

Equações de Conservação



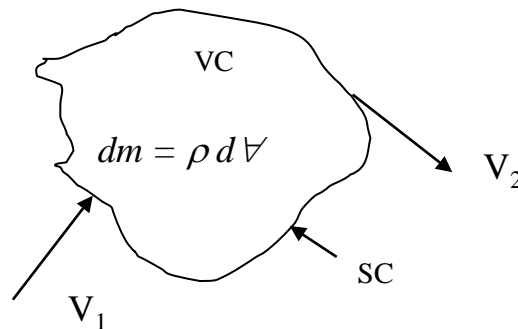
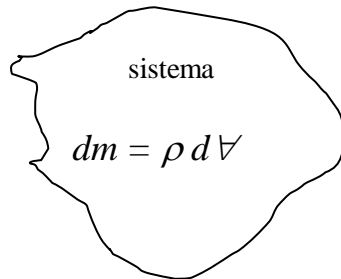
- Teorema de Transporte de Reynolds
- Equação de Conservação de Massa (continuidade)
- Equação de Conservação de Quantidade de Movimento Linear (2ª Lei de Newton)
 - Equação de Navier-Stokes
- Equação de Energia Mecânica
- Equação de Conservação de Quantidade de Movimento Angular

Teorema de Transporte de Reynolds



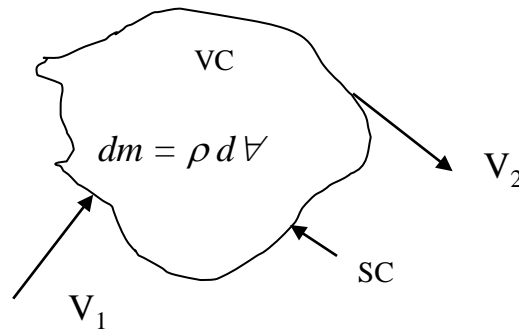
- permite transformar as equações para sistema (massa fixa) para volumes de controle (volume fixo)

Variação total com o tempo de uma grandeza de um sistema = taxa de variação da grandeza específica no VC + fluxo líquido saindo grandeza específica através da SC



- ϕ = grandeza específica ; ρ = massa específica ;
- dV = volume infinitesimal
- dm = massa infinitesimal ; $dm = \rho dV$;
- $d\Phi$ = grandeza no volume infinitesimal ; $d\Phi = \phi dm = \phi \rho dV$

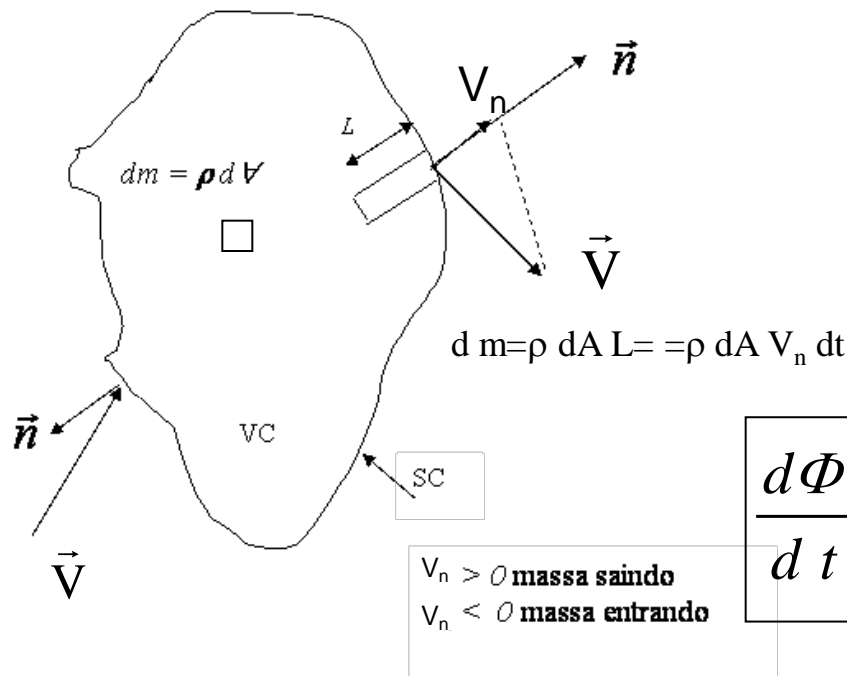
■ taxa de acumulação de uma grandeza específica



$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{VC} \phi dm = \frac{\partial}{\partial t} \int_{VC} \phi \rho dV$$

■ quantidade da grandeza que cruza a superfície:

$$\phi dm = \phi \rho dA L = \phi \rho dA V_n dt = \phi \rho \vec{V} \cdot \vec{n} dA$$



fluxo líquido de massa cruzando a SC

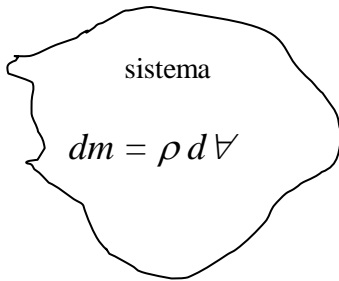
$$\int_{SC} \phi \rho \vec{V} \cdot \vec{n} dA$$

$$\left. \frac{d\Phi}{dt} \right|_{\text{sistema}} = \frac{\partial}{\partial t} \int_{VC} \phi \rho dV + \int_{SC} \phi \rho \vec{V} \cdot \vec{n} dA$$

