Integral de Linha

Ranier

December 21, 2017

1 Introdução

Suponha que uma partícula esteja sujeita à uma força externa. Tal força atua sobre a partícula enquanto ela descreve uma trajetória no espaço. É de interesse, em muitas situações, sabermos qual o trabalho realizado por essa força sobre a partícula. O leitor pode pensar que a resposta é muito simples, já que o trabalho pode ser calculado como $W = F\Delta X\cos(\theta)$, porém essa expressão está correta apenas quando a força for constante, e o deslocamento for uma reta, ou seja, um caso muito especial. Como foi proposto inicialmente, o problema envolve uma força, um campo vetorial (não necessariamente constante), qualquer e uma trajetória qualquer (não necessariamente reta).

O que teremos de fazer para resolver esse problema é calcular o que chamamos de integral de linha de um campo vetorial, que definiremos ao longo do capítulo. Tal integral também pode ser avaliada para funções (campos) escalares.

Pode parecer que a solução desse problema é complicado, mas veremos ao longo do capítulo que a ideia é simples e bem intuitiva.

Este é só um exemplo de aplicação, que deve motivar o leitor. É claro, a integral de linha pode aparecer em inúmeras situações físicas diferentes.

2 Curvas Parametrizadas

Para entendermos o problema por completo, precisamos entender o que é uma curva, ou trajetória.

O primeiro aspecto a ser estabelecido é que uma curva ou trajetória qualquer não é necessariamente um gráfico.

Exemplo 1:

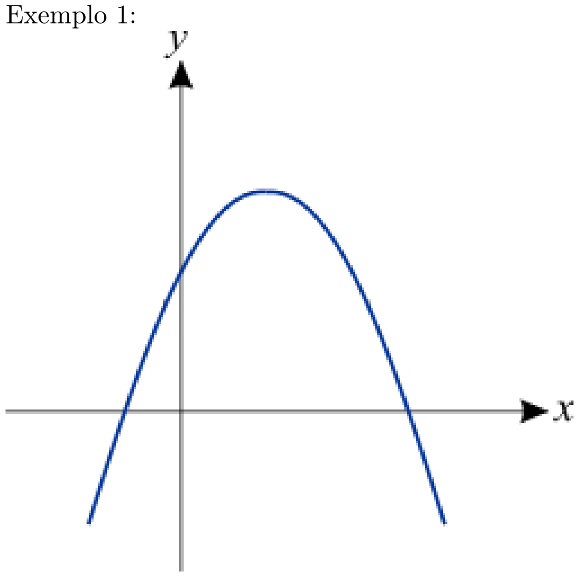

Fig. 01

Na figura acima, temos uma parábola. Cada ponto dessa parábola é um par ordenado (x,y), de modo que y é uma função de x da forma $y(x) = ax^2 + bx + c$. Assim, dado o valor das constantes a, b e c, podemos construir a função para cada ponto de x.

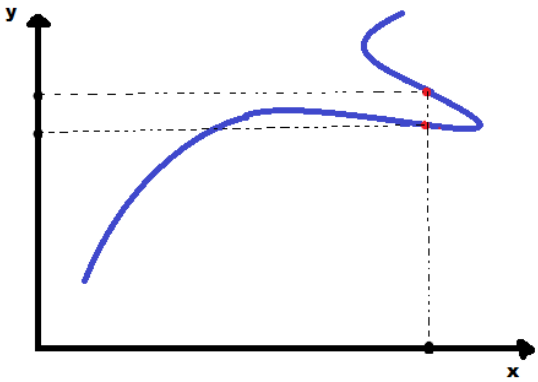

Fig. 02

Na figura 2, temos um caminho qualquer. Mas pela definição de função, y não pode ser função de x, nem vice-versa. Caso tentasse escrever y em função de x o leitor teria um problema de ambiguidade justamente nos pontos destacados na imagem. Isso porque haveria dois valores de y para o mesmo x, o que a definição de função não sustenta.

Bem, então como construímos uma curva genérica como a apresentada na figura 2?

Cada ponto, ou posição, da curva é definido por um x e um y, que formam um par ordenado (x,y). Mas então, digamos que em um instante t0 a partícula possui uma posição (x0,y0). Em outro instante, digamos t1, a posição é (x1,y1), e assim por diante. Isto significa que a cada instante pode haver um valor de x e y diferente, e portanto um ponto diferente, assim construindo a trajetória da partícula. Mas isso significa que x é uma função do tempo, e y é outra função do tempo.

Com essa ideia inicial, podemos então dizer como construir uma curva qualquer.

DEFINIÇÃO 1:

Se $x = f(\lambda)$ e $y = g(\lambda)$, onde λ é um parâmetro pertecente ao intervalo $[a, b] \in I \subset \Re$, então o conjunto dos pontos $(f(\lambda)\ ,\ g(\lambda))$ formam o que chamamos de curva parametrizada em duas dimensões. Usualmente, denotamos o ponto da curva como $\vec{r}(t) = (x(t), y(t))$.

