Lemas de Incírculos y Excírculos

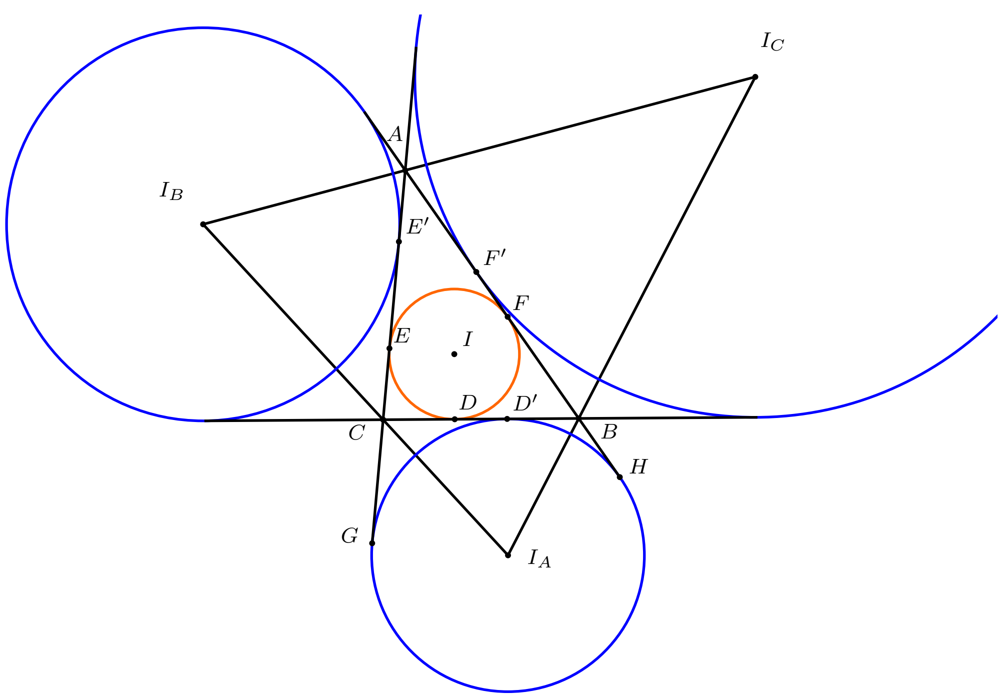
Eric Ransom

Abril 2023

Los incirculos están presentes en la mayoría de problemas de olimpiada, esta lista tiene como propósito observar algunas configuraciones y hechos conocidos que aparecen regularmente.

En la parte teórica estaremos trabajando con la siguiente configuración en el triángulo ABC:

- Sean γ el incírculo, I el incentro, $\gamma_A, \gamma_B, \gamma_C$, los excírculos opuestos a A, B, C respectivamente, I_A, I_B, I_C los excentros opuestos a A, B, C respectivamente, Γ el circuncírculo, O el circuncentro.
- Sean D, E, F los puntos de tangencia γ con BC, CA, AB respectivamente, D', G, H los puntos de tangencia de γ_A con BC, CA, AB respectivamente, E' el punto de tangencia de γ_B con CA, F' el punto de tangencia de γ_C con AB.
- En Γ, sean M_A, N_A el punto medio del arco que no contiene a A y el punto medio del arco que contiene a A respectivamente, definamos $M_B.N_B.M_C, N_C$ de análogamente.



1. Incírculos y Excírculos en triángulos

Ejercicio 1.1. *AN_A es la bisectriz externa de $\angle A$.*

Ejercicio 1.2. *M_A es el circuncentro de $BICI_A$.*

Ejercicio 1.3. *A, N_A, I_B, I_C son colineales.*

Ejercicio 1.4. *I es el ortocentro del triángulo I_A, I_B, I_C.*

Ejercicio 1.5. *Γ es la circunferencia de los nueve puntos del triángulo I_A, I_B, I_C.*

Teorema 1.6 (Razones con cevianas)

(Teorema de la bisectriz)

Sea X la intersección de la bisectriz interna de $\angle A$. Entonces $\frac{BA}{AC} = \frac{BX}{XC}$.

(Teorema de la bisectriz externa)

Sea X la intersección de la bisectriz externa de $\angle A$. Entonces $\frac{BA}{AC} = \frac{BX}{XC}$.

(Teorema de la bisectriz generalizada)

Sea X un punto en BC. Entonces $\frac{BA}{AC} \cdot \frac{sin(\angle BAX)}{sin(\angle XAC)} = \frac{BX}{XC}$.

