Inversión

Eric Ransom Treviño

Octubre 2023

1. Preliminares

Definición 1.1 (Potencia de punto) — Sea Γ un círculo con centro O y radio r. Para cada punto P en el plano la potencia de punto de P a Γ se define como $PO^2 - r^2$.

> **Nota.** La potencia de punto es negativa cuando P está dentro del círculo y positiva cuando está afuera.

Esta función cumple varias propiedades, entre ellas la más útil es que si tengo puntos A y B en Γ tal que AB pasa por P, se cumple que $PO^2 - r^2 = PA \cdot PB$.

2. Inversión

Definición 2.1 (Inversión) — Sea Γ un círculo con centro O y radio r. Una inversión es una función $f : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}^2$ que preserva una relación inversamente proporcional:

$$\text{Para todo } P \in \mathbb{R}^2,\ f(P) \text{ está en el rayo } OP \text{ y } OP \cdot Of(P) = r^2.$$

> **Nota.** Usaremos P' como la imagen de P bajo una inversión f (es decir $f(P) = P'$).

Aunque previamente se dijo que una inversión mapea el plano $\mathbb{R}^2$ a sí mismo, hay un pequeño hueco o punto indefinido: el centro O no tiene inverso :C. La imagen de O está en el infinito, entre más se acerca P a O, su inverso $f(P)$ tiende al infinito. Algunas propiedades básicas de la inversión son las siguientes:

- Para cada punto P' existe un punto P tal que P' es inverso de P.
- Si P' es el inverso de P entonces P también es el inverso de P'.
- Si P está en Γ entonces $P' = P$.
- Si P está dentro de Γ entonces P' está fuera de Γ y viceversa.

- Si P está fuera de Γ entonces P' está en la recta XY, donde X y Y son los puntos de tangencia de las rectas desde P que son tangentes a Γ.
- Dado $\mathcal{A}$ una figura (un conjunto de puntos en el plano), definimos $\mathcal{A}'$ al inverso de $\mathcal{A}$ como la figura formada por los inversos de todos los puntos $P \in \mathcal{A}$.
- Si un punto P está en la intersección de dos figuras $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$, entonces P' está en la intersección de $\mathcal{A}'$ y $\mathcal{B}'$.

Teniendo en mente estas propiedades pasaremos a algunos de los teoremas más útiles de la inversión para la resolución de problemas de olimpiada. La idea detrás de la inversión es preservar propiedades que también preserva potencia de punto, como las semejanzas de triángulos. La inversión es una herramienta poderosa para mover ángulos iguales y el siguiente teorema da base para la demostración de varios otros resultados importantes.

Teorema 2.2 (Preserva ángulos)

Sea Γ un círculo con centro O. Dados puntos P y Q sean P' y Q' sus inversos respecto a Γ respectivamente. Entonces $\angle OPQ = \angle OQ'P'$.

Demostración. Dado que $OP \cdot OP' = OQ \cdot OQ'$ se puede expresar como $\frac{OP}{OQ} = \frac{OQ'}{OP'}$, se cumple por criterio de semejanza RAR que $\triangle OPQ$ es semejante al $\triangle OQ'P'$, entonces $\angle OPQ = \angle OQ'P'$ por ángulos correspondientes. □

Teorema 2.3 (Inversos de Rectas)

Sea Γ un círculo con centro O. Sea ℓ una recta y ℓ' su inverso respecto a Γ, entonces se cumple lo siguiente.

- Si ℓ pasa por O, entonces $\ell' = \ell$.
- Si ℓ no pasa por O, entonces ℓ' es un círculo que pasa por O.

Demostración. Si ℓ pasa por O, entonces para cada punto P en ℓ, P' está en el rayo OP, en otras palabras P' está en ℓ. Si ℓ no pasa por O, sea P la proyección de O a ℓ y P' su inverso. Si $Q \neq P$ es un punto variable en ℓ, por el teorema 2.2, $\angle OQ'P' = \angle OPQ = 90°$, entonces Q' está en la circunferencia de diámetro OP', la cual es fija. □

Teorema 2.4 (Inversos de círculos)

Sea Γ un círculo con centro O. Sea Ω un círculo y Ω' su inverso respecto a Γ, entonces se cumple lo siguiente.

