

# Campo Elétrico de uma Partícula Relativística

*Ranier Menote Lemes Silva*

*Instituto de Física da UFES*

*email: ranier\_m@hotmail.com*

*Matéria: Teoria Eletromagnética 1*

*Professor: Martín Gustavo Richarte*

## 1 INTRODUÇÃO

O eletromagnetismo clássico é uma teoria essencialmente relativística, de tal maneira que as leis que governam a dinâmica dos campos elétricos e magnéticos devem respeitar os postulados da relatividade especial. Dessa forma, dado uma distribuição de cargas ou correntes que varia no tempo os efeitos no campo eletromagnético se propaga pelo espaço com uma velocidade máxima. Essa velocidade máxima de propagação de informação é conhecida como a velocidade da luz. Por conta dessas restrições que a relatividade especial insere na dinâmica dos campos, dois observadores inerciais podem observar diferentes campos eletromagnéticos de um mesmo sistema físico. Este trabalho objetiva desenvolver uma maneira de visualizar os campos eletromagnéticos de cargas aceleradas, seguindo, explicando e reproduzindo completamente todos os resultados do artigo<sup>4</sup>.

## 2 MOVIMENTO GERAL DE UMA PARTÍCULA

Uma maneira de visualizar campo vetorial seria, em cada ponto do espaço domínio, definir o valor do campo (representado por um vetor). Naturalmente, em cada ponto do espaço pode haver um vetor diferente (com módulo e direção diferente).

Podemos pensar em um campo vetorial (o campo elétrico  $\vec{E}$ ) como sendo um conjunto de vetores tangentes a alguma classe de curvas parametrizadas pelo espaço tridimensional (o artigo denota uma curva parametrizada pela grandeza  $s$  como  $\vec{P}(s)$ ). Se pensar assim, a curva  $\vec{P}(s)$  representa justamente as linhas de campo que queremos visualizar. Objetivamente, isso significa que para encontrar as linhas de campo as tangentes dessa curva, supostamente existente, deve ser proporcional ao campo vetorial em questão (campo elétrico):

$$\frac{d\vec{P}}{ds} \propto \vec{E}(\vec{P}(s)) \quad \text{Equation 1.}$$

A proporcionalidade é suficiente pois estamos interessados apenas na configuração da curva e não na velocidade em se (uma mesma curva pode ser parametrizada de diferentes maneiras, podendo resultar em diferentes conjuntos de vetores tangentes).

A medida que uma partícula carregada se move o seu campo elétrico também é modificado, porém esse modificação leva um certo tempo para se propagar até um determinado ponto no espaço. Disse modo, o campo elétrico em um determinado ponto do espaço pode ter um certo atraso em relação a outros pontos, isto é, pode-se medir o campo elétrico em um ponto como sendo o campo da partícula ainda antes de se mover, pois a informação de modificação do campo ainda não chegou. Por esse motivo, o campo observado é calculado no tempo retardado  $t' = t - \frac{|\vec{r} - \vec{r}_0|}{c}$  (onde  $\vec{r}$  e  $\vec{r}_0$  são os pontos de observação e posição da partícula, respectivamente). Sabemos que o campo elétrico para uma partícula acelerada percorrendo uma trajetória dado pelo vetor  $\vec{r}_0(t')$  (considerando efeitos relativísticos) é dado por<sup>2</sup>:

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = q \left[ \frac{\vec{R} - R\vec{\beta}}{\gamma^2(R - \vec{R} \cdot \vec{\beta})^3} + \frac{\vec{R} \times [(\vec{R} - R\vec{\beta}) \times \dot{\vec{\beta}}]}{c(R - \vec{R} \cdot \vec{\beta})^3} \right]_{t'} \quad \text{Equation 2.}$$

Onde  $\vec{\beta} = \frac{\vec{v}}{c}$  e  $\vec{R} = \vec{r} - \vec{r}_0 = c(t - t')\hat{\lambda}(t')$  ( $\hat{\lambda}$  é o versor na direção do vetor  $\vec{r} - \vec{r}_0$ ). Por conta disso, a ideia mais natural para parametrizarmos as curvas que originam as linhas de campo como sendo seus vetores tangentes é passeando com o vetor observação  $\vec{r}$  pela curva que desejamos encontrar  $\vec{P}(s)$ , ou seja, parametrizar tais curvas com o tempo retardado  $\vec{P}(t') = \vec{r}(t') = \vec{r}_0(t') + \vec{R}(t') = \vec{r}_0(t') + (t - t')c\hat{\lambda}(t')$