(Teorema de Ceva)

Sean X, Y, Z puntos en en BC, CA, AB respectivamente. Entonces AX, BY, CZ concurren si y solo si $\frac{BX}{XC} \cdot \frac{CY}{YA} \cdot \frac{AZ}{ZB} = 1$.

(Teorema de Menelao)

Sean X, Y, Z puntos en en BC, CA, AB respectivamente. Entonces X, Y, Z son colineales si y solo si $\frac{BX}{XC} \cdot \frac{CY}{YA} \cdot \frac{AZ}{ZB} = -1$.

Lema 1.7 (Transformación de Ravi)

a, b, c son lados de un triángulo no degenardo si y sólo si existen tres reales positivos x, y, z, tal que $a = x + y$, $b = y + z$ y $c = x + z$, a esto se le conoce como transformación de Ravi.

Ejercicio 1.8. *Demuestra que $AF = BF'$, $BD = CD'$ y $CE = AE'$.*

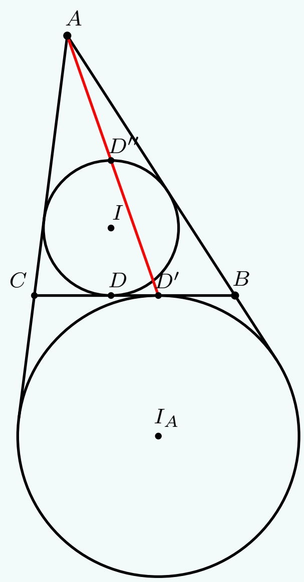
Ejercicio 1.9 (Punto de Gergonne)**.** *Demuestra que las rectas AD, BE y CF se cortan en un punto, este punto es conocido como el punto de Gergonne.*

Ejercicio 1.10 (Punto de Nagel)**.** *Demuestra que las rectas AD', BE' y CF' se cortan en un punto, este punto es conocido como el punto de Nagel.*

Los siguientes lemas son muy utilizados, por lo que es recomendable analizarlos a detalle, así como demostrarlos por tu cuenta.

Lema 1.11

Sea D'' el punto diametralmente opuesto de D en γ. Entonces A, D', D'' son colineales.

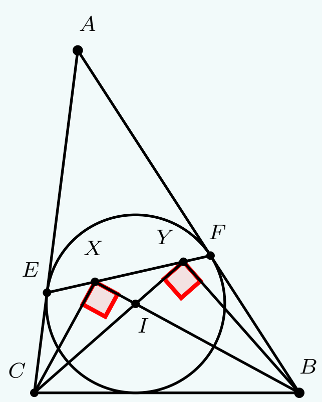


Lema 1.12 (Lema de Irán)

Sean X la intersección de BI con EF y Y la intersección de CI con EF. Entonces $\angle BYC = \angle BXC = 90°$.

De manera muy similar se cumple también que:

Sean X' la intersección de BI_A con GH y Y' la intersección de CI_A con GH. Entonces $\angle BY'C = \angle BX'C = 90°$.

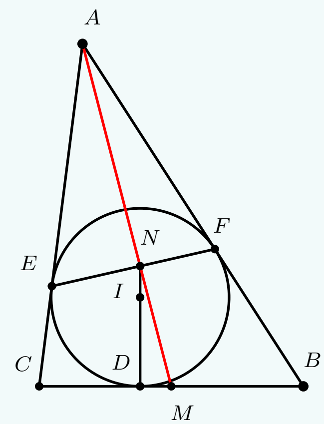


Lema 1.13

Si N es la intersección de DI con EF, entonces AN es la mediana del triángulo ABC.

De manera muy similar se cumple también que:

Si N' es la intersección de $D'I_A$ con GH, entonces AN' es la mediana del triángulo ABC.



2. Cuadriláteros tangenciales y extangenciales

Lema 2.1

Sea $ABCD$ un cuadrilátero tangencial tal que el círculo tangente a los lados tiene centro I. Entonces.$\angle AIB + \angle CID = 180°$.

Ejercicio 2.2. *Sea $ABCD$ un cuadrilátero y sea ℓ_A la bisectriz interna de $\angle A$, nombremos analogamente a ℓ_B,ℓ_C y ℓ_D. Sean P, Q, R y S las intersecciones de ℓ_A con ℓ_B, ℓ_B con ℓ_C, ℓ_C con ℓ_D y ℓ_D con ℓ_A respectivamente. Prueba que $PQRS$ es ciclico.*

Teorema 2.3 (Teorema de Pitot)

Sea $ABCD$ un cuadrilátero tangencial. Entonces $AB + CD = BC + DA$.

