Moving Points I

Eric Ransom Treviño

Agosto 2023

1. Introducción

Moving points es un metódo de demostración para problemas de geometría. Existen tres metódos de moving points y esta lista corresponde al primero. Se analizarán las propiedades de puntos variables en cónicas o rectas y se revisarán transformaciones que preserven razón cruzada como podrían ser las rotaciones, traslaciones, homotecia, inversión, perspectivas, homografías, etc.

Estaremos trabajando en $\mathbb{RP}^2$ a lo largo de todo el documento, por lo que los puntos al ininito y la recta al ininito cumplen las mismas propiedades que cualquier otro punto y cualquier otra recta.

Definición 1.1 (Plano proyectivo real) — El plano proyectivo real $\mathbb{RP}^2$ es el plano real $\mathbb{R}^2$ incluyendo los puntos al infinito.

2. Razón Cruzada

Definición 2.1 (Razón cruzada en rectas) — Sean A, B, C y D puntos en una recta ℓ, entonces

$$(A, B; C, D) = \frac{AC}{CB} \Big/ \frac{AD}{DB}$$

Observación. La definición 2.1 contempla segmentos dirigidos.

Definición 2.2 (Razón cruzada en un haz de rectas) — Sea P un punto y sean a, b, c y d rectas que pasan por P. Sean A, B, C y D puntos arbitrarios en a, b, c y d respectivamente, entonces

$$P(A, B; C, D) = \frac{sin(\angle APC)}{sin(\angle CPB)} \Big/ \frac{sin(\angle APD)}{sin(\angle DPB)}$$

Definición 2.3 (Razón cruzada en cónicas) — Sean A, B, C, D y P puntos en una cónica Ω, entonces

$$(A, B; C, D)_\Omega = \frac{sin(\angle APC)}{sin(\angle CPB)} \Big/ \frac{sin(\angle APD)}{sin(\angle DPB)}$$

Observación. Las definiciones 2.2 y 2.3 contemplan ángulos dirigidos.

Observación. En la definición 2.3, para todo P en Ω se cumple que la razón es constante.

3. Mapeos Proyectivos

IMPORTANTE. Usaremos $\mathcal{C}_i$ como un conjunto, y sus elementos son todos los puntos que están en una recta, todos los puntos en una cónica o todas las rectas en un haz.

Definición 3.1 — Se define como mapeo proyectivo a una función $f : \mathcal{C}_1 \mapsto \mathcal{C}_2$ con las siguientes propiedades:

- Es biyectiva.
- Preserva razón cruzada.

Notemos que si existe f entonces existe f' inversa, además la composición de dos mapeos proyectivos f y g forman un nuevo mapeo proyectivo $h = f \circ g$. En los problemas de olimpiada constantemente hay transformaciones que preservan razón cruzada, y pueden pasan desapercibidas porque no nos familiarizamos con estas. Algunos ejemplos de mapeos proyectivos son:

- **(Perspectiva)** Dado $\mathcal{C}_1$ los puntos de una recta ℓ y $\mathcal{C}_2$ el haz de rectas que pasa por un punto P fuera de ℓ, para cada X en $\mathcal{C}_1$, $f(X) = PX$.
- **(Perspectiva)** Dado $\mathcal{C}_1$ los puntos de una cónica Ω y $\mathcal{C}_2$ el haz de rectas que pasa por un punto P en Ω, para cada X en $\mathcal{C}_1$, $f(X) = PX$.
- **(Rotación)** Dado $\mathcal{C}_1 = \mathcal{C}_2$ el haz de rectas que pasa por un punto P, para cada ℓ en $\mathcal{C}_1$ la rotamos un ángulo constante por P y se mapea a la recta resultante.
- **(Reflexión)** Dado $\mathcal{C}_1 = \mathcal{C}_2$ el haz de rectas que pasa por un punto P, para cada ℓ en $\mathcal{C}_1$ la reflejamos respecto a una recta fija que pasa por P y se mapea a la recta resultante.
- **(Inversión)** Dado $\mathcal{C}_1 = \mathcal{C}_2$ los puntos de una recta ℓ y O un punto en ℓ, para todo X en $\mathcal{C}_1$ sea X' tal que $OX \cdot OX' = c$ para $c \in \mathbb{R}$ constante, entonces $f(X) = X'$.
- **(Inversión)** Dado $\mathcal{C}_1$ los puntos de un círculo Ω y $P \notin \mathcal{C}_1$ un punto, al invertir respecto a P, cada punto de $\mathcal{C}_1$ se mapea a otro punto en un círculo $\mathcal{C}_2$.
- **(Semejanza)** Dado $\mathcal{C}_1$, si aplicamos cualquier **traslación**, **reflexión**, **rotación** u **homotecia**, se mapeará a algun conjunto $\mathcal{C}_2$ semejante a $\mathcal{C}_1$ y se preservará razón cruzada.
- **(Tangencias)** Dado $\mathcal{C}_1$ los puntos de una recta ℓ y $\mathcal{C}_2$ los puntos de una recta g. Sea Ω una cónica tangente a ℓ y g, para todo X en ℓ, $f(X)$ es tal que $Xf(X)$ es tangente a Ω.
- **(Homografías)** Las homografías son transformaciones que preservan rectas, haces de rectas, cónicas y razón cruzada. Cualquier transforamción de este estilo se conforma de un conjunto infinito de mapeos proyectivos.

