Razón Cruzada y Armónicos

Eric Ransom

Abril 2023

Las herramientas de la geometría euclidiana necesitan de mucha creatividad para usarse por si solas, por lo que no permiten completar soluciones de problemas de alta dificultad. La razón cruzada permite atacar problemas desde una perspectiva muy diferente, dando posibilidad a soluciones más eficientes y elegantes.

1. Preliminares

Definición 1.1 (Segmentos dirigidos)

Sea ℓ una recta. Se considerará una dirección positiva y una negativa en ℓ, por lo que las distancias de segmentos en ℓ tendrán diferente signo según la dirección en la que se nombró el segmento ($AB \neq BA$).

Definición 1.2 (Ángulos dirigidos)

Sea P un punto. Se considerará una dirección positiva y una negativa en P, por lo que el ángulo formados por dos rectas PA y PB tendrá diferente signo según la dirección en la que se nombró el ángulo ($\angle APB \neq \angle BPA$)

Definición 1.3 (Punto al infinito)

En la geometría proyectiva, se le conoce como punto al infinito a la intersección de dos rectas paralelas.

Observación 1.4. Nótese que existe una cantidad infinita de puntos al infinito, cada recta pasa por algún punto al infinito, pero solo si dos rectas tienen misma pendiente pasan por el mismo punto al infinito.

Definición 1.5 (Línea al infinito)

El conjunto de puntos al infinito pasan por una línea conocida como la línea al infinito.

Ejercicio 1.6. *Sean A y B dos puntos fijos y sea X un punto en AB. Demuestra que al mover X en AB, la razón $\frac{AX}{XB}$ es distinta para cada X, y además para cada $c \in \mathbb{R}$ existe un X tal que $\frac{AX}{XB} = c$*

2. Razón Cruzada

2.1. Razón Cruzada en rectas

Definiremos de la siguiente forma la razón cruzada para puntos en rectas:

Definición 2.1

Sean A, B, C y D puntos en una recta ℓ, entonces

$$(A, B; C, D) = \frac{AC}{CB} \Big/ \frac{AD}{DB}$$

Observación 2.2. La definición contempla segmentos dirigidos.

2.2. Razón Cruzada en un haz de rectas

Definiremos de la siguiente forma la razón cruzada para rectas que pasan por un punto:

Definición 2.3

Sea P un punto y sean a, b, c y d rectas que pasan por P. Sean A, B, C y D puntos arbitrarios en a, b, c y d respectivamente, entonces

$$P(A, B; C, D) = \frac{sin(\angle APC}{sin(\angle CPB)} \Big/ \frac{sin(\angle APD)}{sin(\angle DPB)}$$

Observación 2.4. La definición contempla ángulos dirigidos.

2.3. Razón Cruzada en círculos

Definiremos de la siguiente forma la razón cruzada para puntos en círculos:

Definición 2.5

Sean A, B, C y D puntos en un círculo Ω, entonces

$$(A, B; C, D)_\Omega = \frac{AC}{CB} \Big/ \frac{AD}{DB}$$

Estas tres definiciones son equivalentes y entender por qué será necesario para utilizar las herramientas más poderosas de razón cruzada.

2.4. Proyección de Razón Cruzada

En el siguiente teorema podremos observar la relación entre **Definición 2.1** y **Definición 2.3**:

Teorema 2.6

Sea ℓ una recta y sean A, B, C y D puntos en ella. Sea P un punto que no se encuentra en ℓ. Entonces

$$(A, B; C, D) = P(A, B; C, D)$$

El teorema anterior nos permite proyectar desde un punto la razón cruzada de puntos en una recta a otra:

Teorema 2.7

Sean ℓ_1 y ℓ_2 dos rectas y sea P un punto que no se encuentra en ℓ_1 ni en ℓ_2. Sean A, B, C y D puntos en ell_1 y sean A', B', C' y D' las intersecciones de PA, PB, PC y PD con ℓ_2 respectivamente. Entonces

$$(A, B; C, D) = P(A, B; C, D) = (A', B'; C', D')$$

Otra forma de proyectar razón cruzada de puntos en una recta a otra es mediante tangencias a un círculo:

Teorema 2.8 (Corolario del Teorema Dual de la Cónica de Steiner)

Sean ℓ_1 y ℓ_2 dos rectas y sea Ω un círculo tangente a ℓ_1 y a ℓ_2. Sean A, B, C y D puntos en ell_1 y sean A', B', C' y D' las intersecciones de las tangentes desde A, B, C y D a Ω con ℓ_2 respectivamente. Entonces

$$(A, B; C, D) = (A', B'; C', D')$$

Ahora observaremos la relación entre **Definición 2.3** y **Definición 2.5**:

