Simedianas

Eric Ransom Treviño

Octubre 2023

1. Preliminares

Este documento analiza las propiedades y usos frecuentes de la recta isogonal a la mediana, por lo que es conveniente y necesario tener presente algunas propiedades y definiciones de las rectas isogonales.

Definición 1.1 (Isogonales) — Dado un triángulo ABC, se dice que dos rectas ℓ y g son isogonales si pasan por un vértice y una es la reflexión de la otra respecto a la bisectriz del ángulo. En otras palabras, dados punto P en ℓ y Q en g, AP y AQ son isogonales si $\angle BAP = \angle CAQ$.

Teorema 1.2 (Ceva trigonométrico)

Dado un triángulo ABC y P un punto, se cumple la siguiente relación de razones:

$$\frac{\sin \angle BAP}{\sin \angle PAC} \cdot \frac{\sin \angle ACP}{\sin \angle PCB} \cdot \frac{\sin \angle CBP}{\sin \angle PBA} = 1$$

Es importante mencionar la unicidad de P: dadas dos rectas BP y CP, existe una única recta AP que cumple la razón de ceva trigonométrico, en otras palabras, este teorema es un si y sólo si.

Teorema 1.3 (Conjugado Isogonal)

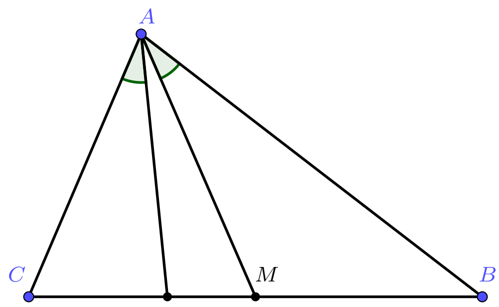
Dado un triángulo ABC, para cada punto P se cumple que las rectas isogonales a AP, BP y CP concurren en un punto conocido como el conjugado isogonal de P.

Demostración. Sea Q un punto tal que BQ y CQ son las rectas isogonales a BP y CP respectivamente, basta con demostrar que $\angle BAP = \angle CAQ$. Por ceva trigonométrico se cumple que $\frac{\sin \angle ACP}{\sin \angle PCB} \cdot \frac{\sin \angle CBP}{\sin \angle PBA} = \frac{\sin \angle PAC}{\sin \angle BAP} = \frac{\sin \angle QAB}{\sin \angle CAQ} = \frac{\sin \angle BCQ}{\sin \angle QCA} \cdot \frac{\sin \angle ABQ}{\sin \angle QBC}$, entonces AQ es isogonal a AP porque $\frac{\sin \angle PAC}{\sin \angle BAP} = \frac{\sin \angle QAB}{\sin \angle CAQ}$, dando así el resultado deseado por unicidad en ceva trigonométrico. $\square$

2. Simedianas

Cuando un problema de geometría de olimpiada menciona puntos medios de segmentos, una técnica muy común para atacar y observar propiedades del problema es mediante la recta simediana.

Definición 2.1 (Simediana) — Sea ABC un triángulo y M el punto medio de BC. Se le denota como A-simediana a la recta isogonal a AM.



La definición puede parecer muy sencilla, pero hay muchas propiedades que a simple vista pasan desapercibidas. Conocer estas propiedades puede marcar la diferencia entre resolver un problema en una olimpiada o no, la propiedad más común y utilizada es la siguiente.

Teorema 2.2

Sea P la intersección de las tangentes por B y C al circuncírculo de un triángulo ABC. Entonces AP es la A-simediana.

Demostración. Utilizando el teorema 1.3, definamos Q al conjugado isogonal de P. Notemos que $BQ \parallel AC$, ya que $\angle CBP = \angle BAC$ porque BP es tangente, y $\angle CBP = \angle ABP$ porque BP y BQ son isogonales, análogamente se cumple que $CQ \parallel AB$. Con esto se tiene que $ABQC$ es un paralelogramo, entonces AQ pasa por el punto medio de BC, concluyendo así que AP es la simediana. $\square$

El teorema 2.2 puede demostrarse de varias maneras, pero a mi consideración, la demostración más elegante es la anterior. Los conjugados isogonales aparecen poco en problemas de olimpiada, pero cuando lo hacen presentan soluciones muy elegantes y eficientes como en el caso del problema 5 de la IGO del 2018 del nivel intermedio.

Definición 2.3 (Antiparalela) — En un triángulo ABC, una recta ℓ interseca a AB y AC en Q y P respectivamente. ℓ es antiparalela a BC si los triángulos ABC y APQ son semejantes.

