Moving Points II

Eric Ransom Treviño

Agosto 2023

1. Introducción

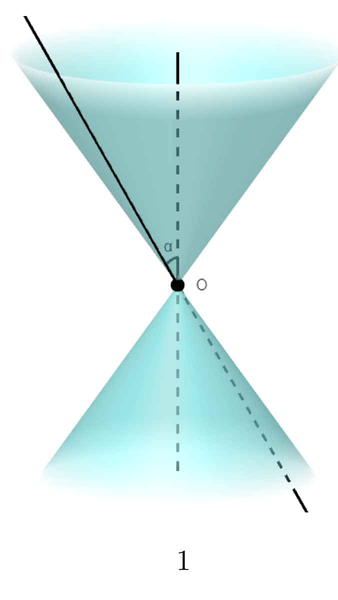
Es recomendable checar la lista de Moving Points I para contexto. Moving points es un metódo de demostración para problemas de geometría. Existen tres metódos de moving points y esta lista corresponde al segundo. Se analizarán lugares geométricos definidos a base de mapeos proyectivos, se observará una gran cantidad de lemas que relacionan cónicas con mapeos proyectivos, y se utilizará el famoso teorema de la cónica de Steiner.

Estaremos trabajando en $\mathbb{RP}^2$ a lo largo de todo el documento, por lo que los puntos al ininito y la recta al ininito tienen las mismas propiedades que cualquier otro punto y cualquier otra recta.

Definición 1.1 (Plano proyectivo real) — El plano proyectivo real $\mathbb{RP}^2$ es el plano real $\mathbb{R}^2$ incluyendo los puntos al infinito.

2. Cónicas y resultados conocidos

Definición 2.1 (Cono) — Dados un centro o foco O, una recta ℓ que pasa por O, y un ángulo α, se denomina como cono al lugar geométrico formado a partir de todas las rectas g que pasan por O que cumplen que el ángulo entre g y ℓ es α.



Una cónica es una curva de grado dos en $\mathbb{RP}^2$ definida bajo cualquier ecuación del estilo $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F$. Pero la definición analítica es muy superficial y no nos satisface a nosotros los amantes de la geometría sintética (soy hater de la geo analítica >:c). La definición geométrica es clave para entender su relación con razón cruzada.

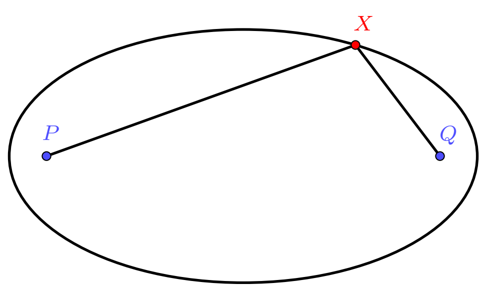
Definición 2.2 (Sección cónica) — Se denota cónica a la curva resultante de cortar un cono con un plano que no pasa por su foco. Las secciones cónicas que pueden resultar se llaman elipse (el círculo es un caso particular de esta), hipérbola y parábola.

Observación. Si el plano pasa por el foco del cono, la ”curva” que se forma será dos líneas, una línea o un punto, estas se llaman cónicas degeneradas y no se consideran como cónicas a lo largo del documento.

Estas tres curvas tienen puntos especiales conocidos como focos, los cuales cumplen propiedades invariantes relacionadas a las distancias de los puntos en la curva a los focos. Los focos son definidos a partir de sus esferas tangentes al plano y al cono (Esferas de Dandelin), y las siguientes propiedades pueden ser demostradas utilizando las tangencias.