Usando a condição de proporcionalidade 1 os autores do artigo escolheram que  $-c\gamma^2 R^2(1 - \vec{R} \cdot \vec{\beta})^3 \vec{E}/q$  pois assim ao substituir 2 nessa definição a expressão se torna mais simples (lembre-se que poderiam ter escolhido outro fator, porém isso não importa pois não determina o formato das curvas de linha de campo):

$$\frac{d\vec{P}}{dt'}(t') = -c(\hat{R} - \vec{\beta}) - \gamma^2 \vec{R} \times ((\hat{R} - \vec{\beta}) \times \dot{\vec{\beta}}) \quad \text{Equation 3.}$$

Lembrando que  $\vec{P} = \vec{r}_0(t') + (t - t')c\hat{\lambda}(t')$ , então  $\frac{d\vec{P}}{dt'}(t') = \frac{d\vec{r}_0}{dt'} - c\hat{\lambda}(t') + c(t - t')\frac{d\hat{\lambda}}{dt'} = c\left(\vec{\beta} - \hat{\lambda} + (t - t')\frac{d\hat{\lambda}}{dt'}\right)$  e que  $\vec{\lambda} = \hat{R}$  então a ultima equação se torna

$$\frac{d\hat{\lambda}}{dt'} = \gamma^2 \left( (\hat{\lambda} - \vec{\beta}) \times \dot{\vec{\beta}} \right) \times \hat{\lambda} \quad \text{Equation 4.}$$

Então, resolvendo essa equação para o vetor  $\hat{\lambda}$  podemos encontrar as curvas que definem as linhas do campo elétrico.

Essa equação não possui uma solução analítica muito clara para qualquer trajetória possível da partícula geradora do campo. Dessa maneira, nas próximas seções será descrito as diferentes situações (mas ainda assim bastante gerais) que o artigo considerou para solucionar a equação 4. Todos os gráficos deste trabalho foram gerados com Python, e podem ser encontrados no endereço<sup>1</sup> do GitHub.

### 3 MOVIMENTO CO-LINEAR

O primeiro caso a se considerar é a trajetória de uma partícula cujas velocidade e aceleração são sempre colineares, isto é, estão sempre na mesma direção. A ideia para encontrar  $\hat{\lambda}$  é decompor esse vetor em alguma base, e nesse caso usaremos vetores paralelos e perpendicular a velocidade como base, pois temos a equação 4 para auxiliar.

Utilizando uma propriedade do produto vetorial entre 3 vetores, obtemos que a expressão 4 fica

$$\frac{d\hat{\lambda}}{dt'} = \gamma^2 \left( \dot{\vec{\beta}} - \hat{\lambda}(\dot{\vec{\beta}} \cdot \hat{\lambda}) \right) \quad \text{Equation 5.}$$

multiplicando dos dois lados por  $\hat{\lambda}dt'$ , e definindo  $\vec{\lambda} \cdot \vec{\beta} \equiv \lambda_{||}$  então temos

$$\frac{d\lambda_{||}}{1 - \lambda_{||}^2} = \frac{d\beta}{1 - \beta^2} \quad \text{Equation 6.}$$

integrando dos dois lados essa ultima equação por frações parciais, obtemos que

$$\lambda_{||} = \frac{k_{||} + \beta}{1 + k_{||}\beta} \quad \text{Equation 7.}$$

Onde  $k_{||}$  é uma constante de integração.

Para encontrar a componente perpendicular o processo é análogo, multiplica-se os dois lados da equação 5 por um vetor unitário perpendicular a  $\beta$ , e utilizando que a aceleração é na mesma direção que a velocidade, temos que

$$d\lambda_{\perp} = -\frac{\lambda_{\perp}(k_{||} + \beta)}{(1 + k_{||}\beta)(1 - \beta^2)} \quad \text{Equation 8.}$$

Integrando, novamente, dos dois lados da equação obtemos que

$$\lambda_{\perp} = \frac{k_{\perp}}{\gamma(1 + k_{||}\beta)} \quad \text{Equation 9.}$$

Onde  $k_{\perp}$  é uma constante de integração.

Com essas constante de integração podemos definir um vetor unitário  $\hat{k}$  cujas as componentes são definidas como  $k_{||}$  na direção paralela a velocidade e  $k_{\perp}$  na direção perpendicular à velocidade. Pois assim, finalmente podemos escrever o vetor  $\hat{\lambda}$ :

$$\hat{\lambda} = \frac{\hat{k} + (\gamma - 1)(\hat{k} \cdot \hat{\beta})\hat{\beta} + \gamma\vec{\beta}}{\gamma(1 + \hat{k} \cdot \vec{\beta})} \quad \text{Equation 10.}$$

Assim a expressão para as linhas de campo se torna:

$$\vec{P}(t') = \vec{r}_0(t') + (t - t')c \left( \frac{\hat{k} + (\gamma - 1)(\hat{k} \cdot \hat{\beta})\hat{\beta} + \gamma\vec{\beta}}{\gamma(1 + \hat{k} \cdot \vec{\beta})} \right) \quad \text{Equation 11.}$$

### 3.1 Movimento Uniformemente Acelerado

O movimento mais simples com velocidade não constante para começarmos a visualizar as linhas de campo é o movimento uniformemente acelerado. No artigo, é dividido o movimento da partícula em 3 períodos, parado, uniformemente acelerado e movimento com velocidade constante. Por conveniência, assumase que a partícula está inicialmente parada, depois é acelerada na direção  $x$  por uma aceleração constante e depois de um tempo permanece com velocidade constante<sup>3</sup>.

