Moving Points III

Eric Ransom Treviño

Noviembre 2023

1. Preliminares

Es recomendable checar la lista de Moving Points I y Homografías para contexto. Moving points es un metódo de demostración para problemas de geometría. Existen tres metódos de moving points y esta lista corresponde al tercero. Se analizarán las propiedades de puntos variables en cónicas o rectas y se revisarán transformaciones que preserven razón cruzada como podrían ser las rotaciones, traslaciones, homotecia, inversión, perspectivas, homografías, etc.

Estaremos trabajando en $\mathbb{RP}^2$ a lo largo de todo el documento, por lo que los puntos al ininito y la recta al ininito tienen las mismas propiedades que cualquier otro punto y cualquier otra recta.

Definición 1.1 (Plano proyectivo real) — El plano proyectivo real $\mathbb{RP}^2$ es el plano real $\mathbb{R}^2$ incluyendo los puntos al infinito.

1.1. Coordenadas Homogéneas

Los puntos al infinito son clave para generalizar y utilizar las herramientas que se manejan en el método de moving points. Tristemente, el sistema de coordenadas del plano cartesiano para definir los puntos en $\mathbb{R}^2$ es limitado y no tiene coordenadas para los puntos al infinito. Las coordenadas homogéneas son las que pertenecen a $\mathbb{RP}^2$, y una manera muy bonita de explicar la motivación de su definición es mediante una perspectiva geométrica. Tomemos el plano $\mathbb{R}^3$ y el conjunto infinito de rectas que pasan por el origen, dado un punto (a, b, c) hay una única recta que pasa por este y el origen, y todos los puntos en esta recta son de la forma $(\lambda a, \lambda b, \lambda c)$, además, cada recta que pasa por el origen, interseca al plano $z = 1$ en un punto distinto (incluyendo los puntos al infinito), por lo que la siguiente definición pertenece al sistema de coordenadas para $\mathbb{RP}^2$:

Definición 1.2 (Coordenadas homogéneas en $\mathbb{RP}^2$) — Los puntos en $\mathbb{RP}^2$ son de la forma $(a : b : c) = (\lambda a : \lambda b : \lambda c)$ que corresponde al punto $(\frac{a}{c}, \frac{b}{c})$ en $\mathbb{R}^2$. Los puntos al infinito corresponden a $(a : b : 0)$ y el punto $(0 : 0 : 0)$ no está definido.

Definición 1.3 (Rectas en coordenadas homogéneas) —

Teorema 1.4 (Función de recta entre dos puntos)

Teorema 1.5 (Función intersección de dos rectas)

Definición 1.6 (Homografía en matrices) —

2. Método de Moving Points en Grados de Polinomios

Definición 2.1 (Moving Point) — Definimos moving point al punto en $\mathbb{RP}^2$ definido bajo un parámetro t, donde P, Q y R son polinomios fijos:

$$(P(t) : Q(t) : R(t))$$

$t = \infty$ es definido por continuidad.

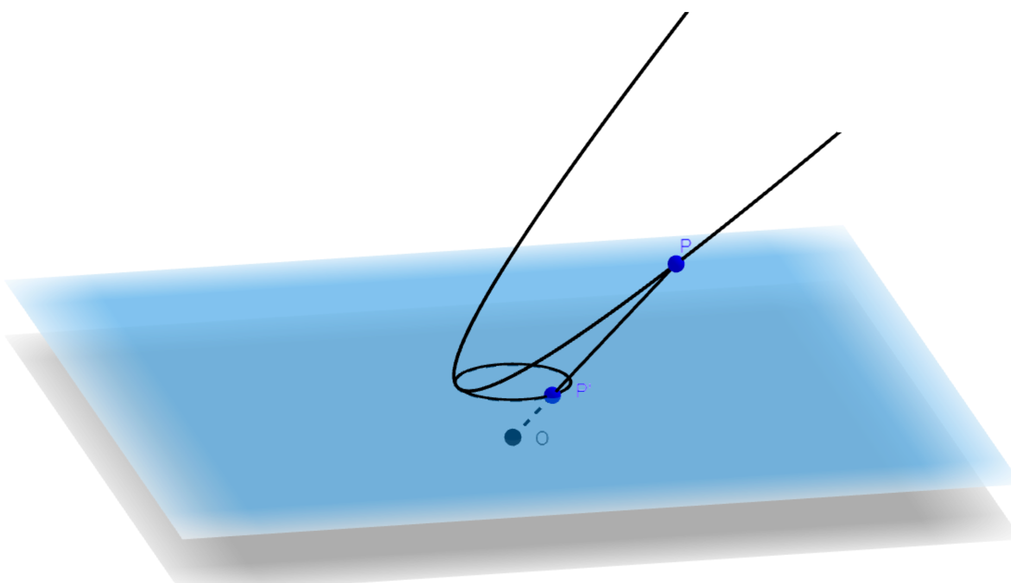

Figura 1: Siendo O el origen en $\mathbb{R}^3$, si definimos el moving point $(t^2 - 1 : 2t : t^2 + 1)$, podemos notar que los puntos en $\mathbb{RP}^2$ forman el círculo unitario, mientras su forma en $\mathbb{R}^3$ siendo $(t^2 - 1, 2t, t^2 + 1)$ forma una parábola

