquerda é o chamado Tensor de Einstein e possui informações de curvatura. O termo da direita também deve ser simétrico, além de conter toda a informação de ??????????.

Razão 2: O momento angular total do campo não se conserva se o stress-tensor não é simétrico:

$$\mathbf{M}^{\alpha\beta\delta} = \mathbf{T}^{\alpha\beta}\mathbf{x}^{\delta} - \mathbf{T}^{\alpha\delta}\mathbf{x}^{\beta} \mapsto \partial_{\alpha}\mathbf{M}^{\alpha\beta\delta} = \mathbf{T}^{\alpha\beta}\zeta^{\delta}_{\alpha} - \mathbf{T}^{\alpha\delta}\zeta^{\beta}_{\alpha} = \mathbf{T}^{\delta\beta} - \mathbf{T}^{\beta\delta} \neq 0 \tag{615}$$

Temos para tudo isso, se $\mathbf{T}^{\delta\beta} \neq \mathbf{T}^{\beta\delta}$.

## 8.14 Tensor de energia-momento (ou stress-tensor) simétrico

A definição do $\mathbf{T}^{\mu\nu}$ é ambígua. Além disto, não é, por si só, uma quantidade mensurável; por outro lado, o momentum e a energia "contidos"nele são. É possível redefiní-la,somando um termo antissimétrico:

$$\mathbf{T}^{\mu\nu} \mapsto \mathbf{T}^{\mu\nu} + \partial_\lambda \mathbf{E}^{\lambda\mu\nu} = \theta^{\mu\nu} = \theta^{\nu\mu} \tag{616}$$

onde $\mathbf{E}^{\lambda\mu\nu} = -\mathbf{E}^{\mu\lambda\nu}$. Note que a conservação se mantém:

$$\partial_\mu \theta^{\mu\nu} = 0 \tag{617}$$

e chamamos

$$\theta^{\mu\nu} = \theta^{\nu\mu} \tag{618}$$

de stress-tensor simétrico.

Daí

$$\partial_\mu \theta^{\mu\nu} = 0 \mapsto \int \partial_\mu \theta^{\mu\nu} \mathbf{d^3\vec{x}} = 0 \mapsto \frac{\mathbf{d}}{\mathbf{dt}} \int \theta^{0\nu} \mathbf{d^3\vec{x}} = 0 \tag{619}$$

ou seja

$$\mathbf{P}^\mu = (\mathbf{E}, \vec{\mathbf{P}}) = \int \mathbf{d^3\vec{x}} \theta^{0\mu} \tag{620}$$

Se, por exemplo, "ligarmos a corrente":

$$\tau^{\mu\nu} = \theta^{\mu\nu} + \mathbf{j}^{\mu\nu} \tag{621}$$

em geral, teremos $\partial_\mu \tau^{\mu\nu} \neq 0$, $\partial_\mu \theta^{\mu\nu} \neq 0$ e $\partial_\mu \mathbf{j}^{\mu\nu} \neq 0$, ou seja, estragou tudo. Suponha que:

$$\partial_\mu \theta^{\mu\nu} = \mathbf{f}^\nu \tag{622}$$

Daí

$$\int \partial_\mu \theta^{\mu\nu} \mathbf{d^3\vec{x}} = \int \mathbf{f}^\nu \mathbf{d^3\vec{x}} \mapsto \frac{\mathbf{d}}{\mathbf{dt}} \mathbf{P}^\nu = \int \mathbf{f}^\nu \mathbf{d^3\vec{x}} \tag{623}$$

Acabamos de encontra a Segunda Lei de Newton!!!!!!!

Seja:

$$\partial_\mu \mathbf{M}^{\mu\nu} = -\mathbf{f}^\nu \tag{624}$$

A relação (624) é chamada de Tensor densidade de matéria. Então, a soma $\theta^{\mu\nu} + \mathbf{M}^{\mu\nu}$ se conserva, pois:

$$\partial_\mu (\theta^{\mu\nu} + \mathbf{M}^{\mu\nu}) = \mathbf{f}^\nu - \mathbf{f}^\nu = 0 \tag{625}$$

Segue-se, então, a seguinte sequência de passos:

- 1 - Ligar a corrente $\partial_\mu \theta^{\mu\nu} = \mathbf{f}^\nu$.
- 2 - Quem é $\mathbf{f}^\nu$??? É o mais simples tensor contravariante construído com uma derivada conveniente do campo e a corrente.
- 3 - Desligar a corrente.

Note que assim, surge naturalmente a expressão da força da teoria, sem precisar postular.

## 8.15 Exemplo de Klein-Gordon

$$\Box\phi + \mathbf{m^2}\phi = 0 \tag{626}$$

Assim, seguiremos os seguintes passos:

Ligaremos a corrente

$$\Box\phi + \mathbf{m^2}\phi = \mathbf{j} \tag{627}$$

Assim:

$$\mathbf{f}^\mu = \mathbf{j}\partial^\mu\phi = (\Box\phi + \mathbf{m^2}\phi)\partial^\mu\phi \tag{628}$$

Mas:

$$\mathbf{m^2}\phi\partial^\mu\phi = \partial^\mu(\frac{\mathbf{m^2}\phi^2}{2}) = \partial_\nu(\eta^{\mu\nu}\frac{\mathbf{m^2}\phi^2}{2}) \tag{629}$$

Chegamos em

$$\partial_\nu(\partial^\nu\phi\partial^\mu\phi) = (\Box\phi)\partial^\mu\phi + \partial^\nu\phi\partial^\mu\partial_\nu\phi = (\Box\phi)\partial^\mu\phi + \partial^\mu(\frac{\partial^\nu\phi\partial_\nu\phi}{2}) \tag{630}$$

Assim:

$$\mathbf{f}^\mu = \partial_\nu(\eta^{\mu\nu}\frac{\mathbf{m^2}\phi^2}{2}) + \partial_\nu(\partial^\mu\phi\partial^\nu\phi) - \partial^\mu(\frac{\partial_\alpha\phi\partial^\alpha\phi}{2}) \tag{631}$$

Terminamos em

$$\partial_\nu[\eta^{\mu\nu}\frac{\mathbf{m^2}\phi^2}{2} + \partial^\mu\phi\partial^\nu\phi - \eta^{\mu\nu}\frac{\partial_\alpha\phi\partial^\alpha\phi}{2}] \tag{632}$$

é a expressão da força doida incluída na teoria.

E por, último, desligaremos a corrente:

$$\partial_\nu[\partial^\mu\phi\partial^\nu\phi + \eta^{\mu\nu}\frac{\mathbf{m^2}\phi^2}{2} - \eta^{\mu\nu}\frac{\partial_\alpha\phi\partial^\alpha\phi}{2}] = 0 \tag{633}$$

Como resposta final, obteremos:

$$\theta^{\mu\nu} = \partial^{\mu}\phi\partial^{\nu}\phi + \eta^{\mu\nu}\frac{\mathbf{m^2}\phi^2}{2} - \eta^{\mu\nu}\frac{\partial_{\alpha}\phi\partial^{\alpha}\phi}{2} \tag{634}$$

Em Maxwell:

$$\partial_{\mu}\mathbf{F}^{\mu\nu} = 0 \tag{635}$$

e

$$\partial_{\alpha}\mathbf{F}_{\beta\delta} + \partial_{\delta}\mathbf{F}_{\alpha\beta} + \partial_{\beta}\mathbf{F}_{\delta\alpha} = 0 \tag{636}$$

Temos que ligar a corrente:

$$\partial_{\mu}\mathbf{F}^{\mu\nu} = \mathbf{j}^{\nu} \tag{637}$$

e

$$\partial_{\alpha}\mathbf{F}_{\beta\delta} + \partial_{\delta}\mathbf{F}_{\alpha\beta} + \partial_{\beta}\mathbf{F}_{\delta\alpha} = 0 \tag{638}$$

Temos:

$$\mathbf{f}^{\mu} = \mathbf{j}_{\nu}\mathbf{F}^{\nu\mu} = (\partial^{\lambda}\mathbf{F}_{\lambda\nu})\mathbf{F}^{\nu\mu} \tag{639}$$

Mas

$$\partial^{\lambda}(\mathbf{F}_{\lambda\nu}\mathbf{F}^{\nu\mu}) = (\partial^{\lambda}\mathbf{F}_{\lambda\nu})\mathbf{F}^{\nu\mu} + \mathbf{F}_{\lambda\nu}\partial^{\lambda}\mathbf{F}^{\nu\mu} \tag{640}$$

Daí

$$\mathbf{f}^{\mu} = \partial^{\lambda}(\mathbf{F}_{\lambda\nu}\mathbf{F}^{\nu\mu}) - \mathbf{F}_{\lambda\nu}\partial^{\lambda}\mathbf{F}^{\nu\mu} = \partial^{\lambda}(\mathbf{F}_{\lambda\nu}\mathbf{F}^{\nu\mu}) - \frac{1}{2}\mathbf{F}_{\lambda\nu}[\partial^{\lambda}\mathbf{F}^{\nu\mu} - \partial^{\nu}\mathbf{F}^{\lambda\mu}] \tag{641}$$

O produto de um tensor simétrico por um simétrico é nulo.

$$\mathbf{f}^{\mu} = \partial^{\lambda}(\mathbf{F}_{\lambda\nu}\mathbf{F}^{\nu\mu}) - \frac{1}{2}\mathbf{F}_{\lambda\nu}[\partial^{\lambda}\mathbf{F}^{\lambda\mu} + \partial^{\nu}\mathbf{F}^{\mu\lambda}] \tag{642}$$

Mas, da identidade de Bianchi:

$$\partial_{\alpha}\mathbf{F}_{\beta\delta} + \partial_{\beta}\mathbf{F}_{\delta\alpha} + \partial_{\delta}\mathbf{F}_{\alpha\beta} = 0 \tag{643}$$

então

$$\mathbf{f}^{\mu} = \partial^{\lambda}(\mathbf{F}_{\lambda\nu}\mathbf{F}^{\nu\mu}) + \frac{1}{2}\mathbf{F}_{\lambda\nu}\partial^{\mu}\mathbf{F}^{\lambda\nu} = \partial^{\lambda}(\mathbf{F}_{\lambda\nu}\mathbf{F}^{\nu\mu}) + \frac{1}{4}\partial^{\mu}(\mathbf{F}_{\lambda\nu}\mathbf{F}^{\lambda\nu}) = \partial_{\nu}(\theta^{\mu\nu}) \tag{644}$$

Assim

$$\mathbf{f}^{\mu} = \partial^{\lambda}(\mathbf{F}_{\lambda\delta}\mathbf{F}^{\delta\mu}) + \frac{1}{4}\partial^{\mu}(\mathbf{F}_{\alpha\beta}\mathbf{F}^{\alpha\beta}) = \partial_{\lambda}(\mathbf{F}^{\lambda}_{\delta}\mathbf{F}^{\delta\mu}) + \frac{1}{4}\eta^{\mu\nu}\partial_{\nu}(\mathbf{F}_{\alpha\beta}\mathbf{F}^{\alpha\beta}) \tag{645}$$

Chegamos em

$$\partial_{\nu}[\mathbf{F}^{\nu}_{\delta}\mathbf{F}^{\delta\mu} + \frac{1}{4}\eta^{\mu\nu}\mathbf{F}_{\alpha\beta}\mathbf{F}^{\alpha\beta}] \tag{646}$$

Agora, desligaremos a corrente:

$$\mathbf{F}^{\nu}_{\delta}\mathbf{F}^{\delta\mu} = -\mathbf{F}^{\nu}_{\delta}\mathbf{F}^{\mu\delta} = -\mathbf{F}^{\nu\delta}\mathbf{F}^{\mu}_{\delta} = \mathbf{F}^{\delta\nu}\mathbf{F}^{\mu}_{\nu} = \mathbf{F}^{\mu}_{\delta}\mathbf{F}^{\mu\delta}\mathbf{F}^{\nu}_{\delta} \tag{647}$$

Voltando em (644), obtém-se:

$$\mathbf{f}^{\mu} = \partial_{\nu}[\mathbf{F}^{\mu}_{\delta}\mathbf{F}^{\delta\nu} + \frac{1}{4}\eta^{\mu\nu}\mathbf{F}_{\alpha\beta}\mathbf{F}^{\alpha\beta}] \tag{648}$$

isto é

$$\theta^{\mu\nu}\mathbf{F}^{\mu}_{\delta}\mathbf{F}^{\delta\nu} + \frac{1}{4}\eta^{\mu\nu}\mathbf{F}_{\alpha\beta}\mathbf{F}^{\alpha\beta} \tag{649}$$

## 8.16 De volta à Equação de Dirac

$$(\mathbf{i}\delta^{\mu}\partial_{\mu} - \mathbf{m})\psi = 0 \tag{650}$$

Sendo $\partial_{\mu}\overline{\psi}\partial^{\mu}\psi = 0$ e $\mathbf{j}^{\mu}$ está conservada.

Temos

$$\mathbf{Q} = \int \mathbf{d^3\vec{x}j^0(t;\vec{x})} = \int \mathbf{d^3\vec{x}}\psi^{+}\psi \tag{651}$$

O que vamos discutir aqui são as implicações das correntes conservadas.

Temos a corrente vetorial, em SO(1,3):

$$\overline{\psi}\partial^{\mu}\psi \mapsto \overline{\psi'}\partial^{\mu}\psi \tag{652}$$

temos

$$\psi' = \mathbf{S}(\omega)\psi \mapsto (\overline{\psi}\partial^{\mu}\psi)' = \Lambda^{\mu}_{\nu}(\omega)(\overline{\psi}\partial^{\mu}\psi) \tag{653}$$

O que esta corrente descreve???????

Vamos analisar os férmions de massa nula:

$$\mathbf{i}\partial^{\mu}\partial_{\mu}\psi = 0 \tag{654}$$

Pela Álgebra de Clifford, temos $\delta_5 = \delta^0\delta^1\delta^2\delta^3$. Assim

$$(\delta_5)_{Weyl} = \begin{pmatrix} \mathbf{I} & 0 \\ 0 & -\mathbf{I} \end{pmatrix}$$

e

$$(\delta_5)_{Dirac} = \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{I} \\ \mathbf{I} & 0 \end{pmatrix}$$

Assim, temos que $\delta_5^2 = \mathbf{I}$; $\delta_5^+ = \delta_5$ e $\overline{\delta}_5 = -\delta_5$. No termo, $\mathbf{i}\delta_\mu^\partial \psi = 0$, inserimos no inicio, $\delta_5$.

Temos $\delta_5, \delta^\mu = 0$. Assim, $-\mathbf{i}\delta^\mu \partial_\mu(\delta_5\psi) = 0$. O termo $\delta_5\psi$ também é solução.

$$(\mathbf{i}\delta^\mu \partial_\mu - \mathbf{m})\psi = 0 \tag{655}$$

e

$$(\mathbf{i}\delta^\mu \partial_\mu + \mathbf{m})(\delta_5\psi) = 0 \tag{656}$$

Ambas equações são diferentes. Portanto, temos que $\psi' \sim \delta_5\psi \neq \psi$. Também é solução, é simétrico. Na simetria quiral. $\psi$ e $\delta_5\psi$ são soluções da mesma equação.