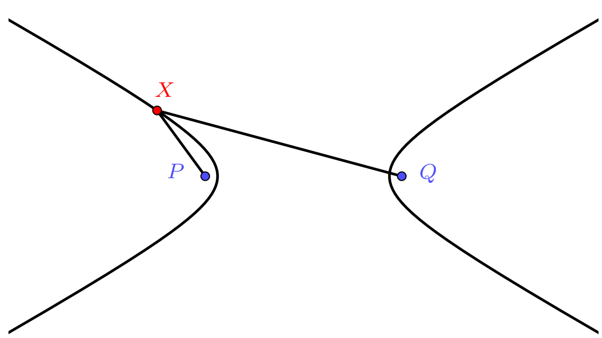
Teorema 2.3 (Elipse)

Dados dos puntos P, Q (no necesariamente distintos) y una constante $c > PQ$, el lugar geométrico de puntos X que cumplen $PX + QX = c$ es una elipse.



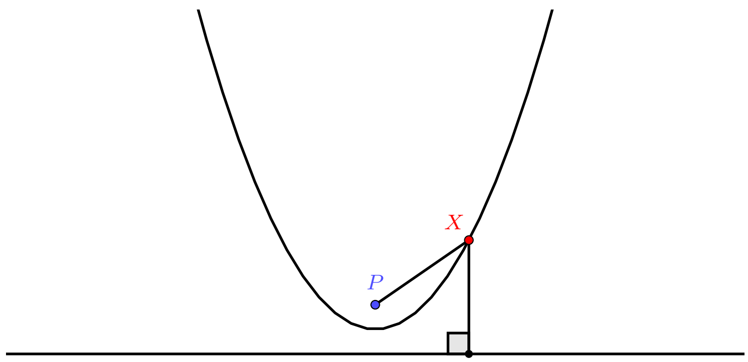
Teorema 2.4 (Hipérbola)

Dados puntos P, Q y una constante $c < PQ$, el lugar geométrico de puntos X que cumplen $|PX - QX| = c$ es una hipérbola.



Teorema 2.5 (Parábola)

Dado una recta ℓ y un punto P fuera de ella, el lugar geométrico de puntos X que cumplen $PX = distancia(X, \ell)$ es una parábola.



Estas invarianzas en sumas, restas y distancias nos da un mayor entendimiento de las propiedades geométricas de las cónicas, pero no se suelen usar mucho en problemas de olimpiada. Lo más bonito de las cónicas es su gran propiedad proyectiva: preservan razón cruzada en haces de rectas.

Teorema 2.6 (Razón cruzada en cónicas)

Dados cuatro puntos distintos A, B, C y D en una cónica Ω, para cada punto P en Ω se cumple que la siguiente razón es constante y se denota así:

$$(A, B; C, D)_\Omega = \frac{sin(\angle APC)}{sin(\angle CPB)} \bigg/ \frac{sin(\angle APD)}{sin(\angle DPB)}$$

Demostración. Sea Γ el cono que define mi cónica Ω. Llamemos $\mathcal{A}$ al plano que corta a Γ en Ω y $\mathcal{B}$ a un plano que corta a Γ en un círculo Ω'. Hagamos un mapeo de los puntos de $\mathcal{A}$ a los puntos de $\mathcal{B}$ que consiste en hacer perspectiva con centro en el foco de Γ. Entonces los puntos A, B, C, D y P se mapean a puntos A', B', C', D' y P' en Ω'. Es un hecho conocido que las perspectivas preservan razón cruzada en hileras de puntos y en haces de rectas por lo tanto $P(A, B; C, D) = P'(A', B'; C', D')$. Es fácil demostrar que esta razón es constante para cualquier punto P' en Ω' por ley de senos, entonces como la razón es constante en círculos también lo es en cónicas. $\square$

Este teorema nos da dos resultados muy importantes, su uso principal es para argumentar sobre existencia y unicidad de cónicas.

Proposición 2.7 (5 puntos)

Dados cinco puntos cualesquiera tres no colineales, existe una única cónica que pasa por ellos.

Proposición 2.8 (5 rectas)

Dadas cinco rectas cualesquiera tres no concurrentes, existe una única cónica tangente a ellas.

