Involuciones

Eric Ransom Treviño

Noviembre 2023

1. Preliminares

1.1. Inversión

Definición 1.1 — Una inversion es una transformación de puntos en $\mathbb{R}^2$. Dados un centro O y un radio r fijos, para cada punto $X \in \mathbb{R}^2$ se mapea a X' tal que O, X, X' son colineales y $OX \cdot OX' = r^2$.

Teorema 1.2

Los puntos de una recta que pasa por el centro de inversión se mapean a los

1.2. Razón cruzada

Las siguientes tres definiciones son muy similares, la razón cruzada se preserva en el plano tras transformaciones como traslación, reflexión, rotación, homotecia, inversión y perspectiva.

Definición 1.3 (Razón Cruzada en rectas) — Sean A, B, C y D puntos en una recta ℓ, entonces

$$(A, B; C, D) = \frac{AC}{CB} \Big/ \frac{AD}{DB}$$

> **Nota.** La definición 1.1 contempla segmentos dirigidos.

Definición 1.4 (Razón Cruzada en un haz de rectas) — Sea P un punto y sean a, b, c y d rectas que pasan por P. Sean A, B, C y D puntos arbitrarios en a, b, c y d respectivamente, entonces

$$P(A, B; C, D) = \frac{sin(\angle APC}{sin(\angle CPB)} \Big/ \frac{sin(\angle APD)}{sin(\angle DPB)}$$

Definición 1.5 (Razón Cruzada en cónicas) — Sean A, B, C, D y P puntos en una cónica Ω, entonces

$$(A, B; C, D)_\Omega = \frac{sin(\angle APC}{sin(\angle CPB)} \Big/ \frac{sin(\angle APD)}{sin(\angle DPB)}$$

Nota. Las definiciones 1.2 y 1.3 contemplan ángulos dirigidos.

Nota. En la definición 1.3, para todo P en Ω se cumple que la razón es constante.

1.3. Mapeo Proyectivo

Definición 1.6 — Siendo $\mathcal{C}_i$ una cónica, recta o haz de rectas, un mapeo proyectivo es una función $f : \mathcal{C}_1 \mapsto \mathcal{C}_2$ con las siguientes propiedades:

- Es biyectiva.
- Preserva razón cruzada.

2. Involuciones

En las matemáticas, una involución es una función f tal que es su propia inversa, es decir, $f(f(x)) = x$ para toda x en el dominio de f. Un caso particular de mapeo proyectivo se dice que es una involución si cumple lo siguiente.

Definición 2.1 (Involución) — Sea $\mathcal{P}$ el conjunto de puntos en una recta, puntos en una cónica o rectas en un haz de rectas. Una involución es una función f que mapea los elementos de $\mathcal{P}$ a sí mismo con las siguientes propiedades.

- Es biyectiva.
- $f(f(X)) = X$ para todo X $\in \mathcal{P}$.
- Preserva razón cruzada.

A la pareja de puntos $(X, f(X))$ se le llama par recíproco.

Nota. Usaremos X' como la imagen de X bajo una involución f (es decir $f(X) = X'$).

Independientemente de que las involuciones sean tan solo un caso particular de mapeo proyectivo, las propiedades de estas son muy extensas, importantes y útiles en problemas de olimpiada, facilitan la demostracion de resultados muy complicados y se aparecen entre los problemas más difíciles de competencias internacionales de rennombre. Esta teoría es utilizada principalmente para demostrar concurrencias, colinealidades e inversiones.

Proposición 2.2 (Proyección de Involuciones)

$\mathcal{C}_i$ es una cónica, recta o haz de rectas. Dada una involución en $\mathcal{C}_1$ y un mapeo proyectivo $g : \mathcal{C}_1 \mapsto \mathcal{C}_2$, entonces los pares $(g(X), g(X'))$ son una involución en $\mathcal{C}_2$.

Para un listado extenso de mapeos proyectivos conocidos pueden visitar la lista de Moving Points I, en la sección de Mapeos Proyectivos. Esta herramienta auxiliar será elemento clave para tratar con problemas de involuciones, la forma más común en la que se resuelven será mediante proyecciones de involuciones.

