

CONTEÚDO

1. Introdução	1
2. Grupos de Lie: Aspectos Teóricos	3
2.1. Grupos de Lie	3
2.2. Grupos Ortogonais e Unitários	6
3. Álgebras de Lie	14
3.1. Definição de Álgebras de Lie e Exemplos	14
3.2. As álgebras de Lie $\mathfrak{so}(3)$ e $\mathfrak{su}(2)$	22
4. As Múltiplas Relações dos Grupos de Rotação	28
4.1. A Álgebra dos Quatérnions de Hamilton	28
4.2. Espaços Projetivos e Transformações Projetivas	32
4.3. A Fibração de Hopf	41
Referências	45
Bibliografia	45

GEOMETRIA E TOPOLOGIA DO GRUPO DE ROTAÇÕES

ELIEZER BATISTA

1. INTRODUÇÃO

Na maioria dos cursos de graduação em matemática, tanto de licenciatura como de bacharelado, o contato que os alunos têm com a estrutura de grupo limita-se, basicamente, às disciplinas de álgebra. Nestas disciplinas, a escolha mais comum é fazer um estudo detalhado da estrutura dos grupos finitos. Sendo assim, muitos aspectos importantes da teoria de grupos são deixados para algum curso avançado em nível de pós-graduação. Em particular, os alunos de graduação saem sem saber da existência de grupos contínuos, nos quais a estrutura algébrica e a estrutura topológica estão relacionadas de uma maneira mais profunda.

Uma classe de grupos contínuos de grande importância, tanto do ponto de vista teórico como pelas aplicações são os grupos de Lie lineares. Vários destes grupos são amplamente utilizados em física teórica [11, 13] e nas engenharias [3], portanto, é interessante que os alunos de graduação tenham mesmo que fosse uma breve introdução a estes grupos. Outro aspecto importante dos grupos de Lie lineares é sua relativa simplicidade no que diz respeito ao aspecto operacional. Por se tratar de grupos de matrizes, os únicos pré-requisitos necessários para a introdução aos conceitos fundamentais da teoria são um curso básico de álgebra linear e uma certa familiaridade com o cálculo diferencial em várias variáveis, sendo assim totalmente acessível a um aluno de graduação.

As notas de aula deste mini-curso visam, exatamente, fornecer uma introdução aos grupos de Lie lineares, tendo como ponto de partida o grupo de rotações no espaço tridimensional, o grupo $SO(3)$. Este grupo possui um apelo geométrico evidente, o que permite ao estudante elaborar visualizações e experimentos concretos, possui também um grau de complexidade operacional simples, permitindo ao estudante verificar de maneira direta as propriedades algébricas do grupo e finalmente possui inter-relação com vários tópicos de interesse matemático, servindo, assim, de porta de entrada para uma matemática rica e diversificada, como quatérnions, espaços projetivos, espaços de recobrimento, etc.

Este mini-curso está preparado para cinco aulas de uma hora cada. O público alvo deste mini-curso são alunos de bacharelado e licenciatura em matemática. Basicamente pretende-se fazer com que o curso seja o mais auto-contido possível, mas de preferência aconselhamos que os participantes já tenham cursado alguma disciplina de álgebra linear e uma disciplina de cálculo de várias variáveis. Pretendemos que, nestas notas de aula, os resultados estejam demonstrados de uma forma clara e acessível aos alunos, com todos os detalhes feitos, para que possam servir também como referência e guia de estudo posterior.

As notas de aula deste mini-curso estão organizadas da seguinte forma:

- (1) No primeiro capítulo, introduziremos a noção de grupo de Lie e enfatizaremos os dois grupos que estarão presentes em toda a discussão, a saber, os grupos $SO(3)$ e $SU(2)$. Com relação ao grupo $SO(3)$ mostraremos que se trata, de fato, do grupo de rotações no espaço euclidiano tridimensional. Mostraremos como definir uma parametrização de todas as rotações através dos ângulos de Euler.
- (2) No segundo capítulo, definiremos o que vem a ser a álgebra de Lie de um grupo e mostraremos que álgebra de Lie $\mathfrak{so}(3)$ é isomorfa à álgebra de Lie \mathbb{R}^3 com o produto vetorial. Também mostraremos que as álgebras de Lie $\mathfrak{su}(2)$ e $\mathfrak{so}(3)$ também são isomórfas.
- (3) No terceiro capítulo, apresentaremos uma miscelânea de resultados envolvendo os grupos $SO(3)$ e $SU(2)$. Iniciaremos com a apresentação da álgebra dos quatérnions de Hamilton e mostraremos que os quatérnions de módulo unitário formam um grupo que é isomorfo ao grupo $SU(2)$. Veremos como o grupo $SU(2)$ se relaciona com o grupo $SO(3)$ ao implementarmos rotações no espaço tridimensional por conjugação de quatérnions, o que equivale à ação adjunta. Em segundo lugar, introduziremos os espaços projetivos reais e complexos. O grupo $SO(3)$ pode ser visto, como um espaço topológico homeomorfo ao espaço projetivo real de dimensão 3, \mathbb{RP}^3 . Também mostraremos

que as rotações podem ser implementadas como transformações projetivas no espaço projetivo complexo de dimensão 1 \mathbb{CP}^1 , a saber a esfera bidimensional \mathbb{S}^2 . Estas transformações projetivas são mais conhecidas no contexto de variáveis complexas como transformações de Möbius. Finalmente, retomaremos a estrutura topológica do grupo $SU(2)$ como sendo a esfera tridimensional \mathbb{S}^3 . Mostraremos que existe uma ação natural do grupo $U(1)$ sobre $SU(2)$ de forma que o espaço das órbitas por esta ação seja a esfera \mathbb{S}^2 . A projeção canônica $\pi : \mathbb{S}^3 \rightarrow \mathbb{S}^2$ é denominada fibração de Hopf e é um exemplo interessante, altamente não trivial e repleto de aplicações, de um objeto geométrico conhecido como fibrado principal.

2. GRUPOS DE LIE: ASPECTOS TEÓRICOS

Neste capítulo, as definições de grupo e álgebra de Lie, que nortearão todo o restante do trabalho, serão exploradas. Também apresentaremos os grupos de Lie que estão diretamente relacionados com a geometria de rotações em três dimensões, a saber, os grupos $SO(3)$ e o grupo $SU(2)$. As referências básicas para este capítulo em termos de grupos de Lie serão [5, 14, 15]. Também indicamos como referências para os conteúdos de álgebra linear a serem explorados neste capítulo, as referências [7, 9, 8].

2.1. Grupos de Lie.

Definição 1. Um grupo é um conjunto G munido de uma operação

$$\begin{aligned} \cdot : G \times G &\rightarrow G \\ (a, b) &\mapsto ab \end{aligned}$$

tal que esta operação seja

- (1) *Associativa:* $(ab)c = a(bc)$.
- (2) *Possua elemento neutro* $e \in G$, tal que $ea = ae = a$, $\forall a \in G$.
- (3) *E qualquer elemento* $a \in G$ *possua um inverso* $a^{-1} \in G$, tal que $aa^{-1} = a^{-1}a = e$.

Se a operação for comutativa (o que não é necessário para a definição de grupo), isto é $ab = ba$ para todos os elementos $a, b \in G$, então o grupo é chamado comutativo, ou Abeliano.

Exercício 1. Mostre que em um grupo G somente pode existir um único elemento neutro. Mostre também que todo elemento $a \in G$ somente possui um elemento inverso.

Definição 2. Dado um grupo G , um sub-grupo de G , é um sub-conjunto não vazio $H \subset G$ tal que

- (1) O elemento neutro pertence a H : $e \in H$.
- (2) Dado qualquer elemento $a \in H$, temos que $a^{-1} \in H$.
- (3) Dados dois elementos quaisquer $a, b \in H$, temos que, $ab \in H$.

Exercício 2. Mostre que provar que um sub-conjunto não vazio $H \subset G$ é subgrupo é equivalente a provar que se a e b são elementos de H , então $ab^{-1} \in H$.

Aqui estão alguns exemplos de diferentes tipos de grupos. Em cada um destes exemplos, um bom exercício para o leitor é verificar explicitamente os axiomas de grupo.

- (1) O grupo contendo somente o elemento identidade $G = \{e\}$. Este é o grupo mais trivial que existe.
- (2) O grupo aditivo \mathbb{Z}_2 , gerado pelos elementos 0 e 1 e cuja operação + é definida pela tabela

+	0	1
0	0	1
1	1	0

- (3) O grupo das simetrias de um polígono regular de n lados, isto é, movimentos de rotação ou reflexões em torno de alguns eixos que deixam a figura de um polígono inalterada.

Exercício 3. Determine o grupo de simetrias do triângulo equilátero e do quadrado. **Sugestão:** Enumere os vértices do polígono e observe como estes índices se alteram ao aplicar-se as operações do grupo, então construa a tabela de composição no estilo mostrado no exemplo anterior.

- (4) O grupo de permutações de um conjunto de n elementos, S_n .

- (5) O grupo aditivo dos números inteiros $(\mathbb{Z}, +)$.
- (6) O grupo multiplicativo dos números reais não nulos, $(\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot)$.
- (7) O grupo das transformações lineares inversíveis em um espaço vetorial real (complexo) de n dimensões, $GL(n, \mathbb{R})$ ($GL(n, \mathbb{C})$). A operação neste caso é a de composição de duas transformações.
- (8) O subgrupo de $GL(n, \mathbb{R})$ ($GL(n, \mathbb{C})$), das transformações lineares cuja matriz de transformação possui determinante igual a 1, $SL(n, \mathbb{R})$ ($SL(n, \mathbb{C})$). Pode-se ver facilmente que $SL(n, \mathbb{C})$ é sub-grupo de $GL(n, \mathbb{C})$ devido à propriedade multiplicativa dos determinantes: $\det(AB) = \det(A)\det(B)$, se as matrizes A e B tiverem determinante igual a 1, então a matriz AB também terá determinante igual a 1.

Exercício 4. Quais dos grupos acima são abelianos?

Você deve ter notado que há grupos com um número finito de elementos, grupos com um número infinito de elementos porém que são discretos (como é o caso do grupo aditivo \mathbb{Z}), e grupos que são contínuos (como por exemplo \mathbb{R} , $GL(n, \mathbb{R})$, etc). Portanto, há outras propriedades matemáticas dos grupos, e não somente sua estrutura algébrica que devem desempenhar um papel importante na análise dos mesmos. É dentro desta perspectiva que vamos definir o que vem a ser um grupo de Lie

Definição 3. Um grupo de Lie G é um grupo com as seguintes propriedades:

- (1) O grupo G é uma variedade analítica. Isto é, uma variedade diferenciável cujas mudanças de cartas são aplicações infinitamente diferenciáveis e que podem ser expandidas em séries de potências.
- (2) A operação de grupo e a inversão são aplicações analíticas em G .

Se o leitor não está habituado com o conceito de variedade diferenciável, não se assuste. Ao dizermos que G é uma variedade diferenciável, apenas queremos dizer que na vizinhança de qualquer elemento $a \in G$ existe um sistema de coordenadas (x_1, \dots, x_n) de forma que qualquer elemento de grupo naquela vizinhança pode ser escrito em função destas coordenadas $b = b(x_1, \dots, x_n)$. Não queremos dizer que exista um único sistema de coordenadas que sirva para todos os elementos do grupo. Mas quando um elemento pode ser escrito em dois sistemas de coordenadas diferentes, digamos (x_1, \dots, x_n) e (y_1, \dots, y_n) , então a mudança de coordenadas é uma aplicação infinitamente diferenciável e que pode ser expressa como uma série de potências (ou seja, é uma aplicação analítica). No decorrer deste capítulo, daremos exemplos concretos de coordenadas para descrevermos os elementos de certos grupos. Desejamos apenas que o leitor mantenha a imagem pictórica de uma variedade como um sub-conjunto aberto de \mathbb{R}^n ou como uma superfície (hipersuperfície) imersa em um espaço de dimensão maior (existe um teorema devido a Whitney afirmando que sempre é este o caso).

Vamos analisar a estrutura de variedade de alguns grupos conhecidos. Para dar início, considere o grupo das transformações lineares inversíveis em um espaço vetorial real de n dimensões, o grupo $GL(n, \mathbb{R})$. Cada elemento do grupo pode ser escrito como uma matriz $n \times n$ real, logo, precisamos de n^2 coordenadas para determinarmos um elemento do grupo. Assim,

$$GL(n, \mathbb{R}) \subset M_n(\mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^{n^2}.$$

Além do mais, a função determinante

$$\begin{aligned} \det : M_n(\mathbb{R}) &\rightarrow \mathbb{R} \\ A &\mapsto \det(A) \end{aligned}$$

que para a matriz $A = (a_{ij})$ pode ser escrita como

$$\det(A) = \sum_{i_1, \dots, i_n} \epsilon_{i_1, \dots, i_n} a_{1i_1} a_{2i_2} \dots a_{ni_n},$$

é contínua. Como para matrizes de $GL(n, \mathbb{R})$ o valor do determinante é diferente de zero temos que

$$GL(n, \mathbb{R}) = \det^{-1}(\mathbb{R} \setminus \{0\})$$

que é um sub-conjunto aberto de \mathbb{R}^{n^2} , logo uma variedade.

Proposição 1. $GL(n, \mathbb{R})$ é denso em $M_n(\mathbb{R})$

Demonstração: Tomemos $A \in M_n(\mathbb{R})$ e $\epsilon > 0$. Considere todas as matrizes da forma $A - \lambda I$, para $\lambda \in]-\epsilon, \epsilon[$. Se todas estas matrizes não forem invertíveis, então $\det(A - \lambda I) = 0$ para todo $\lambda \in]-\epsilon, \epsilon[$, o que é uma contradição, pois somente este determinante é igual a zero nos auto-valores de A , que são em quantidade finita. Logo para todo $A \in M_n(\mathbb{R})$, e toda bola aberta de raio ϵ ao redor de A existe uma infinidade de matrizes invertíveis, ou seja, elementos do grupo $GL(n, \mathbb{R})$, o que nos diz que este grupo é denso no espaço das matrizes. ■

Podemos ir um pouco mais longe: definindo as funções coordenadas t_{ij} tais que $t_{ij}(A) = a_{ij}$ a função determinante pode ser escrita como

$$\text{Det} = \sum_{i_1, \dots, i_n} \epsilon_{i_1, \dots, i_n} t_{1i_1} t_{2i_2} \dots t_{ni_n}.$$

Esta função é infinitamente diferenciável em termos das coordenadas t_{ij} . Definimos um ponto regular da função determinante como um elemento $A \in M_n(\mathbb{R})$ tal que as derivadas parciais

$$\frac{\partial \text{Det}}{\partial t_{ij}}(A)$$

não sejam todas nulas. E dizemos que p é um valor regular se todos os pontos A tais que $\text{Det}(A) = p$ são regulares. Agora considere o grupo

$$SL(n, \mathbb{R}) = \text{Det}^{-1}(1),$$

o número 1 é um valor regular da função determinante, logo, pelo teorema global da função implícita, temos que $SL(n, \mathbb{R})$ é uma subvariedade, pois é a imagem inversa de um valor regular.