No caso, nosso parâmetro é λ (o tempo foi apenas um exemplo de parâmetro). As igualdades que definem x e y são chamadas de equações paramétricas da curva.

EXEMPLO:

Uma partícula percorre uma tragetória circular de raio R no sentido anti-horário com velocidade angular constante. Inicialmente, a partícula se encontra sobre o eixo x. Encontre as equações paramétricas que descreva a curva.

SOLUÇÃO:

O que devemos fazer é encontrar as equações $x = f(t)$ e $y = g(t)$. veja a imagem abaixo:

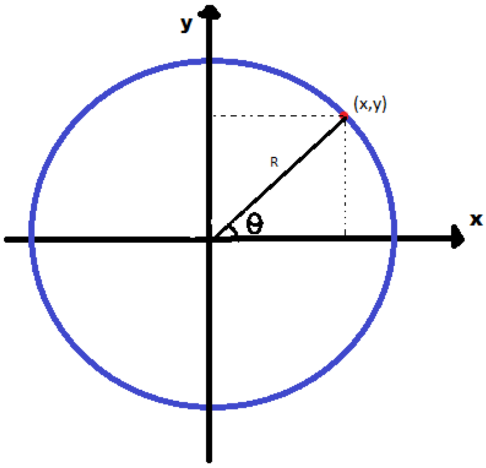

Fig. 03

Note todos os pontos da curva estão a mesma distância R do centro (definição de um círculo). O que diferencia cada ponto é apenas o ângulo que o vetor que liga ele à origem faz com um eixo de referência, no caso o eixo x. Deste modo, fica claro que podemos usar o parâmetro angular para descrever um círculo.

Assim, para qualquer ponto sobre o círculo, podemos dizer que:

$$x = R\cos(\theta)$$
$$y = R\sin(\theta)$$

Onde para cada valor de θ temos uma posição. Note que as funções cosseno e seno são periódicas, então depois de 2π seus valores começam a se repetir, como esperado.

Apesar de já termos parametrizado a curva com o parâmetro θ, queremos parametrizar a curva com o tempo. Geralmente é mais conveniente, uma vez que se queira saber a posição da partícula depois de um certo tempo.

Foi enunciado que a velocidade angular da partícula é constante. Sendo assim, podemos dizer que:

$$\theta(t) = \omega t + \theta_0$$

Ou seja, θ varia linearmente no tempo. Como sabemos que inicialmente (em t = 0) a partícula estava sobre o eixo x, então $\theta_0 = 0$, pois assim, $x = \cos(\theta_0) = 1$ e $y = \sin(\theta_0) = 0$.

Então, temos nossas equações paramétricas no tempo:

$$x = R\cos(\omega t)$$
$$y = R\sin(\omega t)$$

Dada um instante no tempo, sabemos em qual posição da trajetória circular a partícula deve estar, considerando que se saiba a frequência angular ω e o raio R.

Note um aspecto interessante no exemplo da trajetória circular. Poderíamos ter parametrizado a curva com:

$$x(t) = \cos(2\omega t)$$
$$y(t) = \sin(2\omega t)$$

Como o leitor pode observar, essa parametrização resultará na mesma trajetória. Pois, então qual a diferença? A diferença é que com essa segunda parametrização a partícula dá uma volta com um período mais curto, pois a frequência é maior (2ω).

Assim, podemos ter infinitas parametrizações diferentes que resultam na mesma curva, a única diferneça seria a velocidade com que elas são descritas. Por conta disso, acaba sendo muito útil a ideia de vetor tangente a curva.

DEFINIÇÃO 2:

O vetor tangente a uma curva $(f(\lambda),\ g(\lambda))$ é definido como o vetor dado por $(f'(\lambda),\ g'(\lambda))$, onde a notação superscrito linha indica derivada em relação ao parâmetro da curva. Tal vetor guarda a ideia de velocidade em cada ponto na curva.

Note que esse vetor tangente é definido em cada ponto da curva.