Proposición 2.3 (Existencia y unicidad)

Existe una única involución dados dos pares recíprocos.

Nota 2.4. En la proposición 2.3 estamos ignorando la función identidad.

Este resultado es inmediato dado que la imagen de tres puntos definen un mapeo proyectivo. Unicidad, como en cualquier tema relacionado con razón cruzada, es de las bases de mapeos proyectivos e involuciones. Se necesita paciencia para entender por completo las bases de esta teoría, solo se han visto algunas propiedades fundamentales de las involuciones, sin aterrizar resultados realmente útiles para problemas de olimpiada. Las siguientes secciones se enfocan en la resolución de problemas mediante involuciones.

2.1. Involuciones en rectas

Teorema 2.5

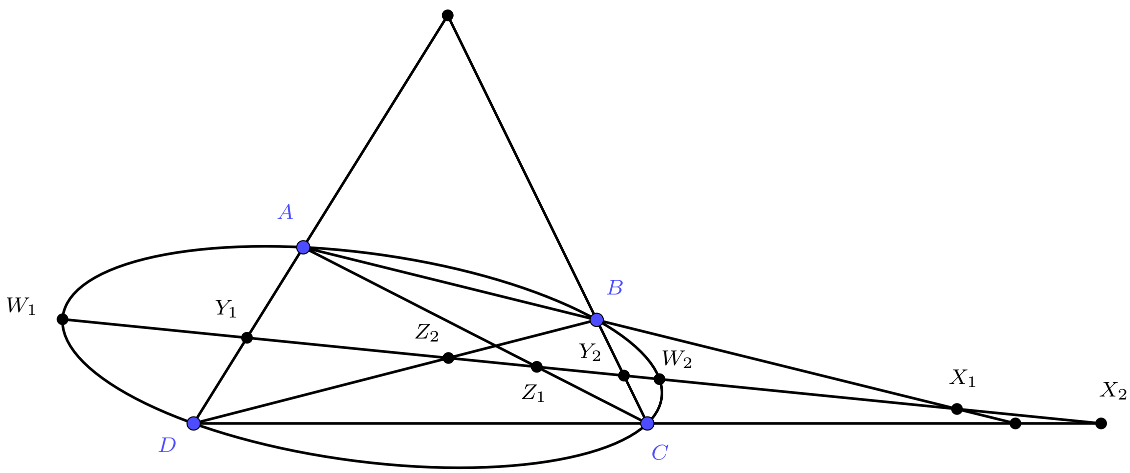
Toda involución en una recta cumple una de las siguientes:

- Es la función identidad.
- Es reflexión respecto a un punto en ℓ.
- Es inversión respecto a un punto en ℓ.
- Es inversión reflexión respecto a un punto en ℓ.

Demostración. Notemos que la función identidad es una involución, entonces supongamos que no es la identidad. Fijemos un punto A (distinto al infinito y a la imagen del infinito) tal que $A' \neq A$. Sea ∞ el punto al infinito que pasa por la recta y sea O su imagen sobre la involución. Si $O = \infty$, sea M el punto medio de AA', entonces $(A, A'; M, \infty) = -1 = (A', A; M'; \infty)$ por propiedad de hileras armónicas y porque la involución preserva razón cruzada, entonces $M' = M$; para cada B

se cumple $(B, B'; M, \infty) = (B', B; M, \infty)$ (porque la involución preserva razón cruzada) y eso solo se cumple cuando la razón cruzada es -1, entonces M es punto medio de BB', resultando así que la involución es reflexión respecto a M. Si $O \neq \infty$, entonces $(A, B; O, \infty) = (A', B'; \infty, O)$, esto significa que $\frac{OA}{OB} = \frac{OB'}{OA'}$, es decir $OA \cdot OA' = OB \cdot OB'$, significando que es inversión o inversión reflexión respecto a la imagen del punto al infinito. □

Teorema 2.6 (Teorema de la Involución de Desargues)
Sea $ABCD$ un cuadrilátero, Ω una circuncónica y ℓ una recta. Sea $X_1 = \ell \cap AB$, $X_2 = \ell \cap CD$, $Y_1 = \ell \cap AD$, $Y_2 = \ell \cap BC$, $Z_1 = \ell \cap AC$, $Z_2 = \ell \cap BD$, W_1 y W_2 las intersecciones de ℓ con Ω. Entonces $(X_1, X_2), (Y_1, Y_2), (Z_1, Z_2)$ y (W_1, W_2) son pares recíprocos de una involución en ℓ.