Estes dois exemplos anteriores, mesmo sendo teoricamente corretos, são difíceis de visualizar, a não ser no caso trivial $n = 1$, onde o determinante é a função identidade, resultando em $GL(1, \mathbb{R}) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ e $SL(1, \mathbb{R}) = \{1\}$.

2.2. Grupos Ortogonais e Unitários. Existem alguns sub-grupos do grupo $GL(n, \mathbb{C})$ que merecem uma consideração especial. Em primeiro lugar, temos o sub grupo das transformações ortogonais em n dimensões $O(n) \subseteq GL(n, \mathbb{R})$ e seu subgrupo de determinante igual a 1, $SO(n)$. A definição dos elementos deste grupo dependem da estrutura euclidiana do espaço vetorial \mathbb{R}^n .

Definição 4. Um produto escalar euclidiano no espaço vetorial \mathbb{R}^n , é uma aplicação bilinear, simétrica e positiva definida $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$.

Por positiva definida, entendemos que $\langle x, x \rangle \geq 0$ e $\langle x, x \rangle = 0$ se, e somente se $x = 0$. A escolha mais natural para o produto escalar euclidiano entre dois vetores $x = (x^1, x^2, \dots, x^n)^T$ e $y = (y^1, y^2, \dots, y^n)^T$ é

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^n x^i y^i = x^T y.$$

Definição 5. Uma transformação ortogonal em \mathbb{R}^n é uma transformação linear $A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ que preserva o produto escalar euclidiano, ou seja para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}^n$, temos $\langle Ax, Ay \rangle = \langle x, y \rangle$.

Proposição 2. O conjunto das transformações ortogonais $O(n)$ é, de fato um sub-grupo de $GL(n, \mathbb{R})$.

Demonstração: Antes de mais nada, podemos caracterizar as matrizes de uma transformação ortogonal da seguinte forma;

$$\langle Ax, Ay \rangle = \langle x, y \rangle \Rightarrow x^T A^T A y = x^T y,$$

ou seja $A^T A = I$. Como $I^T = I$, temos que $I^T I = I$, portanto a transformação identidade é ortogonal. Também temos que se $A^T A = I$ e $B^T b = I$, então $(AB)^T AB = B^T A^T AB = B^T B = I$, logo AB também é uma transformação ortogonal. Finalmente, se A é ortogonal, então $A^T A = I$ ou ainda $A^T = A^{-1}$. Como $(A^{-1})^{-1} = A = (A^T)^T$ temos que A^T também é ortogonal, o que conclui a prova. ■

Exercício 5. Mostre que o determinante da matriz de uma transformação ortogonal é igual a 1 ou -1.

Um outro grupo importante, que é sub grupo de $GL(n\mathbb{C})$ é o grupo das transformações unitárias em um espaço vetorial complexo de n dimensões, $U(n)$. Este grupo é definido como o conjunto das transformações lineares em \mathbb{C}^n que preservam a forma sesquilinear em \mathbb{C}^n dada por

$$\langle v|w \rangle = \sum_{i=1}^n \bar{v}_i w_i.$$

Ou seja, o grupo $U(n)$ é formado por transformações lineares invertíveis A , tais que

$$\langle Av|Aw \rangle = \langle v|w \rangle.$$

O subgrupo das transformações unitárias com determinante igual a 1, $SU(n)$, também é um exemplo de grupo.

Exercício 6. Mostre que realmente $U(n)$ e $SU(n)$ são sub-grupos de $GL(n, \mathbb{C})$.

Analisemos agora a estrutura de variedade do grupo $SO(2)$. Este grupo é formado pelas matrizes 2×2 reais e ortogonais da forma

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

Exercício 7. Mostre que a condição $A^T = A^{-1}$ implica em $a = d$ e $b = -c$.

Assim, temos de fato a matriz

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix},$$

cujo determinante resulta em,

$$a^2 + b^2 = 1.$$

Então, podemos encontrar um ângulo θ de forma a escrevermos a matriz A na forma $A = R(\theta)$, escrita como

$$R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}, \quad \theta \in \mathbb{R}.$$

Exercício 8. Mostre que a composição de $R(\theta)$ e $R(\phi)$ é igual à rotação $R(\theta + \phi)$.

Exercício 9. Mostre que $SO(2)$ é um grupo Abeliano, isto é, $AB = BA$ para quaisquer A e B em $SO(2)$.

De fato, temos $R(\theta) = R(\theta + 2\pi)$, portanto podemos efetuar uma bijeção contínuamente diferenciável entre os pontos da circunferência unitária

$$\mathbb{S}^1 = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z},$$

e o grupo $SO(2)$ associando a cada ângulo $\theta \in \mathbb{S}^1$ o único elemento $R(\theta) \in SO(2)$. Isto equivale a dizer que os dois conjuntos são difeomorfos como variedades diferenciáveis.

Antes de prosseguirmos nossa análise, façamos uma pequena definição.

Definição 6. Dados dois grupos G e H , dizemos que a aplicação

$$\phi : G \rightarrow H$$

é um homomorfismo de grupo se

- (1) Leva a identidade na identidade: $\phi(e_G) = e_H$.
- (2) Preserva a operação de grupo: $\phi(gh) = \phi(g)\phi(h)$.

Se um homomorfismo é bijetor, então ele é dito ser um isomorfismo e os grupos são isomorfos.

Exercício 10. Mostre que um homomorfismo de grupo obedece à propriedade

$$\phi(g^{-1}) = \phi(g)^{-1}.$$

Exercício 11. Mostre que em um isomorfismo de grupos $\phi : G \rightarrow H$. O Kernel do homomorfismo

$$Ker(\phi) = \{g \in G | \phi(g) = e\}$$

somente possui o elemento identidade, e a imagem do homomorfismo

$$Im(\phi) = \{h \in H | \exists g \in G, \phi(g) = h\}$$

é igual a todo o grupo H .

Vamos estabelecer agora um isomorfismo de grupos: considere o grupo unitário unidimensional $U(1)$. Ou seja as transformações lineares em \mathbb{C} que preservam o módulo do número complexo. Ou seja

$$|az|^2 = |a|^2|z|^2 = |z|^2,$$

o que implica que $|a|^2 = 1$. Assim sendo, o grupo $U(1)$ é identificado com o subconjunto dos números complexos de módulo 1, em outras palavras, a circunferência unitária \mathbb{S}^1 . Assim, como conjunto de pontos (variedades) os três conjuntos são iguais:

$$SO(2) = U(1) = \mathbb{S}^1.$$

Agora, vamos ver que de fato os grupos $SO(2)$ e $U(1)$ são homomorfos (e portanto isomorfos). Os elementos em $U(1)$ possuem como operação de grupo o produto usual entre dois números complexos

$$(a + ib)(c + id) = (ac - bd) + i(ad + bc)$$

Exercício 12. Mostre que o produto de dois números complexos de módulo 1 possui módulo igual a 1.

Exercício 13. Qual é o inverso do elemento de grupo $a \in U(1)$?

Podemos agora definir a aplicação $\phi : \mathbb{C} \rightarrow M_2(\mathbb{R})$ como

$$\phi(a + ib) = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}.$$

Exercício 14. Mostre que a aplicação ϕ acima trata-se mesmo de um homomorfismo de grupos, mesmo quando restrito ao caso dos números complexos de módulo 1 (que quantidade representa o módulo do número complexo quando este é visto no espaço de matrizes?).

Em particular, os números complexos de módulo 1 podem ser escritos na forma trigonométrica

$$a = \cos \theta + i \sin \theta.$$

Assim, sua imagem pela aplicação ϕ será, para nossa surpresa

$$\phi(a) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}.$$

Exatamente um elemento genérico de $SO(2)$. Temos então o isomorfismo desejado.

Prossigamos em analisar dois grupos que serão importantes ao longo de todo este trabalho. O grupo $SO(3)$ e o grupo $SU(2)$. O grupo $SU(2)$ é o grupo das matrizes complexas 2×2

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

tais que $A^\dagger = (A^T)^* = A^{-1}$ e com determinante igual a 1, isto é

$$\text{Det}(A) = ad - bc = 1.$$

Pela condição de unitariedade, podemos concluir que $d = \bar{a}$ e $c = -\bar{b}$. Assim, as matrizes de $SU(2)$ podem ser escritas como

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + iy & v + iw \\ -v + iw & x - iy \end{pmatrix},$$

onde $x, y, v, w \in \mathbb{R}$. A condição do determinante nos dá

$$\text{Det}(A) = ad - bc = x^2 + y^2 + v^2 + w^2 = 1.$$

Ou seja, o grupo $SU(2)$ é equivalente como variedade (pois todas as aplicações são continuamente diferenciáveis) ao conjunto de vetores em \mathbb{R}^4 com módulo igual a 1, em outras palavras, a esfera tridimensional \mathbb{S}^3 .

O grupo $SO(3)$, por sua vez, é o grupo das rotações em \mathbb{R}^3 . Uma rotação em \mathbb{R}^3 pode ser descrita por um vetor unitário \vec{n} e por um ângulo de rotação s . Para definirmos um eixo de rotação precisamos de dois ângulos (θ, ϕ) , com $0 \leq \theta \leq \pi$ e $0 \leq \phi \leq 2\pi$. Portanto, o eixo de rotação \vec{n} pode ser visto também como um ponto da esfera unitária \mathbb{S}^2 . Relembremos que por convenção, as rotações são positivas quando tomadas no sentido anti-horário. Note porém que temos a mesma rotação tomados um eixo \vec{n} e um ângulo s ou um eixo $-\vec{n}$ e um ângulo $-s$, portanto há uma identificação de pontos antípodas nesta variedade. De fato, a variedade que equivale ao grupo $SO(3)$ é o espaço projetivo real tridimensional \mathbb{RP}^3 , que pode ser pensado também como a esfera \mathbb{S}^3 com os pontos antípodas identificados. Não vamos entrar agora em detalhe sobre os métodos topológicos para identificar esta estrutura de variedade, antes, vamos buscar um homomorfismo entre os grupos $SU(2)$ e $SO(3)$ e então a partir das propriedades desta aplicação entenderemos mais claramente a topologia de $SO(3)$.

Examinemos nais de perto os geradores do grupo de rotações, que estamos tentando caracterizar como o grupo $SO(3)$. Quando os eixos são os vetores da base canônica \hat{e}_i , para $i = 1, 2, 3$, temos as rotações ao redor dos eixos x , y e z , respectivamente.

Exercício 15. Mostre que as matrizes de rotação ao redor dos eixos x , y , e z no sentido anti-horário de um ângulo s , são respectivamente

$$R_1(s) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos s & -\sin s \\ 0 & \sin s & \cos s \end{pmatrix}, \quad R_2(s) = \begin{pmatrix} \cos s & 0 & \sin s \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin s & 0 & \cos s \end{pmatrix},$$

$$R_3(s) = \begin{pmatrix} \cos s & -\sin s & 0 \\ \sin s & \cos s & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

E mostre que elas são, de fato, matrizes ortogonais.

Um fato menos trivial e que precisa ser provado é que as rotações em três dimensões também efetuam um grupo. Isto é se compusermos uma rotação ao redor de um eixo \vec{m} de um ângulo s e após aplicarmos uma rotação ao redor de um eixo \vec{n} de um ângulo t , existirá um eixo \vec{p} e um ângulo r tal que a composição das duas rotações anteriores será uma rotação ao redor de \vec{p} por um ângulo r . Por enquanto vamos assumir que podemos compor duas rotações, composição esta vista apenas como multiplicação de matrizes sem termos a certeza de que esta composição trata-se, de fato, de uma rotação.

É fácil ver que ao contrário das rotações em duas dimensões, as rotações em três dimensões não comutam entre si. Para você se convencer de que isto é verdade, basta tomar, por exemplo, $R_1(s)R_2(t)$ e você verá que o resultado é diferente de $R_2(t)R_1(s)$. ao fazer estas contas você também deve ter percebido que trabalhar diretamente com o grupo de rotações torna os cálculos muito mais complicados.

Cabe-nos portanto descrevermos a matriz de rotação ao redor de um eixo arbitrário, que escrito em coordenadas esféricas fica

$$\vec{n} = (\sin \theta \cos \phi, \sin \theta \sin \phi, \cos \theta).$$

Basicamente, a idéia é perceber que podemos obter o eixo \vec{n} a partir do vetor \hat{e}_3 da base canônica, efetuando sobre este uma rotação de θ ao redor do eixo y e depois uma rotação de ϕ ao redor do eixo z :

$$\vec{n} = R_3(\phi)R_2(\theta)\hat{e}_3 = R(\theta, \phi)\hat{e}_3.$$

Exercício 16. Escreva a matriz $R(\theta, \phi)$ e sua inversa $R^{-1}(\theta, \phi)$, que corresponde à transformação que leva o vetor \vec{n} no vetor \hat{e}_3 .

Uma vez tendo estas matrizes de transformação, aplique $R^{-1}(\theta, \phi)$ de forma que o eixo de rotação seja levado no vetor \hat{e}_3 , aplique a matriz $R_3(s)$, onde s é o ângulo de rotação desejado e aplique em seguida $R(\theta, \phi)$, devolvendo tudo à configuração original, com uma única diferença: tudo estará rotacionado de um ângulo s ao redor de \vec{n} . Em resumo,

$$R_{\vec{n}}(s) = R(\theta, \phi)R_3(s)R^{-1}(\theta, \phi).$$

Note que escrevemos na ordem da direita para a esquerda, pois estas matrizes são aplicadas a vetores em \mathbb{R}^3 , então a matriz que estiver mais à direita será aplicada primeiro.

Exercício 17. Escreva explicitamente a matriz $R_{\vec{n}}(s)$, e mostre que ela é ortogonal.

Como foi visto, as matrizes de rotação R_i , $i = 1, 2, 3$, são matrizes de $SO(3)$, logo toda rotação ao redor de um eixo também é uma matriz de $SO(3)$, e portanto toda composição de rotações. Falta-nos ver que toda matriz de $SO(3)$ pode ser escrita como uma rotação, o que vamos fazer nos parágrafos que se seguem.

Proposição 3. Uma matriz $A \in SO(3)$ possui um auto valor igual a 1.