3. Cónica de Steiner

Teorema 3.1 (Teorema de la cónica de Steiner)

Sean $\mathcal{C}_1$ el haz de rectas de un punto P y $\mathcal{C}_2$ el de un punto Q. Sea $f : \mathcal{C}_1 \mapsto \mathcal{C}_2$ un mapeo proyectivo. Entonces se cumple lo siguiente:

- Si $f(PQ) = PQ$ entonces el lugar geométrico de $\ell \cap f(\ell)$ para todo $\ell \in \mathcal{C}_1$ es una recta.
- Si $f(PQ) \neq PQ$ entonces el lugar geométrico de $\ell \cap f(\ell)$ para todo $\ell \in \mathcal{C}_1$ es una cónica que pasa por P y Q.

Demostración. Si $f(PQ) = PQ$, tomemos $X = \ell \cap f(\ell)$ y $Y = g \cap f(g)$ para ℓ y g dos rectas que pasan por P. Sea $Z = PQ \cap XY$, notemos que para cada punto W en XY se cumple que $P(X,Y;Z,W) = (X,Y;Z,W) = Q(X,Y;Z,W)$, entonces $f(PW) = QW$.

Si $f(PQ) \neq PQ$, tomemos $X = \ell \cap f(\ell)$, $Y = g \cap f(g)$ y $Z = k \cap f(k)$ para ℓ, g y k rectas distintas de PQ que pasan por P. Existe una cónica Ω que pasa por P, Q, X, Y y Z porque X, Y y Z no son colineales, y sea W un punto en Ω y notemos que $\frac{sin(\angle XPZ)}{sin(\angle ZPY)} \Big/ \frac{sin(\angle XPW)}{sin(\angle WPY)} = (X,Y;Z,W)_\Omega = \frac{sin(\angle XQZ)}{sin(\angle ZQY)} \Big/ \frac{sin(\angle XQW)}{sin(\angle WQY)}$ por cónica, entonces como preserva razón cruzada, $f(PW) = QW$.

□

Teorema 3.2 (Teorema dual de la cónica de Steiner)

Sean $\mathcal{C}_1$ el conjunto de puntos que pasa por una recta ℓ y $\mathcal{C}_2$ el de una recta g, sea $P = \ell \cap g$. Sea $f : \mathcal{C}_1 \mapsto \mathcal{C}_2$ un mapeo proyectivo. Entonces se cumple lo siguiente:

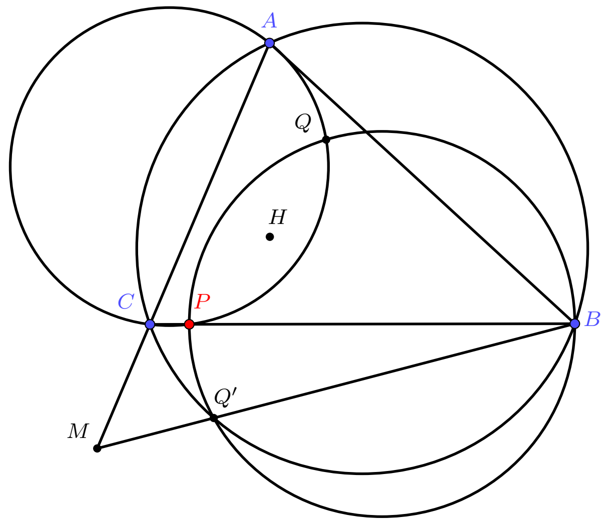
- Si $f(P) = P$ entonces, para todo $X \in \mathcal{C}_1$, $Xf(X)$ pasa por un punto fijo.
- Si $f(P) \neq P$ entonces, para todo $X \in \mathcal{C}_1$, $Xf(X)$ es tangente a una cónica fija tangente a ℓ y g.

Demostración. Si $f(P) = P$, tomemos X y Y en ℓ, sea $Z = Xf(X) \cap Yf(Y)$, notemos que para cada W en ℓ, $Z(X,Y;P,W) = (X,Y;P,W) = (f(X), f(Y); P, f(W)) = Z(f(X), f(Y); P, f(W))$, entonces $Z, f(W)$ y W son colineales.