Además de optimizar la escritura de soluciones de problemas, usar el termino antiparalela facilita identificar propiedades conocidas de estas rectas y dan una nueva perspectiva de los cuadriláteros cíclicos, ya que **BCPQ es cíclico** por la semejanza.

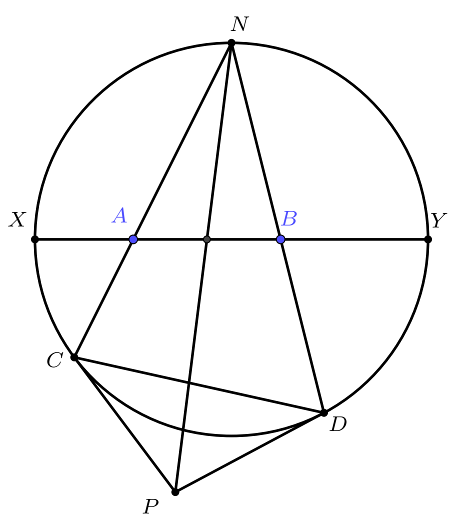
Teorema 2.4

Sea ABC un triángulo, una recta antiparalela a BC corta a los lados AB y AC en Q y P. Entonces la A-simediana del triángulo ABC es la A-mediana del triángulo APQ.

Demostración. Por la definición 2.3, se tiene que el triángulo ABC es semejante al triángulo APQ. Sea M el punto medio de BC y M' la intersección de la A-simediana con PQ. Dado que $\angle M'AP = \angle MAB$ por simediana y $\angle ABM = \angle APM'$ porque $\triangle APQ \sim \triangle ABC$, se cumple que $\triangle APM' \sim \triangle ABM$. Entonces $\frac{AP}{AB} = \frac{PM'}{BM}$, además se tiene que $\frac{AF}{AB} = \frac{PQ}{BM}$, dividiendo los resultados entre sí se obtiene que $\frac{PM'}{PQ} = \frac{BM}{BC} = 1/2$, entonces PM' es la mitad de PQ, demostrando así que M' es el punto medio de PQ. □

Ejemplo 2.5

Sea XY un diámetro de una circunferencia Γ, y N el punto medio de uno de los arcos XY. Se eligen dos puntos A y B en XY. Las rectas NA y NB cortan por segunda vez a Γ en C y D respectivamente. Las tangentes a Γ por C y D se cortan en P. Muestra que NP pasa por el punto medio de AB.



Demostración. Por el teorema 2.2, NP es la N-simediana del triángulo NDC. Notemos que $\angle NAB = \angle NCY + \angle XYC$ por ángulo externo al triángulo ACY, además $\angle NCY = \angle NDX$ porque $NX = NY$ dado que N es punto medio del arco XY y $\angle XYC = \angle XDC$ por arcos iguales. Entonces $\angle NAB = \angle NDX + \angle XDC = \angle NDC$, demostrando así que el triángulo $NAB \sim NDC$ por criterio AA. Por el teorema 2.4, como AB es antiparalela a CD en el triángulo NCD, la N-simediana del triángulo NCD es la mediana del triángulo NAB, demostrando así que la recta NP pasa por el punto medio de AB. □

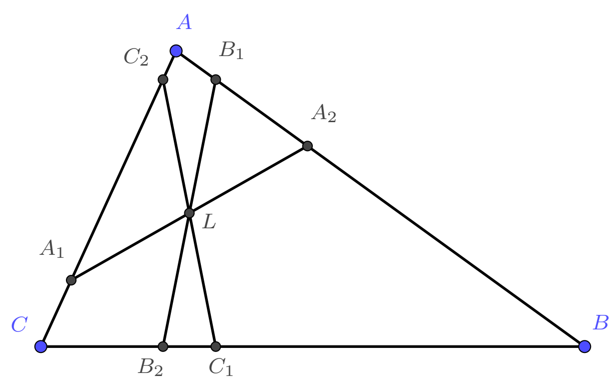
Proposición 2.6 (Punto de Lemoine)

Dado un triángulo ABC, la A-simediana, B-simediana y C-simediana concurren en un punto conocido como el punto de Lemoine.

La existencia del punto de Lemoine es un resultado inmediato por el teorema 1.3, porque es conocido que las medianas concurren en el gravicentro de ABC. Cabe destacar que, por el teorema 2.2, el punto de Gergonne de ABC es el punto de Lemoine del triángulo tangencial.