Ejercicio 2.4. *Sea $ABCDEF$ un hexágono tangencial. Prueba que $AB+CD+EF = BC+DE+FA$.*

Teorema 2.5 (Teorema de Steiner)

Sea $ABCD$ un cuadrilátero extangencial. Entonces $BC + CD = DA + AB$.

Teorema 2.6 (Teorema de Brianchon (cuadriláteros))

Sea $ABCD$ un cuadrilátero tangencial o extangencial. Sean E, F, G y H los puntos de tangencia del incírculo con AB, BC, CD, DA respectivamente. AC, BD, EG y FH concurren.

Ejercicio 2.7. *Prueba que EF, GH y AC concurren.*

3. Teoremas no tan conocidos

Teorema 3.1 (Teorema de Feuerbach)

La circunferencia de los nueve puntos de ABC es tangente a $\gamma, \gamma_A, \gamma_B, \gamma_C$.

Teorema 3.2 (Segundo Teorema de Kobayashi)

Sea $ABCD$ un cuadrilátero cíclico. Sean I_1, I_2, I_3, I_4 incentros de los triángulos ABC, BCD, CDA, DAB respectivamente. Entonces $I_1I_2I_3I_4$ es un rectángulo.

Teorema 3.3 (Teorema de Newton)

Sea $ABCD$ un cuadrilátero tangencial o extangencial tal que el centro del círculo tangente a los lados es I. Sean E y F los puntos medios de AC y BD. Entonces E, F, I son colineales.

Ejercicio 3.4. *Sea $P = AB \cap CD$ y $Q = BC \cap DA$. Si D es el punto medio de PQ, prueba que E, F y D son colineales.*

Teorema 3.5 (Teorema geométrico de Euler)

Sea r el inradio y R el circunradio. Entonces $OI^2 = R(2r - R)$.

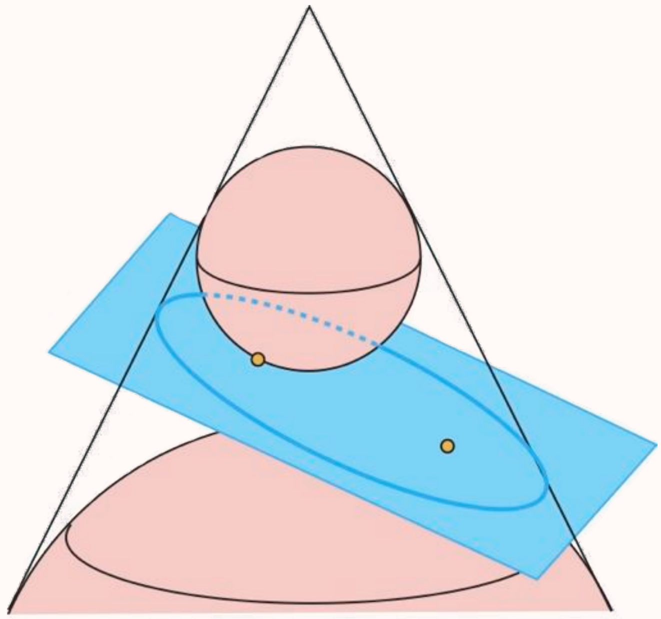
Lema 3.6 (Circunferencias de Jenkins y Punto de Spieker)

Se les conoce como Circunferencias de Jenkins a las tres circunferencias tangentes a $\gamma_A, \gamma_B, \gamma_C$ tal que cada una es tangente internamente a alguno de los excírculos y tangente externamente a los otros dos excírculos. Estas tres circunferencias concurren en el incentro del triángulo medial, mejor conocido como el Punto de Spieker.

Ejercicio 3.7. *Prueba que los ejes radicales de γ_A, γ_B y γ_A concurren en el punto de Spieker.*

TMSPD (Teorema solo para dignos, **Esferas de Dandelin**)

En el plano $\mathbb{R}^3$, sean γ_1 y γ_2 dos esferas de distinto radio, y sea Ω un cono tangente a γ_1 y γ_2. Un plano tangente internamente a γ_1 y γ_2 corta a Ω formando una elipse Γ. Sean F_1 y F_2 los puntos de tangencia de γ_1 y γ_2 con Γ respectivamente. Entonces F_1 y F_2 son los focos de Γ.