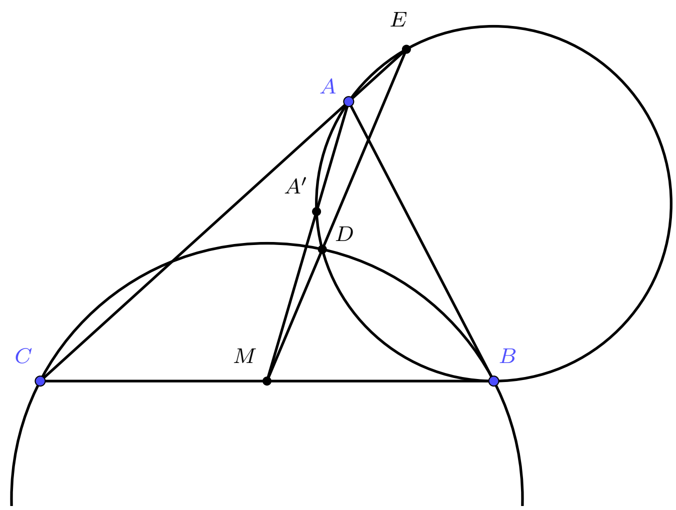
- Si Ω pasa por O, entonces Ω' es una recta.
- Si Ω no pasa por O, entonces Ω' es un círculo que no pasa por O.

Demostración. Si Ω pasa por O, sea P el punto diametralmente opuesto a O en Ω. Sea $Q \neq P$ un punto variable en Ω, por el teorema 2.2, $\angle OP'Q' = \angle OQP = 90°$, entonces Q' está en la recta perpendicular a OP por P', la cual es fija. Si Ω no pasa por O, sean P, Q y R puntos fijos en Ω y S un punto variable en Ω. Notemos que $\angle PQR + \angle PSR = \angle OQP + \angle OQR + \angle OSP + \angle OSR = 180$ por ángulos opuestos en el cuadrilátero cíclico $PQRS$. Por el teorema 2.2, $\angle OP'Q' + \angle OR'Q' + \angle OP'S' + \angle OR'S' = \angle QRS + \angle QPS = 180$, entonces $P'Q'R'S'$ es cíclico por ángulos opuestos, concluyendo así que mientras S varía en Ω, S' está en el circuncírculo de $P'Q'R'$. □

Inversión analiza el lugar geométrico de rectas y círculos después de realizar la transformación de los puntos del plano, y se utiliza para demostrar cuadriláteros cíclicos o colinealidades. El siguiente ejemplo utiliza inversión como una herramienta substituta de lo que podría ser mover angulitos.

Ejemplo 2.5 (IMSC Mock Geometría 2023)

Sea ABC un triángulo. Sea ω_A el círculo que pasa a través de A y es tangente a la recta BC en B y sea ω_C el círculo que pasa a través de C y es tangente a la recta AB en B. Sea D el segundo punto de intersección de ω_A y ω_C. Sea M el punto medio de BC y sea E la intersección de MD y AC. Demuestra que E está en ω_A.