Teorema 2.9

Sean A, B, C y D puntos en un círculo Ω y sea P cualquier punto en Ω. Entonces

$$P(A, B; C, D) = (A, B; C, D)_\Omega$$

De misma forma que en el **Teorema 2.7**, el teorema anterior nos permite proyectar desde un punto la razón cruzada de puntos en un círculo a puntos en una recta:

Teorema 2.10

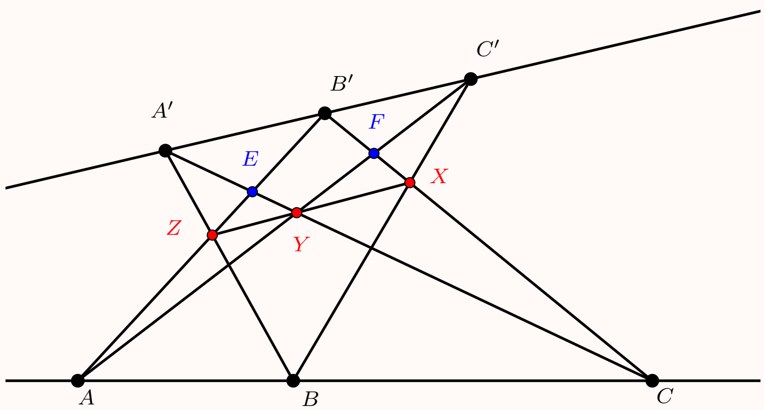
Sea Ω un círculo y ℓ una recta. Sea P un punto en Ω que no se encuentra en ℓ. Sean A, B, C y D puntos en Ω y sean A', B', C' y D' las intersecciones de PA, PB, PC y PD con ℓ respectivamente. Entonces

$$(A, B; C, D)_\Omega = P(A, B; C, D) = (A', B'; C', D')$$

La herramienta más poderosa de razón cruzada es su habilidad de proyectarse de un lugar a otro, permitiendo utilizarla con bastante libertad.

Ejemplo 2.11 (Teorema de Pappus)

Sean ℓ_1 y ℓ_2 rectas, sean A, B y C puntos en ℓ_1 y A', B' y C' puntos en ℓ_2. Sean $X = CB' \cap BC', Y = AC' \cap CA'$ y $Z = BA' \cap AB'$, entonces X, Y y Z son colineales.



Demostración. Sean $D = \ell_1 \cap \ell_2, E = CA' \cap AB'$ y $F = CB' \cap AC'$, entonces al proyectar sobre C' se observa que

$$(B', F; X, C) = C'(B', F; X, C) = (D, A; B, C)$$

De misma forma, al proyectar sobre A' se observa que

$$(B', A; Z, E) = A'(B', A; Z, E) = (D, A; B, C)$$

Al juntar ambos resultados, se obtiene que

$$(B', F; X, C) = (B', A; Z, E)$$

Pero si $X' = CB' \cap ZY$, al proyectar desde Y se cumple que

$$(B', A; Z, E) = Y(B', A; Z, E) = (B', F; X', C)$$

Y como $(B', F; X', C) = (B', F; X, C)$, por unicidad $X = X'$, obteniendo X, Y y Z colineales.

$\square$

3. Armónicos

Las siguientes tres definiciones revisan la **Definición 2.1**, **Definición 2.3** y **Definición 2.5** de razón cruzada para el caso particular cuando esta da -1.

Definición 3.1 (Hilera Armónica)
Se le conoce como hilera armónica a cuatro puntos A, B, C y D una recta, si cumplen que

$$(A, B; C, D) = -1$$

Definición 3.2 (Haz Armónico)
Sea P un punto fijo, se le conoce como haz armónico a cuatro rectas PA, PB, PC y PD si cumplen que

$$P(A, B; C, D) = -1$$

Definición 3.3 (Cuadrilátero Armónico)
Se le conoce como cuadrilátero armónico a un cuádrilatero $ABCD$ cíclico con circuncírculo Ω y cumple que

$$(A, B; C, D)_\Omega = -1$$

La siguiente lista de resultados importantes que se obtienen cuando la razón cruzada es -1 servirán para atacar los problemas de la lista, por lo que será necesario que se analicen con cuidado.

