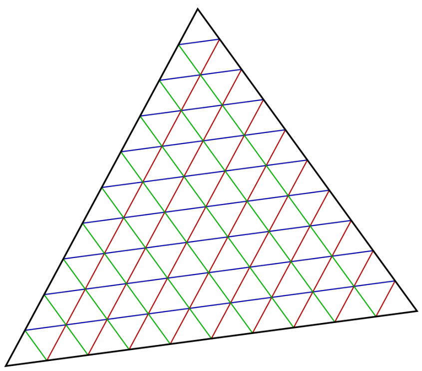
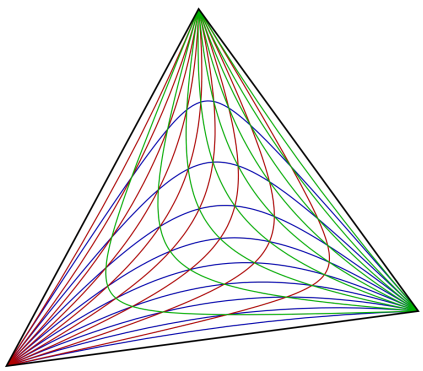
Conjugados Isogonales

Eric Ransom Treviño

Noviembre 2023

"Al chile ya no hagas listas, ponte a hacer algo que te dé dinero." - *Garza.*





1. Preliminares

Teorema 1.1 (Bisectriz Generalizada)
Dado un triángulo ABC y D un punto en la recta BC, se cumple la siguiente relación de razones:

$$\frac{\sin\angle BAD}{\sin\angle DAC}\cdot\frac{AB}{AC}=\frac{BD}{DC}$$

Teorema 1.2 (Ceva trigonométrico)
Dado un triángulo ABC, puntos D, E y F en las rectas BC, CA y AB, entonces AD, BE y CF concurren si y solo si se cumple la siguiente relación de razones:

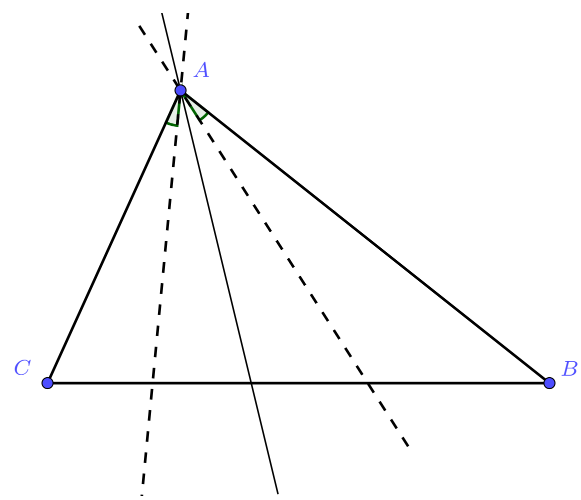
$$\frac{\sin\angle BAD}{\sin\angle DAC}\cdot\frac{\sin\angle ACP}{\sin\angle PCB}\cdot\frac{\sin\angle CBP}{\sin\angle PBA}=1$$

Nota. Los teoremas 1.1 y 1.2 contemplan segmentos dirigidos y ángulos dirigidos.

2. Conjugados Isogonales

Aprender a mover ángulos eficientemente es muy difícil, es una habilidad que se debe practicar y se domina después de resolver una enorme cantidad de problemas de olimpiada. En este documento se observará una configuración muy especial que se hace presente al demostrar igualdades de ángulos y suele ser elemento clave durante la resolución de problemas de geometría.

Definición 2.1 (Isogonal) — En un triángulo, dos rectas son isogonales si pasan por un vértice y son reflejadas respecto a la bisectriz del ángulo correspondiente al vértice.



Definición 2.2 (Conjugado Isogonal) — En un triángulo, para todo punto que no yace en los lados, su conjugado isogonal es el punto en donde concurren las isogonales.

La existencia del conjugado isogonal es un resultado inmediato del teorema 1.2. Los conjugados isogonales son una herramienta muy poderosa que suele pasar desapercibida, sobre todo cuando los puntos conjugados se encuentran exteriores al triángulo. En la mayoría de los casos, estas parejas de puntos sirven para demostrar una tercera pareja de isogonales después de que se hayan encontrado dos parejas de isogonales en un triángulo.