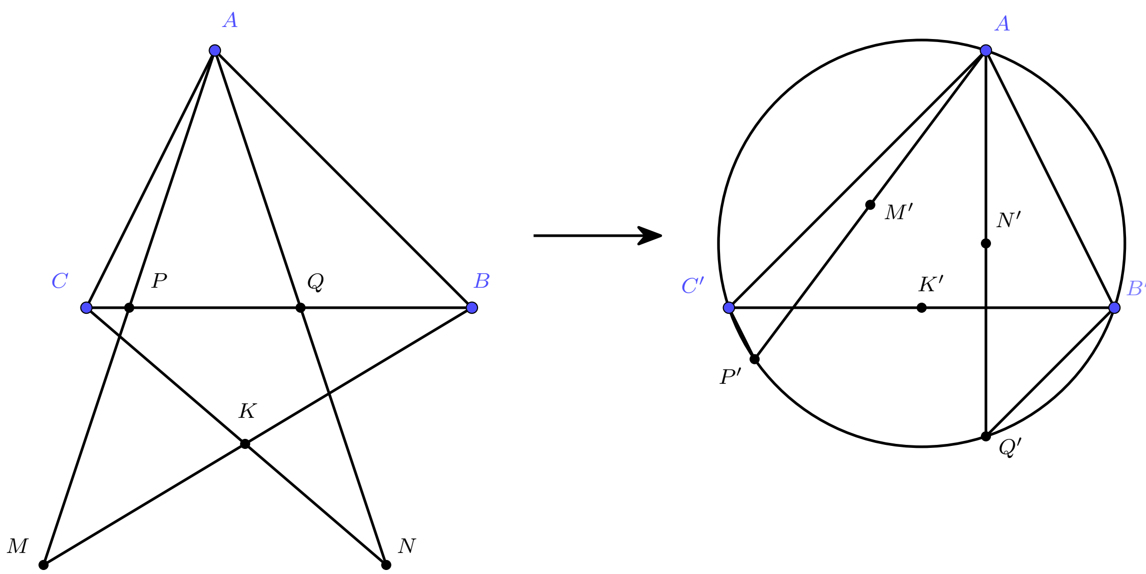


Demostración. Sean E' y A' las intersecciones de MD y MA con ω_A respectivamente. Notemos que $MA \cdot MA' = MD \cdot ME' = MB^2$ por potencia de punto desde M a ω_A, y a su vez, es igual a MC^2 porque $MB = MC$, esto significa que la inversión con centro M y radio MB invierte A a A', E' a D y C a sí mismo. Por el teorema 2.3, C, A y E' son colineales si y solo si $MDA'C$ es cíclico. Notemos que $\angle MA'D = \angle DBA$ por cíclico $A'DBA$, y $\angle MCD = \angle DBA$ porque ω_C es tangente a AB, entonces $MDA'C$ es cíclico por ángulo inscritos, lo que significa que E' está en la recta AC, demostrando así $E = E'$. □

El siguiente ejemplo muestra el uso de inversión como una herramienta para transformar el problema entero. Si invertimos cada uno de los puntos, las propiedades que se mencionan en el problema se convertirán en otras casi totalmente diferentes, lo bonito es que demostrar el problema después de la inversión es suficiente para demostrar el original.

Ejemplo 2.6 (IMO 2014 P4)

Los puntos P y Q yacen sobre el lado BC de un triángulo auctángulo ABC de modo que $\angle PAB = \angle BCA$ y $\angle CAQ = \angle CBA$. Los puntos M y N yacen sobre las rectas AP y AQ respectivamente, tales que P es el punto medio de AM y Q es el punto medio de AN. Demostrar que las rectas BM y CN se intersectan sobre el circuncírculo del triángulo ABC.



Demostración. Sea K la intersección de BM y CN. Consideramos una inversión con centro A y radio arbitrario, esta transformación convierte el problema en algo muy distinto pero más amigable. Sean B', C', P', Q', M', N' y K' los inversos de B, C, P, Q, M, N y K respectivamente, y tenemos una serie de resultados que conocemos de la figura inversa al problema. Por el teorema 2.3, se tiene que $AB'C'P'Q'$ es cíclico, y por el teorema 2.2, $\angle PAB = \angle P'AB' = \angle C'B'A = \angle BCA$, esto significa que $AB' \parallel C'P'$, análogamente $AC' \parallel B'Q'$. Como $AP \cdot AP' = AM \cdot AM'$, y sabemos que $AM = 2 \cdot AP$, se cumple que $AM' = \frac{1}{2} \cdot AP'$, o sea M' es el punto medio de AP', análogamente N' es el punto medio de AQ'. El punto medio L de $B'C'$ cumple que $AM'LB'$ y $AN'LC'$ son trapecios isósceles por las paralelas $AB' \parallel M'K' \parallel C'P'$ y $AC' \parallel N'K' \parallel B'Q'$. K', y como L está en los inversos de BM y CN que son $(\circ AM'B')$ y $(\circ AN'C')$ respectivamente, entonces $L = K'$, y como B', K' y C' son colineales, por el teorema 2.3 se cumple que $ABKC$ es cíclico. $\square$

Definición 2.7 (Ángulos entre círculos) — Se define como el ángulo formado entre dos círculos al ángulo formado entre las tangentes por un punto de intersección a los dos círculos.

Dos círculos son **ortogonales** si el ángulo formado entre ellos es de 90°, en otras palabras, si las rectas tangentes por uno de sus puntos de intersección pasan por los centros de los círculos. Las circunferencias ortogonales son un importante indicador de que el problema posiblemente podría demostrarse con inversión, el siguiente teorema nos muestra una de las propiedad más utilizadas.