Ejemplo 2.7

Sea ABC un triángulo y L el punto de Lemoine. Sean A_1 y A_2 puntos en AB y AC tal que A_1A_2BC es cíclico y la recta A_1A_2 pasa por L. Definamos análogamente a B_1, B_2, C_1 y C_2. Demuestra que $A_1A_2B_1B_2C_1C_2$ es un hexágono cíclico.



Demostración. Notemos que A_1A_2 es antiparalela a BC en el triángulo ABC, porque AA_1A_2 es semejante a ABC por el cíclico BCA_1A_2. Entonces por el teorema 2.4, L es el punto medio de A_1A_2, análogamente también es el punto medio de B_1B_2 y C_1C_2. Con esto se tiene que $B_1C_2 \parallel B_2C_1$, pero la recta B_2C_1 es la recta BC, entonces $BC \parallel B_1C_2$. Además, como C_1C_2 es antiparalela a AB se tiene que C_1C_2 también es antiparalela a B_1C_2, cumpliendo así que $A_1A_2B_1C_2$ es cíclico, análogamente $B_1B_2C_1A_2$ y $C_1C_2A_1B_2$ son cíclicos. Por ejes radicales, si $A_1A_2B_1C_2, B_1B_2C_1A_2$ y $C_1C_2A_1B_2$ tienen circuncírculos distintos, se cumple que B_1A_2, C_1B_2 y A_1C_2 concurren, llegando así a una contradicción, entonces $A_1A_2B_1B_2C_1C_2$ es cíclico. □

Previamente hemos observado únicamente configuraciones conocidas de la simediana, pero es importante tener en mente resultados relacionados a razones de distancias.

Teorema 2.8 (Steiner's Ratio Theorem)

Sea ABC un triángulo y sean D y E puntos en BC tal que AD y AE son rectas isogonales. Entonces se cumple que

$$\frac{AB^2}{AC^2} = \frac{BD}{DC} \cdot \frac{BE}{EC}$$

Demostración. Por el teorema de la bisectriz generalizada en el triángulo ABC, se cumple que $\frac{AB}{AC} \cdot \frac{\sin\angle BAD}{\sin\angle DAC} = \frac{BD}{DC}$ y $\frac{AC}{AB} \cdot \frac{\sin\angle CAE}{\sin\angle EAB} = \frac{CE}{EB}$, y notemos que $\frac{\sin\angle BAD}{\sin\angle DAC} = \frac{\sin\angle CAE}{\sin\angle EAB}$ por isogonales, entonces al dividir ambos resultados demostramos lo deseado $\frac{AB^2}{AC^2} = \frac{BD}{DC} \cdot \frac{BE}{EC}$. □

Corolario 2.9

Sea ABC un triángulo y P la intersección de la A-simediana con BC. Entonces se cumple que

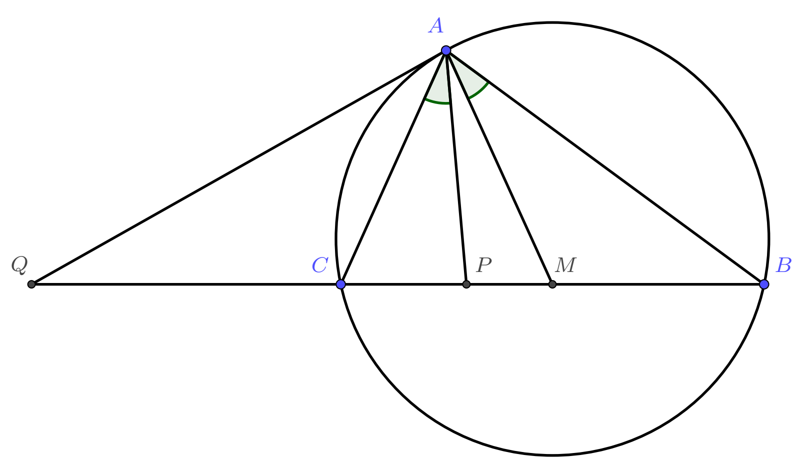
$$\frac{AB^2}{AC^2} = \frac{BP}{PC}$$

Este resultado es trivial por el teorema 2.8, ya que si M es el punto medio de BC se cumple que $\frac{AB^2}{AC^2} = \frac{BP}{PC} \cdot \frac{BM}{MC}$ y sabemos que $\frac{BM}{MC} = 1$.