La manera más útil de usar mapeos proyectivos es mediante composiciones de estos, combinar varias transformaciones que preserven razón cruzada nos da una cantidad enorme de posibilidades de ver mapeos proyectivos. Los siguientes dos teoremas son parte clave de la estrategia que se usará para el primer metódo de moving points.

Teorema 3.2

Dados $\mathcal{C}_1$ y $\mathcal{C}_2$, A, B y C elementos de $\mathcal{C}_1$, A', B' y C' elementos de $\mathcal{C}_2$. Existe un único mapeo proyectivo $f : \mathcal{C}_1 \mapsto \mathcal{C}_2$ tal que A se mapea a A', B a B' y C a C'.

Demostración. Notemos que basta con demostrarlo cuando $\mathcal{C}_1$ y $\mathcal{C}_2$ son puntos en rectas. Sea D un elemento de $\mathcal{C}_1$, por unicidad de razón cruzada, existe un único X que cumple $(A, B; C, D) = (A', B'; C', X) = \frac{A'C'}{C'B'} \Big/ \frac{A'X}{XB'}$ si A', B' y C' están fijos, la razón $\frac{A'X}{XB'}$ es distinta para cada X en $A'B'$. Entonces para todo D en $\mathcal{C}_1$, $f(D)$ siempre tiene un solo valor que preserve razón cruzada en $\mathcal{C}_2$. $\square$

Proposición 3.3

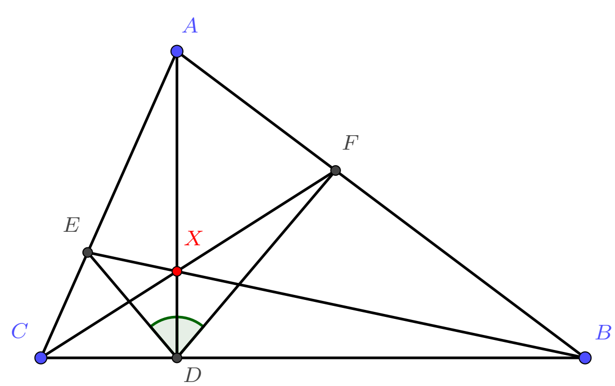
Sean $f : \mathcal{C}_1 \mapsto \mathcal{C}_2$ y $g : \mathcal{C}_1 \mapsto \mathcal{C}_2$ dos mapeos proyectivos. Dados A, B y C tres elementos distintos en $\mathcal{C}_1$, si $f(A) = g(A), f(B) = g(B)$ y $f(C) = g(C)$, entonces $f = g$.

Los problemas que se resuelven con el metódo de moving points a base de puramente mapeos proyectivos llevan un formato similar, el cual es definir dos mapeos f y g con mismo dominio y rango, y demostrar que son iguales al revisar que concurren en tres elementos distintos.

El siguiente ejemplo nos muestra un buen uso de una composición de perspectivas, además de la reflexión de un haz de rectas, pero sigue siendo una solución bastante elemental dado el verdadero poder del metódo de moving points a base de puramente mapeos proyectivos.

