Mixtilineares

Eric Ransom Treviño

Octubre 2023

1. Preliminares

Definición 1.1 (Inversión) — Sea Γ un círculo con centro O y radio r. Una inversión es una función $f : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}^2$ que preserva una relación inversamente proporcional:

$$\text{Para todo } P \in \mathbb{R}^2,\ f(P) \text{ está en el rayo } OP \text{ y } OP \cdot Of(P) = r^2.$$

Observar el lugar geométrico que se obtiene de invertir a cada punto de una recta o círculo es una estrategia que se presenta mucho en competencias de olimpiadas nacionales e internacionales, dejar de tratar puntos por separado y hacer énfasis en invertir una figura completa da una visualización muy distinta de este tema.

Teorema 1.2 (Inversos de Rectas)

Sea Γ un círculo con centro O. Sea ℓ una recta y ℓ' su inverso respecto a Γ, entonces se cumple lo siguiente.

- Si ℓ pasa por O, entonces $\ell' = \ell$.
- Si ℓ no pasa por O, entonces ℓ' es un círculo que pasa por O.

Teorema 1.3 (Inversos de círculos)

Sea Γ un círculo con centro O. Sea Ω un círculo y Ω' su inverso respecto a Γ, entonces se cumple lo siguiente.

- Si Ω pasa por O, entonces Ω' es una recta.
- Si Ω no pasa por O, entonces Ω' es un círculo que no pasa por O.

Definición 1.4 (Inversión reflexión) — Sea f una inversión con centro O y g una reflexión sobre una recta o un punto. Se le llama inversión reflexión a la transformación $h = f \circ g$.

En un triángulo ABC, se llamará Φ a la inversión reflexión que resulta de la composición de inversión con centro A y radio $\sqrt{AB \cdot AC}$ y reflexión respecto a la bisectriz del ángulo $\angle A$. Esta transformación puede parecer extraña y "fea" inicialmente, pero tiene propiedades muy interesantes que serán elemento clave para demostrar algunos resultados de la circunferencia mixtilinear.

Proposición 1.5

Entre las propiedades más conocidas de Φ están las siguientes:

- B se mapea a C, y viceversa.
- AB se mapea a AC, y viceversa.
- BC se mapea al circuncírculo de ABC, y viceversa.
- Una recta ℓ que pasa por A se mapea a su recta isogonal.
- El incentro se mapea al A-excentro, y viceversa.

Se invita y motiva al lector a demostrar la proposición 1.5, es difícil, pero demostrarla ayudará a tener un mejor entendimiento cómo funciona la inversión en conjunto de otras transformaciones.

2. Mixtilineares

Entre las configuraciones más especiales de geometría, se esconde una joya muy importante que aparece cuando menos te lo esperas, en este documento trabajaremos con la configuración conocida como circunferencia mixtilinear.

Definición 2.1 (Circunferencia mixtilinear) — En un triángulo, se le conoce como circunferencia mixtilinear a una circunferencia tangente a dos de sus lados y a su circuncírculo.

