Homografías

Eric Ransom Treviño

Agosto 2023

1. Preliminares

Conocer la definición de razón cruzada es necesario para aprender a utilizar homografías. Las siguientes tres definiciones son muy similares, la razón cruzada se preserva en el plano tras transformaciones como traslación, reflexión, rotación, homotecia, inversión y perspectiva.

Definición 1.1 (Razón Cruzada en rectas) — Sean A, B, C y D puntos en una recta ℓ, entonces

$$(A, B; C, D) = \frac{AC}{CB} \bigg/ \frac{AD}{DB}$$

Observación 1.2. La definición 1.1 contempla segmentos dirigidos.

Definición 1.3 (Razón Cruzada en un haz de rectas) — Sea P un punto y sean a, b, c y d rectas que pasan por P. Sean A, B, C y D puntos arbitrarios en a, b, c y d respectivamente, entonces

$$P(A, B; C, D) = \frac{sin(\angle APC}{sin(\angle CPB)} \bigg/ \frac{sin(\angle APD)}{sin(\angle DPB)}$$

Definición 1.4 (Razón Cruzada en cónicas) — Sean A, B, C, D y P puntos en una cónica Ω, entonces

$$(A, B; C, D)_\Omega = \frac{sin(\angle APC}{sin(\angle CPB)} \bigg/ \frac{sin(\angle APD)}{sin(\angle DPB)}$$

Observación 1.5. Las definiciones 1.3 y 1.4 contemplan ángulos dirigidos.

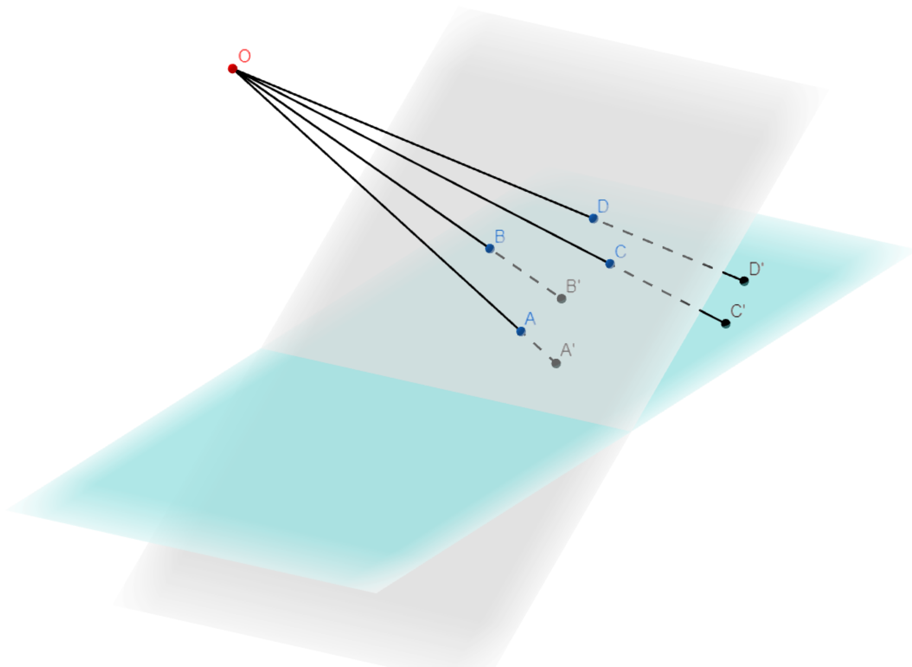
Observación 1.6. En la definición 1.4, para todo P en Ω se cumple que la razón es constante.

Dominar razón cruzada en problemas de olimpiada ayudará a generar una intución para usar de forma correcta lo que pronto definiremos como homografía.

Definición 1.7 (Plano proyectivo real) — El plano proyectivo real $\mathbb{RP}^2$ es el plano real $\mathbb{R}^2$ incluyendo los puntos al infinito.

Observación 1.8. De manera similar, $\mathbb{RP}^3$ es $\mathbb{R}^3$ pero incluyendo los puntos al infinito.

Definición 1.9 (Perspectiva en $\mathbb{RP}^3$) — Una perspectiva 3D o colineación central es una transformacion de los puntos en un plano g a los de otro h. Consideramos un centro o foco O fuera de g y h, y para cada punto X en g se mapea a la intersección de la recta OX con h.