Em geral uma partícula relativística possui uma quadrivelocidade e quadriaceleração definidas como:

$$u^\mu = \frac{dx^\mu}{dt'} \frac{dt'}{dt} = \gamma(c, \vec{v}) \quad \text{Equation 12.}$$

$$a^\mu = \frac{du^\mu}{dt'} \frac{dt'}{dt} = \gamma(c\dot{\gamma}, \dot{\gamma}\vec{v} + \gamma\dot{\vec{v}}) \quad \text{Equation 13.}$$

Lembre-se que há dois tipos de referenciais neste problema, um referencial denotado por  $S$  que representa um referencial inercial no qual a partícula esteja em repouso (note que o referencial não é acelerado, pois é inercial, mas observa a partícula uniformemente acelerada mesmo que momentaneamente esteja em repouso) e um referencial  $S'$  que representa um referencial inercial no nosso ponto de observação (há vários desses referenciais ao longo das linhas de campo). Note que para acompanhar o movimento da partícula há uma coleção desses referenciais inerciais  $S$  com diferentes velocidades para que a partícula esteja momentaneamente em repouso.

Podemos calcular uma grandeza invariante entre esses referenciais a partir da quadriaceleração.

$$\sqrt{g_{\mu\nu}a^\mu a^\nu} \equiv \alpha \quad \text{Equation 14.}$$

$$\gamma^3 \dot{v} = \frac{d(\gamma v)}{dt} = \alpha \quad \text{Equation 15.}$$

Onde  $g_{\mu\nu}$  é a métrica de Minkowski e  $\alpha$  é uma função do espaço-tempo em geral, invariante em relação a transformações de Lorentz. Como essa expressão é invariante, podemos calcular em qualquer referencial inercial. Lembrando que a aceleração tridimensional (no referencial em que observamos a partícula se mover  $a' = \frac{dv'}{dt'} = \frac{d^2}{dt'^2}(x')$ ) se transforma como  $a = \gamma^3 a'$  do referencial  $S'$  para o referencial em repouso  $S$ , então vemos que  $a = \gamma^3 \dot{v}$ . Por definição de movimento uniformemente acelerado, a aceleração observada pelo conjunto de referenciais  $S$  (em repouso a partícula) deve ser a mesma a todo instante, isto é, constante. Isso significa que  $\alpha$  é constante.

Usando isso, agora pode-se facilmente calcular (através de integração da equação 15 já no referencial do observador  $S'$ ), que

$$x(t') = \frac{c^2}{\alpha^2} \sqrt{1 + \left(\frac{\alpha t'}{c}\right)^2} + x_{t_0} \quad \text{Equation 16.}$$

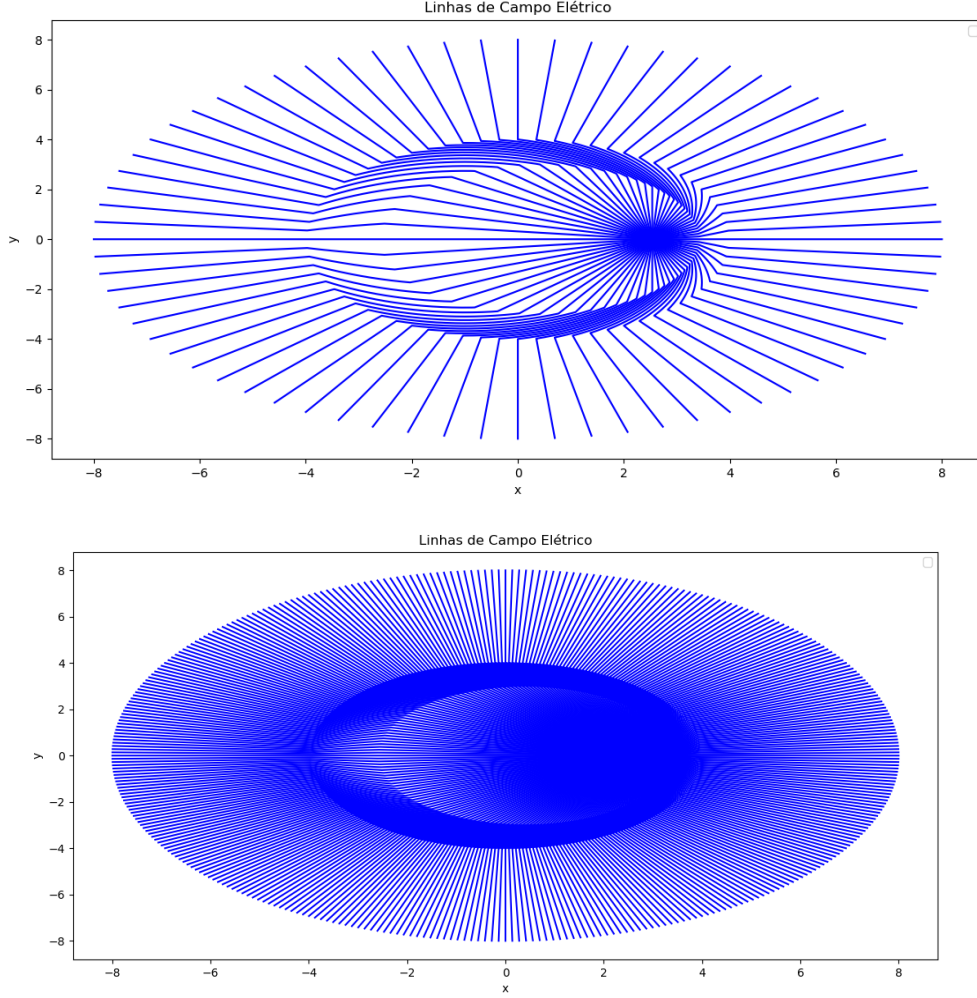
Para simplificar o artigo usa uma trajetória em que  $\alpha = c$ ,  $x_{t_0} = -c$ , de tal forma que:

$$x_0(t') = \begin{cases} 0, & t' < 0 \\ c(\sqrt{1+t'^2} - 1), & 0 < t' < 1 \\ c(\sqrt{2} - 1 + (t' - 1)/\sqrt{2}), & 1 < t' \end{cases} \quad \text{Equation 17.}$$

e com velocidade

$$v(t') = \begin{cases} 0, & t' < 0 \\ ct'/\sqrt{1+t'^2}, & 0 < t' < 1 \\ c/\sqrt{2}, & 1 < t' \end{cases} \quad \text{Equation 18.}$$

Após calculado podemos substituir essas expressões na equação 11, e obter uma expressão geral para qualquer linha de campo dado os valores de  $t$  e  $\hat{k}$ . o tempo  $t$  é o tempo da partícula, que o artigo escolhe  $t = 4$  (assim como aqui) e a direção  $\hat{k}$  é difícil de visualizar porém fica mais claro com os plots das curvas. Sendo assim, há uma linha de campo para cada  $\hat{k}$  (lembre-se que esse vetor é uma constante arbitrária oriunda de uma integração, então seu conjunto de valores gera um conjunto de linhas de campo). A figura 1 apresenta as linhas de campo sob essas condições.

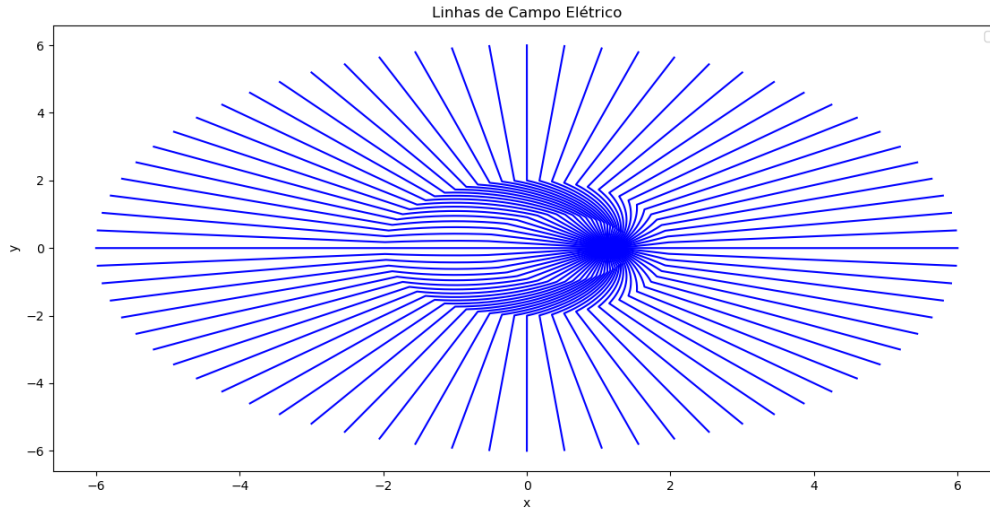


**Figura 1.** Os dois gráficos apresentam o mesmo campo elétrico (em  $t=3$ ), a diferença é que no primeiro foram plotados uma linha de campo para cada  $5^\circ$  (72 linhas de campo) enquanto o segundo uma linha de campo a cada  $1^\circ$  (360 linhas). Cada linha é definida por um valor diferente de  $\hat{k}$ . As unidades dos gráficos foram escolhidas de tal forma que  $c = 1$

Nos dois gráficos fica evidente que há uma região onde o campo elétrico é orientado ao centro do sistema de coordenadas (como se a partícula estivesse em repouso no centro) e outra na qual temos o campo de uma partícula com velocidade constante e uma região de transição entre as duas configurações. Nitidamente é visível essa informação se propagando pelo campo. Na figura 2, foi usado um tempo anterior ( $t = 2$ ), e nota-se que a região de transição está mais próxima da partícula, isto é, a informação teve menos tempo para ser transmitida.