Equação de Conservação de Massa



■ Sistema:



$$\frac{d}{d t} \int_{\forall_{\text{sistema}}} \rho d\forall = 0 \Rightarrow \frac{d m}{d t} = 0$$

■ Volume de controle:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{VC} \rho d\forall + \int_{SC} \rho \vec{V} \bullet \vec{n} dA = 0$$

A

Variação com o tempo da
da massa do volume de controle

B

Fluxo líquido de massa
através da superfície de controle



Aplicando o teorema de Leibnitz

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{a(t)}^{b(t)} f(x) dx = \int_{a(t)}^{b(t)} \frac{\partial}{\partial t} f(x) dx + \frac{db}{dt} f(b) - \frac{da}{dt} f(a)$$

ao termo A , temos

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{V.C} \rho dV = \int_{V.C} \frac{\partial}{\partial t} \rho dV$$

Aplicando o teorema de divergência de Gauss ao termo B, temos

$$\int_{SC} \rho \vec{V} \bullet \vec{n} dA = \int_{VC} \text{div} (\rho \vec{V}) dV$$

Somando A com B

$$\int_{VC} \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div} (\rho \vec{V}) \right] dV = 0$$

Queremos que esta equação seja válida para qualquer volume, portanto, dividindo por dV e aplicando o limite dV tende a zero, obtemos a equação de conservação de massa diferencial, válida para qualquer ponto



$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \vec{V}) = 0$$

(I)

Variação da massa
com o tempo por
unidade de volume

Fluxo líquido de massa
por unidade de volume

A equação acima pode ser rescrita sabendo que $\mathbf{div}(\rho \vec{V}) = \vec{\nabla} \bullet (\rho \vec{V}) = \rho \vec{\nabla} \bullet \vec{V} + \vec{V} \bullet \vec{\nabla} \rho$

como

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{V} \bullet \vec{\nabla} \rho + \rho \vec{\nabla} \bullet \vec{V} = 0$$

Definido o operador : derivada material, ou total ou substantiva $\frac{D A}{D t} = \frac{\partial A}{\partial t} + \vec{V} \bullet \vec{\nabla} A$

variação local variação
temporal convectiva

temos

$$\frac{D \rho}{D t} + \rho \vec{\nabla} \bullet \vec{V} = 0$$

(II)

Equação de Conservação de Massa ou



Continuidade

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathbf{div} (\rho \vec{V}) = 0$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial (\rho u_i)}{\partial x_i} = 0$$

ou

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \mathbf{div} (\vec{V}) = 0$$

Casos Particulares

1. Regime Permanente: $\mathbf{div} (\rho \vec{V}) = 0$

2. Incompressível: $\mathbf{div} (\vec{V}) = 0$

■ Coordenadas cartesianas: $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \left[\frac{\partial}{\partial x} (\rho u) + \frac{\partial}{\partial y} (\rho v) + \frac{\partial}{\partial z} (\rho w) \right] = 0$

■ Coordenadas curvilíneas:

$$0 = \frac{\partial \rho}{\partial t} + e_i \frac{\partial}{\partial x_i} \bullet e_j (\rho u_j) = \frac{\partial \rho}{\partial t} + e_i \bullet e_j \frac{\partial (\rho u_j)}{\partial x_i} + (\rho u_j) e_i \bullet \frac{\partial e_j}{\partial x_i} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial (\rho u_i)}{\partial x_i} + (\rho u_j) e_i \bullet \frac{\partial e_j}{\partial x_i}$$

■ Coordenadas cilíndricas: $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \left[\frac{\partial}{r \partial r} (r \rho u_r) + \frac{\partial}{r \partial \theta} (\rho u_\theta) + \frac{\partial}{\partial z} (\rho u_z) \right] = 0$

Equação de Conservação de Quantidade de Movimento Linear (2a Lei de Newton)



$$\sum \vec{F}_{ext} = m\vec{a} \quad \Rightarrow \quad \sum d\forall \vec{f}_{ext} = \rho d\forall \frac{D \vec{V}}{Dt} \quad \Rightarrow \quad \vec{f}_S + \vec{f}_C = \rho \frac{D \vec{V}}{Dt}$$