No caso de uma trajetória circular podemos desenhar alguns vetores tangentes para exemplificar:

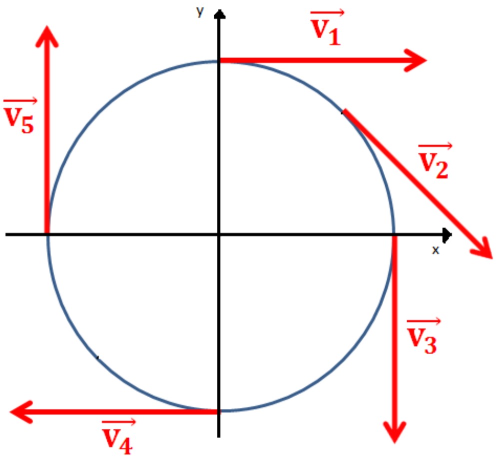

Fig. 03

No exempo anterior, podemos calcular o vetor tangente como:

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = (x'(t), y'(t)) = R\omega(-\sin(\omega t), \cos(\omega t))$$

Note que se tirarmos o módulo do vetor tangente, obetemos a intensidade da velocidade da partícula:

$$\left|\frac{d\vec{r}}{dt}\right| = R\omega = |\vec{v}|$$

Até o momento, vimos a definição de curva paramétrica em duas dimenções (x,y). Mas podemos generalizar tal definição para curvas em três dimensões de modo bem natural.

DEFINIÇÃO 3:

Se $x = f(\lambda)$, $y = g(\lambda)$ e $z = h(\lambda)$, onde λ é um parâmetro pertecente ao intervalo $[a, b] \in I \subset \Re$, então o conjunto dos pontos $(f(\lambda)$, $g(\lambda)$, $h(\lambda))$ formam o que chamamos de curva parametrizada em três dimensões.

O vetor tangente a uma curva $(f(\lambda)$, $g(\lambda)$, $h(\lambda))$ é definido como o vetor dado por $(f'(\lambda)$, $g'(\lambda)$, $h'(\lambda))$.

3 Integral de linha de campos escalares

O leitor deve estar acostumado a integrar uma função, digamos f(x), ao longo em relação a x.

Por exemplo:

$$\int_b^a f(x)dx$$

representa a área de baixo do gráfico y = f(x).

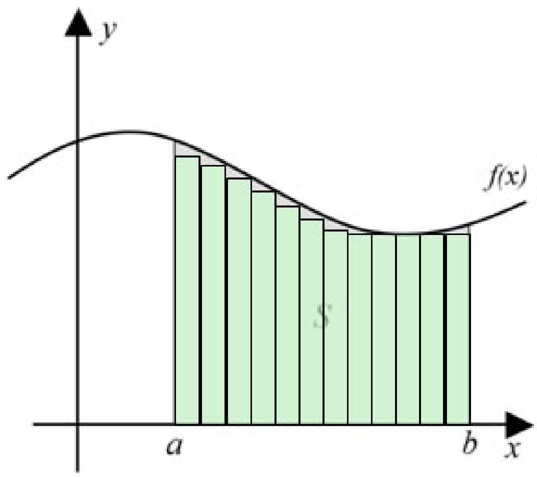

Fig. 03

Imagine que tenhamos um fio reto, de comprimento L e com uma densidade linear de massa constante igual à σ. Para sabermos a massa do fio, basta multiplicarmos o comprimento do fio pela densidade.

Este, é só uma situação especial de um caso mais geral. Imagine agora que há um fio com formato qualquer, e que a densidade linear desse é $\sigma(x, y, z)$ (não é constante).

Para calcularmos a massa podemos dividir o fio em infinitos comprimentos infinitesimais. Cada pedaço infinitesimal que compõem o fio possui uma massa infinitesimal igual à $dm = \sigma(x, y, z)dr$.

Assim, a massa total do fio dever ser:

$$M = \lim_{\Delta r \to 0} \sum_k^{\infty} \sigma(x_k, y_k, z_k)\Delta r_k = \int_{P_o}^{P_f} \sigma dr$$

Onde os pontos P_o e P_f marcam as pontas do fio.

Note que o fio forma uma curva qualquer no espaço, então a curva pode ser parametrizada por um parâmetro λ, pertecente ao intervalo [a,b], como visto na seção anterior.

Podemos dizer que:

$$dr = \frac{dr}{d\lambda} d\lambda$$

Logo, a integral fica:

$$M = \int_a^b \sigma \frac{dr}{d\lambda} d\lambda = \int_a^b \sigma(\lambda) \left| \vec{v}(\lambda) \right| d\lambda$$

Mas essa foi apenas uma aplicação de integral de linha. De modo geral, temos:

DEFINIÇÃO 4:

Se $f(x, y, z)$ é definida em uma curva C fornecida parametricamente por $\vec{r} = (x(\lambda), y(\lambda), z(\lambda))$, com $a \leq \lambda \leq b$, então a integral de linha do campo escalar $f(x, y, z)$ sobre a curva C é definida como:

$$\int_a^b \sigma(\lambda) \left| \vec{v}(\lambda) \right| d\lambda$$

Deste modo, para calcularmos tal integral basta seguirmos alguns passos bem simples:

- Encontrar a parametrização da curva em que $\vec{r} = (x(\lambda), y(\lambda), z(\lambda))$, com $a \leq \lambda \leq b$.
- encontrar o vetor tangente da curva como definido na seção anterior:

$$\vec{v}(\lambda) = \frac{d\vec{r}}{d\lambda}$$

- Calcula o módulo do vetor tangente.
- calcular a integral na forma:

$$\int_a^b \sigma(\lambda) \left| \vec{v}(\lambda) \right| d\lambda$$

EXEMPLO 2:
DEPOIS PENSO NUM EXEMPLO

4 Integral de linha de campos vetoriais

Imagine novamente que há uma força dependente da posição, digamos $\vec{F}(x, y, z)$. E novamente, queremos calcular o trabalho que ela faz sobre a partícula que faz uma trajetória dada pelo conjunto de pontos (x(t), y(t), z(t)), ou seja, uma curva parametrizada pelo tempo.