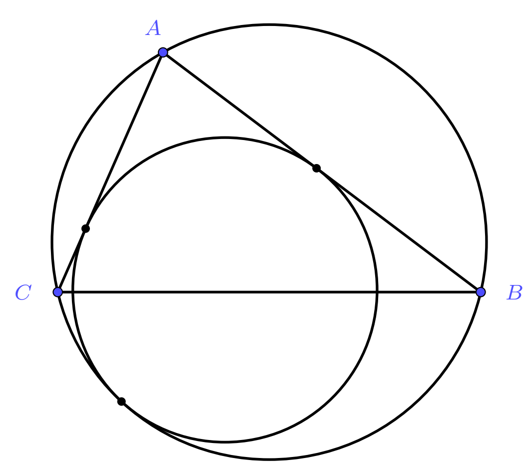
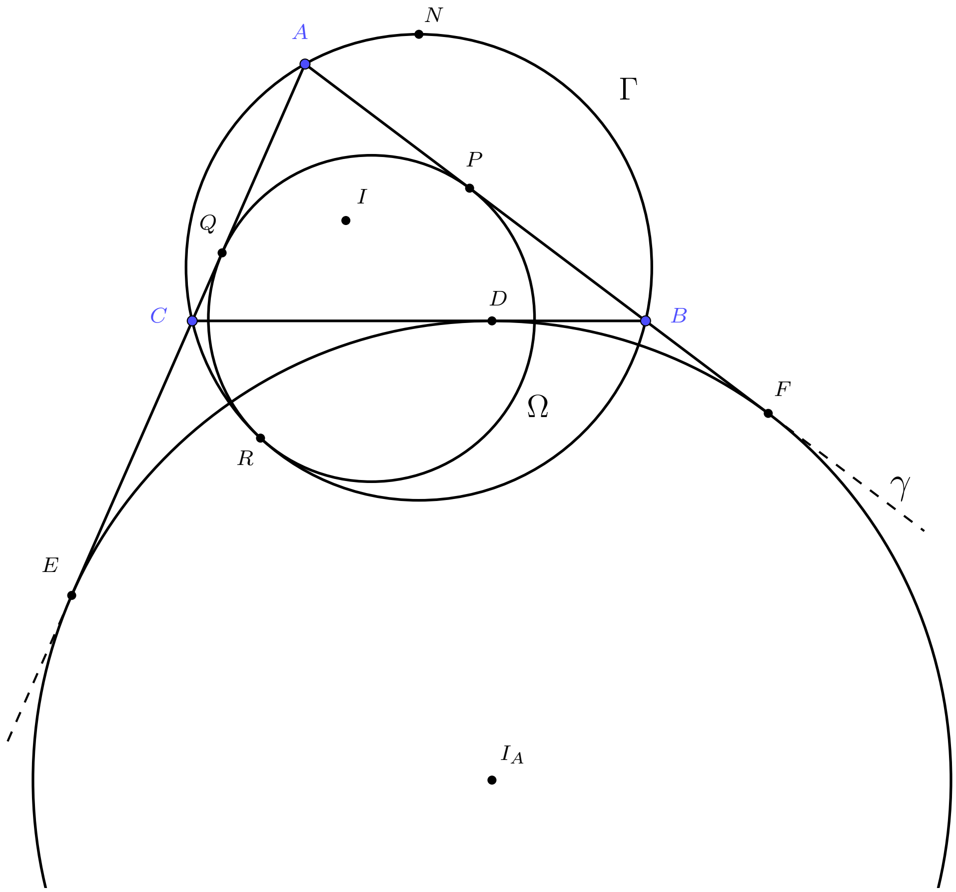


Figura 1: Circunferencia mixtilinear interna opuesta al vértice A de un triángulo ABC.

Así como se observa una circunferencia mixtilinear en la figura 1, existen 12 circunferencias mixtilineares para cada triángulo (cuatro opuestas a cada vértice). En este documento se trabajará con la circunferencia mixtilinear interna opuesta al vértice A, siendo la que más se aparece en competencias nacionales e internacionales.



Se utilizará la siguiente notación para los puntos conocidos del triángulo:

- A, B y C los vértices del triángulo.
- Γ el circuncírculo.
- I el incentro.
- I_A el A-excentro.
- γ el A-excírculo.
- D, E y F los puntos de tangencia de γ con BC, CA y AB, respectivamente.
- N el punto medio del arco BC que contiene a A en Γ.
- Ω la A-mixtilinear interna.
- P, Q y R los puntos de tangencia de Ω con AB, AC y Γ, respectivamente.

Teorema 2.2 (Φ en Mixtilineares)
Las siguientes propiedades de Φ son ciertas:

- γ se mapea a Ω, y viceversa.
- E se mapea a P, y viceversa.
- F se mapea a Q, y viceversa.
- D se mapea a R, y viceversa.