## 8.17 Papel importante da matriz $\delta_5$ no espaço espinorial

Quando

$$\delta_5^2 = \mathbf{I} \tag{657}$$

define operadores projeção. Temos:

$$\mathbf{P}_+ \equiv \frac{1+\delta_5}{2} : \mathbf{P}_+^{\mathbf{2}} = \mathbf{P}_+ \tag{658}$$

e

$$\mathbf{P}_- \equiv \frac{1-\delta_5}{2} : \mathbf{P}_-^{\mathbf{2}} = \mathbf{P}_- \tag{659}$$

Chegamos em

$$\mathbf{P}_+ + \mathbf{P}_- = \mathbf{I} \tag{660}$$

Com $\psi$ genérico:

$$\psi = (\mathbf{P}_+ + \mathbf{P}_-)\psi = (\mathbf{P}_+\psi) + (\mathbf{P}_-\psi) \tag{661}$$

e

$$\mathbf{P}_+\mathbf{P}_- = \mathbf{P}_-\mathbf{P}_+ = 0 \tag{662}$$

Assim

$$\psi_+ = \mathbf{P}_+\psi \tag{663}$$

e

$$\mathbf{P}_-\psi_+ = \mathbf{P}_-\mathbf{P}_+\psi \tag{664}$$

Temos

$$\mathbf{P}_+\psi_+ = \mathbf{P}_+\mathbf{P}_+\psi_+ \mapsto \delta_5\psi_+ = +\psi_+ \tag{665}$$

e

$$\mathbf{P}_-\psi_- = \mathbf{P}_-\mathbf{P}_-\psi_- \mapsto \delta_5\psi_- = -\psi_- \tag{666}$$

Onde $\psi_+ = \psi_L$ chamado de left hand e $\psi_- = \psi_R$ é o chamado right hand.

A característica de quiralidade é ou não Lorentz-invariante?????

$$\psi_L \mapsto (\psi_L)' \tag{667}$$

onde $\psi'_L$ é tal que $\delta_5\psi'_L = +\psi'_L$.

O transformado de Lorentz de $\psi_L$ continua **L**????

$$\psi' = e^{-\frac{1}{8}\omega^{\mu\nu}[\delta_\mu,\delta_\nu]}\psi \tag{668}$$

O $\delta_5$ sempre "vê"pares de $\delta_\mu\delta_\nu$, portanto:

$$(\psi')_L = e^{-\frac{1}{8}\omega^{\mu\nu}[\delta_\mu,\delta_\nu]}\psi_L = (\psi_L)' \tag{669}$$

Chegamos em:

$$[\delta_5, \mathbf{S}(\omega)] = 0 \tag{670}$$

Defininição da quiralidade vem da matriz $\delta_5$, onde é a relação de comutação entre $\delta_5$ e $\delta_\mu, \delta_\nu$.

Temos dim$\psi_L = 2$, dim$\psi_R = 2$ e $\delta_5\psi = \psi$. Assim

$$\begin{pmatrix} 0 & \mathbf{I} \\ \mathbf{I} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \chi \\ \zeta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \chi \\ \zeta \end{pmatrix}$$

onde $\chi = \zeta$. Constatação: Os férmions mais fundamentais do espaço de Minkowski NÃO são os férmions de Dirac, e sim, os férmions quirais ed Weye (L e R). Os férmions quirais descrevem representações inequivalentes (R e L) do grupo de Lorentz. Sabemos que um férmion quiral é uma partícula de massa nula e spin igual a $\frac{n}{2}$.

Voltando à equação de Dirac, sem massa, chegamos à conclusão que sua solução mais geral é dada em termos de espinores quirais. Assim

$$\mathbf{i}\delta^\mu\partial_\mu\psi = 0 \tag{671}$$

Isso gera

$$\mathbf{i}\partial_\mu(\delta_5\psi) = 0 \tag{672}$$

Dois grupos são gerados $\mathbf{i}\delta^\mu\partial_\mu\psi_L = 0$ e $\mathbf{i}\delta^\mu\partial_\mu\psi_R = 0$.

E ainda

$$\mathbf{i}\delta^\mu\partial_\mu\psi = 0 \tag{673}$$

que são os férmions quirais de Weye (representação de Weye).

$$(\mathbf{i}\delta^\mu\partial_\mu + \mathbf{m})\psi = 0 \tag{674}$$

que são os férmins de Dirac (representação de Dirac).

Assim, na conjugação de Dirac

$$\mathbf{i}\delta^\mu\partial_\mu\psi = 0 \tag{675}$$

e

$$\mathbf{i}\partial_\mu\overline{\psi}\delta^\mu = 0 \tag{676}$$

Temos ainda

$$\mathbf{j}^\mu_{\mathbf{(5)}} \equiv \overline{\psi}\delta^\mu\delta_5\psi \tag{677}$$

A violação da carga se encontra em

$$\partial_\mu\mathbf{j}^\mu_{\mathbf{(5)}} = ?????? \tag{678}$$

Temos

$$(\partial_\mu\overline{\psi})\delta^\mu\delta_5\psi + \overline{\psi}\delta^\mu\delta_5(\partial_\mu\psi) \tag{679}$$

O termo $(\partial_\mu\overline{\psi})\delta^\mu$, antes da soma será igual a 0. Assim, temos

$$-\overline{\psi}\delta_5\delta^\mu\partial_\mu\psi \tag{680}$$

Dessa vez, o termo $\delta^\mu\partial_\mu\psi$ é igual a 0.

Temos $\partial_\mu\mathbf{j}^\mu_{\mathbf{(5)}} = 0$, se m=0.

$$\mathbf{i}\delta^\mu\partial_\mu\psi = \mathbf{m}\psi = \mathbf{i}(\partial_\mu\overline{\psi})\delta^\mu = -\mathbf{m}\overline{\psi} \tag{681}$$

Temos que

$$\partial_\mu\mathbf{j}^\mu_{\mathbf{(5)}} = 2\mathbf{im}\overline{\psi}\delta_5\psi \mapsto \mathbf{j}^\mu_{\mathbf{(5)}} \tag{682}$$

temos que a carga é conservada, se m=0. Mas, a conservação é violada proporcionalmente a massa m.

Temos ainda a corrente quiral

$$\mathbf{j}^\mu_{\mathbf{(5)}} \equiv \overline{\psi}\delta^\mu\delta_5\psi \tag{683}$$

## 8.18 Aulão

O que sabemos da equação de Dirac é que esta partícula tem massa $\mathbf{m}$ e spin $\frac{1}{2}$. Não falamos nada a respeito de carga elétrica ainda. É a partir do momento em que interpretamos a corrente (4-vetor) conservada

$$\partial_\mu \mathbf{j}^\mu = 0 \tag{684}$$

e

$$\mathbf{j}^\mu \equiv \overline{\psi}\delta^\mu\psi \tag{685}$$

é que podemos trazer a carga elétrica para a euqção de Dirac, introduzindo, então, a carga como um terceiro atributo da partícula, a qual, até agora, só possui massa e spin.No campo de Maxwell, temos

$$\partial_\mu \mathbf{F}^{\mu\nu} = \mathbf{j}^\nu \tag{686}$$

Assim:

$$\mathbf{L_{int}} = \rho\mathbf{A^0} - \vec{\mathbf{j}} \cdot \vec{\mathbf{A}} = \mathbf{j}_\mu \mathbf{A}^\mu \tag{687}$$

e daí:

$$\mathbf{Q_{cons}} = \int \mathbf{d^3\vec{x}}[\mathbf{j^0}(\mathbf{t};\vec{\mathbf{x}}) = \overline{\psi}\delta^0\psi = \psi^+\psi] \tag{688}$$

ou seja

$$\mathbf{Q_{em}} = \mathbf{eQ_{cons}} \mapsto \mathbf{j}^\mu_{\mathbf{em}} = \mathbf{e}\overline{\psi}\delta^\mu\psi \tag{689}$$

Então

$$\mathbf{L_{int}} = \mathbf{e}(\overline{\psi}\delta^\mu\psi) \tag{690}$$

é a energia da interação entre o setor de matéria e o setor de radiação. Mas como esta energia repercute na equação de Dirac??? Sabemos que em teorias da relatividade $\mathbf{L}$ é Lorentz invariante, ele é apenas um setor de um tensor. Assim:

$$\mathbf{L} \sim \theta^{\infty}(\in \theta^{\mu\nu}) \tag{691}$$

onde $\partial_\mu\theta^{\mu\nu} = 0$. Da clássica, temos:

$$\mathbf{L_{int}} \mapsto \mathbf{L_{int}} = -\mathbf{L_{int}} \tag{692}$$

Assim

$$\mathbf{L_{int-em}} = -\mathbf{e}(\overline{\psi}\delta^\mu\psi)\mathbf{A}_\mu \tag{693}$$

Daí

$$\delta\mathbf{L_{int-em}} = -\mathbf{e}(\delta\overline{\psi})\delta^\mu\psi\mathbf{A}_\mu - \mathbf{e}\overline{\psi}\delta^\mu(\delta\psi)\mathbf{A}_\mu - \mathbf{e}(\overline{\psi}\delta^\mu\psi)\delta\mathbf{A}_\mu \tag{694}$$

A equação de Dirac livre recebe o termo:

$$\mathbf{i}\delta^\mu \partial_\mu \psi - \mathbf{m}\psi - \mathbf{e}\mathbf{A}_\mu \delta^\mu \psi = 0 \tag{695}$$

ou reescrita:

$$\mathbf{i}\delta^\mu (\partial_\mu + \mathbf{ie}\mathbf{A}_\mu)\psi - \mathbf{m}\psi = 0 \tag{696}$$

onde

$$\mathbf{D}_\mu \equiv \partial_\mu + \mathbf{ie}\mathbf{A}_\mu \tag{697}$$

essa é a chamada prescrição de acoplamento mínimo.

Caso de átomos tipo $\mathbf{H}$, onde $\mathbf{A^0} = \frac{\mathbf{Z_e}}{4\pi\mathbf{r}}$ e $\vec{\mathbf{A}} = 0$:

$$\mathbf{i}\delta^\mu \partial_\mu \psi - \mathbf{m}\psi - \frac{\mathbf{Z_e}}{4\pi\mathbf{r}}\delta^0 \psi = 0 \tag{698}$$

No caso de termos um $\vec{\mathbf{B}}$ externo uniforme:

$$\mathbf{A^0} = 0 \tag{699}$$

e

$$\vec{\mathbf{A}} = -\frac{1}{2}\vec{\mathbf{r}} \times \vec{\mathbf{B_0}} = \frac{1}{2}\mathbf{B_0} \tag{700}$$

com $(\mathbf{y}; -\mathbf{x}; 0)$. Mas $\mathbf{A}_\mu$ está sujeito a uma simetria de gauge

$$\delta_{gauge}\mathbf{A}_\mu = \partial_\mu \alpha(\mathbf{x}) \tag{701}$$

O termo $\delta_{gauge}$ na equação de Dirac implica em

$$-\mathbf{e}(\partial_\mu \psi)\delta^\mu \psi \tag{702}$$

e aparece a simetria de gauge que desejamos que a equação de Dirac apresente, como a apresentam as equações de Dirac. A equação de Dirac deve responder manifestando também a simetria de gauge. Para isto, $\psi$ deve ser transformado de alguma forma:

$$\mathbf{A}_\mu \mapsto \mathbf{A}'_\mu = \mathbf{A}_\mu + \partial_\mu \alpha \tag{703}$$

e

$$\psi \mapsto \psi' = \mathbf{u}(\alpha)\psi \tag{704}$$

onde $\mathbf{u}$ é uma função escalar de $\alpha$.

OBS: Para o campo $\mathbf{A}_\mu$ é fundamental a simetria de gauge pois é ela quem garante que na interação eletromagnética propague apenas spin igual a 1.

Se ao interagir com a partícula fermiônica (Dirac), esta simetria é quebrada, abrem-se as porteiras para a propagação do fantasma do spin igual a 0.

Impõem-se que na equação de Dirac, portanto, em presença de $\mathbf{A}^{\mu}$ seja invariante de gauge. Assim, temos antes da transformação:

$$\mathbf{i}\delta^{\mu}\partial_{\mu}\psi - \mathbf{m}\psi - \mathbf{e}\delta^{\mu}\mathbf{A}_{\mu}\psi = 0 \tag{705}$$

E depois da transformação:

$$\mathbf{i}\delta^{\mu}\partial_{\mu}\psi' - \mathbf{m}\psi' - \mathbf{e}\delta^{\mu}\mathbf{A}'_{\mu}\psi' = \tag{706}$$

Chegamos em

$$\mathbf{i}\delta^{\mu}\partial_{\mu}(\mathbf{u}\psi) - \mathbf{mu}\psi - \mathbf{e}\delta^{\mu}\mathbf{A}_{\mu}\mathbf{u}\psi - \mathbf{e}\delta^{\mu}(\partial_{\mu}\alpha)\mathbf{u}\psi = 0 \tag{707}$$

Multiplicando por $\mathbf{u^{-1}}$, teremos

$$\mathbf{i}\delta^{\mu}\mathbf{u^{-1}}\partial_{\mu}(\mathbf{u}\psi) - \mathbf{m}\psi - \mathbf{e}\delta^{\mu}\mathbf{A}_{\mu}\psi - \mathbf{e}\delta^{\mu}(\partial_{\mu}\alpha)\psi = 0 \tag{708}$$

Assim, chegamos em

$$\mathbf{i}\delta^{\mu}(\mathbf{u^{-1}}\partial_{\mu}\mathbf{u})\psi + \mathbf{i}\delta^{\mu}\partial_{\mu}\psi - \mathbf{m}\psi - \mathbf{e}\delta^{\mu}\mathbf{A}_{\mu}\psi - \mathbf{e}(\partial_{\mu}\alpha)\delta^{\mu}\psi = 0 \tag{709}$$

O cancelamento necessário para se recuperar a equação de Dirac:

$$\mathbf{iu^{-1}}(\partial_{\mu}\mathbf{u}) = \mathbf{e}(\partial_{\mu}\alpha) \tag{710}$$

Chegamos em

$$\frac{\partial_{\mu}\mathbf{u}}{\mathbf{u}} = -\mathbf{ie}(\partial_{\mu}\alpha) = \mathbf{u}(\alpha) = \mathbf{e}^{-\mathbf{ie}\alpha(\mathbf{x})} \tag{711}$$

Conclusão: A simetria carregada por $\mathbf{A}_{\mu}$ chega ao setor de matéria como uma transformação de fase!!!!

$$\mathbf{A}'_{\mu} = \mathbf{e}^{-\mathbf{ie}}\psi\mathbf{A}_{\mu} + \partial_{\mu}\alpha \mapsto \psi' = \mathbf{e}^{-\mathbf{ie}\alpha(\mathbf{x})}\psi \tag{712}$$

Note que quem comanda é o campo de gauge: é ele que impõe a simetria sobre a matéria e não o contrário.