Teorema 1.10

Las perspectivas 3D tienen las siguientes propiedades:

- Es biyectiva.
- Preserva colinearidad.
- Preserva concurrencias.
- Preserva cónicas.
- Preserva tangencias entre cónicas y rectas.
- Preserva razón cruzada.

2. Homografías

2.1. Definición y propiedades básicas

Las homografías son transformaciones muy parecidas a las perspectivas 3D, son una generalización. Trabajaremos siempre en el plano $\mathbb{RP}^2$, los puntos al inifinito y la recta al infinito serán elementos clave para la resolución de problemas de olimpiada.

Definición 2.1 (Homografía, transformación proyectiva) — Una homografía es una función de los puntos en $\mathbb{RP}^2$ a sí mismo con las siguientes propiedades:

- Es biyectiva.
- Preserva colinearidad.

Observación 2.2. Usaremos X' como la imagen de X bajo una homografía f (es decir $f(X) = X'$).

Proposición 2.3 (Grupo)

Las homografías forman un grupo dado que tienen una función inversa y la composición de dos homografías forman otra.

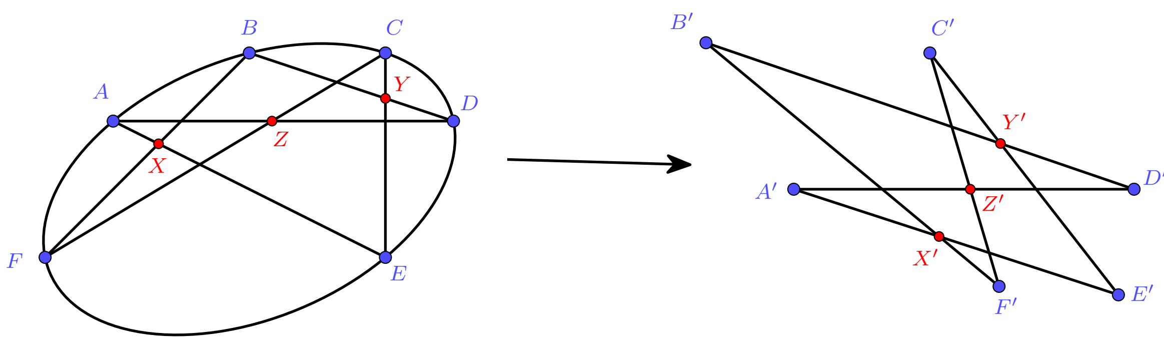
Notemos que las homografías son transformaciones definidas que comparten tan solo dos propiedades anotadas en el Teorema 1.10 de las perspectivas 3D. En los siguientes teoremas observaremos que esta transformación abstracta tiene muchas más propiedades escondidas.

Teorema 2.4 (Se preservan cónicas)

Si A, B, C, D, E y F están en una cónica, entonces A', B', C', D', E' y F' están en una cónica.

Demostración. Sean $X = AE \cap FB$, $Y = EC \cap BD$ y $Z = CF \cap DA$, entonces X, Y y Z son colineales por el teorema de Pascal. Entonces X', Y' y Z' también son colineales. Notemos que el hexágono $A'E'C'F'B'D'$ cumple que las intersecciones de sus lados opuestos X', Y' y Z' son colineales, entonces, igual por el teorema de Pascal, están en una sola cónica.

∎



Teorema 2.5 (Se preservan tangencias)

Sean Ω una cónica y ℓ una recta tangente a Ω, entonces ℓ' es tangente a Ω'.

Demostración. Notemos que si X es el punto de tangencia de Ω y ℓ, entonces su imagen X' se encuentra en Ω' y en ℓ'. Supongamos que ℓ' y Ω' comparten otro punto Y' distinto de X' (entre cónicas y rectas hay máximo dos intersecciones), como mi función es biyectiva, existe un punto Y cuya imagen es Y', pero eso significa que Y tiene que estar en Ω y ℓ ya que se preservan cónicas y rectas y la función inversa a mi homografía también es una homografía, entonces hay una contradicción. $\square$

Con esto hemos demostrado que una homografía conserva las primeras cuatro propiedades de las perspectivas 3D en el teorema 1.10 utilizando argumentos puramente sintéticos y proyectivos. A continuación utilizaremos un teorema clave para demostrar que se preserva la razón cruzada.