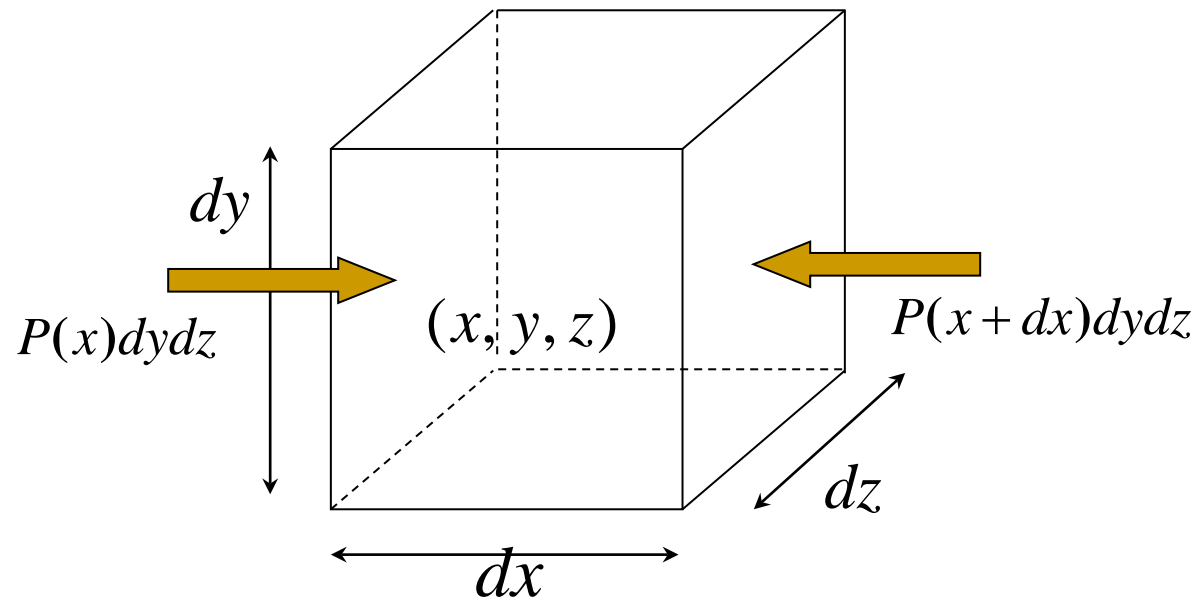
força de corpo: \vec{f}_C

força volumétrica, ex: força gravitacional

$$\vec{f}_g = \rho \vec{g}$$

força de superfície: $\vec{f}_S = \vec{f}_p + \vec{f}_\mu$

\vec{f}_p - força de pressão: força normal compressiva



$$dF_{p,x} = P dy dz - (P dy dz + \partial P / \partial x dx dy dz) = - \partial P / \partial x dV$$

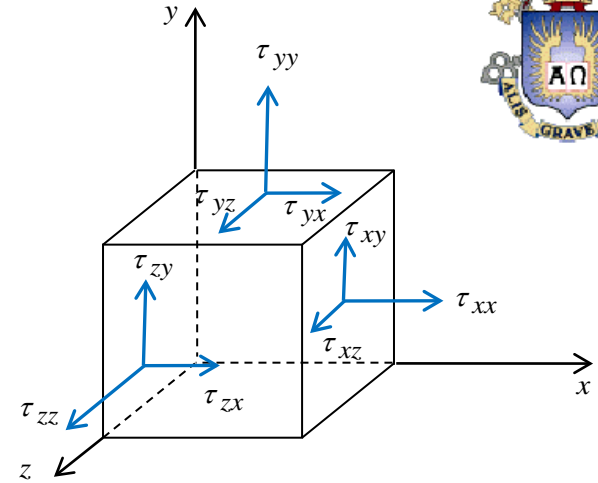
$$\Rightarrow f_{p,x} = - \partial P / \partial x \quad \text{logo} \quad f_{p,y} = - \partial P / \partial y \quad \text{e} \quad f_{p,z} = - \partial P / \partial z$$

$$\vec{f}_p = - \frac{\partial P}{\partial x} \vec{i} - \frac{\partial P}{\partial y} \vec{j} - \frac{\partial P}{\partial z} \vec{k} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\vec{f}_p = - \vec{\nabla} P}$$

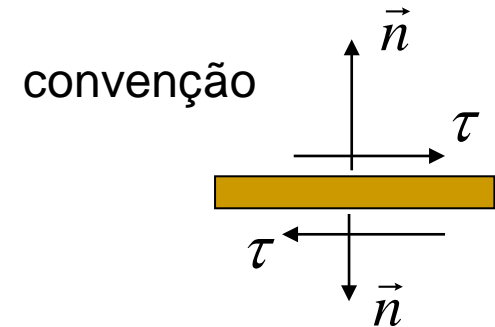
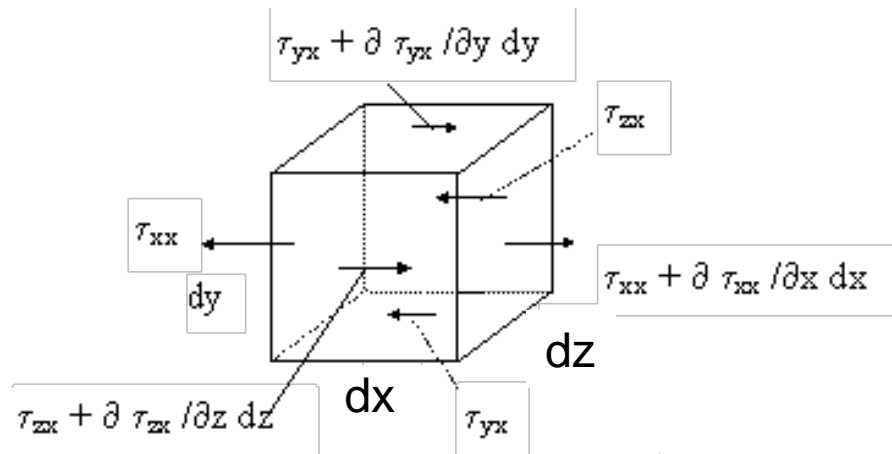