Ejemplo 2.10

Sea Q la intersección de la tangente por A al circuncírculo de un triángulo ABC con BC. Sea M el punto medio de BC y P un punto en BC tal que $\angle CAP = \angle BAM$. Demuestra que

$$\frac{BQ}{QC} = \frac{BP}{PC}$$



Demostración. Por el corolario 2.9, basta con demostrar que $\frac{BQ}{QC} = \frac{AB^2}{AC^2}$ para terminar el problema. Notemos que por tangente, el triángulo $QAC \sim QBA$, entonces por las razones de los triángulos obtenemos que $\frac{AB}{AC} = \frac{QB}{QA} = \frac{QA}{QC}$, entonces obtenemos $\frac{AB^2}{AC}^2 = \frac{QB}{QA} \cdot \frac{QA}{QC} = \frac{QB}{QC}$, concluyendo la demostración del problema. □

El ejemplo 2.10 es un resultado más importante de lo que parece, ya que $\frac{BQ}{QC} = \frac{BP}{PC}$ significa que $(B, C; P, Q) = -1$, en otras palabras P y Q son **conjugados armónicos** respecto a BC.

Teorema 2.11

Sea ABC un triángulo, y P la intersección de la A-simediana con el circuncírculo de ABC. Entonces se cumple que

$$\frac{AB}{AC} = \frac{PB}{PC}$$

Demostración. Sea M el punto medio de BC y sea P' la intersección de AM con el circuncírculo de ABC, notemos que $\frac{PB}{PC} = \frac{P'C}{P'B}$, por que AP' y AP son isogonales. Además, $\frac{AB}{MB} = \frac{P'C}{P'M}$ y $\frac{AC}{MC} = \frac{P'B}{P'M}$ por las semejanzas en el cuadrilátero cíclico $ABP'C$, entonces $\frac{AB}{AC} = \frac{P'C}{P'B}$, demostrando así que $\frac{AB}{AC} = \frac{P'C}{P'B} = \frac{PB}{PC}$. □

Que estas dos razones sean iguales significa que el cuadrilátero $ABPC$ es un **cuadrilátero armónico**.

3. Problemas

Problema 3.1. *Sea ABC un triángulo con $AC = BC$, y P un punto en su interior tal que $\angle PAB = \angle PBC$. Si M es el punto medio de AB, muestra que $\angle APM + \angle BPC = 180\circ$.*

Problema 3.2. *La tangente a la circunferencia circunscrita de un triángulo ABC por el punto A interseca a la línea BC en un punto P. Se traza la otra tangente a la circunferencia desde P y esta la interseca en un punto Q. Demuestra que AQ es simediana del triángulo ABC.*

Problema 3.3. *La recta ℓ es perpendicular al segmento AB y pasa por B. La circunferencia con el centro situado en ℓ pasa por A y corta ℓ en los puntos C y D. Las tangentes a la circunferencia en los puntos A y C se intersecan en N. Demuestra que la recta DN divide al segmento AB por la mitad.*

Problema 3.4. *Sea ABC un triángulo con $\angle B - \angle A = 90°$. Sobre el lado BC se toma un punto P tal que $PA = PB$. Sean M y N los puntos medios de AB y AC respectivamente, y sea Q un punto sobre MN tal que MP es paralela a AB. Muestra que $\angle BCQ = \angle ACM$.*

Problema 3.5. *Sea N el punto de intersección de las tangentes a la circunferencia circunscrita de un triángulo ABC trazadas por los puntos B y C. Sea M un punto en la circunferencia de tal manera que AM es paralelo a BC y sea K el punto de intersección de MN con la circunferencia. Demuestra que KA divide BC por la mitad.*

Problema 3.6. *Sea $ABCD$ un cuadrilátero cíclico. Muestra que existe un punto X en el segmento BD tal que $\angle BAC = \angle XAD$ y $\angle BCA = \angle XCD$ si y solo si existe un punto Y en el segmento AC tal que $\angle CBD = \angle YBA$ y $\angle CDB = \angle YDA$.*

Problema 3.7. *Sean Γ_1 y Γ_2 circunferencias que se intersecan en A y B. Una tangente común a Γ_1 y Γ_2 toca a Γ_1 en P y a Γ_2 en Q. Sea S la intersección de las tangentes en P y Q al circuncírculo de APQ, y sea H la reflexión de B respecto a PQ. Muestra que A, S y H son colineales.*

Problema 3.8. *Se considera el triángulo ABC y su circunferencia circunscrita. Si D y E son puntos sobre el lado BC tales que AD y AE son, respectivamente, paralelas a las tangentes en C y en B a la circunferencia circunscrita. Demuestra que*

$$\frac{BE}{CD} = \frac{AB^2}{AC^2}.$$

Problema 3.9. *Sea Γ una circunferencia y A un punto fuera de ella. Sean M y N puntos en Γ tales que AM y AN son tangentes a Γ. Una recta pasa por A y corta a Γ en K y L. Sea ℓ una recta paralela a M, y sean P y Q las intersecciones de ℓ con MK y ML. Muestra que MN biseca a PQ.*