Definición 2.2 (Moving Line) —

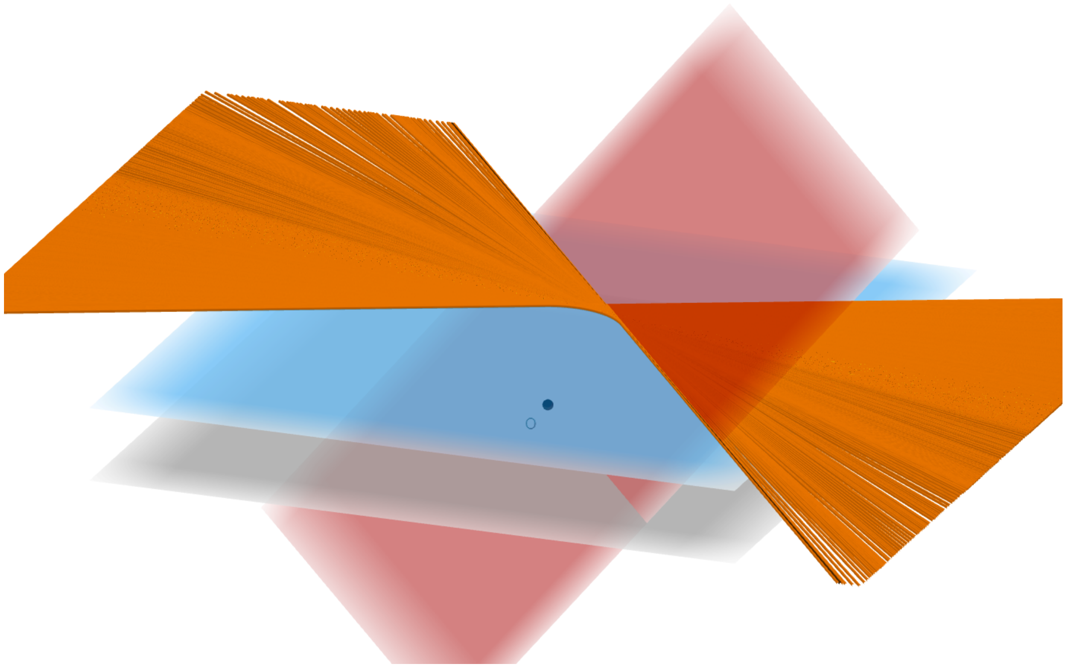

Figura 2: Siendo O el origen en $\mathbb{R}^3$, definimos la moving line $[t^2-1 : 2t : t^2+1]$ pero solamente observamos el lugar geométrico de estas rectas en (-0.2, 0.5), notando que la recta se mueve tangente al círculo unitario.

Definición 2.3 (Grado de un moving point o moving line) —

Teorema 2.4 (Moving line correspondiente a dos moving points)

Demostración. □

Teorema 2.5 (Moving point correspondiente a dos moving lines)

Demostración. □

Teorema 2.6 (Homografías preservan grado)

Demostración. ☐

Teorema 2.7 (Mapeos proyectivos entre rectas/cónicas/haces de rectas)

Demostración. ☐

Teorema 2.8 (Tres puntos colineales)

Demostración. ☐

Teorema 2.9 (Tres rectas concurrentes)

Demostración. ☐

Teorema 2.10 (Grado de moving line entre dos moving points en una cónica)

Demostración. ☐

Teorema 2.11 (Moving points en complejos)

Demostración. ☐

Ejemplo 2.12

Demostración. ☐

Ejemplo 2.13

Demostración. ☐

Ejemplo 2.14

Demostración. □

3. Problemas

Problema 3.1.

Problema 3.2 (Teorema de Kariya)**.** *Sea ABC un triángulo con incentro I y sean D, E y F los puntos de tangencia del incírculo con BC, CA y AB respectivamente. Sean X, Y y Z puntos en los rayos ID, IE y IF tal que $IX = IY = IZ$. Prueba que las rectas AX, BY y CZ concurren.*

Problema 3.3.