Demostración. Por la proposición 2.3, consideremos la involución con pares recíprocos (W_1, W_2) y (X_1, X_2). Haciendo perspectiva desde B, proyectando la recta ℓ a Ω

□

Mencionar demostración con homografías, manda $ABCD$ a un cuadrado.

CASOS DEGENERADOS DE TEOREMA DE LA INVOLUCIÓN DE DESARGUES.

Teorema 2.7

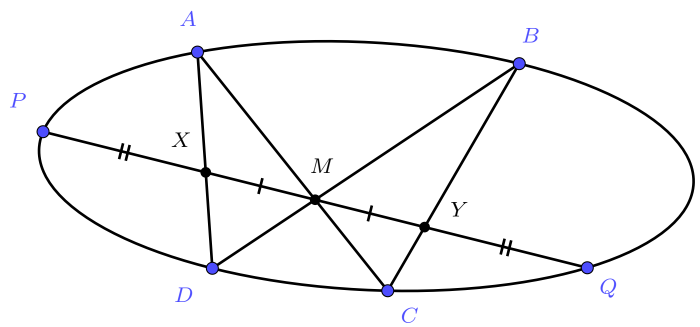
Demostración. □

Teorema 2.8

Demostración. □

Ejemplo 2.9 (Teorema de la Mariposa en cónicas)

Sea M un punto de una cuerda PQ de una cónica, por el cual pasan otras cuerdas AC y BD. Si AD y BC intersecan la recta PQ en X y Y respectivamente, demuestra que M es el punto medio de XY si y solo si M es punto medio de PQ.



Demostración. Usando el teorema de la involución de desargues en el cuadrilátero $ABCD$, tenemos que $(X, Y), (P, Q)$ y (M, M) son pares recíprocos de una involución en la recta PQ. Recordemos que una involución es definida por dos pares recíprocos, si M es punto medio de XY o de PQ entonces la involución es reflexión respecto a M, ya que M es su propio reflejado, entonces M es punto medio de XY si y solo si también es punto medio de PQ. □

2.2. Involuciones en haces

Teorema 2.10 (Teorema Dual de la Involución de Desargues)

En un cuadrilátero $ABCD$ sea Ω una incónica, $E = AB \cap CD$ y $F = AD \cap BC$. Sea P un punto cualquiera y X y Y en Ω tal que PX y PY son tangentes a Ω. Entonces $(PA, PC), (PB, PD), (PE, PF)$ y (PX, PY) son pares reciprocos de una involución.

Demostración. □

El teorema 2.1213123124 es más usado que el teorema 2.2342351, es más común tener libertad desde un punto en el plano que libertad de elección de alguna recta

Mencionar que este es el más usado.

CASOS DEGENERADOS DE TEOREMA DUAL DE LA INVOLUCIÓN DE DESARGUES.

Mencionar que los casos degenerados aparecen tanto como el caso general.