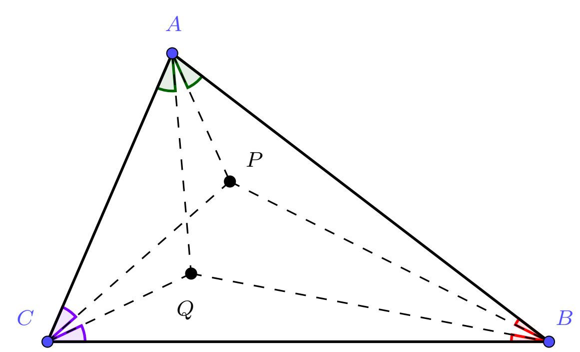


Figura 1: Puntos P y Q son conjugados isogonales interiores del triángulo ABC.

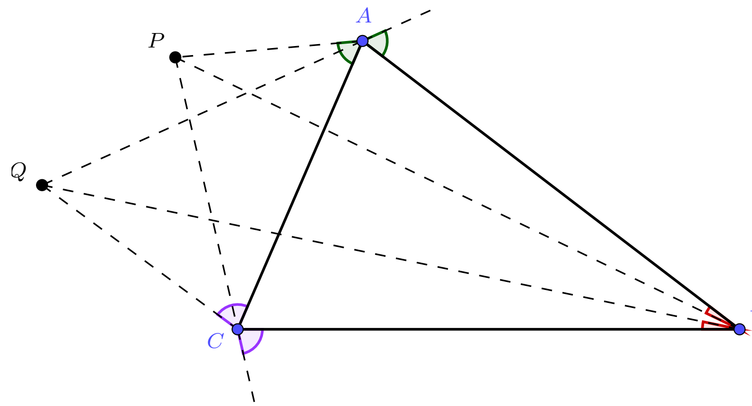
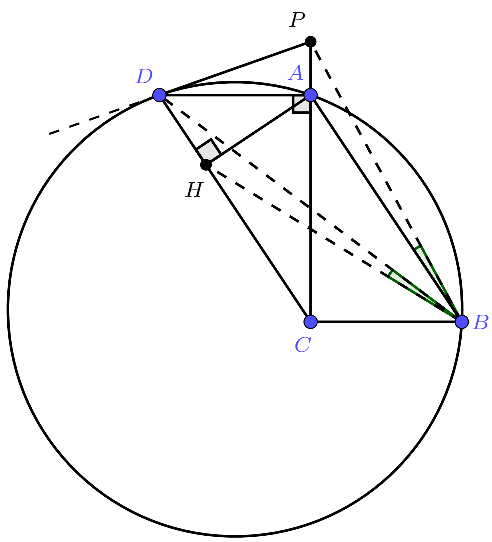


Figura 2: Puntos P y Q son conjugados isogonales exteriores del triángulo ABC.

El siguiente ejemplo demuestra lo poderosa que puede ser esta configuración con tan solo conocer la existencia de estas parejas de puntos.

Ejemplo 2.3 (IGO 2018 Intermedios P5)

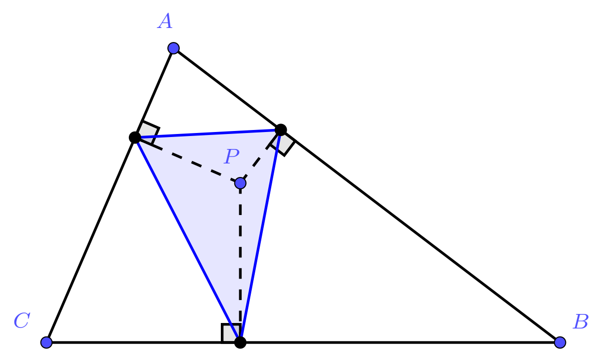
Supongase que $ABCD$ es un paralelogramo tal que $\angle DAC = 90^o$. Sea H el pie de la perpendicular desde A a DC, y sea P el punto en la recta AC tal que PD es tangente al circuncírculo del triángulo ADB. Demuestra que $\angle PBA = \angle DBH$.