### 3.2 Movimento Uniformemente Desacelerado

A resolução para essa situação é bem parecida com o caso anterior. Porém, dividirá o movimento de maneira diferente. Primeiro inicia-se com uma velocidade constante, depois é desacelerado até ficar em repouso. A diferença fundamental é o sinal da aceleração que deve ser alterada, fazendo isso e considerando uma velocidade inicial de



**Figura 2.** Mesmo gráfico em um instante anterior ( $t=2$ )

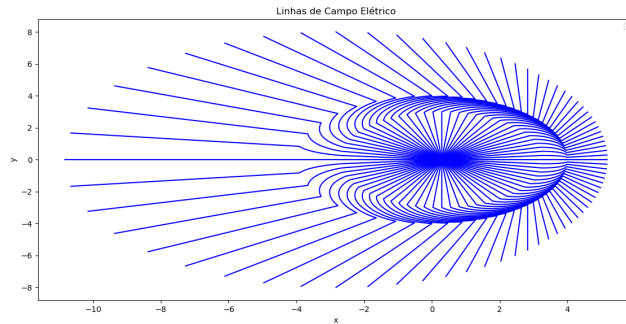
$\frac{c}{\sqrt{2}}$ :

$$x_0(t') = \begin{cases} ct'/\sqrt{2}, & t' < 0 \\ c(1 + t'/\sqrt{2} - \sqrt{1 + t'^2}), & 0 < t' < 1 \\ c(1 + 1/\sqrt{2} - \sqrt{2}), & 1 < t' \end{cases} \quad \text{Equation 19.}$$

e com velocidade

$$v(t') = \begin{cases} c/\sqrt{2}, & t' < 0 \\ c(1/\sqrt{2} - t'/\sqrt{1 + t'^2}), & 0 < t' < 1 \\ 0 & 1 < t' \end{cases} \quad \text{Equation 20.}$$

Substituindo essas expressões em 11, obtemos todas as linhas de campo para essa situação, como mostra a imagem 3.



**Figura 3**

### 3.3 Movimento Oscilatório

Outro movimento cuja a aceleração é colinear com a velocidade é um movimento oscilatório. Neste caso, colocamos uma partícula para oscilar na direção y

$$y(t') = a \sin(\omega t')$$

Equation 21.

$$v_y(t') = a\omega \cos(\omega t')$$

Equation 22.

Onde nas simulações foram definidas  $\omega = \pi$  e  $a = 0.8/\pi$ . A posição e velocidade em  $x$  são mantidas nulas. Substituindo na equação 11 temos que as linhas de curva dessa configuração é dada pela figura 5.

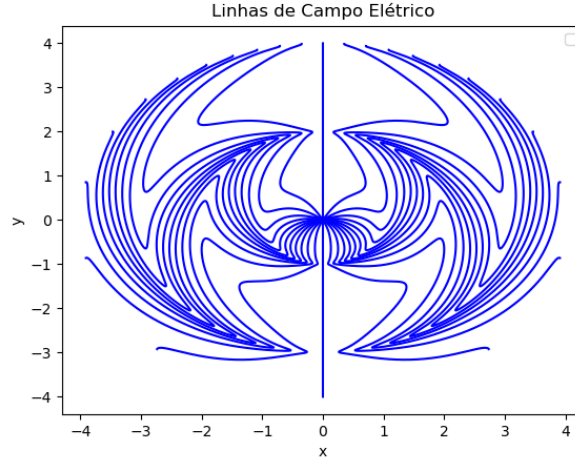


Figura 4

#### 4 MOVIMENTO PLANAR

Movimentos Planares englobam movimentos cujas as acelerações não são, necessariamente, colineares em todos os instantes. Por ser mais geral que o movimento colinear, o artigo se limita a alguns exemplos de movimentos planares.

##### 4.1 Wiggler Radiação

Uma partícula sujeita ao campo magnético de Wiggler descreve um movimento oscilatório em uma direção e um movimento com velocidade constante na direção perpendicular. Isso pode ser descrito como

$$\vec{r}_0(t') = c\beta_0 t' \hat{x} + \frac{c\beta_{\perp 0}}{\omega} \sin(\omega t') \hat{y}$$

Equation 23.

$$\vec{\beta}(t') = \beta_0 \hat{x} + \beta_{\perp}(t') \hat{y}$$

Equation 24.