\vec{f}_μ **força viscosa**: força definida por um tensor, em cada face possui 3 componentes, dois tangenciais e um normal

$$\underline{\underline{\tau}} = \begin{pmatrix} \tau_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \tau_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \tau_{zz} \end{pmatrix}$$



- Força de superfície viscosa resultante na direção x



$$F_{\mu,x} = -\tau_{xx} \Delta y \Delta z + \left(\tau_{xx} + \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} dx \right) \Delta y \Delta z - \tau_{yx} \Delta x \Delta z + \left(\tau_{yx} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} dy \right) \Delta x \Delta z - \tau_{zx} \Delta x \Delta y + \left(\tau_{zx} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} dz \right) \Delta x \Delta y$$

$$F_{\mu,x} = \left(\frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \right) \Delta x \Delta y \Delta z \quad \longrightarrow \quad f_{\mu,x} = \left(\frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \right)_{10}$$



- Procedendo de forma análoga para as outras direções

$$f_{\mu,x} = \left(\frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \right)$$

$$f_{\mu,y} = \left(\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} \right)$$



$$\vec{f}_{\mu} = \nabla \bullet \underline{\underline{\tau}}$$

$$f_{\mu,z} = \left(\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z} \right)$$

$$\vec{f}_{\mu} = \vec{\nabla} \bullet \underline{\underline{\tau}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tau_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \tau_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \tau_{zz} \end{pmatrix} =$$

$$\vec{f}_{\mu} = \left(\frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \quad \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} \quad \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z} \right)$$



Equação diferencial de quantidade de movimento na forma vetorial

$$\rho \frac{D\vec{V}}{Dt} = \rho \vec{g} - \nabla P + \nabla \bullet \underline{\underline{\tau}}$$

■ coordenadas cartesianas

$$\begin{aligned} \rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right) &= \rho g_x - \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \\ \rho \left(\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} \right) &= \rho g_y - \frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} \\ \rho \left(\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} \right) &= \rho g_z - \frac{\partial P}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z} \end{aligned}$$



Casos Particulares:

- **Equação de Euler (fluido perfeito, não viscoso)**

$$\rho \frac{D\vec{V}}{Dt} = \rho \vec{g} - \text{grad} P$$

- **Equação da Hidrostática:**

$$\rho \vec{g} = \text{grad} P$$

Para fluidos viscosos, precisamos de uma informação adicional: relação entre a tensão cisalhante e a taxa de deformação do elemento de fluido



pode-se demonstrar pelo uso da equação conservação de quantidade de movimento angular que o tensor $\underline{\underline{\tau}}$ é simétrico

$$\underline{\underline{\tau}} = \begin{pmatrix} \tau_{xx} & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{yx} & \tau_{yy} & \tau_{zy} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \tau_{zz} \end{pmatrix}$$

Equação Constitutiva para fluidos Newtonianos $\underline{\underline{\tau}} = \mu \underline{\underline{\dot{\gamma}}}$

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) , \quad \tau_{xx} = 2\mu \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{2}{3} \mu \nabla \cdot \vec{V}$$

$$\tau_{xz} = \tau_{zx} = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) , \quad \tau_{yy} = 2\mu \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{2}{3} \mu \nabla \cdot \vec{V}$$

$$\tau_{yz} = \tau_{zy} = \mu \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) , \quad \tau_{zz} = 2\mu \frac{\partial w}{\partial z} - \frac{2}{3} \mu \nabla \cdot \vec{V}$$

$$\vec{f}_\mu = \text{div} \underline{\underline{\tau}} = \text{div} \mu \underline{\underline{\dot{\gamma}}} = \text{div} \left\{ \mu [\text{grad } \vec{V} + (\text{grad } \vec{V})^T] - \frac{2}{3} \mu \text{div } \vec{V} \underline{\underline{I}} \right\}$$



Equação de Navier-Stokes: Equação de conservação de quantidade de movimento linear para fluido Newtonianos (coordenadas cartesianas)

$$\rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right) = \rho g_x - \frac{\partial p}{\partial x} - \frac{2}{3} \frac{\partial}{\partial x} \left[\mu \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) \right] +$$
$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\mu \frac{\partial w}{\partial x} \right)$$

$$\rho \left(\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} \right) = \rho g_y - \frac{\partial p}{\partial y} - \frac{2}{3} \frac{\partial}{\partial y} \left[\mu \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) \right] +$$
$$+ \frac{\partial}{\partial x} \left(\mu \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\mu \frac{\partial v}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\mu \frac{\partial w}{\partial y} \right)$$

$$\rho \left(\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} \right) = \rho g_z - \frac{\partial p}{\partial z} - \frac{2}{3} \frac{\partial}{\partial z} \left[\mu \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) \right] +$$
$$+ \frac{\partial}{\partial x} \left(\mu \frac{\partial w}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial w}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\mu \frac{\partial w}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial v}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\mu \frac{\partial w}{\partial z} \right)$$



