

# Estudo sobre Oscilações

Ranier, Menote Lemes Silva -150020864\*  
IF-UnB/Laboratório de Mecânica Grupo:4

Miguel José - 150018622,† Rafael Barros Passaglia- 150020457,‡ and Leandro Rocha-150135319§  
(Data: 12 de Maio de 2016)

Neste experimento foi estudado o movimento executado por um pêndulo em oscilação a baixas amplitudes do qual três procedimentos foram feitos: para o pêndulo simples; para o pêndulo físico (com uma massa na extremidade e outra com posição variável); e por fim para um pêndulo que consistia de uma placa irregular. Esses procedimentos tiveram por finalidade comparar as previsões teóricas para os períodos de oscilação em função dos momentos de inércia de cada um destes com os dados coletados.

## INTRODUÇÃO

Na física, o estudo de oscilações é uma área com uma enorme diversidade de aplicações. Esta abrange desde a geração de ondas eletromagnéticas por oscilações de cargas microscópicas em antenas, à descrição da órbita de buracos negros em eminente colisão e a suposta consequente geração de ondas gravitacionais. Desta forma, o entendimento e o domínio das técnicas da física de oscilações é de suma importância para o estudo da fenomenologia do mundo.

Uma vez de que se trata de um dos casos mais simples que ocorrem na natureza, o movimento pendular foi o principal assunto do experimento realizado.

Como citado anteriormente, o experimento tratou de três casos de movimento pendular: o pêndulo simples; o pêndulo físico com duas massas (uma fixa e outra de posição variável); e por fim, um pêndulo físico com o formato de uma placa irregular, com o objetivo de verificar as relações teóricas existentes entre seus momentos de inércia e seus períodos. No caso da placa, o experimento foi feito apenas uma vez, e primeiramente, foi calculado o momento de inércia através de aproximações para assim estimar o período e comparar com os dados. Para um pêndulo simples, desprezando a massa da barra, a equação diferencial que descreve o sistema é:

$$\frac{d^2\theta}{dx^2} = \frac{g\theta}{L}$$

Eq.01

Onde  $g$  é a aceleração da gravidade,  $L$  a distância, fixa, da massa ao eixo do pêndulo. Note que essa equação é uma aproximação, uma vez que ao invés de escrever  $\sin(\theta)$  foi utilizado apenas  $\theta$ . Essa aproximação é corretamente justificada ao se expandir a função seno em sua série de MacLaurin e considerar apenas o termo de primeira ordem, quando o ângulo é muito pequeno. Desse modo, nos experimentos realizados tomou-se o cuidado de manter as amplitudes (ângulos de oscilação) baixas para minimizar o erro. Resolvendo esta equação,

encontra-se  $\theta$  em função do tempo e consequentemente o período de oscilação dado por :

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$$

Eq.02

Para pequenas oscilações

De modo mais geral, podemos dizer que o torque total de um pêndulo com  $N$  massas pontuais fixas em uma barra de massa  $M$ , é:

$$\tau = I \frac{d^2\theta}{dx^2} = \sum_{k=1}^N m_k \cdot r_k \cdot \sin(\theta) = MR\theta$$

$$I \frac{d^2\theta}{dx^2} = MR\theta$$

Eq.03

Onde o termo  $I$  é o momento de inércia total,  $R$  a distância do centro de massa do sistema ao eixo de oscilação e  $M$  a sua massa total. Deve-se notar que na equação anterior ainda se está trabalhando com oscilações de pequena amplitude. Assim, a equação que fornece o período se reduz a:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{MRg}}$$