Demonstração: A matriz A possui um auto valor real devido ao fato da equação característica,

$$\text{Det}(A - \lambda I) = 0,$$

ser de grau três, logo possui uma raiz real. Este auto valor real é não nulo devido ao fato do determinante de A ser igual a 1. Logo, se λ_1, λ_2 e λ_3 são os auto valores, o determinante pode ser escrito como

$$\text{Det}A = \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 = 1.$$

Se $\lambda_1 \in \mathbb{R}$, e os outros dois auto valores são complexos, então $\lambda_3 = \overline{\lambda_2}$, portanto $\lambda_1 |\lambda_2|^2 = 1$, implicando que $\lambda_1 > 0$. Mesmo se todos os auto valores forem reais, não poderíamos ter todos negativos, caso contrário o determinante seria negativo. Portanto, um dos auto valores de A é real e positivo.

Além disto, podemos ver que os auto-valores de uma transformação ortogonal têm que ter módulo unitário: De fato, seja v um auto-vetor de $A \in SO(n)$ com auto valor λ (note que esta propriedade vale em qualquer dimensão). Então temos

$$\langle AvAv \rangle = \lambda^2 \langle v, v \rangle = \langle v, v \rangle,$$

o que implica que $\lambda^2 = 1$, ou ainda que $|\lambda| = 1$. Como toda matriz de $SO(3)$ tem um auto-valor real positivo e como este auto-valor tem que ter módulo unitário, este só pode ser igual a 1. ■

Em posse destes fatos, podemos definir uma base $\hat{\mathbf{f}}_1, \hat{\mathbf{f}}_2$ e $\vec{\mathbf{n}}$, onde $\vec{\mathbf{n}}$ é o auto vetor unitário associado ao auto valor $\lambda = 1$ de A . Como o produto dos outros dois auto valores tem que ser igual a 1, temos que a transformação A restrita ao plano $\hat{\mathbf{f}}_1$ e $\hat{\mathbf{f}}_2$ é uma transformação de $SO(2)$. Assim, existe um ângulo s tal que a matriz A pode ser escrita como

$$A = \begin{pmatrix} \cos s & -\sin s & 0 \\ \sin s & \cos s & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

O vetor $\vec{\mathbf{n}}$ então é o eixo desta rotação. Somente para amarrarmos uma ponta solta, observamos que toda transformação de $SO(3)$ pode ser escrita como uma rotação, como $SO(3)$ é um grupo, então podemos garantir que o conjunto das rotações em \mathbb{R}^3 também é um grupo, aliás isomorfo ao grupo $SO(3)$.

Para finalizarmos nossa breve exposição sobre grupos, daremos uma rápida introdução ao conceito de representação de grupos. A teoria de representações constitui-se de um rico e vasto assunto em matemática, para referências sobre este assunto, aconselhamos [3, 5, 16].

Definição 7. Dado um grupo G , definimos uma representação real (complexa) de dimensão n de G como um homomorfismo $\Gamma : G \rightarrow GL(n, \mathbb{R})$ ($\Gamma : G \rightarrow GL(n, \mathbb{C})$). Diz-se que o espaço vetorial de dimensão n onde as matrizes de $GL(n)$ agem carrega a representação Γ . Uma representação é dita ser irreduzível quando o espaço que carrega a representação não possui sub-espacos invariantes pela ação da representação do grupo. Diz-se ainda que uma representação é completamente redutível quando o espaço que carrega a representação pode ser decomposto em uma soma direta de representações irreduzíveis.

O exemplo mais simples é o da representação fundamental. Muitos grupos são naturalmente definidos como grupos de matrizes, logo são subgrupos de $GL(n)$ para algum n . Por exemplo, $SU(2)$ é um subgrupo de $GL(2, \mathbb{C})$, assim representação fundamental de $SU(2)$ é dada por matrizes 2×2 complexas que obedecem à propriedade de unitariedade e determinante igual a 1. A representação fundamental do grupo $SO(3)$, por sua vez, é dada em termos de matrizes 3×3 reais.

As representações mais interessantes do ponto de vista matemático são as representações irreduzíveis. A teoria de classificação de representações irreduzíveis de grupos é bastante complexa, mesmo quando se

trata de grupos finitos. No caso dos grupos clássicos de matrizes, dentre os quais se incluem os grupos unitários e ortogonais, as representações de dimensão finita são completamente redutíveis, assim sendo, as representações irredutíveis são os blocos de construção de qualquer representação destes grupos.

No Próximo Capítulo, introduziremos os geradores infinitesimais dos grupos apresentados e veremos como a estrutura algébrica denominada álgebra de Lie está relacionada com os grupos de Lie.

3. ÁLGEBRAS DE LIE

Neste capítulo, veremos as versões infinitesimais de alguns grupos apresentados no capítulo anterior. Introduziremos o conceito de álgebra de Lie, que é uma estrutura algébrica de grande importância em matemática e que inter relaciona diversos tópicos matemáticos de maneira interessante. Para uma referência mais detalhada sobre a teoria de álgebras de Lie, aconselhamos o leitor a pesquisar os livros [5, 14, 15].

3.1. Definição de Álgebras de Lie e Exemplos.

Definição 8. Um álgebra de Lie é um espaço vetorial (real ou complexo) \mathbb{V} munido de uma aplicação bi-linear $[,] : \mathbb{V} \times \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{V}$, satisfazendo.

- a) A aplicação $[,]$ é anti-simétrica, ou seja, $[v, w] = -[w, v]$.
- b) Satisfaz à identidade de Jacobi:

$$[u, [v, w]] + [v, [w, u]] + [w, [u, v]] = 0.$$

Como um exemplo básico de álgebras de Lie, considere a álgebra de Matrizes $n \times n$ reais $M_n(\mathbb{R})$. Como espaço vetorial, a álgebra de matrizes é isomorfa ao espaço vetorial \mathbb{R}^{n^2} . A aplicação $[,]$ neste espaço é dada pelo comutador de matrizes: $[A, B] = AB - BA$. Na verdade, veremos que a maioria das álgebras de Lie associadas a grupos de Lie poderão ser vistas como álgebra de Lie de matrizes.

Exercício 18. Mostre que o comutador de matrizes realmente implementa uma estrutura de álgebra de Lie no espaço das matrizes $n \times n$.

Um segundo exemplo também relevante para nossa discussão é a estrutura de álgebra de Lie existente no espaço euclidiano tridimensional, \mathbb{R}^3 . A aplicação bi-linear $[,]$ é dada pelo produto vetorial entre dois vetores, ou seja $[v, w] = v \times w$.

Uma última estrutura em \mathbb{R}^3 que nos será importante é o produto vetorial, que é uma operação

$$\begin{aligned} \times : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (\vec{v}, \vec{w}) &\mapsto \vec{v} \times \vec{w}. \end{aligned}$$

onde o vetor $\vec{v} \times \vec{w}$ é um vetor ortogonal ao plano gerado por \vec{v} e \vec{w} , com módulo igual à área do paralelogramo gerado por \vec{v} e \vec{w} e com orientação compatível com a base canônica de \mathbb{R}^3 , conforme indicado na Figura 2.1:

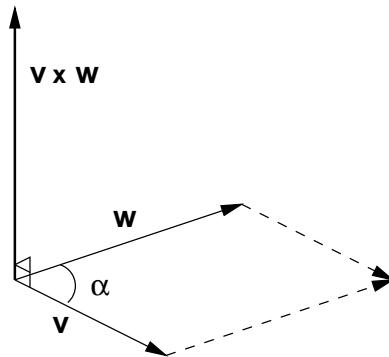


Figura 2.1: O produto vetorial de dois vetores \vec{v} e \vec{w} .

Se os dois vetores \vec{v} e \vec{w} estiverem separados por um ângulo α , conforme indicado na figura acima, então o módulo de $\vec{v} \times \vec{w}$ será

$$\|\vec{v} \times \vec{w}\| = \|\vec{v}\| \|\vec{w}\| \sin \alpha.$$

Logo, podemos concluir que $\vec{v} \times \vec{v} = 0$ para qualquer $\vec{v} \in \mathbb{R}^3$, pois neste caso a área determinada é igual a zero. Por orientação compatível com a base canônica, queremos dizer que se escolhermos qualquer permutação cíclica de $\hat{\mathbf{e}}_1$ $\hat{\mathbf{e}}_2$ e $\hat{\mathbf{e}}_3$, sempre o terceiro elemento será o produto vetorial dos dois primeiros nesta ordem, isto é

$$(1) \quad \hat{\mathbf{e}}_1 \times \hat{\mathbf{e}}_2 = \hat{\mathbf{e}}_3, \quad \hat{\mathbf{e}}_2 \times \hat{\mathbf{e}}_3 = \hat{\mathbf{e}}_1, \quad \hat{\mathbf{e}}_3 \times \hat{\mathbf{e}}_1 = \hat{\mathbf{e}}_2.$$

O produto vetorial é anti-simétrico, isto é, $\vec{v} \times \vec{w} = -\vec{w} \times \vec{v}$. Devido às relações (1) e à total anti-simetria do produto vetorial, podemos escrever o produto vetorial de $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ e $\vec{w} = (w_1, w_2, w_3)$ como o determinante

$$(2) \quad \vec{v} \times \vec{w} = \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{e}}_1 & \hat{\mathbf{e}}_2 & \hat{\mathbf{e}}_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}.$$

Exercício 19. a) Mostre que o produto vetorial é bilinear, isto é

$$\begin{aligned} (\vec{u} + \vec{v}) \times \vec{w} &= \vec{u} \times \vec{w} + \vec{v} \times \vec{w}, \\ \vec{u} \times (\vec{v} + \vec{w}) &= \vec{u} \times \vec{v} + \vec{u} \times \vec{w}, \\ (\lambda \vec{v}) \times \vec{w} &= \vec{v} \times (\lambda \vec{w}) = \lambda \vec{v} \times \vec{w}, \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

b) Mostre que o produto vetorial satisfaz à identidade de Jacobi:

$$\vec{u} \times (\vec{v} \times \vec{w}) + \vec{v} \times (\vec{w} \times \vec{u}) + \vec{w} \times (\vec{u} \times \vec{v}) = 0.$$

c) Mostre as seguintes propriedades do produto vetorial:

$$\begin{aligned} \vec{u} \times (\vec{v} \times \vec{w}) &= (\vec{u} \cdot \vec{w})\vec{v} - (\vec{u} \cdot \vec{v})\vec{w}, \\ \vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w}) &= \vec{v} \cdot (\vec{w} \times \vec{u}) = \vec{w} \cdot (\vec{u} \times \vec{v}). \end{aligned}$$

Com o exposto acima, fica evidente que o espaço \mathbb{R}^3 munido com o produto vetorial é uma álgebra de Lie.

Vamos tornar a notação mais simbólica, em termos de somas e de índices. Para isto, vamos definir dois objetos matemáticos que nos auxiliarão muito nos cálculos. O primeiro é o delta de Kronecker, para os índices i e j , variando de 1 até n , temos

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 0, & \text{para } i \neq j, \\ 1, & \text{para } i = j. \end{cases}$$

Visto como uma transformação linear em um espaço vetorial \mathbb{R}^n , o delta de Kronecker não passa da matriz identidade n por n . Em nosso caso, vamos na maior parte do tempo utilizar os índices variando de 1 a 3.

Exercício 20. Mostre que

$$\text{a)} \quad \sum_{j=1}^n \delta_{ij} v_j = v_i, \quad (\text{para } i \text{ fixo}).$$

$$\text{b)} \quad \sum_{j=1}^n \delta_{ij} a_{jk} = a_{ik}, \quad (\text{para } i \text{ e } k \text{ fixos}).$$

O segundo objeto, é o tensor totalmente anti-simétrico, ou tensor de Levi-Civita. Dados os índices i_1, \dots, i_n , todos variando de 1 até n , definimos o tensor totalmente anti-simétrico por

$$\epsilon_{i_1 \dots i_n} = \begin{cases} 0, & \text{Se existem } k \text{ e } l, \text{ tais que } i_k = i_l, \\ 1, & \text{Se } i_1 \dots i_n \text{ é uma permutação par de } 1 \dots n, \\ -1 & \text{Se } i_1 \dots i_n \text{ é uma permutação ímpar de } 1 \dots n. \end{cases}$$

No decorrer de todo este curso, utilizaremos apenas o tensor anti-simétrico para $n = 3$. Ao contrário do delta de Kronecker, a não ser para $n = 2$, o tensor totalmente anti-simétrico (que denominaremos a partir de agora por tensor epsilon, ou simplesmente por epsilon) não pode ser visto facilmente como uma matriz, mais precisamente, este objeto pode ser visto como um elemento no n -ésimo produto tensorial do espaço \mathbb{R}^n .

Ao dizermos que uma permutação é par ou ímpar, estamos nos referindo ao seguinte fato: Toda permutação de n elementos pode ser escrita como uma composição de $(n - 1)$ permutações elementares s_i , $i = 1, \dots, n - 1$ que troca os vizinhos nas posições i e $i + 1$. Assim uma permutação \mathcal{P} pode ser escrita como

$$\mathcal{P} = s_{i_1} \dots s_{i_k}.$$

A permutação \mathcal{P} será par ou ímpar dependendo do número k de geradores necessários para se escrever a permutação.

Exercício 21. Mostre que:

- a) $s_i s_j = s_j s_i$, para $|i - j| \geq 2$,
- b) $s_i s_i = Id$, $\forall i = 1, \dots, n$,
- c) $s_i s_{i+1} s_i = s_{i+1} s_i s_{i+1}$, $\forall i = 1 \dots n - 1$,

Uma regra prática para verificar se uma permutação é par ou ímpar é colocar a configuração inicial acima da configuração final e ligar os elementos correspondentes tomando o cuidado de evitar que se cruzem mais de duas linhas de cada vez. O número de cruzamentos definirá se a permutação é par ou ímpar. No caso de $n = 3$ temos que as permutações pares de 123 são: 123, 231 e 312 e as permutações ímpares são: 213, 132 e 321.

Exercício 22. Mostre que

- a) Os produtos vetoriais da base canônica dados em (1) podem ser resumidos na expressão

$$(3) \quad \hat{\mathbf{e}}_i \times \hat{\mathbf{e}}_j = \sum_{k=1}^3 \epsilon_{ijk} \hat{\mathbf{e}}_k.$$

- b) Dados dois vetores $\vec{\mathbf{v}}$ e $\vec{\mathbf{w}}$, a i -ésima componente de $\vec{\mathbf{v}} \times \vec{\mathbf{w}}$ na base canônica pode ser escrita como

$$(4) \quad (\vec{\mathbf{v}} \times \vec{\mathbf{w}})_i = \sum_{k=1}^3 \epsilon_{ijk} v_j w_k.$$

Exercício 23. Mostre que

- a) $\sum_{k=1}^3 \epsilon_{ijk} \epsilon_{pjk} = \delta_{ip} \delta_{jq} - \delta_{iq} \delta_{jp}$,
- b) $\sum_{j,k=1}^3 \epsilon_{ijk} \epsilon_{pjk} = 2\delta_{ip}$.