- A equação de Navier-Stokes simplifica bem se a massa específica e a viscosidade foram constante $\vec{f}_\mu = \mu \nabla^2 \vec{V}$

- A maioria dos líquidos podem ser considerados como fluidos incompressíveis $\Rightarrow \nabla \bullet \vec{V} = 0$

- A viscosidade da maioria dos gases é aproximadamente constante

Navier-Stokes (propriedades constantes) $\rho \frac{D\vec{V}}{Dt} = \rho \vec{g} - \nabla P + \mu \nabla^2 \vec{V}$

coordenadas cartesianas

$$\begin{aligned} \rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right) &= \rho g_x - \frac{\partial P}{\partial x} + \mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) \\ \rho \left(\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} \right) &= \rho g_y - \frac{\partial P}{\partial y} + \mu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right) \\ \rho \left(\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} \right) &= \rho g_z - \frac{\partial P}{\partial z} + \mu \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) \end{aligned}$$

Navier-Stokes (propriedades constantes) em coordenadas cilíndricas



Direção
radial

$$\rho \left[\frac{\partial u_r}{\partial t} + u_r \frac{\partial u_r}{\partial r} + u_\theta \frac{\partial u_r}{r \partial \theta} + u_z \frac{\partial u_r}{\partial z} - \frac{u_\theta^2}{r} \right] = \rho g_r - \frac{\partial P}{\partial r} +$$

$$\mu \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u_r}{\partial r} \right) - \frac{u_r}{r^2} + \frac{\partial^2 u_r}{r^2 \partial \theta^2} + \frac{\partial^2 u_r}{\partial z^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} \right]$$

Direção
angular

$$\rho \left[\frac{\partial u_\theta}{\partial t} + u_r \frac{\partial u_\theta}{\partial r} + u_\theta \frac{\partial u_\theta}{r \partial \theta} + u_z \frac{\partial u_\theta}{\partial z} + \frac{u_r u_\theta}{r} \right] = \rho g_\theta - \frac{\partial P}{r \partial \theta} +$$

$$\mu \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u_\theta}{\partial r} \right) - \frac{u_\theta}{r^2} + \frac{\partial^2 u_\theta}{r^2 \partial \theta^2} + \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial z^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} \right]$$

Direção
axial

$$\rho \left[\frac{\partial u_z}{\partial t} + u_r \frac{\partial u_z}{\partial r} + u_\theta \frac{\partial u_z}{r \partial \theta} + u_z \frac{\partial u_z}{\partial z} \right] = \rho g_z - \frac{\partial P}{\partial z} +$$

$$\mu \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u_z}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 u_z}{r^2 \partial \theta^2} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} \right]$$

Equação de Energia Mecânica



- A energia mecânica de um sistema não se conserva, porém esta equação é muito útil em diversas situações.
- Pode ser obtida através do produto escalar do vetor velocidade com a equação de conservação de quantidade de movimento linear

$$\vec{V} \cdot \left[\rho \frac{D\vec{V}}{Dt} \right] = \vec{V} \cdot \left[\rho \vec{g} - \nabla P + \nabla \cdot \underline{\underline{\tau}} \right]$$

➤ Obs: (1) $\vec{V} \cdot \vec{V} = |\vec{V}|^2 = V^2$ ou $\vec{V} \cdot \vec{V} = V_i V_i$

$$(2) \quad \rho \frac{D\vec{V}}{Dt} = \rho \left(\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \vec{V} \cdot \nabla \vec{V} \right) + \underbrace{\vec{V} \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{V}) \right]}_{\text{zero continuidade}} = \frac{\partial \rho \vec{V}}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{V} \vec{V})$$

- Então, operando o produto escalar

$$\vec{V} \cdot \left[\rho \frac{D\vec{V}}{Dt} \right] = \vec{V} \cdot \left[\frac{\partial \rho \vec{V}}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{V} \vec{V}) \right] = \left[\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \rho V^2 \right) + \nabla \cdot \left(\frac{1}{2} \rho V^2 \vec{V} \right) \right]$$

$$\vec{V} \cdot \nabla P = \nabla \cdot (P \vec{V}) - P \nabla \cdot \vec{V} \qquad \vec{V} \cdot \nabla \cdot \underline{\underline{\tau}} = \nabla \cdot (\underline{\underline{\tau}} \cdot \vec{V}) - \underline{\underline{\tau}} : \nabla \vec{V}$$



■ Produto escalar de dois tensores (produto duplo):

$$\boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\tau} = e_i \sigma_{ij} e_j : e_k \tau_{kl} e_l = e_i \bullet e_l e_j \bullet e_k \sigma_{ij} \tau_{kl} = \delta_{il} \delta_{jk} \sigma_{ij} \tau_{kl} = \sigma_{ij} \tau_{ji}$$