Teorema 2.6 (Teorema Fundamental de la Geometría Proyectiva)

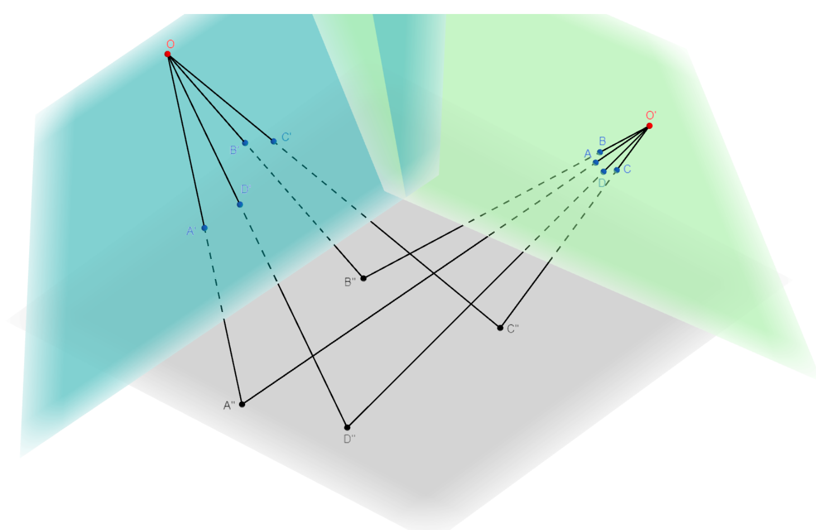
Dados dos espacios proyectivos $P(E)$ y $P(F)$ de la misma dimensión $n \geq 2$, para cada función biyectiva $f : P(E) \to P(F)$, si f mapea tres puntos distintos colineales A, B y C a tres puntos colineales $f(A), f(B)$ y $f(C)$, entonces f es una proyectividad.

Checa El Teorema Fundamental de la Geometría Proyectiva para más detalles.

Al aplicar el teorema fundamental de la geometría proyectiva en el espacio proyectivo $\mathbb{RP}^2$ y usando f una homografía (es una función biyectiva que manda $\mathbb{RP}^2 \to \mathbb{RP}^2$) se obtiene el siguiente corolario.

Corolario 2.7

Toda homografía es una proyectividad, en otras palabras, se puede expresar como un conjunto de perspectivas en $\mathbb{RP}^3$.



El teorema fundamental de la geometría proyectiva permite el paso a uno de los resultados más importantes de las homografías, siendo que toda homografía es un conjunto de perspectivas en $\mathbb{RP}^3$, y ya sabemos que las perspectivas 3D preservan razón cruzada tanto en puntos colineales, haces de rectas y cónicas.

Teorema 2.8

Las homografías preservan razón cruzada:

- Sean A, B, C y D puntos distintos en una recta ℓ, entonces

$$(A, B; C, D) = (A', B'; C', D')$$

- Sea P un punto y sean a, b, c y d rectas distintas que pasan por P. Sean A, B, C y D puntos arbitrarios en a, b, c y d respectivamente, entonces

$$P(A, B; C, D) = P'(A', B'; C', D')$$

- Sean A, B, C, D y P puntos distintos en una cónica Ω, entonces

$$(A, B; C, D)_\Omega = (A', B'; C', D')_{\Omega'}$$

2.2. Unicidad y transformaciones conocidas

Teniendo que la razón cruzada se preserva, existen varios argumentos de unicidad que son muy útiles en problemas de olimpiada. Lo bonito de las homografías es que existen ciertas condiciones que nos permiten mantener elementos fijas, entre ellos la colinealidad, concurrencias, tangencias, cónicas y razón cruzada. Las siguientes transformaciones se utilizan frecuentemente.

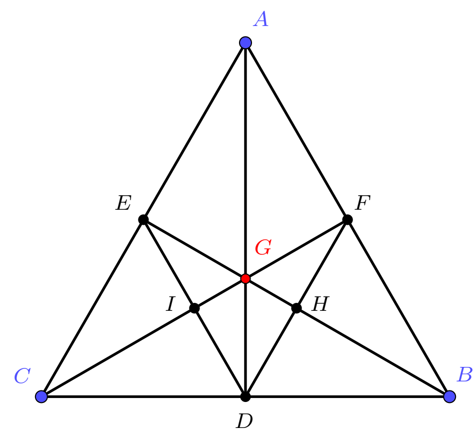
Teorema 2.9

Dados puntos A, B, C y D (cualesquiera tres no colineales), existe una única homografía que los manda a puntos W, X, Y y Z (cualesquiera tres no colineales).