A definição de álgebra de Lie não faz menção à noção de grupo. Os dois conceitos estão interligados pelo fato que a todo grupo de Lie está associada uma álgebra de Lie dos seus geradores infinitesimais. A partir de agora, somente consideraremos grupos de Lie que sejam variedades de dimensão finita, ou seja que os seus elementos dependam apenas de uma quantidade finita de coordenadas (existe também a teoria de grupos de Lie de dimensão infinita, mas envolve complicações técnicas que fogem ao escopo deste minicurso).

Para encontrarmos os geradores infinitesimais de um grupo de Lie G , tome um subgrupo a um parâmetro $G_{\mathbb{R}}$ de G , definido como

$$G_{\mathbb{R}} = \{g(t) \in G, t \in \mathbb{R} | g(0) = e, g(t)g(s) = g(t+s)\}.$$

Basicamente, um subgrupo a um parâmetro é uma curva em G passando pelo elemento identidade. Vamos avaliar agora o vetor velocidade desta curva no elemento identidade

$$A = \lim_{t \rightarrow 0} \dot{g}(t) = \left. \frac{dg}{dt} \right|_{t=0}.$$

Este vetor é tangente à variedade do grupo no ponto correspondente ao elemento identidade. Por outro lado, todo elemento de $G_{\mathbb{R}}$ pode ser escrito como a série formal de potências

$$g(t) = e^{tA},$$

por isto dizemos que A é o gerador infinitesimal de $G_{\mathbb{R}}$.

Podemos prosseguir com esta operação e encontrar outros subgrupos a um parâmetro tais que os seus geradores infinitesimais sejam linearmente independentes. como estamos tratando apenas de variedades de dimensão finita, os seus espaços tangentes também são de dimensão finita [4, 13]. Logo, haverá um conjunto linearmente independente de geradores infinitesimais $\{A_1, \dots, A_n\}$ que gerarão o espaço tangente a G no ponto e , este espaço, que vamos denotar por L , será a álgebra de Lie do grupo G . Qualquer outro elemento do grupo G pode ser expresso como exponencial de uma combinação linear de vetores de L

$$g = g(x_1, \dots, x_n) = e^{x_1 A_1 + \dots + x_n A_n}.$$

Como exemplos, considere o grupo $SO(2)$, que como vimos, corresponde ao grupo das rotações no plano. Uma matriz genérica deste grupo pode ser dada em termos do ângulo de rotação θ , da seguinte forma:

$$(5) \quad R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}.$$

Vamos definir agora o gerador infinitesimal associado à matriz de rotação $R(\theta) \in SO(2)$, dado por

$$(6) \quad J = R'(\theta)|_{\theta=0} = \frac{dR(\theta)}{d\theta} \Big|_{\theta=0} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Exercício 24. Utilizando a expressão da exponencial de uma matriz como

$$e^A = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} A^n,$$

mostre que toda rotação de $SO(2)$ pode ser escrita como $R(\theta) = e^{\theta J}$.

Analisemos também o caso do grupo $SO(3)$. As matrizes de rotação ao redor dos eixos x , y , e z no sentido anti-horário de um ângulo θ , são respectivamente

$$R_1(\theta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}, \quad R_2(\theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & 0 & \sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \theta & 0 & \cos \theta \end{pmatrix},$$

$$R_3(\theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercício 25. Mostre que os geradores infinitesimais associados às matrizes de rotação $R_i(s)$, $i = 1, 2, 3$, são respectivamente

$$L_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad L_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$L_3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Exercício 26. Mostre que $R_i(s) = e^{sL_i}$, para $i = 1, 2, 3$.

Exercício 27. Mostre que o comutador de duas matrizes dos geradores infinitesimais L_1 , L_2 e L_3 resulta em:

$$(7) \quad [L_i, L_j] = \sum_{k=1}^3 \epsilon_{ijk} L_k, \quad \text{para } i, j = 1, 2, 3.$$

Note a semelhança formal entre estas relações de comutação e as fórmulas do produto vetorial dos vetores da base canônica (3).

Exercício 28. Mostre que se aplicarmos o gerador infinitesimal $L_{\vec{n}}$ a um vetor $\vec{v} \in \mathbb{R}^3$, teremos

$$L_{\vec{n}}\vec{v} = \vec{n} \times \vec{v}.$$

Para vermos que o espaço tangente ao grupo G no elemento identidade é de fato uma álgebra de Lie, temos que mostrar que tal espaço é fechado em relação ao comutador. Para isto, sejam A e B dois elementos do espaço tangente e sejam

$$g(t) = e^{tA} \quad ; \quad h(t) = e^{tB}.$$

Considere agora o elemento de grupo

$$k(\tau) = g(t)h(t)g^{-1}(t)h^{-1}(t),$$

onde $\tau = t^2$. Então, se expandirmos $K(\tau)$ em série de potências teremos

$$k(\tau) = \text{Id} + \tau [A, B] + \mathcal{O}(t^3).$$

Assim, o comutador também aparece como um gerador infinitesimal:

$$[A, B] = \left. \frac{dk(\tau)}{d\tau} \right|_{\tau=0},$$

lembrando-se que quando $\tau = 0$ temos também $t = 0$.

Portanto, temos dois tipos de objetos relacionados entre si. De um lado, temos o grupo de Lie, que é uma variedade e pode possuir uma estrutura topológica complicada. De outro lado, temos a álgebra de Lie, que possui a vantagem de ser um espaço vetorial e é de certa forma mais simples operacionalmente. No entanto, esta simplicidade possui um preço, informações globais a respeito da estrutura topológica do grupo associado à álgebra são perdidas. A relação entre os elementos do grupo e elementos da álgebras está no fato que estes são geradores infinitesimais daqueles. Por outro lado, a partir dos elementos da álgebra podemos recobrar os elementos do grupo através da exponenciação.

Definição 9. Dados os vetores A_1, \dots, A_n da base de uma álgebra de Lie L podemos escrever o comutador genericamente como

$$[A_i, A_j] = \sum_{k=1}^n c_{ij}^k A_k.$$

Os coeficientes c_{ij}^k da expansão do comutador na base são denominados constantes de estrutura da álgebra L .

Vejamos alguns exemplos de álgebras de Lie: O primeiro exemplo é o da álgebra de Lie do grupo $GL(n, \mathbb{R})$ ($GL(n, \mathbb{C})$), denotada por $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$ ($\mathfrak{gl}(n, \mathbb{C})$), que consiste da álgebra de todas as matrizes $n \times n$ reais (complexas). Uma base para este espaço são as matrizes

$$e_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{Na linha } i \text{ e coluna } j. \\ 0, & \text{em todas outras entradas.} \end{cases}$$

Exercício 29. Mostre que o comutador entre os elementos da base de $\mathfrak{gl}(n)$, se escreve como

$$[e_{ij}, e_{kl}] = \delta_{jk}e_{il} - \delta_{li}e_{kj}.$$

O segundo exemplo é a álgebra de Lie do Grupo $SL(n, \mathbb{R})$ ($SL(n, \mathbb{C})$) denotada por $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{R})$ ($\mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})$). Como o determinante de uma exponencial pode ser escrito como

$$\text{Det}(e^A) = e^{\text{Tr}(A)},$$

concluímos que a condição $\text{Det}(g) = 1$ implica em $\text{Tr}(A) = 0$, onde A é o gerador infinitesimal de g . Assim, a álgebra $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{R})$ ($\mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})$) é a álgebra das matrizes $n \times n$ reais (complexas) com traço nulo.

Consideremos agora a álgebra de Lie do grupo $SO(n)$, denotada por $\mathfrak{so}(n)$. A condição sobre os elementos do grupo é que a transposta de uma matriz seja sua inversa. Assim, temos

$$gg^T = \text{Id}_n.$$

Considere $g = e^{tA}$ e tome os geradores infinitesimais desta relação, ou seja

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}g(t)g^T(t)\bigg|_{t=0} &= \frac{d}{dt}g(t)\bigg|_{t=0} g^T(0) + g(0) \frac{d}{dt}g^T(t)\bigg|_{t=0} = \\ &= A + A^T = 0. \end{aligned}$$

Assim, a álgebra $\mathfrak{so}(n)$ é a álgebra das matrizes reais ou complexas $n \times n$ anti-semétricas, ou seja, $A = -A^T$. Vimos no primeiro capítulo quais são os geradores infinitesimais do grupo $SO(2)$, que é a matriz $-\epsilon_{ij}$, e os geradores do grupo $SO(3)$, que são as matrizes L_i , $i = 1, 2, 3$.

Finalmente, analisemos a álgebra de Lie do grupo $SU(n)$, denotada por $\mathfrak{su}(n)$. A condição sobre os elementos do grupo é que a matriz hermitiana conjugada seja a inversa. Assim, temos

$$gg^\dagger = \text{Id}_n.$$

Considere $g = e^{tA}$ e tome os geradores infinitesimais desta relação, ou seja

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}g(t)g^\dagger(t)\bigg|_{t=0} &= \frac{d}{dt}g(t)\bigg|_{t=0} g^\dagger(0) + g(0) \frac{d}{dt}g^\dagger(t)\bigg|_{t=0} = \\ &= A + A^\dagger = 0. \end{aligned}$$

Assim, a álgebra $\mathfrak{su}(n)$ é a álgebra das matrizes complexas $n \times n$ anti-hermitianas, ou seja, $A = -A^\dagger$.

3.2. As álgebras de Lie $\mathfrak{so}(3)$ e $\mathfrak{su}(2)$. Vamos particularizar nossa discussão e introduzir os geradores infinitesimais do grupo $SU(2)$, que podem ser escritos em termos das matrizes de Pauli,

$$(8) \quad \sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -\imath \\ \imath & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Exercício 30. Mostre as seguintes propriedades elementares das matrizes de Pauli:

- a) $\{\sigma_i, \sigma_j\} = \sigma_i \sigma_j + \sigma_j \sigma_i = 2\delta_{ij} \text{Id}_2.$
- b) $[\sigma_i, \sigma_j] = 2\imath \sum_{k=1}^3 \epsilon_{ijk} \sigma_k,$
- c) $\sigma_i^\dagger = \sigma_i, \quad \text{Tr}(\sigma_i) = 0, \quad \text{Det}(\sigma_i) = -1,$
- d) $\sigma_1 \sigma_2 \sigma_3 = \imath \text{Id}_2,$
- e) $\sigma_i \sigma_j = \delta_{ij} + \imath \sum_{k=1}^3 \epsilon_{ijk} \sigma_k.$

Os geradores infinitesimais de $SU(2)$ podem ser escritos como

$$J_i = -\frac{\imath}{2} \sigma_i, \quad i = 1, 2, 3.$$

Pelas propriedades das matrizes de Pauli, facilmente podemos deduzir as relações de comutação

$$(9) \quad [J_i, J_j] = \imath \hbar \sum_{k=1}^3 \epsilon_{ijk} J_k.$$

Note a semelhança formal existente entre (9), (7) e (3). Esta semelhança formal não é acidental, ela é um caso de isomorfismo de álgebras de Lie.

Definição 10. Dadas duas álgebras de Lie L e M , dizemos que a aplicação

$$\phi : L \rightarrow M$$

é um homomorfismo de álgebra de Lie se

- (1) É linear.
- (2) Preserva a relação de comutação: $\phi([A, B]) = [\phi(A), \phi(B)].$

Se um homomorfismo é bijetor, então ele é dito ser um isomorfismo e as álgebras de Lie são isomórfas.

Exercício 31. Mostre que a afirmação que duas álgebras de Lie são isomórfas é equivalente a dizer que elas possuem a mesma dimensão e as mesmas constantes de estrutura.

Vimos na discussão acima três álgebras de Lie que, embora tenham naturezas diferentes, são isomórfas: A álgebra de Lie dos vetores em \mathbb{R}^3 , a álgebra de Lie $\mathfrak{so}(3)$ e a álgebra de Lie $\mathfrak{su}(2)$.

O isomorfismo entre \mathbb{R}^3 e $\mathfrak{so}(3)$ é dado associando-se aos vetores da base canônica $\hat{\mathbf{e}}_i$ os geradores infinitesimais de rotações L_i , para $i = 1, 2, 3$, ou seja, fazendo-se a seguinte associação

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 0 & -c & b \\ c & 0 & -a \\ -b & a & 0 \end{pmatrix}.$$

O isomorfismo entre \mathbb{R}^3 e $\mathfrak{su}(2)$ é dado associando-se aos vetores da base canônica $\hat{\mathbf{e}}_i$ os geradores infinitesimais de rotações J_i , para $i = 1, 2, 3$, ou seja, fazendo-se a seguinte associação

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \mapsto \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \imath c & -b - \imath a \\ b + \imath a & \imath c \end{pmatrix}.$$

Exercício 32. Mostre que as duas aplicações entre \mathbb{R}^3 e as álgebras $\mathfrak{so}(3)$ e $\mathfrak{su}(2)$ são, de fato, são isomorfismos de álgebras de Lie.

Finalmente, o isomorfismo entre $\mathfrak{su}(2)$ e $\mathfrak{so}(3)$ é dado pela ação adjunta $ad : \mathfrak{su}(2) \rightarrow \mathfrak{so}(3)$, dada por $ad(X)\vec{Y} = [X, Y]$, onde \vec{Y} é um vetor de \mathbb{R}^3 e Y seu correspondente em $\mathfrak{su}(2)$ pelo isomorfismo proposto no parágrafo anterior. Por exemplo, nos vetores da base temos

$$ad(J_i)\hat{\mathbf{e}}_j = [J_i, J_j] = \sum_{k=1}^3 \epsilon_{ijk} J_k.$$

Assim, matricialmente, podemos escrever

$$ad(J_i)_{kj} = \epsilon_{ijk},$$

ou seja

$$\begin{aligned} ad(J_1) &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = L_1 \\ ad(J_2) &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = L_2 \\ ad(J_3) &= \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = L_3 \end{aligned}$$

Podemos, também, implementar um homomorfismo de grupos entre $SU(2)$ e $SO(3)$, utilizando as propriedades das matrizes de Pauli.

Exercício 33. Denotando-se por $\vec{\mathbf{v}} \cdot \vec{\sigma}$ o elemento em $\mathfrak{su}(2)$ dado por $v_1\sigma_1 + v_2\sigma_2 + v_3\sigma_3$, mostre que

$$(\vec{\mathbf{v}} \cdot \vec{\sigma})(\vec{\mathbf{w}} \cdot \vec{\sigma}) = (\vec{\mathbf{v}} \cdot \vec{\mathbf{w}}) Id_2 + \imath(\vec{\mathbf{v}} \times \vec{\mathbf{w}}) \cdot \vec{\sigma}.$$

Considere então as matrizes unitárias

$$(10) \quad U_{\vec{\mathbf{n}}}(s) = e^{-\frac{\imath s}{2}\vec{\mathbf{n}} \cdot \vec{\sigma}}.$$

Exercício 34. Mostre que para um vetor unitário $\vec{\mathbf{n}}$, temos

$$(11) \quad U_{\vec{\mathbf{n}}}(s) = \cos\left(\frac{s}{2}\right) Id_2 - \imath(\vec{\mathbf{n}} \cdot \vec{\sigma}) \sin\left(\frac{s}{2}\right).$$

E escreva em forma matricial.