■ Para fluido Newtoniano

$$\underline{\underline{\boldsymbol{\tau}}} : \nabla \vec{V} = \left\{ \mu [\nabla \vec{V} + (\nabla \vec{V})^T] - \frac{2}{3} \mu \nabla \bullet \vec{V} \right\} : \nabla \vec{V}$$

$$\underline{\underline{\boldsymbol{\tau}}} : \nabla \vec{V} = \mu \Phi = \left[\mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} \mu \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \delta_{ij} \right] \frac{\partial u_i}{\partial x_j}$$

$$\Phi = \left[\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) - \frac{2}{3} \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \frac{\partial u_\ell}{\partial x_\ell} \right] \quad \Phi \text{ é sempre positivo, é a função dissipação}$$

$$\Phi = \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)^2 - \frac{2}{3} \left(\frac{\partial u_k}{\partial x_k} \right)^2 \right]$$

Para fluidos Não-newtonianos $\underline{\underline{\boldsymbol{\tau}}} : \nabla \vec{V}$ pode ser negativo



Equação de Energia Cinética

$$\underbrace{\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \rho V^2 \right)}_{\text{taxa de aumento de energia cinética}} + \underbrace{\nabla \cdot \left(\frac{1}{2} \rho V^2 \vec{V} \right)}_{\text{fluxo líquido de energia cinética}} = \underbrace{\rho \vec{V} \cdot \vec{g}}_{\text{taxa de trabalho devido a força gravitacional}} - \underbrace{\nabla \cdot (P \vec{V})}_{\text{taxa de trabalho devido a pressão}} + \underbrace{P \nabla \cdot \vec{V}}_{\text{taxa de conversão reversível a energia interna}} + \underbrace{\nabla \cdot (\underline{\underline{\tau}} \cdot \vec{V})}_{\text{taxa de trabalho devido a forças viscosas}} - \underbrace{\underline{\underline{\tau}} : \nabla \vec{V}}_{\text{taxa de conversão irreversível a energia interna}}$$

- $P \nabla \cdot \vec{V}$ pode ser positivo ou negativo, dependendo se o fluido está sofrendo expansão ou compressão. As mudanças de temperatura podem ser grandes em compressores, turbinas ou na presença de ondas de choque.
- $\underline{\underline{\tau}} : \nabla \vec{V}$ é sempre positivo para fluidos Newtonianos. Este termo pode ser significativo em sistemas com viscosidades e gradientes de velocidades elevados, como ocorre em lubrificação, extrusão rápida e vôos de alta velocidade.



Equação de Energia Mecânica

- Trabalhando o termo $\rho \vec{V} \cdot \vec{g}$ podemos rescrever a equação para a soma da energia cinética e potencial, gerando a equação de energia mecânica
- Introduzindo a definição de energia potencial por unidade de massa Ψ , definida com $\vec{g} = -\nabla \Psi$, temos que

$$\begin{aligned} \rho \vec{V} \cdot \vec{g} &= -\rho \vec{V} \cdot \nabla \Psi = -\nabla \cdot (\rho \vec{V} \Psi) + \Psi \nabla \cdot (\rho \vec{V}) = \\ &= -\nabla \cdot (\rho \vec{V} \Psi) - \Psi \frac{\partial \rho}{\partial t} = -\nabla \cdot (\rho \vec{V} \Psi) - \frac{\partial(\rho \Psi)}{\partial t} \end{aligned}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \rho V^2 + \rho \Psi \right) + \nabla \cdot \left(\left(\frac{1}{2} \rho V^2 \right) + \rho \Psi \right) \vec{V} = -\nabla \cdot (P \vec{V}) + P \nabla \cdot \vec{V} + \nabla \cdot (\underline{\underline{\tau}} \cdot \vec{V}) - \underline{\underline{\tau}} : \nabla \vec{V}$$



Equação de Conservação de Quantidade de Movimento Angular

- Esta equação pode ser obtida com o produto vetorial do vetor posição \vec{r} com a equação de conservação de quantidade de movimento linear

$$\vec{r} \times \left[\frac{\partial \rho \vec{V}}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{V} \vec{V}) \right] = \vec{r} \times \left[\rho \vec{g} - \nabla P + \nabla \cdot \underline{\underline{\tau}} \right]$$

$$\frac{\partial \rho [\vec{r} \times \vec{V}]}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{V} [\vec{r} \times \vec{V}]) = \vec{r} \times \rho \vec{g} - \nabla \cdot [\vec{r} \times P \mathbf{I}] + \nabla \cdot [\vec{r} \times \underline{\underline{\tau}}] - [\underline{\underline{\varepsilon}} : \underline{\underline{\tau}}]$$

- $\underline{\underline{\varepsilon}}$ é o tensor de 3ª. ordem com componentes ε_{ijk} (*símbolo de permutação*)

$$\varepsilon_{ijk} = +1 \quad \text{se } ijk = 123, 231 \text{ ou } 312$$

$$= -1 \quad \text{se } ijk = 321, 132 \text{ ou } 213$$

$$= 0 \quad \text{se quaisquer dois índices forem diferentes}$$



- Produto vetorial de dois vetores:

$$\mathbf{v} \times \mathbf{w} = \varepsilon_{ijk} e_i v_j w_k \qquad \mathbf{v} \times \mathbf{w} = \det \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}$$