Onde  $\omega$ ,  $\beta_0$  e  $\beta_{\perp 0}$  são constantes. Como é um movimento planar, então  $\hat{\lambda}$  pertence ao plano de movimento, e pode ser escrito como  $\hat{\lambda}(t') = (\cos \psi(t'), \sin \psi(t'))$  onde  $\psi$  é o ângulo que  $\hat{\lambda}$  faz com eixo  $x$ . Notando que  $\hat{\lambda} \times \vec{\beta} = \beta_{\perp} \cos \psi$ , logo a equação 4 resulta em

$$\frac{d\psi}{dt'} = \frac{\dot{\beta}(t')}{1 - \beta_0^2 - \beta_{\perp}^2} (\cos(\psi(t')) - \beta_0)$$

Equation 25.

$$\int_{\phi}^{\psi(t')} \frac{d\psi}{\cos \psi - \beta_0} = \int_{\beta(t)}^{\beta_{\perp}(t')} \frac{d\beta_{\perp}}{1 - \beta_0^2 - \beta_{\perp}^2}$$

Equation 26.

Lembrando que as curvas são parametrizadas por  $t'$  que varia de  $t$  até um valor desejado (menor que  $t$ ), então os limites de integração devem seguir esse intervalo apropriado (o ângulo  $\phi = \psi(t)$  é a inclinação de  $\hat{\lambda}$  quando  $t' = t$ , isto é, quando a curva sai da partícula). As integrais dos dois lados da equação são analiticamente solúveis. Seus resultados já conhecidos e tabelados. O lado esquerdo da equação 26:

$$\frac{2}{\sqrt{1-\beta_0^2}} \left( \tanh^{-1} \left\{ \frac{\beta_0 + 1}{\sqrt{1+\beta_0^2}} \tan \left\{ \frac{\psi(t')}{2} \right\} \right\} - \tanh^{-1} \left\{ \frac{\beta_0 + 1}{\sqrt{1+\beta_0^2}} \tan \left\{ \frac{\phi}{2} \right\} \right\} \right) \quad \text{Equation 27.}$$

$$\frac{2}{\gamma_0} \left( \tanh^{-1} \left\{ \zeta \tan \left\{ \frac{\psi(t')}{2} \right\} \right\} - \tanh^{-1} \left\{ \zeta \tan \left\{ \frac{\phi}{2} \right\} \right\} \right) \quad \text{Equation 28.}$$

Onde foi usado a mesma notação do artigo<sup>3</sup>, isto é,  $\gamma_0 = \sqrt{1-\beta_0^2}$  e  $\zeta = \sqrt{\frac{1+\beta_0}{1-\beta_0}}$ . O lado direito da equação 26 também é uma integral conhecida:

$$\frac{1}{\sqrt{\beta_0^2-1}} \left( -\tan^{-1} \left\{ \frac{\beta_{\perp}(t')}{\sqrt{\beta_0^2-1}} \right\} + -\tan^{-1} \left\{ \frac{\beta_{\perp}(t)}{\sqrt{\beta_0^2-1}} \right\} \right) \quad \text{Equation 29.}$$

$$\frac{1}{i\gamma_0} \left( -\tan^{-1} \left\{ \frac{\beta_{\perp}(t')}{i\gamma_0} \right\} + \tan^{-1} \left\{ \frac{\beta_{\perp}(t)}{i\gamma_0} \right\} \right) \quad \text{Equation 30.}$$

Usando a propriedade  $\tanh(x) = -i \tan(ix)$ , obtemos:

$$\frac{1}{\gamma_0} \left( \tanh^{-1} \left\{ \frac{\beta_{\perp}(t')}{\gamma_0} \right\} - \tanh^{-1} \left\{ \frac{\beta_{\perp}(t)}{\gamma_0} \right\} \right) \quad \text{Equation 31.}$$

igualando os dois lados da equação, obtemos:

$$2 \tanh^{-1} \left\{ \zeta \tan \left\{ \frac{\psi}{2} \right\} \right\} = \tanh^{-1} \left\{ \frac{\beta_{\perp}(t')}{\gamma_0} \right\} - \tanh^{-1} \left\{ \frac{\beta_{\perp}(t)}{\gamma_0} \right\} + 2 \tanh^{-1} \left\{ \zeta \tan \left\{ \frac{\phi}{2} \right\} \right\} \quad \text{Equation 32.}$$