Eq.04

## METODOLOGIA

Primeiramente, foram obtidos os valores das grandezas necessárias para a realização do experimento (dimensão e peso das massas, dimensão da barra e massa desta). Em seguida, foram anexados ao pêndulo e seu suporte imãs e detectores que captavam a corrente elétrica

gerada pelo movimento destes enquanto oscilavam junto ao pêndulo, enviando o sinal elétrico a um software que registrava essas oscilações. Após os instrumentos estarem devidamente calibrados, foram feitas duas séries de medições, uma para o pêndulo "simples" e outra para o físico. Estas séries foram feitas alterando a posição da massa (uma das massas, no caso do pêndulo físico), e medindo o período para cada configuração. Desta forma, após plotar os dados em tabelas utilizando o software qtiplot, foi possível gerar padrões de dispersão que foram posteriormente comparados com as curvas geradas pela previsão teórica. No caso do pêndulo com duas massas, os parâmetros utilizados na teoria - juntamente com os dados colhidos, foram utilizados para calcular o valor da aceleração gravitacional local, e fornecendo resultados consideráveis.

Enfim, para a última parte desta prática, foi primeiramente feita a medição do momento de inércia de uma placa de formato irregular e de densidade homogênea. Para tanto, seu contorno foi feito em cartolina e subsequentemente, após a determinação da posição do centro de massa com o auxílio de torque pela ação da gravidade na placa enquanto era pendurada em diferentes pontos, e sua área foi aproximada por diversos setores circulares de raios diferentes. Estas divisões foram posteriormente utilizadas no cálculo do momento de inércia da placa (obtido indiretamente via densidade e área uma vez que sua massa constante não alterará de fato no cálculo) que, por sua vez, foi usado para estimar o período de oscilação da placa. Finalmente, com os resultados obtidos, fora medido o período e este comparado com a previsão.

## PROCEDIMENTO

### Instrumentos de medida

Para a realização deste experimento, o pêndulo foi preso a um dispositivo gerador de sinais elétricos, sendo este por sua vez ligado ao computador. Levando em consideração as limitações na precisão do aparelho utilizado, i.e., sua alta imprecisão a partir de medidas maiores do que 45 graus, o software utilizado (DrDrag) foi devidamente configurado para registrar oscilações com amplitude entre 45 e -45 graus em um intervalo de tempo entre 50 miliseg e 10 seg. Através do software, as variações na posição angular do pêndulo com o decorrer do tempo foram registradas em gráficos, possibilitando assim o cálculo do período de oscilação em cada caso.

### Pêndulo Simples

Nesta parte do experimento, foi realizada uma série de 17 medições do período do pêndulo simples. Em cada

medição o cilindro foi posicionado a uma distância específica do eixo de oscilação, começando em 4 centímetros e aumentando a princípio de 6 em 6 até que fosse alcançado o comprimento total da barra.

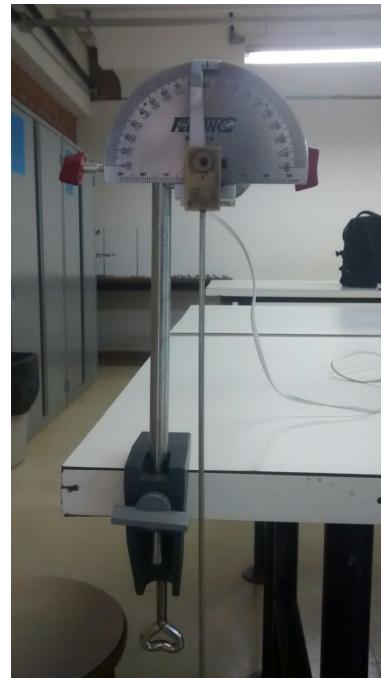


Imagen 01

### Pêndulo Com Duas Massas

Para o pêndulo com duas massas o processo foi semelhante. Neste caso, no entanto, enquanto a posição de uma das massas variava de 6 cm em cada medição, a outra mantinha-se fixa na extremidade da barra.

### Cálculo do Momento da Placa Metálica(Prof. Junio)

Nesta etapa, foi fornecida pelo professor uma placa metálica de formato irregular, o objetivo foi calcular manualmente seu momento de inércia em relação a um eixo deslocado de 8 cm de seu centro de massa, e com isso, fazer uma previsão de seu período de oscilação para depois comparar com o valor medido. Para o cálculo foi desenhado o contorno da placa em cartolina e adotou-se um método que consistiu em dividi-lo em 7 triângulos, assim após a determinação das áreas e posição dos baricentros de cada triângulo, foi feita uma aproximação para o valor do momento de inércia da placa em função da densidade da mesma.