Demostración. Se sabe que γ es tangente a AB, BC y CA, y se cumple que la imagen de γ bajo Φ es tangente a las imágenes de AB, BC y CA bajo Φ porque la inversión y la reflexión son transformaciones que preservan tangencias. Por la proposición 1.5, la imagen de γ es tangente a AC, AB y Γ, además, es interna a Γ porque γ está del lado opuesto al centro de inversión respecto a la recta BC. Entonces la imagen de γ bajo Φ es Ω. Además, E se mapea a P, ya que E es el punto de tangencia de γ y AC, y P es el punto de tangencia de sus inversos Ω y AB; análogamente F se mapea a Q. De manera similar, D se mapea a R, ya que D es el punto de tangencia de γ y BC, y R es el punto de tangencia de sus inversos Ω y Γ. □

Esencialmente, la inversión reflexión Φ es utilizada para demostrar la existencia de la circunferencia mixtilinear. Si el excírculo opuesto a A se mapea a la mixtilinear interna, **¿qué sucede con las imágenes del incírculo y los otros dos excírculos bajo la transformación Φ?**

Las propiedades que se verán a continuación son las que más se presentan en competencias de olimpiada y son un gran indicador de que podemos usar teoría de mixtilineares. La inversión reflexión Φ es una herramienta demasiado poderosa que logra destruir las propiedades de la mixtilinear, por lo que los invito y motivo a dedicarle tiempo a encontrar demostraciones alternas que requieran de la observación cuidadosa de la estructura geométrica de la mixtilinear.

Teorema 2.3
RP es bisectriz interna del ángulo $\angle ARB$ y, análogamente, RQ del ángulo $\angle ARC$.

Demostración. Por el teorema 2.2 se tiene que $\Phi : E \mapsto P$ y $\Phi : D \mapsto R$, entonces la inversión reflexión preserva los ángulos $\angle ARP = \angle AED$ y $\angle ARB = \angle ACD$. Como $CE = CD$, el ángulo $\angle ACD = \angle AED + \angle CDE = 2\angle ACE$. Entonces $2\angle ARP = \angle ARB$, significando que RP es bisectriz del ángulo ARB; análogamente RQ es bisectriz del $\angle ARC$ □

Teorema 2.4
AR y AD son rectas isogonales, es decir, $\angle BAD = \angle CAR$.

Demostración. Por el teorema 2.2, $\Phi : D \mapsto R$, entonces la recta $AD \mapsto AR$, y por el punto cuatro en la proposición 1.5, se tiene que AD y AR son isogonales. □

Teorema 2.5

I, P y Q son colineales.

Demostración. Por el teorema 2.2, $\Phi : E \mapsto P$ y $\Phi : F \mapsto Q$, y por la proposición 1.5, $\Phi : I_A \mapsto I$. El cuadrilátero AEI_AF es cíclico porque $\angle IFI_A = \angle IEI_A = 90°$. Por el teorema 1.3, las imágenes de I_A, E y F bajo Φ son colineales, entonces I, P y Q son colineales. □

Teorema 2.6

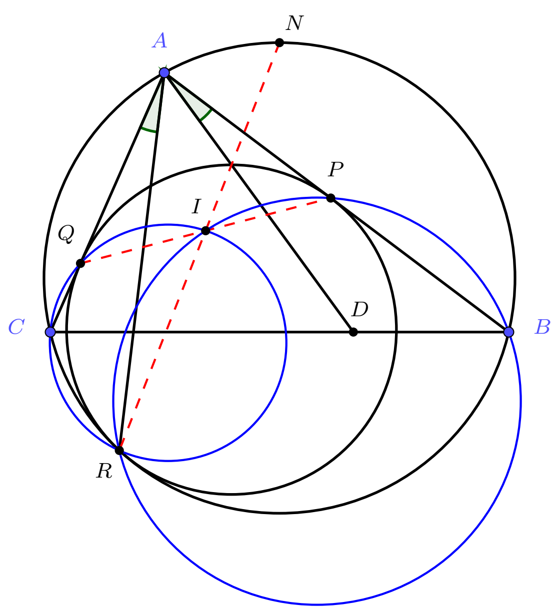
$BPIR$ y $CQIR$ son cuadriláteros cíclicos.