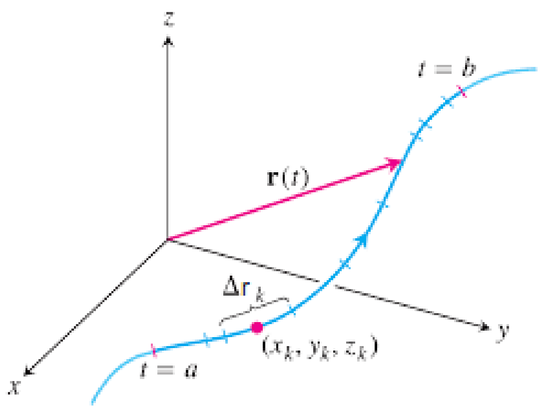

Fig. 03

A imagem mostra a partícula, em vermelho, percorre a tragetória em azul de um ponto P_o à um ponto P_f. Podemos dizer que o trabalho realizado pela força externa F(x,y,z) durante todo o caminho deve ser igual à soma dos trabalhos realizados em cada intervalo infinitesimal de deslocamento $\Delta\vec{r}$.

$$W = \lim_{\Delta r \to 0} \sum_k^{\infty} F(x_k, y_k, z_k) \cos(\theta_k) \Delta r_k$$

Onde, claro, $\cos(\theta_k)$ é o cosseno do ângulo entre a k-ésima força F_k e o seu respectivo k-ésimo deslocamento Δr_k

Dessa forma, vemos que isto é justamente a definição de uma integral:

$$W = \lim_{\Delta r \to 0} \sum_{k}^{\infty} F(x_k, y_k, z_k) \cos(\theta_k) \Delta r_k = \int_{P_o}^{P_f} F \cos(\theta) dr$$

Lembre-se da definição de produto escalar entre dois vetores $\vec{A}$ e $\vec{B}$ é $\vec{A} \cdot \vec{B} = AB\cos(\theta)$, onde A e B são o módulos dos vetores $\vec{A}$ e $\vec{B}$, respectivamente.

Assim, podemos reescrever o integrando:

$$\int_{P_o}^{P_f} \vec{F}(x, y, z)) \cdot d\vec{r}$$

Podemos escrever o vetor deslocamento como:

$$d\vec{r} = \frac{d\vec{r}}{dt} dt = \vec{v}(t) dt$$

Note que a equação acima envolve o vetor velocidade, e não apenas o módulo.

Então, a integral fica:

$$\int_a^b \vec{F}(x(t), y(t), z(t)) \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} dt = \int_a^b \vec{F}(x(t), y(t), z(t)) \cdot \vec{v} dt$$

Onde o vetor $\vec{v}$ é o vetor velocidade (tangente à curva) definido como $\frac{d\vec{r}}{dt}$.

Note que a força, a função $\vec{F}$ é calculada nos pontos do sobre a curva, ou seja, (x(t), y(t), z(t)).

DEFINIÇÃO 5:

Se $\vec{F}(x, y, z)$ é definida em uma curva C fornecida parametricamente por $\vec{r} = (x(\lambda), y(\lambda), z(\lambda))$, com $a \leq \lambda \leq b$, então a integral de linha do campo vetorial $\vec{F}(x, y, z)$ sobre a curva C é definida como:

$$\int_a^b \vec{F}(x(\lambda), y(\lambda), z(\lambda)) \cdot \vec{v}(\lambda) d\lambda$$

Deste modo, para calcularmos tal integral basta seguirmos alguns passos bem simples:

- Encontrar a parametrização da curva em que $\vec{r} = (x(\lambda), y(\lambda), z(\lambda))$, com $a \leq \lambda \leq b$.
- encontrar o vetor tangente da curva como definido na seção anterior:

$$\vec{v}(\lambda) = \frac{d\vec{r}}{d\lambda}$$

- Calcula o produto escalar entre o vetor tangente e o campo vetorial $\vec{F}(x, y, z)$.
- calcular a integral na forma:

$$\int_a^b \vec{F}(\lambda) \cdot \vec{v}(\lambda) d\lambda$$

EXEMPLO 3:

DEPOIS PENSO NUM EXEMPLO!!!!!!