Teorema 2.8 (Ortogonales)

Sea Γ un círculo y sea Ω un círculo ortogonal a Γ, entonces el inverso de Ω respecto a Γ es sí mismo.

Demostración. Sea O el centro de Γ, r el radio, y sea A un punto de intersección de Γ y Ω. Como Γ y Ω son ortogonales se tiene que la tangente por A a Ω pasa por O. Notemos que por potencia desde O a Ω, para cada par de puntos P y P' en Ω tal que O, P y P' son colineales, $OP \cdot OP' = OA^2 = r^2$, o sea P y P' son inversos, entonces Ω se invierte en sí mismo. □

Identificar circunferencias ortogonales en problemas de olimpiada puede motivar la idea de utilizar inversión para mantener circunferencias fijas después de la transformación.

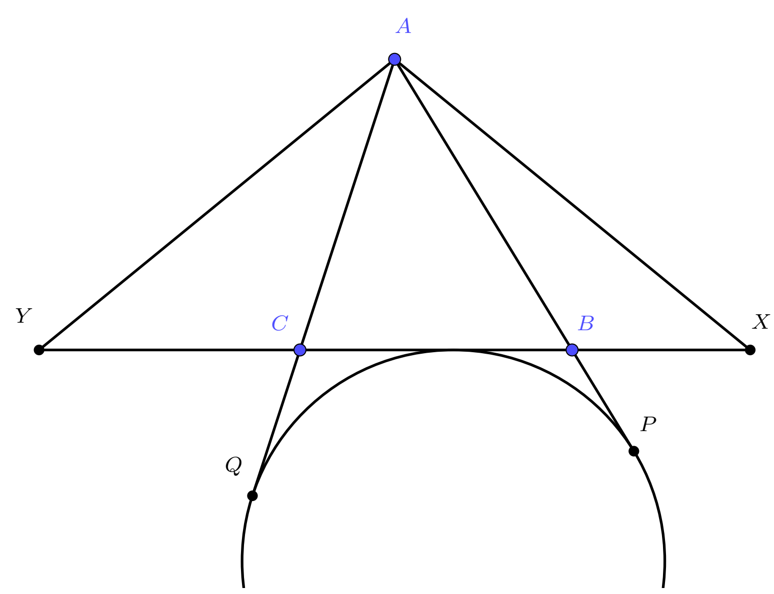
Teorema 2.9 (Tangencias)

Sea Γ un círculo y sean $\mathcal{C}_1$ y $\mathcal{C}_2$ rectas o círculos tangentes entre sí, entonces sus inversos respecto a Γ ($\mathcal{C}_1'$ y $\mathcal{C}_2'$) también son tangentes.

Demostración. Si dos figuras $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ tienen solo un punto P en común, entonces sus inversos $\mathcal{A}'$ y $\mathcal{B}'$ tienen solo un punto P' en común, porque si tuvieran otro punto $Q' \neq P'$ en común, entonces existe un punto $Q \neq P$ en $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$, lo cual es falso por definición. Entonces si $\mathcal{C}_1$ y $\mathcal{C}_2$ son tangentes, en otras palabras solo tienen un punto en común, significa que sus inversos $\mathcal{C}_1'$ y $\mathcal{C}_2'$ también tienen solo un punto en común, en otras palabras son tangentes. □

Ejemplo 2.10

Sea ABC un triángulo y sea s su semiperímetro. Sean X y Y puntos en BC tal que $AX = AY = s$. Demuestra que el excírculo opuesto a A del triángulo ABC es tangente al circuncírculo de AXY.



Demostración. Sean P y Q los puntos de tangencia del A-excírculo con AB y AC respectivamente, es hecho conocido que $AP = AQ = s$. Si invertimos respecto a la circunferencia de centro A y radio s, por el teorema 2.3 la recta XY se mapea a el circuncírculo de AXY, por el teorema 2.8 el A-excírculo se mapea a sí mismo ya que es ortogonal, y como tenemos que XY es tangente al A-excírculo, por el teorema 2.9 obtenemos que el circuncírculo de AXY y el A-excírculo también son tangentes. □

Las propiedades de inversión que hemos revisado son amplias y muy utilizadas, como observado en los ejemplos, pero esta técnica sigue siendo una transformación geométrica, como también lo son la reflexión, rotación, traslación, homotecia, entre muchas otras. Existen resultados muy complejos, que con composiciones de transformaciones del plano pueden facilitar su demostración demasiado, y que sin estas técnicas, los problemas son muy difíciles.