Demostración. Por el teorema 2.2, $\Phi : R \mapsto D$ y $\Phi : P \mapsto E$, y por la proposición 1.5, $\Phi : B \mapsto C$ y $\Phi : I \mapsto I_A$. Por el teorema 1.3, basta con demostrar $DCEI_A$ cíclico, y esto es cierto porque $\angle CEI_A = \angle CDI_A = 90°$, entonces $BPIR$ es cíclico; análogamente $CQIR$ es cíclico. □

Teorema 2.7

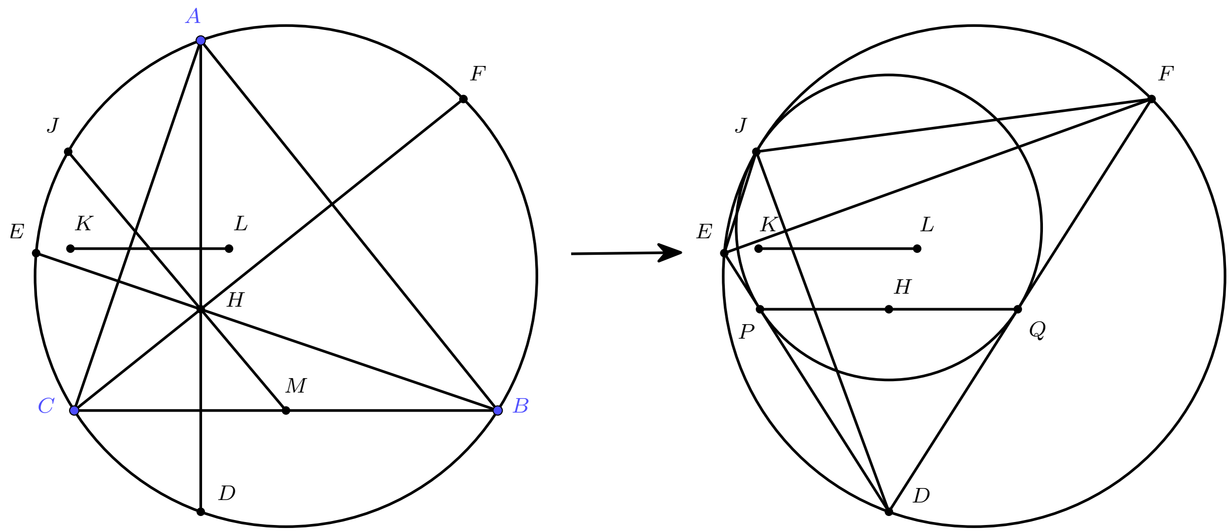
N, I y R son colineales.

Demostración. Por el teorema 2.2, $\Phi : R \mapsto D$, y por la proposición 1.5, $\Phi : I \mapsto I_A$. Sea N' la imagen de N bajo Φ. Por el teorema 1.2, basta con demostrar que el cuadrilátero ADI_AN' es cíclico para ver que N, I y R son colineales. Notemos que AN es bisectriz externa del ángulo en A, entonces N' está en la recta AN porque su recta isogonal es sí misma, además, N' está en BC porque N está en Γ, entonces $N' = AN \cap BC$. Se tiene que $\angle N'AI_A = 90°$ por bisectriz externa, y $\angle N'DI_A = 90°$ porque D es punto de tangencia de Ω con BC, entonces ADI_AN' es cíclico, demostrando que N, I y R son colineales. □



Ejemplo 2.8 (OMM 2012 P6)

Considera un triángulo acutángulo ABC con circuncírculo $\mathcal{C}$. Sean H el ortocentro del triángulo ABC y M el punto medio de BC. Las rectas AH, BH y CH cortan por segunda vez a $\mathcal{C}$ en $D.E$ y F, respectivamente; y la recta MH corta a $\mathcal{C}$ en J de manera que H queda entre M y J. Sean K y L los incentros de los triángulos DEJ y DFJ, respectivamente. Muestra que KL es paralela a BC.



Demostración. Es hecho conocido que la recta HM pasa por el punto diametralmente opuesto a A en $\mathcal{C}$, al cual llamaremos $A' \neq J$; además, H es incentro del triángulo DEF (hint: $AH = AE = AF$). Como AA' es diametro, y A es el punto medio del arco EF, A' es el punto medio del arco EF que contiene a D, entonces por el teorema 2.6, como H es incentro de DEF y A' punto medio del arco que contiene a D, J es el punto de tangencia de la D-mixtilinear interna del triángulo DEF.