- Produto vetorial de um vetor e tensor:

$$\vec{r} \times \underline{\underline{\tau}} = r_i \mathbf{e}_i \times \mathbf{e}_j \tau_{jk} \mathbf{e}_k = \mathbf{e}_l \mathbf{e}_k \varepsilon_{ijl} r_i \tau_{jk}$$

- **Se τ é simétrico:** $\underline{\underline{[\varepsilon : \tau]}} = 0$

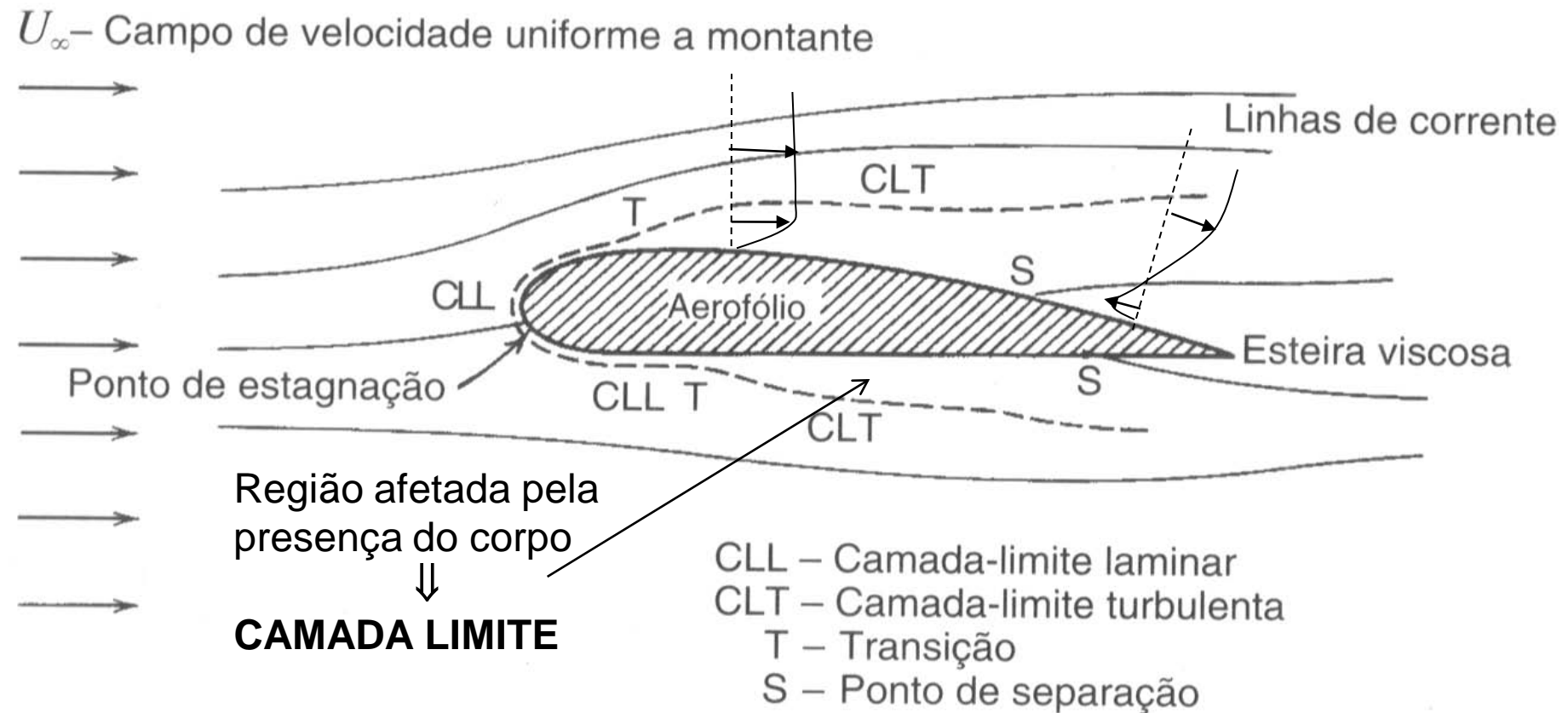
- não existe conversão de momentum angular macroscópico em momentum angular interno, i.e, as duas formas de momentum se conservam separadamente.



CONDIÇÕES DE CONTORNO

- **Interface fluido-sólido:** a velocidade do líquido é igual a velocidade do sólido
 - condição de **não deslizamento**: velocidades tangenciais iguais
 - condição de **impenetrabilidade**: velocidades normais iguais
- **Interface plana líquido-líquido:** as velocidades e tensões são contínuas através da interface
- **Interface plana líquido-gás:** a tensão cisalhante é nula na interface, uma vez que os gradientes do lado do gás são pequenos. Esta é uma boa aproximação porque $\mu_{\text{gases}} \ll \mu_{\text{líquidos}}$.
- Quando as interfaces líquido-líquido ou líquido-gás são **curvas**, a tensão normal não é mais contínua através da interface, e a **tensão superficial** torna-se importante

ESCOAMENTOS EXTERNOS: em geral desejamos determinar as forças que atuam no corpo, isto é, força de arraste e