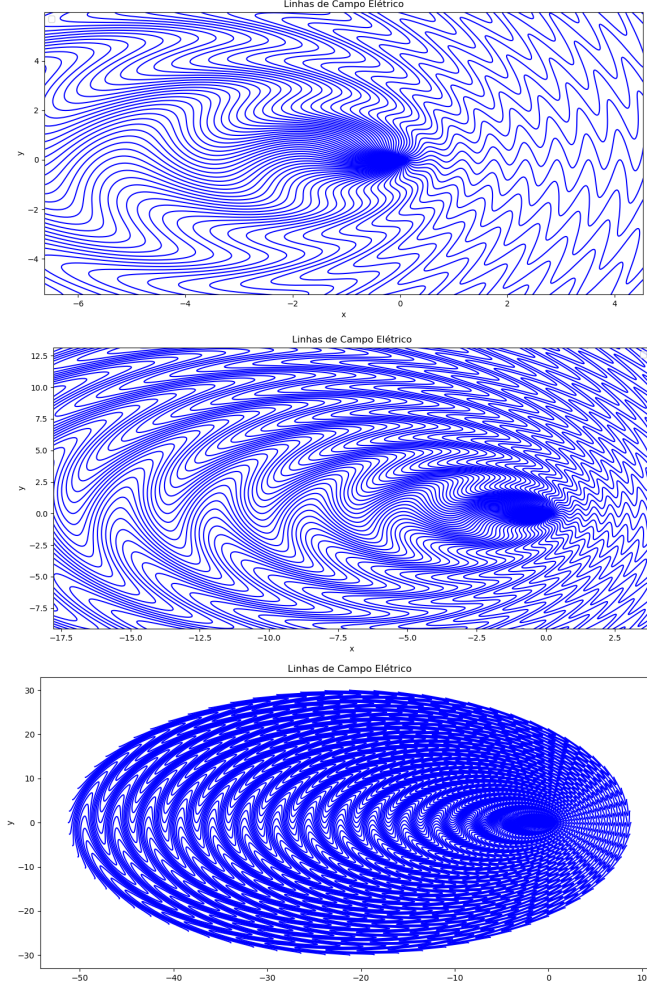
Deste modo, isolando o ângulo  $\psi$  resulta em:

$$\psi(t') = 2 \arctan \left\{ \frac{1}{\xi} \tanh \left[ \frac{1}{2} \tanh^{-1} \left\{ \frac{\beta_{\perp}(t')}{\gamma_0} \right\} - \frac{1}{2} \arctan \left\{ \frac{\beta_{\perp}(t)}{\gamma_0} \right\} + \tanh^{-1} \left\{ \xi \tan \frac{\phi}{2} \right\} \right] \right\} \quad \text{Equation 33.}$$

Observamos que há uma diferença nessa solução para a apresentada no artigo (no artigo é apresentado um argumento de  $\gamma_0 \beta_{\perp}$  enquanto que aqui foi encontrado um argumento de  $\beta_{\perp}/\gamma_0$ ), provavelmente foi apenas um erro na escrita do artigo, uma vez que o resultado das simulações foi idêntico.

A solução para  $\psi$  que satisfaz essa equação pode ser substituindo na expressão de  $\hat{\lambda}$  e por fim encontrar as linhas de campo para essa situação.





**Figura 5.** Os três gráficos apresentam o mesmo campo elétrico, porém visto em diferente escalas. Foi escolhido 72  $\phi$  (diferentes linhas de campo) diferentes para plotar (a cada  $5^\circ$ ). Nota-se que na direção contrária ao movimento (no eixo x) o campo oscila propagando informação como ondas sobre um fluido.

$$\vec{P}(t') = \vec{r}_0(t') + (t - t')c(\cos \psi(t'), \sin \psi(t'))$$

**Equation 34.**

As figuras 5 que representam as linhas de campo para os valores escolhidos de  $\beta_\perp = 0.1$ ,  $\beta_0 = 1/\sqrt{2}$  e  $\omega = \pi$  no instante  $t = 0$ .

Para essa situação em particular há um detalhe importante para plotar essas linhas de campo. Note que há  $\tanh^{-1}$  na expressão de  $\psi$ . Essa função diverge a medida que o argumento se aproxima de  $\pm 1$ . Dessa maneira, para produzir as curvas numericamente, usar a propriedade  $\tanh(a + b) = \frac{\tanh(a) + \tanh(b)}{1 + \tanh(a)\tanh(b)}$ , assim eliminando os problemas numéricos de divergência que podem surgir.