Si $f(P) \neq P$, sea Q tal que $f(Q) = P$ y sea $R = f(P)$. Tomemos X en ℓ, sea Ω la cónica tangente a ℓ en Q, a g en R y a $Xf(X)$. Haremos una perspectiva desde el foco del cono que pasa por mi cónica Ω para transformarla a un círculo, esta transformación preserva razón cruzada y tangencias, entonces demostraremos el problema cuando Ω es un círculo. Sea O el centro de Ω, notemos que para cada Y en ℓ, si Y' es la intersección de la tangente por Y a Ω con g, se cumple $\angle YOY'$ fijo, entonces $(f(X), f(Y); P, R) = (X, Y; Q, P) = (f(X), Y'; P, R)$ por que es una rotación desde O con ángulo fijo. Entonces $f(Y) = Y'$. □

Ejemplo 3.3

Sea ABC un triángulo y P un punto en la línea BC. El círculo de diámetro BP interseca al circuncírculo del triángulo APC en $Q \neq B$. Sea M la intersección de PQ y AC, sea H el ortocentro del ABP. Prueba que mientras P varía en BC, MH pasa por un punto fijo.



Demostración. El ortocentro del $\triangle ABP$ se encuentra en la altura del triángulo ABC desde A, entonces la recta AH es fija, si demostramos que existe un mapeo proyectivo $f : AC \mapsto AH$ tal que $M \mapsto H$ y $f(A) = A$, por el teorema 3.2 podemos concluir que MH pasa por un punto fijo. Sea Q' la intersección del círcuncírculo del BPQ con el de ABC y sea B' el punto diametralmente opuesto a B en el circuncírculo de ABC, notemos que B, Q' y M son colineales por ejes radicales en los circuncírculos de APC, ABC y BPQ, además B', Q' y P son colineales porque $\angle B'Q'B = \angle PQ'B = 90°$ por diametros BP y BB'. Entonces $M \mapsto H$ es un mapeo proyectivo, ya que $M \mapsto BM = BQ' \mapsto Q'$ es perspectiva desde B, luego $Q' \mapsto B'Q' = B'P \mapsto P$ es perspectiva desde B', y finalmente $P \mapsto H$ porque $PH \perp AB$. Entonces MH pasa por un punto fijo, y lo más impresionante es que no sabemos absolutamente nada sobre ese punto fijo. □

Teorema 3.4 (Parábola y rotohomotecia)

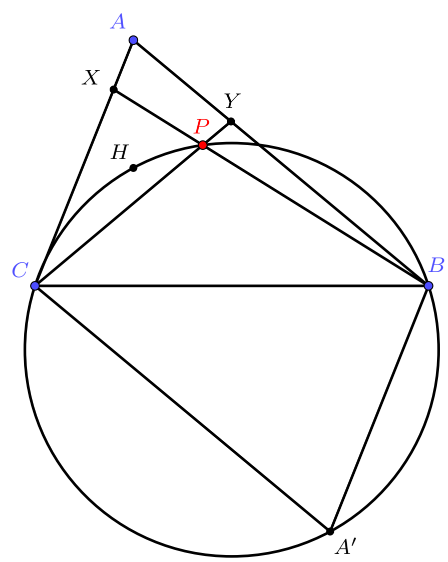
Sean $\mathcal{C}_1$ el conjunto de puntos de una recta ℓ y $\mathcal{C}_2$ el de otra recta g, y sea $P = \ell \cap g$. Sea $f : \mathcal{C}_1 \mapsto \mathcal{C}_2$ un mapeo proyectivo tal que $f(P) \neq P$ y $f(\infty_\ell) = \infty_g$. Entonces se cumple lo siguiente:

- Para todo $X \in \ell$, $Xf(X)$ es tangente a una parábola Ω.
- f es una rotohomotecia.
- El foco de Ω es el centro de rotohomotecia.