Demostración. Para cada cónica Ω que pasa por A, B, C y D, existe solo una cónica Ω' tal que $(A, B; C, D)_\Omega = (W, X; Y, Z)_{\Omega'}$. Y para cada punto P en Ω, existe un solo punto P' tal que $(A, B; C, P)_\Omega = (W, X; Y, P')_{\Omega'}$. Sea E la intersección de AB con CD, entonces E' es la intersección de WX con YZ, es fácil notar que dado P un punto en AB existe un único P' tal que $(A, B; E, P) = (W, X; E', P')$. Con esto queda demostrado que para cualquier punto P su imagen ya está definida teniendo previamente las imagenes de A, B, C y D. $\square$

Ejemplo 2.10

Sea ABC un triángulo, D, E y F puntos en BC, CA y AB respectivamente tal que AD, BE y CF concurren en un punto G. Sean $H = DF \cap BE$ e $I = DE \cap CF$. Demuestra que EF, HI y BC concurren.



Demostración. Por el teorema 2.9, existe una homografía que manda A, B, C y G a puntos tal que $A'B'C'$ es un triángulo equilatero y G' es el gravicentro de $A'B'C'$. Demostrar que $E'F', H'I'$ y $B'C'$ concurren en el infinito es solo un argumento de simetría, y como las imagenes de EF, HI y BC concurren, entonces estas también lo hacen. □

Teorema 2.11

Existe una única homografía que manda cónicas Ω a Γ y que manda A, B y C puntos en Ω a cualesquiera W, X y Y puntos en Γ.

Demostración. Consideremos una homografía que mande A, B y C a W, X y Y. Sea P un punto en Ω, sabemos que existe un único punto P' en Γ tal que $(A, B; C, P)_\Omega = (W, X; Y, P')_\Gamma$ por unicidad de razón cruzada. Por el teorema 2.9 sabemos que existe una única homografía que manda A, B, C y P a W, X, Y y P' respectivamente, notemos que para cada punto Q en Ω, la razón $\frac{sin(\angle AQC)}{sin(\angle CQB)} \Big/ \frac{sin(\angle AQP)}{sin(\angle PQB)}$ solo se preserva en su imagen si Q' es un punto en Γ, entonces Ω se manda a Γ. □

Corolario 2.12

Existe una única homografía que manda cónicas Ω a Γ y que manda A, B, C y D puntos en Ω a W, X, Y y Z puntos en Γ si y solo si $(A, B; C, D)_\Omega = (W, X; Y, Z)_\Gamma$.

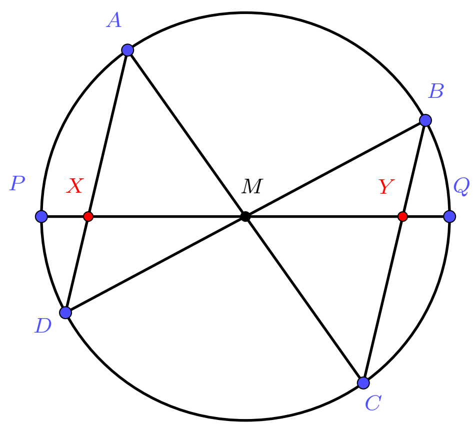
Corolario 2.13

Sea Ω una cónica, A y W puntos internos a Ω, entonces existe una homografía que preserva Ω y manda A a W.

Observación 2.14. Un punto es interno a una cónica si no existen rectas tangentes a la cónica que pasen por ese punto. Notemos que el corolario 2.13 también se cumple si A y W son puntos fuera de Ω.

Ejemplo 2.15 (Teorema de la Mariposa)

Sea M el punto medio de una cuerda PQ de un círculo, por el cual pasan otras cuerdas AB y CD. Si AD y BC intersecan la cuerda PQ en X y Y respectivamente, demuestra que M es el punto medio de XY.