Sean P y Q los puntos de tangencia de la D-mixtilinear con DE y DF respectivamente, sabemos que $BC \perp DH$ y $PQ \perp DH$, entonces el problema se resume a demostrar $PQ \parallel KL$. Este problema no es de ortocentros, ¡es de circunferencias mixtilineares!.

Por el teorema 2.3, J, K y P son colineales, y J, L y Q también. Utilizando el teorema de la bisectriz en DJP se tiene $\frac{JK}{KP} = \frac{JD}{DP}$, y en DJQ se tiene $\frac{JL}{LQ} = \frac{JD}{DQ}$. Como $DP = DQ$, tenemos que $\frac{JK}{KP} = \frac{JL}{LQ}$, y por el teorema de Tales queda demostrado que $KL \parallel PQ$. $\square$

Así como se observó y demostró una que otra propiedad de la circunferencia mixtilinear interna, existen muchas más propiedades escondidas en esta configuración. Entre los siguientes problemas a intentar, vienen más propiedades de circunferencias mixtilineares. Recordando que solo se enfocó en la circunferencia mixtilinear interna, es recomendable encontrar propiedades similares para las demás mixtilineares opuestas al ángulo en A.

La función Φ hace que varias propiedades se resuman a hechos conocidos del excírculo, y se notó que Φ es una de las técnicas más poderosas para atacar la configuración de la circunferencia mixtilnear. Es importante mencionar que esta técnica no está limitada a las circunferencias mixtilineares, y puede usarse en otras configuraciones, como los ortocentros.

3. Problemas

Problema 3.1 (IMO 1978 P4). *En un triángulo ABC se tiene $AB = AC$. Un círculo que es tangente internamente al circuncírculo del triángulo es tangente también a AB y AC en puntos P y Q, respectivamente. Demuestra que el punto medio de PQ es el centro del incírculo del triángulo ABC.*

Problema 3.2 (EGMO 2013 P5). *Sea Ω el circuncírculo del triángulo ABC. Un círculo ω es tangente a los lados AB y AC, y tangente internamente al círculo Ω en un punto P. Una línea paralela a BC intersecando el interior del triángulo ABC es tangente a ω en Q. Demuestra que $\angle CAP = \angle QAB$.*

Problema 3.3. *Sea ABC un triángulo, Γ su circuncírculo, I el incentro, y N el punto medio el arco BC que contiene a A. Sea $T \neq N$ la intersección de NI con Γ. Sea X la segunda intersección de NI con el circuncírculo de BIC. Demuestra que T es el punto medio de IX.*

Problema 3.4. *Sea Γ el circuncírculo del triángulo ABC, I el incentro, M la intersección de AI con Γ y sea N el punto en Γ tal que $\angle IAN = 90°$. Sea T la intersección de NI con Γ. Demuestra que la recta perpendicular a AI por I, BC y TM concurren.*

Problema 3.5. *Sea Γ el circuncírculo de un triángulo ABC y sea T el punto de tangencia de la A-mixtilinear interna de ABC con Γ. Sea D el punto de tangencia del incírculo con BC. Sea X un punto arbitrario en BC y Y la intersección de AX con Γ. Demuestra que $TDXY$ es un cuadrilátero cíclico.*

Problema 3.6. *Sea Γ el circuncírculo del triángulo ABC, I el incentro, N el punto medio del arco que BC que contiene a A. Sea $T \neq N$ la intersección de NI con Γ. Sea D el punto de tangencia del incírculo de ABC con BC. Si $X \neq T$ es la intersección de TD con Γ, demuestra que AX es paralela a BC.*

Problema 3.7. *Sea Ω el circuncírculo de un triángulo ABC. Sea Ω_A un círculo tangente a AB y AC y tangente internamente a Ω en T_A. Definamos similarmente a T_B y T_C.*

a) AT_A, BT_B *y* CT_C *concurren.*

b) *El punto de concurrencia es uno de los centros de homotecia de Ω y el incírculo de ABC.*

Problema 3.8. *Sea ABC un triángulo con incentro I y circuncírculo ω. Sea M el segundo punto de intersección de la línea AI con ω. La línea que pasa por I perpendicular a AI interseca a la recta BC, el segmento AB y el segmento AC en puntos D, E y F, respectivamente. El circuncírculo de AEF interseca a ω nuevamente en P, y las rectas PM y BC se cortan en Q. Demuestra que las rectas IQ y DN se cortan en ω.*