## ANÁLISE DE DADOS

Após a aplicação da série de medidas fora feita a montagem de gráficos, estes por sua vez permitirão comparar os dados coletados com as previsões teóricas e verificar a validade de uma teoria sob as circunstâncias dos experimentos.

### Pêndulo Simples(uma massa)

Este Pêndulo apresentava as seguintes características:

- Cilindro de raio igual a  $r = 1.9\text{cm}$  e altura  $h = 3.8\text{cm}$ ;
- Massa do Cilindro igual a  $m_c = 343,4\text{g}$
- Comprimento(distância do eixo de rotação até a outra extremidade) da barra igual a  $L = 90\text{cm}$ .
- A massa da barra é igual a  $m_b = 36,5\text{g}$

Foram realizadas cerca de 17 medidas, isto é, a posição da massa esteve em 17 posições diferentes ao longo da barra. Em cada medida a amplitude máxima média(uma vez que há resistência do ar) foi de aproximadamente  $15^\circ$ . Abaixo é apresentado o gráfico que relaciona o período de oscilação do pêndulo com a posição da massa:

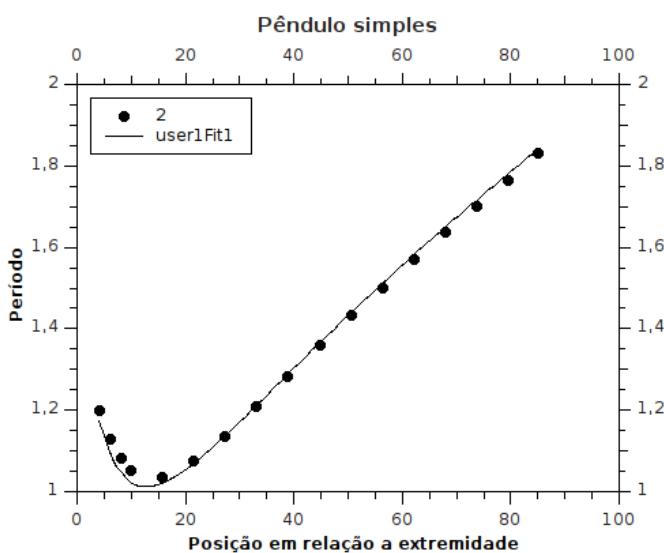


Gráfico 01

Tabela 01

Como pode ser visto no gráfico acima, comparamos a distribuição dos dados com o modelo teórico mais geral(Eq. 04) o que permitiu traçar a curva apresentada

Tabela I. Pêndulo simples

Distância	Período
4 cm	1.201
6 cm	1.129
8 cm	1.083
9.8 cm	1.53
15.6 cm	1.36
21.4 cm	1.76
27.2 cm	1.138
33 cm	1.211
38.8 cm	1.285
44.6 cm	1.362
50.4 cm	1.436
56.2 cm	1.503
62 cm	1.573
67.8 cm	1.639
73.6 cm	1.702
79.4 cm	1.767
84.8 cm	1.832

no gráfico. Para o cálculo do momento de inércia não foi desconsiderado os efeitos da própria barra, assim como para o centro de massa do sistema. Dessa forma o período torna-se a seguinte função:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{\frac{(3r^2+h^2)m_c}{12} + m_c x^2 + \frac{m_b L^2}{3}}{(m_c x + m_b \frac{L}{2})g}}$$

Eq. 05

onde  $x$  é a posição do centro de massa do cilindro em relação ao eixo de rotação. Para calcular o momento de inércia total, foi utilizado o teorema dos eixos paralelos, o qual garante que o momento de inércia de um sistema em relação ao ponto  $O'$  qualquer é igual a soma dos momentos de inércia do centro de massa do sistema em relação ao  $O'$  e do sistema em relação ao centro de massa.