Retomando a derivada estendida introduzida pela interação eletromagnética:

$$\mathbf{i}\delta^{\mu}\mathbf{D}_{\mu}\psi - \mathbf{m}\psi = 0 \tag{713}$$

onde $\mathbf{D}_{\mu} \equiv \partial_{\mu}\psi + \mathbf{ie}\mathbf{A}_{\mu}\psi$. Temos:

$$\mathbf{D}_{\mu}\psi \mapsto (\mathbf{D}_{\mu}\psi)' = \partial_{\mu}\psi' + \mathbf{ie}\mathbf{A}'_{\mu}\psi' = \partial_{\mu}(\mathbf{e}^{-\mathbf{ie}\alpha}\psi) + \mathbf{ie}(\mathbf{A}_{\mu} + \partial_{\mu}\alpha)\mathbf{e}^{-\mathbf{ie}\alpha}\psi \tag{714}$$

Continuando, teremos:

$$(-\mathbf{ie}\partial_\mu\alpha)\mathbf{e}^{-\mathbf{ie}\alpha}(\partial_\mu\psi) + \mathbf{ieA}_\mu\mathbf{e}^{-\mathbf{ie}}\psi + (\mathbf{ie}\partial_\mu\alpha)\mathbf{e}^{-\mathbf{ie}\alpha}\psi = \mathbf{e}^{-\mathbf{ie}\alpha}\mathbf{D}_\mu\psi \tag{715}$$

Note que esta derivada transforma da mesma forma que o campo, ao contrário da derivada que tínhamos anteriormente:

$$\partial_\mu\psi' \neq \mathbf{e}^{-\mathbf{ie}\alpha}(\partial_\mu\psi) \tag{716}$$

Daí a denominação de derivada covariante ( pelo fato de ser $\mathbf{D}_\mu\psi$ se transformar exatamente como $\psi$). Concluímos que é a matéria que tem se adaptar à simetria de gauge imposta por $\mathbf{A}^\mu$.

A equação de Dirac se presta a descrever partícula massiva, eletricamente carregada e de spin igual a $\frac{1}{2}$. Assim:

$$\mathbf{i}\delta^\mu\partial_\mu\psi - \mathbf{m}\psi - \mathbf{eA}_\mu\delta^\mu\psi = 0 \tag{717}$$

Vamos agora seguir os passos esboçados para Dirac para o esclarecimento sobre uma simetria natural da equação de Dirac, em presença de um campo eletromagnético: a conjugação da carga. Vamos fazer uma receita....

No passo (1), vamos aplicar à conjugação de Dirac à equação acima:

$$\overline{\psi} \equiv \psi^+\delta^0 \tag{718}$$

e

$$\overline{\delta^\mu} \equiv \delta^0\delta^{+\mu}\delta^0 = \delta^\mu \tag{719}$$

Então

$$-\mathbf{i}\partial_\mu\overline{\psi}\delta^\mu - \mathbf{m}\overline{\psi} - \mathbf{eA}_\mu\overline{\psi}\delta^\mu = 0 \tag{720}$$

No passo (2), toma-se o transposto da equação:

$$\mathbf{i}\delta^{\mu+}\partial_\mu\overline{\psi^t} + \mathbf{eA}_\mu\delta^{t\mu}\overline{\psi^t} = 0 \tag{721}$$

Vamos analisar o resultado na Álgebra de Clifford: Existe uma matriz $\mathbf{C}$, que é 4x4, unitária e anti-simétrica, que expressa uma equivalência entre as matrizes $-\delta$ e a sua representação transposta:

$$\mathbf{C}\delta^{t\mu}\mathbf{C}^{-\mathbf{1}} = -\delta^\mu \tag{722}$$

No passo (3), aplica-se $\mathbf{C}$ à equação de Dirac:

$$\mathbf{iC}\delta^{t\mu}\partial_\mu\mathbf{C}^{-\mathbf{1}}\mathbf{C}\overline{\psi^t} + \mathbf{mC}\overline{\psi^t} + \mathbf{eA}_\mu\mathbf{C}\delta^{t\mu}\mathbf{C}^{-\mathbf{1}}\mathbf{C}\overline{\psi^t} = 0 \tag{723}$$

Continuando...

$$\mathbf{i}\delta^{\mu}\partial_{\mu}(\mathbf{C}\overline{\psi^{t}}) - \mathbf{m}(\mathbf{C}\overline{\psi^{t}}) + \mathbf{e}\mathbf{A}_{\mu}\delta^{\mu}(\mathbf{C}\overline{\psi^{t}}) = 0 \tag{724}$$

Se $\psi$ é solução de:

$$(\mathbf{i}\delta^{\mu}\partial_{\mu} - \mathbf{m} - \mathbf{e}\mathbf{A}_{\mu}\delta^{\mu})\psi = 0 \tag{725}$$

é automaticamente solução de:

$$(\mathbf{i}\delta^{\mu}\partial_{\mu} - \mathbf{m} + \mathbf{e}\mathbf{A}_{\mu}\delta^{\mu})\psi^{C} = 0 \tag{726}$$

Assim, $\psi^{C}$ deve descrever uma partícula de massa $\mathbf{m}$, spin $\frac{1}{2}$ e carga $-\mathbf{e}$ oposta à carga de $\psi$. A este resultado nos referimos como a simetria de conjugação de carga da equação de Dirac.

## 8.19 Forma de C na representação de Dirac

Sendo

$$\delta^{0} = \begin{pmatrix} \mathbf{I} & 0 \\ 0 & -\mathbf{I} \end{pmatrix}$$

e

$$\delta^{i} = \begin{pmatrix} 0 & \vec{\sigma} \\ -\vec{\sigma} & 0 \end{pmatrix}$$

e também

$$\mathbf{C}\delta^{t\mu}\mathbf{C}^{-1} = -\delta^{\mu} \mapsto \mathbf{C}\delta^{t\mu} = -\delta^{t\mu}\mathbf{C} \tag{727}$$

então:

$$\mathbf{C}\delta^{0} = -\delta^{0}\mathbf{C} \tag{728}$$

$$\mathbf{C}\delta^{1} = \delta^{1}\mathbf{C} \tag{729}$$

$$\mathbf{C}\delta^{2} = -\delta^{2}\mathbf{C} \tag{730}$$

$$\mathbf{C}\delta^{3} = \delta^{3}\mathbf{C} \tag{731}$$

e uma boa escolha para $\mathbf{C}$:

$$\mathbf{C} = \mathbf{k}\delta^{0}\delta^{2} = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_{y} \\ \sigma_{y} & 0 \end{pmatrix}$$

ou seja:

$$\mathbf{C} = \mathbf{k}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -\mathbf{i} \\ 0 & 0 & \mathbf{i} & 0 \\ 0 & -\mathbf{i} & 0 & 0 \\ \mathbf{i} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Isso leva até

$$\mathbf{C} = \mathbf{k}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Qual é o look de $\psi^C$ nesta representação?????

$$\psi^C \equiv \mathbf{C}\overline{\psi^t} = \mathbf{C}(\psi^+\delta^0)^t = \mathbf{C}\delta^{0t}\psi^* = -\delta^0\mathbf{C}\psi^* \tag{732}$$

Como:

$$\delta^0\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

e

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \\ \psi_4 \end{pmatrix}$$

então:

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_4^* \\ -\psi_3 \\ -\psi_2^* \\ \psi_1^* \end{pmatrix}$$

Tínhamos visto que:

$$(\mathbf{i}\delta^\mu\partial_\mu - \mathbf{m} - \mathbf{e}\mathbf{A}_\mu\delta^\mu)\psi = 0 \tag{733}$$

é possível construir

$$\psi^C \equiv \mathbf{C}\overline{\psi^+} \tag{734}$$

onde $\mathbf{C^t} = \mathbf{C}$ e $\mathbf{C}^+\mathbf{C} = \mathbf{I}$.

E ainda $\mathbf{C}\delta^{t\mu}\mathbf{C^{-1}} = -\delta^\mu$ e $\mathbf{C}\delta_5^t\mathbf{C^{-1}} = \delta_5$ tal que:

$$(\mathbf{i}\delta^\mu\partial_m u - \mathbf{m} + \mathbf{e}\mathbf{A}_\mu\delta^\mu)\psi^C = 0 \tag{735}$$

que é a simetria sob conjugação de carga.

Sabendo que a definição de um objeto left é um outovetor de $\delta_5$ com autovalor igual a $+1$. Chegamos em:

$$\delta_5\psi_L = +\psi_L \tag{736}$$

então

$$(\frac{I+\delta_5}{2}\psi)^C = C(\overline{\frac{I+\delta_5}{2}\psi})^t = C(\overline{\psi}\frac{I-\delta_5}{2})^t = \tag{737}$$

Chegamos em

$$C\frac{I-\delta_5^t}{2}\overline{\psi}^t = \frac{I-\delta_5}{2}\psi^C \tag{738}$$

e daí

$$(\psi_L)^C = \psi_R^C \tag{739}$$

isto é

$$\mathbf{L} \mapsto \mathbf{R} \tag{740}$$

As interações de gauge ($\overline{\psi}\delta^\mu\psi\mathbf{A}_\mu$) preservam a quiralidade. A corrente que sai de uma equação do tipo Dirac tem a forma:

$$\overline{\psi}\delta^\mu\psi = \mathbf{j}^\mu \tag{741}$$

de uma maneira geral. Note que o férmion pode ser quebrado em uma parte left e outra right:

$$\psi = \frac{I+\delta_5}{2}\psi + \frac{I-\delta_5}{2}\psi = \psi_L + \psi_R \tag{742}$$

Daí:

$$(\overline{\psi_L} + \overline{\psi_R})\delta^\mu(\psi_L + \psi_R) = \mathbf{j}^\mu \tag{743}$$

Isso chega em:

$$\overline{\psi_L}\delta^\mu\psi_L + \overline{\psi_L}\delta^\mu\psi_R + \overline{\psi_R}\delta^\mu\psi_L + \overline{\psi_R}\delta^\mu\psi_R = \mathbf{j}^\mu \tag{744}$$

Então:

$$(\overline{\psi}\delta^\mu\psi)\mathbf{A}_\mu = \overline{\psi_L}\delta^\mu\psi_L\mathbf{A}_\mu + \overline{\psi_R}\delta^\mu\psi_R\mathbf{A}_\mu \tag{745}$$

Se $\psi$ é quiral, então $\psi_L = 0$ ou $\psi_R = 0$, portanto a interação gauge preserva a quiralidade (isto é, neutrino é sempre up e anti-neutrino é sempre down). Para partículas massivas, ao contrário, as duas quiralidades juntas acompanham o férmion e o anti-férmion.

## 8.20 Soluções livres para a Equação de Dirac

Seja

$$(\mathbf{i}\delta^\mu\partial_\mu - \mathbf{m})\psi = 0 \tag{746}$$

aplicando a transformação de Fourier

$$\psi_\alpha(\mathbf{t};\vec{\mathbf{x}}) = \int \frac{d^4\mathbf{p}}{(2\pi)^4}\widetilde{\psi}(\mathbf{p})e^{-\mathbf{ipx}} \tag{747}$$

temos:

$$(\delta^{\mu}\mathbf{p}_{\mu} - \mathbf{m})\widetilde{\psi}(\mathbf{p}) = 0 \tag{748}$$

Usando a álgebra de Clifford $\delta^{\mu}, \delta^{\nu} = 2\eta^{\mu\nu}\mathbf{I}$:

$$(\mathbf{p^2} - \mathbf{m^2})\widetilde{\psi}(\mathbf{p}) = 0 \tag{749}$$

onde $\mathbf{p^2} = \mathbf{m^2}$ e $\mathbf{E^2} = \vec{\mathbf{p}}^{\mathbf{2}}\mathbf{c^2} + (\mathbf{mc^2})^2$ e que é a relação de disperção relativística, pois:

$$\mathbf{p}^{\mu} = (\frac{\mathbf{E}}{\mathbf{c}}; \vec{\mathbf{p}}) \tag{750}$$

onde:

$$\mathbf{E} = \sqrt{\vec{\mathbf{p}}^{2}\mathbf{c^2} + \mathbf{m^2c^4}} \tag{751}$$

Tomando a raiz positiva de (751) e reescrevendo (748) temos:

$$(\delta^{0}\mathbf{p_0} - \delta^{i}\mathbf{p_i} - \mathbf{m})\widetilde{\psi}(\mathbf{p}) = 0 \tag{752}$$

e

$$(\delta^{0}\mathbf{E} - \vec{\delta^{i}}\vec{\mathbf{p}} - \mathbf{m})\widetilde{\psi}(\mathbf{p}) = 0 \tag{753}$$

Nomenclatura $\widetilde{\psi}(\mathbf{p})$:

$$\mathbf{E} = +\sqrt{\vec{\mathbf{p}}^{\mathbf{2}} + \mathbf{m^2}} : \mathbf{u}(\mathbf{p}) \tag{754}$$

Podemos resolver (753) na forma matricial:

$$\begin{pmatrix} (\mathbf{E} - \mathbf{m})\mathbf{I} & -\vec{\sigma} \cdot \vec{\mathbf{p}} \\ \vec{\sigma} \cdot \vec{\mathbf{p}} & -(\mathbf{E} + \mathbf{m})\mathbf{I} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \chi \\ \zeta \end{pmatrix} = 0$$

onde

$$\begin{pmatrix} \chi \\ \zeta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{pmatrix}$$

Daí

$$\vec{\sigma} \cdot \vec{\mathbf{p}}\zeta = (\mathbf{E} - \mathbf{m})\chi \tag{755}$$

e

$$\vec{\sigma} \cdot \vec{\mathbf{p}}\chi = (\mathbf{E} + \mathbf{m})\zeta \tag{756}$$

ou seja

$$\zeta = \frac{1}{\mathbf{E} + \mathbf{m}}\vec{\sigma} \cdot \vec{\mathbf{p}}\chi \tag{757}$$

e daí:

$$\vec{\sigma} \cdot \mathbf{p}\frac{\vec{\sigma}\vec{\mathbf{p}}}{\mathbf{E} + \mathbf{m}}\chi = (\mathbf{E} - \mathbf{m})\chi \tag{758}$$

Assim:

$$(\vec{\sigma}\cdot\vec{\mathbf{p}})^2\chi = (\mathbf{E^2}-\mathbf{m^2})\chi \mapsto (\mathbf{E^2}-\vec{\mathbf{p^2}}-\mathbf{m^2})\chi = 0 \tag{759}$$

Assim:

$$\mathbf{u(p)} = \begin{pmatrix} \chi \\ \frac{\vec{\sigma}\cdot\vec{\mathbf{p}}}{\mathbf{E+m}}\chi \end{pmatrix}$$

Mas:

$$\mathbf{E} = \mathbf{mc^2}\sqrt{1+\frac{\vec{\mathbf{p^2}}}{\mathbf{m^2c^2}}} \tag{760}$$

No limite, teremos $|\vec{\mathbf{p}}|\mathbf{c} << \mathbf{mc^2}$, então:

$$\mathbf{E} \sim \mathbf{mc^2}(1+\frac{\vec{\mathbf{p^2}}}{\mathbf{2m^2c^2}}) \sim \frac{\vec{\mathbf{p^2}}}{\mathbf{2m}} + \mathbf{mc^2} = \mathbf{E}-\mathbf{mc^2} \sim \frac{\vec{\mathbf{p^2}}}{\mathbf{2m}} \tag{761}$$

E chegamos em:

$$\frac{\vec{\mathbf{p}}}{\mathbf{E+m}} \sim 0(\frac{\vec{\mathbf{v}}}{\mathbf{c}}) \tag{762}$$

Ou seja, no limite fracamente relativistíco, a componente que domina é $\chi$:

$$\mathbf{u(p)} \sim \begin{pmatrix} \chi \\ \theta(\frac{\vec{\mathbf{v}}}{\mathbf{c}})\chi \end{pmatrix}$$

No referencial de repouso, a equação de Dirac:

$$(\delta^0\mathbf{E}-\vec{\delta}\cdot\vec{\mathbf{p}}-\mathbf{m})\mathbf{u} = 0 \mapsto \mathbf{m}(\delta^0-\mathbf{I})\mathbf{u} = 0 \tag{763}$$

daí:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{I} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \chi \\ \zeta \end{pmatrix} = 0 \mapsto \zeta = 0$$

ou seja

$$\mathbf{u(p)} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \mathbf{u_1}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \mathbf{u_2}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Aplicando a conjugação de Dirac:

$$\mathbf{u^C} \equiv \mathbf{C\overline{u^t}} = \mathbf{C}(\mathbf{u}^+\delta^0)^t = \mathbf{C}\delta^{0t}\mathbf{u}^* = \mathbf{C}\delta^{0t}\mathbf{C^{-1}Cu}^* = -\delta^0\mathbf{Cu}^* \tag{764}$$

Mas:

$$-\delta^0\mathbf{Cu}^* = -\mathbf{i}\delta^0\delta^2\mathbf{u}^* \tag{765}$$

na representação de Dirac. Mas:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{I} & 0 \\ 0 & -\mathbf{I} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \sigma_y \\ -\sigma_y & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_y \\ \sigma_y & 0 \end{pmatrix}$$

Note que:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}^C = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

para qual não existem subespaço de soluções consideradas. E:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}^C = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ou seja:

$$\mathbf{u}(\mathbf{p})^C = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\mathbf{u_2^*} \\ \mathbf{u_1^*} \end{pmatrix}$$

Não pertencem ao subespaço dos u's.