Problema 3.4. *Sea M el punto medio del arco BC del circuncírculo de un triángulo ABC. Sea D un punto en arco BC distinto de M. Sea E la intersección de AB con CD. Sea F la intersección de AC con BD. EM y FM se intersecan con BC en P y Q respectivamente. Demuestra que $APDQ$ es cíclico.*

Problema 3.5.

Problema 3.6.

Problema 3.7 (Teorema de Kiepert)**.** *Sea ABC un triángulo y sean X, Y y Z puntos tal que los triángulos BXC, AYC y AZB son semejantes con $BC = XC, CY = YA$ y $AZ = ZB$. Prueba que las rectas AX, BY y CZ concurren en una cónica fija que pasa por A, B y C.*

Problema 3.8 (Teorema de Newton en cuadriláteros)**.** *Sea Ω un círculo inscrito al cuadrilátero $ABCD$. Sean E y F los puntos medios de AC y BD respectivamente. Demuestra que el centro de Ω está en EF.*

Problema 3.9 (Recta de Gauss)**.** *En el cuadrilátero $ABCD$, E y F son las intersecciones de AB con CD y AD con BC, respectivamente. Sean M, N y K los puntos medios de AC, BD y EF. Demuestra que M, N y K son colineales.*

Problema 3.10 (USA TST 2020 P2)**.** *Dos círculos Γ_1 y Γ_2 tienen tangentes comunes externas ℓ_1 y ℓ_2 que se intersecan en T. Supón que ℓ_1 toca a Γ_1 en A y ℓ_2 a Γ_2 en B. Sea Ω un círculo que pasa por A y B e interseca a Γ_1 en C y a Γ_2 en D tal que el cuadrilátero $ABCD$ es convexo. Las rectas AC y BD se intersecan en X, mientras que las rectas AD y BC en Y. Demuestra que T, X y Y son colineales.*

Problema 3.11.

Problema 3.12 (IGO 2015 P3)**.** *Sea H el ortocentro del triángulo ABC, y sean ℓ_1 y ℓ_2 dos rectas por H tal que son perpendiculares entre sí. Sean D y E las intersecciones de BC con ℓ_1 y ℓ_2, respectivamente. Sea Z la intersección de ℓ_1 con AB, y X la de ℓ_2 con AC. Sea d_1 la recta por D paralela a AC, d_2 una recta por E paralela a AB, y sea Y la intersección de d_1 y d_2. Demuestra que X, Y y Z son colineales.*

Problema 3.13 (USA TSTST 2019 P5). *Sea ABC un triángulo acutángulo con ortocentro H y circuncírculo Γ. Una línea que pasa por H interseca a los segmentos AB y AC en E y F respectivamente. Sea K el circuncentro del triángulo AEF, y supón que la recta AK interseca a Γ en D. Prueba que la recta HK y la recta que pasa por D perpendicular a BC concurren en Γ.*

Problema 3.14 (IMO SL 2012 G8). *Sea ABC un triángulo con circuncírculo ω y ℓ una línea sin puntos en común con ω. Sea P el pie de la perpendicular desde el centro de ω a ℓ. Las rectas BC, CA y AB intersecan a ℓ en los puntos X, Y y Z distintos de P. Demuestra que los circuncírculos de AXP, BYP y CZP tienen un punto en común distinto de P o son mutuamente tangentes en P.*

Problema 3.15 (IGO 2015 P5). *Rectángulos ABA_1B_2, BCB_1C_2 y CAC_1A_2 yacen fuera del triángulo ABC. Sea C' tal que $C'A_1$ es perpendicular a A_1C_2 y $C'B_2$ es perpendicular a B_2C_1. Los puntos A' y B' son definidos similarmente. Demuestra que AA', BB' y CC' concurren.*

4. Bibliografía

I) Shen, E. (2 de diciembre de 2020). Nuclear geometry. http://ericshen.net/handouts/ZG-nuclear.pdf

II) Zveryk, V. (29 de julio de 2019). The Method of Moving Points. https://cdn.bc-pf.org/resources/math/geometry/bash/Vladyslav_Zveryk-The_Method_of_Moving_Points.pdf

III) Chroman, Z., Goel, G., Mudgal, A. (Noviembre 2019). The Method of Animation. https://services.artofproblemsolving.com/download.php?id=YXR0YWNobWVudHMvOS80L2MxYTVkYmU5MGRlZWRjNGExYzhkYmQxOTU3NWNhYTU4OGYxMDhhLnBkZg==&rn=QW5pbWF0aW9uLnBkZg==