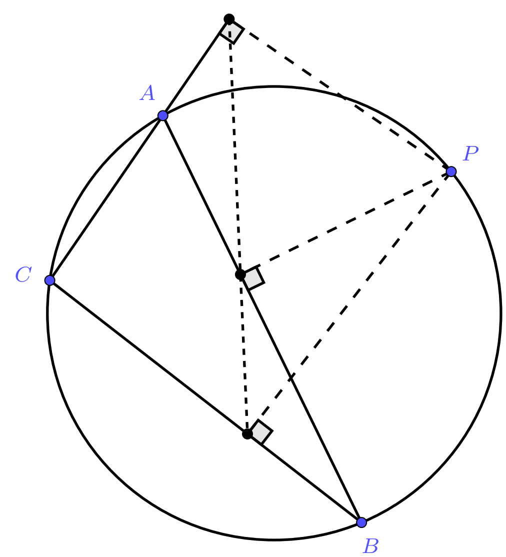
Demostración. Se demostrará que H y P son conjugados isogonales en el triángulo ABD. El ángulo $\angle ADP = \angle ABD$ por semi-inscrito, y $\angle ABD = \angle BDH$ por el paralelogramo, entonces DP y DH son isogonales en el triángulo ABD. El ángulo $\angle DAP = 90°$ por definición, y $\angle BAH = \angle AHD = 90°$ por paralelas y definición de H, entonces AH y AP son isogonales en el triángulo ABD. Con esto se puede concluir que H y P son conjugados isogonales, entonces $\angle PBA = \angle DBH$. $\square$

3. Lemas y configuraciones

Definición 3.1 (Triángulo podal) — En un triángulo ABC, el triángulo podal de un punto P es el triángulo formado por los pies de las perpendiculares desde P a los lados del triángulo.



Nota (Recta de Simson)**.** Cuando P está en el circuncírculo de ABC, su triángulo podal se degenera y se le conoce como la Recta de Simson de P en el triángulo ABC.



Para casos particulares de P, sus triángulos podales están bien estudiados y hasta tienen nombre:

- Ortocentro: triángulo órtico.
- Circuncentro: triángulo medial.
- Incentro: triángulo de contacto interior.

El triángulo podal tiene gran relación con propiedades de conjugados isogonales. Entre los teoremas más conocidos están los siguientes.

Teorema 3.2

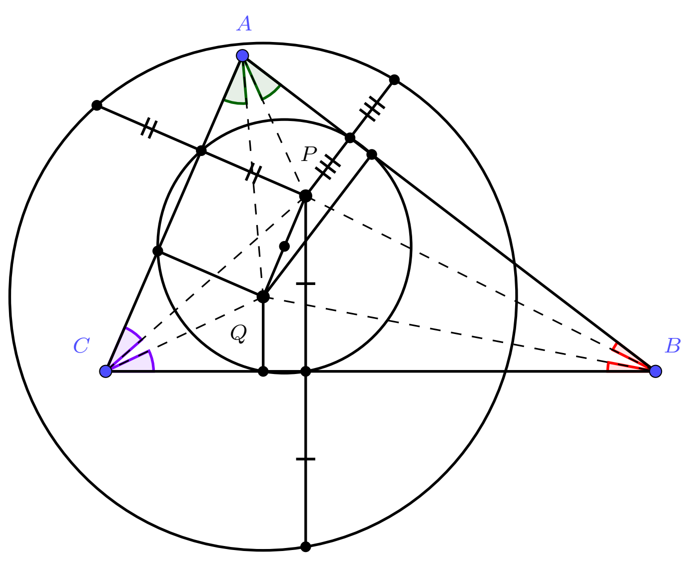
Sean P y Q conjugados isogonales en el triángulo ABC, entonces el triángulo podal de P y el de Q tienen mismo circuncírculo y su circuncentro es el punto medio de PQ.