O fato de que as soluções $\mathbf{u^C}$ não pertencem ao subespaço de u's pode estar indicado que devemos considerar outras soluções no referencial de repouso. A única saída que nos resta para novas soluções é estudar o subespaço de soluções $\mathbf{E} < 0$ (partícula livre com $\mathbf{E} < 0$!!!!).

Convenção:

$$\mathbf{E} = +\sqrt{\vec{\mathbf{p}}^{\mathbf{2}} + \mathbf{m^2}} \equiv \mathbf{E}(\vec{\mathbf{p}}) \tag{766}$$

e

$$\mathbf{E} = -\sqrt{\vec{\mathbf{p}}^{\mathbf{2}} + \mathbf{m^2}} \equiv -\mathbf{E}(\vec{\mathbf{p}}) \tag{767}$$

A equação de Dirac, portanto:

$$(\delta^0(-\mathbf{E}) - \vec{\delta}\vec{\mathbf{p}} - \mathbf{m})\mathbf{v}(\mathbf{p}) = 0 \tag{768}$$

Daí:

$$(\delta^0\mathbf{E} + \vec{\delta}\vec{\mathbf{p}} + \mathbf{m})\mathbf{v}(\mathbf{p}) = 0 \tag{769}$$

No referencial repouso:

$$(\delta^0 + \mathbf{I})\mathbf{v} = 0 \tag{770}$$

daí:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{I} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{v_1} \\ \mathbf{v_2} \\ \mathbf{v_3} \\ \mathbf{v_4} \end{pmatrix} = 0 \mapsto \mathbf{v_1} = \mathbf{v_2} = 0$$

Assim:

$$\mathbf{v}(\mathbf{E} = -\mathbf{m}; \vec{\mathbf{p}} = 0) = \mathbf{u_3} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mathbf{u_4} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Ou seja $\mathbf{u} \mapsto \mathbf{u^C} \sim \mathbf{v}$. O termo $\mathbf{v}$ tem $\mathbf{E} < \mathbf{0}$, mas pela simetria $-\mathbf{C}$, tmbém deve descrever estados de alguma partícula com carga oposta à do elétron, e mesma massa.

Definindo:

$$\overline{\mathbf{p}^{\mu}} \equiv (\mathbf{E}; \vec{\mathbf{p}}) \tag{771}$$

então:

$$(\delta^0 \mathbf{E} + \vec{\delta}\vec{\mathbf{p}} + \mathbf{m})\mathbf{v} = 0 \tag{772}$$

que é a equação de Dirac com energia negativa pode ser reescrita:

$$(\delta^{\nu}\overline{p_{\nu}} - \mathbf{m}) \mapsto (\delta^{\mu}\overline{p^{\mu}} + \mathbf{m})\mathbf{v} = 0 \tag{773}$$

na forma covariante. Observe que a relação entre energia e momento se mantém, indicando que a massa da solução de energia negativa é a mesma da solução de energia positiva.

OBS: A simetria prevê a existência da parceira simétrica por conjugação de carga das partículas conhecidas.

Será que $\psi = \psi^C$ é possível? Ou seja, há espinor auto-conjugado de carga?

Lembrando que, em geral, temos:

$$\psi^C = \mathbf{C}\overline{\psi^t} = \mathbf{C}(\psi^+ \delta^0)^t = \mathbf{C}\delta^{0t}\psi^* = -\delta^0 \mathbf{C}\psi^* \tag{774}$$

Explicitamente, na representação de Dirac:

$$\delta^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

e

$$\mathbf{C} = \mathbf{I}\delta^0\delta^2 = \mathbf{i}\begin{pmatrix} 0 & \sigma_y \\ \sigma_y & 0 \end{pmatrix}$$

então:

$$-\delta^0\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

e assim:

$$\psi^C = \begin{pmatrix} \psi_4^* \\ -\psi_3^* \\ -\psi_2^* \\ \psi_1^* \end{pmatrix}$$

Essa é a forma de $\psi^C$ na representação de Dirac.

Se $\psi^C = \psi$, então:

$$\psi_4^* = \psi_1 \tag{775}$$

$$-\psi_3^* = \psi_2 \tag{776}$$

$$-\psi_2^* = \psi_3 \tag{777}$$

$$\psi_1^* = \psi_4 \tag{778}$$

Assim $\psi^C = \psi$ é o férmion de Majorana, com 4 componentes reais e independentes, o que significa que só pode descrever 2 graus de liberdade. É neutro, pois não muda a conjugação da carga.

## 8.21 Soluções de E > 0 no referencial onde a partícula se desloca

Dada equação de Dirac com $\mathbf{E} > \mathbf{0}$:

$$(\delta^0\mathbf{E} - \vec{\delta}\vec{\mathbf{p}} - \mathbf{m})\mathbf{u}(\mathbf{E};\vec{\mathbf{p}} = 0 \tag{779}$$

No referencial de repouso:

$$(\delta^0 - \mathbf{I})\mathbf{u}(\mathbf{m};\vec{0}) = 0 \tag{780}$$

Solução Geral:

Se:

$$\mathbf{u}(\mathbf{E};\vec{\mathbf{p}}) = (\delta^0\mathbf{E} - \vec{\delta}\vec{\mathbf{p}} + \mathbf{m})\mathbf{u}(\mathbf{m};\vec{0}) \tag{781}$$

então:

$$(\delta^0\mathbf{E} - \vec{\delta}\vec{\mathbf{p}} - \mathbf{m})(\delta^0\mathbf{E} - \vec{\delta}\vec{\mathbf{p}} + \mathbf{m})\mathbf{u}(\mathbf{m};\vec{0}) = .... \tag{782}$$

Desenvolvendo, teremos....

$$(\mathbf{E^2} - \mathbf{E}\delta^0\vec{\delta}\vec{\mathbf{p}} + \mathbf{mE}\delta^0 - \vec{\delta}\vec{\mathbf{p}}\delta^0\mathbf{E} + \vec{\delta}\vec{\mathbf{p}}\vec{\delta}\vec{\mathbf{p}} - \mathbf{m}\vec{\delta}\vec{\mathbf{p}} - \mathbf{m}\delta^0\mathbf{E} + \mathbf{m}\vec{\delta}\vec{\mathbf{p}} - \mathbf{m^2})\mathbf{u}(\mathbf{m};\vec{0}) = ... \tag{783}$$

$$(\mathbf{E^2} - \mathbf{m^2} + \vec{\delta}\vec{\mathbf{p}}\vec{\delta}\vec{\mathbf{p}})\mathbf{u}(\mathbf{m};\vec{0}) = (\mathbf{E^2} - \mathbf{m^2} - \vec{\mathbf{p}}^{\mathbf{2}})\mathbf{u}(\mathbf{m};\vec{0}) = 0 \tag{784}$$

pois:

$$\vec{\delta}\vec{\mathbf{p}}\vec{\delta}\vec{\mathbf{p}} = \delta^i\mathbf{p^i}\delta^j\mathbf{p^j} = \mathbf{p^i}\mathbf{p^j}\delta^i\delta^j = -\vec{\mathbf{p}}^{\mathbf{2}} \tag{785}$$

Ou seja, num referencial, onde a partícula tem momento $\vec{\mathbf{p}}$, a solução é obtida a partir da solução referncial de repouso, como segue abaixo:

$$\mathbf{u}(\mathbf{E};\vec{\mathbf{p}}) = (\delta^0\mathbf{E} - \vec{\delta}\vec{\mathbf{p}} + \mathbf{m})\mathbf{u}(\mathbf{m};\vec{0}) = (\delta^\mu\mathbf{p}_\mu + \mathbf{m})\mathbf{u}(\mathbf{m};\vec{0}) \tag{786}$$

ou

$$\begin{pmatrix} (\mathbf{E}+\mathbf{m})\mathbf{I} & -\vec{\sigma}\cdot\vec{\mathbf{p}} \\ \vec{\sigma}\cdot\vec{\mathbf{p}} & (-\mathbf{E}+\mathbf{m})\mathbf{I} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\mathbf{E}+\mathbf{m}) \\ (\vec{\sigma}\cdot\vec{\mathbf{p}}) \end{pmatrix}$$

Tomando o hermitiano conjugado de:

$$(\delta^0\mathbf{E} - \vec{\delta}\cdot\vec{\mathbf{p}} - \mathbf{m})\mathbf{u} = 0 \tag{787}$$

temos:

$$\mathbf{u}^+(\delta^0\mathbf{E} + \vec{\delta}\cdot\vec{\mathbf{p}} - \mathbf{m}) = 0 \tag{788}$$

Multiplicando (787) à esquerda por $\mathbf{u}^+$ e (788) à direita por $\mathbf{u}$ e somando, temos:

$$\mathbf{E}\bar{\mathbf{u}}\mathbf{u} = \mathbf{m}\mathbf{u}^+\mathbf{u} \mapsto \bar{\mathbf{u}}\mathbf{u} = \frac{\mathbf{m}}{\mathbf{E}}\mathbf{u}^+\mathbf{u} \tag{789}$$

e daí que $\bar{\mathbf{u}}\mathbf{u} = 1$ é a condição de normalização. Isso implica em:

$$\mathbf{u}^+\mathbf{u} = \frac{\mathbf{E}}{\mathbf{m}} = \frac{\sqrt{\vec{\mathbf{p}}^{\mathbf{2}} + \mathbf{m^2}}}{\mathbf{m}} \tag{790}$$

## 8.22 Soluções com E < 0

A equação de Dirac:

$$(\delta^0\mathbf{E} + \vec{\delta}\vec{\mathbf{p}} + \mathbf{m})\mathbf{v}(-\mathbf{E};\vec{\mathbf{p}}) = 0 \tag{791}$$

e lembrando que definimos:

$$\overline{\mathbf{p}^\mu} \equiv (\mathbf{p^0}; -\vec{\mathbf{p}}) \tag{792}$$

para reescrever:

$$(\delta^\mu \overline{\mathbf{p}_\mu} + \mathbf{m})\mathbf{v} = 0 \tag{793}$$

Se:

$$\mathbf{v}(-\mathbf{E}; \vec{\mathbf{p}} \equiv (\delta^\nu \overline{\mathbf{p}_\nu} - \mathbf{m})\mathbf{v}(-\mathbf{m}; \vec{0}) \tag{794}$$

então:

$$(\delta^\mu \overline{\mathbf{p}_\mu} + \mathbf{m})(\delta^\nu \mathbf{p}_\nu - \mathbf{m})\mathbf{v}(-\mathbf{m}; \vec{0}) = (\overline{\mathbf{p^2}} - \mathbf{m^2})\mathbf{v}(-\mathbf{m}; \vec{0}) = 0 \tag{795}$$

e assim:

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} (\mathbf{E}-\mathbf{m})\mathbf{I} & \vec{\sigma}\cdot\vec{\mathbf{p}} \\ -\vec{\sigma}\cdot\vec{\mathbf{p}} & -(\mathbf{E}+\mathbf{m})\mathbf{I} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ a \\ b \end{pmatrix}$$

Analogamente, ao caso anterior:

$$\mathbf{E}\overline{\mathbf{v}}\mathbf{v} = -\mathbf{m}\mathbf{v}^+\mathbf{v} \mapsto \overline{\mathbf{v}}\mathbf{v} = \frac{-\mathbf{m}}{\mathbf{E}}\mathbf{v}^+\mathbf{v} \tag{796}$$

Como $\mathbf{E}$ é positivo e $\mathbf{v}^+\mathbf{v} > 0$, então $\overline{\mathbf{v}}\mathbf{v} \leq 0$, normalização: $\overline{\mathbf{v}}\mathbf{v} = -\mathbf{I}$. Além disso, é possível mostrar que as duas soluções são ortogonais:

$$(\delta^0\mathbf{E} - \vec{\delta}\vec{\mathbf{p}} - \mathbf{m})\mathbf{u} = 0 \mapsto \mathbf{u}^+(\delta^0\mathbf{E} + \vec{\delta}\vec{\mathbf{p}} - \mathbf{m})\mathbf{v} = 0 \tag{797}$$

e

$$\mathbf{u}^+(\delta^0\mathbf{E} + \vec{\delta}\vec{\mathbf{p}} + \mathbf{m})\mathbf{v} = 0 \mapsto \mathbf{u}^+\mathbf{v} = 0 \mapsto \mathbf{v}^+\mathbf{u} = 0 \tag{798}$$

## 8.23 Limite não-relativístico da Equação de Dirac com interação eletromagnética

A equação de Dirac toma a forma:

$$(\delta^0\mathbf{E} - \vec{\delta}\vec{\mathbf{p}} - \mathbf{m} - \mathbf{e}\delta^0\phi + \mathbf{e}\vec{\delta}\vec{\mathbf{A}})\mathbf{u} = 0 \tag{799}$$

que foi escolhido com $\mathbf{E} > \mathbf{0}$, pois é o que se espera em um limite não-relativístico.