Assim, utilizando o software QtiPlot, e a configuração de Fitwizard, foi possível utilizar essa equação para determinar o valor da gravidade local. Isso foi feito determinando o valor dos parâmetros como a massa do cilindro e o comprimento de  $L$ , para que o programa pudesse fazer encontrar o valor da gravidade que melhor ajustava aos resultados experimentais, isto é  $g$ (gravidade) como parâmetro livre a ser determinado. O valor determinado foi de  $g = 9,7\text{m.s}^{-2}$  sendo as outras casas decimais desprezadas uma vez que são muito menores que a precisão.

É interessante observar que quanto mais distante a massa está do eixo de rotação o período passa a se comportar como a expressão da Eq.02, isto é, o período passa a crescer com a raiz quadrada da posição da massa. Isso fica bem visível no gráfico abaixo quando os dados cujas medidas foram feitas com posições maiores se ajustam melhor ao gráfico idealizado:

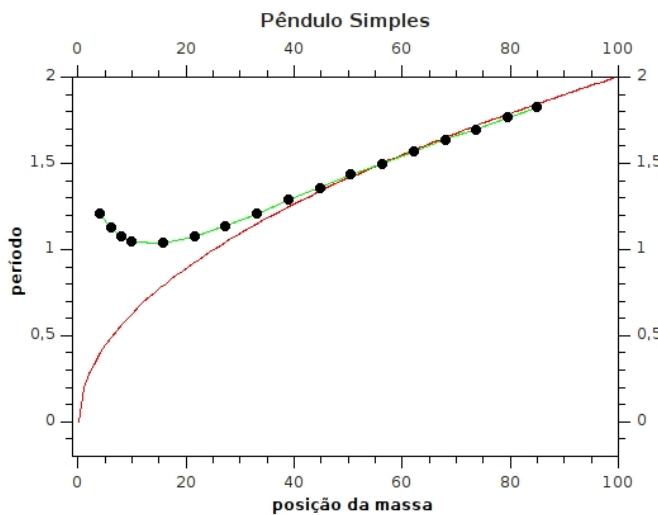


Gráfico 02

O gráfico acima compara os dados coletados com a curva vermelha que apresenta o comportamento do período considerando a massa pontual.

Também é notável que os pontos mais próximos do eixo de rotação não são previstos pelo modelo simplificado (quando se desconsidera a massa da barra e considera a massa pontual). Uma justificativa utilizada para explicar essa discordância é o fato de que quanto mais próximo a massa está do eixo de rotação menor é o torque causado pelo seu peso, uma vez que o braço de giraçāo diminui, e dessa forma a massa da barra passa a ter grandes influências no período de oscilação do sistema.

Desta maneira, vemos que a Eq.05 decreve de maneira muito precisa o sistema dinâmico, quando nos limitamos a pequenas oscilações.

### Pêndulo (Com Duas Massas)

Este Pêndulo apresentava as seguintes características:

- os dois Cilindros possuem raio igual a  $r = 1.9\text{cm}$  e altura  $h = 3.8\text{cm}$ ;
- Massa do Cilindro igual a  $m_c = 343,4\text{g}$ ;
- Um dos cilindros foi mantido na mesma posição em todas as medidas realizadas igual a  $L = 90\text{cm}$ ;
- a massa da barra é igual a  $m_b = 36,5\text{g}$
- O segundo cilindro varia sua posição a cada nova medida.