Demostración. Como $f(P) \neq P$, utilizando el teorema 3.2, para todo X en ℓ, $Xf(X)$ es tangente a una cónica fija. Entonces $\infty_\ell\infty_g$ (la recta al infinito) es tangente a esa cónica, y solo las parábolas cumplen esa propiedad (los elipses no tienen puntos al infinito y las hipérbolas tienen dos puntos al infinito). Al saber que existe dicha parábola, denotemos F a su foco, demostraremos que $AFXf(X)$ es un cuádrilatero cíclico. Tomemos los reflejados de P respecto a ℓ, g y $Xf(X)$, es conocido que el reflejado del foco de una parábola respecto a una recta tangente está en la directriz, entonces las proyecciones de P al triángulo $AXf(X)$ también están en una línea. $AFXf(X)$ es cíclico por el teorema de Wallace-Simson, entonces f es una rotohomotecia con centro F. □

Ejemplo 3.5

Sea H el ortocentro de un triángulo ABC. ω es el circuncírculo de BHC. Tomemos un punto P en ω. Las rectas BP y CP intersecan las líneas AC y AB en puntos X y Y respectivamente. Demuestra que mientras P varía en ω, el circuncírculo del cuádrilatero $AXPY$ pasa por un punto fijo distinto de A.



Demostración. Existe un mapeo proyectivo $f : AC \mapsto AB$ tal que $X \mapsto Y$ mientras P varía en ω porque son perspectivas desde B y C respectivamente ($X \mapsto BX \mapsto BP \mapsto P \mapsto CP \mapsto CY \mapsto Y$). Como $f(A) \neq A$ y $f(\infty_{AC}) = \infty_{AB}$ (tomando $P = A'$ donde A' es el reflejado de A respecto al punto medio de BC), por el teorema 3.4, f es una rotohomotecia, por lo tanto el circuncírculo de AXY pasa por un punto fijo (el foco de la parábola que define f). □

Teorema 3.6 (Hipérbola)

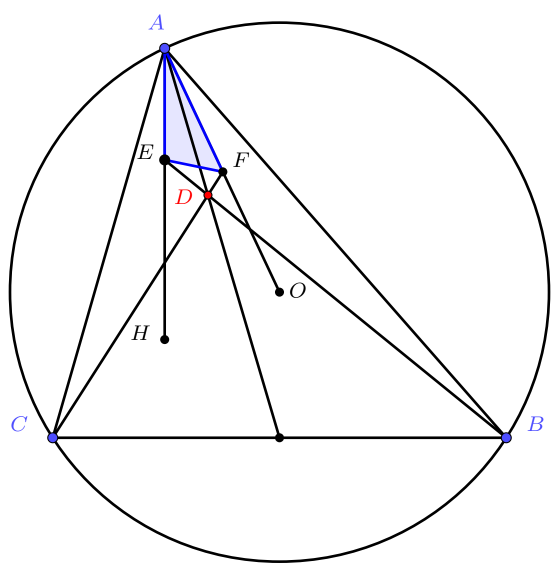
Sean $\mathcal{C}_1$ el conjunto de puntos de una recta ℓ y $\mathcal{C}_2$ el de otra recta g, sea $f : \mathcal{C}_1 \mapsto \mathcal{C}_2$ un mapeo proyectivo. Sea X un punto variable en ℓ, dados ángulos α y β fijos, Y es el punto tal que $angle(XY, \ell) = \alpha$ y $angle(f(X)Y, g) = \beta$ Entonces se cumple lo siguiente:

- Si $f(\infty_\ell) = \infty_g$, el lugar geométrico de Y es una recta.
- Si $f(\infty_\ell) \neq \infty_g$, el lugar geométrico de Y es una hipérbola.