Teorema 3.4 (Punto medio y punto al infinito)
Sean A y B puntos fijos, M el punto medio de AB y ∞_{AB} el punto al infinito por el que pasa AB. Entonces

$$(A, B; M, \infty_{AB}) = -1$$

Teorema 3.5 (Bisectriz, Ángulo de $90°$, Haz armónico)

Sea P un punto fijo, para cuatro rectas PA, PB, PC y PD, si se cumplen dos de las siguientes condiciones, se cumple la tercera.

- $\angle APC = \angle CPB$
- $\angle CPD = 90°$
- $P(A, B; C, D) = -1$

Lema 3.6 (Potencia desde punto medio)

Sean A, B, C y D puntos en una recta tal que $(A, B; C, D) = -1$, y sea M el punto medio de AB. Entonces

$$MA^2 = MC \cdot MD$$

Lema 3.7 (Corolario del lema anterior)

Sean A, B, C y D puntos en una recta tal que $(A, B; C, D) = -1$, y sea M el punto medio de AB. Entonces

$$DA \cdot DB = DC \cdot DM$$

Teorema 3.8 (Resultado de Ceva y Menelao)

Sea ABC un triángulo, y sean X, Y y Z puntos colineales en BC, CA y AB respectivamente. Sea $X' = BY \cap CZ$, entonces

$$A(B, C; X, X') = -1$$

Lema 3.9

Sean A, B, C y D puntos en un círculo Ω, tal que $(A, B; C, D)_\Omega = -1$. Sea P la intersección de la tangente por B con la tangente por D a Ω. Entonces A, C y P son colineales.

Lema 3.10 (Simediana)

Sean A, B, C y D puntos en un círculo Ω, tal que $(A, B; C, D)_\Omega = -1$. Entonces AC es la simediana del triángulo BAD.

4. Problemas

4.1. Nivel I

Problema 4.1. *Sean A, C, B y D puntos colineales en ese orden. Si $AB = 5$, $BD = 3$ y $CD = 4$. Encuentra $(A, B; C, D)$.*

Problema 4.2. *Sea $ABCD$ un cuadrilatero, sean P, Q y R las intersecciones de AB con CD, AD con BC y AC con BD respectivamente. Si $\angle QPR = 90°$ y $\angle APR = 30°$, encuentra $\angle RPD$.*

Problema 4.3. *Sea $ABCD$ un cuadrilatero, sean P, Q y R las intersecciones de AB con CD, AD con BC y AC con BD respectivamente. Sea S la intersección de QR con AB, prueba que $\frac{AS}{SB} = -\frac{AP}{PB}$.*

Problema 4.4. *Sean ABC un triángulo y D el pie de la altura desde A sobre BC. Sobre AD se considera un punto P y sean X y Y las intersecciones de BP con AB y de CP con AB, respectivamente. Muestra que $\angle ADX = \angle YDA$.*

Problema 4.5. *Sean A y B puntos diametralmente opuestos en un círculo Omega. Sea P un punto afuera de Ω en el rayo AB y sean X y Y los puntos de tangencia desde P a Ω. Sea Q la intersección de XY con AB. Sea R un punto variable en Ω, prueba que $\frac{QR}{RP} = \frac{QB}{BP}$.*

Problema 4.6. *Sea ABC un triángulo con circuncírculo Ω y M el punto medio de BC. Sea N la intersección de AM con Ω y A' el punto en Ω tal que $AA'//BC$. Prueba que las tangentes a Ω por B y por C concurren en un punto en $A'N$.*

Problema 4.7. *Sea ABC un triángulo con circuncirculo Ω. Las tangentes a Ω por B y C se cortan en M. Consideremos E y F los puntos de intersección de Ω con una recta paralela a AB por M. Sea D la intersección de EF con AC. Muestra que D es el punto medio de EF.*

Problema 4.8. *Sean ABC un triángulo y γ su incírculo. Supongamos que γ toca a BC, CA y AB en el punto D, E y F respectivamente, y que AD corta a γ en el punto $P \neq D$. Muestra que EF, BC y la tangente a γ por P concurren.*

Problema 4.9 (Teorema de la mariposa)**.** *Sea $ABCD$ un cuadrilátero cíclico en un círculo Ω y sea M la intersección de AC con BD. Sea ℓ una línea que pasa por M y corta a los lados BC y AD en E y F respectivamente y ℓ corta a Ω en P y Q. Prueba que $ME = MF$ si y solo si $MP = MQ$.*

Problema 4.10. *Sea ABC un triángulo con $\angle BAC = 90°$. Sea M el punto medio de BC, y sea D el pie de altura desde A a BC. Sea P la intersección de la tangente al circuncírculo de ABC desde A con BC. Prueba que $MA^2 = MD \cdot MP$.*