Demostración. El problema se resume a demostrar que $-1 = (P, Q; M, \infty_{PQ}) = (X, Y; M, \infty_{PQ})$. Por el corolario 2.13, consideremos una homografía que preserve el círculo y mande M al centro. Notemos que M' también es punto medio de $P'Q'$ por ser centro, y como $-1 = (P, Q; M, \infty_{PQ}) = (P', Q'; M', \infty'_{PQ})$, se cumple que $\infty'_{PQ} = \infty_{P'Q'}$. entonces basta con demostrar que M' es punto medio de $X'Y'$ por que queremos que $(X', Y'; M', \infty_{P'Q'}) = -1$. Esto es trivial por propiedades de congruencias de triángulos. $\square$

Corolario 2.16

Dado un círculo ω con ℓ una línea exterior, existe una única homografía que manda ω a sí misma y ℓ a la recta al infinito.

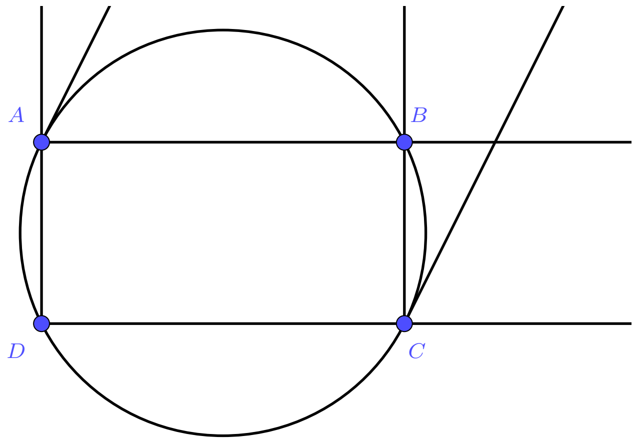
Teorema 2.17 (Transformación afín)

Dados puntos A, B y C no colineales, existe una única homografía que los manda a otros puntos W, X y Y no colineales tal que la recta al infinito se manda a sí misma.

Demostración. Sea G el gravicentro de ABC, por el teorema 2.9 mandemos A, B, C y G a W, X, Y y Z tal que Z es el gravicentro de WXY. Sean M, N y K los puntos medios de BC, CA y AB, notemos que M', N' y K' también son los puntos medios de XY, YW y WX. Se sabe que $AB \parallel MN$ y $AC \parallel MK$, y sus imagenes también cumplen que $WX \parallel M'N'$ y $WY \parallel M'K'$, por lo que la recta al infinito se preserva. $\square$

Ejemplo 2.18

Sea $ABCD$ un cuadrilátero con circuncírculo ω, $E = AB \cap CD$ y $F = BC \cap AD$. Demuestra que EF y las tangentes por A y C a γ concurren.



Demostración. Por el corolario 2.16 podemos hacer una homografía que manda ω a sí misma, y la recta exterior EF a la recta al infinito. Entonces existe una homografía que manda $ABCD$ a un rectángulo. Basta con demostrar que las tangentes por A y C se cortan en un punto al infinito (o sea son paralelas), y esto es conocido porque AC pasa por el circuncentro de ω. $\square$

3. Problemas

Problema 3.1. *Sea ABC un triángulo y Ω una cónica tangente a BC, CA y AB en D, E y F respectivamente. Demuestra que AD, BE y CF concurren.*

Problema 3.2. *Sea $ABCD$ un cuadrilátero. Sean $P = AD \cap BC$, $Q = AB \cap CD$, $R = AC \cap BD$, $X_1 = PR \cap AB$, $X_2 = PR \cap DC$, $Y_1 = QR \cap AD$, $Y_2 = QR \cap BC$. Demuestra que las rectas X_1Y_1, X_2Y_2 y PQ concurren.*

Problema 3.3. *Sea Ω una cónica y O un punto fuera de ella. Sean A y B los puntos de tangencia desde O a Ω. Sean P, Q, R y S puntos en Ω tal que PQ y RS pasan por O. Demuestra que PR, QS y AB concurren.*

Problema 3.4 (Cevian nest)**.** *Sea ABC un triángulo, D, E y F puntos en BC, CA y AB tal que AD, BE y CF concurren. Sean P, Q y R puntos en EF, FD y DE tal que DP, EQ y FR concurren. Prueba que AP, BQ y CR concurren.*