Demostración. Mientras X varía, las rectas XY pasan por un punto al infinito fijo ∞_1, y de manera similar las rectas $f(X)Y$ pasan por otro punto al infinito fijo ∞_2. Como f preserva razón cruzada, existe un mapeo proyectivo $g : XY \mapsto f(X)Y$ del haz de rectas de ∞_1 al de ∞_2. Si $f(\infty_\ell) = \infty_g \implies g(\infty_1\infty_2) = \infty_1\infty_2$, entonces por el teorema 3.1 el lugar geométrico de Y es una recta; en caso contrario si $f(\infty_\ell) \neq \infty_g \implies g(\infty_1\infty_2) \neq \infty_1\infty_2$, entonces es una cónica la cual tiene que ser una hipérbola porque pasa tanto por ∞_1 como ∞_2 que son dos puntos al infinito. $\square$

Ejemplo 3.7

Sea ABC un triángulo, H su ortocentro y O su circuncentro. Sea M un punto en la mediana desde A del triángulo ABC. Sean E y F las intersecciones de BM y CM con AH y AO respectivamente. Encuentra el lugar geométrico del ortocentro del triángulo AEF mientras M varía en la mediana.



Demostración. Notemos que $E \mapsto F$ es proyectivo, ya que existe $f : AH \mapsto AO$ mediante perspectivas: $E \mapsto BE = BM \mapsto M \mapsto CM = CF \mapsto F$ siendo perspectiva desde B y luego desde C. Sea X el ortocentro del triángulo AEF, tenemos que $\angle XEA$ es constante, porque $EX \perp AF$ para todo M en la mediana, análogamente, el ángulo $\angle XFA$ es constante, porque $XF \perp AE$ para todo M en la mediana. Por el teorema 3.6, si $f(\infty_{AH}) = \infty_{AO}$, el lugar geométrico de X es una recta, queda como ejercicio al lector demostrar que esto solo se cumple cuando ABC es isósceles (lo cual es degenerado porque las rectas AH y AO serían iguales) o cuando $\angle C = 90°$, en cualquier otro caso el lugar geométrico de X es una hipérbola. $\square$

4. Problemas

Problema 4.1. *Sean ω_1 y ω_2 círculos que se intersecan en puntos distintos A y B. Sea $P \in \omega_1$ y $Q \in \omega_2$ puntos tal que $\angle PAB = \angle QAB$. Prueba que mientras el par de puntos P y Q varía, el circuncírculo de APQ pasa por un punto fijo distinto de A.*

Problema 4.2. *Sea ABC un triángulo tal que $AB > AC$ y H su ortocentro. D es un punto interno a ABC tal que $DB = DC$. BD y CD intersecan a CA y AB en E y F respectivamente. K es la intersección de EF con BC y X es el ortocentro del triángulo DBC. Prueba que $HX \perp AK$.*

Problema 4.3. *Sea ABC un triángulo y ℓ un recta. Sea X un punto variable en ℓ y sea X' su conjugado isogonal. Encuentra el lugar geométrico de X' mientras X varía en ℓ.*

Problema 4.4. *Sea AA_1 la bisectriz del triángulo ABC. Puntos D y F se eligen en BC tal que A_1 es punto medio del segmento DF. Una línea ℓ distinta de BC, pasa por A_1 e interseca a AB y AC en puntos B_1 y C_1 respectivamente. Encuentra el lugar geométrico de los puntos de intersección de las líneas B_1D y C_1F para todas las posibles ℓ.*

Problema 4.5. *Dado un triángulo ABC y un punto D en el lado AB. Sea I un punto interno al triángulo ABC en la bisectriz de $\angle ACB$. La segunda intersección de las rectas AI y CI con el circuncírculo de ACD son P y Q respectivamente. Similarmente, la segunda intersección de las rectas BI y CI con el circuncírculo de BCD son R y S respectivamente. Demuestra que $P \neq Q$ y $R \neq S$, las rectas AB, PQ y RS pasan por un punto fijo o son paralelas.*

Problema 4.6. *Sea ABC un triángulo y M el punto medio de AC. Dado D un punto en BC, E es la intersección de DM con AB y F el punto en BC tal que $\angle BAF = \angle CAD$. Encuentra el lugar geométrico del ortocentro del triángulo FBE mientras D varía en BC.*