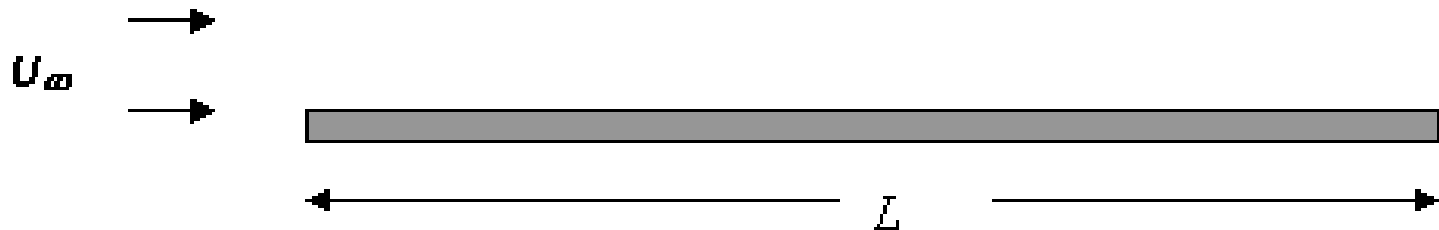
Fora da camada limite, o escoamento não é afetado pela presença do corpo \Rightarrow forças viscosas não são importantes

Quando o escoamento na camada limite é desacelerado devido a uma diferença de pressão, pode ocorrer uma reversão do escoamento e a camada limite separa-se da superfície do corpo, formando a **esteira**

ESCOAMENTOS EXTERNOS



- A velocidade característica é a **velocidade de aproximação do corpo U_∞**
- A dimensão característica é o **comprimento do corpo na direção do escoamento, L**

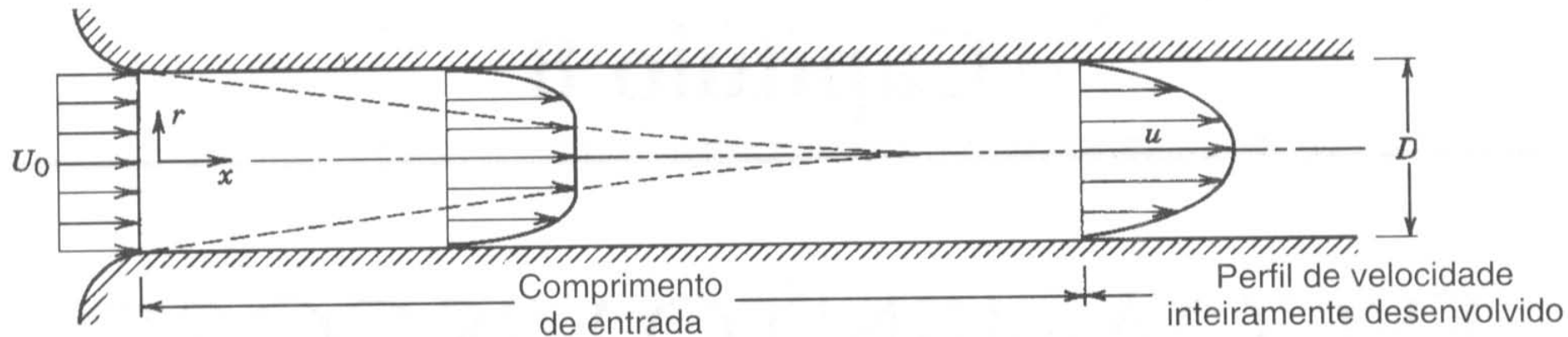


- O número de Reynolds $Re = \frac{\rho U_\infty L}{\mu}$ que caracteriza a transição neste caso é

$Re \leq 5 \times 10^5 \Rightarrow$ laminar

$Re > 5 \times 10^5 \Rightarrow$ turbulento

- **ESCOAMENTOS INTERNOS:** em geral desejamos buscar a relação entre vazão e queda de pressão.



- Em um escoamento interno, longe da região de entrada, observa-se que o escoamento não apresenta variações na sua própria direção, e a pressão varia linearmente ao longo do escoamento. O escoamento é considerado como **hidrodinamicamente desenvolvido**.
- O comportamento na região de entrada de uma tubulação apresenta o mesmo comportamento que o escoamento externo. Portanto, estudaremos escoamentos externos e depois aplicaremos os resultados obtidos para analisar a região de entrada de uma tubulação.



ESCOAMENTOS INTERNOS

- ❑ Considerando que o escoamento como **hidrodinamicamente desenvolvido**.
- ❑ A velocidade característica é a **velocidade média u_m**
- ❑ A dimensão característica é o **diâmetro hidráulico, D_h**

$$u_m = \frac{Q}{A_T} = \frac{1}{A_T} \int u \, dA$$

$$D_h = \frac{4 A_t}{P_m}$$

A_t é a área transversal do escoamento e P_m é o perímetro molhado, o fator 4 é introduzido por conveniência.

O número de Reynolds que caracteriza a transição neste caso é

$$\mathbf{Re} = \frac{\rho \, u_m \, D_h}{\mu} \quad \begin{array}{ll} \mathbf{Re} \leq 2300 & \Rightarrow \text{laminar} \\ \mathbf{Re} > 2300 & \Rightarrow \text{turbulento} \end{array}$$