Problema 4.11. *Sea ABC un triángulo cuyo incírculo es tangente a los lados BC, CA, AB en D, E, F respectivamente, La recta perpendicular a BC que pasa por B corta a la recta EF en M, y la recta perpendicular a BC que pasa por C corta a la recta EF en N. Las rectas DM y DN cortan al incírculo de ABC en P y Q. Prueba que $DP = DQ$.*

Problema 4.12. *En un triángulo ABC, sean D el pie de altura desde A y M el punto medio de BC. Por M se trazan las rectas paralelas a AB y AC, que cortan a DA en P y Q respectivamente. Demuestra que $(A, D; P, Q)$ es una hilera armónica.*

4.2. Nivel II

Problema 4.13. *Sea $ABCD$ un cuadrilátero cíclico. Considera P, Q y R las proyecciones desde D sobre AB, BC y CA respectivamente. Muestra que $PQ = QR$ si y solo si $ABCD$ es un cuadrilátero armónico.*

Problema 4.14. *Sean ABC un triángulo y γ su incírculo. Supongamos que γ toca a BC en el punto D y que AD corta a γ en el punto $P \neq D$. Si PB y PC intersectan a γ en $M \neq P$ y $N \neq P$, muestra que PD, BN y CM concurren.*

Problema 4.15. *Sea ABC un triángulo rectángulo con $\angle A = 90°$ y D un punto sobre el lado AC. Denotemos por E al punto reflejado de A sobre BD y F a la intersección de CE con la perpendicular a BC por D. Prueba que AF, DE y BC concurren.*

Problema 4.16. *Sea ABC un triángulo con I su incentro y E y F los puntos de tangencia del incírculo con AB y CA, respectivamente y M el punto medio de BC. Sea N el punto de intersección de EF con AM y los puntos X y Y los de intersección de BI y CI con la circunferencia de diámetro BC respectivamente. Muestra que:*

$$\tfrac{NX}{NY} = \tfrac{AC}{AB}$$

Problema 4.17 (OMM 2005 P6)**.** *Sea ABC un triángulo y AD la bisectriz del $\angle BAC$, con D sobre BC. Sea E un punto sobre el segmento BC tal que $BD = EC$. Por E traza ℓ la recta paralela a AD y considera un punto P sobre ℓ y dentro del triángulo. Sea G el punto donde la recta BP corta al lado AC y sea F el punto donde la recta CP corta al lado AB. Muestra que $BF = CG$.*

4.3. Nivel III

Problema 4.18. *Sea ABC un triángulo con incentro I y sea D el punto de tangencia de su incírculo con BC. Sean X, Y puntos en el segmento BI, CI respectivamente, tal que $\angle BAC = 2\angle XAY$. Prueba que $\angle XDY = 90°$.*

Problema 4.19. *En el triángulo ABC, sea Ω el excírculo de ABC opuesto A. Sean D, E y F los puntos donde Ω es tangente BC, CA y AB, respectivamente. El círculo AEF intersecta a la línea BC en P y Q. Sea M el punto medio de AD. Muestra que el circuncírculo de MPQ es tangente a Ω.*

Problema 4.20. *Sea $ABCD$ un cuadrilátero cíclico. Las líneas AD y BC se intersecan en E, con C entre B y E; las diagonales AC y BD se intersecan en F. Sea M el punto medio de CD, y sea $N \neq M$ un punto en el circuncírculo de ABM tal que $\frac{AN}{BN} = \frac{AM}{BM}$. Prueba que E, F, N son colineales.*

4.4. Nivel Enfermo

Problema 4.21. *A cyclic quadrilateral $ABCD$ is given. The lines AD and BC intersect at E, with C between B and E; the diagonals AC and BD intersect at F. Let M be the midpoint of the side CD, and let $N \neq M$ be a point on the circumcircle of $\triangle ABM$ such that $\frac{AN}{BN} = \frac{AM}{BM}$. Prove that E, F, N are collinear.*

Problema 4.22. *Sea ABC un triángulo y M es el punto medio de BC. Sea γ el incírculo de ABC. La mediana AM del triángulo ABC interseca al incírculo γ en dos puntos K y L. Sea X la intersección de la paralela por K a BC con γ y sea Y la intersección de la paralela por L a BC. Sean P y Q las intersecciones de AX y AY con BC respectivamente. Prueba que $BP = CQ$*

5. Referencias

I) AOPS.

II) Google Imágenes.

III) Mi cerebro apoco no.