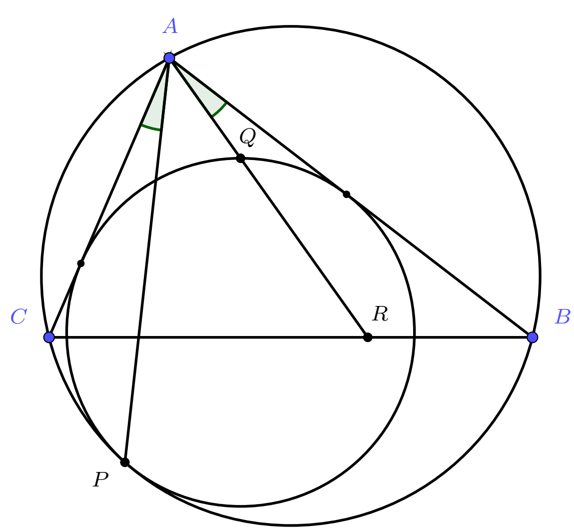
Definición 2.11 (Inversión reflexión) — Sea f una inversión con centro O y g una reflexión sobre una recta o un punto. Se le llama inversión reflexión a la transformación $h = f \circ g$.

Esta transformación preserva todas las propiedades de inversión, ya que la reflexión solo "mueve.[el] plano sin cambiar las propiedades básicas de sus elementos (preserva colinealidad, ángulos, áreas, cíclicos, tangencias, etc.). Entre estas transformaciones, las más utilizadas son las siguientes:

- Inversión con centro O, radio arbitrario y reflexión respecto a O (puede interpretarse como una rotación de 180° con centro en O).
- En un triángulo ABC, inversión con centro A, radio c y reflexión respecto a la bisectriz del ángulo en A.

Ejemplo 2.12 (EGMO 2013 P5)

Sea Ω el circuncírculo del triángulo ABC. El círculo ω es tangente a los lados AB y AC, y tangente internamente al círculo Ω en un punto P. Una línea paralela a BC intersecando el interior del triángulo ABC es tangente a ω en Q. Demuestra que $\angle CAP = \angle QAB$.



Demostración. Primero notemos ω y el A-excírculo tienen centro de homotecia A porque ambas circunferencias son tangentes a AB y a AC. Si R es el punto de tangencia del A-excírculo con BC, entonces la homotecia con centro A que manda ω al A-excírculo manda Q a R, porque BC y la tangente por Q a ω son paralelas, entonces A, Q y R son colineales. Si consideramos la inversión con centro A y radio $\sqrt{AB \cdot AC}$ y reflexión respecto a la bisectriz del ángulo en A, el circuncírculo de $ABC \mapsto BC$ y viceversa, y $AB \mapsto AC$ y viceversa. Si $\omega \mapsto \omega'$, por el teorema 2.9, ω' cumple que es tangente a AB, AC y BC porque son inversos de AC, AB y el circuncírculo de ABC respectivamente, y como los puntos de tangencia de ω están en los segmentos AB y AC, sus inversos tienen que estar fuera de los segmentos AB y AC, entonces ω' es el A-excírculo, significando que $P \mapsto R$, entonces AP y AR son reflejados respecto a la bisectriz, en otras palabras, $\angle CAP = \angle RAB = \angle QAB$. □

Problemas de homotecia van muy de la mano con problemas de la inversión, la homotecia preserva una relación directamente proporcional mientras la inversión preserva una relación inversamente proporcional. El siguiente teorema muestra un resultado que puede parecer muy simple pero se utiliza en varios problemas y puede pasar desapercibido.

Teorema 2.13 (Centros de homotecia)
Los centros de homotecia de dos circunferencias también son centros de inversión o inversión reflexión.

Este resultado se demuestra utilizando las proporciones que nos dan ambas transformaciones, el centro de homotecia con razón positiva es una inversión, y el de razón negativa es una inversión reflexión (respecto al centro de homotecia). Estrategias como estas aparecen comúnmente en problemas que involucran a la circunferencia de los 9 puntos, ya que el ortocentro y el gravicentro son centros de homotecia entre esta y el circuncírculo de ABC.