Problema 4.7. *Sea $ABCD$ un cuadrado y O un punto del plano. Demuestra que $OA < OB + OC + OD$.*

Problema 4.8. *Sea ABC un triángulo y sea P un punto en el plano. Sea DEF el triángulo pedal de P respecto a ABC. Sea X_A un punto en BC. Sean Y_B y Y_C puntos en AB y AC respectivamente tal que $X_AY_B \parallel DE$ y $X_AY_C \parallel DF$. Demuestra que mientras X_A varía en BC, el circuncírculo de AY_BY_C pasa por un punto fijo.*

Problema 4.9 (RMM P2 2019). *Sea $ABCD$ un trapecio isósceles con $AB \parallel CD$. Sea E el punto medio de AC. Denota ω y Ω a los circuncírculos de los triángulos ABE y CDE respectivamente. Sea P el punto de intersección de la tangente a ω por A con la tangente a Ω por D. Prueba que PE es tangente a Ω.*

Problema 4.10 (IMO SL 2000 G3). *Sea O el circuncentro y H el ortocentro de un triángulo acutángulo ABC. Demuestra que existen puntos D, E y F en los lados BC, CA y AB respectivamente tal que $OD + DH = OE + EH = OF + FH$ y las rectas AD, BE y CF concurren.*

Problema 4.11 (ELMO 2012 P5). *Sea ABC un triángulo tal que $AB < AC$, y sean D y E puntos en BC tal que $BD = CE$ y D está entre B y E. Supón que existe un punto P dentro de ABC tal que $PD \parallel AE$ y $\angle PAB = \angle EAC$. Demuestra que $\angle PBA = \angle PCA$.*

Problema 4.12 (IGO 2014 P5). *Dos puntos P y Q están en el lado BC del triángulo ABC tal que son equidistantes al punto medio de BC. Las perpendiculares desde P y Q a BC intersecan a AC y AB en E y F respectivamente. M es la intersección de PF y EQ. Si H_1 y H_2 son los ortocentros de BFP y CEQ respectivamente, demuestra que $AM \perp H_1H_2$.*

Problema 4.13. *Sea ABC un triángulo acutángulo y ℓ su recta de Euler. Puntos M y N son las reflexiones de B y C respecto a ℓ. Sea P un punto arbitrario en ℓ. E es la intersección de las rectas PM y AC, y F es la intersección de las rectas PN y AB. Sea H el ortocentro del triángulo ABC y S su reflexión respecto a la recta EF. Prueba que S está en el circuncírculo de ABC.*

Problema 4.14. *Sea ABC un triángulo y sea P un punto arbitrario. Demuestra que la suma de distancias $PA + PB + PC$ alcanza su mínimo cuando $\angle APB = \angle BPC = \angle CPA = 120°$.*

Problema 4.15 (IGO 2021 P5)**.** *Sea ABC un triángulo con incentro I. El incírculo de ABC es tangente a BC en D. Sean P y Q puntos en BC tal que $\angle PAB = \angle BCA$ y $\angle QAC = \angle ABC$ respectivamente. Sean K y L el incentro del triángulo ABP y ACQ respectivamente. Prueba que AD es la recta de Euler del triángulo IKL.*

5. Bibliografía

I) Shen, E. (2 de diciembre de 2020). Nuclear geometry. http://ericshen.net/handouts/ZG-nuclear.pdf

II) Zveryk, V. (29 de julio de 2019). The Method of Moving Points. https://cdn.bc-pf.org/resources/math/geometry/bash/Vladyslav_Zveryk-The_Method_of_Moving_Points.pdf

III) Chroman, Z., Goel, G., Mudgal, A. (Noviembre 2019). The Method of Animation. https://services.artofproblemsolving.com/download.php?id=YXR0YWNobWVudHMvOS80L2MxYTVkYmU5MGRlZWRjNGExYzhkYmQxOTU3NWNhYTU4OGYxMDhhLnBkZg==&rn=QW5pbWF0aW9uLnBkZg==