Está claro que todas estas matrizes são elementos do grupo $SU(2)$. No capítulo seguinte veremos com mais detalhes que todos os elementos de $SU(2)$ podem ser escritos desta maneira.

Exercício 35. Mostre as seguintes relações de conjugação;

$$\begin{aligned} e^{-\frac{is}{2}\sigma_3}\sigma_1e^{\frac{is}{2}\sigma_3} &= \sigma_1 \cos s + \sigma_2 \sin s, \\ e^{-\frac{is}{2}\sigma_3}\sigma_2e^{\frac{is}{2}\sigma_3} &= -\sigma_1 \sin s + \sigma_2 \cos s, \\ e^{-\frac{is}{2}\sigma_3}\sigma_3e^{\frac{is}{2}\sigma_3} &= \sigma_3. \end{aligned}$$

Faça o mesmo para $e^{-\frac{is}{2}\sigma_1}$ e $e^{-\frac{is}{2}\sigma_2}$.

A partir do exercício acima, podemos estabelecer um homomorfismo entre $SU(2)$ e $SO(3)$ associando

$$U_{\vec{n}}(s) \mapsto R_{\vec{n}}(s).$$

Geometricamente, a idéia é tomar um vetor $\vec{v} \in \mathbb{R}^3$ escrito como

$$\vec{v} = \sum_{i=1}^3 x_i \sigma_i = \vec{X} \cdot \vec{\sigma}.$$

Uma rotação em \mathbb{R}^3 pode ser implementada pela conjugação

$$R_{\vec{n}}(s)(\vec{v}) = R_{\vec{n}}(s)(\vec{X}) \cdot \vec{\sigma} = e^{-\frac{is}{2}\vec{n} \cdot \vec{\sigma}} \vec{v} e^{\frac{is}{2}\vec{n} \cdot \vec{\sigma}}.$$

Exercício 36. Mostre pelo menos no caso dos geradores $R_i(s)$ que realmente temos a matriz de rotação.

Exercício 37. Mostre que esta aplicação associa a unidade em $SU(2)$ à unidade em $SO(3)$. Mostre também (pelo menos para os geradores, já que todos os outros elementos de $SO(3)$ podem ser escritos como produtos dos geradores) que a composição de dois elementos em $SU(2)$ é associada à composição das rotações na imagem.

Temos então um homomorfismo entre $SU(2)$ e $SO(3)$, que é a denominada ação adjunta $Ad : SU(2) \rightarrow SO(3)$ dada por

$$Ad(U)\vec{X} = UXU^{-1},$$

onde \vec{X} é um vetor em \mathbb{R}^3 e X a matriz em $\mathfrak{su}(2)$ a ele associada.

Exercício 38. Mostre que este homomorfismo não é um isomorfismo pois $U_{\vec{n}}(s)$ e $U_{-\vec{n}}(-s)$ são associados ao mesmo elemento de $SO(3)$. Mostre ainda que para cada vetor \vec{n} e cada ângulo s , as matrizes unitárias $A(\vec{n}, s) = U_{\vec{n}}(s)(U_{-\vec{n}}(-s))^{-1}$ geram um sub-grupo discreto isomorfo a \mathbb{Z}_2 , e como \mathbb{Z}_2 é abeliano, isto implica que é sub-grupo normal de $SU(2)$. Por fim, mostre que $SO(3)$ é isomorfo, como grupo, ao grupo quociente $SU(2)/\mathbb{Z}_2$ (para isto você deve utilizar o teorema do homomorfismo para grupos).

Há muito a se explorar na relação entre os grupos $SU(2)$ e $SO(3)$, este foi apenas um primeiro ponto de vista. O leitor poderá encontrar exposições mais detalhadas e outras análises, envolvendo grupos de homotopia, geometria complexa, álgebras de Clifford e muito mais na bibliografia apresentada no final.

Para finalizarmos, uma breve explanação sobre representações de álgebras de Lie, para mais detalhes, consulte as referências [5, 15, 16].

Definição 11. Dada uma álgebra de Lie L , definimos uma representação real (complexa) de dimensão n de L como um homomorfismo $\Gamma : L \rightarrow \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$ ($\Gamma : L \rightarrow \mathfrak{gl}(n, \mathbb{C})$). Diz-se que o espaço vetorial de dimensão n onde as matrizes de $\mathfrak{gl}(n)$ agem carrega a representação Γ . Uma representação é dita ser irreduzível quando o espaço que carrega a representação não possui sub-espacos invariantes pela ação da representação da álgebra de Lie. Diz-se ainda que uma representação é completamente redutível quando o espaço que carrega a representação pode ser decomposto em uma soma direta de representações irreduzíveis.

Da mesma forma, a representação fundamental da álgebra é dada na dimensão onde elas são definidas. Assim, a representação fundamental de $\mathfrak{so}(n)$ é de dimensão n , idem para $\mathfrak{su}(n)$. Um outro tipo de representações importantes para álgebras de Lie são as representações adjuntas. Basicamente é um homomorfismo

$$\text{ad} : L \rightarrow \mathfrak{gl}(L)$$

e a ação dos elementos é dada por

$$\text{ad}(A)(B) = [A, B].$$

Podemos calcular os elementos de matriz na representação adjunta explicitamente: Tome um vetor $v = \sum_j v_j A_j \in L$. A ação de A_i pela representação adjunta sobre v pode ser escrita como

$$\begin{aligned} \text{ad}(A_i)(v) &= \sum_{k=1}^n v_k \text{ad}(A_i)(A_k) = \sum_{j,k=1}^n c_{ik}^j v_k A_j = \\ &= \sum_{j=1}^n (\text{ad}(A_i)(v))_j A_j = \sum_{j,k=1}^n \text{ad}(A_i)_{jk} v_k A_j. \end{aligned}$$

Assim, $\text{ad}(A_i)_{jk} = c_{ik}^j$, ou seja, as entradas de matriz na representação adjunta são dadas em termos das constantes de estrutura.

Da mesma forma que em grupos, as representações mais interessantes são as representações irreduzíveis. No caso de $\mathfrak{so}(3)$ $\mathfrak{su}(2)$ obtivemos todas as representações de dimensão finita, que são denominadas representações de peso máximo. A mesma idéia pode ser aplicada para todas as álgebras de Lie dos grupos de Lie Clássicos, guardadas as devidas diferenças advindas da complexidade da álgebra. Existe um teorema que afirma que todas as representações de dimensão finita das álgebras de Lie clássicas são completamente reduzíveis. Este fato está por trás da decomposição de Clebsch Gordan, por exemplo. Existem inúmeras aplicações à física, em particular à mecânica quântica das representações de álgebras de Lie, o primeiro a salientar a importância de grupos e álgebras de Lie em mecânica quântica foi Hermann Weyl em seu trabalho seminal [17].

Este foi um breve apanhado de algumas propriedades de álgebras e grupos de Lie. Enfatizamos principalmente os grupos e suas respectivas álgebras para os casos $SO(3)$ e $SU(2)$. Nos exercícios a seguir, explicitamos outras realizações da álgebra de Lie $\mathfrak{su}(2)$ que são importantes para a teoria de representações.

Exercício 39. Mostre que, se fizermos as seguintes combinações lineares com os geradores da álgebra de Lie $\mathfrak{su}(2)$:

$$J_+ = \iota J_1 - J_2, \quad S_- = \iota J_1 + J_2, \quad J_0 = \iota J_3,$$

teremos as seguintes relações de comutação para $\mathfrak{su}(2)$:

$$(12) \quad [J_0, J_\pm] = \pm J_\pm, \quad [J_+, J_-] = 2J_0.$$

Exercício 40. Considere os dois operadores atuando sobre funções de uma variável real x (pode ser, por exemplo o espaço das funções $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$, tais que $\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2 dx < \infty$):

$$Q = x, \quad P = \frac{\partial}{\partial x},$$

teremos a seguinte relação de comutação:

$$[P, Q] = I,$$

onde I é o operador identidade atuando em funções. Para calcular este comutador, é necessário aplicá-lo em alguma função teste:

$$[P, Q]\psi(x) = \frac{\partial}{\partial x}(x\psi(x)) - x\frac{\partial\psi(x)}{\partial x}.$$

Exercício 41. Considere o exercício anterior e defina os novos operadores

$$a = \frac{P+Q}{\sqrt{2}}, \quad a^\dagger = \frac{Q-P}{\sqrt{2}}.$$

Calcule $[a, a^\dagger]$.

Exercício 42. Sejam x_1 e x_2 duas variáveis independentes. Considere os operadores P_1 , Q_1 , P_2 e Q_2 definidos como acima nas variáveis independentes e construa os operadores a_1 , a_2 , a_1^\dagger e a_2^\dagger como no exercício anterior, definidos em termos de seus respectivos operadores P_i e Q_i . Finalmente, definindo

$$J_+ = a_1^\dagger a_2, \quad J_- = a_2^\dagger a_1, \quad J_0 = \frac{1}{2} (a_1^\dagger a_1 + a_2^\dagger a_2),$$

mostre que J_+ , J_- e J_0 , satisfazem às relações de comutação de $\mathfrak{su}(2)$ conforme descritas em (12).

4. AS MÚLTIPLAS RELAÇÕES DOS GRUPOS DE ROTAÇÃO

Neste capítulo, apresentaremos uma série de relações curiosas e inesperadas existentes entre os grupo de rotações em três dimensões e outros objetos matemáticos como espaços projetivos, quatérnions e fibrados principais. O estudo dos grupos $SO(3)$ e $SU(2)$ é, de fato, uma porta aberta para diversos ramos da matemática e a análise deste exemplo simples pode ser ao mesmo tempo instrutiva e enriquecedora.

4.1. A Álgebra dos Quatérnions de Hamilton. A geometria analítica no plano, como sabemos, pode ser descrita completamente pela álgebra dos números complexos. Para isto, associamos a cada vetor $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ o número complexo $x + iy \in \mathbb{C}$. A soma de vetores no plano corresponde à soma de dois números complexos, a norma de um vetor equivale ao módulo do número complexo associado e uma por uma as propriedades geométricas dos vetores podem ser traduzidas em propriedades algébricas dos números complexos. Os números complexos, também, podem ser mapeados em transformações lineares no plano, fazendo-se a associação

$$a + ib \mapsto \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R}).$$

Assim, o produto de dois números complexos, $(a + ib)(c + id)$, pode ser visto como o vetor

$$\begin{pmatrix} ac - bd \\ bc + ad \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}.$$

Em particular, as rotações no plano podem ser implementadas pela multiplicação por um número complexo de módulo 1

$$\cos \theta + i \sin \theta = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix},$$

por exemplo, uma rotação de $\frac{\pi}{2}$ equivale à multiplicação pelo número i .

Toda esta riqueza advinda da estrutura algébrica dos números complexos no estudo da geometria do plano motivou Sir William Rowan Hamilton a buscar um equivalente algébrico para o estudo da geometria do espaço tridimensional. Foram anos de busca infrutífera, pois o que era realmente necessário era uma álgebra de dimensão quatro e não uma de dimensão três. Somente em 16 de outubro de 1843, durante uma caminhada ao longo do Royal Canal, em Dublin, Hamilton pode vislumbrar a solução para o seu problema, e que até hoje está escrito em uma pedra na Brougham Bridge, sobre aquele canal:

$$(13) \quad i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1.$$

Nascia, neste momento, a álgebra dos quatérnions.

Definição 12. A álgebra dos quatérnions \mathbb{H} é o conjunto das combinações lineares $a + ib + jc + kd$, com $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ e com os geradores i, j e k satisfazendo às regras de multiplicação (13)

A partir das relações de multiplicação (13), podemos deduzir que:

$$\begin{aligned} ijk &= -k \Rightarrow -ij = -k \Rightarrow ij = k \\ ijk &= -i \Rightarrow -jk = -i \Rightarrow jk = i \\ kj &= ij \Rightarrow kj = -i = -jk \\ ji &= jjk \Rightarrow ji = -k = -ij \\ ik &= jk \Rightarrow ik = -j \\ ki &= ij \Rightarrow ki = -ik = j. \end{aligned}$$

Este produto, como podemos perceber, é claramente não comutativo. com as relações acima, o produto de dois quatérnions pode ser escrito como

$$\begin{aligned}
 (a + \imath b + \jmath c + k d)(\alpha + \imath \beta + \jmath \gamma + k \delta) &= (a\alpha - b\beta - c\gamma - d\delta) + \\
 &+ \imath(a\beta + b\alpha + c\delta - d\gamma) + \\
 &+ \jmath(a\gamma + c\alpha + d\beta - b\delta) + \\
 &+ k(a\delta + d\alpha + b\gamma - c\beta).
 \end{aligned}
 \tag{14}$$

Exercício 43. Verifique a não comutatividade do produto explicitamente utilizando a relação de multiplicação acima. Verifique a associatividade do produto de quatérnions.

Definição 13. O conjugado de um quatérnion $u = (a + \imath b + \jmath c + k d)$ é o quatérnion $\bar{u} = (a - \imath b - \jmath c - k d)$.

Exercício 44. Verifique que para todo quatérnion $u = (a + \imath b + \jmath c + k d)$, temos que $u\bar{u} = \bar{u}u = a^2 + b^2 + c^2 + d^2$. À raiz quadrada deste número, denominaremos o módulo do quatérnion u , denotado por $|u| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}$. Mostre então que todo quatérnion não nulo possui um inverso multiplicativo $u^{-1} = \frac{\bar{u}}{|u|^2}$.

De acordo com os exercícios acima, verificamos que os quatérnions possuem as mesmas propriedades que os números complexos, exceto a comutatividade do produto. Portanto, a priori, temos uma estrutura algébrica para o estudo da geometria em quatro dimensões. Mas curiosamente, esta álgebra nos fornece informações relevantes para o estudo da geometria do espaço tridimensional. Se considerarmos a aplicação $\phi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{H}$ que associa a cada vetor $\vec{v} = (x, y, z)$ o quatérnion $\phi(\vec{v}) = \imath x + \jmath y + k z$. Se efetuarmos a multiplicação dos quatérnions associados a dois vetores \vec{v} e \vec{w} , teremos

$$\phi(\vec{v})\phi(\vec{w}) = \langle \vec{v}, \vec{w} \rangle + \phi(\vec{v} \times \vec{w}).$$

Isto é, o produto nos quatérnions codifica as informações tanto do produto escalar como do produto vetorial em \mathbb{R}^3 . Uma outra forma, ainda, que podemos ver a geometria do espaço euclidiano tridimensional sendo descrita pelos quatérnions é considerarmos o quociente $\mathbb{H}/\mathbb{R}1$ que como espaço vetorial é gerado pelas classes do \imath , \jmath e k . Neste caso, o produto entre quatérnions se torna o produto vetorial usual.