Na forma matricial, teremos:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{E}-\mathbf{m}-\mathbf{e}\phi & -\vec{\sigma}\cdot(\vec{\mathbf{p}}-\mathbf{e}\vec{\mathbf{A}}) \\ \vec{\sigma}(\vec{\mathbf{p}}-\mathbf{e}\vec{\mathbf{A}}) & -(\mathbf{E}+\mathbf{m}-\mathbf{e}\phi) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \chi \\ \zeta \end{pmatrix} = 0$$

daí:

$$\vec{\sigma} \cdot (\vec{\mathbf{p}} - \mathbf{e}\vec{\mathbf{A}})\zeta = (\mathbf{E} - \mathbf{m} - \mathbf{e}\phi)\chi \tag{800}$$

e

$$\vec{\sigma}(\vec{\mathbf{p}} - \mathbf{e}\vec{\mathbf{A}})\chi = (\mathbf{E} + \mathbf{m} - \mathbf{e}\phi)\zeta \tag{801}$$

No limite fracamente relativístico:

$$|\vec{\mathbf{p}}|\mathbf{c} << \mathbf{mc^2} \mapsto \mathbf{E} \sim \mathbf{m} + \frac{\vec{\mathbf{p^2}}}{\mathbf{2m}} \tag{802}$$

Uma aproximação sensata, sabendo que $\mathbf{e}\phi$ representa uma energia de interação eletrostática (em Física Atômica, é a energia de ligação e é da ordem de eV, KeV), e que a massa de repouso é da ordem de $10^5$ eV, é possível aproximar:

$$\mathbf{E} + \mathbf{m} - \mathbf{e}\phi \sim \mathbf{2m} \tag{803}$$

Daí:

$$\zeta \cong \frac{1}{\mathbf{2m}}\vec{\sigma} \cdot (\vec{\mathbf{p}} - \mathbf{e}\vec{\mathbf{A}})\chi \tag{804}$$

e assim:

$$\frac{[\vec{\sigma} \cdot (\vec{\mathbf{p}} - \mathbf{e}\vec{\mathbf{A}})]^2}{\mathbf{2m}}\chi = (\mathbf{E} - \mathbf{m} - \mathbf{e}\phi) \tag{805}$$

Mas:

$$\vec{\sigma} \cdot (\vec{\mathbf{p}} - \mathbf{e}\vec{\mathbf{A}})\vec{\sigma}(\vec{\mathbf{p}} - \mathbf{e}\vec{\mathbf{A}})\chi = \sigma_i\sigma_j(\mathbf{p_i} - \mathbf{eA_i})(\mathbf{p_j} - \mathbf{eA_j})\chi = ... \tag{806}$$

Continuando o desenvolvimento...

$$(\mathbf{p_i} - \mathbf{eA_i})(\mathbf{p_i} - \mathbf{eA_i})\chi + \mathbf{i}\epsilon_{ijk}(\mathbf{p_i} - \mathbf{eA_i}))(\mathbf{p_j} - \mathbf{eA_j})\sigma_k\chi \tag{807}$$

Daí:

$$[\frac{(\vec{\mathbf{p}} - \mathbf{e}\vec{\mathbf{A}})^2}{\mathbf{2m}} - \frac{\mathbf{e}}{\mathbf{2m}}\vec{\mathbf{B}} \cdot \vec{\sigma} + \mathbf{e}\phi]\chi = \mathbf{E_{n.r}}\chi \tag{808}$$

ou

$$-\frac{(\vec{\nabla} - \mathbf{ie}\vec{\mathbf{A}})^2}{\mathbf{2m}}\chi - \frac{\mathbf{e}}{\mathbf{2m}}\vec{\sigma} \cdot \vec{\mathbf{B}}\chi + \mathbf{e}\phi\chi = \mathbf{E_{n.r}}\chi \tag{809}$$

A equação (809) é chamada de equação de Pauli.

Note que:

$$2\frac{\mathbf{e}}{\mathbf{2m}}\frac{\vec{\sigma}}{2} \cdot \vec{\mathbf{B}} = 2\frac{\mathbf{e}}{\mathbf{2m}}\vec{\mathbf{S}} \cdot \vec{\mathbf{B}} \mapsto \vec{\mu_S} = \mathbf{g}\mu_B\vec{\mathbf{S}} \tag{810}$$

IMPORTANTE: O limite não relativístico de Dirac fornece a equação de Pauli com g=2 para o elétron.

## 8.24 Paridade na equação de Dirac

A equação de Dirac da partícula livre:

$$(\mathbf{i}\delta^0\partial_t + \mathbf{i}\delta^i\partial_i - \mathbf{m})\psi(\mathbf{t};\vec{\mathbf{x}}) = 0 \tag{811}$$

Uma transformação de paridade é uma reflexão espacial:

$$\mathbf{t} \mapsto \mathbf{t} \tag{812}$$

e

$$\vec{\mathbf{x}} \mapsto \vec{\mathbf{x'}} = -\vec{\mathbf{x}} \tag{813}$$

O espinor sente a transformação de paridade por meio de uma matriz $\mathbf{P}$, isto é:

$$\psi(\mathbf{t};\vec{\mathbf{x}}) \mapsto \psi'(\mathbf{t'};\vec{\mathbf{x'}}) = \mathbf{P}\psi(\mathbf{t};\vec{\mathbf{x}}) \tag{814}$$

Reescrevendo (811):

$$(\mathbf{i}\delta^0\partial'_t - \mathbf{i}\delta^i\partial'_i - \mathbf{m})\mathbf{P^{-1}}\psi_P(\mathbf{t'};\vec{\mathbf{x'}}) = 0 \tag{815}$$

e impomos que a mesma equação de Dirac valha no referencial transformado:

$$\mathbf{P}(\mathbf{i}\delta^0\partial'_t + \mathbf{i}\delta^i\partial'_i - \mathbf{m})\psi_P(\mathbf{t'};\vec{\mathbf{x'}}) = 0 \tag{816}$$

fica necessário que:

$$\mathbf{P}\delta^0\mathbf{P^{-1}} = \delta^0 \mapsto \mathbf{P} = \delta^0 \tag{817}$$

e

$$\mathbf{P}\delta^i\mathbf{P^{-1}} = -\delta^i \tag{818}$$

Isto é:

$$\psi(\mathbf{t};\vec{\mathbf{x}} \mapsto \psi_P(\mathbf{t'};\vec{\mathbf{x}}) = \delta^0\psi(\mathbf{t};\vec{\mathbf{x}}) \tag{819}$$

## 8.25 Reversão Temporal na equação de Dirac

A transformação é tal que $\mathbf{t'} = -\mathbf{t}$ e $\vec{\mathbf{x'}} = \vec{\mathbf{x}}$. daí note que:

$$\vec{\mathbf{v}} \mapsto \vec{\mathbf{v'}} = -\vec{\mathbf{v}} \tag{820}$$

e

$$\vec{\mathbf{L}} \mapsto \vec{\mathbf{L'}} = -\vec{\mathbf{L}} \tag{821}$$

e

$$\vec{\mathbf{S}} \mapsto \vec{\mathbf{S'}} = -\vec{\mathbf{S}} \tag{822}$$

e assim:

$$\mathbf{A^0} \mapsto \mathbf{A'^0} = \mathbf{A^0} \tag{823}$$

e

$$\vec{\mathbf{A}} \mapsto \vec{\mathbf{A}'} = -\vec{\mathbf{A}} \tag{824}$$

Na Mecânica Quântica:

$$\mathbf{E} = \mathbf{i}\frac{\partial}{\partial_t} \mapsto \mathbf{E}' = -\mathbf{E} \tag{825}$$

Temos aqui a reversão temporal em Mecânica quântica com a existência de lower bound na energia (existência de ground state). É importante notar também que se há um estado de mínima energia, é sempre possível encontrar uma energia ainda menor por inversão temporal.

Assim, a reversão temporal na Mecânica Quântica é representada por um operador anti-linear:

$$\theta(\mathbf{c}\psi) = \mathbf{c}^*\theta\psi \tag{826}$$

onde

$$\mathbf{U_t}\mathbf{i}\frac{\partial}{\partial_t}\mathbf{U_t^{-1}} = (-\mathbf{i}) - \frac{\partial}{\partial_t} = \mathbf{i}\frac{\partial}{\partial_t} \tag{827}$$

A equação de Dirac:

$$(\mathbf{i}\delta^0\partial_t + \mathbf{i}\delta^i\partial_i - \mathbf{m})\psi(\mathbf{t};\vec{\mathbf{x}}) = 0 \tag{828}$$

tomando o complexo conjugado:

$$(\mathbf{i}\delta^{0*}\partial_t - \mathbf{i}\delta^{i*}\partial_i - \mathbf{m})\psi^*(\mathbf{t};\vec{\mathbf{x}}) = 0 \tag{829}$$

onde:

$$\psi(\mathbf{t};\vec{\mathbf{x}}) \mapsto \psi_T(\mathbf{t}';\vec{\mathbf{x}'}) = \mathbf{T}\psi^*(\mathbf{t};\vec{\mathbf{x}}) \tag{830}$$

Daí:

$$\mathbf{T}(\mathbf{i}\delta^{0*}\partial_t' - \mathbf{i}\delta^{i*}\partial_i' - \mathbf{m})\mathbf{T^{-1}}\psi_T(\mathbf{t}';\vec{\mathbf{x}'}) = 0 \tag{831}$$

Impomos que:

$$(\mathbf{i}\delta^0\partial_t' + \mathbf{i}\delta^i\partial_i' - \mathbf{m})\psi_T(\mathbf{t}';\vec{\mathbf{x}'}) = 0 \tag{832}$$

e assim:

$$\mathbf{T}\delta^{0*}\mathbf{T^{-1}} = \delta^0 \tag{833}$$

e

$$\mathbf{T}\delta^{i*}\mathbf{T^{-1}} = -\delta^i \tag{834}$$

Na representação de Dirac:

$$\mathbf{T}\delta^0 = \delta^0\mathbf{T} \tag{835}$$

$$\mathbf{T}\delta^1 = -\delta^1\mathbf{T} \tag{836}$$

$$\mathbf{T}\delta^2 = \delta^2\mathbf{T} \tag{837}$$

$$\mathbf{T}\delta^3 = -\delta^3\mathbf{T} \tag{838}$$

Uma boa escolha será $\mathbf{T} = \delta'\delta^3$, de modo que:

$$\psi(\mathbf{t};\vec{\mathbf{x}}) \mapsto \psi_T(\mathbf{t}';\vec{\mathbf{x}'}) = \delta'\delta^3\psi(\mathbf{t};\vec{\mathbf{x}})^* \tag{839}$$

## 8.26 CPT na equação de Dirac com interações eletromagnéticas

A invariância CPT em Teoria quântica de Campos aparece como consequência de um teorema, o chamado CPT-Theorem.

- se L é local;
- se L é invariante de Lorentz e as equações de campo são Lorentz-covariantes;
- se a conexão entre spin e estatística é respeitada

Então, CPT é uma simetria natural da teoria.

A eletrodinâmica clássica é descrita, de modo geral, pela equação relativística quântica para o próton (equação de Dirac com interação) e pelas equações de Maxwell acopladas ao campo de Dirac por meio da corrente $\mathbf{j}^\nu$ (a fonte da interação eletromagnética é uma partícula descrita pela equação de Dirac). Assim:

$$(\mathbf{i}\delta^\mu\partial_\mu - \mathbf{m} - \mathbf{e}\mathbf{A}_\mu\delta^\mu)\psi(\mathbf{x}) = 0 \mapsto \partial_\mu\mathbf{F}^{\mu\nu} = \mathbf{j}^\nu = \mathbf{e}\overline{\psi}\delta^\nu\psi \mapsto \partial_\mu\widetilde{\mathbf{F}}^{\mu\nu} = 0 \tag{840}$$

Vamos abrir um parênteses agora........

Como ver a força de Lorentz na equação de Dirac??????

$$(\mathbf{i}\delta^0\partial_t + \mathbf{i}\delta^i\partial_i - \mathbf{m} - \mathbf{e}\delta^0\phi - \mathbf{e}\delta^i\mathbf{A_i})\psi = 0 \tag{841}$$

Continuando...

$$(\mathbf{i}\delta^0\partial_t + \mathbf{i}\vec{\delta}\cdot\vec{\nabla} - \mathbf{m} - \mathbf{e}\delta^0\phi + \mathbf{e}\vec{\delta}\cdot\vec{\mathbf{A}})\psi = 0 \tag{842}$$

Chegamos em:

$$(\mathbf{i}\partial_t + \mathbf{i}\delta^0\vec{\delta}\cdot\vec{\nabla} - \mathbf{m}\delta^0 - \mathbf{e}\phi + \mathbf{e}\delta^0\vec{\delta}\cdot\vec{\mathbf{A}})\psi = 0 \tag{843}$$

Mas $\mathbf{i}\partial_t \equiv \mathbf{H}$ e $-\mathbf{i}\vec{\nabla} \equiv \vec{\mathbf{p}}$ e então:

$$(\mathbf{i}\delta^0\vec{\delta}\cdot\vec{\nabla} - \mathbf{m}\delta^0 + \mathbf{e}\delta^0\vec{\delta}\cdot\vec{\mathbf{A}})\psi = (-\mathbf{i}\partial_t + \mathbf{e}\phi)\psi = ... \tag{844}$$

Continuando...

$$(\mathbf{i}\delta^0\vec{\delta}\cdot\vec{\nabla} - \mathbf{m}\delta^0 + \mathbf{e}\delta^0\vec{\delta}\cdot\vec{\mathbf{A}} - \mathbf{e}\phi)\psi = -\mathbf{i}\partial_t\psi \tag{845}$$

Multiplicando por $(-1)$:

$$[\delta^0\vec{\delta}\cdot(\vec{\mathbf{p}} - \mathbf{e}\vec{\mathbf{A}}) + \mathbf{m}\delta^0 + \mathbf{e}\phi]\psi = \mathbf{i}\partial_t\psi \tag{846}$$

ou seja $\mathbf{H}\psi = \mathbf{i}\partial_t\psi$, onde:

$$\mathbf{H} \equiv \delta^0\vec{\delta}\cdot(\vec{\mathbf{p}} - \mathbf{e}\vec{\mathbf{A}}) + \mathbf{m}\delta^0 + \mathbf{e}\phi \tag{847}$$

E podemos identificar:

$$\delta^0\vec{\delta} \equiv \vec{\alpha} = \begin{pmatrix} 0 & \vec{\sigma} \\ \vec{\sigma} & 0 \end{pmatrix}$$

No limite não relativístico - no clássico:

$$\mathbf{H} = \frac{(\vec{\mathbf{p}} - \mathbf{e}\vec{\mathbf{A}})^2}{\mathbf{2m}} + \mathbf{e}\phi \tag{848}$$

e daí:

$$\vec{\mathbf{x}} = \frac{\partial\mathbf{H}}{\partial\vec{\mathbf{p}}} \tag{849}$$

e

$$\vec{\mathbf{p}} = \frac{-\partial\mathbf{H}}{\partial\vec{\mathbf{x}}} \tag{850}$$

isso implica em:

$$\mathbf{m}\vec{\mathbf{x}} = \mathbf{e}\vec{\mathbf{E}} + \mathbf{e}\vec{\mathbf{v}} \times \vec{\mathbf{B}} \tag{851}$$

Voltando ao assunto finalmente.....