Problema 3.9 (EGMO 2023 P6). *Sea Ω el circuncírculo de un triángulo ABC. Sean S_b y S_c los puntos medios de los arcos AC y AB que no contienen al tercer vértice, respectivamente. Sea N_a el punto medio del arco BC incluyendo A. Sea I el incentro de ABC. Sea ω_b el círculo tangente a AB e internamente tangente a Ω en S_b, y sea ω_c el círculo tangente a AC e internamente tangente Ω en S_c. Demuestra que la línea IN_a, y la línea por las intersecciones de ω_b y ω_c, se intersecan en Ω.*

Problema 3.10. *Sea Γ el circuncírculo un triángulo ABC, I su incentro y E el pie de la bisectriz del ángulo en $\angle A$. Sea N el punto medio del arco BC que contienen a A en Γ. La recta MI interseca a Γ otra vez en T. La tangente por A a Γ interseca a BC en X. La recta XT interseca a Γ otra vez en H. El círculo con diámetro AI interseca a Γ otra vez en S. Demuestra que S, E y H son colineales.*

Problema 3.11 (IMO SL 1999 G8)**.** *Sea ABC un triángulo. Los puntos A, B y C dividen al circuncírculo Ω de un triángulo ABC en tres arcos BC, CA y AB. Sea X un punto variable en el arco AB, y sean O_1 y O_2 los incentros de los triángulos CAX y CBX. Demuestra que el circuncírculo del triángulo XO_1O_2 interseca al círculo Ω en un punto fijo.*

Problema 3.12 (Mexico TST 2021 P4)**.** *Sea ABC un triángulo escaleno, O su circuncentro, I su incentro, e I_A el excentro opuesto a A. Sea D el punto donde la bisectriz exterior de $\angle BAC$ corta a BC, y K un punto en el rayo IA tal que $AK = 2AI$. Sea F el punto diametralmente opuesto a D en el circuncírculo de DKI_A. Muestra que $OF = 3OI$.*

Problema 3.13. *Sea ABC un triángulo con circuncírculo Γ. Sea Ω_B la circunferencia dentro del $\angle ABC$ tangente externamente a Γ en X, a BC en P, y a BA. Sea Ω_C la circunferencia dentro del $\angle ACB$ tangente externamente a Γ en Y, a BC en Q, y a BA. Demuestra que la intersección de PY y QX está sobre la bisectriz interna del ángulo en $\angle A$.*

Problema 3.14 (IMO 2019 P6)**.** *Sea I el incentro de un triángulo ABC con $AB \neq AC$. El incírculo ω de ABC es tangente a los lados BC, CA y AB en D, E y F, respectivamente. La recta que pasa por D perpendicular a EF corta a ω otra vez en R. La recta AR corta a ω otra vez en P. Los circuncírculos de los triángulos PCE y PBF se cortan otra vez en Q. Demuestra que las rectas DI y PQ se intersecan en la recta perpendicular por A a AI.*

Problema 3.15 (Taiwan TST 2014 P3)**.** *Sea ABC un triángulo con circuncírculo Γ y sea M un punto arbitrario en Γ. Supón que las tangentes desde M al incírculo de ABC intersecan a BC en dos puntos distintos X_1 y X_2. Demuestra que el circuncírculo del triángulo MX_1X_2 pasa por el punto de tangencia de la A-mixtilinear interna de Γ.*

4. Bibliografía

I) Baca, J. (2018). Incírculos Mixtilíneos. https://www.asjtnic.org/materiales/clases/2018/Nivel%20Ol%C3%ADmpico/Geometr%C3%ADa/Imixt.pdf

II) Chen, E. (11 de agosto de 2015). A guessing game: Mixtilinear incircles - Evan Chen. https://web.evanchen.cc/handouts/Mixt-GeoGuessr/Mixt-GeoGuessr.pdf

III) Cantú, T. (27 de septiembre 2023). Mixtilinear incircles of a Triangle. Wikipedia. https://en.wikipedia.org/wiki/Mixtilinear_incircles_of_a_triangle

IV) AOPS.