Exercício 45. Mostre que de fato a multiplicação dos quatérnions quando restrita a este quociente tridimensional possui as mesmas propriedades do produto vetorial.

Uma outra conclusão que podemos extrair das propriedades do produto entre quatérnions é que os quatérnions de módulo unitário,

$$\{a + \imath b + \jmath c + k d \in \mathbb{H} \mid a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 1\} \cong \mathbb{S}^3,$$

formam um grupo multiplicativo. E veremos a seguir que este grupo é isomorfo, como grupo, ao grupo $SU(2)$, e que portanto pode implementar rotações no espaço tridimensional da mesma maneira que os complexos unitários implementam rotações no plano.

Exercício 46. Verifique que, de fato, os quatérnions unitários formam um grupo. Com o elemento identidade dado por $e = 1 + \imath 0 + \jmath 0 + k 0 = 1$ e o elemento inverso de um quatérnion dado pelo seu conjugado.

Para vermos o isomorfismo entre o grupo dos quatérnions unitários e o grupo $SU(2)$, precisamos de uma caracterização alternativa dos quatérnions.

Definição 14. A álgebra dos quatérnions \mathbb{H} é o conjunto das combinações lineares $z + \jmath w$, com $z, w \in \mathbb{C}$ e com o gerador \jmath , satisfazendo à regra de multiplicação $w\jmath = j\mathit{m}ath\bar{w}$.

Assim, o produto entre dois quatérnions escritos na forma complexa se escreve como

$$\tag{15} (z_1 + \jmath w_1)(z_2 + \jmath w_2) = (z_1 z_2 - \bar{w}_1 w_2) + \jmath(w_1 z_2 + \bar{z}_1 w_2).$$

Também, o conjugado de um quatérnion pode ser escrito como

$$(z + \bar{\jmath} w) = \bar{z} - \jmath w,$$

e o seu módulo, finalmente, pode ser escrito como

$$|z + jw| = \sqrt{z\bar{z} + \bar{w}w}.$$

Exercício 47. Mostre que as duas definições de quatérnions são equivalentes, ou seja, que se tem um isomorfismo de álgebras associando o quatérnion escrito na forma real $a + ib + jc + kd$ ao quatérnion escrito na forma complexa $(a + ib) + j(c - id)$.

Agora, podemos efetuar o já referido isomorfismo entre o grupo multiplicativo dos quatérnions unitários e o grupo $SU(2)$.

Proposição 4. A aplicação $\varphi : \mathbb{S}^3 \subseteq \mathbb{H} \rightarrow M_2(\mathbb{C})$ que faz a associação

$$z + jw \mapsto \begin{pmatrix} z & -\bar{w} \\ w & \bar{z} \end{pmatrix},$$

é um isomorfismo entre os quatérnions unitários e o grupo $SU(2)$.

Demonstração: Primeiramente, temos que verificar que as matrizes na imagem da aplicação φ são unitárias e de determinante igual a 1. De fato,

$$\begin{pmatrix} z & -\bar{w} \\ w & \bar{z} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{z} & \bar{w} \\ -w & z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z\bar{z} + \bar{w}w & z\bar{w} - \bar{w}z \\ w\bar{z} - \bar{z}w & w\bar{w} + \bar{z}z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

e também

$$\text{Det} \begin{pmatrix} z & -\bar{w} \\ w & \bar{z} \end{pmatrix} = z\bar{z} + \bar{w}w = 1.$$

Isto se deve ao fato de as matrizes serem a imagem de quatérnions unitários, ou seja $|z + jw|^2 = z\bar{z} + \bar{w}w = 1$.

Em segundo lugar, vamos verificar que realmente a aplicação φ é um homomorfismo de grupo:

$$\begin{aligned} \varphi(z_1 + jw_1)\varphi(z_2 + jw_2) &= \begin{pmatrix} z_1 & -\bar{w}_1 \\ w_1 & \bar{z}_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_2 & -\bar{w}_2 \\ w_2 & \bar{z}_2 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} z_1z_2 - \bar{w}_1w_2 & -\bar{w}_1\bar{z}_2 - z_1\bar{w}_2 \\ w_1z_2 + \bar{z}_1w_2 & \bar{z}_1\bar{z}_2 - w_1\bar{w}_2 \end{pmatrix} = \\ &= \varphi((z_1z_2 - \bar{w}_1w_2) + j(w_1z_2 + \bar{z}_1w_2)) = \\ &= \varphi((z_1 + jw_1)(z_2 + jw_2)). \end{aligned}$$

Para demonstrarmos a injetividade, lembremo-nos que para homomorfismos de grupos isto equivale a mostrar que o kernel do homomorfismo,

$$\text{Ker } \varphi = \{u = z + jw \in \mathbb{S}^3 \mid \varphi(u) = I\},$$

é constituído apenas do elemento identidade do grupo. De fato, se $u = z + jw \in \text{Ker } \varphi$ então

$$\begin{pmatrix} z & -\bar{w} \\ w & \bar{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

o que implica que $w = 0$ e $z = 1$, logo $u = 1$, e portanto a aplicação φ é injetiva. A sobrejetividade, vem do fato que toda matriz de $SU(2)$ pode ser escrita como

$$\begin{pmatrix} z & -\bar{w} \\ w & \bar{z} \end{pmatrix} = \varphi(z + jw).$$

Logo, a aplicação φ é um isomorfismo de grupos. ■

Deste isomorfismo, fica claro que as rotações em \mathbb{R}^3 podem ser implementadas por conjugação por quatérnions. Isto é feito compondo-se a ação adjunta com a aplicação φ .

Exercício 48. Tome um vetor $\vec{v} = (a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ e o escreva na forma de quatérnion complexo (note que a primeira componente complexa do quatérnion será um imaginário puro). Agora considere uma rotação por um ângulo s ao redor de um eixo $\vec{n} = (n_1, n_2, n_3)$ e considere a matriz unitária associada a esta rotação dada pelas expressões (10) e (11) do capítulo anterior. Com isto, escreva o quatérnion associado

a esta matriz unitária pelo isomorfismo φ e conclua que toda rotação de eixo \vec{n} e ângulo s em \mathbb{R}^3 pode ser implementada pela conjugação por um quatérnion da forma

$$u = \left(\cos \frac{s}{2} - in_3 \sin \frac{s}{2} \right) + j \left(n_2 \sin \frac{s}{2} - in_1 \sin \frac{s}{2} \right).$$

Com isto, vemos a estreita ligação que existe entre o grupo de rotações no espaço tridimensional $SO(3)$ e a álgebra dos quatérnions. A álgebra dos quatérnions é um exemplo específico de um tipo de estrutura algébrica denominada álgebra de Clifford [2, 6], esta estrutura tem relevância no estudo da geometria diferencial e na física de partículas, principalmente na descrição dos férmons [4, 13]. O subgrupo multiplicativo dos quatérnions unitários, no contexto mais geral de álgebras de Clifford pode ser identificado como o grupo de Spin associado à álgebra. A estrutura dos grupos de spin nos dizem muita informação relevante sobre as representações de grupos de Lie bem como sobre topologia de variedades [6, 13].

4.2. Espaços Projetivos e Transformações Projetivas.

Definição 15. *Dado um espaço vetorial \mathbb{V} sobre um corpo \mathbb{K} (vamos considerar \mathbb{K} como \mathbb{R} ou \mathbb{C}), considere a seguinte relação de equivalência entre os vetores não nulos de \mathbb{V} , isto é, em $\mathbb{V} \setminus \{0\}$:*

$$v \sim w \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{K}, \text{ tal que, } v = \lambda w.$$

Definimos o espaço projetivo $\mathbb{P}(\mathbb{V})$ como sendo o quociente

$$\mathbb{P}(\mathbb{V}) = (\mathbb{V} \setminus \{0\}) / \sim.$$

Como um primeiro exemplo, vejamos a reta projetiva real, $\mathbb{RP}^1 = \mathbb{P}(\mathbb{R}^2)$, como conjunto, ele se identifica como o conjunto das retas no plano que passam pela origem. Uma outra forma de caracterizar a reta projetiva é considerarmos a circunferência $\mathbb{S}^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R} \mid x^2 + y^2 = 1\}$. Como cada reta que passa pela origem cruza \mathbb{S}^1 em dois pontos diametralmente opostos, chamados pontos antípodas, podemos identificar a reta projetiva real com uma semi-circunferência na qual suas extremidades estão identificadas, fazendo, assim, um espaço homeomorfo a \mathbb{S}^1 , conforme mostrado na Figura 3.1.

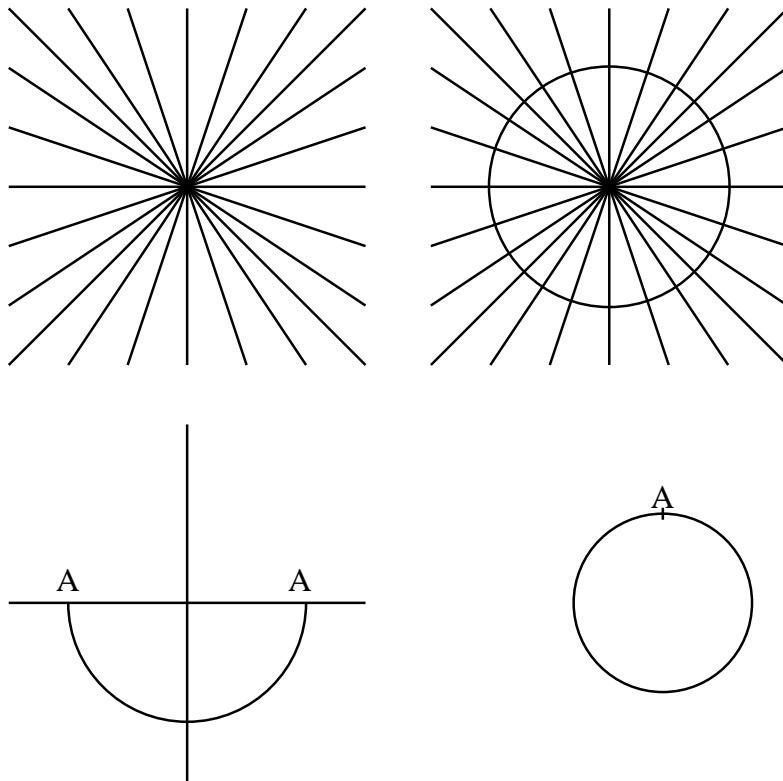


Figura 3.1: A reta projetiva \mathbb{RP}^1 é homeomorfa a \mathbb{S}^1 .

O plano projetivo real $\mathbb{RP}^2 = \mathbb{P}(\mathbb{R}^3)$ é nosso segundo exemplo de espaço projetivo, este é o conjunto de todas as retas no espaço tridimensional que passam pela origem. Mais uma vez, para caracterizá-lo de uma forma mais precisa, utilizaremos a esfera bidimensional $\mathbb{S}^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$.

É fácil perceber que toda reta que passa pela origem em \mathbb{R}^3 intersecta \mathbb{S}^2 duas vezes, exatamente em pontos antípodas. Assim, o plano projetivo real \mathbb{RP}^2 é homeomorfo à esfera \mathbb{S}^2 com os pontos antípodas identificados. Muito embora não seja possível desenhar o plano projetivo, a Figura 3.2, nos dá uma idéia de sua construção

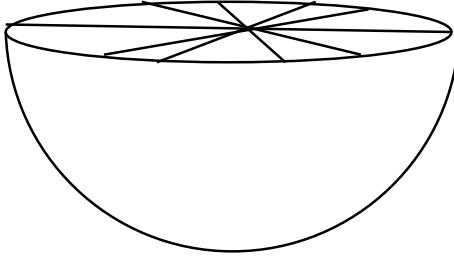


figura 3.2: Uma representação gráfica do plano projetivo \mathbb{RP}^2 .

Nossos próximos dois exemplos possuem relação, direta ou indireta, com o assunto principal deste minicurso, o grupo de rotações. O espaço projetivo tridimensional real $\mathbb{RP}^3 = \mathbb{P}(\mathbb{R}^4)$, é homeomorfo ao próprio grupo $SO(3)$. Pelo exposto nos exemplos anteriores, já podemos deduzir que o conjunto de retas em \mathbb{R}^4 que passam pela origem é homeomorfo à esfera \mathbb{S}^3 com os pontos antípodas identificados, mas neste caso, esta caracterização não nos auxilia grandemente para termos uma imagem do espaço projetivo. Para melhorarmos nossa percepção, retornemos ao caso de \mathbb{RP}^2 . Como vimos, \mathbb{RP}^2 também pode ser entendido como um hemisfério com os pontos antípodas do equador identificados. Mas todo hemisfério é homeomorfo a um disco. Por exemplo, o hemisfério norte da esfera $\mathbb{S}^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$, é homeomorfo ao disco $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + y^2 \leq 1\}$, pela aplicação

$$f : \begin{array}{ccc} D & \rightarrow & \mathbb{S}^2 \\ (x, y) & \mapsto & (x, y, \sqrt{1 - x^2 - y^2}) \end{array} ,$$

cuja aplicação inversa é a projeção nas primeiras duas coordenadas. Assim, o plano projetivo é, ainda, homeomorfo ao disco unitário com os pontos antípodas da borda identificados. Da mesma forma, um hemisfério de \mathbb{S}^3 pode ser visto como homeomorfo a um disco tridimensional (uma bola). Vejamos: o hemisfério norte de $\mathbb{S}^3 = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 | x^2 + y^2 + z^2 + t^2 = 1\}$ é homeomorfo à bola $D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$ pela aplicação

$$f : \begin{array}{ccc} D & \rightarrow & \mathbb{S}^3 \\ (x, y, z) & \mapsto & (x, y, z, \sqrt{1 - x^2 - y^2 - z^2}) \end{array} ,$$

cuja aplicação inversa é a projeção nas primeiras três coordenadas. Como \mathbb{RP}^3 é homeomorfo a \mathbb{S}^3 com os pontos antípodas identificados, também podemos caracterizá-lo como um hemisfério de \mathbb{S}^3 com os pontos antípodas da borda (que é homeomorfa a uma esfera \mathbb{S}^2) identificados. E através deste isomorfismo de um hemisfério de \mathbb{S}^3 com uma bola, podemos finalmente ver o espaço projetivo \mathbb{RP}^3 como uma bola tridimensional com os pontos antípodas de sua borda identificados.