#### 4.2 Síncrotron

Um exemplo interessante é uma partícula se movimentando em um síncrotron, isto é, a partícula percorre uma trajetória circular, que pode ser parametrizada como

$$\vec{r}_0(t') = a (\cos(\omega t') \hat{x} + \sin(\omega t') \hat{y}) \quad \text{Equation 35.}$$

$$\vec{\beta}(t') = \beta (-\sin(\omega t') \hat{x} + \cos(\omega t') \hat{y}) \quad \text{Equation 36.}$$

$$\dot{\vec{\beta}}(t') = -\dot{\beta} (\cos(\omega t') \hat{x} + \sin(\omega t') \hat{y}) \quad \text{Equation 37.}$$

Onde  $\beta = \frac{a\omega}{c}$  e  $\dot{\beta} = \omega\beta$ . Se denotar o ângulo entre  $\hat{\lambda}$  e  $\vec{r}_0$  por  $\psi$  a equação 4 resulta em:

$$\frac{d\psi}{dt'} + \omega = \gamma^2 (\dot{\beta} \sin \psi - \beta \dot{\beta}) \quad \text{Equation 38.}$$

Usando a definição de  $\dot{\beta}$  temos

$$\frac{d\psi}{dt'} = \gamma^2 \omega (\beta \sin \psi - 1) \quad \text{Equation 39.}$$

$$\int_{\phi}^{\psi(t')} \frac{d\psi}{\beta \sin \psi - 1} = \gamma^2 \omega \int_t^{t'} dt \quad \text{Equation 40.}$$

Onde usamos o fato de  $\beta$  ser constante. O lado esquerdo da equação é uma integral com resultado analítico também bem conhecido, e portanto a equação resulta

$$\frac{2}{\sqrt{1-\beta^2}} \left[ \tan^{-1} \left\{ \gamma \left( \beta - \tan \left\{ \frac{\psi(t')}{2} \right\} \right) \right\} - \tan^{-1} \left\{ \gamma \left( \beta - \tan \left\{ \frac{\phi}{2} \right\} \right) \right\} \right] = \gamma^2 \omega (t' - t) \quad \text{Equation 41.}$$

$$\tan^{-1} \left\{ \gamma \left( \beta - \tan \left\{ \frac{\psi(t')}{2} \right\} \right) \right\} = \frac{\omega}{2} \gamma (t' - t) + \tan^{-1} \left\{ \gamma \left( \beta - \tan \left\{ \frac{\phi}{2} \right\} \right) \right\} \quad \text{Equation 42.}$$

Por fim, isolando o ângulo  $\psi(t')$ , obtemos que sua expressão é dada por

$$\psi = 2 \tan^{-1} \left\{ \beta - \frac{1}{\gamma} \tan \left\{ \frac{\omega}{2} \gamma (t' - t) + \tan^{-1} \left\{ \gamma \left( \beta - \tan \frac{\phi}{2} \right) \right\} \right\} \right\} \quad \text{Equation 43.}$$

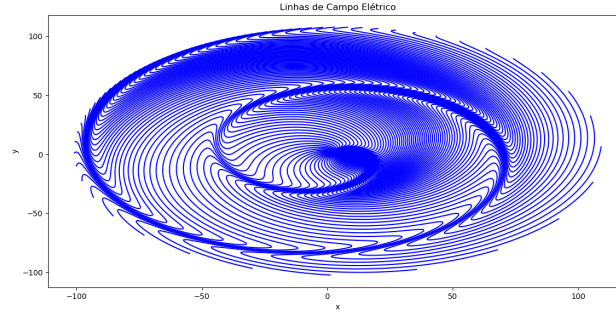
Como o ângulo entre  $\hat{\lambda}$  e o eixo  $x$  é  $\alpha(t') \equiv \omega t' + \psi$ , então

$$\hat{\lambda}(t') = (\cos\{\omega t' + \psi(t')\}, \sin\{\omega t' + \psi(t')\}) \quad \text{Equation 44.}$$

Por fim, as linhas de campo são dadas pela equação:

$$\vec{P}(t') = \vec{r}_0(t') + (t - t')c (\cos\{\omega t' + \psi(t')\}, \sin\{\omega t' + \psi(t')\}) \quad \text{Equation 45.}$$

Substituindo  $\hat{\lambda}$  na expressão acima, obtemos as linhas de campo na figura 6.



**Figura 6.** A imagem apresenta as linhas de campo elétrico produzidas por uma partícula em um acelerador síncrotron de raio  $a = 5m$  e  $\beta = 0.6$ .

## 5 CONCLUSÃO

Nesse trabalho foi apresentado uma abordagem para se gerar uma visualização explícita das linhas de campo elétrico geradas por uma partícula acelerada com velocidades relativísticas. Em geral, foi mostrado que as linhas de campo podem ser parametrizadas pelo tempo retardado, e as curvas são encontradas ao se resolver a equação 4. A equação para as linhas de campo foi resolvida em algumas situações específicas, obtendo-se expressões analíticas e seus gráficos.

## REFERÊNCIAS

1. <https://github.com/Ranier137/TE1>, 2020.
2. John David Jackson. *Classical electrodynamics*. John Wiley & Sons, 2007.
3. Benjamin Knorr. Uniform relativistic acceleration.
4. Daja Ruhlandt, Steffen Mühle, and Jörg Enderlein. Electric field lines of relativistically moving point charges. *American Journal of Physics*, 88(1):5–10, 2020.