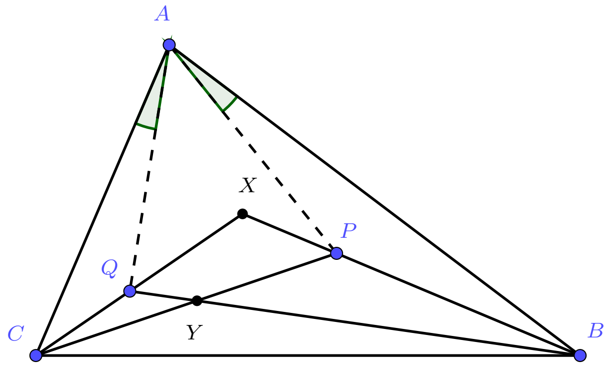
Teorema 2.11

Demostración. □

Teorema 2.12

Demostración. □

Ejemplo 2.13 (Lema de Isogonales)
Sea ABC un triángulo con dos puntos interiores P y Q. Supón que AP y AQ son isogonales respecto al ángulo $\angle A$. Sea $X = PB \cap QC$ y $Y = PC \cap QB$. Demuestra que AX y AY son isogonales respecto al ángulo $\angle A$.



Demostración. Este ejemplo es perfecto para mostrar que hay problemas muy complicados que pueden demostrarse muy rápidamente utilizando el teorema dual de la involución de Desargues.

Usándolo en el cuadrilátero $PXQY$, dado que $B = PX \cap QY$ y $C = PY \cap QX$, se tiene que $(AP, AQ), (AX, AY)$ y (AB, AC) son pares recíprocos de una involución. Notemos que una involución es definida por dos pares recíprocos, y sabemos que (AP, AQ) y (AB, AC) cumplen reflexión respecto a la bisectriz del ángulo en A, significando que las rectas AX y AY también son reflejadas respecto a la bisectriz en A, por lo tanto isogonales.

□

2.3. Involuciones en cónicas

Teorema 2.14
Toda involución en una cónica cumple alguna de las siguientes propiedades:

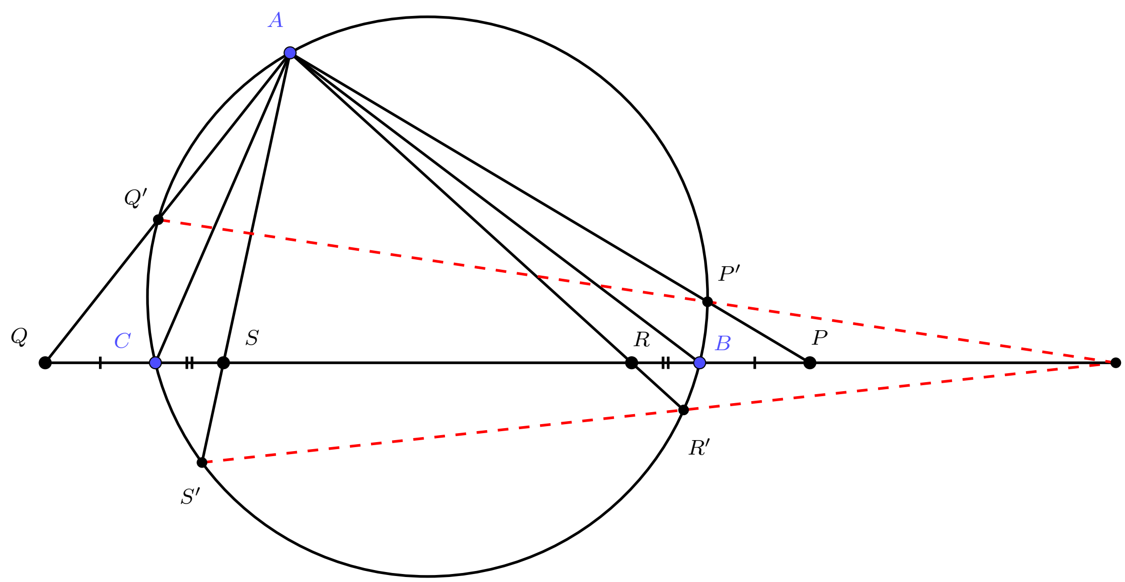
- Es la función identidad.
- Las rectas que unen pares recíprocos son paralelas.
- Las rectas que unen pares recíprocos pasan por un punto fijo.

Demostración. □

Mencionar que relacionar involuciones en cónicas y en rectas es muy importante.