Da equação de Dirac:

$$(\mathbf{i}\delta^\mu\partial_\mu - \mathbf{m} - \mathbf{e}\mathbf{A}_\mu\delta^\mu)\psi(\mathbf{x}) = 0 \tag{852}$$

a plicando-se a transformação de paridade:

$$\mathbf{t} \mapsto \mathbf{t}' = \mathbf{t} \tag{853}$$

e

$$\vec{\mathbf{x}} \mapsto \vec{\mathbf{x}'} = -\vec{\mathbf{x}} \tag{854}$$

onde:

$$\mathbf{A^0} \mapsto \mathbf{A^{0'}}(\mathbf{x'}) = \mathbf{A^0}(\mathbf{x}) \tag{855}$$

e

$$\vec{\mathbf{A}} \mapsto \vec{\mathbf{A'}}(\vec{\mathbf{x'}}) = -\vec{\mathbf{A}}(\mathbf{x}) \tag{856}$$

e também:

$$\psi(\mathbf{x}) \mapsto \psi_P(\mathbf{x'}) = \mathbf{P}\psi(\mathbf{x}) \tag{857}$$

então:

$$(\mathbf{i}\delta^0\partial_0 + \mathbf{i}\delta^i\partial_i - \mathbf{m} - \mathbf{eA_0}\delta^0 - \mathbf{eA_i}\delta^i)\psi(\mathbf{x}) = 0 \tag{858}$$

Chegamos em....

$$(\mathbf{i}\delta^0\partial'_0 - \mathbf{i}\delta^i\partial'_i - \mathbf{m} - \mathbf{eA'_0}\delta^0 + \mathbf{eA'_i}\delta^i)\mathbf{P^{-1}}\psi'(\mathbf{x'}) = 0 \tag{859}$$

onde:

$$\mathbf{P}\delta^0\mathbf{P^{-1}} = \delta^0 \tag{860}$$

e

$$\mathbf{P}\delta^i\mathbf{P^{-1}} = -\delta^i \tag{861}$$

daí:

$$(\mathbf{i}\delta^0\partial'_0 + \mathbf{i}\delta^i\partial'_i - \mathbf{m} - \mathbf{eA'_0}\delta^0 - \mathbf{eA'_i}\delta^i)\psi_P(\mathbf{x'}) = 0 \tag{862}$$

Tomando o conjugado complexo:

$$-(\mathbf{i}\delta^{0*}\partial'_0 - \mathbf{i}\delta^{i*}\partial'_i - \mathbf{m} - \mathbf{eA'_0}\delta^{0*} - \mathbf{eA'_i}\delta'^{*})\psi_P(\mathbf{x'}) = 0 \tag{863}$$

para pode aplicar a reversão temporal:

$$\mathbf{t''} = -\mathbf{t'} = -\mathbf{t} \mapsto \mathbf{x''^{\mu}} = -\mathbf{x^{\mu}} \tag{864}$$

$$\vec{\mathbf{x''}} = \vec{\mathbf{x'}} = -\vec{\mathbf{x}} \tag{865}$$

E daí:

$$(\psi_P(\mathbf{x'}))' = \mathbf{T}\psi_P(\mathbf{x'})^* \tag{866}$$

Temos $\mathbf{A''_0} = \mathbf{A'_0}$ e $\mathbf{A''_i} = -\mathbf{A'_i}$. Assim:

$$(\mathbf{i}\delta^{0*}\partial''_0 - \mathbf{i}\delta^{i*}\partial''_i - \mathbf{m} - \mathbf{eA''_0}\delta^{0*} + \mathbf{eA''_i}\delta^{i*})\mathbf{T^{-1}}\psi_{TP}(\mathbf{x''}) = 0 \tag{867}$$

onde:

$$\mathbf{T}\delta^{0*}\mathbf{T^{-1}} = \delta^0 \tag{868}$$

e

$$\mathbf{T}\delta^{i*}\mathbf{T^{-1}} = -\delta^i \tag{869}$$

daí:

$$(\mathbf{i}\delta^0\partial_0'' + \mathbf{i}\delta^i\partial_i'' - \mathbf{m} - \mathbf{e}\mathbf{A_0''}\delta^0 - \mathbf{e}\mathbf{A_i''}\delta^i)\psi_{TP}(\mathbf{x}'') = 0 \tag{870}$$

A equação TP-transformada na forma covariante:

$$(\mathbf{i}\delta^\mu\partial_\mu'' - \mathbf{m} - \mathbf{e}\mathbf{A}''\mu\delta^\mu)\psi_{TP}(\mathbf{x}'') = 0 \tag{871}$$

Tomando o conjugado de Dirac:

$$\overline{\psi}_{TP}(\mathbf{x}'')(-\mathbf{i}\delta^\mu\partial_\mu'' - \mathbf{m} - \mathbf{e}\mathbf{A}_\mu''\delta^\mu) = 0 \tag{872}$$

e finalmente:

$$(\mathbf{i}\delta^\mu\partial_\mu'' - \mathbf{m} + \mathbf{e}\mathbf{A}_\mu''\delta^\mu)\psi_{CTP}(\mathbf{x}'') = 0 \tag{873}$$

Note que:

$$\mathbf{A}^\mu \mapsto -\mathbf{A}^\mu \tag{874}$$

e

$$\mathbf{F}^{\mu\nu} \mapsto -\mathbf{F}^{\mu\nu} \tag{875}$$

mas $\mathbf{F}^{\mu\nu} \mapsto \mathbf{F}^{\mu\nu}$ em CPT.

Então podemos reescrever (873):

$$(\mathbf{i}\delta^\mu\partial_\mu'' - \mathbf{m} - \mathbf{e}\mathbf{A}_\mu{}^{CPT}(\mathbf{x}'')\delta^\mu)\psi_{CPT}(\mathbf{x}'') = 0 \tag{876}$$

que é a equação de Dirac CPT-transformada. Observe que a equação é invariante em forma. Além disto:

$$\psi_{CPT}(\mathbf{x}'') = \mathbf{C}\overline{\psi}_{TP}^t(\mathbf{x}'') = \mathbf{C}(\psi_{TP}^t(\mathbf{x}'')\delta^0)^t = \mathbf{C}\delta^{0t}\psi_{TP}(\mathbf{x}'') = ... \tag{877}$$

Chegamos em....

$$-\delta^0\mathbf{C}\psi_{TP}(\mathbf{x}'')^* = -\delta^0\mathbf{C}\mathbf{T}^*\psi_P(\mathbf{x}') = -\delta^0\mathbf{C}\mathbf{T}^*\mathbf{P}\psi(\mathbf{x}) \tag{878}$$

onde:

$$-\delta^0(\mathbf{i}\delta^0\delta^2)(\delta^1\delta^3)^*\delta^0\psi(\mathbf{x}) = -\mathbf{i}\delta^2\delta^1\delta^3\delta^0\psi(\mathbf{x}) = ... \tag{879}$$

Com o desenvolvimento, temos:

$$\mathbf{i}\delta^0\delta^2\delta^1\delta^3\psi(\mathbf{x}) = -\mathbf{i}\delta^0\delta^1\delta^2\delta^3\psi(\mathbf{x}) = -\delta_5\psi \tag{880}$$

Ou seja:

$$\psi_{CPT}(\mathbf{x}'') = -\delta_5\psi(\mathbf{x}) \tag{881}$$

Assim:

$$(\mathbf{i}\delta^\mu\partial_\mu'' - \mathbf{m} - \mathbf{e}\mathbf{A}_\mu{}^{CPT}(\mathbf{x}'')\delta^\mu)\psi_{CPT}(\mathbf{x}'') = 0 \tag{882}$$

daí:

$$(-\mathbf{i}\delta^{\mu}\partial_{\mu} - \mathbf{m} + \mathbf{e}\mathbf{A}_{\mu}(\mathbf{x})\delta^{\mu})\delta_5\psi(\mathbf{x}) = 0 \tag{883}$$

ou então:

$$(\mathbf{i}\delta^{\mu}\partial_{\mu} + \mathbf{m} - \mathbf{e}\mathbf{A}_{\mu}\delta^{\mu})\delta_5\psi = 0 \tag{884}$$

Note que o sinal da massa mudou, mas isso NÃO tem consequência física, pois significa apenas uma redefinição da função onda.

Note que a partícula e antipartícula tem o mesmo momento, mas a helicidade muda:

$$\lambda = \vec{\mathbf{s}} \cdot \vec{\mathbf{p}} \mapsto \lambda \mapsto -\lambda \tag{885}$$

Além disto, é importante ressaltar que para ir da partícula para a antipartícula é necessária a transformação completa de CPT, que muda os números quânticos de maneira adequada. A conjugação de carga, isoladamente, não leva a partícula na antipartícula, pois caso isso ocorresse teríamos levado um neutrino left em um antineutrino left, que não existe!!!!

## 8.27 Férmions de Majorana

O férmion de Majorana é dado pela relação:

$$\psi^C = \psi \tag{886}$$

Isto é, o espinor de Majorana descreve uma partícula massiva, de spin $\frac{1}{2}$, neutra e autoconjugada de carga, ou sefa, partícula idêntica a antipartícula. Os candidatos a férmions de Majorana são neutrinos super-massivos, neutralinos da SUSY (fotino, Higgsino, Z-ino). O nêutron, por sua vez, NÃO é uma partícula de Majorana, é uma partícula de Dirac usual, só que sem carga.

Assim:

$$\psi^C = \mathbf{C}\overline{\psi}^t = -\delta\mathbf{C}\psi^* = \psi \tag{887}$$

Na representação de Dirac:

$$\mathbf{C} = \mathbf{i}\delta^0\delta^2 \tag{888}$$

então:

$$psi^C = \mathbf{i}\delta^2\psi^* = \psi \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_1^* \\ \psi_2^* \\ \psi_3^* \\ \psi_4^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \\ \psi_4 \end{pmatrix}$$

ou seja $\psi_1 = -\psi_4^*$ e $\psi_3 = \psi_2^*$.

Note então que:

$$\psi^{MAJ.} = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_2^* \\ -\psi_1^* \end{pmatrix}$$

Com 4 parâmetros reais.

O espinor de Majorana consegue ser escrito como um espinor com 4 componentes reais, se trabalharmos na representação de Majorana para as matrizes $-\delta$. Nesta representação, as 4 matrizes $-\delta$ são puramente imaginários.

$$\delta^0 \equiv \begin{pmatrix} \sigma_y & 0 \\ 0 & -\sigma_y \end{pmatrix}$$

e

$$\delta^1 \equiv \begin{pmatrix} \mathbf{i}\sigma_x & 0 \\ 0 & -\mathbf{i}\sigma_x \end{pmatrix}$$

$$\delta^2 \equiv \begin{pmatrix} \mathbf{i}\sigma_z & 0 \\ 0 & -\mathbf{i}\sigma_z \end{pmatrix}$$

$$\delta^3 \equiv \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{iI} \\ \mathbf{iI} & 0 \end{pmatrix}$$

onde note que ainda é satisfeita a álgebra de Clifford:

$$\delta^\mu, \delta^\nu = 2\eta^{\mu\nu}\mathbf{I} \tag{889}$$

Quem é $\mathbf{C}$ nesta representação puramente imaginária ????

$$\mathbf{C}\delta^{\mu t}\mathbf{C} = -\delta^\mu \tag{890}$$

onde $\mathbf{C^t} = -\mathbf{C}$ e $\mathbf{C^t C} = \mathbf{I}$.

Daí:

$$\mathbf{C}\delta^0 = \delta^0\mathbf{C} \tag{891}$$

$$\mathbf{C}\delta^0 = \delta^0\mathbf{C} \tag{892}$$

$$\mathbf{C}\delta^1 = -\delta^1\mathbf{C} \tag{893}$$

$$\mathbf{C}\delta^2 = -\delta^2\mathbf{C} \tag{894}$$

$$\mathbf{C}\delta^3 = -\delta^3\mathbf{C} \tag{895}$$

Assim, na representação de Majorana, se $\mathbf{C} = -\delta^0$, $\psi^C = \psi$, se escreve como:

$$\psi^C = \psi^* = \psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \\ \psi_4 \end{pmatrix}$$

Com $\psi_\alpha \in$ REAIS.

Assim, espinores de Majorana adquirem a forma de um espinor com as 4 componentes reais se trabalharmos na representação de Majorana para as matrizes $-\delta$.

Como fica a equação de Dirac para um férmion de Majorana acoplado a um campo eletromagnético???

Seja a equação de Dirac dada por:

$$(\mathbf{i}\delta^\mu \mathbf{D}_\mu - \mathbf{m})\psi = 0 \tag{896}$$

onde $\mathbf{D}_\mu \equiv \partial_\mu + \mathbf{ieA}_\mu$.

Então:

$$\mathbf{i}\delta^\mu \partial_\mu \psi - \mathbf{m}\psi - \mathbf{eA}_\mu \delta^\mu \psi = 0 \tag{897}$$

e também:

$$\mathbf{i}\delta^\mu \partial_\mu \psi^C - \mathbf{m}\psi^C + \mathbf{eA}_\mu \delta^\mu \psi^C = 0 \tag{898}$$

Se $\psi = \psi^C$, então as 2 equações devariam ser simultaneamente satisfeitas, ou seja, $\mathbf{e} = 0$ (neutra). Todo férmion de Majorana é neutro (auto-conjugado), mas nem todo férmion neutro é de Majorana (caso do nêutron). São os dados experimentais dop decaimento $-\beta$:

$$\mathbf{n} \mapsto \mathbf{p}\bar{\mathbf{e}}\widetilde{\nu}_e \tag{899}$$

que nos asseguram que o nêutron NÃO é um férmion de Majorana.

Férmions de Majorana (neutros) podem ter interação eletromagnética??

A resposta é sim!!!! Isso via spin.

$$\vec{\mathbf{S}}, \vec{\mu} = \mathbf{g}\mu_B \vec{\mathbf{S}} \tag{900}$$

Como g=2:

$$\vec{\mu} = \frac{\mathbf{e}}{2\mathbf{m}}\vec{\sigma} \tag{901}$$

Trata-se de uma interação do tipo $\vec{\mu}\cdot\vec{\mathbf{B}}$.

Assim, a interação eletromagnética é inserida na equação de Dirac por meio do próprio campo, ao invés dos potenciais:

$$(\mathbf{i}\delta^{\mu}\partial_{\mu}-\mathbf{m}-\frac{\mathbf{f}}{2}\mathbf{F}_{\mu\nu}\sum^{\mu\nu})\psi=0 \tag{902}$$

onde lembre que:

$$\sum^{\mu\nu}\equiv\frac{1}{2}[\delta^{\mu},\delta^{\nu}] \tag{903}$$

Daí:

$$\mathbf{F}_{\mu\nu}\sum^{\mu\nu}=2\mathbf{F_{0i}}\sum^{0i}+\mathbf{F_{ij}}\sum^{ij}=-2\vec{\mathbf{E}}\cdot\vec{\delta}\delta^{0}-2\epsilon_{ijk}\sum^{ij}\mathbf{B_k} \tag{904}$$

Tomando-se o limite não-relativístico, chega-se a uma equação de Pauli com campo elétrico presente no momento canônico:

$$\frac{\vec{\sigma}\cdot(\vec{\mathbf{p}}-\mathbf{e}\vec{\mathbf{A}}-\mathbf{f}\vec{\mu}\times\vec{\mathbf{E}})^{2}}{2\mathbf{m}}+.....=0 \tag{905}$$

Assim, para a partícula neutra, o acoplamento mínimo $\mathbf{eA}_{\mu}$ é substituído por um outro acoplamento invariante de gauge, porém diretamente com $\vec{\mathbf{E}}$ e $\vec{\mathbf{B}}$ (acoplamentos não mínimos)!!!

# 9 Eletrodinâmica de Chern-Simons

A eletrodinâmica de Maxwell-Chern-Simons é feita em (1+2)D:

$$\eta^{\mu\nu}(+;-,-) \tag{906}$$

onde

$$\mathbf{ds^2}=\mathbf{g}_{\mu\nu}\mathbf{dx}^{\mu}\mathbf{dx}^{\nu}=\mathbf{c^2dt^2}-\mathbf{dx^2}-\mathbf{dy^2} \tag{907}$$

e assim, em SO(1,2):

$$\mathbf{x}'^{\mu}=\Lambda^{\mu}_{\nu}\mathbf{x}^{\nu} \tag{908}$$

$$\mathbf{x}'^{\mu}\mathbf{x}'_{\mu}=\mathbf{x}^{\mu}\mathbf{x}_{\mu}\mapsto\Lambda^{t}\eta\Lambda=\eta \tag{909}$$

onde det$\Lambda$=+1.

A motivação física para esta eletrodinâmica em (1+2)D é fenômenos planares (ou de baixa dimensionalidade) em física da Matéria Condensada.