É relevante observar que quando dizemos posição do cilindro nos referimos a posição do seu centro de massa, que, por possuir uma densidade constante e simetria no formato do objeto, está exatamente no centro geométrico do cilindro.

foram realizadas cerca de 11 medidas, isto é, a posição de uma das massas esteve em 11 posições diferentes ao longo da barra. Em cada medida a amplitude máxima média (uma vez que há resistência do ar) foi de aproximadamente  $10^\circ$ . As amplitudes de oscilação foram diminuídas em relação ao outro pêndulo pois quando se há duas massas é facilmente criado oscilações secundárias resultantes da curvatura (ao dobrá-la) da barra, interfirindo nas medidas. Abaixo é apresentado o gráfico que relaciona o período de oscilação do pêndulo com a posição da massa:

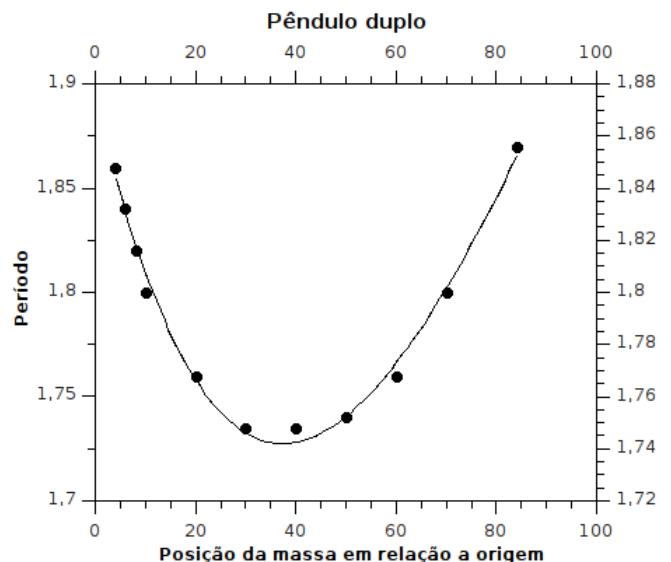


Gráfico 03

Como pode ser visto no gráfico acima, novamente comparamos a distribuição dos dados com o modelo teórico mais geral (Eq. 04) o que permitiu traçar a curva apresentada no gráfico.

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{\frac{(3r^2+h^2)m_c}{6} + m_cL^2 + m_cx^2 + \frac{m_bL^2}{3}}{(m_cL + m_cx + m_b\frac{L}{2})g}}$$

E.q 06

Esse sistema foi utilizado para determinar a gravidade local.

Pelo mesmo procedimento utilizado no pêndulo simples, anteriormente descrito, o valor determinado foi de  $g = 9,8m.s^{-2}$  sendo as outras casas decimais desprezadas uma vez que são muito menores que a precisão dos instrumentos. Assim como encontrado com o pêndulo simples, considerando que a gravidade ao nível do mar é de  $9,806m.s^{-2}$ , está medida sugere ser aceitável. E sua diminuição é esperada, uma vez que o local onde foi medida está cerca de 1 a 2 quilômetros de altura em relação ao nível do mar.

Apesar da forma que se distribuiram os dados ser obviamente curva, deve ser observado que diferentemente no pêndulo simples, onde se obteve uma variação entre o menor e maior valor de 0,8 segundos, no pêndulo duplo essa variação é muito menor, de forma que a diferença entre o menor e maior período foi de aproximadamente 0,18 segundos. Tal diferença foi tão pequena que foi preciso alterar a escala do gráfico para poder visualizar a curva. Se tivesse utilizado a mesma escala que o gráfico 01 seria visto uma reta(aproximadamente). Isso pode ser observado melhor comparando a tabela 01 com a tabela abaixo:

Tabela II. Pêndulo duplo

Distância	Período
4 cm	1.86
6 cm	1.84
8 cm	1.82
10 cm	1.8
20 cm	1.76
30 cm	1.735
40 cm	1.735
50 cm	1.74
60 cm	1.76
70 cm	1.8
80 cm	1.87

Tabela 02

Isso nos leva a observar outra característica desse sistema dinâmico: o período varia pouco estando uma das massas em uma posição ou em outra.

#### Placa Metálica

A placa metálica utilizada apresentava seguintes características:

- Formato irregular;
- distribuição de matéria regular(densidade constante);
- espessura constante;

- A área da placa é aproximadamente igual a  $2160cm^2$ .