Ejemplo 3.4

Sea ABC un triángulo y D el pie de altura desde A. Sea X un punto en AD y sean E y F las intersecciones de AC con BX y AB con CX respectivamente. Demuestra que $\angle ADE = \angle ADF$.



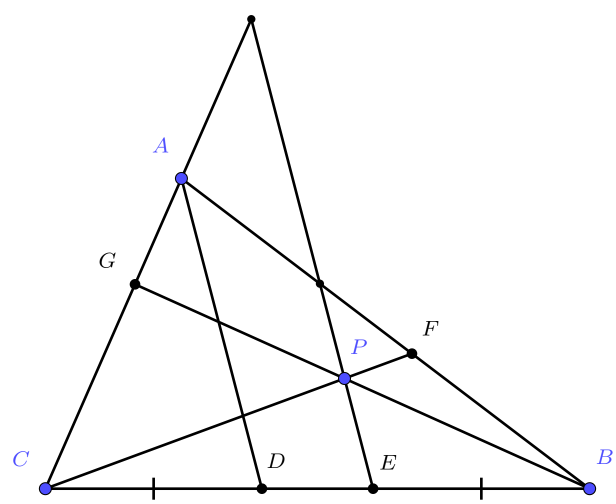
Demostración. Animemos E sobre AC. Sea $f : AC \mapsto AB$ un mapeo proyectivo tal que manda $E \in AC$ a $F \in AB$. El mapeo consiste en hacer una perspectiva con centro B que manda $E \mapsto BE \mapsto X$ y otra con centro C que manda $X \mapsto CX \mapsto F$. Sea $g : AC \mapsto AB$ otro mapeo proyectivo tal que manda $E \in AC$ a $F' \in AB$. Mi mapeo consiste hacer perspectiva con centro D que manda $E \mapsto DE$, luego una reflexión respecto a DA que manda $DE \mapsto DF'$ y luego otra perspectiva con centro D que manda $DF' \mapsto F'$. Por la proposición 3.3, basta con checar tres casos de E que cumplan que $f(E) = g(E)$:

- $f(C) = B$ al checar las perspectivas, y $g(C) = B$ porque $\angle ADC = \angle ADB = 90°$.
- $f(A) = A$ al checar las perspectivas, y $g(A) = A$ porque $\angle ADA = \angle ADA = 0°$.
- Es hecho conocido que cuando E es el pie de altura desde B y F el pie de altura desde C, $f(E) = F = g(E)$.

□

Ejemplo 3.5 (OMM 2005 P6)

Sea ABC un triángulo y AD la bisectriz de $\angle BAC$, con D sobre BC. Sea E un punto sobre el segmento BC tal que $BD = EC$. Por E traza ℓ la recta paralela a AD y considera un punto P sobre ℓ y dentro del triángulo. Sea G el punto donde la recta BP corta al lado AC y sea F el punto donde la recta CP corta al lado AB. Muestra que $BF = CG$.



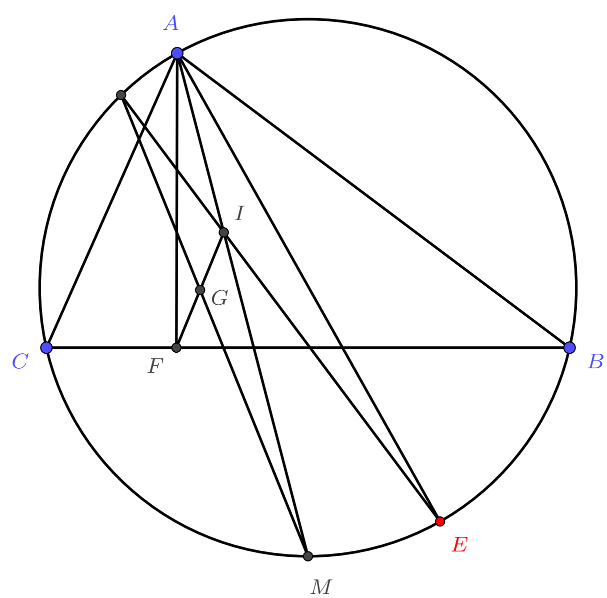
Demostración. Animemos F sobre AB. Sea $f : AB \mapsto AC$ un mapeo proyectivo que manda $F \in AB$ a $G \in AC$, esto claramente preserva razón cruzada dado que $F \mapsto CF = CP \mapsto P$ es perspectiva desde C, y $P \mapsto BP = BG \mapsto G$ es perspectiva desde B. Sea $g : AB \mapsto AC$ otro mapeo proyectivo que manda $F \in AB$ a $G' \in AC$, donde G' es el punto tal que $BF = CG'$ (donde F y G' están del mismo lado respecto a BC), esto preserva razón cruzada porque se preservan distancias. Por la proposición 3.3, basta con checar tres casos de F que cumplan $f(F) = g(F)$:

- $F = B$, es fácil dado que $f(F) = C = g(F)$ se cumple.
- $F = A$, se tiene $f(A) = CA \cap \ell$ por definición de las perspectivas. Como AD y $f(A)E$ son paralelas se tiene $\frac{CA}{Cf(A)} = \frac{CD}{CE} = \frac{CD}{DB}$ y por el teorema de la bisectriz $\frac{CD}{DB} = \frac{CA}{AB}$, al igualar fracciones se obtiene que $AB = Cf(A)$, entonces $f(A) = g(A)$.
- $F = AB \cap \ell$, es análogo al anterior ya que $f(F) = A$.

□

Ejemplo 3.6 (IMO 2010 P2)

Sea ABC un triángulo, con I su incentro y Γ su circuncírculo, AI interseca a Γ otra vez en M. Sea E un punto en el arco BMC y F un punto en el segmento BC tal que $\angle CAF = \angle BAE < \frac{1}{2}\angle BAC$. Si G es el punto medio de IF, prueba que EI y MG se intersecan en Γ.



Demostración. Animemos E sobre Γ. Sea $f : \Gamma \mapsto \Gamma$ un mapeo proyectivo tal que manda $E \in \Gamma$ a $E' \in \Gamma$. El mapeo consiste en hacer una inversión negativa desde I, en otras palabras E' es tal que está en Γ y E, I y E' son colineales. Sea $g : \Gamma \mapsto \Gamma$ otro mapeo proyectivo que manda $E \in \Gamma$ a $E'' \in \Gamma$. El mapeo consiste en enviar $E \mapsto AE \mapsto AF \mapsto F$ porque es una perspectiva desde A y luego reflexión respecto a AI, para luego enviar $F \mapsto G$ con una homotecia desde I, y finalizando con $G \mapsto MG \mapsto E''$ siendo una perspectiva desde M. Por la proposición 3.3, basta con checar tres casos de E que cumplan que $f(E) = g(E)$:

- $f(A) = M = g(A)$ porque las transformaciones se mantienen en la recta AI.
- $f(B) = M_b$ donde M_b es el punto medio del arco AC que no contiene a A. También $g(B) = M_b$ porque es hecho conocido que $MM_b \perp IC$ y $MG \perp IC$.
- $f(C) = g(C)$ es analogo al anterior.

□

4. Problemas

Problema 4.1 (Serbia Math Olympiad P1 2018)**.** *Sea ABC un triángulo con incentro I y sea D el punto de tangencia de su incírculo con BC. Sean X, Y puntos en el segmento BI, CI respectivamente, tal que $\angle BAC = 2\angle XAY$. Prueba que $\angle XDY = 90°$. .*

Problema 4.2. *Sea ABC un triángulo con circuncírculo Γ cuyo centro O. La tangente a Γ en A interseca a la recta BC en P. E es un punto arbitrario en la recta PO y D en BE es tal que $AD \perp AB$. Demuestra que $\angle EAB = \angle ACD$.*

Problema 4.3. *Sea ABC un triángulo, AD la mediana, X un punto arbitrario en AD, ω_B y ω_C los circuncirculos de AXB y AXC respectivamente. Sean ℓ_B y ℓ_C las tangentes a ω_B y ω_C por B y C respectivamente, y sea $Y = \ell_B \cap \ell_C$. Demuestra que Y está en la $A-$simediana del triángulo ABC.*

Problema 4.4 (Teorema de Jacobi)**.** *Sea ABC un triángulo y sean X, Y y Z puntos tal que (AY, AZ),(BZ, BX) y (CX, CY) son pares de rectas isogonales en ABC. Demuestra que AX, BY y CZ concurren.*