Em qualquer espaço, temos:

$$\mathbf{F}_{\mu\nu} = \partial_\mu \mathbf{A}_\nu - \partial_\nu \mathbf{A}_\mu \tag{910}$$

e assim:

$$\partial_\mu \mathbf{F}^{\mu\nu} = \mathbf{j}^\nu \tag{911}$$

e

$$\partial_\mu \widetilde{\mathbf{F}}^{\mu\nu} = 0 \tag{912}$$

A equação (912) é chamada de identidade de Bianchi.

Como:

$$\widetilde{\mathbf{F}}_{\mu\nu} : \epsilon^{\mu\nu k} \tag{913}$$

Devemos contrair com $\mathbf{F}_{\lambda\rho}$, então $\widetilde{\mathbf{F}}_{\mu\nu}$ em 3D é um vetor 3-vetor:

$$\widetilde{\mathbf{F}}_\mu = \frac{1}{2}\epsilon_{\mu\nu k}\mathbf{F}^{\nu\mathbf{k}} \tag{914}$$

e as identidades de Bianchi: $\partial_\mu \widetilde{\mathbf{F}}^\mu = 0$. Note que em 3D, temos apenas 3 equações de Maxwell (2 dos setores espacial e temporal (911) e uma única da equação escalar (912)). Então:

$$\partial_\mu \mathbf{F}^{\mu\nu} = \mathbf{j}^\nu \tag{915}$$

$$\partial_\mu \widetilde{\mathbf{F}}^\mu = 0 \tag{916}$$

$$\partial_\mu \mathbf{j}^\nu = 0 \tag{917}$$

Essas equações são do eletromagnetismo de Maxwell em (1+2)D.

A peculiaridade de 3D é que $\widetilde{\mathbf{F}}_{\mu\nu}$ é um vetor $\widetilde{\mathbf{F}}_\mu$ e não um tensor, como em 4D.

$$\widetilde{\mathbf{F}}_\mu = \frac{1}{2}\epsilon_{\mu\nu k}\mathbf{F}^{\nu k} \tag{918}$$

Daí:

$$\partial_\mu \mathbf{F}^{\mu\nu} + \mu\widetilde{\mathbf{F}}^\nu = \mathbf{j}^\nu \tag{919}$$

$$\partial_\mu \widetilde{\mathbf{F}}^\mu = 0 \tag{920}$$

$$\partial_\nu \mathbf{j}^\nu = 0 \tag{921}$$

e assim:

$$\mathbf{F}_{0i} = \partial_0 \mathbf{A_i} - \partial_i \mathbf{A_0} = -\partial_0 \mathbf{A^i} - \partial_i \mathbf{A^0} = -\vec{\nabla}\phi - \frac{\partial \vec{\mathbf{A}}}{\partial \mathbf{t}} \tag{922}$$

onde, ainda, temos:

$$\mathbf{F_{0i}} \equiv \vec{\mathbf{E}}_i \tag{923}$$

e

$$\mathbf{F^{0i}} = -\mathbf{F_{0i}} = -\vec{\mathbf{E}}_\mathbf{i} \tag{924}$$

e também:

$$\mathbf{F_{ij}} = \partial_i \mathbf{A_j} - \partial_j \mathbf{A_i} = -(\partial_i \mathbf{A^j} - \partial_j \mathbf{A^i}) = -\epsilon_{ij}\mathbf{B} \tag{925}$$

Fazemos, portanto, a identificação:

$$\mathbf{F_{ij}} \equiv +\epsilon_{ij}\mathbf{B} \tag{926}$$

onde $\epsilon_{ij}\epsilon_{kl} = \delta_{ik}\delta_{jl} - \delta_{il}\delta_{jk}$ e $\epsilon_{ij}\epsilon_{ij} = 2$.

Assim:

$$\epsilon_{ij}\mathbf{F_{ij}} = \epsilon_{ij}\epsilon_{ij}\mathbf{B} \mapsto \mathbf{B} = \frac{1}{2}\epsilon_{ij}\mathbf{F_{ij}} = \epsilon_{ij}\partial_i\mathbf{A_j} \tag{927}$$

# 10 Born-Infield

A Lagrangiana é dada por:

$$\mathbf{L} = \mathbf{b^2}[\sqrt{-det[\eta^{\mu\nu} + \frac{\mathbf{F}^{\mu\nu}}{\mathbf{b}}}] - 1] \tag{928}$$

que é uma tentativa de integrar eletromagnetismo (através de $\mathbf{F}^{\mu\nu}$) com a métrica de espaço-tempo. Podemos reescrever:

$$\mathbf{L} = \mathbf{b^2}\sqrt{[1 + \frac{\vec{\mathbf{B}}^2 - \vec{\mathbf{E}}^2}{\mathbf{b^2}} - \frac{(\vec{\mathbf{B}} \cdot \vec{\mathbf{E}}^2)}{\mathbf{b^2}}} - 1] = ... \tag{929}$$

Desenvolvendo, chegaremos em:

$$\mathbf{b^2}\sqrt{[1 + \frac{\mathbf{F}_{\mu\nu}\mathbf{F}^{\mu\nu}}{2\mathbf{b^2}} - \frac{(\mathbf{F}_{\mu\nu}\widetilde{\mathbf{F}}^{\mu\nu})^2}{16\mathbf{b^4}}} - 1] \tag{930}$$

pois:

$$\frac{1}{2}\mathbf{F}_{\mu\nu}\mathbf{F}^{\mu\nu} = \vec{\mathbf{B}}^2 - \vec{\mathbf{E}}^2 \tag{931}$$

e

$$\frac{1}{4}\mathbf{F}_{\mu\nu}\widetilde{\mathbf{F}}^{\mu\nu} = \vec{\mathbf{B}} \cdot \vec{\mathbf{E}} \tag{932}$$

O potencial tem a forma:

$$\mathbf{Q} = \int_r^\infty \frac{\mathbf{edr}}{\sqrt{\mathbf{r^4} + \mathbf{r_0^4}}} = \frac{\mathbf{e}}{\mathbf{r_0}} \int_0^\infty \frac{\mathbf{dx}}{\sqrt{\mathbf{x^4} + 1}} \tag{933}$$

onde $\mathbf{x} = \frac{\mathbf{r}}{\mathbf{r_0}}$.

O princípio variacional:

$$\delta\mathbf{S} = \delta \int \mathbf{Ld^3xdt} = \int \delta\mathbf{Ld^4x} = 0 \tag{934}$$

segue que:

$$\delta\mathbf{L} = \frac{\mathbf{b^2}}{2\sqrt{.}}[\frac{1}{2\mathbf{b^2}}\delta(\mathbf{F}_{\mu\nu}\mathbf{F}^{\mu\nu}) - \frac{1}{16\mathbf{b^4}}\delta(\mathbf{F}_{\mu\nu}\widetilde{F}^{\mu\nu})^2] \tag{935}$$

onde:

$$\delta(\mathbf{F}_{\mu\nu}\mathbf{F}^{\mu\nu}) = (\delta\mathbf{F}_{\mu\nu})\mathbf{F}^{\mu\nu} + \mathbf{F}_{\mu\nu}(\delta\mathbf{F}^{\mu\nu}) = ... \tag{936}$$

Continuando...

$$(\delta\mathbf{F}_{\mu\nu})\mathbf{F}^{\mu\nu} + \mathbf{F}_{\mu\nu}\eta^{\mu\lambda}\eta^{\nu\sigma}(\delta\mathbf{F}_{\lambda\sigma}) = \delta\mathbf{F}_{\mu\nu}\mathbf{F}^{\mu\nu} + \mathbf{F}^{\mu\nu}(\delta\mathbf{F}_{\mu\nu}) = 2\mathbf{F}^{\mu\nu}\delta\mathbf{F}_{\mu\nu} \tag{937}$$

e também:

$$\delta(\mathbf{F}_{\mu\nu}\widetilde{\mathbf{F}}^{\mu\nu}) = (\delta\mathbf{F}_{\mu\nu})\widetilde{\mathbf{F}}^{\mu\nu} + \mathbf{F}_{\mu\nu}\delta\widetilde{\mathbf{F}}^{\mu\nu} \tag{938}$$

Mas $\delta\widetilde{F}^{\mu\nu} = \frac{1}{2}\epsilon^{\mu\nu\lambda\sigma}\delta\mathbf{F}_{\lambda\sigma}$ e $\epsilon^{\mu\nu\lambda\sigma} = \epsilon^{\mu\nu\lambda\sigma} = \epsilon^{\lambda\sigma\mu\nu}$.

Daí:

$$(\delta\mathbf{F}_{\mu\nu})\widetilde{\mathbf{F}}^{\mu\nu} + \frac{1}{2}\epsilon^{\lambda\sigma\mu\nu}\mathbf{F}_{\mu\nu}\delta\mathbf{F}_{\lambda\sigma} = 2\widetilde{\mathbf{F}}^{\mu\nu}\delta\mathbf{F}_{\mu\nu} \tag{939}$$

Assim, de ():

$$\frac{\mathbf{b^2}}{2\sqrt{.}}[\frac{1}{2\mathbf{b^2}}2\mathbf{F}^{\mu\nu}\delta\mathbf{F}_{\mu\nu} - \frac{1}{16\mathbf{b^4}}2(\mathbf{F}_{\lambda\sigma}\widetilde{\mathbf{F}}^{\lambda\sigma})2\widetilde{\mathbf{F}}^{\mu\nu}\delta\mathbf{F}_{\mu\nu}] = .... \tag{940}$$

Continuando...

$$\frac{1}{2}[\frac{\mathbf{F}^{\mu\nu} - \frac{1}{4\mathbf{b^2}}(\mathbf{F}_{\lambda\sigma}\widetilde{\mathbf{F}}^{\lambda\sigma})\widetilde{\mathbf{F}}^{\mu\nu}}{\sqrt{.}}]\delta\mathbf{F}_{\mu\nu} = \mathbf{G}^{\mu\nu}\delta\mathbf{F}_{\mu\nu} \tag{941}$$

Logo:

$$\frac{\delta\mathbf{L}}{\delta\mathbf{F}_{\mu\nu}} = \mathbf{G}^{\mu\nu} \tag{942}$$

$$\frac{1}{2}\int \mathbf{G}^{\mu\nu}\delta\mathbf{F}_{\mu\nu}\mathbf{d^4x} \tag{943}$$

Mas:

$$\delta\mathbf{F}_{\mu\nu} = \delta[\partial_\mu\mathbf{A}_\nu - \partial_\nu\mathbf{A}_\mu] = \partial_\mu\delta\mathbf{A}_\nu - \partial_\nu\delta\mathbf{A}_\mu \tag{944}$$

Note que:

$$\int \mathbf{G}^{\mu\nu}\partial_\mu(\delta\mathbf{A}^\nu)\mathbf{d^4x} = \mathbf{G}^{\mu\nu}\delta\mathbf{A}_\mu - \int \partial_\mu\mathbf{G}^{\mu\nu}\delta\mathbf{A}_\nu\mathbf{d^4x} \tag{945}$$

$$\int[-\partial_\mu\mathbf{G}^{\mu\nu}\delta\mathbf{A}_\nu + \partial_\nu\mathbf{G}^{\mu\nu}\delta\mathbf{A}_\mu]\mathbf{d^4x} = \int[-\partial_\mu\mathbf{G}^{\mu\nu}\delta\mathbf{A}_\nu + \partial_\mu\mathbf{G}^{\nu\mu}\delta\mathbf{A}_\nu]\mathbf{d^4x} = \tag{946}$$

Continuando....

$$\int[-\partial_\mu\mathbf{G}^{\mu\nu}\delta\mathbf{A}_\nu - \partial_\mu\mathbf{G}^{\mu\nu}\delta\mathbf{A}_\nu]\mathbf{d^4x} = -2\int \partial_\mu\mathbf{G}^{\mu\nu}\delta\mathbf{A}_\nu\mathbf{d^4x} = 0 \tag{947}$$

Chegamos na equação de movimento de Born-Infield:

$$\partial_\mu\mathbf{G}^{\mu\nu} = 0 \tag{948}$$

Além disso:

$$\vec{\mathbf{D}} = -\frac{\partial\mathbf{L}}{\partial\vec{\mathbf{E}}} = \frac{\vec{\mathbf{E}} + \frac{1}{\mathbf{b^2}}(\vec{\mathbf{B}}\cdot\vec{\mathbf{E}})\vec{\mathbf{B}}}{\sqrt{1 + \frac{\vec{\mathbf{B}}^2 - \vec{\mathbf{E}}^2}{\mathbf{b^2}} - (\frac{\vec{\mathbf{B}}\cdot\vec{\mathbf{E}}}{\mathbf{b^2}})^2}} \tag{949}$$

$$\vec{\mathbf{H}} = \frac{\partial\mathbf{L}}{\partial\vec{\mathbf{B}}} = \frac{\vec{\mathbf{B}} - \frac{1}{\mathbf{b^2}}(\vec{\mathbf{B}}\cdot\vec{\mathbf{E}})\vec{\mathbf{E}}}{\sqrt{1 + \frac{\vec{\mathbf{B}}^2 - \vec{\mathbf{E}}^2}{\mathbf{b^2}} - (\frac{\vec{\mathbf{B}}\cdot\vec{\mathbf{E}}}{\mathbf{b^2}})^2}} \tag{950}$$

Note que no limite $\mathbf{b} \mapsto \infty$, retomamos Maxwell. Além disso:

$$\vec{\mathbf{B}} = \vec{\mathbf{H}} = 0 \tag{951}$$

E ainda:

$$\vec{\mathbf{E}} = \frac{\mathbf{e}}{\sqrt{\mathbf{r^4} + (\frac{\mathbf{e}}{\mathbf{b}})^2}}\widehat{\mathbf{r}} \tag{952}$$

e

$$\vec{\mathbf{D}} = \frac{\mathbf{e}}{\mathbf{r^2}}\widehat{\mathbf{r}} \tag{953}$$

Tomando as equações de Maxwell:

$$\vec{\nabla}\times\vec{\mathbf{E}} = -\frac{\partial\vec{\mathbf{B}}}{\partial_t} \tag{954}$$

e

$$\vec{\nabla}\times\vec{\mathbf{B}} = \vec{\mathbf{j}} + \frac{\partial\vec{\mathbf{D}}}{\partial_t} \tag{955}$$

e multiplicando escalarmente por $\vec{\mathbf{H}}$ e $\vec{\mathbf{E}}$, respectivamente:

$$\vec{\mathbf{H}} \cdot \vec{\nabla} \times \vec{\mathbf{E}} = -\vec{\mathbf{H}} \cdot \frac{\partial \vec{\mathbf{B}}}{\partial_t} \tag{956}$$

e

$$\vec{\mathbf{E}} \cdot \vec{\nabla} \times \vec{\mathbf{H}} = \vec{\mathbf{j}} \cdot \vec{\mathbf{E}} + \vec{\mathbf{E}} \cdot \frac{\partial \vec{\mathbf{D}}}{\partial_t} \tag{957}$$

Fazendo (956)-(957):

$$\vec{\mathbf{H}} \cdot \vec{\nabla} \times \vec{\mathbf{E}} - \vec{\mathbf{E}} \cdot \vec{\nabla} \times \vec{\mathbf{H}} = -\vec{\mathbf{j}} \cdot \vec{\mathbf{E}} - \vec{\mathbf{H}} \cdot \frac{\partial \vec{\mathbf{B}}}{\partial_t} - \vec{\mathbf{E}} \cdot \frac{\partial \vec{\mathbf{D}}}{\partial_t} ... \tag{958}$$

Continuando...