Teorema 2.14 (Centro radical)
Para tres círculos Γ_1, Γ_2 y Γ_3 tal que no concurren, no son concentricas y sus centros no son colineales, entonces existe una inversión o inversión reflexión con centro en el centro radical de Γ_1, Γ_2 y Γ_3 tal que preserva las tres circunferencias.

Demostración. Sea O el centro radical de Γ_1, Γ_2 y Γ_3, y sea $p(O)$ a la potencia de O a las tres circunferencias. Notemos que $p(O) \neq 0$ porque las tres circunferencias no concurren, si $p(O) > 0$ la inversión con centro O y radio $\sqrt{|p(O)|}$ preserva las tres circunferencias, y si $p(O) < 0$ entonces inversión con centro O y radio $\sqrt{|p(O)|}$ y reflexión respecto a O preserva las tres circunferencias. □

Los ejes radicales cumplen que la potencia de los puntos en él es igual hacia dos circunferencias fijas, esto nos permite encontrar una infinita cantidad de circunferencias ortogonales a las dos circunferencias fijas. Inversión desde un punto en el eje radical es muy buena idea, especialmente si se quieren demostrar tangencias y dejar circunferencias fijas.

3. Ejercicios

Ejercicio 3.1. *Sean P y P' inversos respecto a un círculo Ω, sean X y Y los puntos en Ω tal que $P'X$ y $P'Y$ son tangentes a Ω. Entonces P está en XY.*

Ejercicio 3.2. *Sean P y P' inversos respecto a un círculo Ω, sean X y Y las intersecciones de PP' con Ω. Entonces $(X, Y; P, P') = \frac{XP}{PY} / \frac{XP'}{P'Y} = -1$.*

Ejercicio 3.3. *Dados tres puntos P, Q y R y sus inversos P', Q' y R', entonces $\angle PQR = \angle P'Q'R'$ si y sólo si $\angle OPQ + \angle ORP = \angle PQR$.*

Ejercicio 3.4. *Sean P' y Q' los inversos de P y Q sobre una circunferencia Γ con radio r, entonces se cumple que*

$$P'Q' = \frac{r^2 \cdot PQ}{OP \cdot OQ}$$

4. Problemas

4.1. Nivel I

Problema 4.1. *Sea ABC un triángulo tal que $\angle A = 90°$ y sea D el pie de altura desde A a BC. Demuestra que $\frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AC^2} = \frac{1}{AD^2}$.*

Problema 4.2. *Sea ABC un triángulo y P el punto en BC tal que PA es tangente al circuncírculo de ABC. Sea Q el punto en el segmento BC tal que $PQ = PA$. Demuestra que AQ biseca al ángulo $\angle BAC$.*

Problema 4.3. *Las circunferencias Γ_1, Γ_2, Γ_3 y Γ_4 cumplen que Γ_1 y Γ_3 son ambas tangentes a Γ_2 y Γ_4. Muestra que los puntos de tangencia son colineales o concíclicos.*

Problema 4.4. *Sea $ABCD$ un cuadrilátero convexo cíclico con centro O. Sea P la intersección de AB con CD. Si los circuncírculos de OAB y OCD se intersecan en Q, demuestra que O, Q y P son colineales y que $\angle AQC = \angle BQD$.*

Problema 4.5. *Sea P' el inverso de P respecto a un círculo Γ. Demuestra que para cualquier punto A en Γ, la razón $\frac{AP}{AP'}$ es constante.*

Problema 4.6. *Sea I el incentro de un triángulo ABC y sea Γ es la circunferencia tangente a BC y tangente a AI en I. Demuestra que Γ también es tangente al circuncírculo de ABC.*

Problema 4.7. *Sean Γ_1 y Γ_2 dos circunferencias tal que Γ_2 pasa por el centro de Γ_1. Sean A y B los puntos de intersección de Γ_1 y Γ_2. Sean P y Q las intersecciones de una recta que pasa por B con Γ_1 y Γ_2, respectivamente. Sea R la intersección de OQ con AB donde O es el centro de Ω_1. Demuestra que $RBPO$ es cíclico.*