Ejemplo 2.15

Sea Γ el circuncírculo de un triángulo ABC y sean P, Q, R y S puntos en BC tal que $BP = CQ$ y $BR = CS$. Sean P', Q', R' y S' las intersecciones de AP, AQ, AR y AS con Γ. Demuestra que $P'Q', R'S'$ y BC concurren o son paralelas entre sí.



Demostración. Por el teorema 2.3, se cumple que $(P, Q), (R, S)$ y (B, C) son pares recíprocos de una involución en BC, siendo reflexión respecto al punto medio de BC. Por el teorema 2.2, podemos proyectar esa involución a Γ desde A, demostrando que $(P', Q'), (R', S')$ y (B, C) son pares recíprocos de una involución. Por el teorema 2.12, como la involución no es la identidad, se tiene que $P'Q', R'S'$ y BC concurren o son paralelas entre sí. $\square$

3. Problemas

Problema 3.1 (USAMO 2012 P5). *Sea P un punto en el plano de un triángulo ABC, y γ una línea que pasa por P. Sean A', B' y C' los puntos en las reflexiones de PA, PB y PC respecto a γ donde intersecan a BC, CA y AB, respectivamente. Demuestra que A', B' y C' son colineales.*

Problema 3.2 (China TST 2017/2/3). *Sea $ABCD$ un cuadrilátero y ℓ una línea. La recta ℓ interseca a AB, CD, BC, DA, AC y BD en puntos X, X', Y, Y', Z y Z', respectivamente. Dado que estos seis puntos en ℓ tienen orden X, Y, Z, X', Y', Z', demuestra que los círculos de diámetro XX', YY' y ZZ' tienen dos puntos en común.*

Problema 3.3 (IMO SL 2007 G3). *Las diagonales del trapecio $ABCD$ se intersecan en un punto P. Un punto Q está entre las rectas paralelas a BC y AD tal que $\angle AQD = \angle CQB$, y la línea CD separa a los puntos P y Q. Demuestra que $\angle BQP = \angle DAQ$.*

Problema 3.4 (CGMO 2017 P7). *Sea $ABCD$ un cuadrilátero cíclico con circuncírculo ω_1. Sea $E = AC \cap BD$ y $F = AD \cap BC$. Un círculo ω_2 es tangente a los segmentos EB y EC en M y N, respectivamente, y interseca a ω_1 en puntos Q y R. las líneas BC y AD intersecan a la línea MN en S y T, respectivamente. Demuestra que Q, R, S y T son concíclicos.*

Problema 3.5 (EGMO 2018 P5). *Sea Γ el circuncírculo de un triángulo ABC. Un círculo Ω es tangente al segmento AB y a Γ en un punto en el arco AB del mismo lado de C. La bisectriz interna del ángulo en C interseca a Ω en dos puntos P y Q. Demuestra que $\angle ABP = \angle QBC$.*

Problema 3.6. *Sean ABC y DEF dos triángulos que comparten incírculo ω y circuncírculo Ω. Sea L el punto de tangencia entre EF y ω, y sea K el punto de tangencia entre BC y ω. Sea $N = AL \cap \Omega$ y $M = DK \cap \Omega$. Demuestra que las líneas AM, EF, BC y ND concurren.*

Problema 3.7 (IMO 2019 P2). *En un triángulo ABC, el punto A_1 está en BC y B_1 en AC. Sean P y Q puntos en los segmentos AA_1 y BB_1, respectivamente, tal que PQ es paralela a AB. Sea P_1 un punto en la recta PB_1, tal que B_1 está entre P y P_1, y $\angle PP_1C = \angle BAC$. Similarmente, sea Q_1 un punto en la recta QA_1, tal que A_1 está entre Q y Q_1, y $\angle CQ_1Q = \angle CBA$. Demuestra que los puntos P, Q, P_1 y Q_1 son concíclicos.*

Problema 3.8 (USA TST 2018 P5). *Sea $ABCD$ un cuadrilátero convexo cíclico tal que no es papalote, pero sus diagonales son perpendiculares y se intersecan en H. Denota como M y N a los puntos medios de BC y CD. Los rayos MH y NH intersecan a AD y AB en S y T, respectivamente. Demuestra que existe un punto E, fuera del cuadrilátero $ABCD$, tal que*