Demostración. Sea P_A el pie de la perpendicular desde P a BC. Se define de manera similar a P_B, P_C, Q_A, Q_B y Q_C. Se demostrará que $P_AP_BQ_AQ_B$ es cíclico, y es suficiente probar que $\angle CQ_AQ_B = \angle CP_BP_A$. El cuadrilátero PP_AP_BC es cíclico porque $\angle PP_AC = \angle PP_BC = 90°$, entonces $\angle CPP_A = \angle CP_BP_A$. Análogamente, como QQ_AQ_BC es cíclico, los ángulos $\angle CQQ_B = \angle CQ_AQ_B$. Los ángulos $\angle CPP_A = \angle CQQ_B$ claramente son iguales por las isogonales, entonces ya se tiene que $P_AP_BQ_AQ_B$ es cíclico. Análogamente $P_BP_CQ_BQ_C$ y $P_CP_AQ_CQ_A$ son cíclicos. El circuncentro de $P_AP_BQ_AQ_B$ es el punto en donde concurren las mediatrices de P_AP_B y Q_AQ_B el cual es el punto medio de PQ, y análogamente se concluye que $P_BP_CQ_BQ_C$ y $P_CP_AQ_CQ_A$ tienen también circuncentro en el punto medio de PQ. Entonces $P_AP_BP_CQ_AQ_BQ_C$ es cíclico y tiene centro en el punto medio de PQ. □

Teorema 3.3

El conjugado isogonal de P es el circuncentro del triángulo que consta de los reflejados de P respecto a los lados.

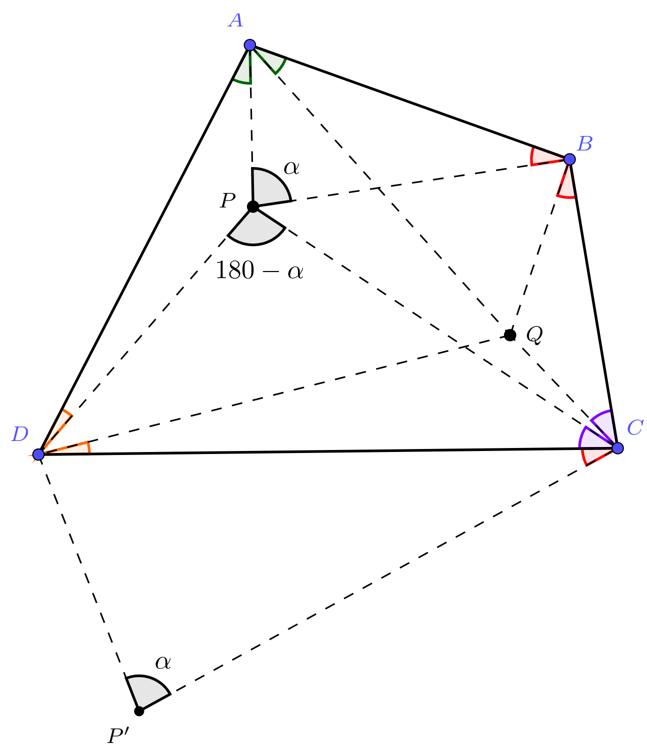
Demostración. Sea Q el conjugado isogonal de P y M el punto medio de PQ. Por el teorema 2.5, M es el circuncentro del triángulo podal de P, si se aplica una homotecia con centro P que manda M a Q, entonces Q será el circuncentro de los reflejados de P respecto a los lados. □



Los teoremas anteriores no son lo suficientemente útiles por su cuenta y aparecen muy poco en competencias, pero las ideas que se utilizan en las demostraciones son clave en problemas de olimpiada y ayudan a comprender cómo mover ángulos eficientemente, sobre todo en la prueba de propiedades de configuraciones.

Los conjugados isogonales también existen en cuadriláteros, pero no para cualquier punto (a diferencia de los triángulos). Resulta que la propiedad que determina si un punto tiene o no conjugado isogonal en un cuadrilátero es muy bonita y se revisará a continuación.

Teorema 3.4 (Conjugados Isogonales en cuadriláteros)
En el cuadrilátero $ABCD$, un punto interior P tiene conjugado isogonal si y solo si $\angle APB + \angle CPD = 180°$.