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{\mathbf{E}} \times \vec{\mathbf{H}}) + \vec{\mathbf{H}} \cdot \frac{\vec{\mathbf{B}}}{\partial_t} + \vec{\mathbf{E}} \cdot \frac{\partial \vec{\mathbf{D}}}{\partial_t} = -\vec{\mathbf{j}} \cdot \vec{\mathbf{E}} \tag{959}$$

E

$$\frac{\delta \mathbf{L}}{\delta \mathbf{t}} = \frac{\partial \mathbf{L}}{\partial \vec{\mathbf{B}}} \cdot \frac{\partial \vec{\mathbf{B}}}{\partial_t} + \frac{\partial \mathbf{L}}{\partial \vec{\mathbf{E}}} \cdot \frac{\vec{\mathbf{E}}}{\partial_t} = \vec{\mathbf{H}} \cdot \frac{\partial \vec{\mathbf{B}}}{\partial_t} - \vec{\mathbf{D}} \cdot \frac{\partial \vec{\mathbf{E}}}{\partial_t} \tag{960}$$

Daí:

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{\mathbf{E}} \times \vec{\mathbf{H}}) + \frac{\partial \mathbf{L}}{\partial_t} + \vec{\mathbf{D}} \cdot \frac{\partial \vec{\mathbf{E}}}{\partial_t} + \vec{\mathbf{E}} \cdot \frac{\partial \vec{\mathbf{D}}}{\partial_t} = -\vec{\mathbf{j}} \cdot \vec{\mathbf{E}} \tag{961}$$

Chegamos em:

$$\vec{\nabla}(\vec{\mathbf{E}} \times \vec{\mathbf{H}}) + \frac{\partial}{\partial_t}[\mathbf{L} + \vec{\mathbf{D}} \cdot \vec{\mathbf{E}}] = -\vec{\mathbf{j}} \cdot \vec{\mathbf{E}} \tag{962}$$

## 10.1 De volta a Chern-Simons

Tínhamos proposto:

$$\partial_\mu \mathbf{F}^{\mu\nu} + \nu \widetilde{\mathbf{F}}^\nu = \mathbf{j}^\nu \tag{963}$$

onde o dual $\widetilde{\mathbf{F}}^{\mu\nu}$ em (1+2)D, temos:

$$\widetilde{\mathbf{F}}^\nu = \frac{1}{2}\epsilon^{\mu\nu k}\mathbf{F}_{\nu\mathbf{k}} \tag{964}$$

e a segunda equação de Maxwell é a identidade de Bianchi em qualquer espaço:

$$\partial_\mu \mathbf{F}_{\nu\mathbf{k}} + \partial_\nu \mathbf{F}_{\mathbf{k}\mu} + \partial_k \mathbf{F}_{\mu\nu} = 0 \tag{965}$$

Invertendo (964):

$$\mathbf{F}_{\mu\nu} = \epsilon_{\mu\nu k}\widetilde{\mathbf{F}}^k \tag{966}$$

então de (965) segue que:

$$\epsilon_{\nu k\lambda}\partial_\mu\widetilde{\mathbf{F}}^\lambda + \epsilon_{k\mu\lambda}\partial_\nu\widetilde{\mathbf{F}}^\lambda + \epsilon_{\mu\nu\lambda}\partial_k\widetilde{\mathbf{F}}^\lambda = 0 \tag{967}$$

Contraindo com $\epsilon^{\mu\nu k}$ temos que:

$$\partial_\mu\widetilde{\mathbf{F}}^\mu = 0 \tag{968}$$

pois:

$$\epsilon_{\mu\nu k}\epsilon^{k\rho\lambda} = \delta^\rho_\mu\delta^\lambda_\nu - \delta^{\cdot}_{\cdot}\delta^{\cdot}_{\cdot} \tag{969}$$

e (968) é a forma de identidade de Bianchi explicitamente em (1+2)D.

Além disto, trabalhando no vácuo ($\mathbf{j}^\nu = 0$) temos, de (965):

$$\partial_\mu\mathbf{F}_{\nu\mathbf{k}} + \partial_\nu\mathbf{F}_{\mathbf{k}\mu} + \partial_k\mathbf{F}_{\mu\nu} = 0 \tag{970}$$

No desenvolvimento, temos:

$$\partial^\mu\partial_\mu\mathbf{F}_{\nu\mathbf{k}} + \partial_\nu\partial^\mu\mathbf{F}_{\mathbf{k}\mu} + \partial_k\partial^\mu\mathbf{F}_{\mu\nu} = 0 \tag{971}$$

Usando (0) para $\mathbf{j}^\nu = 0$, temos:

$$\Box\mathbf{F}_{\nu\mathbf{k}} + \partial_\nu(-\partial^\mu\mathbf{F}_{\mu\mathbf{k}}) + \partial_k(\partial^\mu\mathbf{F}_{\mu\nu}) = 0 \tag{972}$$

Daí:

$$\Box\mathbf{F}_{\nu\mathbf{k}} + \mu(\partial_\nu\widetilde{\mathbf{F}}_k - \partial_k\widetilde{\mathbf{F}}_\nu) = 0 \tag{973}$$

Contraindo esta equação com $\epsilon^{\lambda\nu k}$, obteremos:

$$(\Box + \mu^2)\widetilde{\mathbf{F}}^\lambda = 0 \tag{974}$$

ou então:

$$(\Box + \mu^2)\frac{1}{2}\epsilon^{\lambda\alpha\beta}\mathbf{F}_{\alpha\beta} = 0 \mapsto (\Box + \mu^2)\mathbf{F}^{\mu\nu} = 0 \tag{975}$$

De (975), obtemos que $\mathbf{p^2} = \mu^2$. A relação de dispersão nos dá:

$$\mathbf{E^2} = \vec{\mathbf{p^2}} + \mu^2 \tag{976}$$

exatamente como no caso de Maxwell-Proca; tem-se que as equações descrevem a propagação de um fóton massivo. A diferença notável entre Maxwell-Chern- Simons e Maxwell-Proca é que, no caso de Maxwell-Chern-Simons, tem-se fóton com massa sem violação de simetria de gauge.

Lembre:

Maxwell-Proca: $\partial_\mu \mathbf{F}^{\mu\nu} + \mathbf{m^2 A}^\nu = \mathbf{j}^\nu$ que viola a simetria de gauge.

Maxwell-Chern-Simons: $\partial_\mu \mathbf{F}^{\mu\nu} + \mu \widetilde{\mathbf{F}}^\nu = \mathbf{j}^\nu$, onde temos uma condição de gauge fixing.

No vácuo:

$$\partial_\mu \mathbf{F}^{\mu\nu} + \mu \widetilde{\mathbf{F}}^\nu = 0 \tag{977}$$

daí:

$$(\Box \eta^{\mu\nu} - \partial^\mu \partial^\nu)\mathbf{A}_\mu + \mu \epsilon^{\nu k \lambda} \partial_k \mathbf{A}_\lambda = 0 \tag{978}$$

que pode ser colocada na forma:

$$(\Box \eta_{\mu\nu} - \partial_\mu \partial_\nu + \mu \mathbf{S}_{\mu\nu})\mathbf{A}^\nu = 0 \tag{979}$$

onde

$$\mathbf{S}_{\mu\nu} \equiv \epsilon_{\mu\lambda\nu} \partial^\lambda \tag{980}$$

## 10.2 Algo a ver com a Função de Green

A equação:

$$(\Box \eta_{\mu\nu} - \partial_\mu \partial_\nu + \mu \mathbf{S}_{\mu\nu})\mathbf{A}^\nu = \mathbf{j}^\nu \tag{981}$$

Daí:

$$\theta^\mu_\nu \mathbf{A}^\nu = \mathbf{j}^\mu \mapsto \mathbf{A} = \theta^{-1} \mathbf{j} \tag{982}$$

e a solução:

$$\mathbf{A}_\mu(\mathbf{x}) = \int \mathbf{d^3 x' G}_{\mu\nu}(\mathbf{x} - \mathbf{x'})\mathbf{j}^\nu(\mathbf{x''}) \tag{983}$$

onde $\theta_{\mu\alpha}(\mathbf{x})\mathbf{G}^{\alpha\nu}(\mathbf{x} - \mathbf{x'}) = \delta^\nu_\mu \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{x'})$. Ainda temos:

$$\theta_\mu \equiv \Box \eta_\mu - \partial_\mu \partial_\alpha + \mu \mathbf{S}_{\mu\alpha} \tag{984}$$

Fixando o gauge:

$$\partial_\mu \mathbf{A}^\mu = 0 \tag{985}$$

então:

$$\theta_{\mu\nu} = \Box \eta_{\mu\nu} + \mu \mathbf{S}_{\mu\nu} = \Box \theta_{\mu\nu} + \Box \omega_{\mu\nu} + \mu \mathbf{S}_{\mu\nu} \tag{986}$$

Queremos resolver $\theta_\mu \mathbf{G}^{\alpha\nu} = \delta^\nu_\mu$ e é razoável imaginar que o inverso do operador $\theta_{\mu\alpha}$ também possa ser escrito em termos de base de operadores na qual $\theta_{\mu\alpha}$ está escrito, isto é, supomos que:

$$\mathbf{G}^{\alpha\nu} = \mathbf{x}\theta^{\alpha\nu} + \mathbf{y}\omega^{\alpha\nu} + \mathbf{z}\mathbf{S}^{\alpha\nu} \tag{987}$$

E agora verificamos se $\theta_{\mu\alpha}\mathbf{G}^{\alpha\nu} = \delta_\mu^\nu$.

Daí:

$$(\Box\theta_{\mu\alpha} + \Box\omega_{\mu\alpha} + \mu\mathbf{S}_{\mu\alpha})(\mathbf{x}\theta^{\alpha\nu} + \mathbf{y}\omega^{\alpha\nu} + \mathbf{z}\mathbf{S}^{\alpha\nu}) = \delta_\mu^\nu \tag{988}$$

Usando as relações entre os operadores segue que:

$$\Box\mathbf{x}\theta_\mu^\nu + \Box\mathbf{z}\mathbf{S}_\mu^\nu + \Box\mathbf{y}\omega_\mu^\nu + \mu\mathbf{x}\mathbf{S}_\mu^\nu - \mu\mathbf{z}\Box\theta_\mu^\nu = \theta_\mu^\nu + \omega_\mu^\nu \tag{989}$$

Assim $\Box\mathbf{x} - \Box\mu\mathbf{z} = 1$, $\Box\mathbf{y} = 1$ e $\Box\mathbf{z} + \mu\mathbf{x} = 0$.

Daí $\mathbf{x} = \frac{1}{\Box+\mu^2}$, $\mathbf{y} = \frac{1}{\Box}$ e $\mathbf{z} = \frac{-\mu}{\Box}\frac{1}{(\Box+\mu^2)}$.

Finalmente, a função de Green:

$$\mathbf{G}^{\alpha\nu} = \frac{1}{\Box+\mu^2}\theta^{\alpha\nu} + \frac{1}{\Box}\omega^{\alpha\nu} - \frac{\mu}{\Box}\frac{1}{\Box+\mu^2}\mathbf{S}^{\alpha\nu} = .... \tag{990}$$

Chegamos em:

$$\frac{1}{\Box+\mu^2}\theta^{\alpha\nu} + \frac{1}{\Box}\omega^{\alpha\nu} - \frac{1}{\mu}(\frac{1}{\Box} - \frac{1}{\Box+\mu^2})\mathbf{S}^{\mu\nu} \tag{991}$$

Reescrevendo a função de Green, no espaço dos momenta:

$$\widetilde{\mathbf{G}}_{\mu\nu}(\mathbf{k}) = \frac{-1}{\mathbf{k^2}-\mu^2}(\eta_{\mu\nu} - \frac{\mathbf{k}_\mu\mathbf{k}_\nu}{\mathbf{k^2}}) - \frac{1}{\mathbf{k^2}}\frac{\mathbf{k}_\mu\mathbf{k}_\nu}{\mathbf{k^2}} + \frac{1}{\mu}(\frac{1}{\mathbf{k^2}} - \frac{1}{\mathbf{k^2}-\mu^2})\epsilon_{\mu\lambda\nu}(-\mathbf{i}\mathbf{k}^\lambda) \tag{992}$$

Partindo de:

$$\widetilde{\mathbf{F}}^\mu = \frac{1}{2}\epsilon^{\mu k\lambda}\mathbf{F}_{\mathbf{k}\lambda} \tag{993}$$

então:

$$\widetilde{\mathbf{F}}^0 = \frac{1}{2}\epsilon^{0ij}\mathbf{F_{ij}} = \frac{1}{2}\epsilon_{ij}(\epsilon_{ij}\mathbf{B}) = \mathbf{B} \tag{994}$$

$$\widetilde{\mathbf{F}}^i = \frac{1}{2}\epsilon^{ik\lambda}\mathbf{F}_{\mathbf{k}\lambda} = \frac{1}{2}\epsilon^{i0j}\mathbf{F_{0j}} + \frac{1}{2}\epsilon^{ij0}\mathbf{F_{j0}} = -\epsilon^{0ij}\mathbf{F_{0j}} = -\epsilon_{ij}\vec{\mathbf{E}}_\mathbf{j} \tag{995}$$

e a equação de Maxwell:

$$\partial_\mu\mathbf{F}^{\mu\nu} + \mu\widetilde{\mathbf{F}}^\nu = \mathbf{j}^\nu \tag{996}$$

Para $\nu = 0$:

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{\mathbf{E}} + \mu\mathbf{B} = \rho \tag{997}$$

Para $\nu = i$:

$$\partial_0\mathbf{F^{0i}} + \partial_j\mathbf{F^{ij}} + \mu\widetilde{\mathbf{F}}^i = \mathbf{j^i} \tag{998}$$

Assim:

$$\frac{\partial}{\partial_t}(-\vec{\mathbf{E}}_i) + \partial_j(\epsilon_{ij}\mathbf{B}) - \mu\epsilon_{ij}\vec{\mathbf{E}}_{\mathbf{j}} = \vec{\mathbf{j}}_i \tag{999}$$

Chegamos em:

$$\epsilon_{ij}\partial_j\mathbf{B} = \frac{\partial}{\partial_t}\vec{\mathbf{E}}_i + \mu\epsilon_{ij}\vec{\mathbf{E}}_j + \vec{\mathbf{j}}_i \tag{1000}$$

Temos ainda a equação de Ampère-Maxwell:

$$\tilde{\vec{\nabla}}\mathbf{B} - \mu\tilde{\vec{\mathbf{E}}} = \frac{\partial}{\partial_t}\vec{\mathbf{E}} + \vec{\mathbf{j}} \tag{1001}$$

e a identidae de Bianchi:

$$\partial_\mu\widetilde{\mathbf{F}}^\mu = 0 \tag{1002}$$

$$\partial_0\widetilde{\mathbf{F}}^0\partial_i\widetilde{\mathbf{F}}^i = 0 \tag{1003}$$

E por último:

$$\frac{\partial}{\partial_t}\mathbf{B} + \partial_i(-\epsilon_{ij}\vec{\mathbf{E}}_j) = 0 \mapsto \vec{\nabla} \times \vec{\mathbf{E}} = \frac{\partial\vec{\mathbf{B}}}{\partial_t} \tag{1004}$$

A carga estática que gera um campo eletrostático gera também um campo magnetostático em Chern-Simons.