Problema 3.10. *Sea ABC un triángulo acutángulo, M el punto medio de BC, y N un punto en el arco menor BC del circuncírculo de ABC tal que $\angle BAN = \angle CAM$. Sea R el punto medio de AM, S el punto medio de AN, y T el pie de la altura desde A. Muestra que R, S y T son colineales.*

Problema 3.11. *La recta ℓ es perpendicular al segmento AB y pasa por B. La circunferencia con el centro situado en ℓ pasa por A y corta ℓ en los puntos C y D. Las tangentes a la circunferencia en los puntos A y C se intersecan en N. Demuestra que la recta DN divide el segmento AB por la mitad.*

Problema 3.12. *Sea ABC un triángulo acutángulo con $AB < AC$ y ω su circuncírculo. Sean ℓ_B y ℓ_C las rectas tangentes a ω en B y C, respectivamente, y sea L su intersección. La recta por B paralela a AC corta a ℓ_C en D. La recta por C paralela a AB corta a ℓ_B en E. El circuncírculo de BDC corta a AC en T, con T entre A y C. El circuncírculo de BEC corta a AB en S, con B entre S y A. Muestra que ST, AL y BC concurren.*

Problema 3.13. *Sea ABC un triángulo escaleno y M, N y P los puntos medios de BC, CA y AB respectivamente. Sean D y E puntos en AM tales que $AD = DB$ y $AE = EC$. Las rectas BD y CE se cortan en F. Muestra que $ANFP$ es cíclico.*

Problema 3.14. *Sea ABC un triángulo en el que $\angle B > 90\circ$ y en el que un punto H sobre AC tiene la propiedad de que $AH = BH$, y BH es perpendicular a BC. Sean D y E los puntos medios de AB y BC, respectivamente. Por H se traza una paralela a AB que corta a DE en F. Prueba que $\angle BCF = \angle ACD$.*

Problema 3.15. *Sea ABC un triángulo acutángulo con ortocentro H. Sea M el punto medio de BC, la recta AM corta al circuncírculo de BHC en P (P está entre A y M). Las rectas BP y CP cortan a AC y AB en U y V. Sea N el punto medio de UV y X la proyección de N a BC. Demuestra que $\angle BAM = \angle CAX$.*

Problema 3.16. *Sea ABC un triángulo escaleno y sean E y F puntos sobre los segmentos AB y AC respectivamente. Sea M el punto medio de BC y K el punto en BC tal que $KE = KF$. La mediatriz de MK corta a AB y AC en S y T respectivamente. Muestra que $KSAT$ es cíclico si y solo si AK es simediana de AEF.*

Problema 3.17. *Dos circunferencias se intersectan en dos puntos. Sea A uno de los puntos de intersección. Desde un punto arbitrario que se halla en la prolongación de la cuerda común de las circunferencias dadas, están trazadas hacia una de estas dos tangentes que tienen contacto con esta en los puntos M y N. Sean P y Q los puntos de intersección de las rectas MA y NA, respectivamente, con la segunda circunferencia. Demuestra que la recta MN parte el segmento PQ por la mitad.*

Problema 3.18. *Sea AD una altura de un triángulo ABC. Consideremos AD como diámetro de una circunferencia que corta los lados AB y AC en K y L respectivamente. Las tangentes a la circunferencia en los puntos K y L se intersecan en un punto M. Demuestra que la recta AM divide BC por la mitad.*

Problema 3.19. *Sea ABC un triángulo y M un punto en la A-mediana. Sean ω_B y ω_C los circuncírculos de los triángulos ABM y ACM respectivamente. Sea P la intersección de la tangente por B a ω_B y la tangente por C a ω_C. Entonces AP es la A-simediana.*

Problema 3.20. *Dado un triángulo ABC y su cincuncírculo Ω, denotaremos con A' el punto de intersección de las tangentes a Ω en B y C. Definimos B' y C' de manera similar.*

a) Muestra que las líneas AA', BB' y CC' concurren.

b) Sea K el punto de concurrencia en a) y sea G el centroide del triángulo ABC. Prueba que KG es paralela a BC, si y sólo si $2a^2 = b^2 + c^2$, donde a, b y c son las longitudes de los lados del triángulo ABC.

4. Bibliografía

I) Listas de México para entrenamientos nacionales 2019.

II) Clemente. (s.f.). Omm Baja California. http://ommbc.org/sitio/#/. http://ommbc.org/sitio/Material/Geometria/G19_Simedianas.pdf