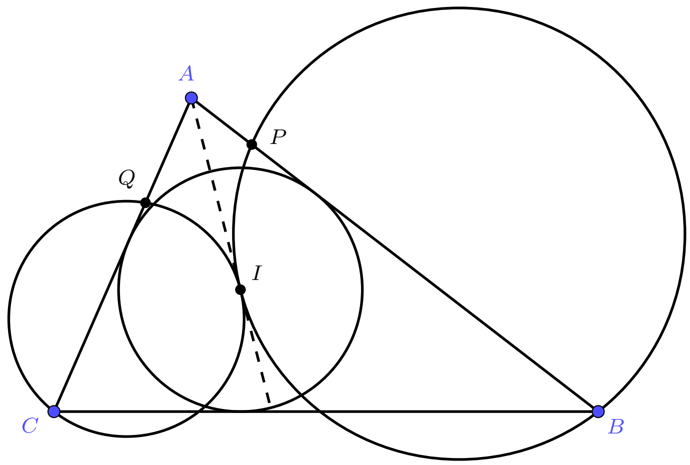


Demostración. Sea f la rotohomotecia que manda A a D y B a C, sea M el centro de f, y sea $f(P) = P'$ (es importante recordar que f preserva semejanzas). Se define g como la rotohomotecia que manda P' a D y P a A, y sea $g(C) = Q$. De manera similar, se define h como la rotohomotecia que manda P' a C y P a B. Por la rotohomotecia f, el triángulo AMP es semejante al DMP', entonces g tiene centro en M, y análogamente, el triángulo BMP es semejante al CMP', entonces h tiene centro en M. Por la rotohomotecia g, el triángulo DMP' es semejante al QMC, esta semejanza es importante porque implica que el triángulo DMQ es semejante al $P'MC$, y esto significa que $h(D) = Q$. Por las rotohomotecias g y h, como $g(C) = Q = h(D)$ se concluye que los triángulos AQD y BQC son semejantes a los triángulos PCP' y PDP', respectivamente. Con estas semejanzas y teniendo presente que $DPCP'$ es cíclico cuando $\angle APB + \angle CPD = 180^o$, es suficiente para demostrar que Q es conjugado isogonal de P en el cuadrilátero $ABCD$. La "*ida*" del problema se deja como ejercicio al lector. □

Este teorema se puede generalizar para puntos exteriores a $ABCD$, en particular si se cumple que (PA, PC) y (PB, PD) son pares de isogonales respecto a P (parejas de rectas reflejadas respecto a una recta que pase por P), entonces tiene conjugado isogonal.

Ejemplo 3.5 (EGMO 2018 P4)

Sea ABC un triángulo con incentro I. El círculo que pasa por B y es tangente a AI en I interseca al lado AB otra vez en P. El círculo que pasa por C y es tangente a AI en I interseca al lado AC otra vez en Q. Prueba que PQ es tangente al incirculo de ABC.



Demostración. Se cumple que $\angle PIQ + \angle BIC = 180^o$, porque $\angle PIQ = \angle PIA + \angle QIA = \angle PBI + \angle QCI$ por ángulos semi-inscritos, y $\angle PBI + \angle QCI = \angle IBC + \angle ICB = 180 - \angle BIC$ por las bisectrices BI y CI y porque la suma de ángulos en el triángulo BIC es 180°. Entonces I tiene conjugado isogonal en el cuadrilátero $QPBC$, pero BI y CI son sus propias isogonales, significando que I es su propio conjugado isogonal. Con esto, se cumple que PI es bisectriz del ángulo $\angle QPB$, lo cual demuestra que PQ es tangente al incírculo de ABC. □

4. Problemas

4.1. Nivel I

Problema 4.1. *Demuestra que el incentro y los excentros son sus propios conjugados isogonales.*

Problema 4.2. *Demuestra que el ortocentro y el circuncentro de un triángulo son conjugados isogonales.*

Problema 4.3. *Sean I, H y O el incentro, ortocentro y circuncentro de un triángulo ABC, respectivamente. Demuestra que $IH = IO$ si y solo si $\angle A = 60^o$*

Problema 4.4. *Sean X y Y conjugados isogonales internos de un triángulo ABC. Demuestra que $\angle BXC + \angle BYC = 180^o + \angle A$.*

Problema 4.5 (Steiner's Ratio Theorem)**.** *Sea ABC un triángulo y sean D y E puntos en BC tal que AD y AE son rectas isogonales. Entonces se cumple que*

$$\frac{AB^2}{AC^2} = \frac{BD}{DC} \cdot \frac{BE}{EC}$$

4.2. Nivel II

Problema 4.6. *Demuestra el Teorema de Pascal en círculos.*

Problema 4.7. *En el cuadrilátero $ABCD$, sea M un punto interno tal que $\angle CAB = \angle DAM$ y $\angle ACB = \angle DCM$. Demuestra que $\angle AMB + \angle CMD = 180^o$.*