4. Problemas

4.1. Nivel I

Problema 4.1. *Sea ABC un triángulo tal que $\angle BAC = 60°$. Sea I su incentro y O su circuncentro. Prueba que $BOIC$ es cíclico.*

Problema 4.2. *Sea ABC un triángulo con incentro I. Sea N el punto medio del arco BC que contiene a A. Prueba que $\angle NBI = \angle ICB$ y que $\angle NCI = \angle IBC$.*

Problema 4.3. *Sea ABC un triángulo tal que $AB = AC$ y sea I su incentro. Prueba que si D es el punto de tangencia del incírculo con BC, entonces A, I y D son colineales.*

Problema 4.4. *Sea ABC un triángulo tal que D es la intersección de la bisectriz interna de $\angle A$ con BC y E es la intersección de la bisectriz externa de $\angle A$ con BC. Sean M el punto medio del arco BC que no contiene a A y N el que contiene a A. Prueba que $DN \perp EM$.*

Problema 4.5. *Sea ABC un triángulo con incentro I. Sea M la intersección de AI con el circuncírculo de ABC. El incirculo de ABC es tangente a AC y AB en E y F respectivamente. Prueba $\angle MFB = \angle MEC$.*

Problema 4.6. *Sea ABC un triángulo cuyo inradio es r y semiperímetro es s. Prueba que el área del triángulo ABC es $r \cdot s$.*

Problema 4.7. *Sea $ABCD$ un cuadrilátero circunscrito cuyo inradio es r y semiperímetro es s. Prueba que el área del cuadrilátero $ABCD$ es $r \cdot s$.*

Problema 4.8 (AMO 2009 P7)**.** *Sea ABC un triángulo, y sean E y F los puntos de tangencia de su incírculo con los lados AB y AC respectivamente. Sea M la intersección del circuncírculo de EFB con AC y sea N la intersección del circuncírculo de FEC con AB. Prueba que MN es tangente al incírculo de ABC.*

Problema 4.9. *Sea ABC un triángulo, sea D el punto de tangencia del incírculo con BC y sea I_A el excentro opuesto a A. Si M es el punto medio de DI_A, prueba que $MB = MC$.*

Problema 4.10. *Sea ABC un triángulo y sean E, F los puntos de tangencia del A-excírculo con AC, AB respectivamente. Sean P el punto de tangencia del B-excírculo con AC, y Q el punto de tangencia del C-excírculo con AB. Prueba que EF, BC y PQ concurren.*

Problema 4.11. *Sea ABC un triángulo con incírculo γ. Sea D el punto de tangencia de γ con BC y sea M el punto medio de BC. Si el círculo de centro M y radio MD corta a γ en F y a BC en E, prueba que A, E, F son colineales.*

4.2. Nivel II

Problema 4.12. *Sea ABC un triángulo con incentro I. Los círcuncirculos de los triángulos ABI y ACI intersecan BC otra vez en X y Y respectivamente. Las lineas AX y BI se intersecan en P, y las lineas AY y CI se intersecan en Q. Prueba que $BCQP$ es cíclico.*

Problema 4.13. *Sea ABC un triángulo cuyo incírculo es tangente a los lados BC, CA, AB en D, E, F respectivamente, La recta perpendicular a BC que pasa por B corta a la recta EF en M, y la recta perpendicular a BC que pasa por C corta a la recta EF en N. Las rectas DM y DN cortan al incírculo de ABC en P y Q. Prueba que $DP = DQ$.*

Problema 4.14 (EGMO 2019 P4)**.** *Sea ABC un triángulo con incentro I. El círculo que pasa por B y es tangente a AI en I interseca al lado AB otra vez en P. El círculo que pasa por C y es tangente a AI en I interseca al lado AC otra vez en Q. Prueba que PQ es tangente al incirculo de ABC.*

Problema 4.15. *El incírculo de un triángulo ABC toca a los lados BC, CA, AB en D, E, F respectivamente. Sea X un punto dentro del triángulo ABC tal que el incírculo del triángulo XBC toca al lado BC en D, y toca a los lados XB y XC en Y y Z respectivamente. Prueba que E, F, Y, Z son concílicos.*

Problema 4.16. *El incírculo de un triángulo ABC toca a los lados BC, CA, AB en D, E, F respectivamente. Un círculo que pasa por B y C interseca a la recta EF en P y Q. Prueba que el punto medio de AB se encuentra en el circuncírculo de PDQ.*

