Teoremas Misceláneos

Eric Ransom Treviño

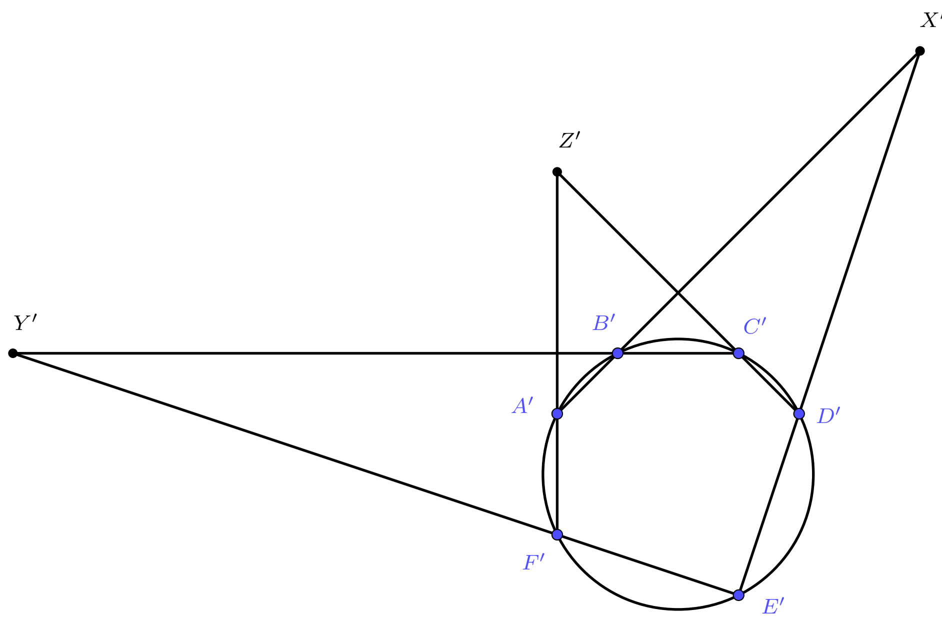
2024

1. Teoremas

Teorema 1.1 (Pascal)

Sean A, B, C, D, E y F puntos cualesquiera tres no colineales y sean $X = AB \cap DE$, $Y = BC \cap EF$ y $Z = CD \cap FA$. X, Y y Z son colineales si y solo si A, B, C, D, E y F están en una cónica.

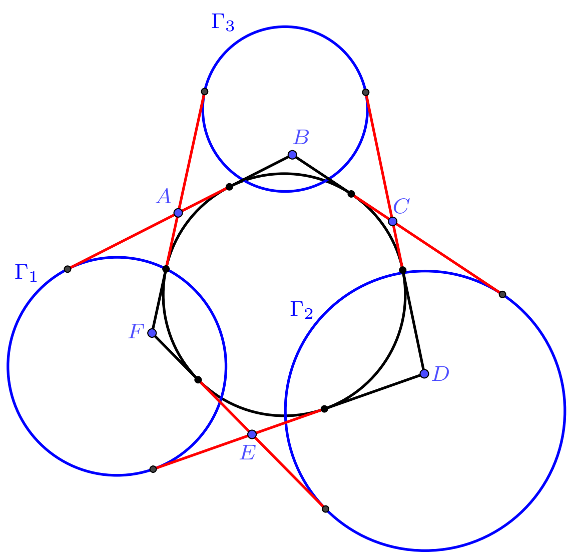
Demostración. Si A, B, C, D, E y F están en una cónica Ω, definiremos una transformación igual que en la demostración del teorema 2.6, esta preserva colinearidad. Mapearemos los puntos A, B, C, D, E y F a puntos A', B', C', D', E' y F' en un círculo Ω', X se mapea a $X' = A'B' \cap D'E'$, Y a $Y' = B'C' \cap E'F'$ y Z a $Z' = C'D' \cap F'A'$. Si demostramos que X', Y' y Z' son colineales entonces X, Y y Z también lo son. Utilizaremos un argumento de conjugados isogonales, por ángulos notamos que $\triangle Z'C'F' \sim \triangle Z'A'D'$, además X' en $\triangle Z'A'D'$ es el punto semejante al conjugado isogonal de Y' en $\triangle Z'C'F'$, por lo que X', Y', Z' son colineales por ángulo opuesto al vertice. La "ida" del teorema se demuestra con contradicción tomando la cónica que pasa por A, B, C, D y E. $\square$



Teorema 1.2 (Brianchon)

Sea A, B, C, D, E y F puntos cualesquiera tres no colineales. AD, BE y CF concurren si y solo si existe una cónica tangente a AB, BC, CD, DE, EF y FA.

Demostración. Si el hexágono $ABCDEF$ cumple que tiene una cónica Ω tangente a sus lados, definiremos una transformación igual que en la demostración del teorema 2.6, esta preserva tangencias y concurrencias. Mapearemos los puntos A, B, C, D, E y F a puntos A', B', C', D', E' y F' tal que el nuevo hexágono es tangente a un círculo Ω'. Si demostramos que $A'D', B'E'$ y $C'F'$ concurren entonces AD, BE y CF también. Utilizaremos un argumento de ejes radicales, tomaremos tres círculos Γ_1 tangente a AB y DE, Γ_2 tangente a BC y EF y Γ_3 tangente a CD y FA como se muestra en la figura tal que las distancias rojas miden lo mismo. Notemos que BE es el eje radical de Γ_1 y Γ_2, CF el de Γ_2 y Γ_3 y AD el de Γ_3 y Γ_1, por lo tanto concurren en el centro radical. La "ida" del teorema también se demuestra con contradicción tomando la cónica que tangente a cinco de los lados. $\square$



2. Problemas

Problema 2.1.

Problema 2.2.

Problema 2.3.

Problema 2.4.

Problema 2.5.

Problema 2.6.

Problema 2.7.

Problema 2.8.

Problema 2.9.

Problema 2.10.

Problema 2.11.

Problema 2.12.

3. Bibliografía

I)

II)

III)