Abaixo está uma imagem da placa metálica:



Imagen 02

Para encontrar o centro de massa, recorremos à técnica de pendurar a placa em pontos diferentes. Na primeira vez, a medida indica que o centro de massa da placa está sob uma certa reta. Na segunda vez, ela gera uma outra reta na placa que cruza a primeira. Dessa forma o centro de massa se encontra na intersecção das duas retas.

Para a divisão da placa, cálculo das áreas e determinação das distâncias entre os baricentros de cada triângulo e o centro de massa da placa como descrito acima, foi utilizado o software GeoGebra, os resultados se encontram abaixo.

Área ( $cm^2$ )	Dist. Bar-CM (cm)
235	16,3
134	19,4
367	10,9
421	25,5
42,3	19,2
120	29,9
12,9	33,5

Tabela III. Caption

Após a obtenção destes valores, para fins de simpli-

ficação os momentos de inércia foram calculados como se toda a massa de cada triângulo estivesse em seu baricentro. Sendo assim:

$$\frac{M_i}{M} = \frac{A_i}{A} \rightarrow I_i = \sigma A_i R_i^2$$

Onde  $M$  e  $A$  são a área e massa da placa,  $M_i$  e  $A_i$  são a área e massa do  $i$ -ésimo triângulo,  $\sigma$  a densidade superficial da placa e  $R_i$  a distância entre o baricentro do  $i$ -ésimo triângulo e o CM da placa. Os resultados foram deixados em função da densidade e da área relativa de cada triângulo em relação a placa. Com estes valores obtidos, o momento de inércia da placa é simplesmente

$$I_P = \sum_{i=1}^7 I_i$$

Após a obtenção deste valor, foi calculado o período de oscilação do pêndulo através da Eq. 04, com uma ligeira alteração considerando que a oscilação da placa se deu em torno de um ponto deslocado de 8,2 cm do centro de massa, assim pelo Teorema dos Eixos Paralelos,  $I = I_P + M8,2^2$ . Sendo  $g = 980\text{cm/s}^2$  e  $l = 8,2$  o valor obtido para o período foi, em segundos.

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{MRg}} = 1,447\text{seg}$$

Que difere em um décimo do resultado medido de 1,576 seg.

## CONCLUSÃO

Ao fim de tudo percebe-se que os sistemas oscilatórios práticos costumam ser bem mais complexos do que os

geralmente estudados. Pequenas considerações feitas no estudo de oscilações para tornar o problema analisado mais simples, como por exemplo considerar que a haste que sustenta o pêndulo não tenha massa, fazem muita diferença para os cálculos dos períodos. Algumas observações que podem ser feitas em relação aos dados, mostram que para o pêndulo duplo, alcançou-se um valor bem mais próximo do esperado para a constante gravitacional do que no simples. Provavelmente se deve ao fato de o grupo ter se atentado mais a fazer oscilações com ângulos pequenos. Outra possibilidade, reside no fato de o pêndulo simples na realidade ser um duplo por causa da presença da massa da barra (por isso percebe-se uma irregularidade na curva do gráfico período por posição da massa), como no duplo há o dobro da massa, é mais fácil desprezar as influências da barra. No cálculo do momento de inércia da placa, não se conseguiram dados muito precisos. As considerações de densidade regular aumentam bastante o erro considerando o método que foi usado para se calcular seu centro de massa, dividindo em triângulos. Utilizando métodos com mais precisão (utilizando um software para calcular as distâncias contando pixels, ou usando uma câmera melhor posicionada/com maior definição, por exemplo) ajudaria a diminuir o erro em relação ao modo como a foto da placa foi tirada no momento da divisão em pedaços. De toda forma, apesar de o erro percentual ser alto, os valores se encontram todos razoavelmente dentro do esperado, acrescenta-se que a atenção em todo o procedimento com relação às pequenas coisas que diminuem os cálculos é essencial.