Problema 4.8. *Sean P y Q conjugados isogonales internos en un triángulo ABC. Sea R el reflejado de P respecto a BC. Demuestra que $\angle APB + \angle CPR = 180^o$.*

Problema 4.9. *Sean P y Q conjugados isogonales internos en un triángulo. Demuestra que existe un elipse con focos P y Q que es tangente a los tres lados del triángulo. Nota: un elipse Γ tiene focos F_1 y F_2 si para cada punto X en Γ se cumple que $F_1X + F_2X$ es constante.*

Problema 4.10 (IMO SL 2000 G3)**.** *Sea O el circuncentro y H el ortocentro de un triángulo acutángulo ABC. Demuestra que existen puntos D, E y F en los lados BC, CA y AB respectivamente tal que*

$$OD + DH = OE + EH = OF + FH$$

y las rectas AD, BE y CF concurren.

Problema 4.11 (Teorema de Jacobi)**.** *Sea ABC un triángulo y sean X, Y y Z puntos tal que (AY, AZ),(BZ, BX) y (CX, CY) son pares de rectas isogonales en ABC. Demuestra que AX, BY y CZ concurren.*

4.3. Nivel III

Problema 4.12 (México TST 2023 P3)**.** *Sea ABC un triángulo y sean P y Q puntos en el interior de ABC tales que $\angle APC = \angle AQB = 90^o$, $\angle ACP = \angle PBC$ y $\angle ABQ = \angle QCB$. Supón que las rectas BP y CQ se cortan en un punto R. Muestra que AR es perpendicular a PQ.*

Problema 4.13 (Geometrense 2021 P5)**.** *Sea ABC un triángulo acutángulo con circuncentro O. Sean A', B' y C' puntos sobre los lados BC, CA y AB respectivamente tales que los circuncírculos de $AB'C'$, $BC'A'$ y $CA'B'$ todos pasan por O. Sea ℓ_A el eje radical de la circunferencia con centro B' y radio $B'C$ y la circunferencia con centro C' y radio $C'B$. Análogamente se definen ℓ_B y ℓ_C. Muestra que ℓ_A, ℓ_B y ℓ_C determinan un triángulo cuyo ortocentro coincide con el ortocentro de ABC.*

Problema 4.14 (Irán TST 2012)**.** *Sea ABC un triángulo con incentro I. Las rectas AI y BC se cortan en A_1. Análogamente se definen B_1 y C_1. Sea ℓ_A la recta que pasa por A_1 y es perpendicular a AI, análogamente se definen ℓ_B y ℓ_C. Sea Δ el triángulo formado por ℓ_A, ℓ_B y ℓ_C, y sea N el centro de la circunferencia que pasa por los puntos medios de los lados de Δ. Muestra que I y N son conjugados isogonales respecto a Δ.*

Problema 4.15 (ELMO 2012 P5)**.** *Sea ABC un triángulo tal que $AB < AC$, y sean D y E puntos en BC tal que $BD = CE$ y D está entre B y E. Supón que existe un punto P dentro de ABC tal que $PD \parallel AE$ y $\angle PAB = \angle EAC$. Demuestra que $\angle PBA = \angle PCA$.*

5. Bibliografía

I) Chen, E. (2014, 30 de noviembre). Three Properties of Isogonal Conjugates. Recuperado de https://blog.evanchen.cc/2014/11/30/three-properties-of-isogonal-conjugates/

II) Singhal, N. (2016, julio). Isogonal Conjugates. Recuperado de https://pregatirematematicaolimpiadejuniori.files.wordpress.com/2016/07/isogonal-conjugates-1.pdf

III) Evan Chen, *Euclidean Geometry in Methematical Olympiad*, MAA Press, EUA, 2016.

IV) Ocampo, R. (2022, 2 de marzo). Conjugados Isogonales. Recuperado de https://blog.nekomath.com/tag/conjugados-isogonales/

V) Rocchini, C. (2022, 15 de diciembre). Isogonal conjugate. Wikipedia. Recuperado de https://en.wikipedia.org/wiki/Isogonal_conjugate#/media/File:Isogonal_Conjugate_transform.svg