Problema 4.8. *Dado un triángulo ABC y su circunferencia circunscrita Γ, sea Ω la circunferencia tangente a Γ en A y tangente a BC en un punto F. Sea E el otro punto de intersección de Ω con el lado AC (aparte de A).*

(a) *Demostrar que la recta AF es la bisectriz del ángulo $\angle CAB$*

(b) *Si U y V son los dos puntos de Γ que cumplen $CF = CU = CV$, demostrar que UV es tangente la circunferencia Ω en el punto E.*

Problema 4.9. *Sea ω una semicircunferencia de diámetro PQ. Un círculo Γ tangente internamente a ω es tangente al segmento PQ en C. Tomamos A en ω y B en el segmento CQ tales que AB es tangente a Γ y perpendicular a PQ. Demuestra que AC biseca a $\angle PAB$.*

Problema 4.10. *Sean X, Y y Z los puntos de contacto del incírculo de un triángulo ABC con los lados BC, CA y AB respectivamente. Demuestra que el otrocentro de XYZ es colineal con el circuncentro y el incentro de ABC.*

Problema 4.11. *Las circunferencias Γ_1 y Γ_2 son tangentes internamente a Γ_3 en los puntos A y B respectivamente. Se traza una tangente exterior común a Γ_1 y Γ_2 la cual toca a las circunferencias en los puntos C y D respectivamente. Demuestra que las rectas AC y BD se intersecan en un punto sobre Γ_3.*

Problema 4.12. *Sea ABC un triángulo y D el pie de altura desde A a BC. Sea X un punto cualquiera sobre AD. Sean P, Q, R y S las proyecciones desde D a las rectas BA, BX, CX y CA respectivamente. Demuestra que los puntos P, Q, R y S son colineales o concíclicos.*

Problema 4.13. *Sea Γ el circuncírculo de un polígono regular $A_1A_2...A_n$ de n lados, y dado M un punto en el arco menor A_1A_n sean $d_1, d_2, ..., d_n$ las distancias $MA_1, MA_2, ..., MA_n$ respectivamente. Demuestra que*

$$\frac{1}{d_1 \cdot d_2} + \frac{1}{d_2 \cdot d_3} + ... + \frac{1}{d_{n-1} \cdot d_n} = \frac{1}{d_1 \cdot d_n}$$

4.2. Nivel II

Problema 4.14. *Sean A, B y C tres puntos en una recta y P un punto fuera de esta. Demuestra que los circuncentros de los triángulos PAB, PBC y PCA están en un círculo que pasa por P.*

Problema 4.15. *Los puntos A, B y C están sobre una línea en ese orden. Los semicírculos ω_1 y ω_2 tienen como diámetros AB y BC, y están del mismo lado de la recta. Un círculo Γ es tangente a ω_1, a ω_2 en $T \neq C$ y a la recta perpendicular a AB por C. Demuestra que AT es tangente a ω_2*

Problema 4.16 (IMO 1983 P2)**.** *Sea A uno de los dos puntos distintos de intersección de dos circunferencias $\mathcal{C}_1$ y $\mathcal{C}_2$ con centros O_1 y O_2 respectivamente. Una de las tangentes comunes a estas circunferencias tocan a $\mathcal{C}_1$ en P_1 y a $\mathcal{C}_2$ en P_2, mientras que la otra tangente común toca a $\mathcal{C}_1$ en Q_1 y a $\mathcal{C}_2$ en Q_2. Sea M_1 el punto medio de P_1Q_1 y M_2 el punto medio de P_2Q_2. Prueba que $\angle O_1AO_2 = \angle M_1AM_2$.*

Problema 4.17 (Sharygin 2016, Ronda de Correspondencia)**.** *Sea D un punto arbitrario sobre el lado BC del triángulo ABC. Los círculos γ_1 y γ_2 pasan por A y D de modo que BA es tangente a γ_1 y CA es tangente a γ_2. Sea $X \neq A$ un punto en γ_1 tal que BX es tangente a γ_1 y $Y \neq A$ un punto en γ_2 tal que CY es tangente a γ_2. Demuestra que BC es tangente al circuncírculo del triángulo DXY.*