Problema 4.17 (OMM 2015 P5)**.** *Sea I el incentro de un triángulo acutángulo ABC. La recta AI corta por segunda vez al circuncírculo del triángulo BIC en E. Sean D el pie de la altura desde A sobre BC y J la reflexión de I con respecto a BC. Muestra que los puntos D, J y E son colineales.*

Problema 4.18. *Sea ABC un triangulo con incentro I. El incírculo es tangente a los lados BC, CA, AB en D, E, F respectivamente. Sea T es el circuncentro del triángulo AEF y sea D' la reflección de D respecto a EF. $D'I$ interseca a DT en G. Prueba que el circuncirculo del triángulo $D'GD$ es tangente a ID.*

4.3. Nivel III

Problema 4.19 (OMM 2005 P6). *Sea ABC un triángulo y AD la bisectriz del $\angle BAC$, con D sobre BC. Sea E un punto sobre el segmento BC tal que $BD = EC$. Por E traza ℓ la recta paralela a AD y considera un punto P sobre ℓ y dentro del triángulo. Sea G el punto donde la recta BP corta al lado AC y sea F el punto donde la recta CP corta al lado AB. Muestra que $BF = CG$.*

Problema 4.20. *Sea ABC un triángulo con circuncírculo Ω e incentro I. Sea M la intersección de AI con Ω y sea $N \neq M$ el punto medio del arco BC. El A-excírculo es tangente a BC en E. Sea $Q \neq I$ un punto en el circuncírculo de MIN tal que $IQ \parallel BC$. Prueba que $AE \cap QN$ está en Ω.*

Problema 4.21. *Sea ABC un triángulo, y sean D, E y F los puntos de tangencia del A-excírculo con BC, CA y AB respectivamente. Sean P y G las intersecciones de AD con EF y el A-excírculo respectivamente. Sea M el punto medio de DG, y sea Q la segunda intersección del circuncírculo de MFB con el de MEC. Prueba que $PQ \perp BC$.*

Problema 4.22 (PAGMO 2021 P6). *Sea ABC un triángulo con incentro I, y con A-excentro Γ. Sean A_1, B_1, C_1 los puntos de tangencia de Γ con BC, CA y AB respectivamente. Supón que IA_1, IB_1 y IC_1 intersecan Γ por segunda ocasión en los puntos A_2, B_2, C_2, respectivamente. M es el punto medio del segmento AA_1. Si la intersección de A_1B_1 y A_2B_2 es X, y la intersección de A_1C_1 y A_2C_2 es Y, prueba que $MX = MY$.*

Problema 4.23. *Sea ABC un triángulo con incentro I y sea D el punto de tangencia de su incírculo con BC. Sean X, Y puntos en el segmento BI, CI respectivamente, tal que $\angle BAC = 2\angle XAY$. Prueba que $\angle XDY = 90°$.*

Problema 4.24. *Sea ABC un triángulo con $AB = AC \neq BC$ y sea I su incentro. La recta BI interseca a AC en D, y la recta que pasa por D perpendicular a AC interseca a AI en E. Prueba que la reflexión de I sobre AC se encuentra en el circuncírculo de BDE.*

4.4. Nivel Enfermo

Problema 4.25. *Un cuadrilátero convexo $ABCD$ tiene un círculo inscrito cuyo centro es I. Sean I_A, I_B, I_C, I_D los incentros de los triángulos DAB, ABC, BCD, CDA respectivamente. Supón que las tangentes externas en común de los círculos AI_BI_D y CI_BI_D se intersecan en X, y que las tangentes externas en común de los círculos BI_AI_C y DI_AI_C se intersecan en Y. Prueba que $\angle XIY = 90°$.*

Problema 4.26. *Sea $ABCD$ un cuadrilátero convexo con tal que $BA \neq BC$. Sean ω_1 y ω_2 los incírculos de los triángulos ABC y ADC respectivamente. Supón que existe un círculo ω tangente al rayo BA después de A y al rayo BC después de C, tal que es también tangente a las rectas AD y CD. Prueba que las tangentes externas en común de ω_1 y ω_2 se intersecan en ω.*

Problema 4.27. *Fijen un círculo Γ, una recta ℓ tangente a Γ, y otro círculo Ω disjunto de ℓ tal que Γ y Ω yacen en lados opuestos de ℓ. Las tangentes a Γ desde un punto variable X en Ω corta ℓ en Y y Z. Prueba que, en lo que X varía sobre Ω, el circuncírculo de XYZ es tangente a dos círculos fijos.*

5. Referencias

I) AOPS.

II) Google Imágenes.