Problema 4.5 (USA TST 2019 P1)**.** *Sea ABC un triángulo y sean M y N los puntos medioa de AB y AC respectivamente. Sea X un punto tal que AX es tangente al circuncírculo de ABC. Sea ω_B el círculo que pasa por M y B tal que es tangente a MX, y sea γ_C el círculo que pasa por N y C tal que es tangente a NX. Prueba que γ_B y γ_C se intersecan en la recta BC.*

Problema 4.6 (IMO 2013 P4)**.** *Sea ABC un triángulo acutángulo con ortocentro H, y sea W un punto sobre el lado BC, estrictamente entre B y C. Los puntos M y N son los pies de las alturas trazadas desde B y C respectivamente. Se denota por ω_1 la circunferencia que pasa por los vértices del triángulo BWN, y por X el punto de ω_1 tal que WX es un diámetro de ω_1. Análogamente, se denota por ω_2 la circunferencia que pasa por los vértices del triángulo CWM, y por Y el punto de ω_2 tal que WY es un diámetro de ω_2. Demostrar que los puntos X, Y y H son colineales.*

Problema 4.7. *Sea AB el diametro de un círculo ω. ℓ es la recta tangente a ω en B. Sean C y D puntos en ℓ tal que B está entre C y D. E y F son las intersecciones de ω con AC y AD respectivamente, y G y H son las intersecciones de ω con CF y DE respectivamente. Prueba que $AH = AG$.*

Problema 4.8. *Sea ABC un triángulo con circuncírculo Ω, circuncentro O, incírculo γ e incentro I. Sea X un punto arbitrario en BC. La recta perpendicular a IX que pasa por I corta a la recta tangente a γ paralela a BC en Y. AY corta a Ω de nuevo en Z. Si T es el punto de tangencia del incírculo A-mixtilinear con Ω, prueba que X, Z y T son colineales.*

Problema 4.9. *Sean P y Q conjugados isogonales en un triángulo ABC cuyo circuncírculo es Ω. X está en BC tal que $QX \perp BC$. El círculo de diametro PA corta a Ω en $K \neq A$. AQ interseca Ω en $T \neq A$. Demuestra que K, Q y T son colineares.*

Problema 4.10. *Sea Ω u círculo con centro O y ℓ una línea. La recta perpendicular por O a ℓ interseca a Ω en A y B. Sean P_1 y P_2 dos puntos en Ω, y sea $X_1 = PA \cap \ell$, $X_2 = PB \cap \ell$, $Y_1 = QA \cap \ell$, y $Y_2 = QB \cap \ell$. Demuestra que los circuncírculos de AX_1Y_1 y AX_2Y_2 se intersecan en Ω.*

Problema 4.11. *En el triángulo ABC, el $\angle B$ es obtuso y $AB \neq BC$. Sea ω el circuncírculo del ABC y O su circuncentro. N es el punto medio del arco ABC. El circuncírculo de BON interseca a AC en puntos X y Y. Sean P y Q distintos de B las intersecciones de BX y BY con ω respectivamente. Demuestra que P, Q y la reflexión de N respecto a la recta AC son colineares.*

Problema 4.12. *Sea ABC un triángulo y P y Q conjugados isogonales. Puntos D, E y F son las intersecciones de las rectas AP, BP y CP con los lados BC, CA y AB respectivamente. Sea O el circuncentro de ABC. Sea X la intersección de la recta perpendicular a EF que pasa por A y OD. Demuestra que $QX \perp BC$.*

5. Bibliografía

I) Shen, E. (2 de diciembre de 2020). Nuclear geometry. http://ericshen.net/handouts/ZG-nuclear.pdf

II) Zveryk, V. (29 de julio de 2019). The Method of Moving Points. https://cdn.bc-pf.org/resources/math/geometry/bash/Vladyslav_Zveryk-The_Method_of_Moving_Points.pdf

III) Chroman, Z., Goel, G., Mudgal, A. (Noviembre 2019). The Method of Animation. https://services.artofproblemsolving.com/download.php?id=YXR0YWNobWVudHMvOS80L2MxYTVkYmU5MGRlZWRjNGExYzhkYmQxOTU3NWNhYTU4OGYxMDhhLnBkZg==rn=QW5pbWF0aW9uLnBkZg==