Problema 3.5 (APMO 2013 P5)**.** *Sea $ABCD$ un cuadrilátero inscrito en un circulo ω, y sea P un punto en la extensión de AC tal que PB y PD son tangentes a ω. La recta tangente por C interseca a PD en Q y la recta AD en R. Sea E la segunda intersección entre AQ y ω. Prueba que B, E y R son colineales.*

Problema 3.6 (Irán RMM TST 2019 P6). *Sea $ABCD$ un cuadrilátero cíclico con circuncírculo ω y sea M un punto variable en ω. Sea $E = AB \cap CD$ y $F = AD \cap BC$. Sea $P = AD \cap ME$ y $Q = BC \cap ME$; similarmente sea $R = AB \cap MF$ y $S = CD \cap MF$. Sea $X = PS \cap RQ$. Prueba que mientras M varía en ω, la recta MX pasa por un punto fijo.*

Problema 3.7. *Sea $ABCD$ un cuadrilátero cíclico con circuncírculo omega. Sean E y F las intersecciones de la tangente por A a ω con CD y BC respectivamente. Sea G la intersección de BE con ω, H la de BE con AD, I la de DF con ω y J la de DF con AB. Demuestra que GI, HJ y la B-symmedaiana al triángulo ABC concurren.*

Problema 3.8 (IMO SL 2017 G5). *Sea $ABCC_1B_1A_1$ un hexágono convexo tal que $AB = BC$ y supón que las rectas AA_1, BB_1 y CC_1 tienen la misma mediatriz. Sea D la intersección de AC_1 con A_1C y denota ω el circuncírculo de ABC. Sea $E \neq B$ la intersección de ω con el circuncírculo de A_1BC_1. Demuestra que las rectas BB_1 y DE se intersecan en ω.*

Problema 3.9 (APMO 2016 P3). *Sean AB y AC dos rayos distintos en distinta recta, y sea ω un círculo con centro O tal que es tangente al rayo AC en E y al rayo AB en F. Sea R un punto en el segmento EF. La recta paralela a EF que pasa por O interseca a la recta AB en P. Sea N la intersección de PR con AC y sea M la intersección de AB con la recta paralela a AC por R. Prueba que la recta MC es tangente a ω.*

Problema 3.10 (Rogelio Guerrero). *Sea ABC un triángulo y sean A_1, B_1 y C_1 puntos en BC, CA y AB respectivamente tal que AA_1, BB_1 y CC_1 concurren. Considera una cónica Ω que pase por A_1, B_1 y C_1, sean A_2, B_2 y C_2 la segunda intersección de Ω con BC, CA y AB respectivamente. Prueba que si $X = A_1B_1 \cap A_2B_2$, $Y = A_1C_1 \cap A_2C_2$, entonces X, Y y A son colineales.*

Problema 3.11. *Sea $ABCD$ un cuadrilátero y Ω una elipse tangente a los cuatro lados. Sean E y F los puntos medios de AC y BD respectivamente. Demuestra que el centro de Ω está en EF.*

Problema 3.12 (Irán TST 2008 P2). *Sea ABC un triángulo con incentro I, sea ℓ una recta tangente al incírculo. Sea D un punto en la recta BC, y sea X la intersección de la segunda tangente al incírculo que pasa por D con ℓ. Definamos E, Y, F, Z similarmente. Demuestra que si D, E y F son colineales, entonces las rectas AX, BY y CZ concurren.*

Problema 3.13 (IMO SL 2022 G6). *En un triángulo acutángulo ABC, el punto H es el pie de la altura desde A. Sea P un punto en movimiento tal que las bisectrices k y ℓ de los ángulos $\angle PBC$ y $\angle PCB$, respectivamente, se intersecan en el segmento AH. AC y k se intersecan en E, AB y ℓ en F, y EF y AH en Q. Demuestra que mientras P varía, la recta PQ pasa por un punto fijo.*

4. Bibliografía

I) Shen, E. (2020, December 2). Nuclear geometry. http://ericshen.net/handouts/ZG-nuclear.pdf

II) Tate, J. (s.f). Chapter 5 Basics of Projective Geometry - University of Pennsylvania. https://www.cis.upenn.edu/~jean/gma-v2-chap5.pdf

III) Capítulo IV - El Teorema Fundamental de la Geometría Proyectiva. (2004). https://matematicas.unex.es/~brequejo/GEOMETRIA%20PROYECTIVA%2C%20AFIN%20Y%20EUCLIDEA/CAPITULO%2004.pdf