Problema 4.18. *Sea ABC un triángulo, sea I el incentro y N el punto medio del arco BC que contiene a A. Sea Γ la circunferencia tangente a AB, AC y al circuncírculo de ABC y sea T el punto de tangencia de Γ y el circuncírculo de ABC. Demuestra que I, N y T son colineales.*

Problema 4.19 (IMO 1996 P2)**.** *Sea P un punto interior al triángulo ABC tal que $\angle APB - \angle C = \angle APC \angle B$. Sean D y E los incentros de los triángulos APB y APC respectivamente. Demuestra que AP, BD y CE concurren.*

Problema 4.20 (IMO 1985 P5)**.** *Un círculo con centro O pasa por puntos A y C e intersecta los lados AB y BC de un triángulo ABC en K y N respectivamente. Las circunferencias circunscritas de los triángulos ABC y KBN se cortan en dos puntos distintos B y M. Demuestra que $\angle OMB = 90\circ$.*

4.3. Nivel III

Problema 4.21 (Sharygin 2016, Ronda final, Grado 10)**.** *Sea ABC un triángulo no isósceles, con A_1 en BC tal que AA_1 es bisectriz interna y A_2 el punto de contacto del incírculo con el lado BC. Los puntos B_1, B_2, C_1 y C_2 son definidos similarmente. Sea O e I el circuncentro e incentro de ABC. Demuestra que el centro radical del los circuncírculos de los triángulos AA_1A_2, BB_1B_2 y CC_1C_2 está en la recta OI.*

Problema 4.22 (Teorema de Feuerbach)**.** *Demuestra que la circunferencia de los 9 puntos de un triángulo ABC es tangente a su incírculo y a sus tres excírculos.*

Problema 4.23 (USAMO 2017 P3)**.** *Sea ABC un triángulo escaleno con circuncírculo Γ e incentro I. El rayo AI corta a BC en D y a Γ en M; el círculo con diámetro DM corta a Γ de nuevo en K. Las rectas BC y MK se cortan en S y N es el punto medio de IS. Los circuncírculos de KID y MAN se cortan en L_1 y L_2. Probar que Γ pasa por el punto medio de IL_1 o IL_2.*

4.4. Nivel Enfermo

Problema 4.24 (IMO 2015 P3)**.** *Sea ABC un triángulo acutángulo con $AB > AC$. Sea Γ su circuncírculo, H su ortocentro y F el pie de altura desde A. Sea M el punto medio del segmento BC. Sea Q el punto en Γ tal que $\angle HQA = 90\circ$ y sea K el punto en Γ tal que $\angle HKQ = 90\circ$. Supongamos que los puntos A, B, C, K y Q son todos distintos y están sobre Γ en ese orden. Demuestra que el circuncírculo de KQH es tangente al circuncírculo de FKM.*

Problema 4.25 (IMO SL 2016 G7)**.** *Sea I el incentro de un triángulo no equilátero ABC, IA el A-excentro, I'_A la reflexión de IA en BC y ℓ_A la reflexión de la recta AI'_A en AI. Los puntos I_B, I'_B y la recta ℓ_B se definen de forma análoga. Sea P la intersección de ℓ_A y ℓ_B.*

(a) Probar que P yace sobre la recta OI, donde O es el circuncentro del triángulo ABC.

(b) Una de las tangentes desde P al incírculo del triángulo ABC corta al circuncírculo en X e Y. Mostrar que $\angle XIY = 120\circ$

Problema 4.26 (RMM 2018 P6)**.** *Fijemos un círculo Γ, una línea ℓ es tangente a Γ, y sea Ω otro círculo disjunto de ℓ tal que Γ y Ω están en lados opuestos de ℓ. Las tangentes a Γ desde un punto variable X en Ω intersecan a ℓ en Y y Z. Demuestra que, en lo que X varía sobre Ω, el circuncírculo de XYZ es tangente a dos círculos fijos.*

5. Bibliografía

I) Baca, J. (s.f.). Geometría Proyectiva para Olimpiadas Matemáticas. Academia Sabatina de Jóvenes Talento - Nicaragua. https://jbacaob.com/files/proj_geo.pdf

II) Valeriano, P., Villareal D. (diciembre 2022). Inversión. Entrenamientos nacionales México 2022.

III) Perales, D. (16 de diciembre de 2016). Inversión.

IV) Evan Chen, *Euclidean Geometry in Methematical Olympiad*, MAA Press, EUA, 2016.