Como este espaço está relacionado com o grupo $SO(3)$? Bem, podemos estabelecer uma aplicação de \mathbb{R}^3 em $SO(3)$ associando a cada vetor $v \in \mathbb{R}^3$ uma rotação cujo eixo é dado pelo vetor unitário $\hat{v} = \frac{v}{\|v\|}$ e com ângulo dado por $\|v\|$. Está claro que esta aplicação é contínua, sobrejetiva e que dois vetores corresponderão à mesma rotação se, e somente se, forem co-lineares e a sua diferença for um múltiplo inteiro de 2π . Portanto, se tomarmos a restrição desta aplicação à bola fechada $\overline{B(0, \pi)}$, teremos uma aplicação contínua entre um espaço compacto (a bola fechada $\overline{B(0, \pi)}$) e um espaço Haussdorff (o grupo $SO(3)$), pois a sua topologia é herdada da topologia métrica existente no espaço das matrizes $M_3(\mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^9$), logo aberta¹. Se identificarmos os pontos antípodas da superfície da bola $\overline{B(0, \pi)}$, termos uma aplicação contínua, aberta, injetiva e sobrejetiva entre \mathbb{RP}^3 (que é homeomorfo à bola com os pontos antípodas da borda identificados), e o grupo $SO(3)$, isto é o mesmo que dizer que \mathbb{RP}^3 é homeomorfo ao grupo $SO(3)$. O que conclui nossa discussão sobre a estrutura topológica do grupo $SO(3)$.

¹Um teorema importante em topologia nos garante que toda aplicação contínua entre um espaço compacto e um espaço Haussdorff é aberta, isto é, que a imagem de um aberto é um aberto

O nosso último exemplo de espaço projetivo será o espaço projetivo complexo unidimensional \mathbb{CP}^1 . Que é o conjunto de todos os planos complexos passando pela origem de \mathbb{C}^2 . Se olharmos este espaço como uma variedade sobre \mathbb{R} , veremos que este terá dimensão 2, isto é, será uma superfície real. Vamos ver que, \mathbb{CP}^1 é homeomorfo à esfera \sim^2 . Para isto, precisamos entender, primeiramente a projeção estereográfica, que promove um homeomorfismo entre a esfera bidimensional \sim^2 , menos um ponto, e o plano complexo. Vejamos como isto se processa: Tomemos o ponto $N = (0, 0, 1)$ sobre \sim^2 , que chamaremos de polo norte, e associarmos a cada ponto $P = (x, y, z) \in \sim^2$ o ponto $Z = \rho(P) = X + iY \in \mathbb{C}$ que é a intersecção da semi-reta \overrightarrow{NP} com o plano x, y , conforme mostrado na Figura 3.3 abaixo.

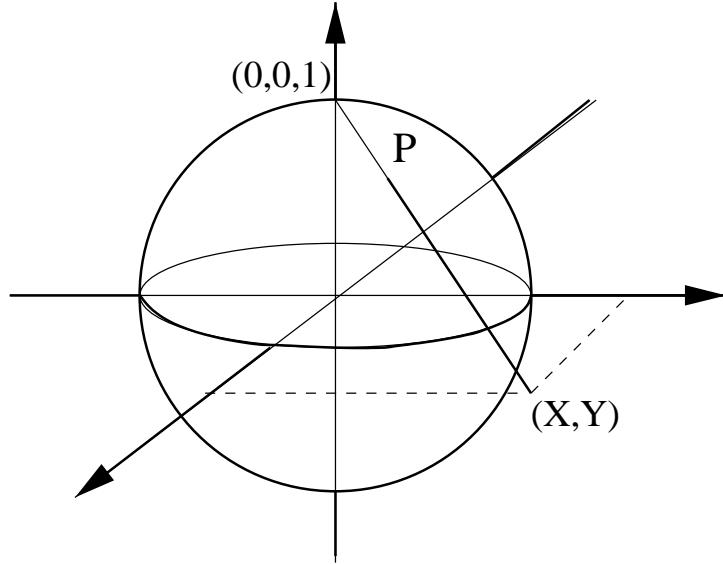


Figura 3.3: Projeção estereográfica.

Em coordenadas, podemos calcular facilmente a projeção estereográfica considerando as semelhanças de triângulos existentes nos planos x, z e y, z , conforme mostrado na Figura 3.4:

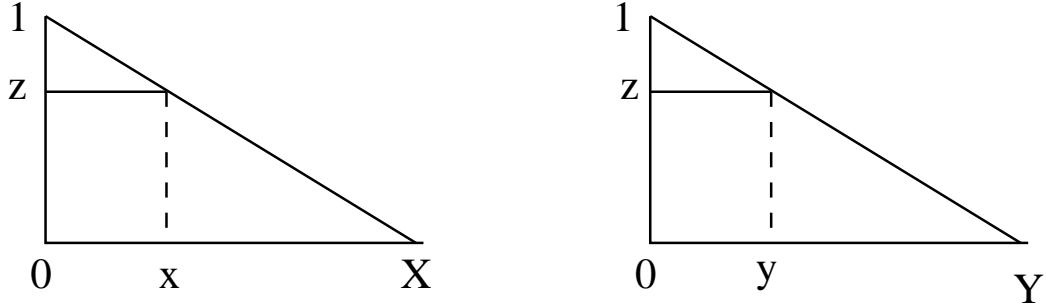


Figura 3.4: Cálculo em coordenadas da projeção estereográfica.

Assim, temos

$$\begin{aligned} \frac{X}{x} = \frac{1}{1-z} \quad &\Rightarrow \quad X = \frac{x}{1-z} \\ \frac{Y}{y} = \frac{1}{1-z} \quad &\Rightarrow \quad Y = \frac{y}{1-z}, \end{aligned}$$

e portanto $Z = \rho(x, y, z) = \frac{x+iy}{1-z}$.

A inversa da projeção estereográfica também pode ser facilmente calculada, pois, dado $Z = X + iY \in \mathbb{C}$ podemos encontrar um ponto sobre \mathbb{S}^2 com coordenadas (x, y, z) , tais que

$$x = X(1 - z), \quad y = Y(1 - z),$$

disto temos que

$$x^2 + y^2 = (X^2 + Y^2)(1 - z)^2.$$

Mas, lembrando que $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, vemos que $x^2 + y^2 = 1 - z^2$, o que resulta na igualdade

$$1 - z^2 = (X^2 + Y^2)(1 - z)^2 \Rightarrow 1 + z = (X^2 + Y^2)(1 - z).$$

Desenvolvendo esta última igualdade, temos que

$$z = \frac{X^2 + Y^2 - 1}{X^2 + Y^2 + 1}.$$

E como $x = X(1 - z)$ e $y = Y(1 - z)$, concluímos que

$$x = \frac{2X}{X^2 + Y^2 + 1}, \quad y = \frac{2Y}{X^2 + Y^2 + 1},$$

e portanto

$$\rho^{-1}(X + iY) = \left(\frac{2X}{X^2 + Y^2 + 1}, \frac{2Y}{X^2 + Y^2 + 1}, \frac{X^2 + Y^2 - 1}{X^2 + Y^2 + 1} \right).$$

Exercício 49. Mostre que ρ e ρ^{-1} são, de fato mutuamente inversas. Mostre também que estas são contínuas, assim a esfera menos o polo norte é homeomorfa ao plano complexo.

Exercício 50. Mostre as seguintes propriedades da projeção estereográfica:

a) A projeção estereográfica mapeia circunferências sobre a esfera passando pelo polo norte em retas no plano complexo.

b) A projeção estereográfica mapeia circunferências sobre a esfera que não passam pelo polo norte em circunferências sobre o plano complexo.

c) A projeção estereográfica é conforme, isto é, preserva ângulos entre curvas (para isto você tem que calcular o jacobiano da projeção estereográfica e aplicar sobre os vetores velocidade de duas curvas que se intersectam sobre a esfera everificar que o ângulo entre estes vetores velocidade permanece inalterado após a transformação).

Exercício 51. Mostre que a aplicação

$$\tilde{\rho} : \mathbb{S}^2 \setminus (0, 0, -1) \rightarrow \mathbb{C} \\ (x, y, z) \mapsto \frac{x - iy}{1 + z},$$

pode ser vista como uma projeção estereográfica a partir do polo sul mas compatível com a orientação do plano complexo. Mostre que para $P = (x, y, z) \in \mathbb{S}^2$ temos $\tilde{\rho}(P) = \frac{1}{\rho(P)}$. Calcule a inversa de $\tilde{\rho}$.

Em vista do que foi exposto acima, temos que a esfera \mathbb{S}^2 pode ser coberta por dois abertos $U_S = \mathbb{S}^2 \setminus (0, 0, -1)$ e $U_N = \mathbb{S}^2 \setminus (0, 0, 1)$, cada um deles homeomorfo ao plano complexo \mathbb{C} e na intersecção entre estes dois abertos, a composta $\tilde{\rho} \circ \rho^{-1} : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ produz a inversão no plano complexo, isto é, $\tilde{\rho} \circ \rho^{-1}(z) = \frac{1}{z}$.

Ainda podemos dizer que a esfera é homeomorfa ao compactificado de Alexandroff do plano, denotado por $\mathbb{C}_\infty = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$, que consiste do espaço topológico construído a partir do plano em união com um ponto, chamado ponto no infinito e com os abertos dados por todos os abertos do plano mais os complementares de compactos no plano, que, por definição serão as vizinhanças abertas do ponto no infinito.

Vejamos que \mathbb{CP}^1 também possui as mesmas propriedades que \mathbb{S}^2 , isto é, pode ser coberta por dois abertos homeomorfos ao plano complexo e que na intersecção entre eles produz a inversão no plano complexo: Os abertos são

$$V_N = \{[z, w] \in \mathbb{CP}^1 | w \neq 0\}, \quad V_S = \{[z, w] \in \mathbb{CP}^1 | z \neq 0\},$$

onde $[z, w]$ é a classe de equivalência do par ordenado $(z, w) \in \mathbb{C}^2$ módulo a relação de equivalência que define o espaço projetivo complexo.

Exercício 52. Mostre que, de fato V_N e V_S são abertos.

Os homeomorfismos são, respectivamente

$$\psi_N : \begin{array}{ccc} V_N & \rightarrow & \mathbb{C} \\ [z, w] & \mapsto & \frac{z}{w} \end{array},$$

e

$$\psi_S : \begin{array}{ccc} V_S & \rightarrow & \mathbb{C} \\ [z, w] & \mapsto & \frac{w}{z} \end{array}.$$

E suas inversas são, respectivamente

$$\begin{aligned} \psi_N^{-1} : \mathbb{C} &\rightarrow V_N \\ z &\mapsto [z, 1] \end{aligned},$$

e

$$\begin{aligned} \psi_S^{-1} : \mathbb{C} &\rightarrow V_S \\ z &\mapsto [1, z] \end{aligned}.$$

Exercício 53. Verifique que, realmente, todas estas aplicações são contínuas e que ψ_N e ψ_N^{-1} e ψ_S e ψ_S^{-1} são mutuamente inversas. Mostre também que $\psi_S \circ \psi_N^{-1}(z) = \frac{1}{z}$.

Compondo estes homeomorfismos entre abertos de \mathbb{CP}^1 e o plano com as inversas das transformações estereográficas, teremos um homeomorfismo entre \mathbb{CP}^1 e \mathbb{S}^2 , conforme anunciado previamente. também podemos ver este homeomorfismo como um homeomorfismo com \mathbb{C}_∞ , dado por

$$(16) \quad \psi[z, w] = \begin{cases} \frac{z}{w}, & \text{se } w \neq 0 \\ \infty, & \text{se } w = 0 \end{cases}.$$

Exercício 54. Mostre que esta composição de homeomorfismos, para os pontos de V_N , associando a pontos de U_N resulta em

$$[z, w] \mapsto \zeta = \frac{z}{w} \mapsto \left(\frac{\zeta + \bar{\zeta}}{|\zeta|^2 + 1}, \frac{\zeta - \bar{\zeta}}{i(|\zeta|^2 + 1)}, \frac{|\zeta|^2 - 1}{|\zeta|^2 + 1} \right).$$

Para vermos qual a relação que existe com grupos, precisamos definir o que vem a ser uma transformação projetiva.

Definição 16. Uma transformação projetiva em $\mathbb{P}(\mathbb{V})$ associada a uma transformação linear $f : \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{V}$ é a aplicação $\mathbb{P}(f) : \mathbb{P}(\mathbb{V}) \rightarrow \mathbb{P}(\mathbb{V})$ que associa a cada classe $[v] \in \mathbb{P}(\mathbb{V})$, onde $v \in \mathbb{V}$, a classe $\mathbb{P}(f)[v] = [f(v)] \in \mathbb{P}(\mathbb{V})$.

Exercício 55. Mostre que, dada uma aplicação linear $f : \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{V}$, a aplicação projetiva está bem definida, isto é, se $v \sim w$, então $\mathbb{P}(f)[v] = \mathbb{P}(f)[w]$.

Exercício 56. Mostre as seguintes propriedades das transformações projetivas²:

- a) $\mathbb{P}(Id_{\mathbb{V}}) = Id_{\mathbb{P}(\mathbb{V})}$.
- b) $\mathbb{P}(f) \circ \mathbb{P}(g) = \mathbb{P}(f \circ g)$.
- c) $\mathbb{P}(f)^{-1} = \mathbb{P}(f^{-1})$.

Tendo em vista o apresentado acima, é facilmente verificável que as transformações projetivas associadas às transformações lineares inversíveis em um espaço vetorial \mathbb{V} (que formam o grupo $GL(\mathbb{V})$) formam um grupo de transformações projetivas, que denominaremos $PGL(\mathbb{V})$. Considere agora o grupo $GL(2, \mathbb{C})$ das transformações lineares em \mathbb{C}^2 . Então, a cada matriz

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in GL(2\mathbb{C}),$$

associamos a transformação projetiva

$$[z, w] \mapsto [az + bw, cz + dw].$$

Como \mathbb{CP}^1 é homeomorfo a \mathbb{S}^2 , esta transformação projetiva equivale a um homeomorfismo em \mathbb{S}^2 . Adicionalmente, a esta transformação projetiva, podemos associar uma transformação no plano complexo, por exemplo, se $[z, w] \in V_N$ então à transformação projetiva $[z, w] \mapsto [az + bw, cz + dw]$ associamos a transformação no plano complexo

$$(17) \quad \zeta \mapsto \frac{a\zeta + b}{c\zeta + w},$$

onde $\zeta = \psi_N([z, w]) = \frac{z}{w}$. As transformações no plano complexo definidas pela forma (17), constituem uma classe importante de funções de uma variável complexa e são chamadas transformações de Möbius.