- *El rayo EH biseca a los ángulos $\angle BES, \angle TED$ y*
- *$\angle BEN = \angle MED$.*

Problema 3.9 (ELMO SL 2018 G4). *Sea $ABCDEF$ un hexagono inscrito en un círculo Ω tal que los triángulos ACE y BDF tienen mismo ortocentro. Supón que los segmentos BD y DF se intersecan en CE en X y Y, respectivamente. Demuestra que existe un punto en común entre Ω, el circuncírculo de DXY y la recta perpendicular a CE por A.*

Problema 3.10 (Serbia 2017 P6). *Sea ABC un triángulo y sean P y Q las intersecciones de BC con las tangentes en común del circuncírculo de ABC con el A-excírculo. Demuestra que $\angle PAB = \angle CAQ$.*

Problema 3.11 (IGO 2020 P4). *Sea $ABCD$ un cuadrilátero convexo tal que existe un círculo tangente a cada uno de sus lados. Sea I el centro de este círculo. Este círculo es tangente a los lados AD, DC, CB y BA en los puntos K, L, M y N, respectivamente. Las líneas AD y BC se intersectan en E y las líneas AB y CD se intersectan en F. La línea KM interseca a las líneas AB y CD en X y Y, respectivamente. La línea LN interseca a las líneas AD y BC en los puntos Z y T, respectivamente. Demuestra que el circuncírculo del triángulo XFY y el círculo con diámetro EI son tangentes si y sólo si el circuncírculo del triángulo TEZ y el círculo con diámetro FI son tangentes.*

Problema 3.12 (Taiwan TST 2014 P3). *Sea ABC un triángulo con circuncírculo Γ y sea M un punto arbitrario en Γ. Supón que las tangentes desde M al incírculo de ABC intersecan a BC en dos puntos distintos X_1 y X_2. Demuestra que el circuncírculo del triángulo MX_1X_2 pasa por el punto de tangencia de la A-mixtilinear interna de Γ.*

Problema 3.13 (IGO 2023 P4). *Supón que las bisectrices de los ángulos $\angle B$ y $\angle C$ en el triángulo ABC intersecan a AC y AB en E y F, respectivamente. Sea I la intersección de BE y CF, y sea D el pie de la perpendicular desde I hacia BC. Sean M y N los ortocentros de los triángulos AIF y AIE, respectivamente. Las líneas EM y FN se intersecan en P. Sea X el punto medio de BC. Sea Y el punto sobre la recta AD tal que $XY \perp IP$. Demuestra que la recta AI biseca al segmento XY.*

Problema 3.14 (IMO SL 2022 G7). *Sean ABC y $A_1B_1C_1$ dos triángulos con mismo circuncírculo ω y mismo ortocentro H. Sea Ω el circuncírculo del triángulo determinado por las rectas AA_1, BB_1 y CC_1. Demuestra que H, el centro de ω, y el centro de Ω son colineales.*

Problema 3.15 (USMCA 2020 P7). *Sea $ABCD$ un cuadrilátero convexo, sean ω_A y ω_B los incírculos de ACD y BCD con centros I y J, respectivamente. La segunda tangente externa en común de ω_A y ω_B toca a ω_A en K y a ω_B en L. Demuestra que las rectas AK, BL e IJ concurren.*

4. Bibliografía

I) Shen, E. (2020, December 2). Nuclear geometry. http://ericshen.net/handouts/ZG-nuclear.pdf

II) Tate, J. (s.f). Chapter 5 Basics of Projective Geometry - University of Pennsylvania. https://www.cis.upenn.edu/~jean/gma-v2-chap5.pdf

III) Capítulo IV - El Teorema Fundamental de la Geometría Proyectiva. (2004). https://matematicas.unex.es/~brequejo/GEOMETRIA%20PROYECTIVA%2C%20AFIN%20Y%20EUCLIDEA/CAPITULO%2004.pdf