²Em uma linguagem precisa, o que se mostra com este exercício é que a aplicação que associa a cada espaço vetorial \mathbb{V} o seu espaço projetivo correspondente, $\mathbb{P}(\mathbb{V})$ é um funtor covariante da categoria dos espaços vetoriais na categoria dos espaços projetivos

Exercício 57. Mostre que a composta de duas transformações de Möbius é uma transformação de Möbius e que os coeficientes da composta correspondem às entradas de matriz do produto das matrizes em $GL(2, \mathbb{C})$, que deram origem às duas transformações de Möbius originais.

Exercício 58. Mostre que as transformações de Möbius

$$\zeta \mapsto \frac{a\zeta + b}{c\zeta + w}$$

e

$$\zeta \mapsto \frac{ak\zeta + bk}{ck\zeta + wk}$$

com $k \neq 0$ são, de fato idênticas. Conclua, com isto, que sempre podemos escolher os coeficientes a, b, c e d de uma transformação de Möbius de forma que $ad - bc = 1$, o que nos dá o isomorfismo de grupos $PGL(2, \mathbb{C}) \cong PSL(2, \mathbb{C})$.

Exercício 59. Agora, especificando para as transformações do sub-grupo $PSU(2)$, mostre que estas transformações correspondem a rotações na esfera \mathbb{S}^2 .

Exercício 60. Determine as transformações de Möbius associadas às rotações $R_x(\theta)$, $R_y(\theta)$ e $R_z(\theta)$.

A relações entre as transformações projetivas e os grupos $SU(2)$ e $SO(3)$ são a base para a teoria dos spinores de Cartan [2, 6]. Os spinores são objetos matemáticos importantes na descrição das partículas físicas conhecidas como férmions, que são os constituintes elementares da matéria conhecida. Para mais detalhes sobre espaços projetivos e sua geometria, o leitor poderá consultar a referência [8].

4.3. A Fibração de Hopf. Como um último aspecto, apresentaremos a estrutura topológica do grupo $SU(2)$ como um exemplo de um objeto matemático, conhecido como fibrado principal. Para isto, vamos introduzir um novo conceito, o de ação de grupo.

Definição 17. Uma ação à esquerda de um grupo G sobre um conjunto X é uma aplicação

$$\begin{aligned} \alpha : G \times X &\rightarrow X \\ (g, x) &\mapsto \alpha_g(x) \end{aligned}$$

satisfazendo às seguintes condições:

- a) $\alpha_g(\alpha_h(x)) = \alpha_{gh}(x)$
- b) $\alpha_e(x) = x, \forall x \in X$.

Podemos também definir uma ação à direita.

Definição 18. Uma ação à direita de um grupo G sobre um conjunto X é uma aplicação

$$\begin{aligned} \alpha : X \times G &\rightarrow X \\ (x, g) &\mapsto \alpha_g(x) \end{aligned}$$

satisfazendo às seguintes condições:

- a) $\alpha_g(\alpha_h(x)) = \alpha_{hg}(x)$
- b) $\alpha_e(x) = x, \forall x \in X$.

Se um grupo for abeliano, as ações à direita e à esquerda coincidem.

Existem diferentes tipos de ações que recebem nomes especiais, e que valem a pena ser ressaltadas em nossa discussão.

Definição 19. Uma ação de um grupo G sobre um conjunto X (à esquerda ou à direita) é dita ser:

- a) **Fiel**, se $\alpha_g(x) = x, \forall x \in X \Rightarrow g = e$.
- b) **Livre**, se $\exists x \in X$, tal que $\alpha_g(x) = x \Rightarrow g = e$.
- c) **Transitiva**, se $\forall x, y \in X, \exists g \in G$ tal que $y = \alpha_g(x)$.

Pela definição acima, fica claro que toda ação livre é fiel.

Como exemplos de ações, podemos citar a ação do grupo aditivo dos reais sobre si mesmo através de translações, como

$$\alpha_t(s) = t + s.$$

É fácil ver que esta ação é livre e transitiva. Uma generalização deste exemplo são os espaços afins, que consistem de um conjunto \mathbb{A} com uma ação livre e transitiva do grupo aditivo de um espaço vetorial \mathbb{V} , com a ação dada também pela expressão $\alpha_v(p) = p + v$, para $p \in \mathbb{A}$ e $v \in \mathbb{V}$.

Outro exemplo relevante é a ação dos grupos lineares em espaços vetoriais; $\alpha_T(v) = T(v)$, onde $T \in GL(\mathbb{V})$ e $v \in \mathbb{V}$. Devemos também observar a ação de um grupo sobre si mesmo pela multiplicação à esquerda ou à direita:

$$L_g(h) = gh, \quad R_g(h) = hg, \quad \forall g, h \in G.$$

Temos ainda as ações adjuntas de um grupo de Lie linear sobre si mesmo e sobre sua álgebra de Lie, como foi visto no capítulo anterior para o caso de $SU(2)$:

$$Ad_g(h) = ghg^{-1}, \quad Ad_g(X) = gXg^{-1}, \quad \forall g, h \in G, \quad \forall X \in \mathfrak{g}.$$

Exercício 61. Analise cada uma destas ações se é fiel, livre ou transitiva. Dê exemplos de uma ação que seja fiel e não seja livre, de uma ação que seja livre e não seja transitiva e de uma transitiva que não seja fiel.

Definição 20. Dada uma ação de um grupo G sobre um conjunto X (à esquerda ou à direita), a órbita de um elemento $x \in X$ é o conjunto

$$\mathcal{O}_x = \{\alpha_g(x) | g \in G\}.$$

Desta definição fica claro que o grupo age transitivamente na órbita de cada elemento e que uma ação é transitiva se, e somente se o conjunto X consiste em uma única órbita. Também uma ação de grupo induz uma relação de equivalência no conjunto X ,

$$x \sim y \Leftrightarrow \exists g \in G \text{ tal que } y = \alpha_g(x),$$

e está claro que as classes de equivalência coincidem com as órbitas determinadas pela ação de G em X . Podemos, então falar no quociente $X/G = X/\sim$, que é, simplesmente o conjunto de todas as órbitas determinadas pela ação.

Vamos analisar agora o que ocorre com o grupo $SU(2)$. Como foi visto no início deste capítulo, o grupo $SU(2)$ é isomorfo ao grupo dos quatérnions unitários,

$$SU(2) \cong \{z + jw \in \mathbb{H} | |z|^2 + |w|^2 = 1\}.$$

Note que, se multiplicarmos um quatérnion unitário por um número complexo de módulo unitário, portanto um elemento do grupo $U(1)$, obteremos um outro quatérnion unitário, isto é, se $u = z + jw$, com $|z|^2 + |w|^2 = 1$ e

$$ue^{i\varphi} = ze^{i\varphi} + jwe^{i\varphi}, \quad \varphi \in \mathbb{R},$$

então

$$\|ue^{i\varphi}\|^2 = |ze^{i\varphi}|^2 + |we^{i\varphi}|^2 = |z|^2 + |w|^2 = 1.$$

Temos assim uma ação à direita³ do grupo $U(1)$ sobre $SU(2)$. As órbitas dos pontos de $SU(2)$ por esta ação são homeomorfas à circunferência \mathbb{S}^1 , sendo este homeomorfismo dado de maneira natural pela aplicação

$$\begin{aligned} \omega : \mathcal{O}_u \subseteq SU(2) &\rightarrow \mathbb{S}^1 \subseteq \mathbb{C} \\ ue^{i\varphi} &\mapsto e^{i\varphi}. \end{aligned}$$

Proposição 5. A ação do grupo $U(1)$ sobre o grupo $SU(2)$, dada por $u \mapsto ue^{i\varphi}$ é livre.

³Como o grupo é abeliano, na verdade não importa se é à esquerda ou à direita. Apenas adotaremos à direita pois em um contexto mais geral as ações consideradas serão sempre ações à direita

Demonstração: Suponha

$$u = ue^{i\varphi}$$

como $u \in SU(2)$ e $SU(2)$ é grupo, existe $u^{-1} \in SU(2)$. Multiplicando-se à esquerda a igualdade acima por u^{-1} temos

$$I = I \cdot e^{i\varphi},$$

onde I é a identidade em $SU(2)$. De onde concluímos que $e^{i\varphi} = 1$ o que equivale dizer que a ação é livre. \blacksquare

Considerando que $\mathbb{H} \cong \mathbb{C}^2$ como espaço vetorial e retomando o homeomorfismo ψ existente entre \mathbb{CP}^1 e $\mathbb{C}_\infty \cong \mathbb{S}^2$ dado pela expressão (16) podemos, finalmente definir uma projeção

$$\begin{aligned} \pi : \quad SU(2) &\rightarrow \mathbb{C}_\infty \cong \mathbb{S}^2 \\ z + jw &\mapsto \psi[z, w] \end{aligned}.$$

Esta aplicação é claramente sobrejetiva.

Proposição 6. *As imagens por π de dois elementos de $SU(2)$ coincidem se, e somente se, estes dois elementos estiverem na mesma órbita pela ação de $U(1)$.*

Demonstração: Suponha que $\pi(z + jw) = \pi(z' + jw')$. Se $w = 0$, então

$$\pi(z + jw) = \pi(z' + jw') = \infty,$$

logo $w' = 0$. E como $|z|^2 + |w|^2 = 1$ e $|z'|^2 + |w'|^2 = 1$, temos que $|z|^2 = |z'|^2 = 1$ e portanto a razão entre z e z' é um elemento de $U(1)$. Se $w \neq 0$, então, forçosamente $w' \neq 0$, senão teríamos $\pi(z' + jw') = \infty$ e $\pi(z + jw) \neq \infty$, assim, temos

$$\frac{z}{w} = \frac{z'}{w'} \Rightarrow zw' = z'w.$$

Multiplicando-se $|z|^2 + |w|^2 = 1$ por $|w'|^2$, teremos

$$|zw'|^2 + |ww'|^2 = |w'|^2.$$

Utilizando a igualdade obtida acima, finalmente temos

$$|z'w|^2 + |ww'|^2 = |w'|^2 \Rightarrow (|z'|^2 + |w'|^2)|w|^2 = |w'|^2 \Rightarrow |w|^2 = |w'|^2.$$

O que nos leva a concluir que $|w| = |w'|$ e que, portanto a razão entre w e w' é um elemento de $U(1)$. Com um raciocínio análogo, chegamos à conclusão que $|z| = |z'|$. E como $\frac{z}{z'} = \frac{w}{w'}$ verificamos que o elemento de $U(1)$ é o mesmo nos dois casos e portanto $z' + jw' = (z + jw)e^{i\varphi}$.

A recíproca é imediata, pois se $z' + jw' = (z + jw)e^{i\varphi}$ temos que

$$\frac{z}{w} = \frac{ze^{i\varphi}}{we^{i\varphi}} = \frac{z'}{w'},$$

se $w \neq 0$. E se $w = 0$, então $w' = we^{i\varphi} = 0$ e portanto $\pi(z + jw) = \pi(z' + jw') = \infty$. \blacksquare

Novamente, como π é uma aplicação contínua de um espaço compacto em um Haussdorff, então ela é aberta. E também, como π é constante nas órbitas pela ação de $U(1)$ então ela induz uma aplicação bijetiva, contínua e aberta de $SU(2)/U(1)$ em \mathbb{S}^2 (levando-se em consideração a topologia quociente em $SU(2)/U(1)$, isto é, a menor topologia que torna a projeção canônica contínua). Logo, o espaço das órbitas de $U(1)$ em $SU(2)$ é homeomorfo à esfera bidimensional.

Exercício 62. *Mostre que π composto com a inversa da projeção estereográfica produz a aplicação*

$$\begin{aligned} \pi : \quad SU(2) \subseteq \mathbb{H} &\rightarrow \mathbb{S}^2 \\ (x_1 + ix_2) + j(x_3 + ix_4) &\mapsto (2(x_1x_3 + x_2x_4), 2(x_2x_3 - x_1x_4), x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 - x_4^2) \end{aligned}.$$

A aplicação π é denominada fibração de Hopf e possui importantes aplicações na geometria diferencial como um exemplo simples de um objeto matemático conhecido como fibrado principal [4, 13]. Para mais detalhes sobre a geometria da fibração de Hopf aconselhamos a leitura da referência [10]. Para aplicações da fibração de Hopf à mecânica clássica, o leitor poderá consultar as referências [1, 11]. Também a fibração de Hopf é útil para a modelagem de monopólos magnéticos [4, 13] e, atualmente, até para modelar a computação quântica [12]. Esperamos que este pequeno texto possa servir de uma porta de entrada para

este fascinante campo de estudos em matemática, que envolve diversas áreas, como álgebra, geometria, topologia e análise e também explicita relações inusitadas e interessantes.

REFERÊNCIAS

- [1] V.I. Arnol'd: “Mathematical Methods of Classical Mechanics”, Springer-Verlag (1978).
- [2] E. Cartan: “The Theory of spinors”, Dover (1966).
- [3] G.S. Chirikjian and A.B. Kyatkin: “Engineering Applications of Noncommutative Harmonic Analysis”, CRC Press (2001)
- [4] T. Frankel: “The Geometry of Physics, An Introduction”, Cambridge (1997).
- [5] B.C. Hall: “Lie Groups, Lie Algebras, and Representations. an Elementary Introduction”, Springer-Verlag (2004).
- [6] J. Hladik: “Spinors in Physics”, Springer-Verlag (1999)
- [7] K. Jänich: “Álgebra Linear”, LTC Editora (1998)
- [8] A.I. Kostrikin and Yu.I. Manin: “Linear algebra and Geometry”, Gordon and Breach (1989).
- [9] E.L. Lima: “Álgebra Linear”, Coleção Matemática Universitária, SBM (1995)
- [10] D.W. Lyons: “An Elementary Introduction to the Hopf Fibration”, Mathematics Magazine, Vol. 76, n.2 (2003) 87-98.
- [11] J.E. Marsden and T.S. Ratiu: “Introduction to Mechanics and Symmetry”, Springer-Verlag (1999)
- [12] R. Mosseri and R. Dandoloff: “Geometry of Entangled States, Bloch Spheres and Hopf Fibration”, J. Phys. A: Math. Gen. 34 (2001) 10243-10252.
- [13] M. Nakahara: “Geometry, Topology and Physics”, Adam Hilger (1990)
- [14] W. Rossmann: “Lie Groups: An Introduction Through Linear Groups”, Oxford University Press (2002)
- [15] D.H. Sattinger e O.L. Weaver: “Lie Groups and Algebras with Applications to Physics, Geometry and Mechanics”, Springer-Verlag (1993).
- [16] B. Simon: “Representations of Finite and Compact Groups”, AMS (1996).
- [17] H. Weyl: “The Theory of Groups and Quantum Mechanics”, Dover (1950).

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA, DEP. DE MATEMÁTICA, CEP:88 040-900, FLORIANÓPOLIS, SC.